

**ҚОЗҒАЛМАЛЫ ЖҮКТЕМЕНІҢ БУЫНДАР АРҚЫЛЫ ЖАЛҒАНҒАН  
РЕЛЬСТЕРГЕ ӘСЕРІ**

**Шаймардан Рауан**

shaymardan.rauan@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Механика-Математика факультетінің магистранты,  
Нұр-Сұлтан, Қазақстан  
Ғылыми жетекшісі- Ибраев А.Г

Буындар арқылы жалғанған рельстер бойымен қозғалып бара жатқан жүктеменің әсерінен оларда туындайтын тербелісті қарастырайық. Ондай қозғалыстың дифференциальды теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - k_E \sum_{j=1}^g \delta'_x(x - jL) \frac{\partial u(jL,t)}{\partial x} - \alpha \sum_{i=1}^m u(x_i,t) = -\frac{\tau_k}{EF} \delta(v_0 t - x). \quad (1)$$

Алғашқы шарттар:

$$t = 0; \quad u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Шекаралық шарттар:

$$x = 0; \quad \sigma = E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -\sigma_0 \delta(t). \quad (3)$$

Шінара дискреттеу [1,2] әдісін қолдана отырып (1) дифференциальды теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = & \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) [u(x_i, t_k) \delta(t - t_k) - \\ & - u(x_i, t_{k+1}) \delta(t - t_{k+1})] \delta(x - x_i) + \frac{1}{2} k_E \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \delta'_x(x - jL) \left[ \frac{\partial u(jL, t_k)}{\partial x} \delta(t - t_k) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial u(jL, t_{k+1})}{\partial x} \delta(t - t_{k+1}) \right] - \frac{\tau_k}{EF} \delta(v_0 t - x) \end{aligned} \quad (4)$$

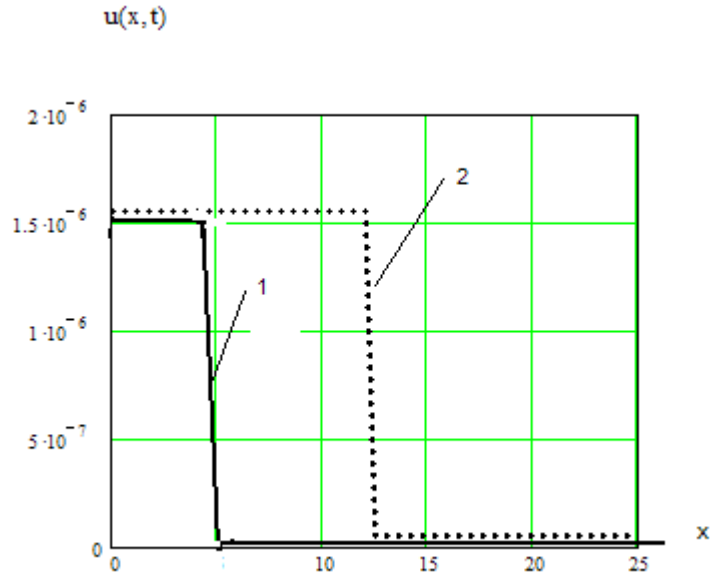
$x$  және  $t$  бойынша (2), (3), алғашқы және шекаралық шарттарды ескере отырып (4) теңді Лапластың қос түрлендіруін қолданып келесі түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned}
L_t[L_x[u(x,t)]] = & -\frac{\alpha a^2}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \frac{\exp(-x_i p)}{q^2 - (ap)^2} [u(x_i, t_k) \exp(-t_k q) - u(x_i, t_{k+1}) \exp(-t_{k+1} q)] - \\
& -\frac{a^2}{2} k_E \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \frac{1}{q^2 - (ap)^2} \left[ \frac{\partial u(jL, t_k)}{\partial x} p \cdot \exp(-jLp) \exp(-t_k q) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u(jL, t_{k+1})}{\partial x} p \cdot \exp(-jLp) \exp(-t_{k+1} q) \right] + \\
& + \frac{\tau_k a^2}{EF} \frac{q - v_0 p}{[q^2 - (v_0 p)^2][q^2 - (ap)^2]} + \frac{\sigma_0 a^2}{E} \frac{1}{q^2 - (ap)^2} \tag{5}
\end{aligned}$$

Екі рет  $L_t^{-1}$  және  $L_x^{-1}$  бойынша Лапластың кері түрлендірулерін қолданып (5) теңдеуден қойылған есептің шешімін аламыз:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & -\frac{\alpha a}{4} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \{u(x_i, t_k) \cdot H(t - t_k) [H(x + at - x_i - at_k) - H(x - at - x_i + at_k)] - \\
& - u(x_i, t_{k+1}) H(t - t_{k+1}) [H(x + at - x_i - at_{k+1}) - H(x - at - x_i + at_{k+1})]\} - \\
& -\frac{a}{4} k_E \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \left[ \frac{\partial u(jL, t_k)}{\partial x} [\delta(x + at - at_k - jL) - \delta(x - at + at_k + jL)] H(t - t_k) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u(jL, t_{k+1})}{\partial x} [\delta(x + at - at_{k+1} - jL) - \delta(x - at + at_{k+1} + jL)] H(t - t_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{\tau_k \cdot a^2}{2EF(a^2 - v_0^2)} \left[ \frac{a - v_0}{a} (x + at) H(x + at) + \frac{a + v_0}{a} (x - at) H(x - at) - 2(x - v_0 t) H(x - v_0 t) \right] + \\
& + \frac{\sigma_0 a}{2E} [H(x + at) - H(x - at)] \tag{6}
\end{aligned}$$

