7. Маркова, В. И. Негізгі мектептің математика курсында комбинаторика, статистика және ықтималдықтар теориясы элементтері [Мәтін]: әдістемелік құрал / В. И. Маркова. – Киров: Изд-во Киров ИНСТИТУТ, 2004. – 58 б.
8. Матальский, М. А. мысалдар мен есептердегі Ықтималдықтар теориясы [Мәтін]: оқу құралы / М. А. Матальский, Т. В. Романюк. – Гордно: ГрГУ – 2002. – 248 б.
9. Мордкович, А. Г. Оқиғалар. Ықтималдықтар. [Мәтін]: жалпы білім беру мекемелерінің 7-9 сынып алгебра курсының қосымша параграфтары / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2003. – 46 б.
10 Мостеллер, Ф. шешімдері бар елу қызықты ықтималдық есептер [Мәтін] / Ф. Мостеллер. – М.: Ғылым, 1975. – 112 Б.

УДК 378

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

[1]Исмаилов Элдар Умирзакович
[2]Малыхина Наталья Геннадиевна
[1]eldar.20151513@gmail.com, [2]nata230407@mail.ru
Магистранты 1 курса специальности «6М010900-Математика»
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Аннотация: в статье рассматривается, методика решений цепных дробей при решении олимпиадных задач по математике.

Ключевые слова: цепные дроби, олимпиадная задача по математике, решение задач.

В последние годы в Республике Казахстан большой популярностью пользуется математическое олимпиадное движение. Почти в каждой школе на протяжении всего времени обучения проводятся отборочные туры различных очных и заочных олимпиад по математике, начиная от школьного, городского, республиканского уровня, заканчивая международным. Олимпиадные задачи носят нестандартный характер и требуют от ученика должных знаний по школьной программе, логического мышления и творческого подхода. С каждым годом олимпиадные задачи более разнообразны. Для решения некоторых заданий недостаточно знаний, которые ученик получает во время учебного процесса, необходима и дополнительная информация.

В данной статье рассмотрим, как использование цепных дробей позволяет привести более быстрое и оригинальное решение олимпиадных задач по математике, а также повысить познавательный интерес к математике. Действительные числа однозначно отображаются цепными дробями. Основное значение такого изображения заключается в том, что, зная цепную дробь, изображающую действительное число, можно определить это число с достаточной точностью. Цепные дроби имеют преимущество перед систематическими. Систематическая дробь связана с определенной системой счисления и потому отражает в себе в большей степени взаимоотношения изображаемого числа именно с этой выбранной системой счисления. Цепные же дроби не связаны ни с какой системой счисления и в чистом виде воспроизводят свойства изображаемых чисел (например, рациональность или иррациональность числа). Цепные дроби очень удобно применять к решению диофантовых уравнений вида $ax + by = c$. Главная трудность, с которой сталкиваются ученики при решении таких уравнений, состоит в том,

чтобы найти какое-нибудь его частное целочисленное решение. С помощью цепных дробей можно легко найти алгоритм для его отыскания. Они дают огромное преимущество в точности при приближённом вычислении логарифмов чисел, нахождении корней квадратных уравнений. Также они помогают выстраивать алгоритмы для вычисления корней алгебраических уравнений произвольной степени. Кроме того, бесконечные цепные дроби можно использовать при решении трансцендентных и алгебраических уравнений, а также для быстрого вычисления значений некоторых функций.
Мы привыкли к тому, что при записи чисел используем десятичное представление. Но здесь появляется проблема: многие числа не имеют конечного представления в этой системе. Например, число 2/3 нельзя представить, таким образом, только в виде бесконечной последовательности 0,6666… причем, число 10 выбрано произвольным образом.

Цепные дроби помогают исследовать числовые последовательности, решать уравнения, анализировать алгоритмы. Эта математическая структура уходит своими корнями в древность.
Современное обозначение непрерывных дробей предложил нидерландский ученый Христиан Гюйгенс, он вынужден был обратиться к цепным дробям при построении планетария в Париже. Необходимо было получить наилучшие приближения для отношений периодов обращения планет. Системы календаря связывают с записью астрономического года в виде цепной дроби.
Сейчас эта тема практически не изучается в курсе школьной математики, но ведь непрерывные дроби являются тем самым универсальным способом записи наших чисел [1].
Чтобы показать, что такое цепная дробь, начнем с примера.
№1.

$$\frac{71}{19}=3+\frac{14}{19}=3+\frac{1}{\frac{19}{14}}=3+\frac{1}{1+\frac{5}{14}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{14}{5}}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{4}}}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

Определение. Выражение вида $q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+...+\cfrac{1}{q_n}}}}$, где $q_0 \in Z$, $q_1 \in N$, $q_n \in N$ называется конечной цепной дробью, а n - длиной цепной дроби, q_n – коэффициентами цепной дроби.

