ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

PROCEEDINGS
of the XVIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

2023
Астана

УДК 001+37
ББК 72+74
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-337-871-8

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001+37
ББК 72+74

ISBN 978-601-337-871-8

$$D_{\alpha,\beta}=\sup_{z\in I}\left(\int_z^b W_1^{q(\alpha-1)}(x)W_2^{q(\gamma-1)}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_a^z u_1^{p'}(s)W_1^{p_1'\beta}(s)w_1(s)ds\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left(\int_a^z u_2^{p'}(s)W_2^{p_2'\beta}(s)w_2(s)ds\right)^{\frac{1}{p_2'}}<\infty$$

Сонымен қатар $D_{\alpha,\beta}\approx C$, C - теңсіздіктің ең жақсы тұрақтысы.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Ойнаров Р., Байарыстанов А.О., Алдай М., “Билинейное неравенство для одного класса операторов дробного интегрирования”, Сиб. матем. журн. –2022–Т. 63. – №5.– С.1104–1118.

2. Stepanov V.D. and Shambilova G.E., “On iterated and bilinear integral Hardy-type operators,” //Math. Inequal.Appl. –2019. –№4. –P.1505–1533.

3. Stepanov V.D. and Ushakova E.P., “Bilinear Hardy-type inequalities in weighted Lebesgue spaces,” //NonlinearStud. –2019. –№4. –P. 939–953.

УДК. 517.51

ОБ ИНЕГРИРУЕМОСТИ С ВЕСОМ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ НЕКОТОРОГО ОБОБЩЕННО МОНОТОННОГО КЛАССА

Ахметжан Жасұлан Нұрсұлтанұлы
ahmetjanjasulan@gmail.com
Магистрант механико-математического факультета
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В работе изучаются вопросы интегрируемости с весом ряда

$$f(x,y)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}a_{k_1k_2}\chi_{k_1}(x)\chi_{k_2}(y) \tag{1}$$

Запишем следующее определение (см. [1]). Нуль-последовательность положительных чисел $c:=\{c_n\}$ принадлежит классу R_0^+BVS, если неравенство $\sum_{n=m}^{\infty}|c_n-c_{n+1}|\le K\cdot c_m$ справедливо для всех натуральных m. Класс таких последовательностей был введен Лейндлером в [1].

Через $g(x)$ обозначим сумму ряда $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$. В работе [2] Тихонова найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости в p - той степени сумм синус- и косинус- рядов с коэффициентами из класса R_0^+BVS с весом γ. Эти результаты сформулированы в следующей

Теорема А. Пусть $\{\lambda_n\}\in R_0^+BVS$ и $1\le p<\infty$.

А) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют условию: существует $\varepsilon_1>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^{p-2}\lambda_n^p<\infty \tag{2}$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x)|\,g(x)\,|^p\in L(0,\pi). \tag{3}$$

Б) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (2) необходимо для выполнения условия (3).

Функция $\gamma(x)$ определяется по последовательности $\{\gamma_n\}$ следующим образом: $\gamma(\pi/n):=\gamma_n$, $n\in N$, и существуют положительные константы A и B такие, что $A\gamma_n\le\gamma(x)\le B\gamma_{n+1}$ для $x\in(\pi/n+1,\pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma:=\{\gamma_n\}$ называется почти возрастающей (почти убывающей), если неравенство $C\gamma_n\ge\gamma_m$ $(\gamma_n\le C\gamma_m)$ справедливо для всех натуральных $n\ge m$.

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных формулах.

В статье получен двумерный аналог теоремы А для двойных рядов по мультипликативным системам.

Прежде чем сформулировать результаты, приведем необходимые определения.

Для начала приведем определение мультипликативной системы Прайса (см.[3]). Пусть $P=\{p_1,p_2,...,p_j,...\}$, $p_j\ge 2$, $j=1,2,...$, - произвольная последовательность натуральных чисел; $G(P)=\{x=\{x_1,x_2,...,x_j,...\},\ 0\le x_j\le p_j-1,\ j=1,2,...\}$ - множество целочисленных последовательностей с целочисленными координатами. Если в множестве G ввести операцию сложения $\dot{+}$ как покоординатное

$$x\dot{+}y=\{(x_j+y_j)(\operatorname{mod}p_j)\}_{j=1}^{\infty},\ \text{где}\ x=\{x_j\}\in G,\ \ y=\{y_j\}\in G,$$

то множество G становится группой.

