Г.А.Зайцев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издательство «Наука», 1974

Монография возникла в результате обработки научных докладов и лекций по алгебраическим проблемам математической и теоретической физики, читавшихся автором для научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов. В ней с единой точки зрения излагаются общие алгебраические понятия и методы, находящие важные физические приложения.

В качестве моделей, служащих для иллюстрации общих закономерностей, подробно рассмотрены теория многомерных спиноров, алгебраическая модель квантованных волновых полей и инвариантно-групповая теория нерелятивистского кулоновского и ньютоновского взаимодействий. Книга может служить введением в быстро развивающуюся область науки, лежащую на грани между общей алгеброй и теоретической физикой и получившую название алгебраической физики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

*Книга посвящается
моим замечательным учителям
проф. А. Н. ЗАЙЦЕВУ, проф. И. Н. ГОДНЕВУ,
и акад. А. И. МАЛЬЦЕВУ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы общей алгебры, игравшие большую роль при формировании наиболее абстрактных и глубоких разделов современной математики, в последнее время начали приобретать все более важное прикладное значение. С их помощью оказывается возможным выделять и изучать общие закономерности у сложных систем и добиваться удивительно сильных результатов в тех случаях, когда старые аналитические методы оказываются или чрезвычайно громоздкими, или совершенно бессильными.

Настоящая книга возникла в результате обработки научных докладов и лекций по алгебраическим проблемам математической и теоретической физики, в течение нескольких лет читавшихся автором для участников межинститутского семинара по математической физике, для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов ряда вузов г. Иваново.

В книге последовательно, но в сжатой форме излагаются общие алгебраические понятия и методы, находящие важные физические приложения. Поскольку сколько-нибудь подробно охватить в одной книге все прикладные алгебраические методы невозможно, то мы ограничились рассмотрением лишь основ, представляющих общий интерес, а также относящихся к отдельным научным направлениям, разрабатываемым участниками ивановского семинара по математической физике. Рассматриваемый материал может использоваться также в качестве пособия для аспирантов, специализирующихся в направлении алгебраических проблем теоретической и математической физики.

В качестве исходного пункта, позволяющего с единой точки зрения взглянуть на различные разделы чистой и прикладной алгебры, в книге берется теория универсальных алгебр, кратко рассматриваемая в гл. 1. Здесь вводятся общеалгебраические понятия, с учетом которых общие алгебраические соотношения, встречаемые во многих теориях, становится возможным изучать на примерах конкретных алгебраических систем специального вида. Эта идея, связанная с наличием общей основы у разных систем, относится к числу центральных для данной книги.

В гл. 2 вводятся и изучаются простейшие алгебраические системы, играющие основную роль в математической и теоретической физике. Особое внимание уделено принципиальным понятиям, связанным с алгебрами наблюдаемых для классических и квантовых систем и с алгебраическими состояниями. Это дает возможность чисто алгебраическим путем строить «теорию физических теорий», частными случаями которой являются классическая нестатистическая и статистическая механика и квантовая механика. Многие результаты настоящей и дальнейших глав являются оригинальными и кратко освещались лишь в журнальных статьях.

В гл. 3 разрабатывается аппарат для изучения инвариантных (не зависящих от выбора образующих) свойств произвольных универсальных алгебр. В конце главы этот аппарат применяется к теории алгебр наблюдаемых со связями, а в последующих главах он систематически используется для вывода общих алгебраических закономерностей.

В соответствии с гл. 2, для физики основную роль играет теория ассоциативных алгебр с числовыми значениями. В гл. 4 изучается строение таких алгебр и дается модернизированный вывод основных теорем о свойствах и неприводимых представлениях ассоциативных алгебр. Полученные результаты подробно иллюстрируются на примерах алгебры альтернионов, частным случаем которой является алгебра Клиффорда, а также базисной алгебры квантованных фермионных и бозонных полей. Рассматриваемые при этом идеи могут служить основой для алгебраической переформулировки теории квантованных волновых полей.

Гл. 5 посвящена изучению алгебр Ли и групп Ли, играющих в физике исключительно важную роль. С помощью аппарата теории ассоциативных алгебр здесь выводятся все основные теоремы теории групп Ли и рассматриваются отдельные их приложения. В соответствии с основной идеей гл. 1, в качестве стандартной модели, служащей для иллюстрации общих закономерностей, в книге применяется теория многомерных спиноров и алгебраическая модель квантованных волновых полей. Полученные результаты прилагаются к классической электродинамике и к двухкомпонентной квантовой теории релятивистских частиц со спином $^1/_2$.

В гл. 6 дается групповая формулировка специальной теории относительности и изучаются инвариантно-групповые характеристики физических систем. В качестве примеров, для которых в настоящее время можно построить последовательную чисто алгебраическую теорию, рассматривается инвариантно-групповая теория нерелятивистского кулоновского и ньютоновского взаимодействий. Глава заканчивается алгебраическим выводом спектра атома водорода и использованием алгебраических методов для получения спинорной параметризации в теории кулоновского и ньютоновского взаимодействий.

Поскольку ранее основные физические теории большей частью формулировались с помощью аналитического аппарата, то это, например, в свое время дало основание Лагранжу назвать механику, последовательно изложенную на аналитическом языке, аналитической механикой. Аналогично разделы физики, в которых основную роль играют алгебраические понятия и алгебраические методы, получили название алгебраической физики. В монографии рассмотрены многие основные понятия и идеи алгебраической физики, поэтому она может служить введением в эту быстро развивающуюся область науки.

Литературные указания содержат в первую очередь анализ работ, существенно повлиявших на подготовку книги, а также включают дополнительную литературу, используемую аспирантами при сдаче кандидатского экзамена по алгебраическим вопросам теоретической и математической физики.

Автор искренне признателен многим своим коллегам и ученикам за всестороннее и детальное обсуждение рассматриваемых в книге вопросов.

Глава 1

ОБЩИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ИЗУЧЕНИЕ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ КОНКРЕТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Об абстрактных математических схемах

При изучении общих особенностей более или менее сложных математических теорий, с которыми приходится иметь дело в прикладной математике и теоретической физике, оказывается возможным обнаружить простые абстрактные математические схемы (иногда их называют также структурами — см. литературные указания,— однако у нас термин «структура» будет использоваться в другом смысле). Главная идея современной математики заключается в том, что в ней за основу предлагается брать абстрактные математические схемы, в которых математические соотношения изучаются сами по себе, вне связи с их конкретными реализациями.

В результате становится возможным находить общие идеи, скрывающиеся за деталями каждой из конкретных математических теорий. Так, если при изучении конкретной математической дисциплины удается обнаружить, что некоторые из изучаемых объектов связаны между собой соотношениями, характерными для некоторой абстрактной математической схемы, то можно сразу воспользоваться всеми теоремами, относящимися к данной абстрактной схеме. Обратно, те или иные математические соотношения можно изучить сначала только для одной конкретной реализации, а затем перенести полученные результаты в совершенно другие области, в которых обнаруживаются аналогичные абстрактные математические схемы.

Отличие физики от математики заключается в том, что в то время как математика изучает отношения между объектами, отвлекаясь от природы объектов, в физике природа изучаемых объектов определяется на основе наблюдений и между математическими понятиями и наблюдаемыми явлениями устанавливается приближенное соответствие. В применении к физическим теориям главная идея современной математики может служить исходным пунктом для построения своего рода «теории физических теорий», так как она открывает пути для нахождения того общего, что имеется у различных физических теорий.

§ 2. Группоиды, полугруппы и группы

Рассмотрим простейшие примеры абстрактных математических схем, лежащих в основе многих разделов алгебры. Пусть G — множество, состоящее из конечного или бесконечного числа элементов g. *Бинарной алгебраической операцией* называется закон (обозначаемый символом $\circ$), дающий возможность по произвольным элементам $g_1 \in G$, $g_2 \in G$ (где $\in$—символ принадлежности элемента к множеству), взятым в определенном порядке, однозначно определить их произведение $g_3 \in G$:

$$g_1 \circ g_2 = g_3. \tag{1.1}$$

Множество G с заданной на нем бинарной операцией $\circ$ называется *группоидом*.

Значок $\circ$ можно заменить на какой-либо другой символ; в частности, вместо (1.1) можно принять мультипликативную запись

$$g_1 g_2 = g_3.$$

Группоид G называется *полугруппой*, если для любых трех его элементов g_1, g_2 и g_3 выполняется условие ассоциативности

$$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3). \tag{1.2}$$

Примером конкретной реализации полугруппы может служить множество квантовомеханических операторов, для которых операция умножения удовлетворяет условию ассоциативности (1.2).

Предположим теперь, что для всех элементов полугруппы G определены еще две следующие операции. Так называемая *нульарная операция* ставит в соответствие каждому элементу g из G один и тот же элемент e из G:

$$g^0 = e, \tag{1.3}$$

обладающий тем свойством, что для произвольного g

$$ge = eg = g. \tag{1.4}$$

Элемент e с этими свойствами, по определению, называется *единичным элементом*, или *единицей*, и обозначается 1. (В частности, в упомянутом выше примере полугруппа квантовомеханических операторов является полугруппой с единицей — *моноидом*.)

Унарная операция ставит в соответствие каждому элементу g из G так называемый обратный элемент g^{-1}, обладающий свойством

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e. \tag{1.5}$$

Множество элементов G с бинарной, нульарной и унарной операциями, удовлетворяющими условиям (1.2)—(1.5), называется *группой*.

Понятие группы относится к числу важнейших понятий как алгебры, так и современной математической физики.

§ 3. Основы общей теории универсальных алгебр

Вместо того, чтобы строить независимые теории различных абстрактных алгебраических схем, оказывается целесообразным исходить из единой теории универсальных алгебр, из которой различные конкретные схемы будут получаться в качестве частных случаев. Это соответствует использованию своего рода «теории математических теорий».

Множество G называется универсальной алгеброй, если на нем задана система Ω из некоторого числа n-арных операций ω, переводящих элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ из G, взятые в определенном порядке, в однозначно определенный элемент этого же множества, обозначаемый символом $(g_1 g_2 \ldots g_n \omega)$ [1].

Подалгеброй H универсальной алгебры G называется подмножество множества G, которое замкнуто относительно всех операций Ω. Пусть, например, E — произвольное подмножество множества G. Применяя к элементам из E произвольные операции из Ω, получим подалгебру, порожденную множеством E и обозначаемую $\{E\}$.

Подмножество E называется *системой образующих подалгебры* $\{E\}$.

Универсальные алгебры G с системой операций Ω подразделяются на так называемые *примитивные классы*, или *примитивные множества*. Пусть w_1 и w_2 — два элемента алгебры G, полученные из элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ в результате проведения некоторой последовательной системы операций из Ω. Если при произвольном выборе элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ из G выполняется соотношение

$$w_1(g_1, g_2, \ldots, g_k) = w_2(g_1, g_2, \ldots, g_k), \tag{1.6}$$

то универсальная алгебра G называется *алгеброй с тождественным соотношением* (1.6). Примитивным классом универсальной алгебры G называется алгебра, все элементы которой подчиняются некоторой системе тождественных соотношений Λ.

Так, например, группа будет универсальной алгеброй с бинарной, унарной и нульарной операциями и с системой тождественных соотношений (1.2)—(1.5).

---

[1]) Вместо словосочетания «n-арный» иногда применяется термин «n-местный», причем допускаются также универсальные алгебры с бесконечноместными операциями.

Если для группы наряду с этим выполняется тождественное соотношение

$$g_1 g_2 = g_2 g_1, \tag{1.7}$$

справедливое для всех g_1 и g_2 из G, то она называется *абелевой*.

В этом случае для бинарной операции $\circ$ обычно применяют не мультипликативную, а аддитивную запись, так что (1.7) принимает вид

$$g_1 + g_2 = g_2 + g_1. \tag{1.8}$$

Примером абелевой группы служит аддитивная группа целых чисел, где единицей группы будет нуль (0), а обратным элементом к целому числу g является $-g$. За систему образующих группы в данном случае можно принять единицу (1), так что группу целых чисел можно обозначить $\{1\}$. Если в качестве подмножества E взять отличное от нуля целое число n, то $\{n\}$ будет подгруппой группы $\{1\}$, состоящей из всех кратных числа n.

Общая теория универсальных алгебр позволяет не только добиться единого подхода к различным абстрактным алгебраическим схемам, но и дает также возможность, как зто уже было сказано в предисловии, изучать общие закономерности на примере конкретных алгебраических систем. В самом деле, если для конкретной алгебраической системы установлены некоторые результаты, то при учете общей основы у разных систем становится возможным обнаруживать аналогичные результаты для других алгебраических систем.

В этой связи какую-то конкретную алгебраическую систему целесообразно взять за образец для изучения общих алгебраических соотношений, встречаемых во многих других теориях. Эта идея относится к числу центральных для данной книги.

По аналогии с теорией универсальных алгебр, в теоретической и математической физике в последние годы также начался процесс выделения общей математической основы у разных физических теорий.

§ 4. Изоморфные отображения, автоморфизмы и гомоморфизмы универсальных алгебр

Универсальные алгебры G и G', в которых заданы одни и те же системы операций Ω, называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение алгебры G на алгебру G', переводящее элементы $g \in G$ в соответствующие им элементы $g' \in G'$, при котором для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$

$$(g_1 g_2 \ldots g_n \omega)' = (g_1' g_2' \ldots g_n' \omega). \qquad (1.9)$$

Поскольку при изоморфном отображении G на G' сохраняются все свойства алгебры, формулируемые на языке операций Ω, то с точки зрения абстрактной математики, где природа составляющих G элементов не играет роли, изоморфные алгебры можно считать тождественными.

Изоморфное отображение алгебры G на себя называется *автоморфизмом*. Назовем умножением автоморфизмов результат их последовательного выполнения. Тогда по отношению к определенной таким образом операции умножения все автоморфизмы универсальной алгебры G составляют группу G_A, где единицей группы служит тождественный автоморфизм. В самом деле, умножение автоморфизмов ассоциативно, обратное отображение также является автоморфизмом, так что все групповые свойства выполняются. Группа автоморфизмов относится к числу важных характеристик универсальной алгебры G.

Рассмотрим теперь также отображения алгебры G в алгебру G' (т. е. не обязательно на всю алгебру G', что характеризуется заменой предлога «на» на предлог «в»), при которых условия (1.9) выполняются, но которые являются лишь однозначными, но не обязательно взаимно однозначными. Такие отображения называются *гомоморфизмами*. Гомоморфные отображения алгебры G в себя называются *эндоморфизмами*; множество всех эндоморфизмов образует полугруппу.

Пусть φ — некоторый фиксированный гомоморфизм универсальной алгебры G в G', так что

$$g\varphi = g'. \tag{1.10}$$

Если считать эквивалентными такие элементы g, $\tilde{g}, \ldots$ из G, которые при гомоморфизме φ переходят в один и тот же элемент g' из G', то этим определяется разбиение универсальной алгебры G на *классы эквивалентных элементов*. Обозначим определяемое таким путем отношение эквивалентности через ρ, так что эквивалентность элементов g и $\tilde{g}$ записывается в виде $g\rho\tilde{g}$. Тогда для n-арной операции ω

$$(g_1 \ldots g_n\omega)\,\rho\,(\tilde{g}_1 \ldots \tilde{g}_n\omega). \tag{1.11}$$

В самом деле, поскольку гомоморфное отображение φ согласно (1.9), переводит n-арную операцию в n-арную операцию над элементами, полученными в результате гомоморфного отображения, то обе части (1.11) принадлежат к одному и тому же классу эквивалентных элементов.

Множество классов эквивалентных элементов алгебры G по отношению эквивалентности ρ называется *фактор-алгеброй* алгебры G по эквивалентности ρ и обозначается $\frac{G}{\rho}$.

Пусть, обратно, в алгебре G задано отношение эквивалентности ρ, удовлетворяющее условиям (1.11). Для отношений эквивалентности с этими условиями обычно применяют специальный термин и называют их *конгруенциями*. Из (1.11) следует, что класс эквивалентных элементов, определяемый по элементу $(g_1, g_2, \ldots g_n\,\omega)$, не зависит от выбора $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в их классах. Поэтому конгруенцией определяется гомоморфное отображение G в $\frac{G}{\rho}$.

Установленное выше взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и конгруенциями алгебр обычно называют теоремой о гомоморфизмах универсальных алгебр.

§ 5. Задание универсальных алгебр с помощью независимых образующих, связанных определяющими соотношениями. Инвариантные свойства алгебр

Пусть имеется универсальная алгебра некоторого примитивного класса, так что ее элементы удовлетворяют тождественным соотношениям типа (1.6), и пусть E является ее системой образующих. Если какой-либо элемент из E выражается через остальные элементы с помощью операций из Ω, то из множества образующих его можно исключить, поэтому без нарушения общности будем считать, что все элементы E независимы. Если независимые образующие не связаны между собой какими-либо дополнительными соотношениями, отличными от тех тождеств Λ, которые характеризуют примитивный класс, то E называется *системой свободных образующих*, а G в этом случае называется *свободной универсальной алгеброй данного примитивного класса*. В общем случае независимые образующие из E могут быть связаны между собой некоторыми определяющими соотношениями. Тогда алгебра G будет задаваться множеством операций Ω, тождественными соотношениями Λ, множеством независимых образующих E и определяющими соотношениями, которые конструируются с помощью операций из Ω.

Например, группа с одной свободной образующей изоморфна аддитивной группе целых чисел. В самом деле, если для группового умножения применить аддитивную запись и обозначить образующую x символом 1, то $\{1\}$ будет совпадать с аддитивной группой целых чисел. Пусть теперь образующая x удовлетворяет определяющему соотношению, которое в мультипликативной записи имеет вид

$$x^p = 1, \tag{1.12}$$

где p — целое число. В этом случае группа G будет содержать p различных независимых элементов 1, $x, \ldots, x^{p-1}$, т. е. ее порядок, по определению равный числу независимых элементов, будет конечным. Примером конкретной реализации последней группы служит группа вращений твердого тела вокруг фиксированной оси на углы, кратные $2\pi/p$.

Независимые образующие у одной и той же универсальной алгебры G можно выбирать различным образом. Если, например, E и E' — две системы образующих (которые в общем случае могут удовлетворять разным определяющим соотношениям), то существуют преобразования, с помощью которых элементы из E' можно выразить через элементы из E, и обратные преобразования, выражающие элементы из E через элементы из E'. Поскольку, далее, преобразования между различными системами образующих E, E', E'', ... ассоциативны, то множество всех таких преобразований образует группу G_E.

Внутренними и поэтому наиболее важными свойствами универсальной алгебры G являются те ее свойства, которые не зависят от случайного выбора множества независимых образующих или, другими словами, которые инвариантны по отношению к преобразованиям из G_E. К числу таких свойств относятся свойства группы автоморфизмов (или полугруппы эндоморфизмов) алгебры G, свойство некоторых подмножеств быть подалгебрами, свойства групп автоморфизмов таких подалгебр и т. д. Соответственно этому при изучении конкретных алгебраических систем в принципиальном отношении наиболее важной задачей является нахождение свойств, инвариантных по отношению к преобразованиям из группы преобразований систем образующих.

В заключение заметим, что введенные выше универсальные алгебры являются частным случаем общих алгебраических систем, в которых наряду с алгебраическими операциями Ω могут быть определены также так называемые *n-арные отношения* (или *n-местные предикаты*) $P(g_1, \ldots, g_n)$, принимающие лишь два значения — И (истина) или Л (ложь). Примером бинарного отношения служит отношение порядка, когда про любые два элемента g_1 и g_2 можно сказать, что или $g_1 \geqslant g_2$, или это неверно.

Глава 2

ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Ассоциативные, лиевы и йордановы кольца

Кольцом называется универсальная алгебра G, в которой определены бинарные операции сложения и умножения $+$ и $\circ$. По отношению к операции сложения множество G должно быть абелевой группой, по отношению к операции умножения — группоидом, а обе эти операции должны быть связаны между собой законами дистрибутивности:

$$\begin{gathered} g_3 \circ (g_1 + g_2) = g_3 \circ g_1 + g_3 \circ g_2, \\ (g_1 + g_2) \circ g_3 = g_1 \circ g_3 + g_2 \circ g_3. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Кольцо G называется *ассоциативным*, если мультипликативный группоид G является полугруппой, так что выполняется условие ассоциативности (1.2). Примером *подкольца* H ассоциативного кольца G служит множество элементов h из G, перестановочных (коммутирующих) с каждым элементом $g \in G$, так что

$$hg = gh \qquad (h \in H,\ g \in G). \tag{2.2}$$

Подкольцо H, определяемое с помощью (2.2), называется *центром кольца* G.

Исходя из ассоциативного кольца G, можно построить кольца других типов. Введем операцию *лиева умножения* (обозначив ее квадратными скобками) по формуле

$$[g_1, g_2] = k\,(g_1 g_2 - g_2 g_1), \tag{2.3}$$

где k — некоторый фиксированный элемент из центра кольца G. Тогда из (2.3) и из условия ассоциативности (1.2) следует (элементарную проверку предоставляем читателю), что при любых $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$[g_1, g_2] = -[g_2, g_1], \tag{2.4}$$

$$[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0. \tag{2.5}$$

Лиевым называется такое кольцо, где умножение удовлетворяет условиям (2.4) — (2.5), причем в общем случае лиево умножение с ассоциативным умножением не связано.

Возвращаясь к ассоциативному кольцу, введем операцию *йорданова умножения* по формуле

$$g_1 \cdot g_2 = k(g_1 g_2 + g_2 g_1), \tag{2.6}$$

где k — фиксированный элемент из центра кольца G. Из (2.6) и условия ассоциативности следует, что при любых $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1, \tag{2.7}$$

$$((g_1 \cdot g_1) \cdot g_2) \cdot g_1 = (g_1 \cdot g_1) \cdot (g_2 \cdot g_1). \tag{2.8}$$

(Проверку этих условий и условий дистрибутивности (2.1) предоставляем читателю.) Всякое кольцо, удовлетворяющее условиям (2.7) — (2.8), называется *йордановым*; оно всегда коммутативно, но в общем случае неассоциативно.

§ 2. Кольца наблюдаемых в классической и квантовой механике

Проиллюстрируем введенные выше понятия для замкнутой физической системы, ограничиваясь для определенности нерелятивистским случаем. В классической механике за элементы $g_1, g_2, \ldots$ возьмем бесконечно дифференцируемые в некоторой области функции от обобщенных координат q^k и обобщенных импульсов p_k ($k=1, 2, \ldots, N$) [1]; эти функции мы будем называть *наблюдаемыми.* Обычное умножение функций является ассоциативным, поэтому по отношению к нему наблюдаемые g образуют ассоциативное кольцо G. Йорданово умножение определим по формуле

$$g_1 \cdot g_2 = \frac{1}{2}(g_1 g_2 + g_2 g_1), \tag{2.9}$$

---

[1]) Напомним, что обобщенные импульсы в классической механике вводятся следующим образом. Пусть q^k — обобщенные координаты, $\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt}$ — обобщенные скорости. Тогда по кинетической энергии T и потенциальной энергии V определяется функция Лагранжа $L=T-V=L(q, \dot{q})$, и уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0.$$

Обобщенные импульсы определяются как $p_k(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$. Если за независимые переменные принять не q^k, $\dot{q}^k$, а q^k, p_k и ввести гамильтониан H по формуле

$$H(p, q) = \sum p_k \dot{q}^k - L,$$

то

$$dH = d\left(\sum p_k \dot{q}^k - L\right) = \sum (\dot{q}^k\, dp_k - \dot{p}_k\, dq^k) =$$
$$= \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\, dp_k + \frac{\partial H}{\partial q^k}\, dq^k\right),$$

откуда следует, что уравнения Лагранжа могут быть заменены на уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q^k}.$$

В квантовой механике q^k и p_k представляются в виде эрмитовых операторов, причем уравнения движения как в классической, так и в квантовой механике при учете (2.10), (2.11) принимают вид

$$\frac{dq^k}{dt} = [H, q^k], \qquad \frac{dp_k}{dt} = [H, p_k].$$

откуда с учетом коммутативности умножения функций следует, что йорданово умножение совпадает с обычным. Наконец, лиево произведение наблюдаемых определим с помощью скобки Пуассона:

$$[g_1, g_2] = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial g_1}{\partial p_k}\frac{\partial g_2}{\partial q^k} - \frac{\partial g_1}{\partial q^k}\frac{\partial g_2}{\partial p_k}\right). \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что тождества (2.4) и (2.5) выполняются. Поскольку равенство (2.5) в механике обычно называется тождеством Якоби, то и для общих лиевых колец его называют так же.

В нерелятивистской квантовой механике наблюдаемыми $g_1, g_2, \ldots$ называются эрмитовы операторы, выраженные через операторы q^k и p_k, соответствующие обобщенным координатам и импульсам. Квантовомеханическая скобка Пуассона, характеризующая лиево умножение наблюдаемых, определяется с помощью формулы, аналогичной (2.3):

$$[g_1, g_2] = \frac{i}{\hbar}(g_1 g_2 - g_2 g_1), \tag{2.11}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π, а мнимая единица i вводится для того, чтобы лиево произведение наблюдаемых было эрмитовым оператором, т. е. снова наблюдаемой. Йорданово произведение наблюдаемых определяется по формуле (2.9); в квантовой механике оно уже не является ассоциативным. Наконец, поскольку обычное умножение двух эрмитовых операторов не является эрмитовым оператором, то ассоциативное умножение квантовомеханических наблюдаемых не определяется. Однако ассоциативное умножение операторов служит важным вспомогательным понятием для определения лиева (2.11) и йорданова (2.9) произведения наблюдаемых.

После того, как определены алгебраические операции умножения наблюдаемых, задание различных колец наблюдаемых соответствующего типа будет определяться заданием тех или иных множеств образующих.

Введем теперь в классической и квантовой механике *кольца наблюдаемых*, в которых определены одновременно лиево и йорданово умножения. Из (2.9) — (2.11) следует, что

$$[g_1 \cdot g_2, g_3] = g_1 \cdot [g_2, g_3] + g_2 \cdot [g_1, g_3], \qquad (2.12)$$

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) - (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = \frac{\hbar^2}{4} [g_2, [g_1, g_3]], \qquad (2.13)$$

причем в классической механике из-за ассоциативности йорданова умножения в правой части (2.13) следует положить $\hbar = 0$. Кольца G, в которых определены лиево и йорданово умножения, связанные между собой условиями (2.12)—(2.13), будем называть *лиево-йордановыми*.

Понятие о лиево-йордановых кольцах наблюдаемых лежит в основе алгебраической теории, дающей единое описание классических и квантовых систем. При этом постоянная Планка, согласно (2.13), приобретает четкий алгебраический смысл; переход к случаю $\hbar = 0$ соответствует переходу от одного примитивного класса к другому, а общими свойствами классических и квантовых систем являются те свойства универсальной алгебры наблюдаемых, которые не зависят от тождественного соотношения (2.13).

§ 3. Поля и тела и линейные пространства над ними. Обобщенные функции

Телом называется ассоциативное кольцо, в котором для любого элемента, отличного от нуля, существует обратный элемент, так что мультипликативный группоид кольца является группой. Поскольку для нуля унарная операция взятия обратного элемента не определена, то тело будет универсальной алгеброй, для которой эта унарная операция является лишь частичной. *Полем* называется тело, в котором умножение коммутативно.

Примерами полей могут служить числовые поля, порождаемые теми или иными множествами числовых образующих. Например, каждому уравнению n-й степени с числовыми коэффициентами

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{2.14}$$

которое, как известно, имеет n корней x_m из поля комплексных чисел, можно сопоставить поле коэффициентов P_a с образующими a_m и поле корней P_x с образующими x_m. Поскольку коэффициенты a_m являются симметрическими полиномами от корней x_m, то поле P_a является подполем поля P_x. Группа автоморфизмов поля P_x, оставляющих на месте каждый элемент из поля P_a, называется группой Галуа для уравнения (2.14). Свойства группы Галуа являются инвариантными (в смысле гл. 1, § 5) характеристиками полей P_a и P_x, поэтому изучение этой группы дает возможность обнаружить наиболее глубокие свойства уравнения (2.14).

Для физики основную роль играет *поле действительных чисел*, элементы которого обычно сопоставляются с измеряемыми на опыте числами, а также *поле комплексных чисел и тело кватернионов*. Тело кватернионов Q над полем действительных чисел R состоит из элементов вида

$$q = p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4 \qquad (p_1, p_2, p_3, p_4 \in R), \tag{2.15}$$

где элементы i, j, k, называемые кватернионными единицами, перестановочны с элементами из поля R и связаны между собой соотношениями

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Обратным элементом по отношению к q будет $q^*/n^2(q)$, где

$$q^* = p_1 - p_2 i - p_3 j - p_4 k \tag{2.17}$$

— так называемый *сопряженный кватернион* по отношению к q, а

$$n(q) = +\sqrt{q^* q} = +\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} \tag{2.18}$$

— неотрицательное число из поля R, называемое нормой кватерниона. *Действительной составляющей* кватерниона называется действительное число

$$\operatorname{Re} q = p_1. \tag{2.19}$$

Чтобы перенести приведенные определения на частный случай, когда тело Q совпадает с полем действительных или комплексных чисел, в формулах (2.15)—(2.19) p_2, p_3, p_4 или соответственно p_3, p_4 следует положить равными нулю.

Векторным пространством над Q называется универсальная алгебра G, в которой определены бинарная операция сложения, удовлетворяющая аксиомам абелевой группы, и бесконечное число унарных операций, соответствующих умножению элементов $\varphi \in G$ справа на элементы $q \in Q$, причем

$$(\varphi_1 + \varphi_2) q = \varphi_1 q + \varphi_2 q; \qquad \varphi (q_1 + q_2) = \varphi q_1 + \varphi q_2;$$
$$(\varphi q_1) q_2 = \varphi (q_1 q_2). \tag{2.20}$$

Независимые образующие e_ρ векторного пространства G называются его *базисными элементами*; произвольный элемент $\varphi \in G$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов с коэффициентами φ^ρ из тела Q. В дальнейшем мы будем систематически (без специального напоминания об этом) пользоваться *обобщенным правилом суммирования Эйнштейна*, в соответствии с которым, если индексы или символы, по которым производится суммирование или интегрирование, в одной части какого-либо равенства встречаются вверху или внизу, а в другую часть равенства не входят, то подразумевается суммирование по всем значениям этих индексов. При этом различные множества, по которым производится суммирование, будут отличаться друг от друга различными буквами, применяемыми для обозначения немых индексов или символов суммирования. При использовании этого правила общий элемент векторного пространства G над телом Q можно записать в виде

$$\varphi = e_\rho \varphi^\rho \qquad (\varphi \in G,\ \varphi^\rho \in Q). \tag{2.21}$$

В квантовой механике бесконечномерные векторы, характеризующие состояние физической системы, в соответствии с обозначениями Дирака мы будем записывать также в виде

$$\varphi = |\varphi\rangle = |e_\rho\rangle \varphi^\rho. \tag{2.22}$$

Дуальным векторным пространством L по отношению к векторному пространству G называется множество определенных на G линейных функций $f(\varphi) = \langle f | \varphi\rangle$, принадлежащих телу Q (так что $\langle f | \varphi\rangle \in Q$ при любых $f \in L$, $\varphi \in G$) и удовлетворяющих условиям

$$\langle q_1 f_1 + q_2 f_2 | \varphi\rangle = q_1 \langle f_1 | \varphi\rangle + q_2 \langle f_2 | \varphi\rangle \quad (f_1, f_2 \in L), \tag{2.23}$$

$$\langle f | \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2\rangle = \langle f | \varphi_1\rangle q_1 + \langle f | \varphi_2\rangle q_2 \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in G). \tag{2.24}$$

Для конечномерного случая можно положить

$$f = f_\rho^* e^\rho. \tag{2.25}$$

Здесь $f_\rho{}^*$ — элементы из тела Q, а базисные элементы $e^\rho \in L$ определяются, исходя из формул

$$\langle e^{\rho_1} | e_{\rho_2}\rangle = \delta^{\rho_1}_{\rho_2}, \tag{2.26}$$

где $\delta^{\rho_1}_{\rho_2}$ — *символ Кронекера*, равный 1, если $\rho_1 = \rho_2$, и равный нулю в остальных случаях. Из (2.21), (2.25) и (2.26) следует

$$\langle f | \varphi\rangle = f_\rho^* \varphi^\rho. \tag{2.27}$$

Выписанные формулы с некоторыми оговорками можно перенести и на бесконечномерный случай. Пусть, например, G — линейное пространство, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль вне некоторого интервала. Тогда можно положить $\varphi^x = \varphi(x)$, $f_x = f(x)\,dx$, и (2.27) принимает вид

$$\langle f | \varphi\rangle = f_x^* \varphi^x = \int\limits_x f^*(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{2.28}$$

Поскольку элементы дуального пространства $f \in L$ определяются заданием элементов $\langle f | \varphi \rangle \in Q$ для всех функций $\varphi(x)$ (обычно называемых основными), то $f(x)$, входящие в (2.28), могут быть не только обычными, но и так называемыми *обобщенными функциями*. Например, если f переводит все $\varphi(x)$ в $\langle f | \varphi \rangle = \varphi(x_0)$, то $f(x) = \delta(x - x_0)$, где $\delta(x - x_0)$ — δ-функция Дирака.

Изложенный нами *первый алгебраический метод* введения обобщенных функций, связанный с идеями Соболева и Шварца, может быть положен в основу математически строгой теории таких функций (см. литературные указания).

§ 4. Полугруппа эндоморфизмов векторного пространства

Применим общие определения из § 1 этой главы к векторному пространству G, являющемуся частным случаем универсальных алгебр.

Эндоморфизм u векторного пространства G, т. е. гомоморфное отображение G в себя, переводит базисные векторы e_ρ в преобразованные векторы

$$e'_\rho = u(e_\rho) = e_{\rho_1} u_\rho^{\rho_1} \qquad (u_\rho^{\rho_1} \in Q). \tag{2.29}$$

Поскольку, в соответствии с (1.9), при гомоморфизмах сохраняются все n-арные операции (в данном случае операции аддитивной группы и унарные операции умножения векторов справа на элементы из Q), то вектор общего вида (2.21) при эндоморфизме u перейдет в

$$\varphi' = e_{\rho_1} u_\rho^{\rho_1} \varphi^\rho = e_\rho (\varphi^\rho)', \tag{2.30}$$

где $(\varphi^\rho)' = u_{\rho_1}^\rho \varphi^{\rho_1}$. Преобразование $(\varphi^\rho)' = u_{\rho_1}^\rho \varphi^{\rho_1}$ можно переписать также в матричной форме. Например, если индекс ρ принимает дискретные значения $1, 2, \ldots$, то

$$\begin{pmatrix} (\varphi^1)' \\ (\varphi^2)' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

так что верхний индекс у $u_{\rho_2}^{\rho_1}$ при использовании обозначения (2.31) характеризует номер строки у матрицы $(u_{\rho_2}^{\rho_1})$, а нижний индекс — номер столбца. Из (2.29) и (2.30) следует, что если сначала осуществить эндоморфизм u, а затем эндоморфизм v, то матрица результирующего эндоморфизма имеет вид

$$(vu)_{\rho_2}^{\rho_1} = v_{\rho}^{\rho_1} u_{\rho_2}^{\rho}, \tag{2.32}$$

что определяет обычное правило перемножения матриц. Эндоморфизмы любой универсальной алгебры образуют мультипликативную полугруппу, поэтому умножение (2.32) ассоциативно.