Для удобства дробь записываем: $[q_0, q_1, ... q_n]$.

Т.е. $\frac{71}{19}=[3{,}1{,}2.1.4]$.

Определение. Бесконечную цепную дробь $[q_0, q_1, ... q_n]$ будем называть периодической, если существуют такие числа k и s_0, что для любого $s \geq s_0$ выполняется $a_s = a_{s+k}$. Если можно взять $s_0 = 0$, то такую дробь будем называть чисто периодической

Дальше мы будем использовать теорему Лагранжа.

Цепная дробь периодична (т.е. последовательность ее элементов, начиная с некоторого места, повторяет себя) тогда и только тогда, когда число, представленное дробью, является квадратичной иррациональностью. Т.е. число представлено в виде $a+b\sqrt{c}$, a,b,c - рациональные числа. Т.е. $q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ldots}}}$

№2.

$$\sqrt{47}=6+\{\sqrt{47}\}=6+\frac{1}{a_1};$$

$$a_1=\frac{1}{\{\sqrt{47}\}}=\frac{1}{\sqrt{47}-6}=\frac{\sqrt{47}+6}{(\sqrt{47}-6)(\sqrt{47}+6)}=\frac{\sqrt{47}+6}{11}=\frac{12+\{\sqrt{47}\}}{11}=1+\frac{1+\{\sqrt{47}\}}{11}=1+\frac{1}{a_2};$$

$$a_2=\frac{11}{1+\{\sqrt{47}\}}=\frac{11}{\sqrt{47}-6+1}=\frac{11(\sqrt{47}+5)}{(\sqrt{47}-5)(\sqrt{47}+5)}=\frac{11(\sqrt{47}+5)}{22}=\frac{11+\{\sqrt{47}\}}{2}=5+\frac{1+\{\sqrt{47}\}}{2}=5+\frac{1}{a_3};$$

$$a_3=\frac{2}{1+\{\sqrt{47}\}}=\frac{2}{\sqrt{47}-6+1}=\frac{2(\sqrt{47}+5)}{(\sqrt{47}-5)(\sqrt{47}+5)}=\frac{2(\sqrt{47}+5)}{22}=\frac{11+\{\sqrt{47}\}}{11}=1+\frac{\{\sqrt{47}\}}{11}=1+\frac{1}{a_4};$$

$$a_4=\frac{11}{\{\sqrt{47}\}}=\frac{11}{\sqrt{47}-6}=\frac{11(\sqrt{47}+6)}{(\sqrt{47}-6)(\sqrt{47}+6)}=\frac{11(\sqrt{47}+6)}{11}=12+\{\sqrt{47}\}=12+\frac{1}{a_5};$$

$$a_5=\frac{1}{\{\sqrt{47}\}}=a_1.$$

Ответ: $\sqrt{47}=[6,(1,5,1,12)]$.

№3.

$$3\sqrt{2}=\sqrt{18}=4+\{\sqrt{18}\}=4+\frac{1}{a_1};$$

$$a_1=\frac{1}{\{\sqrt{18}\}}=\frac{1}{\sqrt{18}-4}=\frac{\sqrt{18}+4}{(\sqrt{18}-4)(\sqrt{18}+4)}=\frac{\sqrt{18}+4}{2}=\frac{8+\{\sqrt{18}\}}{2}=4+\frac{\{\sqrt{18}\}}{2}=4+\frac{1}{a_2};$$

$$a_2=\frac{2}{\{\sqrt{18}\}}=\frac{2}{\sqrt{18}-4}=\frac{2(\sqrt{18}+4)}{(\sqrt{18}-4)(\sqrt{18}+4)}=\frac{2(\sqrt{18}+4)}{2}=\sqrt{18}+4=8+\{\sqrt{18}\}=8+\frac{1}{a_3};$$

$$a_3=\frac{1}{\{\sqrt{18}\}}=a_1.$$

Ответ: $3\sqrt{2}=[4,(4,8)]$.

№4.

$$\frac{\sqrt{7}-1}{2}=\frac{2+\{\sqrt{7}\}-1}{2}=\frac{1+\{\sqrt{7}\}}{2}=0+\frac{1}{a_1};$$

$$a_1=\frac{2}{1+\{\sqrt{7}\}}=\frac{2}{1+\sqrt{7}-2}=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=\frac{\{\sqrt{7}\}+3}{3}=1+\frac{\{\sqrt{7}\}}{3}=$$

$$=1+\frac{1}{a_2};$$

$$a_2=\frac{3}{\{\sqrt{7}\}}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}=\sqrt{7}+2=4+\{\sqrt{7}\}=4+\frac{1}{a_3};$$

$$a_3=\frac{1}{\{\sqrt{7}\}}=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=\frac{\{\sqrt{7}\}+4}{3}=1+\frac{1+\{\sqrt{7}\}}{3}=1+\frac{1}{a_4};$$

$$a_4=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\{\sqrt{7}\}+3}{2}=1+\frac{1+\{\sqrt{7}\}}{2}=1+\frac{1}{a_5};$$

$$a_5=\frac{2}{1+\{\sqrt{7}\}}=a_1.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}-1}{2}=[0,(1,4,1,1)]$.