Операция, обратная к групповой операции $\dot{+}$, определена как покоординатное вычитание по модулю p_j, т.е.

$$x\dot{-}y=\begin{cases}x_j-y_j, & если\quad x_j\ge y_j\\ x_j-y_j+p_j, & если\quad x_j<y_j\end{cases}.$$

Мультипликативная система функций на группе G определяется следующим образом.

Положим

$$m_0=1,\ \ m_j=\prod_{s=1}^{j}p_s, \tag{4}$$

где p_s - члены последовательности P. Любое целое число $n\ge 1$ единственным образом представимо в виде

$$n=\sum_{j=1}^{k(n)}n_j m_{j-1}, \tag{5}$$

где n_j - целые и $0\le n_j\le p_j-1,\quad j=1,2,...,k$.

Положим

$$\chi_0(x)=1,\quad \chi_{m_j}(x)=\exp\frac{2\pi i x_{j+1}}{p_{j+1}},\quad j=0,1,...,$$

где $\quad x=\{x_j\}_{j=1}^{\infty}\in G$, $i=\sqrt{-1}$.

Определим

$$\chi_n(x)=\prod_{j=1}^{k(n)}\left(\chi_{m_{j-1}}(x)\right)^{n_j}=\exp\left(2\pi i\sum_{j=0}^{k(n)}\frac{n_j x_j}{p_j}\right) \tag{6}$$

Так определенная на группе G система функций $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой Прайса. Она мультипликативна и ортонормированна на G.

Определение 1. Говорят, что последовательность положительных чисел $a:=\{a_{jk}\}$, удовлетворяющая условию $a_{jk}\to 0$ при $j+k\to\infty$, принадлежит классу $R_0^+BVS^2$, если выполняются неравенства

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}a_{jk}|\le Ca_{mn} \quad \textit{при всех } m,n\in N$$

и

$$\sum_{j=m}^{\infty}|\Delta_{10}a_{jk}|\le Ca_{mk} \quad \textit{при каждом фиксированном } k,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{01}a_{jk}|\le Ca_{jn} \quad \textit{при каждом фиксированном } j,$$

где

$$\Delta_{11}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k}-a_{j,k+1}+a_{j+1,k+1},$$
$$\Delta_{10}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k},$$
$$\Delta_{01}a_{jk}=a_{jk}-a_{j,k+1}.$$

Определение 2. Говорят, что последовательность положительных чисел $\gamma:=\{\gamma_{mn}\}$ почти возрастает (почти убывает), если для некоторой константы $C>0$ и для всех натуральных $m_2\ge m_1$, $n_2\ge n_1$ выполнено неравенство

$$C\gamma_{m_2n_2}\ge\gamma_{m_1n_1}\ \left(\gamma_{m_2n_2}\le C\gamma_{m_1n_1}\right).$$

Пусть функции $\gamma(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены следующим образом:

$$\gamma\left(\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2}\right)=\gamma_{k_1k_2},\ \varphi\left(\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2}\right)=\varphi_{k_1,k_2},\ \forall k_1,k_2\in\mathrm{N}$$

$\exists\, \mathrm{A}>0,\mathrm{B}>0,\mathrm{C}>0,\mathrm{D}>0$:

$$A\gamma_{k_1k_2}\le\gamma(x,y)\le B\gamma_{k_1+1,k_2+1} \quad \text{для}$$

$$x\in\left(\frac{1}{k_1+1},\frac{1}{k_1}\right],\ y\in\left(\frac{1}{k_2+1},\frac{1}{k_2}\right],$$

$$C\varphi_{m_{k_1},m_{k_2}}\le\varphi(x,y)\le D\varphi_{m_{k_1+1},m_{k_2+1}} \quad \text{для}$$

$$x\in\left(\frac{1}{m_{k_1+1}},\frac{1}{m_{k_1}}\right],\ y\in\left(\frac{1}{m_{k_2+1}},\frac{1}{m_{k_2}}\right].$$

Сформулируем результаты.

