ӘОЖ 517.5

$l_{2,r}$ КЕҢІСТІГІНДЕ ЖАТАТЫН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БАР ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Ысрайыл Ақерке Әлішерқызы
a.israylova@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 1-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Мусабаева Г.К.

Бұл жұмыс Харди-Литтлвуд-Пэли секілді теңсіздіктерді дискретті Лоренц кеңістігінде зерттеуге арналды, яғни тригонометриялық функциялардың интегралы мен оның Фурье коэффциенттерінің арасындағы байланыс кеңінен зерттелді.

Анықтама 1 *(Дискретті Лебег кеңістігі)* $l_p = \left\{ a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty \right\}$, $1 \le p \le \infty$ жиынын дискретті Лебег кеңістігі деп атаймыз және оның нормасы төмендегідей анықталады:

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty$$

$p = \infty$ болған жағдайда,

$$l_\infty = \left\{ a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sup_{k \in N} |a_k| < \infty \right\}$$

$$\|a\|_{l_\infty} = \sup_{k \in N} |a_k|.$$

Анықтама 2 *(Дискретті Лоренц кеңістігі)*

$l_{p,q} = \left\{ a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} a_k^* \right)^q \frac{1}{k} < \infty \right\}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ жиынын дискретті Лоренц кеңістігі деп атаймыз. Оның нормасы төмендегідей анықталады:

$0 < q < \infty$ болған жағдайда,

$$\|a\|_{l_{p,q}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} a_k^* \right)^q \frac{1}{k}$$

$q = \infty$ болған жағдайда,

$$\|a\|_{l_{p,\infty}} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} a_k^*.$$

Теорема 1 (Бочкарев С.В.) [1]

Айталық, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – $[0,1]$ – де ортонормаланған комплекс мәнді функциялар жүйесі,

$$\|\varphi_n\|_\infty \le M,\ n = 1,2,\ldots,$$

және $f \in L_{2,r}$, $2 < r \le \infty$ берілсін, онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\sup_{n \in N} \frac{1}{|n|^{\frac{1}{2}} (\log(n+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}} \sum_{m=1}^{n} a_m^* \le C \|f\|_{L_{2,r}},$$

мұндағы $a_n - \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ жүйесі бойынша құрылған Фурье коэффициенті.

Келесі теоремада дискретті $l_{2,r}$ Лоренц кеңістігінде Бочкарев теоремасының күшейтілуінін аналогы алынды

Теорема 2 (Тлеуханова Н.Т., Мусабаева Г.К.) [2]

Әрбір $n \in \mathrm{N}$ үшін

$$G_n = \{A \subset [0,1] : A = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] : 1 \leqq m \leqq n\}$$

теңдігі орындалсын.

Кез келген $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{2,r}$, $2 < r < \infty$ тізбегі үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\sup_{A \subset G_n} \frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}} \log_2 (1+n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}} \left| \int_A f(x)dx \right| \leqq 20 \|a\|_{l_{2,r}}.$$

Бұл жұмыстың негізгі нәтижесі жоғарыдағы теореманың (Теорема 4) $\{\sin kx\}$ жүйесі үшін дәлелденуі. Негізгі теореманы дәлелдеу үшін қосымша үш леммаларды дәлелдеуге тура келеді.

Лемма 1

Егер q, r - параметрлері келесі $1 < q < 2 < r < \infty$ шарттарды қанағаттандырсын. $f \sim \sum_{k \in Z} a_k \sin kx$ функциясы мен $[0,1]$-сегментінен алынған кез келген A ақырлы жиыны үшін:

$$\frac{1}{|A|^{1/q}} \left| \int_A f(x)dx \right| \leqq 2 \left(\frac{q(r-2)}{r(2-q)} \right)^{\frac{1}{q'}\left(\frac{r-2}{r}\right)} \left(\frac{q}{q-1} \right)^{\left(\frac{1}{r}-1\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} \|a\|_{l_{q,r}}$$

теңсіздігі орындалады.

Лемма 2

Айталық, $2 < p < \infty, 2 < r < \infty$ параметрлері берілсін. $p' = \dfrac{p}{p-1}$ түйіндес параметр болсын және $A = \bigcup_{s=1}^{N} I_s$ берілсін, мұндағы $I_s = [a_s, b_s] \subset [0,1]$, онда $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$ функциясы үшін

$$\frac{1}{|A|^{1/p} N^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}} \left| \int_A f(x)dx \right| \leqq 3p^{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)} \left(\frac{r(p-2)}{p(r-2)} \right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{2-r}{r}\right)} \|a\|_{l_{p,r}}$$

теңсіздігі орындалады.

Лемма 3

Айталық, $2 < p < \infty$, $2 < r < \infty$ параметрлері берілсін және $A = \bigcup_{s=1}^{N} I_s$ болсын, мұндағы, $I_s -$ кесінді, онда $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$ функциясы үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\frac{1}{|A|^{1/2}}\left|\int_A f(x)dx\right| \leqq 5\left(\frac{2p(r-2)}{r(p-2)}\right)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{2}{r}\right)} p^{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)} N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|a\|_{l_{2,r}}.$$

Теорема 3

Натурал сандар жиынынан алынған кез келген n үшін G_n жиынын қарастырайық.

$$G_n = \{A \subset [0,1] : A = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] : 1 \leqq k \leqq n\},$$

онда $l_{2,r}$ кеңістігінен алынған кез келген $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі мен $f \sim \sum_{k \in Z} a_k \sin kx$ функциясы және $2 < r < \infty$ параметрі үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\sup_{A \subset G_n} \frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}} \log_2(1+n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}} \left|\int_A f(x)dx\right| \leqq 20\|a\|_{l_{2,r}}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бочкарев С.В. «Теорема Хаусдорфа - Юнга - Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства». Труды МИРАН, 1997, Т. 219, С.103-114.
2. Мусабаева Г.К., «О коэффициентах рядов Фурье по тригонометрическим системам в пространстве». Математические заметки. − 2013.-№94.-V6.- С.884–888.
3. Нурсултанов Е.Д. «О коэффициентах кратных рядов Фурье». изв.РАН, сер.матем.,2000.Т.64, №1. С.117-121.

UDC 51-7

A FRACTIONAL q-DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE FRACTIONAL q-DERIVATIVE

Shaimardanuly Yersinbek and Nariman Sarsenovich Tokmagambetov

nariman.tokmagambetov@gmail.com, enrshin_90@mail.ru

L. N. Gumilyev Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Supervisor – S. Shaimardan

Let $0 < q < 1$. Then the q-analogue differential operator $D_q f(x)$ is [1]:

$$D_q f(x) := \frac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)}.$$

and the q-derivatives $D_q^n(f(x))$ of higher order are defined inductively as follows:

$$D_q^0(f(x)) := f(x), \quad D_q^n(f(x)) := D_q\left(D_q^{n-1} f(x)\right), (n = 1,2,3,\dots)$$

The q-integral (or Jackson integral) $\int_a^b f(x) d_q x$ is defined by