Если векторное пространство G состоит из основных функций $\varphi^x = \varphi(x)$, то можно положить $u_{x_1}^x = u(x, x_1)\,dx$, и (2.30) принимает вид

$$(\varphi^x)' = u_{x_1}^x \varphi^{x_1} = \int\limits_{x_1} u(x, x_1)\,\varphi(x_1)\,dx_1. \tag{2.33}$$

Поскольку эндоморфизм определяется лишь тем, в какую основную функцию переходит произвольная основная функция $\varphi^x = \varphi(x)$, то в правой части функционала (2.33) величины $u(x, x_1)$ могут быть не обычными функциями, а обобщенными. Это приводит ко *второму алгебраическому методу* строгого введения обобщенных функций. В частности, если $u(x, x_1) = \delta(x - x_1)$, то $(\varphi^x)' = \varphi(x)$, т. е. δ-функция Дирака определяется заданием тождественного автоморфизма пространства всех основных функций. Обобщенные функции, определяемые по основным функциям с помощью первого и второго алгебраического метода, будем называть *обобщенными функциями первой ступени*.

Поскольку пространство L, дуальное к пространству основных функций G, само уже содержит обобщенные функции $f(x)$, то эндоморфизмы пространства L

$$(f(x))' = \int\limits_{x_1} v(x, x_1)\,f(x_1)\,dx_1 \tag{2.34}$$

определяют обобщенные функции нового типа, которые мы назовем *обобщенными функциями второй ступени*. Рассматривая эндоморфизмы векторного пространства, содержащего обобщенные функции v второй ступени, получим обобщенные функции третьей ступени и т. д. Таким образом, алгебраические методы дают возможность, исходя из векторного пространства основных функций, строго определить *обобщенные функции n-й ступени*, где $n=1, 2, \ldots$

§ 5. Структура подпространств векторного пространства и структура подалгебр универсальной алгебры

Согласно § 5 гл. 1 при изучении алгебраических систем принципиально важной задачей является нахождение таких внутренних свойств, которые не зависят от выбора образующих. Покажем, как эта задача решается для случая, когда универсальная алгебра G является векторным пространством над телом или полем Q.

Возьмем произвольную систему *линейно независимых* векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из G. Линейная независимость означает, что при любых отличных от нуля элементах $q^1, q^2, \ldots$ из Q вектор

$$\varphi = \varphi_1 q^1 + \varphi_2 q^2 + \ldots = \varphi_\gamma q^\gamma \tag{2.35}$$

будет отличным от нуля. Возьмем *линейное подпространство* (называемое также *линейным многообразием*) $s=\{\varphi_\gamma\}$, натянутое на векторы φ_γ и состоящее из совокупности всех векторов вида (2.35) для случая, когда q^γ пробегают все значения из Q. К числу линейных подпространств s будем относить также *нулевое подпространство*, соответствующее случаю, когда число линейно независимых векторов φ_γ равно нулю, и *все пространство*, когда s совпадает с G. Если G совпадает с трехмерным векторным пространством, то величинами s будут нулевое пространство, всевозможные прямые, всевозможные плоскости и, наконец, все пространство. В общем случае элементы s также могут быть наглядно представлены в виде геометрических образов типа прямых, плоскостей, гиперплоскостей и т. д., что дает возможность пользоваться геометрической интуицией.

Объединением $s_1 \bigcup s_2$ двух произвольных линейных подпространств s_1 и s_2 называется подпространство, натянутое на образующие обоих этих подпространств. Их ***пересечением*** $s_1 \bigcap s_2$ называется наибольшее векторное пространство, содержащееся одновременно в s_1 и s_2. Для операций объединения и пересечения выполняются следующие очевидные тождественные соотношения:

$$s \bigcap s = s, \quad s \bigcup s = s, \quad s_1 \bigcup s_2 = s_2 \bigcup s_1, \quad s_1 \bigcap s_2 = s_2 \bigcap s_1; \tag{2.36}$$

$$(s_1 \bigcap s_2) \bigcap s_3 = s_1 \bigcap (s_2 \bigcap s_3), \quad (s_1 \bigcup s_2) \bigcup s_3 = s_1 \bigcup (s_2 \bigcup s_3); \tag{2.37}$$

$$s_1 \bigcap (s_1 \bigcup s_2) = s_1, \qquad s_1 \bigcup (s_1 \bigcap s_2) = s_1. \tag{2.38}$$

Универсальная алгебра, состоящая из элементов s, для которых определены бинарные операции $\bigcup$ и $\bigcap$, связанные между собой соотношениями (2.36) — (2.38), называется *структурой*. Множество всех линейных подпространств векторного пространства служит одной из конкретных реализаций абстрактной структуры. С учетом (2.36) — (2.38) для структуры вводится соотношение *частичной упорядоченности* или *включения*, характеризуемое символом $\subseteq$. По определению $s_1 \subseteq s_2$ в том и только том случае, если

$$s_1 \bigcap s_2 = s_1, \quad s_1 \bigcup s_2 = s_2.$$

Структура линейных подпространств выделяется из общих структур двумя свойствами. Если s — произвольное подпространство и если через 0 обозначить нулевое подпространство, то найдется такое подпространство s_+, дополняющее s до всего векторного пространства G, что

$$s \bigcap s_+ = 0, \quad s \bigcup s_+ = G. \tag{2.39}$$

Структура, для которой выполняется это свойство, называется *структурой с дополнениями*. Если, далее, для двух произвольных пространств s_2 и s_3 взять их пересечения $s_1 \cap s_2$ и $s_1 \cap s_3$ с подпространством s_1, то объединение этих пересечений, очевидно, также будет лежать в подпространстве s_1, откуда следует[1])

$$s_1 \cap [(s_1 \cap s_2) \cup s_3] = (s_1 \cap s_2) \cup (s_1 \cap s_3). \qquad (2.40)$$

Если $s_1 \supseteq s_2$, то $s_1 \cap s_2 = s_2$, и из (2.40) получим:

$$\text{если } s_1 \supseteq s_2, \text{ то } s_1 \cap (s_2 \cup s_3) = s_2 \cup (s_1 \cap s_3). \qquad (2.41)$$

Тождественное соотношение (2.40), выделяющее структуры определенного примитивного класса, или эквивалентное ему условие (2.41), называется *условием дедекиндовости* (или *модулярности*) структуры.

Если размерность векторного пространства G конечна и равна n, то дедекиндова структура с дополнениями, элементами которой служат линейные пространства, изоморфна структуре линейных многообразий проективного пространства $(n-1)$ измерений и ею полностью определяются как размерность проективной геометрии, так и поле или тело Q, над которым она рассматривается (см. литературные указания). В частности, *принцип двойственности* проективной геометрии заключается в том, что все выписанные выше формулы останутся справедливы, если символы объединения и пересечения везде поменять местами, заменив при этом $\supseteq$ на $\subseteq$ и перейдя в формулах типа (2.39) от первоначальных пространств к дополнительным подпространствам.

Изучение алгебраических соотношений для одной из конкретных алгебраических систем, согласно гл. 1, может служить основой для нахождения общих алгебраических соотношений, встречающихся в других теориях. В нашем случае линейные подпространства являются подалгебрами векторного пространства, рассматриваемого в качестве универсальной алгебры. Если теперь дана произвольная универсальная алгебра G и если пересечением ее подалгебр s_1 и s_2 назвать

---

[1]) Более детальное доказательство можно найти в работах, цитируемых в литературных указаниях.

наибольшую подалгебру, содержащуюся одновременно в s_1 и s_2, а их объединением — подалгебру, порождаемую s_1 и s_2, то свойства (2.36)—(2.38) будут выполняться. Поэтому множество всех подалгебр произвольной универсальной алгебры образует структуру (в общем случае недедекиндову).

§ 6. Алгебры над полем действительных чисел. Матричные алгебры

Алгеброй G над телом Q называется векторное пространство над Q, которое одновременно является кольцом с бинарной операцией умножения $\circ$. Если при этом e_ρ — базисные элементы алгебры G, рассматриваемой как векторное пространство, то предполагается, что

$$e_{\rho_1} \circ (e_{\rho_2} q) = (e_{\rho_1} \circ e_{\rho_2})\, q, \qquad e_\rho q = q e_\rho. \tag{2.42}$$

Умножение произвольных элементов из G, записанных в виде (2.21), характеризуется заданием *структурных постоянных* $c_{\rho_1\rho_2}^{\rho_3}$, определяемых из соотношения

$$e_{\rho_1} \circ e_{\rho_2} = c_{\rho_1\rho_2}^{\rho_3} e_{\rho_3}, \tag{2.43}$$

где по ρ_3 в соответствии с общим правилом подразумевается суммирование или интегрирование. *Размерностью* или *рангом* алгебры G называется число базисных элементов e_ρ, если это число конечно. В противном случае говорят, что алгебра обладает *бесконечной размерностью* или является *бесконечномерной*.

Как указывалось ранее, с учетом физических приложений Q рассматривается нами лишь как тело кватернионов, поле комплексных чисел или поле действительных чисел. Во всех этих случаях алгебру G над Q можно превратить в алгебру над полем действительных чисел. Пусть, например, алгебра G имеет конечную размерность n, а Q — поле комплексных чисел так что произвольный элемент g из G можно представить в виде

$$g=\sum_{\rho=1}^{n} e_\rho q^\rho=\sum_{\rho=1}^{n} e_\rho p_1^\rho+\sum_{\rho=1}^{n} ie_\rho p_2^\rho, \tag{2.44}$$

где $q^\rho=p_1^\rho+ip_2^\rho$, p_1^ρ и p_2^ρ — действительные числа. Введем обозначения

$$p_1^\rho=p^\rho, \qquad p_2^\rho=p^{n+\rho}, \qquad ie_\rho=e_{n+\rho} \tag{2.45}$$

и положим, что индекс μ изменяется от 1 до $2n$. Тогда (2.44) с учетом (2.45) перепишется в виде

$$g=e_\rho q^\rho=e_\mu p^\mu. \tag{2.46}$$

Формулами (2.44)—(2.46) устанавливается взаимно однозначное соответствие между n-мерными векторами над полем комплексных чисел и $2n$-мерными векторами над полем действительных чисел. Закон умножения новых базисных элементов e_μ определяется (с учетом (2.42)) из (2.43), где в правой части $c_{\rho_1\rho_2}^{\rho_3}$ следует представить в виде суммы действительной и мнимой составляющих и затем заменить ie_{ρ_3} на $e_{n+\rho_3}$. В результате становится возможным эквивалентным образом записывать все формулы или в терминах алгебры G размерности n над полем комплексных чисел или соответствующей ей алгебры размерности $2n$ над полем действительных чисел.

Аналогично если G — алгебра размерности n над телом кватернионов Q, то ее можно рассматривать в качестве алгебры размерности $4n$ над полем действительных чисел R.

С точки зрения общей теории универсальных алгебр второй метод подхода приводит к более широкой группе автоморфизмов, т. е. оказывается более богатым различными возможностями. В самом деле, в первом случае унарными алгебраическими операциями будут операции умножения на всевозможные элементы из тела Q, содержащего подтело действительных чисел, а во втором — операции умножения на всевозможные элементы из поля действительных чисел. Между тем автоморфизмы алгебры G согласно § 4 гл. 1 определяются как такие изоморфные отображения G на себя, которые не меняют все алгебраические операции. Автоморфизм алгебры переводит общий элемент $g=e_\rho q^\rho$ в

$$\widetilde{g}=\widetilde{e}_\rho \widetilde{q}^\rho, \qquad \widetilde{e}_{\rho_1}\circ\widetilde{e}_{\rho_2}=c^{\rho_3}_{\rho_1\rho_2}\widetilde{e}_{\rho_3}, \tag{2.47}$$

где в первом случае $\widetilde{q}^\rho=q^\rho$, а во втором $\widetilde{q}^\rho$ может не совпадать с q^ρ (а равняться, например, сопряженному элементу от q^ρ). В частности, если Q — поле комплексных чисел, то автоморфизмы алгебры могут сопровождаться заменой во всех формулах i на $-i$. Неучет этого обстоятельства приводил к тому, что в квантовой механике при описании пространственных отражений для алгебры наблюдаемых долгое время не рассматривались так называемые антилинейные представления, связанные с заменой комплексных чисел на сопряженные. В дальнейшем, чтобы не пропустить подобного рода важные математические возможности, мы будем рассматривать все алгебры только над полем действительных чисел, а не над более широким содержащим его телом Q.

Остановимся более подробно на случае ассоциативных алгебр. Пусть заданы ассоциативные алгебры над полем действительных чисел G_1 и G_2 с базисными элементами e_ρ и e_σ. Алгебра $G_+=G_1+G_2$ называется *прямой суммой алгебр* G_1 и G_2, если ее базисными элементами служат одновременно e_ρ и e_σ, причем $e_\rho e_\sigma=e_\sigma e_\rho=0$. Алгебра $G=G_1\times G_2$ называется *прямым произведением алгебр* G_1 и G_2, если она порождается базисными элементами $e_\mu=e_\rho e_\sigma$, причем $e_\rho e_\sigma=e_\sigma e_\rho$ и все e_μ линейно независимы над полем действительных чисел. Переход от ассоциативной алгебры G_1 над телом Q, содержащим поле действительных чисел, к определяемой ею ассоциативной алгебре над полем действительных чисел соответствует переходу от G_1 над Q к ассоциативной алгебре $G_1\times Q$ над полем действительных чисел.

Поскольку алгебра G над полем действительных чисел R является векторным пространством над R, то эндоморфизм алгебры G как векторного пространства, согласно (2.29), характеризуется формулой

$$g = e_\mu p^\mu \to g' = e'_\mu p^\mu, \qquad e'_\mu = e_{\mu_1} u^{\mu_1}_\mu \qquad (u^{\mu_1}_\mu \in R). \tag{2.48}$$

Этот эндоморфизм будет эндоморфизмом G как алгебры над R в том и только том случае, если базисные элементы e_μ и e_μ' удовлетворяют одним и тем же алгебраическим соотношениям типа (2.43):

$$e_{\mu_1} \circ e_{\mu_2} = c^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2} e_{\mu_3}, \qquad e'_{\mu_1} \circ e'_{\mu_2} = c^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2} e'_{\mu_3}. \tag{2.49}$$

Отсюда с учетом (2.48) следует, что в этом случае на элементы $u^{\mu_2}_{\mu_1}$ накладываются ограничения вида:

$$u^{\mu_4}_{\mu_1} u^{\mu_5}_{\mu_2} c^{\mu_6}_{\mu_4\mu_5} = c^{\mu_3}_{\mu_1\mu_2} u^{\mu_6}_{\mu_3}. \tag{2.50}$$

Если эндоморфизм u алгебры G над R одновременно является автоморфизмом, то должен существовать обратный эндоморфизм u^{-1}, так что

$$u^{\mu_1}_\mu (u^{-1})^\mu_{\mu_2} = (u^{-1})^{\mu_1}_\mu u^\mu_{\mu_2} = \delta^{\mu_1}_{\mu_2}. \tag{2.51}$$

Автоморфизм ассоциативной алгебры G над полем R называется *внутренним*, если он определяется как такое изоморфное отображение алгебры G на себя, при котором произвольный элемент $g \in G$ переходит в

$$g' = sgs^{-1} \qquad (s \in G). \tag{2.52}$$

Инволютивным сопряжением или *инволютивным антиавтоморфизмом* ассоциативной алгебры G называется взаимно однозначное отображение алгебры G на саму себя, обладающее тем свойством, что если произвольные элементы g_1 и g_2 из G переходят в $\overset{*}{g}_1$ и $\overset{*}{g}_2$ из G, то

$$(g_1 g_2)^* = \overset{*}{g}_2 \overset{*}{g}_1, \qquad (g^*)^* = g, \tag{2.53}$$

$$(p_1 g_1 + p_2 g_2)^* = p_1 \overset{*}{g}_1 + p_2 \overset{*}{g}_2. \tag{2.54}$$

Отсюда видно, что инволютивный антиавтоморфизм отличается от автоморфизма лишь изменением порядка перемножаемых элементов. Элементы $\overset{*}{g}_1$ и $\overset{*}{g}_2$ мы будем называть *сопряженными* по отношению к g_1 и g_2.

Важным примером ассоциативных алгебр над полем действительных чисел будут алгебры, элементы которых по отношению к операциям умножения и сложения изоморфны матрицам над телом Q. Общий элемент g такой алгебры можно записать в виде

$$g = e_{\beta_1}^{\beta_2} q_{\beta_2}^{\beta_1} \qquad (q_{\beta_2}^{\beta_1} \in Q). \tag{2.55}$$

Здесь $e_{\beta_1}^{\beta_2}$ перестановочны с элементами из Q и связаны между собой соотношениями

$$e_{\beta_1}^{\beta_2} e_{\beta_3}^{\beta_4} = \delta_{\beta_3}^{\beta_2} e_{\beta_1}^{\beta_4}, \tag{2.56}$$

где $\delta_{\beta_1}^{\beta_2}$ — символы Кронекера. Элементы $e_{\beta_1}^{\beta_2}$ могут быть представлены в виде квадратных матриц, у которых на пересечении β_1-й строки и β_2-го столбца стоит единица, а на всех остальных местах стоят нули. При этом определении общий элемент алгебры (2.55) принимает вид

$$g = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = e_{\beta_1}^{\beta_2} q_{\beta_2}^{\beta_1}. \tag{2.57}$$

Однако в общем случае мы рассматриваем абстрактную алгебру, свойства которой не зависят от вида элементов $e_{\beta_1}^{\beta_2}$, а на указанную выше реализацию этих элементов в виде квадратных матриц следует смотреть как на подтверждение существования подобного рода ассоциативных алгебр (что позволяет, например, не проводить проверку условия ассоциативности для алгебры, определяемой формулами (2.55) — (2.56)).

Если индекс β пробегает конечное число значений от 1 до n, то ассоциативную алгебру над полем действительных чисел, образованную всевозможными элементами вида (2.55), обозначим $Q_{(n)}$. В зависимости от того, будет ли Q полем действительных чисел, полем комплексных чисел или телом кватернионов, ранг алгебры $Q_{(n)}$ будет, соответственно, равен n^2, $2n^2$ или $4n^2$.

Покажем, что во втором и третьем случаях $Q_{(n)}$ изоморфны некоторым подалгебрам алгебры действительных квадратных матриц порядков соответственно $2n$ и $4n$.

В самом деле, пусть $R_{(m)}$ и $R_{(n)}$ — ассоциативные алгебры действительных квадратных матриц порядков m и n с базисными элементами

$$e_{\beta_2}^{\beta_1} \ (\beta = 1, 2, \ldots, m) \text{ и } e_{\alpha_2}^{\alpha_1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Прежде всего покажем, что

$$R_{(mn)} = R_{(m)} \times R_{(n)}. \tag{2.58}$$

Положив

$$e_{\gamma_2}^{\gamma_1} = e_{\alpha_2}^{\alpha_1} e_{\beta_2}^{\beta_1} = e_{\beta_2}^{\beta_1} e_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \tag{2.59}$$

где

$$\gamma_k = (\beta_k - 1) n + \alpha_k \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, mn), \tag{2.60}$$

с помощью формул типа (2.56) получим

$$e_{\gamma_1}^{\gamma_2} e_{\gamma_3}^{\gamma_4} = (\delta_{\alpha_3}^{\alpha_2} e_{\alpha_1}^{\alpha_4})(\delta_{\beta_3}^{\beta_2} e_{\beta_1}^{\beta_4}) = (\delta_{\alpha_3}^{\alpha_2} \delta_{\beta_3}^{\beta_2}) e_{\gamma_1}^{\gamma_4} = \delta_{\gamma_3}^{\gamma_2} e_{\gamma_1}^{\gamma_4}, \tag{2.61}$$

что доказывает справедливость (2.58). Покажем далее, что алгебры Q комплексных чисел и кватернионов, рассматриваемые над полем действительных чисел R, изоморфны некоторым подалгебрам алгебр $R_{(2)}$ и $R_{(4)}$. В самом деле, изоморфное соответствие осуществляется с помощью формул

$$1 \equiv e_{(2)} = e_1^1 + e_2^2, \qquad i = e_2^1 - e_1^2 \tag{2.62}$$

или, соответственно,

$$1 \equiv e_{(4)} = e_1^1 + e_2^2 + e_3^3 + e_4^4, \qquad i = e_2^1 - e_1^2 + e_3^4 - e_4^3,$$
$$j = e_2^4 - e_1^3 + e_3^1 - e_4^2, \qquad k = e_4^1 + e_3^2 - e_2^3 - e_1^4 \tag{2.63}$$

(доказательство непосредственно вытекает из (2.56)). Наконец, поскольку алгебра $Q_{(n)}$ изоморфна прямому произведению $Q \times R_{(n)}$, а Q изоморфна подалгебре алгебры $R_{(2)}$ или $R_{(4)}$, то отсюда, с учетом (2.58), следует справедливость высказанного утверждения.

Если Q — алгебра комплексных чисел, то базисными элементами алгебры $Q_{(n)}$, рассматриваемой в качестве подалгебры $\subseteq R_{(2n)}$, согласно (2.59), (2.60) и (2.62), будут

$$E_{\alpha_2}^{\alpha_1} = e_{(2)} \times e_{\alpha_2}^{\alpha_1} = e_{\alpha_2}^{\alpha_1} + e_{n+\alpha_2}^{n+\alpha_1}, \tag{2.64}$$

$$IE_{\alpha_2}^{\alpha_1} = i \times e_{\alpha_2}^{\alpha_1} = e_{n+\alpha_2}^{\alpha_1} - e_{\alpha_2}^{n+\alpha_1}. \tag{2.65}$$

В этом представлении базисным элементам комплексных чисел соответствуют матрицы

$$E = e_{(2)} \times e_{(n)} = e_{\alpha}^{\alpha} + e_{n+\alpha}^{n+\alpha}, \qquad I = i \times e_{(n)} = e_{n+\alpha}^{\alpha} - e_{\alpha}^{n+\alpha}. \tag{2.66}$$

Аналогично, если Q — алгебра кватернионов, то кватернионным базисным элементам, согласно (2.59), (2.60) и (2.63), будут соответствовать следующие матрицы из $R_{(4n)}$:

$$\begin{aligned} E &= e_{(4)} \times e_{(n)} = e_{\alpha}^{\alpha} + e_{n+\alpha}^{n+\alpha} + e_{2n+\alpha}^{2n+\alpha} + e_{3n+\alpha}^{3n+\alpha}, \\ I &= i \times e_{(n)} = e_{n+\alpha}^{\alpha} - e_{\alpha}^{n+\alpha} + e_{2n+\alpha}^{3n+\alpha} - e_{3n+\alpha}^{2n+\alpha}, \\ J &= j \times e_{(n)} = e_{n+\alpha}^{3n+\alpha} - e_{3n+\alpha}^{n+\alpha} + e_{2n+\alpha}^{\alpha} - e_{\alpha}^{2n+\alpha}, \\ K &= k \times e_{(n)} = e_{3n+\alpha}^{\alpha} - e_{\alpha}^{3n+\alpha} + e_{2n+\alpha}^{n+\alpha} - e_{n+\alpha}^{2n+\alpha}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

а базисными элементами $Q_{(n)}$ будут

$$Ee_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \qquad Ie_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \qquad Je_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \qquad Ke_{\alpha_2}^{\alpha_1}. \tag{2.68}$$

§ 7. Алгебры наблюдаемых и их зависимость от выбора системы образующих и от вида скобок Пуассона

Если для колец наблюдаемых, рассмотренных в § 2 этой главы, ввести операции умножения на действительные числа, то мы получим *алгебры наблюдаемых G над полем действительных чисел R*. В квантовой механике иногда рассматривают также алгебры G над полем комплексных чисел, однако по изложенным ранее причинам мы будем рассматривать более общий (в отношении группы автоморфизмов алгебры G) случай, когда мнимая единица i в поле не включается.

Для уравнений (2.14) n-й степени глубокие алгебраические результаты, связанные с введением группы Галуа, удалось получить лишь после того, как от общего поля комплексных чисел перешли к изучению более узких полей P_a и P_x, порождаемых конечным числом образующих. Аналогично этому для нахождения глубоких алгебраических характеристик физических систем в классической и квантовой механике нужно рассматривать не наиболее общие лиево-йордановы алгебры наблюдаемых, а лишь такие алгебры, которые порождаются конечным числом образующих. Проиллюстрируем это на простом примере момента количества движения нерелятивистской частицы с координатами r^s $(s=1, 2, 3)$ и составляющими импульса p_s, где

$$[p_{s_1}, r^{s_2}] = \delta_{s_1}^{s_2}. \tag{2.69}$$

Из (2.69) следует, что как в классической, так и в квантовой теории составляющие M_s момента количества движения

$$M_1 = r^2p_3 - r^3p_2, \qquad M_2 = r^2p_1 - r^1p_3, \qquad M_3 = r^1p_2 - r^2p_1 \tag{2.70}$$

удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[M_1, M_2] = -M_3, \ \ldots, \tag{2.71}$$

где многоточие означает, что аналогичные соотношения получаются в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3. Из (2.71) следует, что $\{M_s\}$ является алгеброй Ли третьего ранга, которая связана с группой O_3 вращений трехмерного евклидова пространства и которую мы поэтому обозначим символом $L(O_3)$. Рассмотрим теперь лиево-йорданову алгебру G, содержащую наблюдаемые M_s и некоторые дифференцируемые функции от M_s, и ограничимся случаем классической теории. Из определения G и свойств скобок Пуассона (2.10) следует, что если для наблюдаемой H

$$[H, M_s] = 0 \tag{2.72}$$

(что соответствует инвариантности H относительно группы O_3), то для любой наблюдаемой

$$[H, g] = \frac{\partial g}{\partial M_1}[H, M_1] + \frac{\partial g}{\partial M_2}[H, M_2] + \frac{\partial g}{\partial M_3}[H, M_3] = 0. \tag{2.73}$$

Если G содержит произвольные функции от M_s, то, положив

$$\widetilde{p}_1 = M_3, \qquad \widetilde{p}_2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \qquad \widetilde{q}^1 = \operatorname{arctg}(M_2/M_1), \tag{2.74}$$

с учетом (2.69) и (2.10) получим

$$[\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2] = 0, \qquad [\widetilde{p}_1, \widetilde{q}^1] = 1, \qquad [\widetilde{p}_2, \widetilde{q}^1] = 0, \tag{2.75}$$

т. е. наблюдаемыми $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\widetilde{q}^1$ определяется алгебра Ли, существенно отличная от $L(O_3)$. Для того чтобы инвариантные свойства наблюдаемых H, определяемые по соотношениям типа (2.72), можно было характеризовать с помощью однозначно определяемых алгебр Ли, необходимо ограничить число образующих у алгебры G. Так, в нашем примере, если образующими лиево-йордановой алгебры G служат M_s, то $\widetilde{q}^1 = \operatorname{arctg}(M_2/M_1)$ в G не войдет и алгебра Ли с перестановочными соотношениями (2.75) не будет лиевой подалгеброй алгебры G.

Поэтому мы примем специальный постулат о конечном числе образующих, согласно которому *лиево-йордановые алгебры наблюдаемых, сопоставляемые с классическими и квантовыми системами, должны определяться заданием конечного числа независимых образующих.*

Напомним, что в соответствии с § 2 настоящей главы лиево-йорданова алгебра наблюдаемых однозначно определяет лиево-ассоциативную алгебру и наоборот, причем ассоциативное произведение произвольных наблюдаемых g_1 и g_2 выражается через йорданово и лиево произведения по формуле

$$g_1 g_2 = g_1 \cdot g_2 + \frac{\hbar}{2i}[g_1, g_2], \tag{2.76}$$

где в классической теории $\hbar \to 0$ и второе слагаемое следует положить равным нулю.

Докажем теперь следующую основную теорему о лиево-йордановых алгебрах наблюдаемых для физических систем:

Для каждой конкретной динамической задачи можно определить минимальную лиево-йорданову алгебру наблюдаемых, элементами которой будут решения динамических уравнений для всех наблюдаемых, рассматриваемых в задаче.

Будем исходить из того, что динамические свойства физической системы в классической и квантовой теории характеризуются заданием гамильтониана H. В классической механике H выражается через обобщенные координаты q^k и импульсы p_k, скобки Пуассона между которыми, в соответствии с (2.10), равны

$$[p_{k_1}, q^{k_2}] = \delta_{k_1}^{k_2}. \qquad (2.77)$$

В нерелятивистской квантовой механике гамильтониан H выражается через наблюдаемые q^{k_2}, p_{k_1}, для которых квантовомеханические скобки Пуассона попрежнему равны (2.77). Наконец, в релятивистской квантовой теории волновых полей гамильтониан H выражается через операторы рождения и уничтожения частиц. Если g — наблюдаемая, являющаяся функцией от q^k, p_k или, в квантовой теории волновых полей, от операторов рождения и уничтожения частиц, то изменение наблюдаемой g с течением времени во всех трех случаях характеризуется одним и тем же уравнением

$$\frac{dg}{dt} = [H, g]. \qquad (2.78)$$

Формула (2.78) имеет место для любой наблюдаемой, поэтому, заменяя в ней g на $d^{n-1}g/dt^{n-1}$ и обозначая $[H, g]$ символом $(\mathrm{ad}\, H)g$, из (2.78) получим

$$\frac{d^n g}{dt^n} = [\underbrace{H, [H, \ldots [H,}_{i} g] \ldots] = (\mathrm{ad}\, H)^n g. \qquad (2.79)$$

Если $g(t)$ — решение (2.78), а $d^n g/dt^n$ — значение n-й производной для $t=0$, то, разлагая $g(t)$ в ряд Тейлора и учитывая (2.79), получим

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underbrace{[H,\ \ldots\ [H}_{n},g]\ \ldots]=e^{t(\mathrm{ad}H)}g(0). \quad (2.80)$$

В частности, в квантовой теории из (2.80) получается следующая зависимость наблюдаемой (в представлении Гейзенберга) от времени:

$$g(t)=e^{tiH/\hbar}ge^{-tiH/\hbar}. \quad (2.81)$$

Для доказательства (2.81) следует сравнить в (2.80) и (2.81) члены при одинаковых степенях t и воспользоваться определением (2.11) квантовомеханических скобок Пуассона (применив при этом метод индукции по n; см. также литературные указания). Пусть динамическая задача для данной физической системы заключается в нахождении зависимости от времени системы независимых наблюдаемых g_k. Тогда из (2.78)—(2.80) следует, что минимальной лиево-йордановой алгеброй наблюдаемых, в рамках которой решается данная задача, будет алгебра с образующими g_k и H.

Решение проблемы о сопоставлении с динамическими задачами минимальных алгебр наблюдаемых может зависеть также от того, какой независимый параметр характеризует изменение наблюдаемых с течением времени. Более того, замена классического времени на другие параметры может связываться с переходом к новым физическим теориям. Например, при релятивистском обобщении классической механики оказалось необходимым ввести собственное время частицы, которое в специальной теории относительности зависит от скорости частицы, а в общей теории относительности — еще и от ее положения. *Каноническим* называется такое обратимое линейное преобразование u векторного пространства наблюдаемых g, переводящее g в ug, при котором новая скобка Пуассона от g_1 и g_2, определяемая по формуле

$$[g_1, g_2]_u=[ug_1, ug_2], \quad (2.82)$$

получается из старой скобки Пуассона в результате преобразования u, т. е.

$$[g_1, g_2]_u = u[g_1, g_2]. \qquad (2.83)$$

Если (2.83) не имеет места, то линейное преобразование u, являющееся эндоморфизмом векторного пространства G, называется *неканоническим*, причем из справедливости (2.4) и (2.5) для наблюдаемых ug следует, что новые скобки Пуассона по-прежнему удовлетворяют основным тождествам типа (2.4)—(2.5).

Покажем, что переход от времени t к новому временно́му параметру τ может быть представлен с помощью некоторого, в общем случае неканонического, преобразования. Для этого сконструируем в явном виде неканоническое преобразование u, соответствующее переходу от t к τ, причем наше построение допускает различные достаточно широкие обобщения. Ограничимся сначала случаем классической механики, и пусть гамильтониан H и другие наблюдаемые g являются функциями от некоторой постоянной K_0, так что

$$H = H(p, q, K_0), \qquad (2.84)$$

где q и p — сокращенная запись обобщенных координат q^k и импульсов p_k. Будем считать, что (2.84) можно однозначно разрешить относительно K_0:

$$K_0 = \Phi(p, q, H), \qquad (2.85)$$

и обратно (возможно, при наложении каких-то дополнительных ограничений) — из (2.85) следует (2.84). Определим u как такое преобразование, при котором наблюдаемые $g(p, q, K_0)$ переходят в

$$ug\{p, q, K_0\} = g\{p, q, \Phi(p, q, H_0)\}, \qquad (2.86)$$

где H_0 — постоянная, равная числовому значению энергии. Соответственно постоянная K_0 переходит в функцию

$$K = \Phi(p, q, H_0). \qquad (2.87)$$

При обратном преобразовании u^{-1} постоянная H_0 снова заменяется на функцию (2.84).

Чтобы преобразование u можно было рассматривать как автоморфизм пространства наблюдаемых, введем дополнительно канонические импульс p_{N+1} и координату q^{N+1} и будем считать, что гамильтониан H не зависит от q^{N+1}, но зависит от p_{N+1} по формуле, получаемой из (2.84) в результате замены K_0 на p_{N+1}. Отсюда следует, что $[H, p_{N+1}]=0$, т. е. дополнительная наблюдаемая p_{N+1} является интегралом движения и ее можно отождествить с постоянной K_0. Тогда u будет иметь смысл такого обратимого преобразования наблюдаемых, при котором во всех функциях $g(p, q, p_{N+1})$ величина p_{N+1} заменяется на $\Phi(p, q, p_{N+1})$. После этого за новый гамильтониан принимается $\Phi(p, q, p_{N+1})$, и затем интеграл движения p_{N+1} отождествляется с постоянной H_0.