№5. Найти значение цепной дроби $[(1,3)]$.

Решение: Обозначим $[(1,3)]=a$.

$$[(1,3)]=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a}},\quad 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a}}=a.$$

Получим квадратное уравнение: $3a^2-3a-1=0$, откуда $a=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$;

a - является числом положительным, поэтому $[(1,3)]=\frac{3+\sqrt{21}}{6}$.

Ответ: $[(1,3)]=\frac{3+\sqrt{21}}{6}$

№6. Найти значение цепной дроби $[1,(2,3)]$.

Решение: $[1,(2,3)]=1+[(2,3)]$

Обозначим $[(2,3)]=a$, получили уравнение вида: $2a^2+6a-3=0$, откуда $a=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$. Т.к. $a>0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\sqrt{15}-3}{2}$;

Ответ: $[1,(2,3)]=1+\frac{\sqrt{15}-3}{2}=\frac{\sqrt{15}-1}{2}$.

№7.

Нельзя не упомянуть одно интересное число, у него все коэффициенты равны 1.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Это число имеет собственное имя, оно называется «золотым сечением». На протяжении веков «золотое сечение» считается самым прекрасным соотношением в архитектуре и искусстве. Найдем это число [1].

$$1+\frac{1}{a}=a, \quad a^2-a+1=0.$$

$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. А, так как число a должно быть положительным числом, то $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

№8.

Некоторые диофантовы уравнения можно решать с помощью цепных дробей.
Решим уравнение: $17x+19y=300$.
Решение: Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных.

$$\frac{17}{19}=\frac{1}{\frac{19}{17}}=\frac{1}{1+\frac{2}{17}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{17}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}}.$$

Возьмем предпоследнюю подходящую к ней дробь: $\frac{1}{1+\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}$.

$x_0=(-1)^n cQ_{n-1}; \quad y_0=(-1)^{n+1} cP_{n-1}$.
Частное решение: x_0= (-1)^4 ·300·9, y_0= (-1)^5 ·300·8= - 2400.
И общее решение:
x = 2700 – 19k, y = - 2400 + 17k.
Найдем k, учитывая, что $x>0, \quad y>0$.

$141\frac{3}{17}<k<142\frac{2}{19}$. То есть $k = 142$. Отсюда $x = 2,\ y = 14.$

Находит свое применение теория цепных дробей и при решении задач различных олимпиад.

№9.

Турнир Ломоносова.
Решить уравнение в целых положительных числах

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{7}$$

$\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$, значите $x=1$. $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{3}{7}=\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$.

$y=2$, $z=3$.

Изучение этой темы в школе может оказать большую помощь учителю в преподавании математики, как в физико-математических классах, так и в гуманитарных, так как она подчеркивает связь этой науки с такими, казалось бы, неожиданными областями знаний, как музыка, биология, астрономия. Очень важно стараться использовать темы, выходящие за рамки основной школьной программы государственного стандарта, но в то же время, не требующие серьезных знаний по математике. В частности, это относится и к теории цепных дробей. Этот материал доступен, что очень важно, обучающимся с 5 по 11 класс. В процессе решения с использованием цепных дробей дети учатся видеть сходства и различия, замечать изменения, выявлять причины и характер этих изменений, на этой основе формулировать выводы. Тема «Цепные дроби» позволяет углубить математические знания, повысить мотивацию к изучению математики и расширить кругозор [3].

Список использованных источников

1. Арнольд В. И. Цепные дроби— М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
2. Хинчин А.Я. Цепные дроби – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
3. Сухова К.И. Цепные дроби как средство обучения решению олимпиадных задач по математике / К.И. Сухова, М.В. Глебова // Современные тенденции развития системы образования : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 8 мая 2019 г.) – Чебоксары: ИД «Среда», 2019. – С. 205-208. – ISBN 978-5-6042436-8-8.

ӘОЖ 377

5-6 СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫНА АРНАЛҒАН КЕЙБІР ЛОГИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУ ЖОЛДАРЫ

Итенова Азиза Жантөреқызы
aziza.itenova.98@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Механико-математика факультеті, Алгебра және геометрия кафедрасының 1 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі - К. Ш. Бейсенбаева

Мақалада оқушылардың логикалық ойлауына, логикалық және қызықты сипаттағы тапсырмаларға тоқталамыз және жіктейміз, сондай-ақ осындай міндеттерді шешу тәсілдері мен әдістерін қарастырамыз.