УДК 512.56, 512.57

РЕШЕТКИ АФП НА ПРИМЕРЕ ТЕМПЕРАМЕНТОВ ШКОЛЬНИКОВ

С.Б. Сарбатыр, А.Т. Шойбасов
samal.sarbatyr@mail.ru, askarbek95@mail.ru
Студент 5В0101900, магистрант 6М060100
(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан)
Научный руководитель- А.О. Башеева

В данной статье рассмотрена прикладная область теории решеток – анализ формальных понятий. На основе формального контекста строится решетка понятий, рассматривается вид решетки в зависимости от типа контекста. В работе представлено использование анализа формальных понятий для построения решеток понятий, отражающих структуру темпераментов школьника по интересам и успеваемостям.

Введение

Многие математические теории могут быть сформулированы в теоретико-решеточных понятиях и систематическое использование этих понятий унифицирует и упрощает рассматриваемые теории. Так, например, в теории анализа формальных понятий (АФП), основным средством визуализации зависимостей объектов и признаков является диаграмма, которая представляет собой решетку формальных понятий. АФП (Formal Concept Analysis, FCA), был предложен Вилле (Wille) в 1981 году. Методы АФП востребованы и активно развиваются сегодня. Создание матрицы от зависимости объектов и признаков в теории анализа формальных понятий. Применение теоретических и практических методов анализа формальных понятий. Преимуществом данных методов является наглядное и удобное для изучения представление результатов в виде решеток.

На первый взгляд, кажется, что человек, имея доступ в Интернет, может легко и быстро найти в нем нужную информацию практически из любой области знаний. Но, зачастую, это оказывается не так. Человек тратит много времени и сил на поиск необходимых сведений и даже найдя их не может проанализировать. Поэтому есть возможность представления данных в виде решеток формальных понятий, которые помогут многим получить нужную им информацию в виде диаграмм (решеток), удобную для чтения. Визуальное представление каждому дает возможность наглядно представить информацию и часто позволяет с первого взгляда выявить закономерности, которые иначе можно получить только с помощью трудоемкого анализа. В связи с этим одной из задач анализа формальных понятий является представление данных в виде, удобном для визуализации конечным пользователям.

Отметим, что АФП – прикладная ветвь алгебраической теории решеток. Основная математическая идея АФП – возможность построения полной решетки по любому бинарному отношению и формализация описания понятия в виде пары (объем, содержание). FCA применяется для анализа качественной информации. Данные представляются с помощью формального контекста – таблицы, строкам которой соответствуют объекты, столбцам – атрибуты.

Дадим основные определения теории решеток и анализа формальных понятий.

Определение1. Непустое множество P с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$ на этом множестве называется решеткой, если выполняются следующие тождества для любых $a, b, c \in P$:

L1: (a) $x \vee y \approx y \vee x$
(b) $x \wedge y \approx y \wedge x$ (коммутативность)

L2: (a) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$
(b) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность)

L3: (a) $x \vee x \approx x$
(b) $x \wedge x \approx x$ (идемпотентость)

L3: (a) $x \approx x \vee (x \wedge y)$
(b) $x \approx x \wedge (x \vee y)$ (закон поглощения).

Определение2. Бинарное отнешение $\leq$ определенный в множестве A является частичным порядком на множестве A, если в A выполняются следующие условия:

I. $a \leq a$ (рефлексивность)
II. $a \leq b$ и $b \leq c$ подразумевает $a = b$ (антисимметричность)
III. $a \leq b$ и $b \leq c$ подразумевает $a \leq c$ (транзитивность).

Определение3. Формальный контекст $K = (G, M, I)$ состоит из двух множеств G и M, и отношения $I \subseteq G \times M$ между этими множествами. Элементы множества G называются (формальными) объектами, а элементы множества M (формальными) атрибутами понятия. Отношение $I \subseteq G \times M$ интерпретируется следующим образом: для $g \in G, m \in M$ имеет место gIm или $(g, m) \in I$.