Из (2.85) следует, что поскольку

$$[H, g] = \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial g}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}\right) = \frac{dg}{dt}, \tag{2.88}$$

то для произвольной наблюдаемой g выполняется тождество

$$[K_0, g] = \sum_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q^k} - \frac{\partial \Phi}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial H}\frac{dg}{dt} = 0. \tag{2.89}$$

С другой стороны, согласно (2.87),

$$[K, g] = \sum_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q^k} - \frac{\partial \Phi}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right), \tag{2.90}$$

так что если $ug=g$, т. е. если g не зависит от K_0, то

$$[K_0, g]_u = [K, g] = -\frac{\partial K}{\partial H_0}\frac{dg}{dt}. \tag{2.91}$$

Введем теперь вместо времени t такой независимый параметр τ, для которого

$$d\tau = dt \bigg/ \left(-\frac{\partial K}{\partial H_0}\right). \tag{2.92}$$

Тогда из (2.91) следует, что

$$\frac{dg}{d\tau} = [K, g] = [K_0, g]_u, \tag{2.93}$$

т. е. K становится возможным рассматривать в качестве нового гамильтониана, соответствующего новому временно́му параметру τ. Поэтому преобразование u, соответствующее замене K_0 на K и H на постоянную H_0, физически можно интерпретировать как неканонический переход от одного гамильтониана к другому.

Пример 1. Для классической свободной релятивистской частицы гамильтониан H определяется из формулы

$$H^2/c^2 - p^2 = m_0^2c^2, \tag{2.94}$$

где m_0 — масса покоя частицы, c — постоянная скорости света. Принимая $-m_0c^2$ за постоянную K_0, из (2.85) и (2.87) получим

$$K = -(H_0^2 - c^2p^2)^{1/2}, \quad \frac{\partial K}{\partial H_0} = -\frac{H_0}{(H_0^2 - c^2p^2)^{1/2}}. \tag{2.95}$$

Учитывая, что $c^2p^2/H_0^2 = v^2/c^2$, из (2.92) находим

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{2.96}$$

т. е. новый параметр τ совпадает с собственным временем релятивистской частицы.

Пример 2. Для случая кулоновского или ньютоновского взаимодействия двух нерелятивистских частиц гамильтониан H, характеризующий относительное движение двух частиц с массами m_1 и m_2, равен

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{K_0}{r}, \tag{2.97}$$

где $m = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса, а $K_0 = -e_1e_2$ или $K_0 = -\gamma m_1m_2$. Из (2.85) — (2.87) и (2.92) получим

$$K = \frac{p^2r}{2m} - H_0r, \tag{2.98}$$

$$d\tau = \frac{dt}{r}. \tag{2.99}$$

Переходя к квантовой механике, рассмотрим квантово-механическое уравнение на собственные значения H_0 оператора энергии $H=\frac{p^2}{2m}-\frac{K_0}{r}$ для нерелятивистского кулоновского взаимодействия двух частиц, что соответствует примеру 2:

$$\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{K_0}{r}\right)\psi(K_0, H_0)=H_0\psi(K_0, H_0). \qquad (2.100)$$

Введем функцию φ, зависящую от параметров K_0, H_0 и связанную с волновой функцией $\psi(H_0, K_0)$ по формуле

$$\psi(H_0, K_0)=r\varphi(H_0, K_0), \qquad (2.101)$$

и определим новую норму

$$\langle\langle\varphi_1\,|\,\varphi_2\rangle\rangle=\langle\varphi_1\,|\,r\varphi_2\rangle=\langle r^{-1}\psi_1\,|\,\psi_2\rangle=\int\limits_V\psi_1^*\frac{1}{r}\psi_2\,dV. \qquad (2.102)$$

Тогда (2.100) можно переписать в виде

$$K\varphi(H_0, K_0)=K_0\varphi(H_0, K_0), \qquad (2.103)$$

где оператор K определяется формулой (2.98). Переход от H к K в квантовой теории также можно интерпретировать как неканонический переход от одного оператора Гамильтона к другому, причем из эрмитовости H по отношению к старой норме вытекает эрмитовость K по отношению к новой форме. В самом деле, из $\langle r\psi_1|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|r\psi_2\rangle$ и $\langle p^2\psi_1|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|p^2\psi_2\rangle$ имеем

$$\langle\langle\varphi_1\,|\,K\varphi_2\rangle\rangle=\left\langle\varphi_1\,\middle|\,r\left(\frac{p^2}{2m}-K_0\right)r\varphi_2\right\rangle=$$

$$=\langle K\varphi_1\,|\,r\varphi_2\rangle=\langle\langle K\varphi_1\,|\,\varphi_2\rangle\rangle. \qquad (2.104)$$

Отсюда следует, что переход от уравнения (2.100) к (2.103) соответствует переходу от задачи о нахождении спектра собственных значений H_0 старого гамильтониана при фиксированном K_0 к задаче о нахождении спектра собственных значений K_0 нового гамильтониана при фиксированном H_0.

§ 8. Алгебры с числовыми значениями и алгебраическое описание физических систем

Чтобы можно было последовательно описывать физические системы и решать динамические задачи при помощи алгебраических методов, необходимо установить связь между алгебрами наблюдаемых и определяемыми на опыте действительными числовыми значениями, которые мы отождествим со средними значениями от наблюдаемых. С этой целью для произвольной алгебры наблюдаемых G над полем действительных чисел введем общее понятие об *алгебраическом состоянии* (сокращенно «π-состоянии»), характеризуемом заданием вектора $\pi=\pi_\mu e^\mu$ из дуального векторного пространства по отношению к векторному пространству G. Числовое значение элемента $g=e_\mu\varphi^\mu\in G$ в состоянии π, по определению, будет характеризоваться действительным числом

$$\operatorname{Re}(\pi, g)\equiv\langle\pi\,|\,g\rangle=\pi_\mu\varphi^\mu, \tag{2.105}$$

где по μ, как обычно, подразумевается суммирование или интегрирование.

Если e — единица алгебры G по отношению к йорданову умножению (отметим, что йорданову алгебру без единицы всегда можно формально расширить до йордановой алгебры с единицей), то будем считать, что числовое значение элемента g в алгебраическом состоянии π связано с наблюдаемым на опыте средним значением $\bar{g}_\pi$ элемента g в состоянии π по формуле

$$\bar{g}_\pi=\frac{\langle\pi\,|\,g\rangle}{\langle\pi\,|\,e\rangle}. \tag{2.106}$$

Все наблюдаемые на опыте результаты не изменятся, если для алгебраических состояний принять условие нормировки

$$\langle\pi\,|\,e\rangle=1. \tag{2.107}$$

При этом, в соответствии с (2.106), на алгебраические состояния необходимо дополнительно наложить ограничение, согласно которому для всех $g \in G$

$$\langle \pi | g^2 \rangle \geqslant 0. \tag{2.108}$$

Условие (2.108) является необходимым и достаточным условием того, что дисперсии любых физических величин больше или равны нулю.

Из (2.107) и (2.108) следует, что если $\pi_1, \pi_2, \ldots$ — векторы алегбраических состояний, то

$$\pi = p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \ldots, \tag{2.109}$$

где $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $p_1 + p_2 + \ldots = 1$, также будет алгебраическим состоянием. Здесь неотрицательность $p_1, p_2, \ldots$ является следствием (2.108), так как если, например, наблюдаемая g такова, что $\langle \pi_2 | g^2 \rangle = = \langle \pi_3 | g^2 \rangle = \ldots = 0$, а $\langle \pi_1 | g^2 \rangle \neq 0$, то по (2.108) $p_1 \geqslant 0$ и т. д. Аналогично последнее равенство в (2.109) является следствие (2.107).

Связь понятия алгебраических состояний с функциональным анализом устанавливается следующим образом. Введем *специальные алгебраические состояния* π_0, для которых имеет место ограничение формулы (2.108): $\langle \pi_0 | g^2 \rangle > 0$ для всех $g \neq 0$. Отсюда следует, что для алгебр наблюдаемых, для которых существуют специальные алгебраические состояния, можно ввести норму по формуле

$$n_{\pi_0}(g) = + \sqrt{\langle \pi_0 | g^2 \rangle}, \tag{2.110}$$

что, в частности, дает возможность ввести в алгебре наблюдаемых топологию и использовать результаты теории нормированных алгебр.

Проиллюстрируем введенные понятия на примерах классической и квантовой механики. В классической статистической механике формула (2.105) принимает вид

$$\operatorname{Re}(\pi, \varphi) = \int \varphi(p, q)\, \rho(p, q)\, dp\, dq. \tag{2.111}$$

Здесь $\operatorname{Re}(\pi, \varphi)$ — среднее значение классической наблюдаемой $\varphi(p, q)$ в состоянии π, которое характеризуется заданием плотности распределения $\rho(p, q)$

в фазовом пространстве. В обычной классической механике, где состояние π задается числовыми значениями $\overset{0}{p_k}$, q_0^k, в формуле (2.111) следует положить $\rho=\delta(p-p^0, q-q_0)$. В квантовой механике состояние π характеризуется заданием волновой функции ψ, а числовое значение Re (π, φ) определяется как квантово-механическое среднее от оператора φ:

$$\mathrm{Re}(\pi, \varphi)=\frac{\langle\psi|\varphi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}=\mathrm{Sp}\left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\cdot\varphi\right). \quad (2.112)$$

Здесь Sp — след матрицы, равный сумме ее диагональных элементов, т. е.

$$\mathrm{Re}(\pi, \varphi)=\mathrm{Sp}(\pi^{\rho}_{\rho_1}\cdot\varphi^{\rho_2}_{\rho})=\pi^{\rho}_{\rho_1}\cdot\varphi^{\rho_1}_{\rho}, \quad (2.113)$$

где $\pi^{\rho}_{\rho_1}=\dfrac{\psi^{\rho}\psi^{*}_{\rho_1}}{\psi^{*}_{\rho_2}\psi^{\rho_2}}$. Наконец, в статистической квантовой механике в (2.113) в качестве $\pi^{\rho}_{\rho_1}$ следует взять элементы матрицы плотности: в частности, для распределения Гиббса среднее значение наблюдаемой $\varphi(p, q)$ равно

$$\overline{\varphi(p, q)}=\mathrm{Sp}(\pi\cdot\varphi), \qquad \pi=(e^{-H/kT})/\mathrm{Sp}(e^{-H/kT}). \quad (2.114)$$

Приведенные формулы показывают, что из нашего определения π-состояний в частном случае получаются известные классическое и квантовое определения состояний с помощью плотности вероятности ρ или матрицы плотности π. Например, если в классическом случае алгебра G содержит все функции $\varphi(p, q)$ из некоторого класса (например, из класса всех бесконечно дифференцируемых функций), то формулой (2.111) с помощью первого алгебраического метода будет строго определяться обобщенная функция $\rho(p, q)$, т. е. заданием числовых значений (средних от наблюдаемых) будет полностью определяться плотность вероятности $\rho(p, q)$. Однако в общем случае плотность вероятности и матрица плотности могут определяться по наблюдаемым на опыте числовым значениям Re (π, g) с тем или иным произволом, так как у нас алгебра G, в соответствии с постулатом о конечном числе образующих, не содержит всех наблюдае мых. При решении конкретных динамических задач, где по начальным числовым значениям наблюдаемых определяются их конечные значения, на опыте наблюдаются только числовые значения π_μ, поэтому описание физических состояний при помощи векторов π может приводить к значительным упрощениям по сравнению с обычным. Рассмотрим теперь несколько более узкий класс алгебр с числовыми значениями.

Определение 1. *Лиево-йорданова алгебра G называется специальной алгеброй с числовыми значениями, если существует такой фиксированный вектор π_0 из дуального векторного пространства по отношению к G, что призвольный вектор π может быть получен из π_0 в результате йорданова умножения, определяемого формулой* $\mathrm{Re}\,(\pi_0,\ e_\mu \cdot e_\nu) = \mathrm{Re}\,(\pi_0 \cdot e_\mu,\ e_\nu)$, *на некоторый элемент из G, причем, если $g \neq 0$, то* $\mathrm{Re}\,(\pi,\ g \cdot g) > 0$.

В специальной алгебре с числовыми значениями каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие действительное числовое значение $\mathrm{Re}\, g$, определяемое по формуле

$$\mathrm{Re}\, g = \mathrm{Re}\,(\pi_0,\ g), \tag{2.115}$$

откуда следует, что для произвольных действительных чисел p_1 и p_2

$$\mathrm{Re}\,(p_1 g_1 + p_2 g_2) = p_1 \mathrm{Re}\, g_1 + p_2 \mathrm{Re}\, g_2. \tag{2.116}$$

Определим далее $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ из формул

$$\mathrm{Re}\,(e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu}, \qquad e^\mu = \pi_0 \cdot g^{\mu\nu} e_\nu. \tag{2.117}$$

Тогда

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g^{\mu\nu} \mathrm{Re}\,(\pi_0,\ e_\nu \cdot e_\sigma) = \mathrm{Re}\,(\pi_0 \cdot g^{\mu\nu} e_\nu,\ e_\sigma) = \\ = \mathrm{Re}\,(e^\mu,\ e_\sigma) = \delta^\mu_\sigma, \tag{2.118}$$

что для конечномерного случая соответствует тому, что матрицы с элементами $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ невырождены и обратны друг другу. Наконец, последнее условие в определении алгебр с числовыми значениями

$$n^2(g) = \mathrm{Re}\,(g \cdot g) > 0 \quad \text{при } g \neq 0 \tag{2.119}$$

соответствует требованию о том, чтобы плотность вероятности, определяемая по состоянию π_0, была положительна. Из (2.119) следует, что элементы алгебры с числовыми значениями являются элементами нормированного векторного пространства с нормой $n(g) = +\sqrt{\operatorname{Re}(g\cdot g)}$.

В квантовой теории лиево-йорданова алгебра наблюдаемых G находится во взаимно однозначном соответствии с ассоциативной алгеброй G_A, состоящей из всех элементов вида $g = g_1 + ig_2$, где $g_1, g_2 \in G$. В применении к ассоциативным алгебрам G_A с инволютивным сопряжением, переводящим g в $g^* = g_1 - ig_2$, понятие о числовых значениях переформулируем следующим образом.

Определение 2. *Ассоциативная алгебра G_A называется алгеброй с числовыми значениями, если каждому элементу $g \in G_A$ сопоставляется действительное число* $\operatorname{Re} g$, *удовлетворяющее следующим свойствам:*

1) $\operatorname{Re}(p_1g_1 + p_2g_2) = p_1 \operatorname{Re} g_1 + p_2 \operatorname{Re} g_2$, *где p_1, p_2 — произвольные действительные числа, g_1, g_2* — *произвольные элементы из G_A;*

2) $\operatorname{Re}(g_1g_2) = \operatorname{Re}(g_2g_1)$ для произвольных $g_1, g_2 \in G_A$;

3) $\operatorname{Re} g^* = \operatorname{Re} g$;

4) *если $g \neq 0$, то $n^2(g) = \operatorname{Re} g^*g > 0$.*

Примером ассоциативной алгебры с числовыми значениями может служить алгебра, разлагающаяся в прямую сумму:

$$G_A = \sum_i Q_{(n)}^{(i)}, \tag{2.120}$$

где элементы алгебры $Q_{(n)}^{(i)}$, изоморфной алгебре действительных, комплексных или кватернионных матриц n-го порядка над полем действительных чисел, имеют вид

$$q^{(i)} = q_{\beta_2}^{(i)\beta_1} e_{\beta_1}^{\beta_2} \qquad (q_{\beta_2}^{(i)\beta_1} \in Q), \tag{2.121}$$

а число n и тело Q могут быть различными для разных индексов i. При этом числовое значение и сопряжение для произвольного элемента $g = \sum_i g^{(i)} \in G_A$

определяется по формулам:

$$\operatorname{Re} g = \sum_i \operatorname{Re}\left(\sum_{\beta=1}^{n} q_\beta^{(i)\beta}\right), \tag{2.122}$$

$$g^* = \sum q^{(i)*}, \qquad q^{(i)*} = \sum_{\beta_1, \beta_2=1}^{n} q_{\beta_2}^{*(i)\beta_1} e_{\beta_2}^{\beta_1}. \tag{2.123}$$

Для доказательства того, что приведенными формулами определяется ассоциативная алгебра с числовыми значениями, достаточно убедиться в выполнении свойств 1—4 из определения 2. Проверка этих свойств непосредственно осуществляется с помощью формул (2.120)—(2.123). Например, четвертое свойство следует из того, что в правую часть разложения

$$n^2(g) = \operatorname{Re} g^* g = \sum_i \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{\beta_2=1}^{n} q_{\beta_2}^{*(i)\beta_1} q_{\beta_2}^{(i)\beta_1} \tag{2.124}$$

входят квадраты норм $n^2(q_{\beta_2}^{(i)\beta_1})$, которые могут равняться нулю лишь при $q_{\beta_2}^{(i)\beta_1} = 0$, а в остальных случаях больше нуля.

§ 9. Логика физических систем и динамических задач и инвариантные алгебраические соотношения между числовыми значениями

Алгебраический метод описания состояний физической системы можно связать с логикой утверждений о системе. В соответствии с Биркгофом и фон Нейманом (с учетом уточнений Ванкараджана — см. литературные указания), *логикой* $\mathscr{L}$ мы будем называть структуру с дополнениями (т. е. универсальную алгебру с операциями объединения и пересечения и тождественными соотношениями (2.36)—(2.39)), в которой $s \to s_+$ является взаимно однозначным отображением $\mathscr{L}$ в себя, удовлетворяющим условиям:

$$(s_+)_+ = s; \tag{2.125}$$

$s_1 \subseteq s_2$ влечет за собой $(s_1)_+ \supseteq (s_2)_+$;

если $s_1 \subseteq s_2$, то существует такой элемент $s \in \mathscr{L}$

(а именно, $s = (s_1)_+ \cap s_2$), что $s_2 = s \cup s_1$;

наконец, для любой счетно-бесконечной последовательности элементов $s_i \in \mathscr{L}$ существуют бесконечные объединения $\bigcup\limits_i s_i$ и пересечения $\bigcap\limits_i s_i$.

Для классической системы в качестве логики $\mathscr{L}$ можно взять совокупность всевозможных борелевских подмножеств s (т. е. подмножеств, которые могут быть получены из прямоугольных параллелепипедов путем применения счетной совокупности операций объединения, пересечения и дополнения) фазового пространства. При этом s_+ определяется как часть фазового пространства, дополняющая s до всего пространства. Для квантовомеханической системы элементами логики $\mathscr{L}$ служат всевозможные замкнутые линейные подпространства s гильбертова пространства ψ-состояний, а s_+ является ортогональным дополнением s до всего гильбертова пространства. Последнюю логику, называемую *стандартной*, можно определять также заданием всевозможных операторов проектирования P_s на подпространства s. Если s порождается ортонормированными векторами $|\psi_i\rangle$, то

$$P_s = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{2.126}$$

или в компонентах

$$(P_s)^{\rho_1}_{\rho_2} = \sum_i (\psi_i)^{\rho_1} (\psi_i^*)_{\rho_2}. \tag{2.127}$$

Пусть теперь G_A — ассоциативная алгебра операторов, однозначно определяемая по лиево-йордановой алгебре G наблюдаемых для той или иной квантовомеханической динамической задачи. Множеством всех операторов проектирования $P_s \in G_A$ определяется множество подпространств s, которое, как нетрудно видеть, образует логику $\mathscr{L}_G$. Мы будем называть ее *логикой, сопоставленной с динамической задачей.*

Если состояние физической системы характеризуется заданием числовых значений наблюдаемых, то для чистых состояний множество числовых значений определяется логикой, сопоставленной с системой. Что же касается логики, сопоставленной с динамической задачей, то ею будет определяться ряд алгебраических соотношений как между наблюдаемыми $g_{(\mu)}$, так и между их числовыми значениями. В самом деле, если $P_s \in G_A$, то P_s можно представить в виде линейной комбинации базисных элементов $g_{(\mu)}$. Отсюда следует, что алгебраические соотношения между операторами проектирования, например, $P_s^2 = P_s$, приводят к алгебраическим соотношениям между $g_{(\mu)}$. Далее, если P_s выражается через ортонормированные функции ψ_i по формуле (2.126), то

$$\langle\psi | P_s | \psi\rangle = \sum_i |\langle\psi | \psi_i\rangle|^2. \tag{2.128}$$

Поскольку P_s представляется в виде линейной комбинации наблюдаемых, то формулами вида (2.128) будут определяться линейные алгебраические соотношения между числовыми значениями наблюдаемых.

В заключение, не вдаваясь в детали, сформулируем идею алгебраического обобщения теории логик Биркгофа и фон Неймана. На множестве алгебраических состояний можно определить систему *базисных состояний*, являющихся элементами структуры. Например, для классических систем базисные состояния определяются такими распределениями вероятности, для которых плотность вероятности постоянна в некоторой области фазового пространства и равна нулю в остальной части фазового пространства. Для базисных состояний определены операции объединения и пересечения, связанные между собой дополнительными соотношениями, которые могут изменяться при переходе от одной физической теории к другой. Если в формуле (2.109) $\pi_1, \pi_2, \ldots$ являются базисными состояниями, то $p_1, p_2, \ldots$ можно интерпретировать как вероятности нахождения системы в этих состояниях. Приведенные рассуждения, опирающиеся на формулу (2.109), непосредственно переносятся также на непрерывный случай.

Глава 3

СТРУКТУРОИДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВ АЛГЕБР

§ 1. Общее понятие о структуроиде как о структурно упорядоченном группоиде

При изучении инвариантных свойств алгебры G, не зависящих от выбора образующих G, в последние годы широкое распространение получил метод оперирования с подмножествами множества G, обладающими определенными свойствами. Фактически при этом задача сводится к изучению определяемой по G универсальной алгебры специального вида, которую мы назовем структуроидом над G. В терминах структуроидов легко определяются также те свойства алгебры G, которые не зависят от вида бинарного умножения.

Пусть G — алгебра над телом Q, в которой задана операция бинарного умножения $\circ$. Линейные подпространства s, натянутые на элементы $\varphi_\gamma \in G$, как мы видели, образуют дедекиндову структуру. Произведением линейных подпространств $s_1 \circ s_2$, натянутых на $\varphi^{(1)}_{\gamma_1}$ и $\varphi^{(2)}_{\gamma_2}$, по определению, будем называть линейное подпространство, натянутое на всевозможные произведения $\varphi^{(1)}_{\gamma_1} \circ \varphi^{(2)}_{\gamma_2}$. Множество S_G всевозможных линейных подпространств s по отношению к введенному умножению образует группоид, а по отношению к операциям объединения и пересечения — структуру. Из определения объединения следует, что

$$(s_1 \cup s_2) \circ s_3 = (s_1 \circ s_3) \cup (s_2 \circ s_3), \qquad (3.1)$$

а из определения пересечения — что

$$(s_1 \cap s_2) \circ s_3 \subseteq (s_1 \circ s_3) \cap (s_2 \circ s_3), \tag{3.2}$$

причем возможность в (3.2) не только равенства, но и включения, связана с тем, что после умножения на s_3 в непересекающихся частях подпространств s_1 и s_2 могут появиться общие элементы. Формулы, аналогичные (3.1) и (3.2), имеют место также для умножения на s_3 слева.

Определение. *Структуроидом S_G над алгеброй G называется универсальная алгебра, элементами которой являются линейные подпространства из G, а алгебраическими операциями — операции объединения $\bigcup$, пересечения $\bigcap$ и группоидного умножения $\circ$.*

По отношению к операциям объединения и пересечения S_G является дедекиндовой структурой, а группоидная операция $\circ$ связана с двумя первыми операциями формулами вида (3.1)—(3.2). S_G является реализацией абстрактного структуроида, элементы которого связаны теми же алгебраическими соотношениями, но уже не предполагается возможность представлять их в виде линейных подпространств.

Заметим, что у S_G существует *наименьший элемент* 0 (нулевое подпространство) и *наибольший элемент*, который можно обозначать буквой G (поскольку сама алгебра G одновременно является линейным векторным пространством над Q).

Приведенное выше определение структуроида S_G над G легко обобщается на случай универсальных алгебр общего вида. Пусть G — универсальная алгебра, содержащая, в частности, бинарные алгебраические операции. Если $\circ$ — символ одной из таких операций, то по отношению к ней G будет группоидом. Пусть, далее, Ω_1 — некоторое подмножество множества Ω всех заданных на G алгебраических операций, по отношению к которому G также образует универсальную алгебру (например, в рассмотренном выше случае алгебр над телом Q за Ω_1 брались бинарная операция сложения и бесконечное число унарных операций умножения элементов из G на элементы тела Q). Введем множество всех подалгебр s универсальной алгебры G по отношению к системе операций Ω_1 и обозначим его S_G. Тогда S_G будет структурой, но в общем случае уже не дедекиндовой. Определим произведение $s_1 \circ s_2$ подалгебр s_1 и s_2 как подалгебру алгебры G (относительно системы операций Ω_1), образующими которой являются всевозможные $\circ$-произведения элементов из подалгебры s_1 на элементы из подалгебры s_2. Тогда по отношению к этой операции множество S_G будет группоидом, причем группоидное умножение связано с операциями объединения и пересечения формулами (3.1)—(3.2). Полученную универсальную алгебру S_G будем называть *структуроидом над универсальной алгеброй* G, соответствующим системе алгебраических операций Ω_1 (в частном случае могущей совпадать с Ω) и системе операций $\circ$ группоидного умножения.

Важность общего понятия структуроида над G связана с тем, что он не зависит от выбора образующих G и поэтому его свойствами определяются наиболее глубокие инвариантные свойства универсальной алгебры G. Например, пусть G — группа, а $\circ$ совпадает с обычной операцией группового умножения. Тогда S_G совпадает со структурой всех подгрупп группы G, снабженной дополнительной операцией умножения подгрупп. Структура подгрупп группы G дает глубокую инвариантную характеристику группы G, а наличие у S_G дополнительной операции группоидного умножения значительно обогащает алгебраический аппарат, с помощью которого можно изучать относительные свойства подгрупп группы G.

Возвращаясь к алгебре G над Q, где Ω_1 состоит из операций сложения и умножения справа на элементы из тела Q, определим в терминах структуроида S_G отдельные инвариантные понятия, которые не зависят от вида группоидного умножения $\circ$.

Элемент $s \in S_G$ называется *подалгеброй* алгебры G, если

$$s \circ s \subseteq s. \tag{3.3}$$

Подалгебра s называется *левым идеалом*, если одновременно с (3.3)

$$G \circ s \subseteq s. \tag{3.4}$$

Аналогично определяются *правый идеал* и *двусторонний идеал*: например, для последнего выполняются условия

$$G \circ s \subseteq s, \qquad s \circ G \subseteq s, \qquad s \circ s \subseteq s. \tag{3.5}$$

Алгебра G будет, по определению, *прямой суммой* левых, правых или двусторонних идеалов s_1 и s_2, если

$$G = s_1 \bigcup s_2, \qquad s_1 \bigcap s_2 = 0. \tag{3.6}$$

Разложимость G в прямую сумму s_1 и s_2 мы будем кратко записывать в виде

$$G = s_1 + s_2. \tag{3.7}$$

Алгебра G называется *простой*, если $G \circ G \neq 0$ и если G не содержит двусторонних идеалов, отличных от 0 и G. Алгебра G называется *полупростой*, если она может быть представлена в виде прямой суммы простых подалгебр.

В заключение настоящего параграфа введем понятие о структуроидах над структуроидами. Пусть S_G — структуроид над универсальной алгеброй G. Возьмем S_G за универсальную алгебру, входящую в общее определение структуроида, и примем за Ω_1 систему всех заданных в S_G алгебраических операций, а за систему группоидных умножений — операции $\circ$. Тогда структуроид $S(S_G)$ над универсальной алгеброй S_G, соответствующий системе алгебраических операций Ω_1 и системе операций группоидного умножения $\circ$, будет состоять из подструктуроидов структуроида S_G, для которых определены бинарные операции $\circ$. Изучение последовательных структуроидов S_G, $S(S_G)$, $S[S(S_G)], \ldots$ дает возможность изучать инвариантные свойства алгебры G все более высокой степени общности.

§ 2. Лиевы, ассоциативные, йордановы, лиево-ассоциативные и лиево-йордановы структуроиды

Если бинарная операция $\circ$ в алгебре G совпадает с операциями лиева, ассоциативного или йорданова умножения, то подпространства s будут связаны между собой некоторыми дополнительными тождественными соотношениями. Так, если G — ассоциативная алгебра, то из условия ассоциативности $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ следует

$$(s_1s_2)\, s_3 = s_1(s_2s_3). \tag{3.8}$$

Аналогично для йорданова и лиева умножения подпространств из $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ и $[g_1, g_2] = -[g_2, g_1]$ следуют тождества

$$s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot s_1, \tag{3.9}$$

$$[s_1, s_2] = [s_2, s_1]^{1)}. \tag{3.10}$$

Далее, из тождества Якоби (2.5) следует, что лиево произведение подпространств удовлетворяет тождеству

$$[[s_1, s_2], s_3] \subseteq [[s_1, s_3], s_2] \cup [[s_2, s_3], s_1], \tag{3.11}$$

где наличие включения, а не равенства объясняется тем, что линейное подпространство, натянутое на сумму g_1+g_2 двух элементов из G, будет совпадать с объединением линейных подпространств, натянутых на g_1 и g_2, лишь в частном случае, когда g_1 и g_2 пропорциональны между собой.

Приведенные структуроидные соотношения могут служить основой для определения понятий, не зависящих от выбора образующих алгебры G, и для изучения с их помощью инвариантных свойств G. При этом некоторые разделы теории лиевых, ассоциативных и йордановых алгебр можно изучать параллельно, если сначала рассматривать свойства S_G, общие для этих алгебр.

---

[1]) При выводе (3.10) учитывается, что элементы g и $-g$ порождают одно и то же подпространство.

В алгебраической теории физических систем основную роль играют алгебры с двумя бинарными операциями — лиево-йордановы алгебры наблюдаемых и определяемые по ним лиево-ассоциативные алгебры. Им будут соответствовать лиево-йордановы и лиево-ассоциативные структуроиды, в которых наряду с выписанными выше соотношениями, характерными для структуроидов с одним видом умножения, имеют место следующие тождества, связывающие между собой лиево и ассоциативное или, соответственно, лиево и йорданово умножения:

$$[s_1, (s_2 s_3)] \subseteq (s_2 [s_1, s_3]) \cup [(s_1, s_2] s_3), \tag{3.12}$$

$$[s_1, s_2 \cdot s_3] \subseteq (s_2 \cdot [s_1, s_3]) \cup (s_3 \cdot [s_1, s_2]). \tag{3.13}$$

§ 3. Лиево-порождаемые алгебры наблюдаемых

Важной проблемой является сведение изучения инвариантно-алгебраических свойств физических систем и динамических задач к изучению относительно более простых и достаточно изученных алгебраических понятий. Главными из таких понятий будут сопоставляемые с физическими системами алгебры Ли, определяемые по лиево-йордановым алгебрам наблюдаемых или по соответствующим им лиево-ассоциативным алгебрам G.

Пусть S_G — лиево-ассоциативный структуроид над G, элементами которого s являются всевозможные линейные подпространства из G. Если L — множество элементов из S_G, содержащее, наряду с любыми элементами, также их объединение, пересечение и лиево произведение, то L будет лиевым структуроидом. Обозначим символом l линейное подпространство, определяемое как объединение всех элементов из L. Тогда $[l, l] \subseteq l$ и элемент $l \in L$ определяет алгебру Ли, являющуюся лиевой подалгеброй лиево-ассоциативной алгебры G. Алгебру G будем называть *лиево-порождаемой*, если существует такая алгебра Ли $l \in S_G$ конечного ранга, что лиево-ассоциативная алгебра

$G \in S_G$ может быть представлена в виде

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} l^n. \tag{3.14}$$

Свойство (3.14) не зависит от выбора образующих алгебры G, поэтому вопрос о том, будет ли алгебра лиево-порождаемой, определяется свойствами структуроида S_G. Для ответа на этот вопрос необходимо научиться выделять из структуроида S_G алгебры Ли l конечного ранга, каждая из которых по формуле (3.14) определит лиево-порождаемую подалгебру алгебры G. Если одна из таких подалгебр совпадает с G, то G будет лиево-порождаемой.

Один из путей выделения из S_G алгебр Ли связан с использованием соответствия Галуа между лиево-ассоциативными и лиевыми структуроидами. Рассмотрим два подмножества структуроида S_G, состоящие соответственно из элементов l_μ и s_ν, связанных соотношениями

$$[l_\mu, s_\nu] \subseteq s_\nu. \tag{3.15}$$

Имеет место следующая теорема о структуроидах:

Если задано произвольное множество элементов l_μ из структуроида S_G, то множество всех тел элементов s_ν из S_G, для которых выполняются соотношения (3.15), *образует лиево-ассоциативный структуроид. Если задано произвольное множество элементов s_ν из структуроида S_G, то множество всех тех элементов l_μ из S_G, для которых выполняются соотношения* (3.15), *образует лиев структуроид.*

В самом деле, пусть, например, соотношения (3.15) выполняются для s_{ν_1} и s_{ν_2}. Тогда, согласно (3.1), (3.2), (3.11), (3.12),

$$[l_\mu, (s_{\nu_1} \cup s_{\nu_2})] = [l_\mu, s_{\nu_1}] \cup [l_\mu, s_{\nu_2}] \subseteq s_{\nu_1} \cup s_{\nu_2};$$

$$[l_\mu, (s_{\nu_1} \cap s_{\nu_2})] \subseteq [l_\mu, s_{\nu_1}] \cap [l_\mu, s_{\nu_2}] \subseteq s_{\nu_1} \cap s_{\nu_2};$$

$$[l_\mu, [s_{\nu_1}, s_{\nu_2}]] \subseteq [[l_\mu, s_{\nu_1}], s_{\nu_2}] \cup [[l_\mu, s_{\nu_2}], s_{\nu_1}] \subseteq [s_{\nu_1}, s_{\nu_2}];$$

$$[l_\mu, s_{\nu_1} s_{\nu_2}] \subseteq (s_{\nu_1} [l_\mu, s_{\nu_2}]) \cup ([l_\mu, s_{\nu_1}] s_{\nu_2}) \subseteq s_{\nu_1} s_{\nu_2}.$$

Значит, для объединения, пересечения, лиева и ассоциативного произведения элементов s_{ν_1} и s_{ν_2} также выполняются соотношения (3.15), что доказывает первую часть теоремы. Аналогично, если (3.15) выполняется для l_{μ_1} и l_{μ_2}, то, согласно (3.1), (3.2), (3.11), это соотношение будет справедливо также для объединения, пересечения и лиева произведения этих элементов, что доказывает вторую часть теоремы.

Если задано произвольное множество элементов l_μ из структуроида S_G, то множество всех тех элементов s_ν из S_G, для которых выполняются соотношения (3.15), образует лиево-ассоциативный структуроид S. Если задано произвольное множество элементов s_ν из S_G, то множество всех тех элементов l_μ из S_G, для которых выполняются соотношения (3.15), образует лиев структуроид L, верхней гранью которого l определяется алгебра Ли. Соответствие, которое каждому лиево-ассоциативному подструктуроиду S структуроида S_G с помощью (3.15) сопоставляет лиев структуроид $L(S)$ и каждому лиеву подструктуроиду L структуроида S_G сопоставляет лиево-ассоциативный структуроид $S(L)$, называется *соответствием Галуа между лиево-ассоциативными и лиевыми структуроидами.*

Пусть уже найдена некоторая алгебра Ли конечного ранга $m \in S_G$. Если m порождает по формуле (3.14) некоторую лиево-ассоциативную подалгебру алгебры G, не совпадающую с G, то можно попытаться расширить m до алгебры Ли более высокого ранга. Например, в лиево-ассоциативном структуроиде, определяемом по m с помощью соответствия Галуа, будем искать такой элемент n конечного ранга, для которого

$$[n, n] \subseteq m, \tag{3.16}$$

причем из определения m и n следует

$$[m, m] \subseteq m, \qquad [m, n] \subseteq n. \tag{3.17}$$

Тогда элементом $l = m \bigcup n$ будет определяться новая алгебра Ли, для которой m будет подалгеброй.

