ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

PROCEEDINGS
of the XVIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

2023
Астана

УДК 001+37
ББК 72+74
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-337-871-8

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001+37
ББК 72+74

ISBN 978-601-337-871-8

Әрі қарай, $\mathbf{L}_{\infty,*w}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ – де $R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ және $\beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ функцияларының сәйкесінше орташа мәні $\bar{R}(x)$ және $\bar{\beta}(x)$, ал, $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ функциясының $\mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbf{\Omega}; \mathbb{C})$ – де орташа мәні $\bar{g}(x)$ болады.

Біз карастырылынган (1) бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторлары $\mathfrak{A}_{\varepsilon}$ кіші параметр $\varepsilon \to 0+$ әлсіз мағынада Θ_+^{loc} топологиядасында келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторына $\overline{\mathfrak{A}}$ жинақталатынын дәлелдедік:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = (1 + \alpha \mathrm{i})\Delta \mathrm{u} + \bar{R}(x)\mathrm{u} - \left(1 + \bar{\beta}(x)\mathrm{i}\right)|\mathrm{u}|^2 \mathrm{u} - V(x)\mathrm{u} + \bar{g}(x), & x \in \Omega, \\ \mathrm{u} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \mathrm{u}(0) = U(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

мұндағы $V(x)$ – функциясы, «өзгеше мүше» деп аталатын (қосымша потенциал), төмендегі формула бойынша анықталады:

$$V(x) = \int_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \upsilon(x, y) d\sigma_y.$$

мұнда $\upsilon(x)$ келесі шектік есептің шешімі болады:

$$\begin{cases} -\Delta_y \upsilon = 0, & \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \backslash G_0, \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu_y} + b(x, y)\upsilon = b(x, y), & y \in \partial G_0, \\ \upsilon \to 0, & |y| \to \infty. \end{cases}$$

Гинзбург-Ландау комплексті теңдеуінің аттракторларының орташалануы туралы негізгі теореманы тұжырымдаймыз:

Теорема 1. $\Theta_+^{\mathrm{loc}} = L_2^{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2^{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C})\right)$ топологиялық кеңістігінде $\varepsilon \to 0+$ келесі шектік қатынастар орындалады $\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}}$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Am. Math. Soc, 2002. – 363 p.
2. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Attractors and a “strange term” in homogenized equation. CR Me’canique. – 2020. – V. 348, № 5. – P. 351–359.
3. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. Chaos, Solutions & Fractals. – 2020. – V. 140, Art. № 110208.

УДК: 517.946

ЛОКАЛЬДЫ ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДАҒЫ НАВЬЕ-СТОКС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫНЫҢ ОРТАШАЛАНУЫ

Төлеубай Алтын Мұқанқызы
Altyn.15.94@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 3 курс докторанты, Астана қ., Қазақстан
Ғылыми жетекші - ф-м. ғ.д., қауымдастырылған профессор, К. А. Бекмаганбетов

Бұл жұмыста шағын параметрге тәуелді локальды–периодты ұсақ түйіршікті кедергілері бар анизотропты ортада екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы–шектік есептің аттракторларының параметр нөлге ұмтылған кезде асимптотикалық әрекетін зерттейміз. Перфорацияланған облыстардағы есептер (ұсақ түйіршікті кедергілері бар облыстарда) мамандардың үлкен назарын аударды (мысалы, [1] – [3] қараңыз) .

Перфорацияланған облыстағы есептердің кейбір нәтижелері туралы [4] – [5] жұмыста рдан оқуға болады, сонымен қатар, бұл жерде қажетті библиографиялармен танысуға болады.

Перфорацияланған облыстағы (кедергілері бар облыс) анизотропты орталардың әрекетін сипаттайтын тез өзгеретін мүшелері бар Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекеті қызықтырады. Біз кіші параметр нөлге ұмтылғандағы аттракторлардың әлсіз жинақталуы мен шектік әрекетін зерттейміз [6]. Бұл жұмыста шектік теңдеудегі потенциалдың пайда болу жағдайын зерттейміз (ұқсас есептерді [7] – [8] қараңыз).