Определение4. Для множества $A \subseteq G$ объектов определим

$$A' = \{m \in M / gIm \text{ для всех } g \in A\}.$$

Соответственно для множества B атрибутов определим

$$B' = \{g \in G / gIm \text{ для всех } m \in B\}.$$

Другими словами, A' - множество атрибутов, которыми обладают все признаки из множества A, а B' - множество объектов, которые обладают всеми атрибутами из множества B.

Не трудно заметить, что оператор A является оператором замыкания на множестве объектов и на множестве атрибутов, т.е. для произвольного C имеет место следующие соотношения:

$A \subseteq A''$ (экстенсивность)
$A'''' \subseteq A''$ (идемпотентность)
если $A \subseteq C$, то $A'' \subseteq C''$ (изотонность).

Множество А называется ***замкнутым***, если $A'' \subseteq A$.

Определение5. ***Формальным понятием*** контекста $K = (G, M, I)$ называется пара вида (A, B), где $A \subseteq G, B \subseteq M, A' = B$ и $B' = A$. Множество A называется ***объемом*** понятия (A, B), а множество B его ***содержанием***. Запись $B(G, M, I)$ означает все множество всех формальных понятий контекста $K = (G, M, I)$.

Определение6. Для двух формальных понятий (A_1, B_1) и (A_2, B_2) некоторого контекста, (A_1, B_1) называется ***подпонятием*** (A_2, B_2), если $A_1 \subseteq A_2$ (эквивалентно $B_1 \supseteq B_2$). В этом случае (A_2, B_2) является ***надпонятием*** (A_1, B_1), и это обозначают как $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Множество всех понятий контекста (G, M, I), упорядоченных по вложению объемов, обозначается $\bar{B}(G, M, I)$ и называется ***решеткой понятий.***

Множество понятий контекста K образуют решетку формальных понятий $\bar{B}(K)$, так как создают частичный порядок по вложению объемов понятий и всегда имеют наименьшее и наибольшее по вложению понятия.

Построим решетку формальных понятий на основе класса где мы проходили практику.

Пример решетки формальных понятий о темпераментов школьников

Школьники во время урока разные. Один дисциплинирован на уроках, кто-то даже не обращает внимание, а другой ищет ручку или роняет карандаш. И одна из причин который обьясняет тем, что каждый человек имеет разный темперамент. Давайте рассмотрим темпераменты школьников.

Для анализа видов темпераментов. В нашем случае обьекты это темпераменты, а атрибуты 19 свойств которыми обладают ученики.

	Творчество 10-20%	Творчество 30- 40%	Творчество 40-50%	Музыка 20-30%	Музыка 30- 40%	Язык 40-50%	Язык 50-60%	Спорт 50-60%	Спорт 60-70%	(=3) 0-10%	(=3) 10-20%	(> 3) 40-50%	(> 3) 50-60%	(= 4) 0-10%	(= 4) 10-20%	(> 4) 20-30%	(> 4) 30- 40%	(> 4) 40-50%	(=5) 0-10%
Холерик			x	x		x		x		x		x			x		x		x
Флегматик	x			x			x		x		x	x			x	x			x
Сангвиник		x			x		x		x	x			x	x				x	x
Меланхолик		x			x		x	x		x		x		x			x		x

По верхней горизонтали расположены атрибуты (признаки), по левой вертикали – объекты. Если объект холерик обладает признаком творчество 40-50%, то клетка их пересечения помечена крестиком, в противном случае остается пустой.

Как было показано в [2], подмножества произвольного множества, замкнутые относительно заданной на нем операции замыкания образуют полную решетку. Для конечных множеств множество всех понятий формального контекста K образует полную решетку со следующими операциями $\wedge$ (инфимума) и $\vee$ (супремума):

$$\bigwedge_{j\in J}(A_j,B_j)=\left(\bigcap_{j\in J}A_j\,,\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)'\right),$$

$$\bigvee_{j\in J}(A_j,B_j)=\left(\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)'\,,\bigcap_{j\in J}B_j\right).$$

Для построения решетки мы использовали программное средство Concept Explorer.