Рассмотренные методы могут быть использованы для нахождения алгебр Ли, порождающих лиево-ассоциативные алгебры наблюдаемых.

§ 4. Алгебры наблюдаемых со связями и параметрическая форма уравнений движения

Введенные выше структуроидные понятия дают возможность в простой форме записывать и изучать многие общие соотношения, относящиеся к алгебрам наблюдаемых. В качестве примера мы рассмотрим *алгебру со связями*, ограничиваясь для простоты классической нестатистической механикой. При этом достигается также новый подход к рассмотренному в § 7 гл. 2 вопросу о неканоническом переходе от одного гамильтониана к другому.

Прежде всего определим *операцию частичного взятия числовых значений*. Пусть ассоциативная алгебра G является прямым произведением алгебры G_1 с базисными элементами e_ρ и алгебры G_2 с базисными элементами e_σ, т. е.

$$g = \varphi^{\rho\sigma} e_\rho e_\sigma, \tag{3.18}$$

где $e_\rho e_\sigma = e_\sigma e_\rho$. Для алгебры G_2 операция взятия числового значения в алгебраическом состоянии π означает, что величины $\varphi^\sigma e_\sigma \in G_2$ заменяются на числа $\langle \pi | \varphi^\sigma e_\sigma \rangle = \varphi^\sigma \pi_\sigma$, где $\pi_\sigma = \langle \pi | e_\sigma \rangle$. Соответственно операция частичного взятия числовых значений алгебры $G = G_1 \times G_2$ по отношению к алгебраическому состоянию алгебры G_2 заключается в замене элементов $\varphi^{\rho\sigma} e_\rho e_\sigma$ из G на элементы $(\varphi^{\rho\sigma}\pi_\sigma) e_\rho$ из G_1.

Пусть теперь гамильтониан $H(p, q, c)$, определяющий классические уравнения движения

$$\frac{dp_k}{dt} = [H, p_k] = -\frac{\partial H(p, q, c)}{\partial q^k}, \quad \frac{dq^k}{dt} = [H, q^k] = \frac{\partial H(p, q, c)}{\partial p_k},$$
$$k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.19}$$

зависит от n постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Заменим эти постоянные на новые канонические переменные p_{N+1},

$p_{N+2}, \ldots, p_{N+n}$. Тогда из уравнений вида (3.19), записанных для расширенной системы независимых канонических переменных $q^1, q^2, \ldots, q^{N+n}, p_1, p_2, \ldots, p_{N+n}$, следуют, во-первых, уравнения (3.19), в которых $c_1, c_2, \ldots, c_n$ заменены на $p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots, p_{N+n}$, и, во-вторых, уравнения для остальных канонических переменных:

$$\frac{dp_{N+1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^{N+1}} = 0, \ \ldots, \ \frac{dp_{N+n}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^{N+n}} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{dq^{N+1}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^{N+1}}, \ \ldots, \ \frac{dq^{N+n}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^{N+n}}. \quad (3.21)$$

Из (3.20) вытекает, что $p_{N+1}, \ldots, p_{N+n}$ не меняются с течением времени, так что их можно отождествить с постоянными $c_1, \ldots, c_n$, и динамическая задача с расширенной системой канонических переменных оказывается эквивалентной первоначальной динамической задаче. С алгебраической точки зрения видоизмененный подход означает, что сначала рассматривается алгебра наблюдаемых G, элементы которой зависят от $q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_N, p_{N+1}, \ldots, p_{N+n}$, а затем к элементам $g \in G$ применяется операция взятия числовых значений, соответствующая замене во всех наблюдаемых величин $p_{N+1}, \ldots, p_{N+n}$ на числа $c_1, \ldots, c_n$.

Дополнительно введем еще канонические переменные q^0 и p_0, причем предполагается, что существует следующая функция от наблюдаемых, числовое значение которой во всех физически допустимых состояниях равно нулю:

$$\varphi_0(p_0, p_1, \ldots, p_{N+n}, q^1, \ldots, q^N) \equiv$$
$$\equiv p_0 + H(q^1, \ldots, q^N, p_1, \ldots, p_{N+n}). \quad (3.22)$$

В результате будет получаться алгебра наблюдаемых G со связью φ_0. Поскольку числовые значения должны удовлетворять уравнению связи, то числовое значение элемента $-p_0$, согласно (3.22), должно совпадать с числовым значением H, т. е. с числовым значением энергии. Для расширенной алгебры наблюдаемых G со связями лиево произведение по-прежнему определяется как

$$[g_1, g_2] = \sum_{\nu=0}^{N+n} \left(\frac{\partial g_1}{\partial p_\nu} \frac{\partial g_2}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_1}{\partial q^\nu} \frac{\partial g_2}{\partial p_\nu} \right). \tag{3.23}$$

Нетрудно показать, что теперь уравнения движения для динамических переменных $g \in G$ имеют вид

$$\frac{dg}{dt} = [\varphi_0, g]. \tag{3.24}$$

В самом деле, если отождествить g с одной из величин $q^1, q^2, \ldots, q^{N+n}, p_1, p_2, \ldots, p_{N+n}$, то будут получаться рассмотренные выше уравнения (3.19)—(3.21). Если же g совпадает с q^0 или p_0, то из (3.23) и (3.24) получим

$$\frac{dq^0}{dt} = [\varphi_0, q^0] = [p_0, q^0] = 1, \tag{3.25}$$

$$\frac{dp_0}{dt} = [\varphi_0, p_0] = [H, p_0] = -\frac{\partial H}{\partial q^0}. \tag{3.26}$$

Из (3.25) следует, что $q^0(t) = q^0(0) + t$, т. е. наблюдаемая q^0 с точностью до постоянного слагаемого $q^0(0)$ совпадает с временем t. Что же касается уравнения (3.26), то оно соответствует закону сохранения энергии. Если H явно зависит от времени и время t в функции $H(p, q, t)$ заменить на q^0, то (3.26) соответствует уравнению

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

При умножении связи φ_0 на элементы g алгебры G будут получаться новые связи φ, числовые значения которых во всех физически допустимых состояниях равны нулю. Можно показать (см., например, книгу Ланцоша, цитируемую в литературных указаниях), что замена в (3.24) функции φ_0 на новую функцию φ, для которой $\langle \pi | \varphi \rangle = 0$, соответствует переходу от времени t к новому параметру τ, так что

$$\frac{dg}{d\tau} = [\varphi, g]. \tag{3.27}$$

Покажем это на примере с нерелятивистским кулоновским или ньютоновским взаимодействием (см. § 7 гл. 2). Беря в качестве H выражение (2.97) и заменяя K_0 на $-p_4$, из (3.22) получим

$$\varphi_0 \equiv p_0 + \frac{p^2}{2m} + \frac{p_4}{r}. \tag{3.28}$$

Пусть $\varphi = r\varphi_0$. Тогда $\frac{dq^4}{d\tau} = [\varphi, q^4] = 1$, т. е. $q^4(\tau) = q^4(0) + \tau$, и при переходе от φ_0 к φ динамическая переменная q^4 и параметр τ будут играть ту же роль, которую раньше играли q^0 и t. Соответственно, новый гамильтониан, определяемый из

$$\varphi \equiv p_4 + K, \tag{3.29}$$

равен $K = \frac{rp^2}{2m} + rp_0$, что соответствует (2.98), так как числовое значение величины $-p_4$ совпадает с числовым значением H_0 энергии H. Далее,

$$\frac{dq^0}{d\tau} = [\varphi, q^0] = [rp_0, q^0] = r, \tag{3.30}$$

что при переходе к числовым значениям дает соотношение (2.99). Таким образом, теория неканонических переходов, изложенная в § 7 гл. 2, получается теперь как частный случай теории алгебр наблюдаемых со связями.

Применим теперь аппарат структуроидов для общего изучения алгебр наблюдаемых со связями. Прежде всего отметим, что множество всех связей образует линейное подпространство в линейном пространстве G. В рассмотренном выше случае связи представлялись в виде $\varphi \equiv g\varphi_0$, где g — элемент алгебры G. Но тогда

$$[\varphi_1, \varphi_2] = [g_1\varphi_0, g_2\varphi_0] = \\ = \{g_1[\varphi_0, g_2] + g_2[g_1, \varphi_0] + 2\varphi_0[g_1, g_2]\}\varphi_0,$$

т. е. скобка Пуассона от любых двух связей снова будет связью. Последнее утверждение, которое мы будем считать справедливым и в более общих случаях, может быть записано в структуроидной форме:

$$[\Phi, \Phi] \subseteq \Phi. \tag{3.31}$$

Что же касается ассоциативного умножения, то

$$G\Phi = \Phi G \subseteq \Phi. \tag{3.32}$$

Таким образом, подпространство Φ является одновременно лиевой подалгеброй и ассоциативным идеалом в алгебре G.

Алгебраические состояния алгебры G должны быть ограничены условием о том, что числовые значения связей φ равны нулю. Но если $\langle \pi_1 | \varphi \rangle = 0$, $\langle \pi_2 | \varphi \rangle = 0$, то $\langle (k_1\pi_1 + k_2\pi_2) | \varphi \rangle = 0$, где $k_1, k_2 \in R$. Поэтому элементы дуального векторного пространства по отношению к G, соответствующие допустимым алгебраическим состояниям, образуют линейное подпространство, которое мы обозначим символом P и которое определяется из

$$\langle P | \Phi \rangle = 0. \tag{3.33}$$

Но, согласно § 8 гл. 2, по определению, можно положить

$$\langle \pi | g_1 \circ g_2 \rangle = \langle \pi \circ g_1 | g_2 \rangle, \tag{3.34}$$

поэтому из (3.31) следует

$$\langle [P, \Phi] | \Phi \rangle = \langle P | [\Phi, \Phi] \rangle \subseteq \langle P | \Phi \rangle = 0, \tag{3.35}$$

так что

$$[P, \Phi] \subseteq P \tag{3.36}$$

и подпространство P инвариантно по отношению к лиевым преобразованиям с элементами из Φ. Аналогично, из (3.32) имеем

$$\langle PG | \Phi \rangle = \langle P | G\Phi \rangle = \langle P | \Phi \rangle = 0, \tag{3.37}$$

откуда

$$PG \subseteq P. \tag{3.38}$$

Легко видеть, что при учете (3.33) из (3.36) обратно следует (3.31), а из (3.38) вытекает (3.32). Поэтому вместо задания линейного подпространства Ф, определяемого множеством всех связей, можно исходить из линейного подпространства P, определяемого множеством всех допустимых алгебраических состояний алгебры G, после чего Ф будет определяться как максимальное линейное подпространство, определяемое по P с помощью (3.33), (3.36) и (3.38). Такой подход допускает также перенесение на статистическую и на квантовую теории.

Теория алгебр со связями и теория структуроидов могут быть применены к проблеме о нахождении минимальных алгебр наблюдаемых, с помощью которых достигается алгебраическое решение динамических задач. Особенно важным для физических приложений является нахождение конечных алгебр Ли, элементами которых будут связь φ и такая система наблюдаемых, функциями от которых являются искомые физические величины. Тогда минимальная требуемая для решения динамической задачи алгебра наблюдаемых будет лиево-порождаемой, и решение динамической задачи будет получаться в явном виде с помощью аппарата теории алгебр Ли.

Глава 4

СТРОЕНИЕ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ЧИСЛОВЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

§ 1. Основная теорема об ассоциативных алгебрах с числовыми значениями

Примением теорию ассоциативных структуроидов для изучения инвариантных свойств ассоциативных алгебр с числовыми значениями. Для простоты будем считать, что G является алгеброй конечного ранга, однако многие формулируемые далее результаты с небольшими модификациями переносятся также на случай алгебр наблюдаемых бесконечного ранга.

Пусть r_1 и r_2 — двусторонние идеалы ассоциативной алгебры G, т. е. для них, в структуроидных обозначениях, выполняются условия вида (3.5):

$$Gr \subseteq r,\ rG \subseteq r,\ r^2 \subseteq r. \qquad (4.1)$$

Идеалы r_1 и r_2 называются *нильпотентными*, если существуют такие натуральные числа n_1 и n_2, что

$$r_1{}^{n_1} = 0,\ r_2{}^{n_2} = 0.$$

Объединение двух нильпотентных идеалов также будет нильпотентным идеалом, так как если n — максимальное из чисел n_1 и n_2, то согласно (3.1) и (3.8), $(r_1 \bigcup r_2)^{2n}$ будет объединением подпространств, каждое из которых содержит не менее n множителей n_1 и n_2 и потому равняется нулю. Объединение всех нильпотентных идеалов алгебры называется ее *радикалом*.

Теорема. *Радикал ассоциативной алгебры G с числовыми значениями равен нулю (т. е. G не содержит отличных от нуля двухсторонних нильпотентных идеалов).*

Доказательство основной теоремы будем проводить от противного.

Пусть алгебра G с числовыми значениями содержит отличный от нуля нильпотентный идеал r, для которого существует такое натуральное число n, что

$$\begin{gathered} r^n = 0,\ r^{n-1} = d \neq 0, \\ d^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Тогда $Gd \subseteq d$. В частности, обозначив через d^* подпространство, образованное из сопряженных элементов по отношению к элементам подпространства d, отсюда имеем

$$d^*d \subseteq d,\ (d^*d)\,(d^*d) \subseteq dd = 0. \tag{4.3}$$

С другой стороны, из определения алгебр с числовыми значениями (см. § 8 гл. 2) вытекает, что для произвольного отличного от нуля подпространства b произведение b^*b отлично от нуля (ибо по четвертому свойству ассоциативных алгебр с числовыми значениями подпространство b^*b содержит элементы, числовые значения которых отличны от нуля). Отсюда следует, что $b = d^*d$ отлично от нуля, и поскольку $b^* = b$, то $b^*b = b^2$ также отлично от нуля, что противоречит (4.3). Это противоречие доказывает, что

$$b = 0,\ d = 0,$$

чем устанавливается справедливость теоремы.

Заметим, что в предыдущем доказательстве мы использовали только предположение о том, что r — левый нильпотентный идеал, поэтому у алгебры с числовыми значениями не существует не только двусторонних, но и односторонних нильпотентных идеалов. Кроме того, доказательство справедливо для ассоциативной алгебры с числовыми значениями как конечного, так и бесконечного ранга.

§ 2. Строение ассоциативных алгебр с числовыми значениями

Строение ассоциативных алгебр с числовыми значениями определяется основной теоремой предыдущего параграфа с учетом результатов и теорем теории ассоциативных алгебр. Мы дадим модернизированное, методически усовершенствованное доказательство нужных нам общих теорем, опирающиееся на аппарат теории структуроидов.

Определение. *Проектором называется такой элемент $p \in G$, для которого $p^* = p$, $p^2 = p$. Минимальным проектором $\pi \in G$ ассоциативной алгебры с числовыми значениями называется проектор, порождающий минимальный односторонний идеал.*

Теорема. *Для ассоциативной алгебры G с числовыми значениями всякий минимальный односторонний идеал порождается минимальным проектором.*

Для определенности докажем теорему для минимального левого идеала $l \subseteq G$. Прежде всего покажем, что главный левый идеал $G\{a\}$, получаемый в результате умножения линейного пространства G справа на линейное подпространство $\{a\}$, порождаемое произвольным отличным от нуля элементом $a \in l$, будет совпадать с l. Действительно, из $\{a\} \subseteq l$ после умножения слева на G получим $G\{a\} \subseteq l$. Идеал, стоящий в левой части этого включения, отличен от нуля, ибо по четвертому свойству ассоциативных алгебр с числовыми значениями (см. гл. 2) $a^*a \neq 0$. Но из минимальности левого идеала l следует, что он не содержит подидеалов, отличных от нуля, т. е. $G\{a\} = l$. Взяв, далее, сопряженные значения от всех элементов подпространств, входящих в $Gl \subseteq l$, и учитывая $G^* = G$ (звездочкой будет обозначаться преобразование, переводящее все элементы подпространства в сопряженные), получим $l^*G \subseteq l^*$, т. е. $l^*l \subseteq l^* \cap l$. Поскольку левая часть этого включения отлична от нуля, то пересечение l^* и l не пусто, т. е. l содержит, по меньшей мере, один ненулевой элемент $b \in l$, для которого $b^* = b$. Поскольку по доказанному выше $G\{b^*b\} = l = G\{b\}$, то в G найдется такой отличный от нуля элемент c, что

$$cb^*b = b = (cb^*b)^* = b^*bc^*. \tag{4.4}$$

Положим $\pi = cb^* = cb$. Тогда $G\{\pi\} = l$ и по (4.4)

$$\pi^* = bc^* = (cb^*b)c^* = \pi\pi^* = (\pi\pi^*)^*.$$

Это показывает, что

$$\pi^* = \pi,\ \pi^2 = \pi\pi^* = \pi, \tag{4.5}$$

т. е. π является искомым минимальным проектором, порождающим идеал l, что доказывает теорему.

Теорема. *Ассоциативная алгебра с числовыми значениями обладает единицей e и разлагается в прямую сумму минимальных левых идеалов $l_\beta = G\{\pi_\beta\}$, где π_β — минимальные проекторы, связанные между собой соотношениями*

$$e = \sum \pi_\beta,\ \pi_{\beta_1}\pi_{\beta_2} = \delta_{\beta_1\beta_2}\pi_{\beta_2}. \tag{4.6}$$

При доказательстве теоремы мы воспользуемся *условием минимальности для левых идеалов* (справедливым для всех алгебр конечного ранга, а также для многих бесконечных алгебр наблюдаемых), согласно которому из произвольного непустого множества левых идеалов всегда можно выделить, по крайней мере, один минимальный левый идеал. Пусть l_1 — один из минимальных левых идеалов, содержащихся в левом идеале G. Тогда по предыдущей теореме $l_1 = G\{\pi_1\}$, где π_1 — минимальным проектором. Произвольный элемент $g \in G$ запишем в виде $g = g\pi_1 + (g - g\pi_1)$ и обозначим через G_2 линейное подпространство, натянутое на всевозможные элементы вида $(g - g\pi_1)$. Тогда

$$G = l_1 \cup G_2,\ l_1 \cap G_2 = 0,$$

причем последнее соотношение следует из того, что если $b \in l_1 \cap G_2$, то $b\pi_1 = (b - b\pi_1)$. Умножая обе части последнего равенства справа на π_1, получим $b\pi_1 = 0$ т. е. $b = 0$. Значит, G распадается в прямую сумму левых идеалов $G\{\pi_1\}$ и G_2, где

$$G_2\{\pi_1\} = 0, \tag{4.7}$$

ибо $(g-g\pi_1)\pi_1=0$. Пользуясь условием минимальности, выделим из G_2 минимальный левый идеал $l_2 \subseteq G_2$, найдем минимальный проектор π_2, который порождается l_2, и т. д. Продолжая этот процесс, получим, что G можно представить в виде прямой суммы

$$G = \sum G\{\pi_\beta\}, \tag{4.8}$$

где, согласно (4.7), минимальные проекторы π_β подчиняются условию $\pi_{\beta_1}\pi_{\beta_2}=\delta_{\beta_1\beta_2}\pi_{\beta_2}$. Полагая далее

$$e = \sum \pi_\beta \tag{4.9}$$

и учитывая, что $G^*=G$, $e^*=e$, из (4.8) и (4.9) имеем

$$G\{e\} = G,\ \{e\}G = G,\ e^2 = e,$$

откуда следует, что e играет роль единицы алгебры G. Это завершает доказательство теоремы.

Из того, что ассоциативная алгебра G с числовыми значениями распадается в прямую сумму правых и левых идеалов, следует, что она может быть представлена в виде прямой суммы минимальных двусторонних идеалов $G^{(i)}$

$$G = \sum G^{(i)},\ G^{(i_1)}G^{(i_2)} = \delta^{i_1 i_2}G^{(i_2)}. \tag{4.10}$$

Каждый из двусторонних идеалов $G^{(i)}$ является подалгеброй, не содержащей двусторонних идеалов, отличных от 0 и $G^{(i)}$, т. е. согласно общему определению (§ 1 гл. 3) подалгебры $G^{(i)}$ просты, а ассоциативная алгебра G с числовыми значениями полупроста.

§ 3. Простые ассоциативные алгебры с числовыми значениями

Из предыдущих результатов следует, что строение общих ассоциативных алгебр с числовыми значениями определяется строением простых алгебр с числовыми значениями.

Теорема. *Простая ассоциативная алгебра с числовыми значениями G изоморфна алгебре действительных, комплексных или кватернионных матриц над полем действительных чисел.*

Для доказательства фиксируем один из введенных в предыдущей теореме индексов β, обозначив его β_0, и положим

$$\pi_\beta = e^\beta_\beta. \tag{4.11}$$

(Суммирование по β в правой части формул вида (4.11) не производится, так как индекс β входит также в левую часть равенства.) Из отсутствия у простой алгебры G двусторонних идеалов, отличных от G и 0, следует, что $G\{\pi_{\beta_0}\}G = G$, откуда вытекает, что линейные подпространства $\{\pi_\beta\}G\{\pi_{\beta_0}\}$ ни при одном из значений индекса β не равняются нулю. Пусть $e^{\beta_0}_\beta$— некоторый фиксированный отличный от нуля элемент подпространства $\{\pi_\beta\}G\{\pi_{\beta_0}\}$, причем если $\beta=\beta_0$, то в соответствии с (4.11) $e^{\beta_0}_{\beta_0}=\pi_{\beta_0}$. Проектор π_{β_0} порождает минимальный левый идеал, поэтому для любого β найдется такой не равный нулю элемент $e^\beta_{\beta_0}\in\{\pi_{\beta_0}\}G\{\pi_\beta\}$, что при умножении его слева на $e^{\beta_0}_\beta$ будет получаться $\pi_{\beta_0}=e^{\beta_0}_{\beta_0}$. Для произвольных индексов β_1 и β_2 положим

$$e^{\beta_1}_{\beta_2} = e^{\beta_0}_{\beta_2}e^{\beta_1}_{\beta_0}, \tag{4.12}$$

где индекс β_0 фиксирован и суммирование по нему не производится. Из определения $e^{\beta_0}_{\beta_4}$ и $e^{\beta_1}_{\beta_0}$ следует, что

$$e^{\beta_1}_{\beta_0}e^{\beta_0}_{\beta_4} = \delta^{\beta_1}_{\beta_4}e^{\beta_0}_{\beta_0}, \tag{4.13}$$

откуда с учетом (4.12) получим

$$e^{\beta_1}_{\beta_2}e^{\beta_3}_{\beta_4} = \delta^{\beta_1}_{\beta_4}e^{\beta_3}_{\beta_2}. \tag{4.14}$$

Если теперь для произвольного $g\in G$ положить

$$q^{\beta_1}_{\beta_2} = e^{\beta_1}_\beta g e^\beta_{\beta_2}, \tag{4.15}$$

то из (4.14) следует, что

$$e^{\beta_3}_{\beta_4}q^{\beta_1}_{\beta_2} = q^{\beta_1}_{\beta_2}e^{\beta_3}_{\beta_4} = e^{\beta_1}_{\beta_4}g e^{\beta_3}_{\beta_2},$$

т. е. элементы $q^{\beta_1}_{\beta_2}$ перестановочны со всеми $e^{\beta_3}_{\beta_4}$. Умножая $q^{\beta_1}_{\beta_2}$ на $e^{\beta_2}_{\beta_1}$, суммируя по всем β_1, β_2 и учитывая (4.14) и определение (4.15), имеем

$$q^{\beta_1}_{\beta_2}e^{\beta_2}_{\beta_1} = e^{\beta_1}_{\beta}g\delta^{\beta}_{\beta_1}e^{\beta_2}_{\beta_2} = e^{\beta_1}_{\beta_1}ge^{\beta_2}_{\beta_2}.$$

Но $e^{\beta_1}_{\beta_1} = e^{\beta_2}_{\beta_2} = \sum \pi_\beta = e$, поэтому произвольный элемент $g \in G$ можно записать в виде

$$g = q^{\beta_1}_{\beta_2}e^{\beta_2}_{\beta_1}. \tag{4.16}$$

Левые идеалы $G\{e^{\beta}_{\beta_2}\}$ и $G\{e^{\beta}_{\beta_3}\}$ совпадают между собой и равны l_β, так как π_β порождает минимальный левый идеал, а $e^{\beta}_{\beta_2} \in \{\pi_{\beta_2}\}G\{\pi_\beta\}$, $e^{\beta}_{\beta_3} \in \{\pi_{\beta_3}\}G\{\pi_\beta\}$. Аналогично $\{e^{\beta_1}_{\beta}\}G = \{e^{\beta_4}_{\beta}\}G$. Отсюда следует, что линейное подпространство

$$Q = \{e^{\beta_1}_{\beta}\}G\{e^{\beta}_{\beta_2}\} \tag{4.17}$$

не зависит от выбора индексов β_1 и β_2, т. е. коэффициенты $q^{\beta_1}_{\beta_2}$ в разложении (4.16) при любых β_1 и β_2 являются элементами одного и того же подпространства Q. Покажем, что элементы из Q образуют ассоциативную алгебру с делением над полем действительных чисел. В самом деле, во-первых, Q содержит единицу e, так как $e^{\beta_1}_{\beta}ee^{\beta}_{\beta_2} = \delta^{\beta_1}_{\beta_2}e$. Далее, если $e^{\beta_1}_{\beta}ge^{\beta}_{\beta_2} \neq 0$, то из-за минимальности левого идеала l_β всегда существует такой элемент b, что

$$be^{\beta_1}_{\beta_3}ge^{\beta}_{\beta_2} = e^{\beta}_{\beta_1}. \tag{4.18}$$

Поэтому, с учетом (4.14) и (4.18), получим

$$(e^{\beta_1}_{\beta}be^{\beta'}_{\beta_3})(e^{\beta_1}_{\beta}ge^{\beta}_{\beta_2}) = e^{\beta_1}_{\beta}(be^{\beta_1}_{\beta_3}ge^{\beta}_{\beta_2}) = e^{\beta}_{\beta} = e,$$

т. е. для любого не равного нулю элемента $q = e^{\beta_1}_{\beta}ge^{\beta}_{\beta_2}$ из Q существует такой элемент $q^{-1} = e^{\beta_1}_{\beta}be^{\beta}_{\beta_3}$ из Q, что $q^{-1}q = e$. Аналогично доказывается существование правого обратного элемента. Наконец, из (4.14) следует, что произведение любых двух элементов из Q будет элементом из Q, а для произведения трех элементов выполняется условие ассоциативности. Но по теореме Фробениуса (см. литературные указания) единственными ассоциативными алгебрами с делением над полем действительных чисел являются поле действительных чисел, поле комплексных чисел или тело кватернионов. Это завершает доказательство теоремы.

§ 4. Неприводимые представления простых алгебр с числовыми значениями

Исследуем вопрос о связи между различными точными неприводимыми представлениями простых ассоциативных алгебр с числовыми значениями.

Точным представлением ассоциативной алгебры G над полем P называется закон, устанавливающий однозначное соответствие между абстрактной алгеброй G и ассоциативной алгеброй M квадратных матриц с элементами из тела Q, причем последнее содержит в качестве своей составной части поле P. Разумеется, в частном случае Q может совпадать с P. Представление называется *неприводимым*, если преобразования с помощью матриц из M не оставляют инвариантным никакое ненулевое векторное подпространство, отличное от всего пространства, векторы которого преобразуются матрицами из M. Квадратную матрицу, которая ставится в соответствие абстрактному элементу g, мы будем обозначать такой же буквой, но с индексом в скобках, например, $g_{(i)}$, где индекс i характеризует номер представления. Два представления называются *эквивалентными*, если существует такая обратимая матрица S с коэффициентами из тела Q, что для всех матриц $g_{(1)}$, $g_{(2)}$, соответствующих элементам $g \in G$, выполняется соотношение

$$g_{(2)} = Sg_{(1)}S^{-1}. \tag{4.19}$$

Если $e_{\gamma}^{\beta_0}$ (где индекс β_0 фиксирован) являются базисными элементами некоторого левого идеала $l_{(0)}$, то произвольный элемент из этого идеала можно представить в виде $e_{\gamma}^{\beta_0}\psi^{\gamma}$, где ψ^{γ} — элементы из тела Q или поля P. Например, минимальный левый идеал простой алгебры с числовыми значениями, в соответствии с теоремой из предыдущего пункта, можно записать в виде $e_{\beta}^{\beta_0}\psi^{\beta}$, где ψ^{β} — элементы из тела Q, или, если воспользоваться рассмотренным в § 6 гл. 2 методом перехода от комплексных и кватернионных столбцов к действительным столбцам, — в виде $e_{\gamma}^{\beta_0}\psi^{\gamma}$, где ψ^{γ} — элементы из поля действительных чисел. Оба указанные способа описания левых идеалов эквивалентны между собой и их можно рассматривать совместно; отличие будет связано лишь с разным выбором тела Q и с разным множеством значений, принимаемых индексом γ. Если g — общий элемент алгебры G, то

$$ge_{\gamma}^{\beta_0} = e_{\gamma_1}^{\beta_0} g_{(0)\gamma}^{\gamma_1}, \tag{4.20}$$

где $g_{(0)\gamma}^{\gamma_1}$ — элементы из тела (или поля) Q. Таким образом

$$g\left(e_{\gamma}^{\beta_0}\psi^{\gamma}\right) = e_{\gamma}^{\beta_0}\left(g_{(0)}\psi\right)^{\gamma}, \tag{4.21}$$

где $g_{(0)}$ — квадратная матрица с элементами $g_{(0)\gamma_2}^{\gamma_1}$, так что произвольный идеал $l_{(0)}$ порождает представление, ставящее в соответствие каждому элементу g из алгебры G квадратную матрицу $g_{(0)}$.

Теорема. *Все точные неприводимые представления простой алгебры эквивалентны между собой и эквивалентны представлению, порождаемому произвольным минимальным ненулевым левым идеалом $l_{(0)}$.*

Доказательство. Из минимальности левого идеала $l_{(0)}$ следует, что представление, порождаемое этим идеалом, неприводимо. Покажем, что из условия о простоте алгебры G вытекает, что это представление является точным. Действительно, если d — линейное подпространство, определяемое из условия $dl_{(0)} = 0$, то оно образует двусторонний идеал, ибо $(GdG)\,l_{(0)} \subseteq G\,(dl_{(0)}) = 0$, так что по условию простоты $d = 0$. Поэтому если g — ненулевой элемент алгебры G, то $\{g\}\,l_{(0)} \neq 0$, т. е. соответствующая этому элементу матрица $g_{(0)}$, определяемая по формуле (4.20), отлична от нуля. Пусть теперь взято произвольное точное неприводимое представление алгебры G, которое элементам g ставит в соответствие квадратные матрицы $g_{(1)}$ с коэффициентами из тела Q и, в частности, элементам $e_\gamma^{\beta_0}$ — квадратные матрицы $e_{(1)\gamma}^{\beta_0}$. Поскольку представление — точное, то все эти матрицы не равны нулю, так что при любом фиксированном значении индекса $\gamma=\gamma_0$ всегда можно найти такой столбец ψ_0 с коэффициентами из Q, для которого $e_{(1)\gamma_0}^{\beta_0}\psi_0 \neq 0$. Так как $e_\gamma^{\beta_0}$ — базисные элементы левого идеала, то столбцы $S_\gamma = e_{(1)\gamma}^{\beta_0}\psi_0$ при умножении слева на матрицы $g_{(1)}$ заменяются на линейные комбинации этих же столбцов, т. е. они образуют инвариантное подпространство. Но тогда из неприводимости представления следует, что, во-первых, число таких столбцов равно размерности неприводимого представления, так что компоненты этих столбцов можно нумеровать тем же индексом γ, который нумерует базисные элементы $e_\gamma^{\beta_0}$ и, во-вторых, что матрица S с коэффициентами $S_\gamma^{\gamma_1}$ (где $S_\gamma^{\gamma_1}$ — компоненты столбца S_γ) имеет обратную матрицу S^{-1}, ибо S_γ линейно независимы и произвольные столбцы, в том числе те, у которых γ-я компонента равна 1, а остальные равны нулю, должны линейно выражаться через столбцы S_γ. Если теперь матрица $g_{(1)}$ соответствует общему элементу g алгебры G, то согласно (4.20) $g_{(1)} S_\gamma = S_{\gamma_1} g_{(0)\gamma}^{\gamma_1}$, т. е.

$$(g_{(1)}S_\gamma)^{\gamma_2} = S_{\gamma_1}^{\gamma_2} g_{(0)\gamma}^{\gamma_1}. \tag{4.22}$$

Соотношение (4.22), переписанное в матричной форме, принимает вид

$$g_{(1)} S = S g_{(0)}, \tag{4.23}$$

и поскольку матрица S имеет обратную, то

$$g_{(1)} = S g_{(0)} S^{-1}. \tag{4.24}$$

Таким образом, произвольное точное неприводимое представление эквивалентно представлению, порождаемому любым минимальным левым идеалом $l_{(0)}$, что и требовалось доказать.

§ 5. Алгебра альтернионов, алгебра Клиффорда и базисная алгебра действительных спиноров как ассоциативные алгебры с числовыми значениями

Применим полученные выше результаты к ассоциативным алгебрам специального вида, имеющим важные физические и геометрические приложения.

Ассоциативная алгебра с $2n$ образующими e_α называется *алгеброй альтернионов* ${}^lA_{2n+1}$, если образующие связаны между собой соотношениями

$$e_{\alpha_1}e_{\alpha_2} + e_{\alpha_2}e_{\alpha_1} = 2\varepsilon_{\alpha_1}\delta_{\alpha_1\alpha_2}e \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \qquad (4.25)$$

где e — единица алгебры ${}^lA_{2n+1}$, а ε_α в l случаях равняется 1 и в остальных $2n-l$ случаях равняется -1. Алгебры альтернионов, у которых число образующих равно нечетному числу, являются подалгебрами алгебр альтернионов с четным числом образующих, поэтому их можно независимо не рассматривать.