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ - сумма ряда (1), $\{a_{mn}\}\in R_0^+BVS^2$, $1\le p<\infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{k_1k_2}\}$ удовлетворяет условию: $\exists$ некоторые $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ такие, что последовательность $\left\{\gamma_{k_1k_2}\cdot k_1^{-1+\varepsilon_1}\right\}$ почти убывает при каждом фиксированном k_2, и последовательность $\left\{\gamma_{k_1k_2}\cdot k_2^{-1+\varepsilon_2}\right\}$ почти убывает при каждом фиксированном k_1, то условие

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\gamma_{k_1k_2}\cdot(k_1\cdot k_2)^{p-2}\cdot a_{k_1k_2}^{p}<\infty$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x,y)\cdot|f(x,y)|^p\in L(0,1)^2.$$

Теорема 2. Пусть $f(x,y)$ - сумма ряда (1), $\left\{a_{k_1k_2}\right\}\in R_0^+BVS^2$, $1\le p<\infty$, и последовательность $\left\{\varphi_{k_1k_2}\right\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_3,\varepsilon_4>0$ такие, что последовательность $\left\{\varphi_{k_1k_2}\cdot k_1^{\,p-1-\varepsilon_3}\right\}$ почти возрастает при фиксированном k_2 и $\left\{\varphi_{k_1k_2}\cdot k_2^{\,p-1-\varepsilon_4}\right\}$ почти возрастает при фиксированном k_1 и пусть $\varphi(x,y)\cdot|f(x,y)|^p\in L(0,1)^2$.

Тогда сходится ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\chi_{k_1,k_2}m_{k_1}^{p-1}m_{k_2}^{p-1}\left(\frac{1}{m_{k_1}m_{k_2}}\sum_{k_1=1}^{m_{k_1}-1}\sum_{k_2=1}^{m_{k_2}-1}a_{k_1k_2}\right)^p<\infty.$$

Для доказательства теорем потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\{a_n\ge 0\},\{\lambda_n\ge 0\},\ p\ge 1$. Тогда верны следующие неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right)^p\le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\lambda_\nu\right)^p \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu\right)^p\le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\right)^p \tag{8}$$

Доказательство этих неравенств можно найти в [4].

Лемма 2. Пусть $f(x,y)$ - сумма ряда (1), $\{a_{k_1k_2}\}\in R_0^+BVS^2$. Тогда

$$|f(x,y)|\le C\cdot\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}a_{jk}$$

при $x\in\left[\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right),\ y\in\left[\frac{1}{q+1},\frac{1}{q}\right)$.

Доказательство леммы 2. Представим $f(x,y)$ следующим образом

$$f(x,y)=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)+\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)+$$

$$+\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{\infty}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)+\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

$$|f(x,y)|\le|J_1+J_2+J_3+J_4|\le|J_1|+|J_2|+|J_3|+|J_4|.$$

На основании преобразования Абеля (см.[3] стр.149) и неравенства $|D_j(x)|\le\frac{C}{x}$ $\forall x\in(0,1)$, k=0,1,2.., и учитывая, что $\{a_{mn}\}\in R_0^+BVS^2$, а также $|\chi_j(x)|=1$, оценим J_1,J_2,J_3,J_4.

$$|J_1| = \left|\sum_{j=o}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| \le \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{jk}.$$

Оценим

$$|J_2| = \left|\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| .$$

Сначала применим преобразование Абеля к конечной сумме:

$$\left|\sum_{j=p}^{m}\sum_{k=q}^{n} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| \le \frac{1}{xy}\left(\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{11}a_{jk}| + \sum_{j=p}^{m-1}|\Delta_{10}a_{jn}| + \sum_{j=p}^{m-1}|\Delta_{10}a_{jq}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{mk}| + \sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{pk}| + |a_{mn}| + |a_{pn}| + |a_{mq}| + |a_{pq}|\right).$$

Оценим некоторые слагаемые, учитывая, что $\{a_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$ при каждом фиксированном i и j.

$$\sum_{j=p}^{m-1}|\Delta_{10}a_{jn}| = \sum_{j=p}^{m-1}|a_{jn} - a_{j+1,n}| \le C\cdot a_{pn} \to 0, \text{ при } n\to\infty \quad a_{pn}\to 0.$$

$$\sum_{j=p}^{m-1}|\Delta_{10}a_{jq}| = \sum_{j=p}^{m-1}|a_{jq} - a_{j+1,q}| \le C\cdot a_{pq} \to 0, \text{ при } n\to\infty \quad a_{pn}\to 0.$$

$$\sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{mk}| = \sum_{k=q}^{n-1}|a_{mk} - a_{m,k+1}| \le C\cdot a_{mq}, \text{ при } m\to\infty .$$

$$\sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{pk}| = \sum_{k=q}^{n-1}|a_{pk} - a_{p,k+1}| \le C\cdot a_{pq} \to 0.$$

При $m\to\infty$, $n\to\infty$ получаем (т.к. $\{a_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$ и $\{a_{jk}\}$ почти убывает).