Ең алдымен перфорацияланған облысты анықтаймыз. Айталық, Ω – $\mathbb{R}^2 -$ гітегіс шектелген облыс. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\gamma_\varepsilon = \left\{ r \in Z^2 : dist(\varepsilon r, \partial\Omega \geq \sqrt{2}\varepsilon \right\}, \ \square \equiv \{\xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1{,}2\}.$$

Айталық, $F(x,\xi)$ тегіс функцияны ξ бойынша 1-периодты деп есептейміз және мынадай, $F(x,\xi)|_{\xi\in\partial\square} \geq \text{const} > 0$, $F(x,0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ үшін $\xi \in \square\backslash\{0\}$. Келесі жиынды анықтайық,

$$G_r^\varepsilon = \left\{ x \in \varepsilon(\square + r) | \ F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \qquad G_\varepsilon = \cup_{r\in\Upsilon_\varepsilon} G_r^\varepsilon$$

және тегіс облысты келесі түрде енгіземіз :

$$\Omega_\in = \Omega \setminus G_\in.$$

Жоғарыда келтірілген сызбаға сәйкес $\partial\Omega_\varepsilon$ шекарасы $\partial\Omega$ және оның қосындыларының шекарасынан $\partial G_\varepsilon \subset \Omega$ тұрады. Келесі белгілеулер енгіземіз $Q = \{(x,t) | x \in \Omega, t \in (0,\infty)\}$ және $\Omega_\varepsilon = \{(x,t) | x \in \Omega_\varepsilon, t \in (0,\infty)\}$. $\{\upsilon | \in \upsilon[C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla,\upsilon) = 0\}$ жиынының $[L_2(\Omega)]^2$-гі тұйықталуын $\mathbf{H}$ және $\{\upsilon | \in \upsilon[C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla,\upsilon) = 0\}$ жиынының $[H_0^1(\Omega)]^2$-гі тұйықталуын $\mathbf{V}$ арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, $\{\upsilon | \in \upsilon[C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla,\upsilon) = 0\}$ жиыннның $[L_2(\Omega_\varepsilon)]^2$ -гі нормасы бойынша тұйықталуын – $\mathbf{H}_\varepsilon$ және $\{\upsilon | \in \upsilon[C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla,\upsilon) = 0\}$ жиынның $[H^1(\Omega_\varepsilon;\partial\Omega)]^2$–гі нормасы бойынша тұйықталуын $\mathbf{V}_\varepsilon$ деп анықтаймыз, мұнда $[H^1(\Omega_\varepsilon;\partial\Omega)]^2$ – $\partial\Omega$ шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Навье–Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін қарастырамыз.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon + \nabla P = g\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, x \in \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} + B\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = h\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), x \in \partial G_\varepsilon, t \in (0;+\infty), \\ u_\varepsilon = 0, x \in \partial\Omega \\ u_\varepsilon = U(x), x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Мұнда, Р – қысым, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = \left(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2\right)$, $g_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \left(g^1, g^2\right) \in$ **H**, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} n_i$,

$n = (n_1, n_2)$ – шекарадағы сыртқы нормальдың бірлік векторы және $(a_{ij}(x,\xi))$ матрица-симметриялы оң анықталған, яғни, $\aleph_1 \eta^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\eta_i\eta_j \le \aleph_2 \eta^2$ кез келген векторлар үшін η, кез келген $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^2$ $\aleph_1$ және $\aleph_2$ – оң тұрақтылар.

Әрі қарай,

$$B(x,\xi) = \begin{pmatrix} b^1(x,\xi) 0 & \\ 0 & b^2(x,\xi) \end{pmatrix},$$

$b^k(x,\xi) \in C^1(\Omega \times R^2), b^k(x,\xi)$ бұл ξ айнымалы үшін 1–периодты және $\Omega \times \mathbb{R}^2$, төмендегі шартта қанағаттандыратын функция

$$\int_{\partial G(x)} b^k(x,\xi) d\sigma = 0,\ k = 1,2,$$

мұнда, $G(x) = \{\xi \in \square : F(x,\xi) \le 0\}$ – локальды қосылуы, $\partial G(x) = \{\xi \in \square : F(x,\xi) = 0\}$ – $G(x)$ созылған кеңістіктегі ξ бойынша қосындыларының шекарасы, ал, $d\sigma$– қисық ұзындығының элементі $\partial G(x)$.