Алгебру альтернионов, у которой все ε_α равны 1, в физической литературе обычно называют алгеброй Клиффорда. Если алгебру рассматривать не над полем действительных чисел, а над полем комплексных чисел или телом кватернионов, то алгебры альтернионов с разными l будут изоморфны алгебре Клиффорда. Поэтому алгебры ${}^lA_{2n+1}$ над полем действительных чисел будем называть действительными формами комплексной алгебры Клиффорда. Алгебру $B_n = {}^nA_{2n+1}$, для которой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_{n+1} = \ldots = \varepsilon_{2n} = -1$ по определению, будем рассматривать в качестве нормальной действительной формы комплексной алгебры Клиффорда и будем называть ее *базисной алгеброй действительных спиноров*. Остальные действительные формы можно получить путем замены некоторых образующих e_α нормальной формы на $e_\alpha' = (ie_\alpha)$.

Теорема. *Алгебра альтернионов с четным числом образующих является ассоциативной алгеброй с числовыми значениями. Она не содержит ненулевых двусторонних идеалов, отличных от самой этой алгебры (т. е. является простой).*

Для доказательства первой части теоремы необходимо определить для элементов $g \in {}^{l}A_{2n+1}$ операции инволютивного сопряжения и взятия числовых значений и показать, что при этом выполняются все свойства алгебр с числовыми значениями.

За базисные элементы алгебры ${}^{l}A_{2n+1}$ можно принять 2^{2n} элементов e_μ вида

$$e_\mu = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_k} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k), \tag{4.26}$$

где по определению считается $e_0 = e$. Инволютивное сопряжение в применении к базисным элементам определим формулами

$$\overset{*}{e}_\mu = \varepsilon_{\alpha_1} \ldots \varepsilon_{\alpha_k} e_{\alpha_k} \ldots e_{\alpha_2} e_{\alpha_1}, \ \overset{*}{e}_0 = e_0 = e, \tag{4.27}$$

а числовые значения — формулами

$$\operatorname{Re} e_\mu = \delta^0_\mu 2^n. \tag{4.28}$$

Тогда для общего элемента $g = \varphi^\mu e_\mu$ из алгебры ${}^{l}A_{2n+1}$, где φ^μ — произвольные действительные числа, сопряженное значение, числовое значение и норма имеют вид

$$g^* = \varphi^\mu \overset{*}{e}_\mu, \ \operatorname{Re} g = 2^n \varphi^0, \ n^2(g) = \operatorname{Re}(g^* g) = 2^n \sum_\mu \varphi^\mu \varphi^\mu.$$

Отсюда следует, что все свойства алгебр с числовыми значениями выполняются; например свойство 4 (см. стр. 50) вытекает из выражения для $n^2(g)$, так что если $g \neq 0$, то $n^2(g) > 0$.

Покажем далее, что

$$\sum_{\mu_1} e_{\mu_1} e_\mu \overset{*}{e}_{\mu_1} = \delta^0_\mu 2^{2n} e = 2^n (\operatorname{Re} e_\mu) e. \tag{4.29}$$

Если $\mu = 0$, то (4.29) следует из (4.25), (4.27) и из того, что число всех базисных элементов e_{μ_1} равно 2^{2n}. Если же $e_\mu = e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_k}$, то e_{μ_1} можно записать в виде $e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_l} e_{\gamma_1} \ldots e_{\gamma_j}$, где $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — индексы, содержащиеся среди чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ — не содержащиеся, и условно принимается, что если $i=0$ или $j=0$, то $e_{\beta_1}\ldots e_{\beta_i}=e$ или $e_{\gamma_1}\ldots e_{\gamma_j}=e$. При этих условиях, согласно (4.25), если $\mu\neq 0$, то $e_{\mu_1}e_\mu=(-1)^{jk+i(k-1)}e_\mu e_{\mu_1}$. Тогда если k — нечетное, то число всех случаев, для которых множитель при $e_\mu e_{\mu_1}$ равен $+1$ или -1, совпадает с числом всех различных $e_{\gamma_1}\ldots e_{\gamma_j}$ соответственно для четных или нечетных j. Но первое из этих чисел при $1\leqslant 2j_1+$ $+1\leqslant 2n-k$ равно $n_1=C^1_{2n-k}+C^3_{2n-k}+\ldots+C^{2n-k}_{2n-k}$, а второе $n_2=C^0_{2n-k}+C^2_{2n-k}+\ldots+C^{2n-k-1}_{2n-k}$. Поскольку $n_2-n_1=(1-1)^{2n-k}=0$, то отсюда следует справедливость (4.29) при нечетных k. Аналогично, если k — четное, то достаточно учесть, что число всех $e_{\beta_1}\ldots e_{\beta_{2i_1}}$ равно числу всех $e_{\beta_1}\ldots e_{\beta_{2i_1+1}}$, где $1\leqslant 2i_1+1\leqslant k$. Поэтому формула (4.29) верна для произвольных k и, следовательно, для произвольных μ.

Докажем теперь, что алгебра ${}^lA_{2n+1}$ не содержит нетривиальных двусторонних идеалов, т. е. что она является простой. Из (4.27) имеем $\operatorname{Re}(\overset{*}{e}_\mu g)=\varphi^\mu 2^n$. Отсюда с учетом (4.29) вытекает, что каждый ненулевой двусторонний идеал алгебры ${}^lA_{2n+1}$ должен содержать элементы, пропорциональные $e=e_0$, так как если g — произвольный ненулевой элемент такого идеала, то в его разложении по базисным элементам хотя бы один из коэффициентов φ^μ отличен от нуля. Но поскольку $G\{e\}=G$, то любой ненулевой двусторонний идеал должен содержать всю алгебру $G={}^lA_{2n+1}$. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы можем воспользоваться результатами § 3, из которых следует, что алгебра $G={}^lA_{2n+1}$ изоморфна алгебре действительных, комплексных или кватернионных матриц над полем действительных чисел. Вторая из этих возможностей исключается, так как размерность алгебры ${}^lA_{2n+1}$ равна 2^{2n} размерность алгебры комплексных матриц порядка m равна $2m^2$, а равенство $2^{2n}=2m^2$ ни при каких целых n и m невозможно. Поэтому алегбра ${}^lA_{2n+1}$ изоморфна или алгебре R_{2n} действительных матриц порядка 2^n или алгебре $Q_{2(n-1)}$ кватернионных матриц порядка 2^{n-1}. Пользуясь методом индукции по n, можно показать, что имеет место следующая

Теорема. *Алгебра альтернионов* ${}^{l}A_{2n+1}$ *изоморфна* R_{2^n}, *если* $(-1)^{(n-l+1)(n-l)/2}=1$, *и изоморфна* $Q_{2(n-1)}$, *если* $(-1)^{(n-l+1)(n-l)/2}=-1$.

Из этой теоремы (полное доказательство которой из-за его громоздкости мы здесь не приводим) следует, что базисная алгебра действительных спиноров $B_n={}^{n}A_{2n+1}$ изоморфна алгебре действительных квадратных матриц порядка 2^n над полем действительных чисел и изоморфна ${}^{n+1}A_{2n+1}$.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим автоморфизмы алгебры альтернионов ${}^{l}A_{2n+1}$, при которых базисные элементы e_μ заменяются на такие их линейные комбинации e_μ', что структурные постоянные не меняются, и покажем, что имеет место

Теорема об автоморфизмах. *Для произвольной простой ассоциативной алгебры с числовыми значениями* G, *и в том числе для* $G={}^{l}A_{2n+1}$, *все автоморфизмы являются внутренними, т. е. найдется такой обратимый элемент* $s\in G$, что

$$e_\mu' = u_\mu^{\mu_1}e_{\mu_1} = se_\mu s^{-1}. \tag{4.30}$$

В самом деле, действуя элементами e_μ и e_μ' слева на элементы какого-либо минимального левого идеала, мы получим два точных неприводимых представления алгебры G, для которых элементам e_μ и e_μ' во взаимно однозначное соответствие ставятся матрицы E_μ и E_μ'. Согласно последней теореме из § 4, все точные неприводимые представления алгебры G эквивалентны между собой, т. е. найдется такая невырожденная матрица S, что

$$E_\mu' = SE_\mu S^{-1}. \tag{4.31}$$

Но простая алгебра G изоморфна матричной алгебре, поэтому матрицу S можно представить в виде

$$S = \sum_\mu s^\mu E_\mu, \tag{4.32}$$

где s^μ — действительные числа. Полагая $s=\sum_\mu s^\mu e_\mu$ и заменяя в (4.31) E_μ и E'_μ на e_μ и e'_μ, получим, что соотношения (4.31)] перейдут в (4.30), а это доказывает теорему.

§ 6. Ассоциативная алгебра квантованных полей и иллюстрация основных теорем

Теория квантованных фермионных полей, описывающая рождение и уничтожение частиц с полуцелым спином (фермионов), основывается на применении операторов рождения b_σ и уничтожения b^σ фермионов. При первоначальном изучении алгебраических основ теории можно ограничиться конечномерным случаем и считать, что индекс σ принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

Базисной алгеброй квантованных фермионных полей называется ассоциативная алгебра с образующими b_σ, b^σ, связанными соотношениями

$$\begin{gathered} b^{\sigma_1}b_{\sigma_2}+b_{\sigma_2}b^{\sigma_1}=\delta^{\sigma_1}_{\sigma_2}e, \\ b_{\sigma_1}b_{\sigma_2}+b_{\sigma_2}b_{\sigma_1}=b^{\sigma_1}b^{\sigma_2}+b^{\sigma_2}b^{\sigma_1}=0, \end{gathered} \tag{4.33}$$

где e — единичный элемент, а индекс σ для рассматриваемой конечномерной модели принимает значения от 1 до n.

Теорема. *Базисная алгебра квантованных фермионных полей изоморфна базисной алгебре действительных спиноров B_n.*

В самом деле, из определения B_n следует, что ее образующие e_σ, $e_{\sigma+n}$ $(\sigma=1, 2, \ldots)$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} e_{\sigma_1}e_{\sigma_2}+e_{\sigma_2}e_{\sigma_1}=-(e_{n+\sigma_1}e_{n+\sigma_2}+e_{n+\sigma_2}e_{n+\sigma_1})=2\delta_{\sigma_1\sigma_2}e, \\ e_{\sigma_1}e_{n+\sigma_2}+e_{n+\sigma_2}e_{\sigma_1}=0. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Если положить

$$b_\sigma=\frac{1}{2}(e_\sigma+e_{n+\sigma}),\quad b^\sigma=\frac{1}{2}(e_\sigma-e_{n+\sigma}), \tag{4.35}$$

то из (4.34) вытекает, что b_σ, b^σ связаны между собой соотношениями (4.33), что доказывает теорему.

Из (4.33) следует, что

$$(b_1b^1)(b_1b^1) = b_1b^1, \ldots; \qquad (b^1b_1)(b^1b_1) = b^1b_1, \ldots; \tag{4.36}$$

$$(b_1b^1)(b_2b^2) = (b_2b^2)(b_1b^1), \ldots; \quad (b^1b_1)(b^2b_2) = (b^2b_2)(b^1b_1), \ldots; \tag{4.37}$$

$$(b_1b^1)(b^1b_1) = 0, \ldots; \qquad (b_1b^1)(b^2b_2) = (b^2b_2)(b_1b^1), \ldots, \tag{4.38}$$

где многоточие означает, что аналогичные соотношения будут получаться путем замены индексов 1 (или 1 и 2) на другие индексы σ. Положим

$$\pi_{\sigma_1\ldots\sigma_k} = (b_{\sigma_1}b^{\sigma_1})(b_{\sigma_2}b^{\sigma_2}) \ldots (b_{\sigma_k}b^{\sigma_k})(b^{\sigma_{k+1}}b_{\sigma_{k+1}}) \ldots (b^{\sigma_n}b_{\sigma_n}), \tag{4.39}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — k произвольных различных чисел, взятых из совокупности $1, 2, \ldots, n$, а $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n$ — остальные числа из этой совокупности, и по $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ суммирование в данном случае не производится. При этом будем считать

$$\pi_0 = (b^1b_1)(b^2b_2) \ldots (b^nb_n). \tag{4.40}$$

Из (4.36) — (4.39) следует, что $\pi_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ не меняются при перестановке двух соседних индексов, а из (4.35) и определения (4.27) инволютивного сопряжения для алгебр альтернионов вытекает, что $\pi^*_{\sigma_1\ldots\sigma_k} = \pi_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$. Обозначим многоиндексный символ $\sigma_1 \ldots \sigma_k$ одной буквой β. Число различных $\pi_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ при данном k равно числу сочетаний из n по k, т. е. C_n^k, а число всех различных значений символа β равно

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Учитывая формулы (4.33) и (4.36)—(4.39), получим

$$\pi_{\beta_1}\pi_{\beta_2} = \delta_{\beta_1\beta_2}\pi_{\beta_2}, \tag{4.41}$$

$$\sum_{\beta} \pi_\beta = (b^1 b_1 + b_1 b^1)(b^2 b_2 + b_2 b^2) \ldots (b^n b_n + b_n b^n) = e. \tag{4.42}$$

Соотношения (4.41) и (4.42) совпадают с соотношениями (4.6) для минимальных проекторов, вводимых в соответствии с основной теоремой об ассоциативных алгебрах с числовыми значениями. Поэтому формулой (4.39) определяются явные выражения для этих проекторов.

Положим

$$b_{[\beta]} = b_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \ldots b_{\sigma_k}, \quad b^{[\beta]} = b^{\sigma_k} \ldots b^{\sigma_2} b^{\sigma_1} = b^*_{[\beta]}, \tag{4.43}$$

причем по определению будем считать $b_{[0]} = b^{[0]} = e$. Квадратные скобки $[\beta]$ у многоиндексного символа β ставятся в (4.43) для того, чтобы подчеркнуть, что $b_{[\beta]}$ и $b^{[\beta]}$ (в противоположность π_β), как это следует из (4.33), антисимметричны по индексам $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. Поскольку $(b_{\sigma_k})^2 = (b^{\sigma_k})^2 = 0$, то из (4.40) следует, что при $[\beta] \neq 0$ $b^{[\beta]}\pi_0 = \pi_0 b_{[\beta]} = 0$, откуда с учетом (4.36) — (4.38) получаем

$$\pi_0 b^{[\beta_2]} b_{[\beta_1]} \pi_0 = \delta^{\beta_2}_{\beta_1} \pi_0. \tag{4.44}$$

Положив

$$e^{\beta_2}_{\beta_1} = b_{[\beta_1]} \pi_0 b^{[\beta_2]}, \tag{4.45}$$

отсюда имеем

$$e^{\beta_1}_{\beta_2} e^{\beta_3}_{\beta_4} = \delta^{\beta_1}_{\beta_4} e^{\beta_3}_{\beta_2}. \tag{4.46}$$

Это показывает, что формулами (4.45) определяются явные выражения для элементов $e^{\beta_1}_{\beta_2}$, вводимых в соответствии с теоремой о строении простых алгебр с числовыми значениями.

Чтобы решить обратную задачу, заключающуюся в нахождении явных выражений для $b_{[\beta]}$ и $b^{[\beta]}$ (и в частности, для $e_\sigma = b_\sigma + b^\sigma$, $e_{n+\sigma} = b_\sigma - b^\sigma$) через элементы $e^{\beta_1}_{\beta_2}$, воспользуемся тождеством (4.42), которое при использовании правила суммирования Эйнштейна переписывается в виде $e^\beta_\beta = e$. Умножая $b_{[\beta]}$ справа на $e^{\beta_1}_{\beta_1} = e$, а $b^{[\beta]}$ слева на $e^{\beta_1}_\beta$ и учитывая (4.45), получим

$$b_{[\beta]} = (b_{[\beta]} b_{[\beta_1]}) \pi_0 b^{[\beta_1]}, \quad b^{[\beta]} = \overset{*}{b}_{[\beta]}. \tag{4.47}$$

Но, согласно (4.43), произведение $b_{[\beta]} b_{[\beta_1]}$ равняется или нулю, если среди индексов, входящих в $[\beta]$ и $[\beta_1]$, имеются одинаковые, или же равняется некоторому элементу $b_{[\beta_2]}$, взятому со знаком плюс или минус. Подставляя выражения для этих произведений в (4.47), получим искомые представления $b_{[\beta]}$ и $b^{[\beta]}$ в виде линейных комбинаций от $e^{\beta_1}_{\beta_2}$.

В применении к базисной алгебре квантованных фермионных полей B_n теорема об автоморфизмах, доказанная в конце предыдущего параграфа, может быть переформулирована следующим образом. *Если образующие b_σ, b^σ и $\tilde{b}_\sigma$, $\tilde{b}^\sigma$ связаны одинаковыми соотношениями* (4.33), *то существует такой обратимый элемент s из B_n, для которого*

$$\tilde{b}_\sigma = s b_\sigma s^{-1}, \quad \tilde{b}^\sigma = s b^\sigma s^{-1}. \tag{4.48}$$

Для перехода от теории квантованных фермионных полей к общей теории квантованных фермионно-бозонных полей нужно рассмотреть прямое произведение ассоциативной базисной алгебры фермионных полей на ассоциативную базисную алгебру бозонных полей. Последняя имеет в качестве образующих операторы рождения a_μ и уничтожения $a^\mu = (a_\mu)^*$, связанные между собой тождественными соотношениями, заменяющими (4.33):

$$\begin{gathered} a^{\mu_1} a_{\mu_2} - a_{\mu_2} a^{\mu_1} = \delta^{\mu_1}_{\mu_2} e, \\ a_{\mu_1} a_{\mu_2} - a_{\mu_2} a_{\mu_1} = 0, \qquad a^{\mu_1} a^{\mu_2} - a^{\mu_2} a^{\mu_1} = 0. \end{gathered} \tag{4.49}$$

Из (4.49) видно, что ассоциативная алгебра бозонных полей является прямым произведением изоморфных между собой ассоциативных алгебр A с инволютивным сопряжением и образующей a, удовлетворяющей тождественному соотношению

$$a^*a - aa^* = e. \tag{4.50}$$

Из (4.50) следует, что если положить $H = aa^* + \frac{1}{2}e$, то

$$Ha - aH = a, \tag{4.51}$$

$$Ha^* - a^*H = -a^*. \tag{4.52}$$

Поскольку (4.51) и (4.52) имеют вид перестановочных соотношений между оператором энергии H для гармонического осциллятора и операторами повышения a и понижения a^* для его собственных значений, то в квантовой теории полей принимается, что собственные значения у H, как и в случае гармонического осциллятора (в единицах, для которых $\hbar\omega = 1$), равны $1/2$, $3/2$, $5/2, \ldots$, так что наряду с (4.50) выполняется тождественное соотношение

$$\left(H - \frac{1}{2}e\right)\left(H - \frac{3}{2}e\right)\ldots\left(H - \frac{2n+1}{2}e\right)\ldots = 0. \tag{4.53}$$

Таким образом, изучение строения базисной алгебры бозонных квантованных полей сводится к изучению ассоциативной алгебры A, у которой образующая a и ее сопряженная a^* удовлетворяют тождественным соотношениям (4.50) и (4.53). Покажем, что в алгебре A можно ввести базисные элементы $e_{n_2}^{n_1}$, определяемые в соответствии с теоремой о строении простых алгебр с числовыми значениями. Отсюда будет следовать, что алгебра A изоморфна матричной алгебре над полем действительных чисел, т. е. она является простой алгеброй с числовыми значениями. Но согласно § 6 гл. 2, прямое произведение матричных алгебр над некоторым полем является матричной алгеброй над тем же полем, поэтому и *полная алгебра квантованных фермионно-бозонных полей является простой алгеброй с числовыми значениями.*

Для доказательства этого утверждения перепишем (4.53) в виде

$$\prod_{n=0}^{\infty}(aa^*-ne)=0; \qquad (aa^*-me)\prod_{n\neq m}(aa^*-ne)=0 \tag{4.54}$$

и положим

$$\frac{\prod\limits_{n\neq m}(aa^*-ne)}{\prod\limits_{n\neq m}(m-n)}=e_m^m, \tag{4.55}$$

где в правой части (4.55) суммирование не производится, так как индекс m входит также в левую часть и потому не является немым. Из (4.55) имеем

$$(aa^*-me)\,e_m^m=0,$$

$$\prod_{n\neq m}\frac{(aa^*-ne)}{(m-n)}\,e_m^m=(e_m^m)^2=e_m^m. \tag{4.56}$$

В частности, если $m=0$,

$$aa^*e_0^0=0, \qquad e_0^0aa^*=0, \qquad (e_0^0)^2=(e_0^0). \tag{4.57}$$

Из (4.50) вытекают следующие тождества:

$$a^*a^n-a^na^*=a^{n-1}+(a^*a^{n-1}-a^{n-1}a^*)\,a=\ldots=na^{n-1}, \tag{4.58}$$

$$a\,(a^*)^n-(a^*)^n a=-na^{n-1}, \tag{4.59}$$

$$(a^*a)a^n-a^n(a^*a)=(a^*a^n-a^na^*)\,a=na^n, \tag{4.60}$$

$$(a^*a)(a^*)^n-(a^*)^n(a^*a)=-na^n. \tag{4.61}$$

Комбинируя (4.60) и (4.61), получим

$$(a^*a)(a^*)^j(a)^i-(a^*)^j(a)^i(a^*a)=(a^*)^j\{(a^*a)\,a^i-a^i(a^*a)\}+$$
$$+\{(a^*a)(a^*)^j-(a^*)^j(a^*a)\}=(i-j)(a^*)^ja^i. \tag{4.62}$$

Из выписанных тождеств следует, что

$$e_0^0 (a^*)^j a^i e_0^0 = i!\, \delta_i^j e_0^0. \tag{4.63}$$

В самом деле, если $i \neq j$, то умножая обе части тождества (4.62) справа и слева на e_0^0 и учитывая (4.57), получим $e_0^0 (a^*)^j a^i e_0^0 = 0$. Если же $j = i$, то по (4.58) и (4.57)

$$e_0^0 (a^*)^i a^i e_0^0 = i e_0^0 (a^*)^{i-1} a^{i-1} e_0^0 = \ldots = i!\, e_0^0,$$

так что формула (4.63) верна как при $i \neq j$, так и при $i = j$. Положим

$$e_{j_2}^{j_1} = \frac{1}{\sqrt{j_1!}\,\sqrt{j_2!}}\, a^{j_2} e_0^0 (a^*)^{j_1}. \tag{4.64}$$

Тогда из (4.63) следует

$$e_{i_2}^{i_1} e_{j_2}^{j_1} = \frac{1}{\sqrt{i_1!\, i_2!\, j_1!\, j_2!}}\, a^{i_2} e_0^0 (a^*)^{i_1} a^{j_2} e_0^0 (a^*)^{j_1} =$$

$$= \delta_{j_2}^{i_1} \frac{1}{\sqrt{i_2!\, j_1!}}\, a^{i_2} e_0^0 (a^*)^{j_1} = \delta_{j_2}^{i_1} e_{i_2}^{j_1}, \tag{4.65}$$

т. е. формулой (4.64) определяются искомые базисные элементы алгебры A, соответствующие теореме о строении простых алгебр с числовыми значениями. Единицу e алгебры A, в соответствии с (4.65), можно записать в виде

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^n. \tag{4.66}$$

Умножая (4.66) на a и a^*, получим

$$a = ae = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n!\,(n+1)!}}\, a^{n+1} e_0^0 (a^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, e_{n+1}^n, \tag{4.67}$$

$$a^* = ea^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, e_n^{n+1}. \tag{4.68}$$

Если $e_{n_2}^{n_1}$ отождествить с бесконечномерными матрицами, у которых на пересечении n_1-й строки и n_2-го столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули, то формулы (4.67) и (4.68) перейдут в выражения, вводимые при матричной формулировке квантовомеханической задачи о гармоническом осцилляторе.

В применении к гармоническому осциллятору новым в рассмотренных результатах является то, что канонические базисные элементы $e_{j_2}^{j_1}$ по формуле (4.64) могут быть выражены через операторы рождения и уничтожения. При этом осуществляется алгебраическая переформулировка теории; в частности, *наблюдаемым будут сопоставляться элементы* $\varphi = \varphi_{j_1}^{j_2} e_{j_2}^{j_1}$ *алгебры* A, *не меняющиеся при сопряжении, а квантовомеханическим состояниям соответствуют минимальные проекторы.* Например, величины e_m^m, определяемые по (4.55), являются минимальными проекторами, сопоставляемыми с m-ми квантовыми состояниями гармонического осциллятора, а среднее значение наблюдаемой $\varphi = \varphi_{j_1}^{j_2} e_{j_2}^{j_1}$ в состоянии $\pi_m = e_m^m$ в соответствии с (2.112) равно

$$\overline{\varphi} = \mathrm{Re}\,(\pi_m, \varphi) = \mathrm{Sp}\,(e_m^m \cdot \varphi) = \varphi_m^m. \qquad (4.69)$$

Глава 5

АЛГЕБРЫ ЛИ И ГРУППЫ ЛИ

§ 1. Основная теорема о связи между алгебрами Ли и группами Ли

Наиболее важные результаты теории групп Ли основываются на существовании тесных связей между алгебрами Ли и группами Ли. Эти связи, а также все прикладные результаты локальной теории групп Ли, являются следствием глубоких и нетривиальных тождеств, составляющих содержание доказываемой ниже основной теоремы.

Пусть e_λ — базисные элементы алгебры Ли ранга r, так что $\lambda=1, 2, \ldots, r$. Тогда

$$[e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}] = c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2} e_{\lambda_3}, \tag{5.1}$$

где $c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2}$ — *структурные постоянные*, антисимметричные по двум нижним индексам и связанные вытекающими из (2.5) тождествами Якоби. По одинаковым индексам λ (в данном случае по λ_3), встречающимся вверху и внизу, в соответствии с общим правилом производится суммирование от 1 до r. *Точным представлением алгебры Ли l* в терминах ассоциативной алгебры G называется закон, который каждому элементу $\xi^\lambda e_\lambda \in l$, где ξ^λ — произвольные действительные числа, ставит в соответствие элемент $\xi^\lambda X_\lambda \in G$, где X_λ — так называемые *генераторы представления алгебры Ли* — линейно независимы и связаны между собой соотношениями

$$X_{\lambda_1}X_{\lambda_2} - X_{\lambda_2}X_{\lambda_1} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2}X_{\lambda_3}. \tag{5.2}$$

При этом дополнительно предполагается, что G содержит единицу e и что ряд

$$T^{\xi} \equiv \exp(\xi^{\lambda}X_{\lambda}) = e + \frac{(\xi^{\lambda}X_{\lambda})}{1!} + \frac{(\xi^{\lambda}X_{\lambda})^2}{2!} + \ldots + \frac{(\xi^{\lambda}X_{\lambda})^n}{n!} + \ldots \tag{5.3}$$

сходится при всех действительных значениях ξ^{λ} (последнее допущение в ряде случаев, например, для ассоциативных алгебр конечного ранга, становится излишним, так как оно может выводиться из других свойств алгебры G). В квантовой теории в левой части (5.2) будет стоять квантовомеханическая скобка Пуассона $\frac{i}{\hbar}(X_{\lambda_1}X_{\lambda_2} - X_{\lambda_2}X_{\lambda_1})$; чтобы перейти к этим скобкам, в (5.2) и во всех дальнейших соотношениях следует заменить генераторы X_{λ} на $\frac{\hbar}{i} X_{\lambda}$.

Введем квадратную матрицу r-го порядка C_{ξ} с элементами

$$(C_{\xi})^{\lambda_1}_{\lambda_2} \equiv c^{\lambda_1}_{\lambda\lambda_2}\xi^{\lambda}, \tag{5.4}$$

характеризующую присоединенное представление алгебры Ли. Если E — единичная матрица r-го порядка, то положим

$$U(\xi) = E - \frac{1}{2!}C_{\xi} + \frac{1}{3!}C^2_{\xi} + \ldots = \frac{E - \exp(-C_{\xi})}{C_{\xi}}. \tag{5.5}$$

Матрицы $U(\xi)$ и $U(-\xi)$ невырождены [1]) в некоторой области значений параметров ξ^{λ}, т. е. для этой области существуют обратные матрицы. В самом деле, при $\xi^{\lambda} \to 0$

$$\lim U(\xi) = \lim U(-\xi) = E,$$

[1]) Или, что то же самое, обратимы.

так что при малых значениях ξ^λ матрицы $U(\xi)$ и $U(-\xi)$ близки к единичной матрице и их определители отличны от нуля.

Основная теорема. *Для области значений параметров ξ^λ, в которой невырождена матрица $U(\xi)$, имеют место тождества*

$$X_\lambda T^\xi = Y_\xi T^\xi, \qquad T^\xi X_\lambda = Z_\lambda T^\xi, \tag{5.6}$$

где

$$Y_\lambda = U^{-1}(-\xi)_\lambda^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda_1}}, \qquad Z_\lambda = U^{-1}(\xi)_\lambda^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda_1}}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Введем матрицы-строки

$$\boldsymbol{X} = (X_1 X_2 \ldots X_r), \qquad \boldsymbol{\partial} = (\partial_1 \partial_2 \ldots \partial_r), \tag{5.8}$$

элементами которых являются соответственно операторы X_λ и $\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}$. Под умножением строк (5.8) справа или слева на какие-либо операторы будем понимать строки, получаемые в результате умножения каждого из элементов строк (5.8) справа или слева на эти операторы. Например, если положить $X = \xi^\lambda X_\lambda$, то

$$\boldsymbol{\partial} X = ((\partial_1 X)(\partial_2 X) \ldots (\partial_r X)) = (X_1 X_2 \ldots X_r) = \boldsymbol{X}. \tag{5.9}$$

Далее учитывая, что согласно (5.2) и (5.4)

$$X X_\lambda - X_\lambda X = c_{\lambda_1 \lambda}^{\lambda_2} \xi^{\lambda_1} X_{\lambda_2} = (\boldsymbol{X} C_\xi)_\lambda, \tag{5.10}$$

имеем

$$X\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}X = \boldsymbol{X} C_\xi = (X_1 X_2 \ldots X_r) \begin{pmatrix} (C_\xi)_1^1 & (C_\xi)_2^1 \ldots \\ (C_\xi)_1^2 & (C_\xi)_2^2 \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Найдем теперь, чему равна частная производная от $T^\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ по ξ^λ. Для этого прежде всего по индукции докажем, что при любом значении $n \geqslant 1$ имеют место тождества

$$\partial X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \boldsymbol{X} (C_\xi)^{n-k-1} X^k, \tag{5.12}$$

$$\partial X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} X^k \boldsymbol{X} (-C_\xi)^{n-k-1}. \tag{5.13}$$

При $n=1$ формулы (5.12) и (5.13) совпадают с (5.9) и поэтому верны. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}, \tag{5.14}$$

покажем, что если формула (5.12) верна для некоторого n, то она верна и для $n+1$. В самом деле, из (5.9), (5.11), (5.12) и (5.14) следует

$$\begin{aligned}
\partial X^{n+1} &= (\partial X) X^n + X (\partial X^n) = \\
&= \boldsymbol{X} X^n + X \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \boldsymbol{X} (C_\xi)^{n-k-1} X^k = \\
&= \boldsymbol{X} \left[X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (X + C_\xi)\, C_\xi^{n-k-1} X^k \right] = \\
&= \boldsymbol{X} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \right) C_\xi^{n-k} X^k + C_\xi^n \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \boldsymbol{X} (C_\xi)^{n-k} X^k.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Это доказывает, что формула (5.12) справедлива при всех $n \geqslant 1$. Аналогично убеждаемся в справедливости (5.13). Воспользуемся далее тем, что если суммирование по строкам бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix}
a_0^1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
a_1^2 & a_0^2 & 0 & 0 & \ldots \\
a_2^3 & a_1^3 & a_0^3 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}$$

заменить на суммирование по диагоналям (что можно делать при абсолютной сходимости двойной суммы), то получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_k^{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{n+k}. \tag{5.16}$$

Заменяя здесь a_k^n на выражения, стоящие под знаком сумм в (5.12) и (5.13), будем иметь

$$\partial e^X = X\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_\xi^{n-1}}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right) = XU(-\xi)\,e^X, \tag{5.17}$$

$$\partial e^X = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\right)X\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-C_\xi)^{n-1}}{n!}\right) = e^X XU(\xi). \tag{5.18}$$

Переписывая (5.17) и (5.18) в компонентах, получим

$$\partial_\lambda T^\xi \equiv \frac{\partial}{\partial\xi^\lambda}e^X = X_{\lambda_1}U(-\xi)_\lambda^{\lambda_1}e^X = X_{\lambda_1}U(-\xi)_\lambda^{\lambda_1}T^\xi, \tag{5.19}$$

$$\partial_\lambda T^\xi = e^X U(\xi)_\lambda^{\lambda_1}X_{\lambda_1} = T^\xi U(\xi)_\lambda^{\lambda_1}X_{\lambda_1}. \tag{5.20}$$

Согласно (5.5)

$$U(-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_\xi^{n-1}}{n!} = \frac{E-\exp C_\xi}{-C_\xi} = e^{C_\xi}U(\xi), \tag{5.21}$$

поэтому, приравнивая между собой правые части (5.19) и (5.20), получим

$$e^X X_\lambda e^{-X} = (\exp C_\xi)_\lambda^{\lambda_1}X_{\lambda_1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[X,\ldots[X,X_\lambda]\ldots]}{n!}, \tag{5.22}$$

что соответствует эквивалентности формул (2.80) и (2.81).

Из (5.21) следует, что если $U(\xi)$ невырождена (т. е. для нее существует обратная матрица), то будет невырождена и матрица $U(-\xi)$. Для области значений параметров ξ^λ, в которой матрицы $U(\xi)$ и $U(-\xi)$ невырождены, соотношения (5.19) и (5.20) можно умножить соответственно на $U^{-1}(-\xi)^{\lambda}_{\lambda_2}$ и $U^{-1}(\xi)^{\lambda}_{\lambda_2}$ и затем провести суммирование по всем значениям индекса λ. Учитывая определения (5.7), получим, что (5.19) и (5.20) будут совпадать с (5.6), что завершает доказательство основной теоремы.

Пусть $g(\xi) \in G$ — аналитическая функция от параметров ξ^{λ}, так что в некоторой области значений ξ^{λ} ее можно представить в виде ряда

$$g(\xi) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} g_{n_1 \ldots n_r} (\xi^1)^{n_1} \ldots (\xi^r)^{n_r}; \qquad g_{n_1 \ldots n_r} \in G. \tag{5.23}$$

Если параметры ξ^{λ} умножить на единицу e алгебры G, то их также можно будет считать элементами алгебры G.

