

мұндағы  $\delta_{ik}$  – Кронекер символы,  $\alpha_p = r'(ph)$  ( $p = 0, 1, \dots, 2N$ )–шамасы  $t_p = ph$  түйіндеріндегі реакцияның уақыт бойынша туындысы.  $b = \{b_i\}_{i=1}^N$  бағанының барлық компоненттері бірге тең болады, осының салдарынан негізгі (22) формуласы келесі қарапайым түрге келеді:

$$m(T) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i,k=1}^N \gamma_{ik}^{(-1)}, \quad (30)$$

яғни массаның шамасы  $\Gamma^{-1}$  матрицасының барлық элементтерінің суммасына сәйкес келеді. Алгоритмнің кіріс деректері болып  $T, N$  параметрлері және  $r(+0), r'(+0), r'(h), r'(2h), \dots, r'(2T)$  реакцияларымен байланысты сандар жиыны болып табылады.

### Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. М. И. Белишев, Т. Л. Шеронова, Методы теории граничного управления в нестационарной обратной задаче для неоднородной струны, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1990, том 186, 37–49
2. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1971, т.115, с.28-38.
3. Белишев М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. Докл.АН СССР, 1987, т.297, № 3, с.524-527.  
УДК 519.652

### АППРОКСИМАЦИЯ РЕЛЬЕФА ОБЪЕКТА «КОСАЯ ГОРА» МЕТОДОМ RBF

Ракишева Д.С., Даукен С.Д.  
dilya784@mail.ru, sabina.dn@mail.ru

докторант, магистрант

ЕНУ имени Л.Н.Гумилева

г. Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – Муканова Б.Г.

**Аннотация.** В работе описывается реализация метода радиально базисных функций для аппроксимации 2D рельефа. Также аппроксимируется рельеф, полученный во время научной стажировки докторанта, на полигоне отделения геофизики геологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, расположенном в д. Александровка Юхоновского района Калужской области, объекта «Косая гора». Во время стажировки была проведена электрическая томография на Косой горе, один рельеф был пройден с косами, где между электродами пять метров и метр. Полученный рельеф аппроксимирован методом RBF (радиальные базисные функции) и сравнены результаты аппроксимирования.

**Ключевые слова:** электротомография, электроразведка, рельеф, RBF (радиальные базисные функции).

## 1 Введение

Электротомография одна из важнейших отраслей электроразведки, применяемой в работе геофизиков для определения подземных залежей, исторически важных объектов, мониторинга дамб и плотин и т.д [1]-[9].

Параметры рельефа определяются шагом по профилю (расстояние между электродами) и высотами питающих и приемных электродов, расположенных вдоль исследуемого профиля, измеренными в полевых условиях. Эти данные необходимо аппроксимировать, чтобы функция была гладкая. Как показано в работе [10], наличие изломов поверхности ведет к появлению паразитных нефизических аномалий на кривых зондирования, что крайне нежелательно для дальнейшей интерпретации. С помощью полученной кривой мы решаем задачу методом интегральных уравнений [11]-[12].

Для аппроксимации мы используем метод RBF [13]-[17]. В этой работе мы аппроксимировали реальный рельеф, полученный во время стажировки на базе практик МГУ им. М.В. Ломоносова, расположенного в д. Александровка Юхоновского района Калужской области, именуемого как объект «Косая гора». По одному и тому же профилю проводилась электротомография косами сперва между электродами пять метров и метр. Аппроксимировав данные, мы определили какие функции аппроксимирования разглаживают полученные данные и провели анализ.

## 2 Алгоритм

Для заданного набора  $n$  точек и  $\{x_i\}_{i=1}^n$  соответствующих значений  $\{f_i\}_{i=1}^n$  выбирается набор базисных функций  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$  таким образом, что линейная комбинация этих функций удовлетворяет условиям интерполяции. Искомая функция  $f(x)$  ищется в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x), \quad (1)$$

Условия интерполяции приводят к системе линейных уравнений, определяющей коэффициенты  $\lambda_i$ .