Так как при $p \ge m$ и $q \ge n$

$$a_{pq} = \left|\sum_{i=p}^{\infty}\sum_{j=q}^{\infty}\Delta_{11}a_{ij}\right| \le \sum_{i=p}^{\infty}\sum_{j=q}^{\infty}|\Delta_{11}a_{ij}| \le \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}|\Delta_{11}a_{ij}| \le a_{mn},$$

то

$$|J_2| \le \frac{1}{xy}\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{11}a_{jk}| \le \frac{C}{xy}a_{pq} \le C\cdot p\cdot q\cdot a_{pq} \le \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_{jk}.$$

Аналогично оценим J_3

$$|J_3| = \left|\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{\infty} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right|.$$

$$\left|\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{n} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| \le \frac{1}{xy}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{11}a_{jk}| + \sum_{j=0}^{p-1}|\Delta_{10}a_{jn}| + \sum_{j=0}^{p-1}|\Delta_{10}a_{jq}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{pq}| + \sum_{k=q}^{n-1}|\Delta_{01}a_{0,k}| + |a_{pn}| + |a_{0,n}| + |a_{pq}| + |a_{0,q}|\right).$$

При $n\to\infty$ получаем

$$\left|J_3\right| \le \frac{1}{xy}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{n-1}\left|\Delta_{11}a_{jk}\right| \le \frac{C}{xy}a_{0,q}.$$

Далее для J_4

$$\left|J_4\right| = \left|\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right|.$$

$$\left|\sum_{j=p}^{m}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| \le \frac{1}{xy}(\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1}\left|\Delta_{11}a_{jk}\right| + \sum_{j=p}^{m-1}\left|\Delta_{10}a_{j,q-1}\right| + \sum_{j=p}^{m-1}\left|\Delta_{10}a_{j0}\right| +$$
$$+\sum_{k=0}^{q-1}\left|\Delta_{01}a_{mk}\right| + \sum_{k=0}^{q-1}\left|\Delta_{01}a_{pk}\right| + \left|a_{m,q-1}\right| + \left|a_{p,q-1}\right| + \left|a_{m,0}\right| + \left|a_{p,0}\right|).$$

При $m \to \infty$ получаем

$$\left|J_4\right| \le \frac{1}{xy}\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1}\left|\Delta_{11}a_{jk}\right| \le \frac{C}{xy}a_{p,0}.$$

Итак,

$$\left|f(x,y)\right| \le \left[\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk} + \frac{C}{xy}\left(a_{pq}+a_{0q}+a_{p0}\right)\right] \le \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}a_{jk} + C\cdot p\cdot q\left(a_{pq}+a_{0q}+a_{p0}\right).$$

Но в силу того, что $\{a_{jk}\}$ почти убывает

$$p\cdot q\cdot a_{pq} \le \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}a_{jk}$$

и

$$p\cdot q\cdot a_{p0} \le \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}a_{jk}.$$

Следовательно, при $\frac{1}{x} < p,\ \frac{1}{y} < q$ имеем

$$\left|f(x,y)\right| \le C\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}a_{jk}.$$

Лемма 2 доказана.

Литература

1. Лейндлер Л. Новый класс числовых последовательностей и их приложения к синус- и косинус- рядам. //Analysis Mathematica. – 2002. –Т.28. – №4. – С. 279-286.
2. Тихонов С.Ю. Об интегрируемости тригонометрических рядов.//Мат. заметки. –2005. –Т.78. –№3. –С.476-480.
3. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. -М.:Наука, 1987.-344с.
4. Потапов М.К., Бериша М. Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного. //Publ.Inst.Math. (Beograd) (N.S.). – 1979. – Т.26(40). –С.215-228.