Линейное преобразование T, переводящее элементы $g \in G$ в $Tg \in G$, называется точечным, если для произвольных аналитических функций $g(\xi)$

$$Tg(\xi) \equiv Tg(\xi^1, \ldots, \xi^r) = g\{(T\xi^1 e), \ldots, (T\xi^r e)\} \equiv g(T\xi). \tag{5.24}$$

Теорема о точечных преобразованиях. *Пусть линейное преобразование $T = \exp D$, где $D = V^{\lambda} \dfrac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}}$ и V^{λ} — бесконечно дифференцируемые функции от ξ^{λ}, умноженные на единицу алгебры G. Тогда T — точечное преобразование, т. е.*

$$e^D g(\xi) = g(e^D \xi). \tag{5.25}$$

В самом деле, если f_1 и f_2 — функции от ξ^{λ}, то

$$D(f_1 f_2) = V^{\lambda}\{(\partial_{\lambda} f_1) f_2 + f_1(\partial_{\lambda} f_2)\} = (Df_1) f_2 + f_1(Df_2). \tag{5.26}$$

Отсюда путем индукции по числу n с учетом (5.14) получим

$$D^n(f_1f_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(D^k f_1)(D^{n-k} f_2). \tag{5.27}$$

Деля обе части (5.27) на $n!$ и суммируя по n от 0 до ∞, с учетом (5.16) будем иметь

$$e^D(f_1f_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{D^k f_1}{k!}\right)\left(\frac{D^{n-k} f_2}{(n-k)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{D^k f_1}{k!}\right)\left(\frac{D^n f_2}{n!}\right). \tag{5.28}$$

Отсюда следует, что

$$e^D(f_1f_2\ldots f_m) = (e^D f_1)(e^D f_2)\ldots(e^D f_n). \tag{5.29}$$

Применяя (5.29) к обеим частям (5.23), получим

$$e^D g(\xi) = \sum g_{n_1\ldots n_r}(e^D\xi^1)^{n_1}\ldots(e^D\xi^r)^{n_r} = g(e^D\xi), \tag{5.30}$$

что доказывает теорему.

Преобразования $T^\xi = \exp(\xi^\lambda X_\lambda)$, действующие на произвольные функции $g(\xi)\in G$, будем называть *непрерывными преобразованиями*, так как они непрерывно зависят от параметров ξ^λ. Что же касается параметров ξ^λ, от которых зависят T^ξ, то они называются *каноническими параметрами непрерывных преобразований*. Основная теорема и теорема о точечных преобразованиях дают возможность показать, что *непрерывные преобразования в некоторой окрестности единичного преобразоваения $T^0 = e$ образуют группу, которая называется локальной группой Ли, соответствующей алгебре Ли l.* Чтобы доказать это, необходимо убедиться, что для преобразований вида T^ξ выполняются все групповые аксиомы. Обратным преобразованием для $T^\xi = \exp(\xi^\lambda X_\lambda)$ будет $T^{-\xi} = \exp(-\xi^\lambda X_\lambda)$, условие ассоциативности для непрерывных преобразований следует из ассоциативности алгебры G, так что единственное, в чем нужно убедиться, это то, что произведение двух преобразований вида $T^\xi = \exp(\xi^\lambda X_\lambda)$ имеет такой же вид. Критерии, при которых это справедливо, а также формулы для нахождения канонических параметров произведения дает следующая

Теорема о произведении непрерывных преобразований. *Для области значений канонических параметров* ξ^λ, *в которой невырождена матрица* $U(\xi)$, *произведения непрерывных преобразований* $T^\xi = \exp(\xi^\lambda X_\lambda)$ *и* $T_\eta = \exp(\eta^\lambda X_\lambda)$ *будут непрерывными преобразованиями того же вида (т. е. будут экспоненциалами от линейных комбинаций* X_λ*). Канонические параметры произведений*

$$T^\zeta = T^\eta T^\xi, \qquad T^{\zeta'} = T^\xi T^\eta \tag{5.31}$$

являются аналитическими функциями от ξ^λ *и* η^λ, *имеющими соответственно вид*

$$\zeta^\lambda = (\exp \eta^{\lambda_1} Y_{\lambda_1})\, \xi^\lambda, \qquad \zeta'^\lambda = (\exp \eta^{\lambda_1} Z_{\lambda_1})\, \xi^\lambda, \tag{5.32}$$

где Y_λ *и* Z_λ *определяются из основной теоремы* (см. (5.7)).

Доказательство. Воспользуемся основной теоремой для нахождения явного вида произведений $T^\eta T^\xi$ и $T^\xi T^\eta$. Если положить $\eta^\lambda Y_\lambda = D$, то согласно (5.7) $DX_\lambda = X_\lambda D$ (ибо X_λ не зависит от ξ^λ). Поэтому с учетом первой формулы (5.6) имеем

$$(\eta^\lambda X_\lambda)^n T^\xi = (\eta^\lambda X_\lambda)^{n-1} D T^\xi = D (\eta^\lambda X_\lambda)^{n-1} T^\xi = \ldots = D^n T^\xi. \tag{5.33}$$

Деля обе части этого тождества на $n!$ и суммируя по n от 0 до ∞, находим

$$T^\eta T^\xi = e^D T^\xi, \qquad D = \eta^\lambda U^{-1} (-\xi)^{\lambda_1}_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda_1}}. \tag{5.34}$$

Поскольку преобразование e^D — точечное, то по теореме о точечных преобразованиях

$$e^D T^\xi = \exp[(e^D \xi^\lambda) X_\lambda], \tag{5.35}$$

что доказывает все утверждения теоремы, относящиеся к произведению $T^\eta T^\xi$. Аналогично, из вторых формул (5.6) и (5.7) вытекает справедливость теоремы по отношению к произведению $T^\xi T^\eta$.

Поскольку аналитические функции (5.32), определяемые с помощью доказанной теоремы, зависят только от ξ^λ, η^λ и структурных постоянных $c^{\lambda}_{\lambda_1\lambda_2}$, то мы будем называть их *структурными аналитическими функциями.*

§ 2. Теория групп Ли

Каждому точному представлению алгебры Ли, как мы видели, однозначно сопоставляется локальная группа Ли. Обратно, как доказывается в курсах теории непрерывных групп (см. литературные указания), всякая непрерывная группа преобразований, характеризуемая конечным числом r непрерывных параметров, в некоторой окрестности единичного преобразования является локальной группой Ли, так что для нее можно ввести r генераторов, удовлетворяющих соотношениям (5.2). При этом групповые преобразования можно характеризовать или заданием канонических параметров ξ^λ, или заданием обобщенных координат a^λ, являющихся обратимыми функциями от ξ^λ:

$$a^\lambda = a^\lambda(\xi^1, \ldots, \xi^r), \qquad \xi^\lambda = \xi^\lambda(a^1, \ldots, a^r). \tag{5.36}$$

Покажем, каким образом из основной теоремы и вытекающих из нее тождеств выводятся другие центральные теоремы теории групп Ли. Вычисляя с помощью (5.20) $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}T^\xi$, а затем $\partial_{\lambda_2}\partial_{\lambda_1}T^\xi$, и приравнивая полученные выражения, с учетом (5.2) находим

$$\partial_{\lambda_2}U(\xi)^\lambda_{\lambda_1} - \partial_{\lambda_1}U(\xi)^\lambda_{\lambda_2} = U(\xi)^{\lambda_3}_{\lambda_1}U(\xi)^{\lambda_4}_{\lambda_2}c^\lambda_{\lambda_3\lambda_4}. \tag{5.37}$$

Аналогично, с помощью (5.19) или, заменяя в (5.37) ξ^λ на $-\xi^\lambda$, получаем

$$\partial_{\lambda_2}U(-\xi)^\lambda_{\lambda_1} - \partial_{\lambda_1}U(-\xi)^\lambda_{\lambda_2} = -U(-\xi)^{\lambda_3}_{\lambda_1}U(-\xi)^{\lambda_4}_{\lambda_2}c^\lambda_{\lambda_3\lambda_4}. \tag{5.38}$$

Если преобразование T^ξ характеризовать не каноническими параметрами ξ^λ, а обобщенными координатами

a^λ, и если положить

$$A(a)^{\lambda_1}_{\lambda_2} = U(\xi)^{\lambda_1}_{\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial a^{\lambda_2}}, \tag{5.39}$$

то уравнения (5.37) дают

$$\frac{\partial A^\lambda_{\lambda_1}}{\partial a^{\lambda_2}} - \frac{\partial A^\lambda_{\lambda_2}}{\partial a^{\lambda_1}} = A^{\lambda_3}_{\lambda_1} A^{\lambda_4}_{\lambda_2} c^\lambda_{\lambda_3\lambda_4}. \tag{5.40}$$

Уравнения (5.39), называемые *уравнениями Маурера—Картана* (или, если применить для них несколько другую запись,— уравнениями структуры Картана), лежат в основе применения групп Ли в дифференциальной геометрии (см. литературные указания).

Во всех предыдущих построениях вид генераторов, удовлетворяющих (5.2), не конкретизировался, в связи с чем формулируемые результаты носят максимально общий характер. Что же касается самого Софуса Ли — основателя теории групп Ли,— то разработанный им аппарат относится к случаю, когда генераторы имеют частный вид:

$$X_\lambda = V_\lambda(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^i \frac{\partial}{\partial x_0^i}. \tag{5.41}$$

Полагая $x^i = T^\xi x_0^i$ и учитывая (5.20), получим

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} = U(\xi)^{\lambda_1}_{\lambda} T^\xi V(x_0)^i_{\lambda_1} = U(\xi)^{\lambda_1}_{\lambda} V(x)^i_{\lambda_1} \tag{5.42}$$

или, переходя к обобщенным координатам a^λ и учитывая (5.39),

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\lambda} = V(x)^i_{\lambda_1} A(a)^{\lambda_1}_{\lambda}, \tag{5.43}$$

что совпадает с *первой основной теоремой Ли*.

Умножая обе части (5.37) слева на $(U^{-1})^{\lambda_1}_{\lambda_5} (U^{-1})^{\lambda_2}_{\lambda_6} (U^{-1})^{\lambda_7}_{\lambda}$ и суммируя по λ_1, λ_2 и λ, в результате простых преобразований получим соотношение, соответствующее *третьей* *основной теореме Ли*:

$$Z_{\lambda_1}Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_2}Z_{\lambda_1} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2}Z_{\lambda_3}, \tag{5.44}$$

где Z_λ определяется по (5.7). Аналогично из (5.38) находим

$$Y_{\lambda_1}Y_{\lambda_2} - Y_{\lambda_2}Y_{\lambda_1} = -c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2}Y_{\lambda_3}. \tag{5.45}$$

При применении изложенных выше результатов к конкретным практическим задачам возникает необходимость вычислять матрицу $U^{-1}(\xi)$ и по ней с помощью (5.32) находить структурные аналитические функции, определяющие закон произведения групповых преобразований. Большое упрощение в подобного рода вычисления вносит следующая

Теорема о точных представлениях. *Для нахождения структурных аналитических функций в области, примыкающей к единичному преобразованию, достаточно взять какое-либо точное представление алгебры Ли квадратными матрицами или, более обще, элементами какой-либо ассоциативной алгебры, вычислить произведение матриц (или элементов алгебры) $T^\xi = T^\eta T^\xi$ и затем по T^ζ найти выражение для ζ^λ в виде функций от ξ^λ и η^λ.*

Доказательство теоремы следует из того, что все локальные свойства групп Ли опираются на тождества, вытекающие из основной теоремы, которые не зависят от выбора точного представления для алгебр Ли.

Одно из представлений алгебры Ли — *присоединенное представление* — определяется матрицами C_λ с элементами $(C_\lambda)^{\lambda_1}_{\lambda_2} \equiv c^{\lambda_1}_{\lambda\lambda_2}$. Это следует из того, что тождество Якоби для структурных постоянных, выраженное в матричной форме, принимает вид

$$C_{\lambda_1}C_{\lambda_2} - C_{\lambda_2}C_{\lambda_1} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1\lambda_2}C_{\lambda_3}. \tag{5.46}$$

Присоединенное представление будет точным в том и только том случае, если центр алгебры Ли равен нулю, так как если $k^\lambda_\mu X_\lambda$ — элемент центра, то из $[k^\lambda_\mu X_\lambda, X_{\lambda_1}] = 0$

следует $k_{\mu}^{\lambda}C_{\lambda}=0$. Однако и в этом случае применение присоединенного представления в теореме о точных представлениях при больших r приводит к громоздким расчетам. Для простых алгебр Ли дальнейшее значительное упрощение будет достигаться путем использования спинорных представлений этих алгебр.

Что касается группы Ли в целом, то она по локальной группе Ли и, следовательно, по структурным постоянным определяется неоднозначно. Из каждой полной группы Ли G прежде всего можно выделить так называемую *связную компоненту единицы* G_e, содержащую локальную группу Ли и состоящую из всех тех групповых преобразований, которые непрерывным образом можно связать с единичным элементом $e \in G$. Если g_1 — произвольный элемент из G, не входящий в G_e, то элементы gg_1, где g пробегает все элементы из G_e, будут образовывать другую связную компоненту группы Ли G. В результате группа G разбивается на непересекающиеся связные компоненты, являющиеся элементами фактор-группы G по ее подгруппе G_e. Например, если G — группа вращений трехмерного пространства, состоящая из всех линейных преобразований действительных координат x^k, оставляющих инвариантным квадрат расстояния

$$r^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=\mathrm{inv}, \tag{5.47}$$

то G состоит из двух связных компонент: компоненты единицы и компоненты, порождаемой так называемой *пространственной инверсией* P, для которой

$$Px^k=-x^k, \qquad k=1, 2, 3. \tag{5.48}$$

Аналогично для общей группы Лоренца L, состоящей из линейных преобразований координат x^α, $\alpha=1$, 2, 3, 4, для которых

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=\mathrm{inv}, \qquad x^4=ct, \tag{5.49}$$

имеются четыре связных компоненты: компонента единицы, называемая *собственной группой Лоренца* L_0, и еще три компоненты, порождаемые пространственной инверсией P, для которой наряду с (5.48) предполагается $Px^4=x^4$, *временны́м отражением* T, для которого

$$Tx^k = x^k, \qquad Tx^4 = -x^4, \tag{5.50}$$

и, наконец, их произведением PT.

В глобальной теории групп Ли доказывается (см. литературные указания), что если имеется несколько групп Ли, для которых локальные группы Ли совпадают, то существует так называемая *универсальная накрывающая группа* G_e, обладающая тем свойством, что все указанные группы Ли являются фактор-группами от группы G_e по ее дискретному нормальному делителю.

§ 3. Группы Ли и ассоциативные алгебры с числовыми значениями

Рассмотрим теперь связь групп Ли с теорией ассоциативных алгебр с числовыми значениями, что позволяет использовать результаты предыдущей главы (или некоторую модификацию этих результатов, соответствующую алгебрам бесконечного ранга) для изучения неприводимых представлений групп Ли. С этой целью прежде всего применим изученные выше тождества для введения понятия об интегрировании по группе. Будем обозначать через $(\xi_1\circ\xi_2)^\lambda$ канонические параметры произведения

$$T^{\xi_1}T^{\xi_2} = T^{\xi_1\circ\xi_2}. \tag{5.51}$$

Дифференцируя обе части (5.51) по ξ_1^λ и ξ_2^λ и используя (5.19) и (5.20), получим

$$U(-\xi_1)^{\lambda_2}_{\lambda_1} = U(-\xi_1\circ\xi_2)^{\lambda}_{\lambda_1}\frac{\partial(\xi_1\circ\xi_2)}{\partial\xi_1^\lambda}, \tag{5.52}$$

$$U(\xi_2)^{\lambda_2}_{\lambda_1} = U(\xi_1\circ\xi_2)^{\lambda}_{\lambda_1}\frac{\partial(\xi_1\circ\xi_2)^{\lambda_2}}{\partial\xi_2^\lambda}. \tag{5.53}$$

Обозначая через $u(\xi)$ детерминант от матрицы $U(\xi)$

и полагая $d\xi = d\xi^1 d\xi^2 \ldots d\xi^r$, с учетом (5.52) и (5.53) имеем:

$$\int\limits_{\xi} f(\xi)\, u(-\xi)\, d\xi = \int\limits_{\xi_1} f(\xi_1 \circ \xi_2)\, u(-\xi_1)\, d\xi_1 = \int\limits_{\xi} f(\xi \circ \xi_2)\, u(-\xi)\, d\xi, \tag{5.54}$$

$$\int\limits_{\xi} f(\xi)\, u(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\xi_2} f(\xi_1 \circ \xi_2)\, u(\xi_2)\, d\xi_2 = \int f(\xi_1 \circ \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{5.55}$$

Здесь $f(\xi)$ — произвольная функция от ξ, обладающая тем свойством, что $f(\xi)\, u(\xi)$ и $f(\xi)\, u(-\xi)$ интегрируемы по области значений переменных ξ. Для доказательства (5.54) достаточно перейти от переменных интегрирования $\xi^\lambda = (\xi_1 \circ \xi_2)^\lambda$ к новым переменным интегрирования ξ_1^λ, считая при этом ξ_2^λ фиксированными числами. Далее следует по (5.52) заменить $u(-\xi) \left| \dfrac{\partial \xi^{\lambda_1}}{\partial \xi_1^{\lambda_2}} \right|$ на $u(-\xi_1)$ и, наконец, обозначить переменные интегрирования снова через ξ^λ. Аналогично, с помощью (5.53) доказывается (5.55). Формулами (5.54) и (5.55) определяются так называемые *правоинвариантное* и *левоинвариантное интегрирование по группе*, т. е. такое интегрирование, когда интеграл не меняется при замене $f(\xi)$ соответственно на $f(\xi \circ \xi_1)$ или $f(\xi_1 \circ \xi)$, где ξ_1^λ — произвольные фиксированные канонические параметры. Формулы (5.54) и (5.55) с учетом (5.39) легко переписываются также при замене интегрирования по ξ^λ на интегрирование по обобщенным координатам a^λ.

Заметим, что основная теорема о связи между алгебрами Ли и группами Ли справедлива при условии невырожденности матрицы $U(\xi)$, т. е. при условии $u(\xi) \neq 0$. Соответственно этому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь тот случай, когда для области интегрирования $u(\xi) \neq 0$. Интегралы (5.54) и (5.55) будут совпадать между собой при всех $f(\xi)$ в том и только том случае, если $u(\xi) = u(-\xi)$. Из (5.21) следует, что

$$u(-\xi) = u(\xi)\, |\exp C_\xi|. \tag{5.56}$$

Поскольку $|\exp C_\xi| = \exp(Sp\, C_\xi)$ [1]), где $\mathrm{Sp}\, C_\xi = c^\lambda_{\lambda_1\lambda}\xi^{\lambda_1}$, то отсюда следует, что интегралы (5.54), (5.55) по группе Ли будут одновременно право- и левоинвариантными в том и только том случае, если

$$c^\lambda_{\lambda_1\lambda} = 0, \; \lambda_1 = 1, 2, \ldots, r. \tag{5.57}$$

Это условие выполняется для всех простых (а значит, и полупростых) алгебр Ли (см. литературные указания).

Введем теперь так называемую *групповую алгебру* с элементами

$$f = \int\limits_\xi f(\xi)\, T^{-\xi} u(\xi)\, d\xi, \tag{5.58}$$

где $f(\xi)$ — функции, ограниченные условием

$$\int f(\xi) f^*(\xi)\, u(\xi)\, d\xi < \infty \tag{5.59}$$

и принимающие значения из тела Q действительных чисел, комплексных чисел или кватернионов. В соответствии с гл. 2 положим

$$\begin{gathered} f^\xi = f(\xi), \qquad f_\xi = f^*(\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \\ T_\xi = T^{-\xi} u(\xi)\, d\xi. \end{gathered} \tag{5.60}$$

Тогда при использовании правила суммирования или интегрирования по немым индексам интеграл (5.58) можно переписать в виде

$$f = f^\xi T_\xi = f^*_\xi T^{-\xi}. \tag{5.61}$$

Элементы вида (5.61) образуют ассоциативную алгебру над телом Q. В самом деле, элементы f образуют векторное пространство над Q, а произведение $f = f^{\xi_1} T_{\xi_1}$ на

---

[1]) Для доказательства достаточно с помощью преобразования $M \exp C_\xi M^{-1}$ привести матрицу $\exp C_\xi$ к нормальной форме Жордана и затем учесть, что при таком преобразовании детерминант и след матрицы не меняются.

$\varphi = \varphi^{\xi_2} T_{\xi_2}$, согласно (5.51) и (5.55), равно

$$f\varphi = \int\limits_{\xi_1}\int\limits_{\xi_2} f(\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,T^{-(\xi_2\circ\xi_1)} u(\xi_1)\,u(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 =$$
$$= \int\limits_{\xi_1}\int\limits_{\xi_2} f((-\xi_2)\circ\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,T^{-\xi_1} u(\xi_1)\,u(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 = f^{\xi_1}_{\xi_2}\varphi^{\xi_2} T_{\xi_1}, \tag{5.62}$$

где

$$f^{\xi_1}_{\xi_2} = f((-\xi_2)\circ\xi_1)\,u(\xi_2)\,d\xi_2,\quad f^{\xi_1}_{\xi_2}\varphi^{\xi_2} =$$
$$= \int f((-\xi_2)\circ\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,u(\xi_2)\,d\xi_2. \tag{5.63}$$

Теорема *Если $c^{\lambda}_{\lambda_1\lambda} = 0$, то групповая алгебра для группы Ли является ассоциативной алгеброй с числовыми значениями.*

В самом деле, по определению положим

$$\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f(0), \qquad f^* = \int\limits_{\xi} f^*(\xi)\,T^{\xi} u(\xi)\,d\xi. \tag{5.64}$$

Тогда из $u(\xi) = u(-\xi)$ следует, что

$$\operatorname{Re}(f\varphi) = \operatorname{Re}\int\limits_{\xi} f(-\xi)\,\varphi(\xi)\,u(\xi)\,d\xi =$$
$$= \operatorname{Re}\int f(\xi)\,\varphi(-\xi)\,u(\xi)\,d\xi = \operatorname{Re}(\varphi f), \tag{5.65}$$
$$f^* = \int\limits_{\xi} f^*(-\xi)\,T^{-\xi} u(\xi)\,d\xi. \tag{5.66}$$

Теперь легко убедиться в справедливости всех четырех свойств, определяющих ассоциативную алгебру с числовыми значениями (см. § 8 гл. 2). В самом деле, первое и третье свойства следуют из определения (5.64), второе свойство следует из (5.65) и, наконец, четвертое свойство вытекает из того, что согласно (5.65) и (5.66)

$$\operatorname{Re}(f^* f) = n^2_{\kappa}(f) = \int (\operatorname{Re} f^*(\xi)\,f(\xi))\,u(\xi)\,d\xi. \tag{5.67}$$

Поскольку детерминант $u(\xi)$ предполагается отличным от нуля во всей области интегрирования, а согласно (5.5) $u(0)=1$, то из непрерывности $u(\xi)$ следует $u(\xi)>0$. Поэтому, если $f(\xi)\neq 0$, то $n^2(f)>0$, так что все свойства алгебр с числовыми значениями выполняются, что доказывает теорему.

Полученные результаты непосредственно переносятся также на случай конечных групп Ли с элементами g^k, где k — номер группового элемента и по определению считается

$$(g^k)^{-1}=g_k, \qquad g^0=g_0=e. \tag{5.68}$$

Если по аналогии с (5.61) и (5.64) положить

$$f=f^k g_k, \qquad \mathrm{Re}\, f=\mathrm{Re}\, f^0, \tag{5.69}$$

то величины f, как легко видеть, будут элементами ассоциативной алгебры с числовыми значениями.

Пусть теперь нам требуется изучить представления группы. Заменяя в формулах типа (5.69) групповые элементы g_k на матрицы представления, получим, что представления группы и групповой алгебры находятся во взаимно однозначном соответствии между собой. Отсюда следует, что рассмотренная в предыдущем параграфе теория точных неприводимых представлений ассоциативных алгебр конечного ранга с числовыми значениями позволяет изучить все точные неприводимые представления конечных групп. Что же касается групп Ли, то при сформулированных выше условиях теория их представлений также сводится к теории представлений ассоциативных алгебр с числовыми значениями.

В соответствии с результатами предыдущей главы, групповая алгебра G как алгебра с числовыми значениями может быть представлена в виде прямой суммы (для некомпактных алгебр Ли суммирование заменяется на интегрирование) простых ассоциативных алгебр $G_{(l)}$. Если $e^{m_2}_{(l)n_1}$ — канонические базисные элементы простой алгебры $G_{(l)}$, то произвольный элемент f из G может быть записан в виде

$$f=f^{(l)m_2}_{m_1} e^{m_1}_{(l)m_2}. \tag{5.70}$$

где по одинаковым индексам, встречающимся вверху и внизу, как обычно, подразумевается суммирование или интегрирование. В частности,

$$T^{\xi} = t_{m_1}^{(l)m_2}(\xi)\, e_{(l)m_2}^{m_1}. \tag{5.71}$$

Поскольку

$$T^{\xi}T^{\xi_0} = t_{m_0}^{(l)m_1}(\xi_0)\, t_{m_1}^{(l)m}(\xi)\, e_{(l)m_0}^{m_1}, \tag{5.72}$$

то столбцы $f_{m_0}^{(l)m}(\xi_0)$, где l, m_0 и ξ_0 фиксированы, преобразуются по неприводимым представлениям рассматриваемой группы.

Полученные соотношения служат основой для группового подхода к теории различных специальных функций. Так, в случае группы трехмерных вращений канонические параметры могут быть выражены через углы Эйлера φ, θ, ψ с помощью формулы

$$T^{\xi} = \exp(\xi^s M_s) = e^{\varphi M_3} e^{\theta M_1} e^{\psi M_3}. \tag{5.73}$$

Тогда $t_{m_1}^{(l)m_2}(\xi)$ можно записать в виде (см. литературные указания, например, цитированную там книгу Виленкина)

$$t_{m_2}^{(l)m_1}(\varphi, \theta, \psi) = Y_{lm_1}(\theta, \varphi)\, e^{-im_2\psi},$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — шаровые функции.

§ 4. Алгебраический аппарат тензорного исчисления и спинорная группа

Алгебры альтернионов ${}^{l}A_{2n+1}$, введенные в предыдущей главе, допускают геометрическую интерпретацию, основанную на использовании алгебраической записи антисимметричных тензоров в $2n$-мерном псевдоевклидовом пространстве G_1 над полем действительных чисел. Пространство G_1 характеризуется заданием невырожденного метрического тензора $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, для которого существует обратный тензор $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ (где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n$), так что

$$g^{\alpha_1\beta} g_{\beta\alpha_2} = \delta_{\alpha_2}^{\alpha_1}. \tag{5.74}$$

При помощи $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ можно, соответственно, опускать и поднимать индексы, так что за базисные элементы векторного пространства G_1, обладающие тем свойством, что произвольный вектор из G_1 является их линейной комбинацией, можно взять или $2n$ линейно независимых векторов e_α или $2n$ линейно независимых векторов $e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta$. Вектор $a \in G$ можно представить в виде

$$a = a^\alpha e_\alpha = a_\alpha e^\alpha, \qquad a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta, \tag{5.75}$$

где a^α — компоненты вектора a. Скалярное произведение векторов a и b определяется по формуле

$$a \cdot b = a^\alpha b^\beta (e_\alpha \cdot e_\beta) = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta}, \tag{5.76}$$

так что

$$e_\alpha \cdot e_\beta = e_\beta \cdot e_\alpha = g_{\alpha\beta}, \quad e^\alpha \cdot e^\beta = g^{\alpha\beta}, \quad e^\alpha \cdot e_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{5.77}$$

Переход от векторного пространства G_1 к алгебре альтернионов G осуществляется путем отождествления e_α с образующими ассоциативной алгебры G, где

$$e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = 2 g_{\alpha\beta} e, \tag{5.78}$$

после чего скалярное произведение векторов a и b отождествляется с их йордановым произведением:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba). \tag{5.79}$$

Для специального базиса векторного пространства G_1 компоненты $g_{\alpha\beta}$ принимают вид $\varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$, в связи с чем (5.78) будет совпадать с (4.25), т. е. G будет алгеброй альтернионов ${}^l A_{2n+1}$.

Антисимметричному тензору с компонентами $F^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ можно поставить в соответствие элементы $F_{|k|}$:

$$F_{|k|} = \frac{1}{k!} F^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k} = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k} F^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k}; \tag{5.80}$$

этот тензор мы, по определению, будем называть *антисимметричным тензором* порядка k, записанным в алгебраической форме. При $k=1$ $F_{|1|}$ будет совпадать с вектором вида (5.75), а при $k=0$ — с кратным единичного элемента e алгебры G. Алгебра G, рассматриваемая как векторное пространство размерности 2^{2n}, может быть представлена в виде прямой суммы линейных подпространств G_k, состоящих из величин вида (5.80):

$$G = G_0 + G_1 + \ldots + G_{2n}. \tag{5.81}$$

В результате произвольный элемент $g \in G$ становится возможным представить в виде суммы антисимметричных тензоров $F_{|k|}$ порядков от $k=0$ до $k=m$.

Для рассмотренного выше специального выбора базиса векторного пространства, для которого $g_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$, квадрат длины радиуса-вектора $x = x^\alpha e_\alpha$ равен

$$x^2 = x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta} = (x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2 - (x^{l+1})^2 - \ldots - (x^{2n})^2. \tag{5.82}$$

Пространство G_1 называется *псевдоевклидовым*, если $0 < l < 2n$, и называется *евклидовым*, если $l=0$ или $l=2n$.

Общей группой вращений L называется группа линейных преобразований координат x^α, не меняющая квадрат длины (5.82) вектора x. Группа L, в соответствии с общей теорией групп Ли, содержит *собственную группу вращений* L_0, являющуюся связной компонентной единицы, а также еще одну связную компоненту, если пространство G_1 евклидово, или еще три связные компоненты, если G_1 псевдоевклидово. Ограничиваясь для определенности случаем псевдоевклидова пространства, введем следующие обозначения. Если l — нечетное, то обозначим через P и T преобразования, которые меняют знаки соответственно у $x^1, \ldots, x^l$ и $x^{l+1}, \ldots, x^{2n}$. Если же l — четное, то через P и T обозначим преобразования, которые меняют знаки соответственно у $x^1, \ldots, x^{l-1}$ и $x^{l+1}, \ldots, x^{2n-1}$. Тогда P, T, PT и единичное преобразование E будут представителями четырех различных связных компонент группы L, а все остальные преобразования из этих компонент будут получаться в результате добавления преобразований из L_0. Преобразования E, P, T и PT образуют абелеву группу, которая изоморфна фактор-группе общей группы вращений L по ее нормальному делителю L_0 и которую мы будем поэтому обозначать (L/L_0).

Величины, не меняющиеся при преобразованиях из L_0, по определению, будем называть скалярами. Однако по отношению к преобразованиям из (L/L_0) скаляры могут вести себя различно. Скаляры, которые не меняют знак при преобразованиях P и T (а следовательно, и при PT), будем называть простыми скалярами, скаляры которые меняют знак при P и T — псевдоскалярами, скаляры которые меняют знак при T и PT,— особыми скалярами и, наконец, те, которые меняют знак при P и PT,— особыми псевдоскалярами (см. таблицу):

	Простой скаляр	Псевдоскаляр	Особый скаляр	Особый псевдоскаляр
P	$\chi_0' = \chi_0$	$\chi_{PT}' = -\chi_{PT}$	$\chi_T' = \chi_T$	$\chi_P' = -\chi_P$
T	$\chi_0' = \chi_0$	$\chi_{PT}' = -\chi_{PT}$	$\chi_T' = -\chi_T$	$\chi_P' = \chi_P$
PT	$\chi_0' = \chi_0$	$\chi_{PT}' = \chi_{PT}$	$\chi_T' = -\chi_T$	$\chi_P' = -\chi_P$

(5.83)

Таблицей (5.83) определяются всевозможные различные неприводимые представления группы (L/L_0), поэтому скаляров, отличных от одного из указанных выше четырех типов, не существует. Будем называть *простым* $2n$-мерный вектор, который при преобразованиях P, T и PT преобразуется как вектор $x = x^\alpha e_\alpha$. Наряду с этим определим также векторы других типов, которые при преобразованиях из компоненты единицы L_0 группа L ведут себя как простые векторы, а при преобразованиях, входящих в другие компоненты группы L, могут дополнительно менять знак.

Вектор, который при преобразованиях из общей группы вращений ведет себя как простой вектор, умноженный на псевдоскаляр, особый скаляр или особый псевдоскаляр, будем называть, соответственно, *псевдовектором, особым вектором* или *особым псевдовектором.*

Евклидово пространство отличается от псевдоевклидова тем, что поскольку здесь группа L распадается уже не на четыре, а только на две связные компоненты (которые можно обозначить L_0 и PL_0), то вместо четырех типов величин теперь будут существовать величины лишь двух типов: скаляры и псевдоскаляры, векторы и псевдовекторы и т. д.

В результате преобразований из группы L базисные векторы e_α переходят в

$$e'_\alpha = h^\beta_\alpha e_\beta. \tag{5.84}$$

При этом предполагается, что все базисные векторы e_α являются векторами одинаковых типов. В соответствии с определением группы L отсюда следует, что

$$e'_\alpha \cdot e'_\beta = \frac{1}{2}(e'_\alpha e'_\beta + e'_\beta e'_\alpha) = \frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha) = g_{\alpha\beta} e. \tag{5.85}$$

Формулы (5.85) показывают, что преобразование (5.84) является автоморфизмом алгебры $G = {}^l A_{2n+1}$. По теореме об автоморфизмах, доказанной в § 5 гл. 4, все автоморфизмы простой алгебры G являются внутренними, т. е. для любых h^β_α, для которых имеет место (5.84) и (5.85), всегда найдется такой обратимый элемент s из алгебры ${}^l A_{2n+1}$, что

$$e'_\alpha = h^\beta_\alpha e_\beta = s e_\alpha s^{-1}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{5.86}$$

Пусть наряду с s найдется другой элемент $s_1 \in G$, для которого $e'_\alpha = s_1 e_\alpha s_1^{-1}$. Приравнивая оба выражения для e'_α, получим

$$(s_1^{-1} s)\, e_\alpha = e_\alpha\, (s_1^{-1} s), \tag{5.87}$$

т. е. элемент $s_1^{-1} s$ перестановочен со всеми элементами алгебры G. Поскольку G — простая алгебра с числовыми значениями, то отсюда, согласно результатам гл. 4, следует, что

$$s_1^{-1}s = ke, \qquad s_1 = ks, \tag{5.88}$$

где k — действительное число. Это показывает, что элемент s определяется формулой (5.86) с точностью до множителя.