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|x - x_i|),$$

где  $\phi(r), r \geq 0$ , функция одной переменной, зависящая только от расстояния между точками  $x$  и  $x_i$ . В качестве радиальной функции  $\phi(r)$  могут быть использованы следующие функции:

- гауссиан  $\exp(-\varepsilon^2 r^2)$
- обратная к квадратичной  $(1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$
- обратная к корню из квадратичной  $(1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$
- пропорциональная корню из квадратичной  $(1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$
- линейная  $r$
- кубическая  $r^3$
- функция  $r^2 \ln(r)$

Коэффициенты  $\lambda_i$  определяются из интерполяционных условий (1), которые приводят к системе линейных уравнений с симметричной матрицей:

$$A\lambda = f, \tag{2}$$

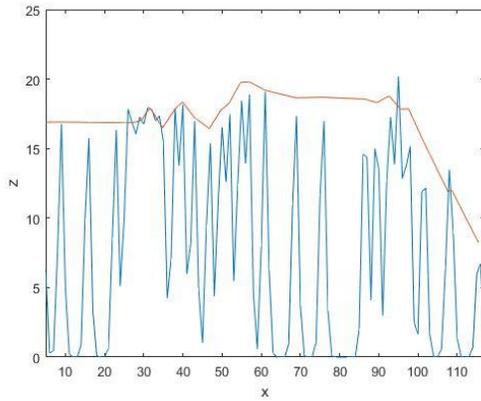
где элементы матрицы  $A$  задаются в виде:

$$A_{i,j} = \phi(|x_i - x_j|).$$

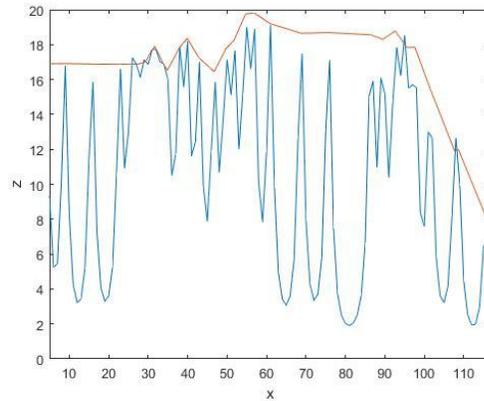
### 3 Реализация

Программа и визуализация исполнена на Matlab. В программу вводятся данные рельефа, расстояние между электродами и их высота и выбираются один из семи интерполирующих функций. На косе число электродов 35, расстояние между электродами 5 метров.

На рисунке 1 показаны интерполирующие функции а) гауссиан  $\varphi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$  и б) обратная к квадратичной  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$ . Функции интерполяции были наложены на реальный рельеф, где красной линией показан рельеф, а синей интерполяция.



a)



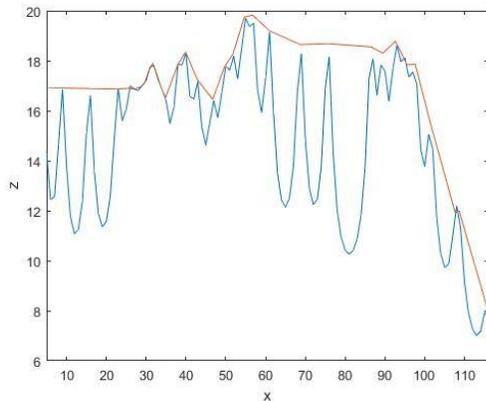
b)

Рисунок 1. Интерполирующие функции.