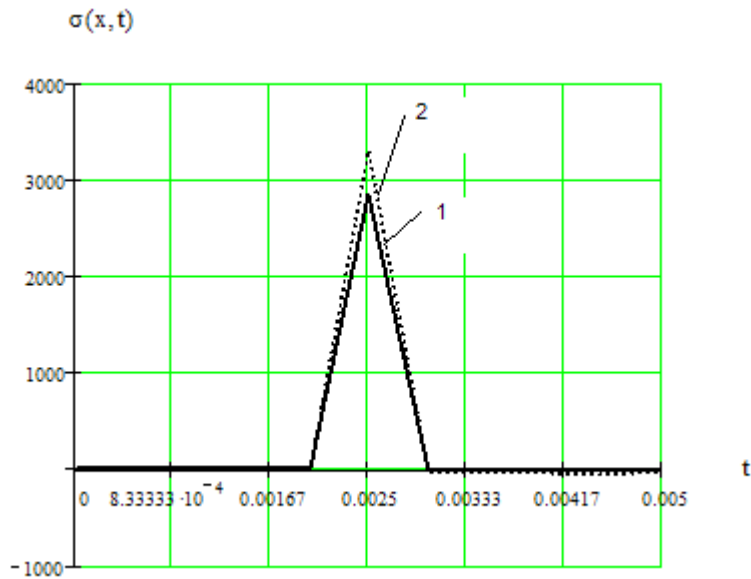
Рельстің көлденең қимасының жылжу графигінен (1- сурет) буынның серпімділік модулінің  $E_2$  мәнінің азаюы шпалдарда жатқан буындары бар рельстің көлденең қимасының орын ауыстыруына шамалы әсер ететінін көруге болады.



1 сурет - белгіленген уақыт мезетіне арналған рельстің көлденен қимасының орынын ауыстыру кестесі (1 – буының серпімділік модулы  $E_2$  үшін, 2- буының серпімділік модулы  $E_2/3$  үшін).

Рельстің көлденен қимасының бойлық кернеуін анықаймыз:

$$\begin{aligned}
 \sigma(x, t) = & -\frac{\alpha a}{4} E \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \{ f(x_i, t_k) H(t - t_k) [\delta(x + at - x_i - at_k) - \delta(x - at - x_i + at_k)] - \\
 & - f(x_i, t_{k+1}) H(t - t_{k+1}) [\delta(x + at - x_i - at_{k+1}) - \delta(x - at - x_i + at_{k+1})] \} - \\
 & - \frac{a}{4} k_E \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^n (t_k + t_{k+1}) \left[ \frac{\partial u(jL, t_k)}{\partial x} [\delta'_x(x + at - at_k - jL) - \delta'_x(x - at + at_k + jL)] H(t - t_k) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial u(jL, t_{k+1})}{\partial x} [\delta'_x(x + at - at_{k+1} - jL) - \delta'_x(x - at + at_{k+1} + jL)] H(t - t_{k+1}) \right] + \\
 & + \frac{\tau_k \cdot a^2}{2F(a^2 - v_0^2)} \left[ \frac{a - v_0}{a} H(x + at) + \frac{a + v_0}{a} H(x - at) - 2H(x - v_0 t) \right] + \\
 & + \frac{\sigma_0 a}{2} [\delta(x + at) - \delta(x - at)]
 \end{aligned} \tag{7}$$



2 сурет - белгіленген уақыт мезетіне арналған рельстің көлденең қимасының кернеу кестесі (1 – буының серпімділік модулы  $E_2$  үшін, 2- буының серпімділік модулы  $E_2/3$  үшін).

Рельстің көлденең қимасының кернеу графигінен (2- сурет) буындағы серпімділік модулі  $E_2$  мәнінің азаюы буындағы кернеудің артуына алып келгенін көруге болады

### Қолданылған әдебиттер тізімі

1. Тюреходжаев А.Н., Ибраев А.Г. Продольные колебания в рельсах под воздействием движущегося колеса //ТРУДЫ международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики, строительства и машиностроения». Том 3. Павлодар 2006, С.146-150.
2. Тюреходжаев А.Н., Ибраев А.Г. Метод частичной дискретизации волновых процессов рельса, лежащего на дискретном основании //Известия НАН РК , № 6, 2006г., С.16-19.
3. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: «Наука». 1965г. 716 с.