С целью дальнейшего уточнения вида s рассмотрим инволютивное сопряжение специального вида, которое для отличия от введенного в § 5 гл. 4 стандартного инволютивного сопряжения (4.27) алгебры ${}^lA_{2n+1}$ обозначается крестиком и определяется формулами:

$$(e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k})^+ = e_{\alpha_k} \ldots e_{\alpha_1}, \quad (p_1g_1 + p_2g_2)^+ = p_1g_1^+ + p_2g_2^+,$$
$$g_1, g_2 \in {}^lA_{2n+1}, \qquad p_1, p_2 \in R. \tag{5.89}$$

Результат последовательного осуществления двух антиавтоморфизмов, обозначаемых звездочкой и крестиком, будет обычным автоморфизмом, поэтому по теореме об автоморфизмах простых алгебр должен найтись такой обратимый элемент $i_0 \in {}^lA_{2n+1}$, что

$$g^* = i_0 g^+ i_0^{-1}. \tag{5.90}$$

Применим к обеим частям (5.86) операцию инволютивного сопряжения вида (5.89). Учитывая, что $e_\alpha^+ = e_\alpha$, получим

$$se_\alpha s^{-1} = (s^{-1})^+ e_\alpha s^+ = (s^+)^{-1} e_\alpha s^+. \tag{5.91}$$

Отсюда, согласно (5.88), имеем

$$(s^+)^{-1} = ks, \qquad ss^+ = k^{-1}e. \tag{5.92}$$

Если $k>0$, то заменим s на $\sqrt{k}s$, а если $k<0$,— то на $\sqrt{-k}s$. В результате получим

$$ss^+ = s^+s = \pm e. \tag{5.93}$$

При учете (5.93) элемент s, характеризующий преобразование (5.86), определяется с точностью до знака, т. е. имеет место следующая

Теорема. *Каждому элементу общей группы вращений L $2n$-мерного псевдоевклидова пространства, переводящему x^α в $h^\alpha_\beta x^\beta$ или, соответственно, e_α в $h^\beta_\alpha e_\beta$, ставится в двузначное соответствие элемент $s \in {}^l A_{2n+1}$, для которого $ss^+ = s^+s = \pm e$.*

Множество всех элементов $s \in {}^l A_{2n+1}$, определяемых с помощью (5.86) и (5.93) по общей L или по собственной L_0 группе вращений, называется, соответственно, *общей* или *собственной спинорной группой*. Поскольку элементам s и $-s$ из спинорной группы, согласно доказанной теореме, соответствует одно и то же вращение псевдоевклидова пространства, то общая и собственная группа вращений $2n$-мерного пространства изоморфны, соответственно, фактор-группам общей и собственной спинорных групп по их нормальному делителю, состоящему из элементов $+e$ и $-e$.

Произвольному вращению из собственной группы вращений, характеризуемому заданием канонических параметров $\varphi^{\alpha\beta} = -\varphi^{\beta\alpha}$ $(\alpha \neq \beta)$, соответствует элемент спинорной группы, с точностью до знака равный

$$s = \exp\left(\frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}\right), \qquad M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_\alpha e_\beta. \tag{5.94}$$

Для доказательства достаточно рассмотреть бесконечно малое вращение с параметрами $\delta\varphi^{\alpha\beta}$, когда приращения компонент a^α вектора $a = a^\alpha e_\alpha$ равны $\delta a^\alpha = (\delta\varphi^{\alpha\beta}) a_\beta$. Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, из (5.86) и (5.94) имеем

$$a + \delta a = \left(1 + \frac{1}{2}\delta\varphi^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}\right) a \left(1 - \frac{1}{2}\delta\varphi^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}\right),$$

$$\delta a = (\delta a^\alpha) e_\alpha = \frac{1}{2}\delta\varphi^{\alpha\beta} a^\gamma \left(\frac{1}{2} e_\alpha e_\beta e_\gamma - \frac{1}{2} e_\gamma e_\alpha e_\beta\right).$$

Но из (5.78) следует, что

$$\frac{1}{2} e_\alpha e_\beta e_\gamma - \frac{1}{2} e_\gamma e_\alpha e_\beta =$$

$$= \frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta e_\gamma + e_\alpha e_\gamma e_\beta - e_\alpha e_\gamma e_\beta - e_\gamma e_\alpha e_\beta) = g_{\beta\gamma} e_\alpha - g_{\alpha\gamma} e_\beta,$$

т. е.

$$\delta a = \frac{1}{2}\delta\varphi^{\alpha\beta}(a_\beta e_\alpha - a_\alpha e_\beta) = \delta\varphi^{\alpha\beta}a_\beta e_\alpha;\quad \delta a^\alpha = \delta\varphi^{\alpha\beta}a_\beta. \qquad (5.95)$$

Это доказывает, что произвольное вращение из собственной группы вращений можно представить в виде внутреннего автоморфизма алгебры ${}^lA_{2n+1}$, характеризуемого элементом вида (5.94).

Поскольку при $\alpha\neq\beta$ $(e_\alpha e_\beta)^+ = -(e_\beta e_\alpha)$, то из (5.94) следует, что для собственной спинорной группы в правой части (5.93) должен стоять знак плюс.

Возьмем какое-либо точное неприводимое представление алгебры $G={}^lA_{2n+1}$. Тогда элементам $s\in G$, входящим в общую спинорную группу, ставятся в соответствие матрицы S.

Многомерным спинором называется столбец ψ, который при преобразованиях из спинорной группы, характеризуемых матрицами S, переходит в $S\psi$.

Согласно § 5 гл. 4, алгебра $G={}^lA_{2n+1}$ изоморфна алгебре кватернионных матриц порядка 2^{n-1}, если $\frac{(n-l+1)(n-l)}{2}$ — нечетное число, или алгебре B_n действительных матриц порядка 2^n, если $\frac{(n-l+1)(n-l)}{2}$ — четное число. В первом случае спинор ψ может быть представлен в виде кватернионного столбца, состоящего из 2^{n-1} элементов, или, если воспользоваться формулами (2.67) перехода к действительным величинам, в виде действительного столбца, состоящего из 2^{n+1} элементов. Во втором случае спинор ψ может быть представлен в виде столбца, состоящего из 2^n действительных элементов.

Наличие двух указанных возможностей существенно связано с тем фактом, что $2n$-мерное векторное пространство G_1 рассматривается нами над полем действительных чисел R. Если бы это пространство рассматривалось над полем комплексных чисел C, т. е. если бы мы исходили из общей группы вращений комплексного $2n$-мерного пространства, то спинор ψ был бы или кватернионным столбцом из 2^{n-1} элементов, или комплексным столбцом из 2^n элементов, т. е. ψ в общем случае определялся бы заданием 2^{n+1} действительных чисел.

Поскольку общая группа вращений пространства G_1 изоморфна фактор-группе спинорной группы по ее элементам e и $-e$, то спиноры осуществляют двузначное представление общей группы вращений псевдоевклидова пространства.

Воспользуемся еще раз теоремой об автоморфизмах, применив ее к простой матричной алгебре, дающей точное неприводимое представление алгебры $G={}^{\prime}A_{2n+1}$. Пусть элементам s из алгебры ${}^{\prime}A_{2n+1}$ соответствуют матрицы S, а элементам s^+ — матрицы S^+. Обозначим через S^* сопряженную матрицу, которая для действительного представления получается из S путем транспонирования, а для кватернионного — путем одновременного транспонирования и замены всех элементов матрицы на сопряженные. Результат последовательного осуществления двух антиавтоморфизмов матричной алгебры, обозначаемых звездочкой и крестиком, будет обычным автоморфизмом, поэтому по теореме об автоморфизмах простых алгебр должна найтись такая невырожденная матрица R, зависящая от выбора представления, что

$$S^* = RS^+R^{-1}. \tag{5.96}$$

Но по (5.93) для спинорной группы $S^+S=\pm E$, т. е., с учетом (5.96),

$$S^*RS = \pm R, \tag{5.97}$$

где для собственной спинорной группы в правой части (5.97) стоит знак плюс. Если $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ — два произвольных спинора, то из (5.97) следует

$$(\overset{*}{\psi}_{(1)}S^*)\, R\, (S\psi_{(2)}) = \pm\, \overset{*}{\psi}_{(1)} R\psi_{(2)}, \tag{5.98}$$

так что $\Omega_{(12)}=\overset{*}{\psi}_{(1)}R\psi_{(2)}$ не меняется при преобразованиях из собственной группы вращений, а при преобразованиях P, T и PT может менять знак, т. е. принадлежит к скалярам одного из четырех типов, перечисленных в (5.83).

Если ψ^μ — компоненты спинора ψ, то обозначим через $\psi_\mu = (\psi^* R)_\mu$ компоненты строки $\psi^* R$. Каждому спинору ψ поставим в соответствие матрицу P с компонентами

$$P^{\mu_1}_{\mu_2} = \psi^{\mu_1}\psi_{\mu_2} = \psi^{\mu_1}(\psi^* R)_{\mu_2}, \tag{5.99}$$

являющуюся представлением абстрактного элемента π из алгебры ${}^lA_{2n+1}$. Поскольку, согласно (5.99), $(\psi^\mu)^*\psi^\mu = (PR^{-1})^{\mu\mu}$, то для действительных спиноров компоненты спинора ψ определяются заданием матрицы P с точностью до общего знака, а для кватернионного представления — с точностью до общего фазового множителя. При преобразованиях из собственной группы вращений матрица P и элемент абстрактной алгебры π, как следует из (5.98), переходят в SPS^{-1} и $s\pi s^{-1}$, а при преобразованиях из общей группы вращений — соответственно в $\pm SPS^{-1}$ и $\pm s\pi s^{-1}$.

Элемент $\pi \in {}^lA_{2n+1}$ в соответствии с общими формулами (5.80) и (5.81) можно представить в виде

$$\pi = \sum_{k=0}^{2n} \pi_{|k|} = P^0 e + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k!} P^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k}. \tag{5.100}$$

При преобразованиях из собственной группы вращений $\pi_{|k|} = \sum\limits_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} P^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k}$ переходит в $s\pi_{|k|}s^{-1}$, а при преобразованиях из общей группы вращений — в $\pm s\pi_{|k|}s^{-1}$, т. е. $\pi_{|k|}$ являются антисимметричными тензорами k-го ранга.

Отсюда следует, что для алгебры ${}^lA_{2n+1}$ можно ввести два согласованных между собой определения спиноров. Во-первых, спинор ψ можно определять как столбец, преобразующийся по точному неприводимому представлению спинорной группы для алгебры ${}^lA_{2n+1}$. С другой стороны, компоненты спинора ψ можно определять также как систему параметров, характеризующих первичные тензоры $P^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, которые, в свою очередь, определяются заданием $\pi \in {}^lA_{2n+1}$. При второй точке зрения для заданного представления алгебры ${}^lA_{2n+1}$ компоненты ψ определяются лишь с точностью или до общего знака (если ${}^lA_{2n+1}$ изоморфна B_n), или до общего фазового множителя, причем переходу от одного представления алгебры ${}^lA_{2n+1}$ к другому соответствует переход от одной системы параметров к другой. Преимущество второго подхода связано с тем, что он указывает на возможность чисто алгебраической переформулировки теории спиноров, не зависящей от выбора представления.

Для алгебраической модели квантованных волновых полей приходится иметь дело не со спинорной группой, а с другой подгруппой группы автоморфизмов базисной алгебры квантованных полей, которая для специального представления алгебры B_n совпадает с группой унитарных преобразований волновых функций ψ. Тем не менее отдельные из рассмотренных выше общих алгебраических идей можно перенести и на этот случай; в частности, второму способу определения многомерного спинора будет соответствовать возможность определения волновой функции заданием средних значений от наблюдаемых.

§ 5. Физические приложения

Рассмотрим более подробно некоторые приложения изложенного в предыдущем параграфе алгебраического аппарата к классической электродинамике и к релятивистской теории частиц со спином $^1/_2$.

Будем считать, что $n=2$, $l=3$. В этом случае псевдоевклидово пространство G_1 называется *пространством Минковского*, группа L называется *общей группой Лоренца*, а группа L_0 — *собственной группой Лоренца.* Четырехмерные векторы и антисимметричные тензоры, применяемые в релятивистской механике и электродинамике, с помощью (5.80) можно переписать в алгебраической форме. Так 4-вектору с компонентами

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z, \qquad x^4 = ct \tag{5.101}$$

ставится в соответствие элемент $X=x^\alpha e_\alpha$ из алгебры $G={}^3A_5$, 4-вектору с операторными компонентами $\partial_\alpha\equiv\partial/\partial x^\alpha$ — оператор $\nabla=e^\alpha\partial_\alpha$, являющийся алгебраическим четырехмерным аналогом применяемого в векторном анализе оператора «набла», а антисимметричному тензору электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$, где

$$F^{12}=H_3,\quad F^{23}=H_1,\quad F^{31}=H_2,\quad F^{4k}=E_k, \tag{5.102}$$

ставится в соответствие элемент

$$F=\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}e_\alpha e_\beta=(e_1e_2e_3)\,e^kH_k+e_4e^kE_k \tag{5.103}$$

(по одинаковым греческим индексам α, β, ... суммирование производится от 1 до 4, а по латинским индексам k, l, ... — от 1 до 3).

Будем обозначать трехмерные векторы, являющиеся линейными комбинациями элементов e_k, жирными буквами. Положим $i=e^1e^2e^3e^4$, где, согласно (5.78),

$$i^2=-e,\quad ie_\alpha=-e_\alpha i. \tag{5.104}$$

Тогда e, i, e_α, ie_α и $e_\alpha e_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ являются системой из 16 линейно независимых базисных элементов алгебры G. В основу вывода многих релятивистских соотношений могут быть положены следующие элементарно проверяемые тождества, определяющие результат перемножения произвольных, записанных в алгебраической форме 4-векторов $A=a^\alpha e_\alpha=\boldsymbol{a}+a^4e_4$, $B=b^\alpha e_\alpha=\boldsymbol{b}+b^4e_4$ и антисимметричных тензоров $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, ...:

$$\begin{aligned}AB&=(\boldsymbol{a}+a_4e^4)(\boldsymbol{b}+b^4e_4)=\\&=(\boldsymbol{ab})+a_4b^4+e_1e_2e_3[\boldsymbol{ab}]+e_4(-a_4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}b^4)=\\&=a_\alpha b^\alpha+\frac{1}{2}e^\alpha e^\beta(a_\alpha b_\beta-a_\beta b_\alpha),\end{aligned} \tag{5.105}$$

$$BF=-[\boldsymbol{bH}]+b_4\boldsymbol{E}+e^4(\boldsymbol{bE})-i\,([\boldsymbol{bE}]+b_4\boldsymbol{H}+e^4(\boldsymbol{bH})), \tag{5.106}$$

$$FB=-[\boldsymbol{Hb}]+\boldsymbol{E}b^4-e^4(\boldsymbol{Eb})+i\,([\boldsymbol{Eb}]+\boldsymbol{H}b^4-e^4(\boldsymbol{Hb})), \tag{5.107}$$

$$F_{(1)}F_{(2)} = (\boldsymbol{E}_{(1)}\boldsymbol{E}_{(2)}) - (\boldsymbol{H}_{(1)}\boldsymbol{H}_{(2)}) + i((\boldsymbol{H}_{(1)}\boldsymbol{E}_{(2)}) + (\boldsymbol{E}_{(1)}\boldsymbol{H}_{(2)})) + e_1e_2e_3([\boldsymbol{E}_{(1)}\boldsymbol{E}_{(2)}] - [\boldsymbol{H}_{(1)}\boldsymbol{H}_{(2)}]) + e^4([\boldsymbol{H}_{(1)}\boldsymbol{E}_{(2)}] + [\boldsymbol{E}_{(1)}\boldsymbol{H}_{(2)}]). \quad (5.108)$$

Для доказательства справедливости выписанных соотношений (в которых скалярное и векторное произведения трехмерных векторов обозначены соответственно круглыми и квадратными скобками) достаточно сравнить в правой и левой частях коэффициенты при базисных элементах алгебры G.

Уравнения Максвелла в обычных векторных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{эл}, &&\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{эл}, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, &&-\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Вводя 4-вектор электрического тока $j_{эл} = \boldsymbol{j}_{эл} + c\rho_{эл}e_4$ и полагая в формуле (5.106) $B = \nabla$, получим, что уравнения Максвелла (5.109) в алгебраической записи принимают следующий вид:

$$\nabla F = -\frac{4\pi}{c}j_{эл}. \quad (5.110)$$

При этом F просто выражается через четырехмерный векторный потенциал

$$A = A_i e^{\alpha} = \boldsymbol{A} + A_4e^4, \qquad A^4 = -A_4 = \varphi. \quad (5.111)$$

В самом деле, учитывая условие Лоренца $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ и заменяя в (5.105) A на ∇ и B на A, получим

$$F = \nabla A. \quad (5.112)$$

Исходя из (5.106) и (5.107), легко получаем также алгебраическое выражение для 4-вектора плотности силы $f_{эл}$, действующей на электрические заряды и токи:

$$\frac{1}{2}(Fj_{эл} - j_{эл}F) = c\left(\rho_{эл}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{j}_{эл}\boldsymbol{H}]\right) + e_4(\boldsymbol{j}_{эл}\boldsymbol{E}) = cf_{эл}. \quad (5.113)$$

Применение алгебраического аппарата позволяет упростить вывод отдельных электродинамических соотношений. Например, применяя к (5.110) инволютивное сопряжение (5.89) и учитывая, что $F^+ = -F$, получим

$$-\partial_\alpha F e^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j_{эл}. \qquad (5.114)$$

Умножая, далее, (5.110) слева на F, (5.114) справа на F, вычитая из первого выражения второе и учитывая (5.113), получаем

$$f_{эл} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial (F e^\alpha F)}{\partial x^\alpha}. \qquad (5.115)$$

Отсюда следует, что тензор энергии — импульса электромагнитного поля $T^{\alpha\beta}$, для которого $-\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha_{эл}$, можно определять из алгебраического соотношения

$$8\pi e_\alpha T^{\alpha\beta} = F e^\beta F. \qquad (5.116)$$

Алгебраический аппарат дает возможность разработать новые методы изучения электромагнитного поля, которые трудно было бы обнаружить с помощью обычного более громоздкого тензорного формализма. В качестве примера рассмотрим электромагнитное поле общего вида, находящееся в области без зарядов и токов, так что уравнения Максвелла (5.110) принимают вид:

$$\nabla F = 0. \qquad (5.117)$$

Рассмотрим уравнение

$$\nabla (A_{(1)} - i A_{(2)}) = 0, \qquad (5.118)$$

где $A_{(1)} = A^\alpha_{(1)} e_\alpha$, $A_{(2)} = A^\alpha_{(2)} e_\alpha$. Если $\tilde{e}^k$ — кватернионные единицы (т. е. $(\tilde{e}^1)^2 = -e$, $\tilde{e}^1\tilde{e}^2 = \tilde{e}^3$ и т. д.) и f — комплексная кватернионная функция четырех переменных x, y, z, ct, то (5.118) эквивалентно уравнениям моногенности для комплексных кватернионных функций:

$$\left(\tilde{e}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{e}^2 \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{e}^3 \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{c\,\partial t}\right) f = 0. \qquad (5.119)$$

В самом деле, полагая $f=e_1e_2e_3(A_{(1)}-iA_{(2)})$, $-e^k e_1e_2e_3=\tilde{e}^k$, $i=e^1e^2e^3e^4$, убеждаемся, что (5.118) совпадает с уравнениями моногенности (5.119). Если f зависит только от x и y, то, как нетрудно убедиться путем непосредственной подстановки (см. также литературные указания), после приравнивания в (5.119) коэффициентов при одинаковых базисных элементах алгебры, получим четыре пары уравнений, совпадающих с условиями аналитичности функций одной комплексной переменной. В общем же случае уравнения (5.119), а следовательно, и (5.118), являются алгебраическим обобщением уравнений Коши — Римана теории функций комплексной переменной. Из (5.118) следует

$$\nabla^2 A_{(1)} = 0, \quad \nabla^2 A_{(2)} = 0. \tag{5.120}$$

Полагая

$$F = \nabla (A_{(1)} + iA_{(2)}) \tag{5.121}$$

и учитывая (5.120), получаем, что F удовлетворяет уравнениям Максвелла (5.117), причем с учетом (5.118) формула (5.121) дает

$$F = 2\nabla A_{(1)}, \qquad F = -2i\nabla A_{(2)}. \tag{5.122}$$

Таким образом, каждому решению уравнений (5.118) соответствует решение (5.121) уравнений Максвелла и наоборот, что открывает новые возможности применения теории комплексных кватернионных функций в электродинамике.

Связь между решениями уравнений моногенности и системой уравнений Максвелла позволяет, далее, обнаружить незамечавшуюся ранее инвариантность уравнений Максвелла — так называемую внешнюю инвариантность. Пусть s — обратимый элемент подалгебры 8-го ранга алгебры G с базисными элементами e, i, $e_\alpha e_\beta (\alpha \neq \beta)$. Тогда множество всех s образует, очевидно, группу — *так называемую группу внешних преобразований*.

Определим следующим образом закон преобразования обобщенного потенциала $A=A_{(1)}-iA_{(2)}$:

$$A \to A' = As, \qquad A^+ \to A^{+\prime} = s^+A^+. \tag{5.123}$$

Уравнение (5.118) инвариантно относительно преобразований (5.123), так как оно не меняется при умножении обеих частей справа на s. Закон изменения F при внешних преобразованиях следует из (5.121):

$$F = \nabla A^+ \to F' = \nabla (s^+ A^+). \qquad (5.124)$$

Уравнения Максвелла (5.117) инвариантны относительно преобразований (5.123). Смысл этой инвариантности заключается в том, что если имеется одно решение уравнений (5.117), определяемое по начальным и граничным условиям, то с помощью (5.124) найдется 8-параметрический класс решений, соответствующий преобразованным начальным и граничным условиям.

До сих пор мы не уточняли типы 4-векторов и тензоров по отношению к преобразованиям P и T. Алгебраическая запись удобна в том отношении, что, вне зависимости от типов тензоров, все уравнения и соотношения автоматически оказываются инвариантными относительно преобразований из собственной группы Лоренца L_0. Так, при преобразованиях из L_0 элементы ∇, F и $j_{эл}$ переходят в

$$\nabla' = s\nabla s^+, \qquad F' = sFs^+, \qquad j'_{эл} = sj_{эл}s^+, \qquad (5.125)$$

где $ss^+ = s^+s = e$. Отсюда следует, что, например, уравнения Максвелла (5.110) инвариантны относительно L_0, так как из (5.110) после умножения слева на s и справа на s^+ следует

$$\nabla' F' = -\frac{4\pi}{c} j'_{эл}. \qquad (5.110')$$

При уточнении закона преобразования отдельных релятивистских величин по отношению к преобразованиям P и T целесообразно исходить из следующего общего принципа полной инвариантности физических величин. *Если физические уравнения или соотношения инвариантны относительно преобразований из связной компоненты единицы (т. е. из связной компоненты, содержащей единичное преобразование) неко-*

торой группы Ли и если для некоторых из входящих в эти уравнения величин определен закон преобразования по отношению к другим связным компонентам этой группы Ли, то закон преобразования остальных величин следует выбирать таким образом, чтобы уравнения были инвариантны относительно расширения преобразований на эти компоненты.

С неявным применением этого принципа приходится встречаться уже в классической механике в связи с приписыванием отдельным 3-векторам псевдовекторных свойств. В применении к группе Лоренца он означает, что если физические уравнения инвариантны относительно преобразований из собственной группы Лоренца L_0 и если для некоторых из входящих в эти уравнения «базисных» величин определен закон преобразования относительной общей группы Лоренца L, то закон изменения остальных величин следует доопределять таким образом, чтобы уравнения были инвариантны относительно преобразований из группы L.

В качестве базисных величин прежде всего будем брать компоненты x^α, которые, согласно определению (5.50), следует считать составляющими простого вектора. В классической релятивистской механике собственное время частицы τ является временем в системе отсчета, в которой частица покоится, поэтому при временны́х отражениях знак у времени x^4 и у собственного времени τ должен меняться. Следовательно, собственное время τ (определяемое из $c^2d\tau^2=-dx^\alpha dx_\alpha$) является особым скаляром. Отсюда далее следует, что вектор 4-скорости $dx^\alpha/d\tau$ является особым, и его четвертая компонента при любых преобразованиях остается положительной. Считая, что масса покоя m_0 ведет себя как простой скаляр, получим, что 4-вектор импульса с компонентами $p^\alpha=m_0dx^\alpha/d\tau$ является особым, так что энергия $E=cp^4$ при любых преобразованиях должна оставаться положительной.

Из того факта, что релятивистские величины, одинаково ведущие себя по отношению к преобразованиям из собственной группы Лоренца, имеют разные трансформационные свойства по отношению к P, T и PT, при учете принципа полной инвариантности, вытекают важные физические следствия, которые особенно существенны в релятивистской квантовой теории.

Пусть $\psi(x)$ — волновая функция релятивистской частицы, которую путем разложения в ряд или интеграл Фурье можно представить в виде суперпозиции плоских волн вида $e^{ik_\alpha x^\alpha}\psi(k)$, где $k_\alpha k^\alpha \leqslant 0$. Полагая $\varepsilon(k)=1$, если $k^4>0$, или $\varepsilon(k)=-1$, если $k^4<0$, получим, что 4-вектор $\varepsilon(k)k^\alpha$ будет особым (ибо компоненты $\varepsilon(k)k^4$ при любых преобразованиях из L останутся положительны) и что можно ввести оператор $\hat{\varepsilon}$, для которого в разложении $\hat{\varepsilon}\psi(x)$ по плоским волнам $\psi(k)$ заменяются на $\varepsilon(k)\psi(k)$. Из принципа полной инвариантности следует, что поскольку $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ и собственные значения p_α операторов энергии-импульса преобразуются, соответственно, как составляющие простого и особого 4-векторов, то в релятивистской теории за операторы энергии-импульса целесообразно брать не $\dfrac{\hbar}{i}\partial_\alpha$, а

$$\hat{P}_\alpha = \frac{\hbar}{i}\,\hat{\varepsilon}\partial_\alpha. \tag{5.126}$$

Из (5.126) следует, что собственные значения операторов $\hat{P}_\alpha$ равны $p^\alpha = \hbar\varepsilon(k)k^\alpha$, поэтому для состояний с отрицательными частотами k^4 энергия cp^4 будет строго положительной. В результате с частицами оказывается возможным сопоставлять состояния с положительными частотами, а с античастицами — состояния с отрицательными частотами, что приводит к полностью симметричному описанию частиц и античастиц (и к отказу от дираковского представления частиц в виде «дырок»). Введенный выше оператор $\hat{\varepsilon}$ можно интерпретировать как оператор заряда, причем в нерелятивистском случае, когда состояния с отрицательными частотами не рассматриваются, оператор $\hat{\varepsilon}$

можно заменить на 1. При этом оказывается, что введение оператора заряда, косвенно обосновываемое с помощью принципа полной инвариантности, соответствует теории позитронов Фейнмана. Действительно, замена оператора смещения во времени $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\hat{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}$ приводит к тому, что если частицы с положительными частотами движутся поступательно во времени, то античастицы, обладающие отрицательными частотами, будут согласно определению $\hat{\varepsilon}$ двигаться попятно во времени, что соответствует методу Фейнмана.

Рассмотрим теперь приложения тонких алгебраических методов, связанные с изученной выше теорией представлений ассоциативных алгебр и с изложенной в предыдущем параграфе алгебраической теорией спиноров.

Введем комплексные матрицы Дирака γ_α ($\alpha=1$, 2, 3, 4) и γ_5, связанные известными соотношениями

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=2\delta_{\alpha\beta},\quad \gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \tag{5.127}$$

Если положить

$$R_1=\gamma_1,\quad R_2=\gamma_2,\quad R_3=\gamma_3,\quad R_4=-i\gamma_4,\quad J=i\gamma_5, \tag{5.128}$$

то R_α порождают ассоциативную алгебру ${}^3A_5$ которая, согласно § 5 гл. 4, изоморфна алгебре действительных матриц четвертого порядка. Поэтому матрицы R_α можно выбрать действительными, причем от произвольного представления матриц Дирака можно перейти к действительному представлению с помощью преобразования $A\gamma_\alpha A^{-1}$, где A — невырожденная, в общем случае комплексная, квадратная матрица. Примером действительного представления могут служить матрицы

$$R_1=OBS_1O^{-1},\quad R_2=OBS_2O^{-1},\quad R_3=OBS_3O^{-1},$$

$$R_4=-OBO^{-1},\qquad J=OIO^{-1}=R^1R^2R^3R^4, \tag{5.129}$$

где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.130}$$

а O — произвольная действительная ортогональная матрица четвертого порядка. Произволом в выборе O можно воспользоваться для перехода от одного действительного представления к другому, а из ортогональности матрицы O с учетом (5.130) следует

$$R_1' = R_1, \; R_2' = R_2, \; R_3' = R_3, \; R_4' = -R_4, \; J' = -J. \tag{5.131}$$

С учетом введенного действительного представления для матриц R_α детализируем результаты § 6 гл. 2 применительно к используемым в дальнейшем формулам соответствия между четырехмерными действительными величинами и двумерными комплексными величинами. Пусть двухкомпонентные комплексные столбцы $\xi_{(k)}$ и квадратные комплексные матрицы второго порядка $\alpha_{(k)}$ выражаются через действительные столбцы $\varphi_{(k)}$, $\chi_{(k)}$ и действительные матрицы $\beta_{(k)}$, $\gamma_{(k)}$. по формулам

$$\xi_{(k)} = \varphi_{(k)} + i\chi_{(k)}, \quad \alpha_{(k)} = \beta_{(k)} + i\gamma_{(k)}. \tag{5.132}$$

Поставим каждым $\xi_{(k)}$ и $\alpha_{(k)}$ в однозначное соответствие действительный четырехкомпонентный столбец $\psi_{(k)}$ и действительную матрицу $A_{(k)}$ четвертого порядка:

$$\psi_{(k)} = O \begin{pmatrix} \varphi_{(k)} \\ \chi_{(k)} \end{pmatrix}, \quad A_{(k)} = O \begin{pmatrix} \beta_{(k)} & -\gamma_{(k)} \\ \gamma_{(k)} & \beta_{(k)} \end{pmatrix} O^{-1}. \tag{5.133}$$

Если действительная ортогональная матрица O совпадает с единичной матрицей, то из второй формулы

(5.133) в частном случае следуют формулы (2.64) и (2.65) при $n=2$. Непосредственно проверяется, что если матрицам $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ с помощью (5.133) поставлены в соответствие действительные матрицы $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, то произведению $\alpha_{(1)}\alpha_{(2)}$ соответствует произведение $A_{(1)}A_{(2)}$, эрмитово сопряженным матрицам $\overset{*}{\alpha}_{(k)}$ — транспонированные матрицы $A'_{(k)}$, а необходимым и достаточным условием для того, чтобы действительная квадратная матрица четвертого порядка A соответствовала (в смысле формулы (5.133)) матрице второго порядка α, является коммутирование A с J, где матрица J определена формулами (5.129) и (5.130). В частном случае, когда за действительные матрицы $A_{(k)}$ берутся коммутирующие с J матрицы R_4R_1, R_4R_2, R_4R_3, из приведенных выше формул следует, что им соответствуют матрицы Паули:

$$R_4R_1 \leftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_4R_2 \leftrightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.134}$$

$$R_4R_3 \leftrightarrow \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\leftrightarrow$ — символ соответствия, определяемого по (5.133).

Возьмем такое действительное представление алгебры ${}^3A_5$, чтобы базисным элементам e_α соответствовали введенные выше матрицы R_α. Тогда элементы s из спинорной группы будут представлены с помощью соответствующих действительных матриц S, так что спинор ψ преобразуется в $S\psi$. Если спинор действителен (т. е. является четырехкомпонентным действительным столбцом, эквивалентным двухкомпонентному комплексному столбцу), то он будет оставаться действительным в результате любых преобразований из общей группы Лоренца. Матрица S, соответствующая преобразованию из собственной группы Лоренца, определяется по (5.94). Опираясь на формулы (5.86) и (5.93), найдем, во что переходит действительный спинор при преобразованиях P и T. Базисные векторы e_α будем считать простыми; лишь при этом условии векторы $x^\alpha e_\alpha$ и $\nabla = e^\alpha \partial_\alpha$ будут вести себя как простые. Тогда из (5.86) с учетом определений (5.48) и (5.50) следует, что для преобразования P элемент s равен $\pm e_4$, а для преобразования T — равен $\pm e_1 e_2 e_3$. Согласно § 4, элемент s определяется с точностью до знака, поэтому по отношению к P, T и PT действительный спинор может преобразовываться лишь по одной из формул:

$$\begin{aligned}
&\psi_P = R_4\psi, && \psi_T = JR_4\psi, && \psi_{PT} = J\psi,\\
&\psi_P = -R_4\psi, && \psi_T = -JR_4\psi, && \psi_{PT} = J\psi,\\
&\psi_P = R_4\psi, && \psi_T = -JR_4\psi, && \psi_{PT} = -J\psi,\\
&\psi_P = -R_4\psi, && \psi_T = JR_4\psi, && \psi_{PT} = -J\psi.
\end{aligned} \tag{5.135}$$

В качестве матрицы R из формулы (5.98), как нетрудно проверить с помощью (5.131), следует взять $R = R_1 R_2 R_3 = JR_4$, ибо

$$R'_\alpha = RR_\alpha R^{-1}, \qquad (R_\alpha R_\beta)' = RR_\beta R_\alpha R^{-1} \qquad (\alpha \neq \beta), \ \ldots, \tag{5.136}$$

что эквивалентно (5.96).

Из формул (5.135) вытекает существование четырех типов действительных спиноров, отличающихся между собой лишь законами изменения по отношению к P и T. Это соответствует существованию четырех типов релятивистских скаляров, так как, если в выражении $\Omega_{(12)} = \psi'_{(1)} R \psi_{(2)}$ действительный спинор $\psi_{(1)}$ принадлежит к одному из перечисленных в (5.135) типов, а $\psi_{(2)}$ последовательно отождествляется с действительным спинором каждого из четырех типов, то $\Omega_{(12)}$ будет последовательно совпадать со скалярами каждого из четырех типов, перечисленных в таблице (5.83). Принцип полной инвариантности накладывает ограничения на произвол в выборе типов действительных спиноров. Пусть, например, $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ — два действительных спинора. Рассмотрим релятивистское уравнение

$$\nabla\psi_{(1)} = R^{\alpha}\,\frac{\partial\psi_{(1)}}{\partial x^{\alpha}} = \psi_{(2)}, \tag{5.137}$$

где $\nabla = R^{\alpha}\partial_{\alpha}$. Если бы $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ были спинорами разных типов, то при преобразовании P или T действительные спиноры $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ перешли бы, соответственно, в $\tilde{\psi}_{(1)} = S\psi_{(1)}$, $\tilde{\psi}_{(2)} = -S\psi_{(2)}$, простой вектор $\nabla = R^{\alpha}\partial_{\alpha}$ перейдет в $\tilde{\nabla} = S\nabla S^{-1}$, а уравнение (5.137) переходит в $\tilde{\Delta}\tilde{\psi}_{(1)} = -\tilde{\psi}_{(2)}$. Поэтому уравнение (5.137), инвариантное относительно L_0, при сделанном допущении будет неинвариантно относительно L. Чтобы это уравнение удовлетворяло принципу полной инвариантности, необходимо потребовать, чтобы $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ были спинорами одинаковых типов.