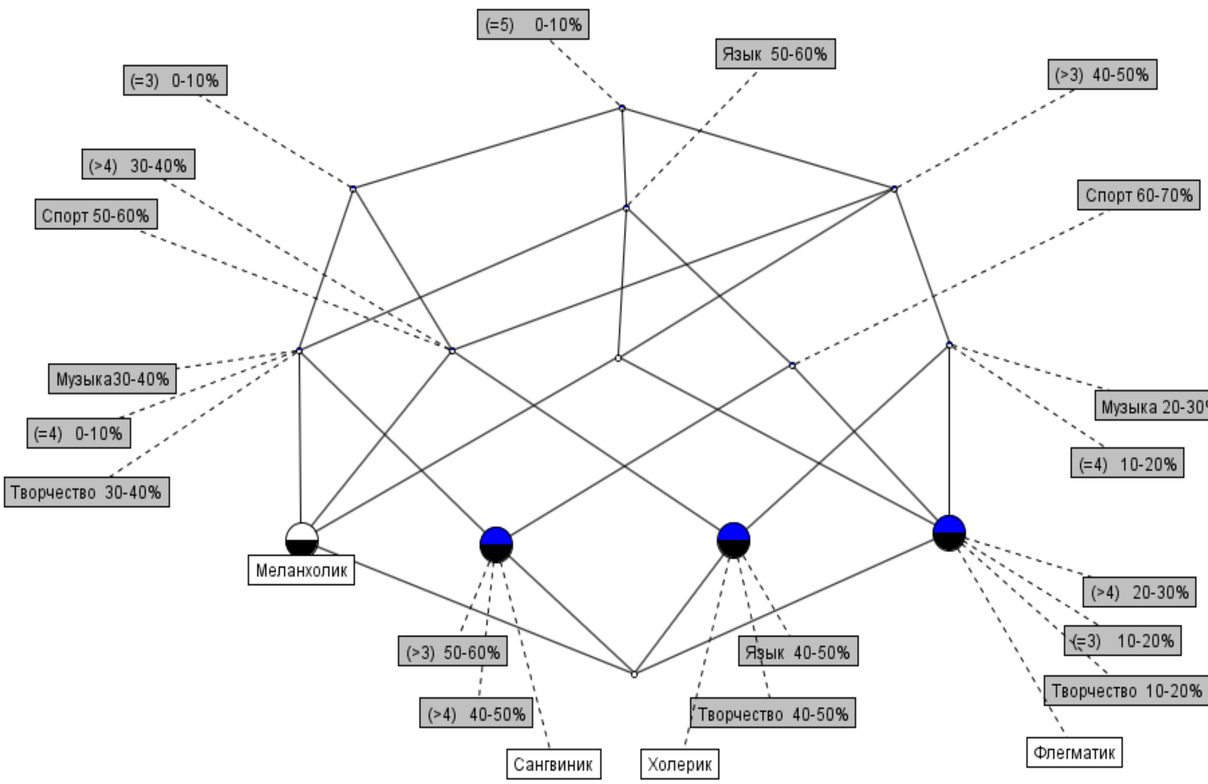

Рис.2. Решетка формальных понятии темперамента школьников

Как читается эта решетка? Каждая вершина решетки – формальное понятие. Рядом с понятием пишутся объекты, которых нет в менее общих понятиях (находящихся под данным понятием), и признаки, которых нет в более общих понятиях. Тогда объем формального понятия – все объекты, написанные напротив данного понятия и всех понятий, менее общих, чем оно. Содержание – признаки, написанные напротив данного понятия и более общих понятий.