Сол сияқты, $h(x,\xi)$ вектор функциясының компоненттері мына шарттарды қанағаттандырады: $h^k(x,\xi) \in C^1(\Omega \times R^2), h^k(x,\xi)$–$\Omega \times \mathbb{R}^2$–гі 1-периодты айнымалы ξ функция және

$$\int_{\partial G(x)} h^k(x,\xi) d\sigma = 0,\ k = 1,2.$$

Төмендегідей аттрактордың бар болу леммасын тұжырымдаймыз:

Лемма 1. (1) есептің Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінде $\mathfrak{A}_\varepsilon$ траекториялық аттракторы бар. $\mathfrak{A}_\varepsilon$ жиыны бірқалыпты F_+^b ($\varepsilon \in (0,1)$ – де) шенелген және Θ_+^{loc} компактілі. Әрі қарай,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ K_\varepsilon,$$

K_ε өзегі бұл F^b ($\varepsilon \in (0,1)$ – де) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Назар аударайық, F_+^b кеңістігінде және Θ_+^{loc} топологиясында кіші параметр ε-ға тәуелді.

Бұл лемманың дәлелдеуі, [4] және [8]–ды ескере отырып, дербес жағдай үшін келтірілген дәлелдеулермен толығымен сәйкес келеді.

Орташаланған (шектік) есеп келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right) + (u_0, \nabla) u_0 + V(x) u_0 + \nabla P = \mathcal{G}(x) + H(x), & x \in \Omega, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_0 = U(x), & x \in \Omega, t = 0, \end{cases}$$

(2)

Мұнда, $\hat{a}_{ij}(x) = \int_{\square \setminus G(x)} \sum_{l=1}^{2} \hat{a}_{il}(x,\xi)(\frac{\partial N_j(x,\xi)}{\partial \xi_l} + \delta_{ij}) d\xi$, $\mathcal{G}(x) = \int_{\square \setminus G(x)} g(x,\xi)\, d\xi$,

$$m_k(x) = -\int_{\partial G(x)} b^k(x,\xi) M^k(x,\xi)\, d\sigma, \qquad V(x) = \begin{pmatrix} m_1(x) & 0 \\ 0 & m_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_k(x) = -\int_{\partial G(x)} h^k(x,\xi) M^k(x,\xi) d\sigma = \int_{\partial G(x)} b^k(x,\xi) L^k(x,\xi) d\sigma, \qquad H(x) = \begin{pmatrix} H_1(x) \\ H_2(x) \end{pmatrix}.$$

Мұнда, $N_l(x,\xi)$, $M^k(x,\xi)$ және $L^k(x,\xi)$ бұл ξ бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial(N_l+\xi_l)}{\partial\xi_j}\right)=0 \quad \square\setminus G(x) - \text{де} \quad \frac{\partial N_l}{\partial\gamma_\xi}=\sum_{i=1}^{2}a_{il}(x,\xi)n_i \quad \partial G(x)\text{-да},$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial M^k}{\partial\xi_l}\right)=0 \quad \square\setminus G(x) - \text{де,} \quad \frac{\partial M^k}{\partial\gamma_\xi}=-b^k(x,\xi) \quad \partial G(x)\text{-да},$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial L^k}{\partial\xi_j}\right)=0 \quad \square\setminus G(x) - \text{де,} \quad \frac{\partial L^k}{\partial\gamma_\xi}=h^k(x,\xi) \quad \partial G(x)\text{-да}.$$

Мұнда, $\frac{\partial}{\partial\gamma_\xi}=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}n_i^\xi, n_\xi=\left(n_1^\xi,n_2^\xi\right)$ бұл $G(x)$ шекара жолағының сыртқы нормалының бірлік векторы.

Төмендегідей аттрактордың бар болу леммасын тұжырымдаймыз:

Лемма 2. (2)–ші есеп (3)–ші шартпен берілсе, онда $\overline{K}^+$ траекториялық кеңістігінде (2)–ші есепке сәйкес келетін $\overline{A}$ траекториялық аттракторы бар, және

$$\overline{A}=\prod\nolimits_+ \overline{K}$$

мұнда, $\overline{K}- \ F^b$ –гі (2) есептің өзегі.