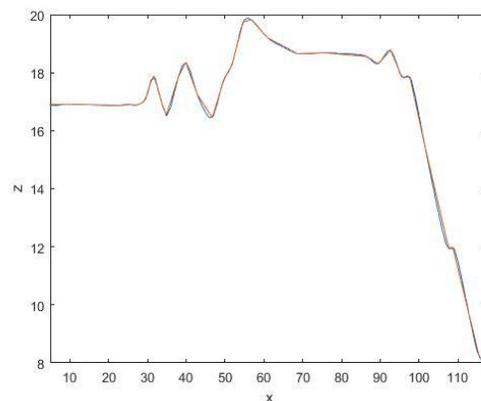
Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

a) гауссиан  $\varphi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$  и b) обратная к квадратичной  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$

На рисунке 2, показаны интерполирующие функции: a) обратная к корню из квадратичной  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$  и b) пропорциональная корню из квадратичной  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ .



a)



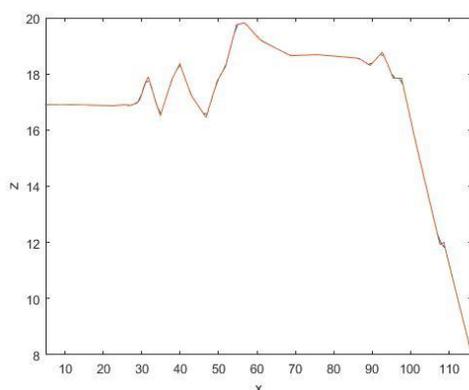
b)

Рисунок 2. Интерполирующие функции.

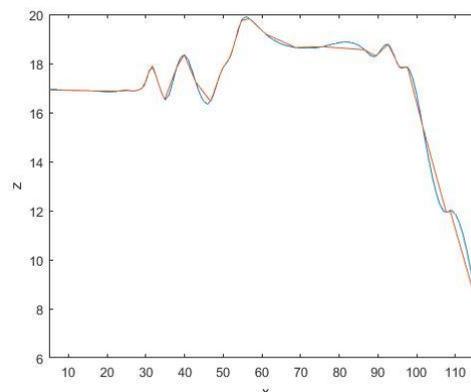
Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

$$\text{a) } \varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ и б) } \varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$$

На рисунке 3, показаны интерполирующие функции а) линейная  $\varphi(r) = r$  и б) кубическая  $\varphi(r) = r^3$ .



а)



б)

Рисунок 3. Интерполирующие функции.

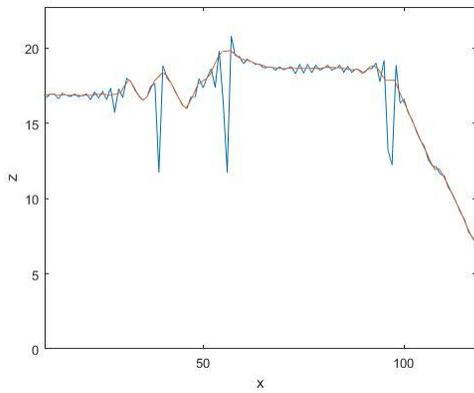
Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

$$\text{а) } \varphi(r) = r \text{ и б) } \varphi(r) = r^3$$

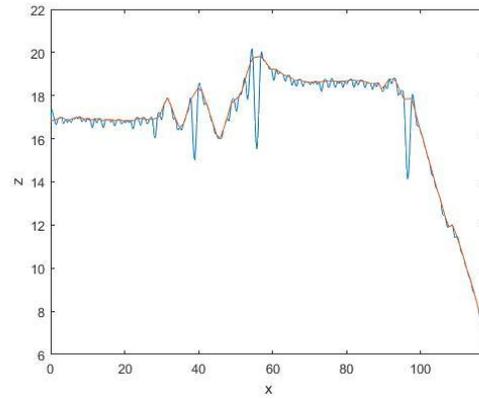
Анализируя данные можно сказать, что аппроксимирующие функции, как  $\varphi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$ ,  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$  и  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$  дают большие осцилляции и не справились с задачей, а функции:  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\varphi(r) = r$  и  $\varphi(r) = r^3$  отлично подходят для интерполирования данной функции на 0,05, 0,02 и 0,09 процентов соответственно. Седьмая функция не сработала из-за сингулярной матрицы.

Следующий тест исполнен для косы у которой меж электродами метр. На косе число электродов 117, расстояние между электродами метр.