Находятся такие формальные понятия алгоритмом «замыканий по одному». Функция начинает работать с самого общего формального понятия, которое содержит все объекты и чаще всего ни одного признака. Затем находятся все остальные понятия рекурсивным добавлением признаков.

Но использовать всю решетку формальных понятий не всегда удобно из-за ее громоздкости. Количество формальных понятий экспоненциально зависит от размера матрицы.

Когда решетка громоздкая, многие формальные понятия не несут практически никакой информации. Поэтому рационально пренебречь малозначимыми формальными понятиями для получения более простой решетки.

Если из матрицы убрать атрибуты, то понятно что решетка будет другая. Давайте посмотрим, если убрать атрибуты успеваемости, то получиться такая решетка. (Рис.3)

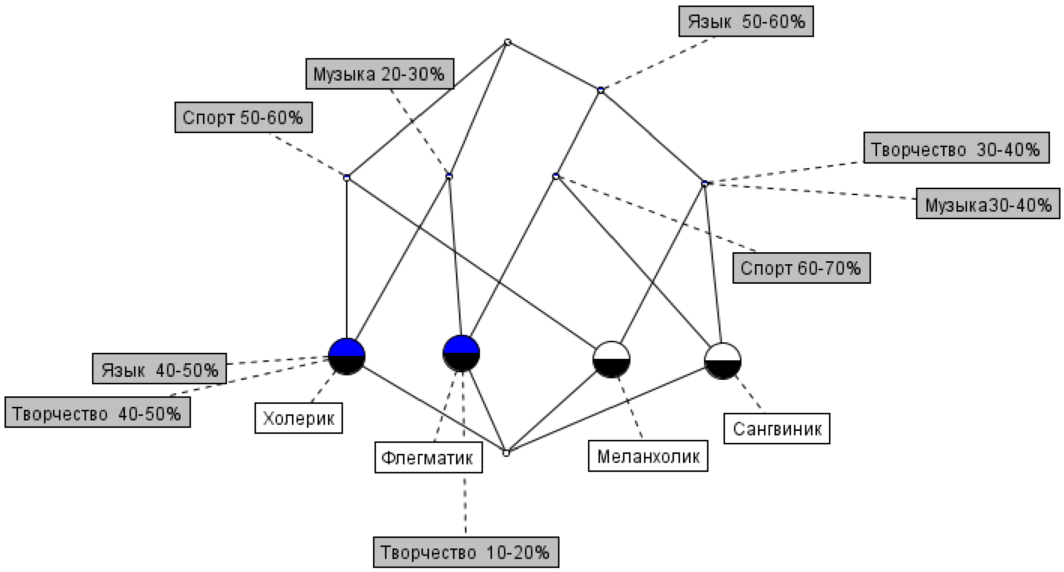

Рис. 3. Решетка формальных понятии темперамента школьников и интересов.

Выводы

В данной работе мы демонстрировали применени методов формального анализа понятий к данным, полученным во время практики, В качестве результата получена решетка для темперамента школьников при интересах и успеваемостях.

В отличие от статистических методов, формальный анализ понятий позволяет строить структуры интересов и успеваемость школьников определяя в виде решеток формальных понятий, что дает возможность наглядно показать всю структуру интересов. Но использовать всю решетку формальных понятий не всегда удобно из-за ее громоздкости. Количество формальных понятий экспоненциально зависит от размера матрицы.

Ввиду ограниченного объема статьи мы описали только часть результатов, значительная доля которых является интерпретацией полученных диаграмм порядка.

Список использованных источников

1. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis// Mathematical Foundations. – Berlin: Springer, 1999.
2. Burris S. and Sankappanavar H.P. A course in Universal Algebra, The Millenium Edition, Available at http: //www.math.uwaterloo.ca/
3. G. Birkhoff, *Теория решёток*, М.: Наука, 1984. 380 с.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток:Пер. с англ. Под редакцией Смирнова Д.М. – М.: МИР, 1981 – 456с.