Навье–Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының орташалануы туралы негізгі теореманы тұжырымдаймыз:

Теорема 1. Айталық, $H^1(\Omega)$ кеңістігінде λ_0 бұл $\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ операторының бірінші меншікті саны болсын, $m_k=\sup_\Omega m_k(x), k=1,2,$ сандар беріледі. Егер

$$\lambda_0>\max\{m_1,m_2\} \tag{3}$$

болса, Θ_+^{loc} топологиялық кеңістігінде $\varepsilon\to 0+$ үшін келесі шектік қатынастар орындалады:

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\to\overline{\mathfrak{A}}, \tag{4}$$

Олай болса,

$$\mathcal{K}_\varepsilon\to\overline{\mathcal{K}}\ . \tag{5}$$

Назар аударайық, 1 теоремадағы кеңістіктер ε–ге тәуелді. Барлық функциялардағы тиісті нормаларды сақтай отырып, тесіктердің ішінде жалғастыруға болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Марченко В.А., Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Gioranescu D. Un terme e'trange venu d'ailleurs. Colle'ge de France Seminar 1982. – № 60. – P. 154 – 178.
3. Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains // Mathematical Sciences and Applications. – 1997. – № 9. – P. 123 – 136.
4. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб.матем.журн. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 730 – 754.
5. Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007.
6. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье-Стокса в двумерной пористой среде // Проблемы математического анализа. – 2022. – Т. 115. – С. 15 – 28.

7. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, № 7. – С. 18 – 20.
8. Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain // Applicable Analysis. – 1999. – Vol. 71, No. 1 – 4. – P. 215 – 235.

УДК. 517.51

ЖАЛПЫЛАНҒАН МОНОТОНДЫ КОЭФФИЦИЕНТІ ЕКІ ЕСЕЛІ СИНУС ҚАТАРЛАРЫ ҚОСЫНДЫЛАРЫНЫҢ САЛМАҚПЕН ИНТЕГРАЛДАНУЫ

Тулеуов Дастан Умирбекович
dastan.tuleuov@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті
Жетекшісі: ф.-м.ғ.к., профессоры Бокаев Н.А.

Бұл мақалада екі еселенген синус қатарлар қосындыларының салмақты интегралдануы зерттеледі

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky \qquad (1)$$

Келесі мәселе қарастырылады: $\gamma(x,y)$ салмақты функциясы арқылы берілген p-ші дәрежедегі екі еселенген синус қатарлар қосындысының интегралдануын қанағаттандыратын қажетті және жеткілікті коэффициентті шарттарын табу. Бұл жерде $\gamma(x,y)$ салмақты функциясының өзгеруіне қарай қажетті немесе жеткілікті болатын $\{\lambda_{jk}\}$ коэффициенттеріне шарттар іздестіріледі. Алдымен коэффициенттері жалпыланған монотонды (1) қатары $[0,\pi)^2$ аралығында жинақты екені дәлелденеді, содан соң қарастырылып жатқан қатардың қажетті және жеткілікті интегралдану шарттарын қанағаттандыратын теоремалар дәлелденеді. Тригонометриялық қатарлардың салмақпен интегнралдануы туралы ұқсас сұрақтар [1]-[4] жұмыстарда қарастырылған.

Анықтама. $\gamma:=\{\gamma_{mn}\}$ оң сандар тізбегі өседі дерлік деп атаймыз (кемиді дерлік), егер кейбір $C>0$ константасы үшін және барлық $m_2\ge m_1,\, n_2\ge n_1$ натурал сандар үшін келесі теңсіздік орындалса:

$$C\gamma_{m_2n_2}\ge\gamma_{m_1n_1}\ \left(\gamma_{m_2n_2}\le C\gamma_{m_1n_1}\right).$$

$\gamma(x,y)$ функцияны $\{\gamma_{mn}\}$ тізбегі арқылы келесідей анықтаймыз:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)=\gamma_{mn} \quad \forall\ m,n\in N,$$

және келесі теңсіздік орын алатындай A мен B оң константалары табылатын болсын:

$$A\gamma_{mn}\le\gamma(x,y)\le B\gamma_{m+1,n+1} \quad \forall x\in\left(\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right),\ y\in\left(\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right).$$