На рисунке 4 показаны интерполирующие функции а) гауссиан и б) обратная к квадратичной.



a)

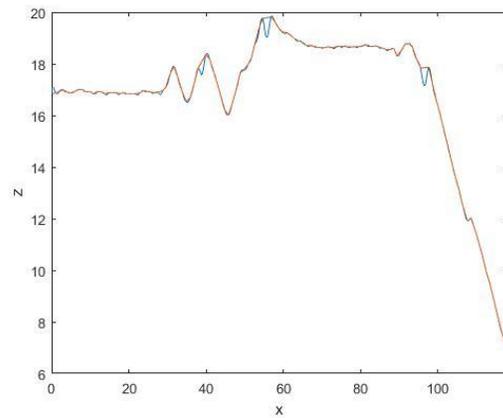


b)

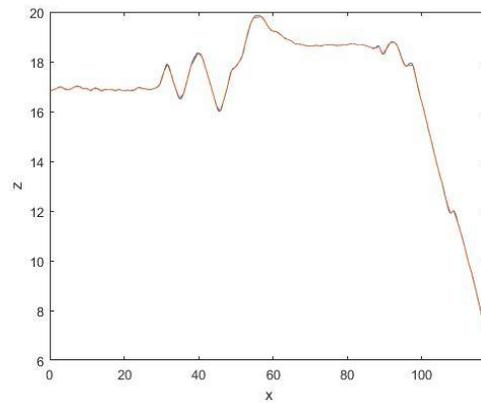
Рисунок 4. Интерполирующие функции.

Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

a)  $\varphi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$  и b)  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$



a)



b)

Рисунок 5: Интерполирующие функции.

Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

$\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$  и  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{7}}$

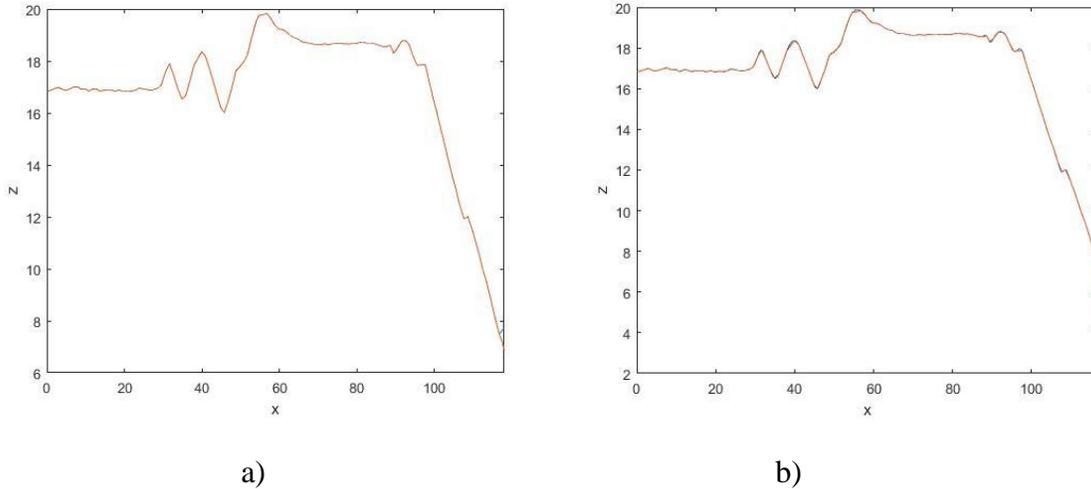


Рисунок 6: Интерполирующие функции.

Красная линия – рельеф объекта «Косая гора», синяя – интерполяция функций

a)  $\varphi(r) = r$  и b)  $\varphi(r) = r^3$

Аппроксимирующие функции  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\varphi(r) = r$  и  $\varphi(r) = r^3$  отлично подходят для интерполирования данной функции на 0,03, 0,02, 0,01 и 0,02 процентов соответственно, чем функции  $\varphi(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2)$ ,  $\varphi(r) = (1 + \varepsilon^2 r^2)^{-1}$ . Они дали осцилляций больше и не справились с задачей. Седьмая функция так же не сработала из-за сингулярной матрицы.

#### 4 Заключение

Анализируя данные графики мы определили какие из функций хорошо справляются с аппроксимацией, а какие нет. Исследовав графики можно заметить, что данные с редкими переменными дают больше осцилляций, чем с часто расположенными электродами.

#### Список использованных литератур

1. Sjö Dahl P., Dahlin T., Johansson S., Loke M.H. «Resistivity monitoring for leakage and internal erosion detection at Hällby embankment dam»/Journal of Applied Geophysics 65 (2008) 155–164

2. Sjö Dahl P., Dahlin T., Johansson S. « Embankment dam seepage evaluation from resistivity monitoring data »/ Near Surface Geophysics, 2009, 463-474
3. Chih-Ping Lin, Yin-Chun Hung, Po-Lin Wu, Zen-Hung Yu «Performance of 2-D ERT in Investigation of Abnormal Seepage: A Case Study at the Hsin-Shan Earth Dam in Taiwan»/Journal of Environmental and Engineering Geophysics 2017 p:101-112
4. In-Ky Cho, Ik-Soo Ha , Ki-Seog Kim , Hee-Yoon Ahn , Seunghee Lee, Hye-Jin Kang «3D effects on 2D resistivity monitoring in earth-fill dams»/ Near Surface Geophysics, 2014, 12, 73-81
5. Bolève A., Revil A., Janod F., Mattiuzzo J.L. and Fry J.-J. «Preferential fluid flow pathways in embankment dams imaged by self-potential tomography»/ Near Surface Geophysics, 2009, 447-462
6. Zerkal Evgeny «Interpretation of electrical resistivity tomography monitoring data of the Boguchan hydroelectric power plant rockfill dam»/ Proceedings of the 12th SEGJ International Symposium, 2015
7. Шевнин В.А., Бобачев А.А., Иванова С.В. «Результаты применения методов естественного поля и электротомографии для изучения Александровского городища (Калужская область)»/ Записки Горного института. Т.211 Санкт-Петербург 2015 р 35-42
8. Большаков Д.К., Козлов О.В., Модин И.Н. Возможности электротомографии для мониторинга фильтрационных процессов в теле каменно-набросной плотины во время наполнения водохранилища. VIII международная научно-практическая конференция и выставка "Инженерная геофизика - 2012", Москва, Россия, 2012. (83 у ДКБ)
9. Павлова А. М. «Применение малоглубинной электроразведки для изучения трехмерно неоднородных сред»/ Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Москва – 2014
10. Чантуришвили Л.С. О количественном учете влияния рельефа для некоторых случаев разведки постоянным током // Труды Института геофизики. – Тбилиси, 1955. – Т. 14. – С. 199-209.
11. Mukanova V., Modin I., The Boundary Element Method in Geophysical Survey, t: 4, 2017 , Springer
12. Balgaisha Mukanova, Tolkyn Mirgalykyzy and Dilyara Rakisheva Modelling the Influence of Ground Surface Relief on Electric Sounding Curves Using the Integral Equations Method//Mathematical Problems in Engineering.-Volume 2017.
13. Ракишева Д.С., Миргаликызы Т., Муканова Б.Г. **Аппроксимация поверхности рельефа дневной поверхности методом RBF // Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан. Volume 1, Number 365.-С.210-215, Published 2017**
14. Grady B. Wright. Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments. Doctoral Dissertation.//University of Colorado at Boulder Boulder, CO, USA. - 2003. - 155 p.
15. Nail A. Gumerov and Ramani Duraiswami. Fast radial basis function interpolation via preconditioned Krylov iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 29, No. 5, 2008. P.1876-1899.
16. Xin Yin, Weiwei Xu, Ryo Akama and Hiromi T.Tanaka A Synthesis of 3-D Kabuki Face from Ancient 2-D Images Using Multilevel Radial Basis Function. P.14-21
17. Mongillo M. Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods. - October 25, 2011. – P.190-209.