С помощью изложенных в конце предыдущего параграфа методов (основанных на формулах (5.99), (5.100) и аналогичных соотношениях, в которые входит не один, а несколько действительных спиноров) уравнения типа (5.137) можно переписать в виде тензорных уравнений (см. также литературные указания). При этом особенно очевидна возможность (при соответствующих доопределениях трансформационных свойств спиноров) сделать их инвариантными не только относительно L_0, но и относительно общей группы Лоренца L. Эти уравнения можно переписать также в двухкомпонентной комплексной форме. Учтем, что четырехкомпонентному действительному столбцу $R_2\psi_{(k)}$, согласно (5.133), соответствует двухкомпонентный столбец $\bar{\xi}_{(k)}$, где черточка означает комплексное сопряжение. Из этого факта следует, что при переходе от действительных столбцов $\psi_{(k)}$ к комплексным $\xi_{(k)}$ последние будут при преобразованиях P и T преобразовываться антилинейно, с заменой $\xi_{(k)}$ на $\pm\sigma_2\bar{\xi}_{(k)}$ или $\pm i\sigma_2\bar{\xi}_{(k)}$. Умножая (5.137) слева на R_4 и учитывая (5.133), (5.134), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^4} + \sigma_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\xi_{(1)} = \sigma_2\bar{\xi}_{(2)}. \tag{5.138}$$

Если $\xi_{(2)}=0$, то (5.138) совпадает с двухкомпонентным уравнением Вейля.

Введем следующее определение. Столбец ψ будем называть *спинором дираковского типа*, если он выражается через действительные спиноры $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ по формуле

$$\psi=\frac{1}{2}[(\psi_{(2)}+\psi_{(1)})+iJ(\psi_{(2)}-\psi_{(1)})]. \qquad (5.139)$$

Здесь $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ при отражениях P, T могут преобразовываться по различному типу, причем требование, чтобы преобразованный действительный (или, что то же самое, комплексный двухкомпонентный) спинор выражался через старые значения этого же самого (а не другого) действительного спинора, приводит к исключению большого числа возможностей преобразования ψ, соответствующих отражениям с заменой $\psi_{(1)}$ на $\psi_{(2)}$ и $\psi_{(2)}$ на $\psi_{(1)}$.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть φ, χ, ψ — спиноры дираковского типа, $\hat{A}$ — матрица или оператор, имеющая вид

$$\hat{A}=\frac{1}{2}[(\hat{A}_{(2)}+\hat{A}_{(1)})+iJ(\hat{A}_{(2)}-\hat{A}_{(1)})], \qquad (5.140)$$

где $\hat{A}_{(1)}$, $\hat{A}_{(2)}$ действительны и $\chi=\hat{A}\psi$. Тогда, если $\hat{A}J=J\hat{A}$, то

$$\chi_{(1)}=\hat{A}_{(1)}\chi_{(1)}, \qquad \chi_{(2)}=\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)}, \qquad (5.141)$$

$$2\varphi^*\hat{A}\psi=\varphi'_{(1)}\hat{A}_{(1)}\varphi_{(1)}+\varphi'_{(2)}\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)}+$$
$$+i[(\varphi'_{(2)}J\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)})-(\varphi'_{(1)}J\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)})], \qquad (5.142)$$

$$2\varphi'\hat{A}\psi=\varphi'_{(2)}\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)}+\varphi'_{(1)}\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)}+$$
$$+i[(\varphi'_{(1)}J\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)})-(\varphi'_{(2)}J\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)})]. \qquad (5.143)$$

Если же $\hat{A}J=-J\hat{A}$, то

$$\chi_{(1)}=\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)}, \qquad \chi_{(2)}=\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)}, \qquad (5.144)$$

$$2\varphi^*\hat{A}\psi = \varphi'_{(1)}\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)} + \varphi'_{(2)}\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)} + \\ + [(\varphi'_{(2)}J\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)}) - (\varphi'_{(1)}J\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)})], \quad (5.145)$$

$$2\varphi'\hat{A}\psi = \varphi'_{(1)}\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)} + \varphi'_{(2)}\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)} + \\ + i[(\varphi'_{(1)}J\hat{A}_{(1)}\psi_{(1)}) - (\varphi'_{(2)}J\hat{A}_{(2)}\psi_{(2)})]. \quad (5.146)$$

Доказательство непосредственно получается в результате подстановки и элементарных преобразований.

В качестве первого примера применения выписанных формул рассмотрим соотношения, используемые для определения волновой функции двухкомпонентного нейтрино:

$$(1+\gamma_5)\psi = 0 \quad \text{или} \quad (1-\gamma_5)\psi = 0. \quad (5.147)$$

Заменяя, в соответствии с (5.128), γ_5 на $-iJ$, из (5.140) получим, что в первом случае $\hat{A}_{(2)}=0$, $\hat{A}_{(1)}=1$, а во втором — $\hat{A}_{(1)}=0$, $\hat{A}_{(2)}=1$. Поскольку матрица $\hat{A}$ коммутирует с J, то здесь имеют место формулы (5.141), откуда следует, что первое соотношение (5.147) эквивалентно условию $\psi_{(1)}=0$, а второе — условию $\psi_{(2)}=0$. Это показывает, что при условии (5.147) нейтрино можно характеризовать одним действительным спинором. При этом уравнение Вейля, применяемое для описания двухкомпонентного нейтрино, согласно предыдущим результатам можно считать инвариантным относительно любых преобразований из общей группы Лоренца.

В качестве второго примера рассмотрим гамильтониан универсального слабого взаимодействия

$$H_{\text{сл}} = G[\overset{*}{\psi}_A R_4 R_\alpha (1-iJ)\psi_B]\cdot[\overset{*}{\psi}_C R_4 R^\alpha (1-iJ)\psi_D] + \\ + \text{эрмитово сопряженные члены.} \quad (5.148)$$

Здесь G — универсальная постоянная, ψ_A, ψ_B, ψ_C, ψ_D — четырехкомпонентные волновые функции дираковского типа для частиц A, B, C, D со спинами 1/2, причем у большинства авторов обычно матрицы обозначаются несколько иначе (вместо $(1-iJ)$ пишется $(1+\gamma_5)$ и т. д. — см. (5.128)). Полагая в (5.140) $\hat{A}=$

$=R_4R^\alpha(1-iJ)$, $\bar{A}_{(2)}=0$, $\bar{A}_{(1)}=R_4R^\alpha$, согласно (5.142) получим

$$H_{сл}=-\frac{G}{2}[\psi'_{(A1)}R_4R_\alpha\psi_{(B1)}][\psi'_{(C1)}R_4R^\alpha\psi_{(D1)}]+$$
$$+\frac{G}{2}[\psi'_{(A1)}JR_4R_\alpha\psi_{(B1)}][\psi'_{(C1)}JR_4R^\alpha\psi_{(D1)}], \quad (5.149)$$

или, после перехода от действительных четырехкомпонентных столбцов $\psi_{(A1)},\ldots$ к соответствующим им двухкомпонентным комплексным столбцам $\xi_A,\ldots,$

$$H_{сл}=-\frac{G}{4}(\overset{*}{\xi}_A\sigma_\alpha\xi_B)(\overset{*}{\xi}_C\sigma^\alpha\xi_D)+$$
$$+\text{ эрмитово сопряженные члены}, \quad (5.150)$$

где $\sigma_k=\sigma^k$ — матрицы Паули, $\sigma_4=-\sigma^4=1$. Отсюда вытекает следующее утверждение: универсальная теория слабых взаимодействий свидетельствует о том, что состояния всех частиц со спинами 1/2 следует описывать при помощи релятивистских двухкомпонентных волновых функций или эквивалентных им четырехкомпонентных действительных волновых функций. Четырехкомпонентные комплексные дираковские волновые функции следует считать производными величинами, определяемыми по исходным двухкомпонентным волновым функциям. Далее, если $\psi_{(A1)}$, $\psi_{(B1)}$, $\psi_{(C1)}$, $\psi_{(D1)}$ являются действительными спинорами одинаковых типов, то выражение (5.149) будет инвариантно относительно любых преобразований из общей группы Лоренца. Это доказывает, что переопределение трансформационных свойств отдельных величин по отношению к P и T позволяет для всех опытов, связанных с универсальной теорией слабых взаимодействий, добиться соответствия с принципом полной инвариантности физических уравнений.

Рассмотрим теперь четырехкомпонентное уравнение Дирака и соответствующее ему полностью релятивистское двухкомпонентное уравнение для электрона или позитрона во внешнем электромагнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом A_α. Будем считать электромагнитное поле настолько слабым, чтобы рождение частиц и античастиц можно было не учитывать, так что волновая функция частицы является собственной функцией оператора заряда:

$$\hat{\varepsilon}\psi = \varepsilon\psi, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{5.151}$$

где для электрона будем считать $\varepsilon = -1$, а для позитрона $\varepsilon = +1$. Тогда уравнение Дирака принимает вид

$$\left(\hbar\varepsilon\nabla - i\frac{e}{c}A\right)\psi = m_0 c\psi, \tag{5.152}$$

где $\nabla = R^\alpha \partial_\alpha$, $A = R^\alpha A_\alpha$, e — заряд электрона. Беря комплексно сопряженные значения от обеих частей (5.152), получим, что замена ψ на $\bar{\psi}$ соответствует переходу от частицы к античастице. В соответствии с (5.140) положим

$$\hat{A} = \hbar\varepsilon\nabla - i\frac{e}{c}A = \frac{1}{2}[(\hat{A}_{(2)} + \hat{A}_{(1)}) + iJ(\hat{A}_{(2)} - \hat{A}_{(1)})], \tag{5.153}$$

откуда

$$\hat{A}_{(2)} = \hbar\varepsilon\nabla - \frac{e}{c}JA, \qquad \hat{A}_{(1)} = \hbar\varepsilon\nabla + \frac{e}{c}JA, \tag{5.154}$$

и формулы (5.144) дают

$$m_0 c\psi_{(1)} = \hat{A}_{(2)}\psi_{(2)} = \left(\hbar\varepsilon\nabla - \frac{e}{c}JA\right)\psi_{(2)}, \tag{5.155}$$

$$m_0 c\psi_{(2)} = \hat{A}_{(1)}\psi_{(1)} = \left(\hbar\varepsilon\nabla + \frac{e}{c}JA\right)\psi_{(1)}. \tag{5.156}$$

Будем считать, что не только по отношению к слабым взаимодействиям, но и в случае электромагнитных взаимодействий состояние частицы со спином 1/2 должно описываться с помощью двухкомпонентной волновой функции ξ, эквивалентной действительному спинору $\psi_{(1)}$, тогда как четырехкомпонентную комплексную дираковскую волновую функцию следует считать производной величиной. Подставляя (5.156) в (5.155), получим, что волновое уравнение для $\psi_{(1)}$

имеет вид

$$\left(\varepsilon\nabla - \frac{e}{\hbar c}JA\right)\left(\varepsilon\nabla + \frac{e}{\hbar c}JA\right)\psi_{(1)} = \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi_{(1)}. \qquad (5.157)$$

Переходя от действительных величин к комплексным с помощью (5.133), (5.134) и производя элементарные выкладки (см. также литературные указания), получим

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\varepsilon\hbar i\frac{\partial}{\partial t} + eA_4\right)^2 - \sum_{k=1}^{3}\left(\varepsilon\hbar i\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)^2 - \right.$$

$$\left. - m_0^2c^2 - \frac{e\varepsilon\hbar}{c}i\sigma_{\alpha_1\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2}\right]\xi(x) = 0, \qquad (5.158)$$

где $F^{\alpha_1\alpha_2} = \partial^{\alpha_1}A^{\alpha_2} - \partial^{\alpha_2}A^{\alpha_1}$, $\quad i\sigma_{\alpha_1\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2} = i\sigma^kE_k - \sigma^kH_k$. Двухкомпонентное уравнение (5.157)—(5.158) впервые было введено автором в 1955 г., исходя из соображений, связанных с релятивистским обобщением нерелятивистского двухкомпонентного уравнения Паули, а затем, в 1958 г., было переоткрыто Фейнманом и Гелл-Манном в связи с рассмотренной выше универсальной теорией слабых взаимодействий.

Если известно решение двухкомпонентного релятивистского уравнения (5.158) или (5.157), то $\psi_{(2)}$ находится с помощью (5.156), после чего четырехкомпонентная волновая функция дираковского типа, определяемая по (5.139), будет удовлетворять уравнению Дирака. При пространственном отражении P действительные спиноры $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ одновременно умножаются на одну и ту же матрицу, определяемую по (5.135) и антикоммутирующую с J. Например, если $\psi_{(1)P} = R_4\psi_{(1)}$, то $JR_4 = -R_4J$ и по (5.139) $\psi_P = R_4\bar{\psi}$. Отсюда следует, что если первичным считать полностью релятивистское двухкомпонентное уравнение (5.157) или (5.158), то будет справедливо уравнение Дирака, однако при пространственных отражениях дираковская волновая функция должна будет преобразовываться антилинейно, с заменой на комплексно сопряженную, т. е. по закону комбинированной инверсии.

Глава 6

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Группа Пуанкаре и специальная теория относительности

Пусть x^α — четыре координаты, связанные между собой соотношением

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \equiv \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \text{inv}, \tag{6.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора четырехмерного пространства, в нашем случае равные

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \qquad g_{44} = -1, \qquad g_{\alpha\beta}=0 \text{ при } \alpha \neq \beta. \tag{6.2}$$

Компоненты обратного тензора $g^{\alpha\beta}$, определяемые из

$$g^{\alpha_1\beta}g_{\beta\alpha_2} = \delta^{\alpha_1}_{\alpha_2}, \tag{6.3}$$

как следует из (6.2), совпадают с $g_{\alpha\beta}$, т. е. $g^{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$.

Общая группа Лоренца состоит из линейных преобразований координат x^α, не меняющих (6.1). Ее генераторами, как следует из (6.1), будут, во-первых, генераторы группы вращений трехмерного пространства:

$$M_1 = x_2\partial_3 - x_3\partial_2, \qquad M_2 = x_3\partial_1 - x_1\partial_3, \qquad M_3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1, \tag{6.4}$$

где $x_\alpha = g_{\alpha\beta}x^\beta$, $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, и, во-вторых, генераторы, соответствующие поворотам в плоскостях (6.4):

$$N_k = \frac{1}{c}(x_4\partial_k - x_k\partial_4) = -t\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{x^k}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (6.5)$$

Из (6.4) и (6.5) следует, что генераторы группы Лоренца связаны между собой следующими перестановочными соотношениями (где многоточие обозначает аналогичные соотношения, полученные в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3):

$$[M_1, M_2] = -M_3, \ \ldots, \qquad [N_1, N_2] = \frac{1}{c^2}M_3, \ \ldots, \qquad (6.6)$$

$$[N_1, M_2] = -[N_2, M_1] = -N_3, \ \ldots \qquad (6.7)$$

Неоднородная (10-параметрическая) *группа Лоренца*, называемая также группой Пуанкаре, сохраняет метрическую форму

$$g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = -c^2\,d\tau^2 \qquad (6.8)$$

и получается из общей группы Лоренца в результате добавления преобразований пространственного смещения с генераторами $P_k = \partial_k$ и преобразования временного смещения с генератором $H = c\partial_4 = cP_4 = \frac{\partial}{\partial t}$. Из выражений для генераторов смещений следует, что они связаны друг с другом и с генераторами общей группы Лоренца перестановочными соотношениями

$$[P_{k_1}, P_{k_2}] = 0, \qquad [H, P_k] = 0, \qquad (6.9)$$

$$[N_{k_1}, P_{k_2}] = \frac{1}{c^2}\delta_{k_1k_2}H, \qquad [H, N_k] = -P_k, \qquad [H, M_k] = 0, \qquad (6.10)$$

$$[P_1, M_2] = -[P_2, M_1] = -P_3, \ \ldots \qquad (6.11)$$

Десятипараметрическую группу Ли G, у которой генераторы связаны перестановочными соотношениями (6.6), (6.7), (6.9)—(6.11), тогда как вид этих генераторов считается произвольным, будем называть абстрактной *группой Пуанкаре*. Группа Ли G, у которой перестановочные соотношения для генераторов отличаются лишь тем, что в (6.6) и (6.10) постоянная $1/c^2$ положена равной нулю, называется *группой Галилея*. Таким образом, группа Галилея получается из группы Пуанкаре в предельном случае $c \to \infty$, а сама постоянная c, интерпретируемая как предельная скорость (скорость света), в общем случае имеет четкий инвариантно-групповой смысл. В свою очередь и сама группа Пуанкаре получается с помощью предельного перехода $R \to \infty$ из группы движений пространства Фридмана постоянной отрицательной кривизны. Группа движений пространства Фридмана определяется как группа с генераторами P_α и $M_{\alpha\beta}$, где

$$M_{12} = M_3, \quad M_{23} = M_1, \quad M_{31} = M_2, \quad M_{4k} = cN_k, \quad P_4 = H/c \tag{6.12}$$

причем перестановочные соотношения этой группы отличаются от перестановочных соотношений группы Пуанкаре лишь тем, что (6.9) заменяются на

$$[P_\alpha, P_\beta] = -M_{\alpha\beta}/R^2. \tag{6.13}$$

Уравнения физики инвариантны относительно группы Ли G, если выполняются следующие два условия.

1. Для всех физических величин определен закон их изменения по отношению к группе G. При этом под физическими величинами могут пониматься наблюдаемые, числовые значения наблюдаемых, физические постоянные (например, заряды частиц) и числовые параметры, имеющие физический смысл (например, время), а законом изменения физических величин по отношению к группе устанавливается зависимость одних физических величин от других величин и от параметров группы G.

2. Если в любой физической задаче, в которой по одним физическим величинам Φ_0, которые можно назвать задаваемыми, находятся другие физические

величины Φ, так называемые определяемые, то преобразование T из G, примененное к системе задаваемых величин Φ_0, переводит Φ_0 в такую новую физически возможную систему задаваемых величин $T\Phi_0$, для которой определяемыми величинами будут $T\Phi$. Вопрос о том, какие величины считать задаваемыми, а какие — определяемыми, зависит от конкретных практических условий, и в разных задачах их выбор может быть различным.

Структура группы G, характеризующей инвариантные свойства физических явлений, теснейшим образом связана с особенностями основных законов и уравнений физики, причем наличие инвариантности относительно той или иной группы накладывает жесткие ограничения на возможный выбор основных физических уравнений. Более того, поскольку и сами физические величины должны определяться не произвольно, а с учетом законов физики, то переход от одной основной группы к другой, из которой первая получается в результате предельного перехода, должен приводить также к необходимости изменения основных понятий и величин. Изменение понятий о свойствах пространства и времени, предложенное Эйнштейном в связи с созданием специальной теории относительности, как раз и связано с указанным обстоятельством.

Взятие групповых понятий в качестве основы, отличающей специальную теорию относительности от нерелятивистской теории пространства и времени, соответствует групповому подходу к геометрии, ведущему начало от Клейна. С точки зрения Клейна, главное в геометрии — это группа преобразований, тогда как свойства преобразуемых объектов — вещи второстепенные. Потребности разработки общей теории, объединяющей несколько предельных физических и геометрических теорий, привели к следующему обобщению программы Клейна (см. литературные указания). Необходимо перейти от инвариантно-группового изучения одной отдельно взятой физической теории или геометрии, понимаемой в смысле Клейна (т. е. характеризуемой заданием основной группы), к одновременному изучению сразу того или иного множества предельных теорий. Тогда некоторые физические и геометрические свойства будут инвариантными характеристиками всего множества теорий — их следует рассматривать в первую очередь. Другие свойства будут специфичны только для конкретных представлений множества и будут меняться при предельном переходе от одной теории к другой.

С учетом обобщения программы Клейна рассмотрим свойства, общие для теорий, у которых основной группой G служит одна из трех групп, связанных между собой цепочкой предельных переходов: группа Галилея, группа Пуанкаре или группа движений пространства Фридмана. Пользуясь структуроидными обозначениями, введем следующее определение. Пусть l — линейное векторное пространство, состоящее из элементов алгебры Ли для группы G, так что $[l, l] \subseteq l$. Линейное подпространство m из l называется *специальной подалгеброй Ли*, если l можно представить в виде прямой суммы $m + n$, т. е.

$$l = m \bigcup n, \qquad m \bigcap n = 0, \tag{6.14}$$

где подпространства m и n связаны соотношениями (см. также (3.17)):

$$[m, m] \subseteq m, \qquad [m, n] \subseteq n. \tag{6.15}$$

Тогда инвариантным свойством для трех упомянутых выше групп Ли (т. е. свойством, не меняющимся при предельных переходах $c \to \infty$, $R \to \infty$), как следует из (6.6) — (6.7) и (6.9) — (6.13), является условие специальности подалгебр Ли третьего и шестого ранга, образующими которых будут, соответственно, M_k и N_k. Специальному разложению алгебры Ли l ставится в соответствие специальное разложение конечных групповых преобразований T из группы G, связанное с заменой канонических параметров ξ^λ на новые, так называемые специальные, групповые параметры. В нашем случае специальное разложение имеет вид

$$T = \exp(r^\alpha P_\alpha) \exp(u^k N_k) \exp(\omega^s M_s), \tag{6.16}$$

где $P_4=\frac{1}{c}H$, а r^α, u^k, ω^s — десять независимых специальных параметров, которые можно выразить через десять канонических параметров ξ^λ, если правую часть (6.16) приравнять $\exp(\xi^\lambda X_\lambda)$.

Обозначим через e_μ базисные элементы специальной подалгебры Ли m и через e_ν — базисные элементы дополнительного подпространства n. Тогда из (6.14) следует

$$c^\nu_{\mu_1\mu_2}=0, \qquad c^{\mu_1}_{\mu_2\nu}=-c^{\mu_1}_{\nu\mu_2}=0. \tag{6.17}$$

Поэтому матрица C_ξ с элементами

$$(C_\xi)^{\lambda_1}_{\lambda_2}=c^{\lambda_1}_{\lambda\lambda_2}\xi^\lambda\equiv c^{\lambda_1}_{\mu\lambda_2}\xi^\mu+c^{\lambda_1}_{\nu\lambda_2}\xi^\nu$$

и все матричные функции от нее, имеющие вид степенных рядов, распадаются на два диагональных блока, так что, например,

$$(C_\xi)^\mu_\nu=0,\ (C_\xi)^\nu_\mu=0,\ U^{-1}(\xi)^\nu_\mu=0,\ U^{-1}(\xi)^\mu_\nu=0. \tag{6.18}$$

Отсюда, в частности, следует:

$$\exp(\xi^\mu_{(1)}X_\mu)\,[\exp(\xi^\nu X_\nu)\exp(\xi^\mu_{(2)}X_\mu)]=[\exp(\xi^\mu_{(1)}X_\mu)\times$$
$$\times\exp(\xi^\nu X_\nu)\exp(-\xi^\mu_{(1)}X_\mu)]\exp(\xi^\mu_{(1)}X_\mu)\exp(\xi^\mu_{(2)}X_\mu), \tag{6.19}$$

где с учетом (5.22) имеем

$$\exp(\xi^\mu_{(1)}X_\mu)\exp(\xi^\nu X_\nu)\exp(-\xi^\mu_{(1)}X_\mu)=\exp[(\xi^\nu)'\,X_\nu],$$
$$(\xi^\nu)'=(\exp C_{\xi_{(1)}})^\nu_{\nu_1}\xi^{\nu_1}. \tag{6.20}$$

Формулы (6.19) и (6.20) лежат в основе физических применений специальных подалгебр и подгрупп Ли.

Для группы Галилея и группы Пуанкаре, характеризующих инвариантные свойства физических теорий, принимается, что как для классических, так и для квантовых систем генераторы P_k и $H=cP_4$ имеют смысл, соответственно, операторов пространственного смещения и оператора смещения времени. Другими словами, преобразование

$$T^{r,t} = \exp(r^\alpha P_\alpha) = \exp(r^1 P_1 + r^2 P_2 + r^3 P_3 + tH), \quad r^4 \equiv ct, \tag{6.21}$$

имеет смысл преобразования, переводящего физическую систему, рассматриваемую в момент времени $t=0$, к той же системе, рассматриваемой в момент времени t и пространственно смещенной на вектор $\boldsymbol{r}$[1]). Таким путем, как в нерелятивистской, так и в релятивистской теории из групповых соображений четко определяются изменения числовых значений пространственно-временных координат, тогда как сами числовые значения координат в квантовой механике и в статистической классической механике будут определяться лишь как средние величины.

Выясним теперь физический смысл входящих в (6.16) групповых параметров u^k. Будем рассматривать одновременно случай группы Пуанкаре и группы Галилея (для последней во всех формулах следует положить $1/c=0$). При действии на $T^{r,t}$ слева преобразованием $T^u = \exp(u^k N_k)$ преобразование $T^{r,t}$ заменяется на следующее специальное разложение:

$$T^u T^{r,t} = (T^u T^{r,t} T^{-u})\, T^u = T^{r',t'} T^u. \tag{6.22}$$

Положим в (6.20) $\xi^\nu = (r^k, t)$, $X_\nu = (P_k, H)$ и учтем, что, как следует из (6.18), матрица C_u распадается на диагональные блоки, причем та ее часть, которая действует на компоненты r^α, согласно (6.9)—(6.11) имеет вид

$$C_u^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u^1 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 & u^3 \\ u^1/c^2 & u^2/c^2 & u^3/c^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

---

[1]) Заметим, что в математическом отношении изучение группы преобразований системы отсчета, по отношению к которой задаются какие-то математические фигуры, эквивалентно изучению группы преобразований этих фигур при неизменной системе отсчета. Поэтому одни и те же преобразования T можно интерпретировать или как преобразования физических систем при неизменной системе отсчета, или как преобразования системы отсчета.

Из (6.23) следует, что $(C_u^{(\nu)})^3 = \frac{u^2}{c^2} C_u^{(\nu)}$, где $u^2 = \boldsymbol{u}^2$, поэтому

$$e^{C_u^{(\nu)}} = E + \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \ldots\right] C_u^{(\nu)} + \\ + \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right](C_u^{(\nu)})^2 = \\ = E + \frac{\operatorname{sh}(u/c)}{(u/c)} C_u^{(\nu)} + \frac{\operatorname{ch}(u/c) - 1}{(u/c)^2}(C_u^{(\nu)})^2. \quad (6.24)$$

Определяя $\boldsymbol{v}$ из формулы $\boldsymbol{u} = \frac{u}{v}\boldsymbol{v}$, где

$$\operatorname{sh}\frac{u}{c} = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{ch}\frac{u}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c, \quad (6.25)$$

и подставляя (6.24) в (6.20), получим

$$\begin{pmatrix} r^{1\prime} \\ r^{2\prime} \\ r^{3\prime} \\ t' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v^1 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 \\ 0 & 0 & 0 & v^3 \\ v^1/c^2 & v^2/c^2 & v^3/c^2 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\boldsymbol{v}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\begin{pmatrix} v^1v^1 & v^1v^2 & v^1v^3 & 0 \\ v^2v^1 & v^2v^2 & v^2v^3 & 0 \\ v^3v^1 & v^3v^2 & v^3v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{v}^2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \\ t \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}} + \boldsymbol{v}\left[\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{v})}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right], \\ t' = \frac{t + (\boldsymbol{r}\boldsymbol{v})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6.27)$$

что совпадает с общими формулами преобразований Лоренца, записанными в векторном виде (см. литературные указания). В пределе $c \to \infty$ (6.27) переходит в

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}t, \qquad t' = t. \quad (6.28)$$

Отсюда следует, что как в релятивистском, так и в нерялитивистском случае преобразование T^{u} соответствует приданию физической системе постоянной скорости $\boldsymbol{v}$ (или переходу к системе отсчета, движущейся со скоростью $-\boldsymbol{v}$). В нерелятивистском пределе $\boldsymbol{u}$ совпадает с вектором скорости $\boldsymbol{v}$, а в релятивистском случае $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ пропорциональны между собой, причем коэффициент пропорциональности, определяемый в соответствии с (6.25) из $\beta = v/c = \operatorname{th}(u/c)$, равен

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\beta}\operatorname{Arth}\beta = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} = 1 + \frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta^4}{5} + \ldots \quad (6.29)$$

Что касается входящих в общее выражение (6.16) групповых параметров ω^s, то аналогичным путем с помощью (6.18) и (6.20) при учете перестановочных соотношений (6.6), (6.7), (6.11) убеждаемся, что для любой из рассматриваемых групп G направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением оси вращения в трехмерном пространстве, а его абсолютная величина ω совпадает с величиной угла поворота.

После того как установлен физический смысл специальных параметров, входящих в (6.16), с помощью выведенных выше основных формул теории групп Ли легко получаются все основные формулы релятивистской и классической кинематики. Поскольку при этом учитывается только структура основной группы, но не выдвигаются какие-либо специальные гипотезы о свойствах преобразуемых объектов, то единственное требование, которое может быть положено в основу специальной теории относительности, это требование о замене группы Галилея на группу Пуанкаре.

§ 2. Алгебры Ли с числовыми значениями и инварианты алгебраических состояний

Будем считать, что если инвариантные свойства физической системы характеризуются заданием группы Ли с алгеброй Ли l, то генераторы X_λ этой алгебры Ли можно выбрать таким образом, что они совпадают с наблюдаемыми для данной физической системы (при этом в квантовой теории X_λ будут эрмитовыми операторами, что соответствует наличию у квантовомеханических скобок Пуассона множителя $i/\hbar$).

Отсюда следует, что наблюдаемые X_λ будут порождать лиево-йорданову алгебру наблюдаемых или соответствующую ей лиево-ассоциативную алгебру G_A, обладающую тем свойством, что если g_1 и g_2 — произвольные наблюдаемые, выраженные через образующие X_λ, то $g_1+ig_2 \in G_A$. Если G_A — ассоциативная алгебра с числовыми значениями, то числовые значения $\langle\pi|X_\lambda\rangle$ наблюдаемых X_λ можно отождествить с числовыми значениями базисных элементов e_λ абстрактной алгебры Ли l в алгебраическом состоянии π:

$$\pi_\lambda = \langle\pi|e_\lambda\rangle = \langle\pi|X_\lambda\rangle. \tag{6.30}$$

При инфинитезимальных преобразованиях, переводящих e_λ в $[e_{\lambda_1}, e_\lambda]$, числовые значения π_λ переходят в

$$\pi_\lambda \to \langle\pi|[e_{\lambda_1}, e_\lambda]\rangle = c_{\lambda_1\lambda}^{\lambda_2}\pi_{\lambda_2}, \tag{6.31}$$

т. е. π_λ преобразуются по присоединенному представлению группы Ли с алгеброй Ли l. Если $\overset{0}{\pi}_\lambda = \langle\pi^0|e_\lambda\rangle$ — некоторые фиксированные значения величин π_λ, то после преобразования по присоединенному представлению группы, согласно (2.80) и (5.22), они перейдут в

$$\pi_\lambda(\xi) = \langle\pi|e_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\pi_0\left|\frac{[g(\xi), \ \ldots, \ [g(\xi), e_\lambda] \ \ldots]}{n!}\right.\right\rangle = \\ = (\exp C_\xi)_\lambda^{\lambda_1}\pi_{\lambda_1}^0. \tag{6.32}$$

где $g(\xi) = \xi^\lambda e_\lambda$. Что же касается алгебраического состояния не алгебры Ли l, а лиево-ассоциативной алгебры G_A, порождаемой генераторами X_λ, то оно будет определяться заданием всевозможных числовых значений

$$\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_k} = \langle\pi|X_{\lambda_1}\ \ldots\ X_{\lambda_k}\rangle. \tag{6.33}$$

Алгеброй Ли l с генераторами X_λ определяется подгруппа G_l группы автоморфизмов лиево-ассоциативной алгебры

G_A, переводящая базисные элементы $(X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \ldots X_{\lambda_k})$ в

$$(X_{\lambda_1} \ldots X_{\lambda_k})' = e^D (X_{\lambda_1} \ldots X_{\lambda_k}), \qquad Df = \xi^\lambda [X_\lambda, f]. \tag{6.34}$$

Пусть теперь $\pi^0_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ — некоторые фиксированные числовые значения элементов $X_{\lambda_1} \ldots X_{\lambda_k}$. Тогда, полагая

$$u^{\lambda_1}_{\lambda_2}(\xi) = (\exp C_\xi)^{\lambda_1}_{\lambda_2}, \qquad u(\xi) = \exp C_\xi \tag{6.35}$$

и учитывая, что для оператора D справедливы формулы (5.27)—(5.29), получим

$$\pi_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi) = u^{\lambda_1'}_{\lambda_1}(\xi) u^{\lambda_2'}_{\lambda_2}(\xi) \ldots u^{\lambda_k'}_{\lambda_k}(\xi) \pi^0_{\lambda_1' \ldots \lambda_k'}. \tag{6.36}$$

В частном случае классической нестатистической теории числовое значение произведения наблюдаемых равно произведению числовых значений наблюдаемых, т. е.

$$\pi_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} = \pi_{\lambda_1} \pi_{\lambda_2} \ldots \pi_{\lambda_k}. \tag{6.37}$$

В этом случае числовые значения элементов алгебры G_A полностью определяются по числовым значениям элементов алгебры Ли l.

Инвариантами алгебраических состояний алгебры Ли l будут такие функции от $\pi_\lambda(\xi)$, которые не зависят от канонических параметров ξ^λ группы Ли G_l. Для нахождения этих инвариантов воспользуемся тем, что определяемая по (6.35) матрица $u(\xi)$ порождает автоморфизм алгебры Ли l, т. е., в соответствии с (2.48)—(2.51), имеют место соотношения (2.50):

$$u^{\lambda_4}_{\lambda_1} u^{\lambda_5}_{\lambda_2} c^{\lambda_6}_{\lambda_4 \lambda_5} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1 \lambda_2} u^{\lambda_6}_{\lambda_3}. \tag{6.38}$$

Чтобы вывести (6.38), достаточно умножить обе части (5.2) слева на e^X и справа на e^{-X} и затем использовать (5.22). Умножая обе части (6.38) на $\pi^0_{\lambda_6}$, суммируя по λ_6 и, в соответствии с (6.32), заменяя $u^{\lambda_6}_{\lambda_3} \pi^0_{\lambda_6}$ на π_{λ_3}, получим

$$c^{\lambda_3}_{\lambda_1 \lambda_2} \pi_{\lambda_3} = u^{\lambda_1'}_{\lambda_1} u^{\lambda_2'}_{\lambda_2} (c^{\lambda_3'}_{\lambda_1' \lambda_2'} \pi^0_{\lambda_3'}). \tag{6.39}$$

Из (6.39) далее следует, что если положить

$$g_{\lambda_1\lambda_2} = c_{\lambda_1\lambda_3}^{\lambda_4} c_{\lambda_2\lambda_4}^{\lambda_3} = \operatorname{Sp}(C_{\lambda_1}C_{\lambda_2}), \tag{6.40}$$

где по одинаковым индексам, как обычно, подразумевается суммирование, то

$$g_{\lambda_1\lambda_2} = u_{\lambda_1}^{\lambda_1'} u_{\lambda_2}^{\lambda_2'} g_{\lambda_1'\lambda_2'}. \tag{6.41}$$

Из (6.39) и (6.41) вытекает, что инвариантами алгебраических состояний будут собственные значения ν характеристического уравнения

$$|c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}\pi_{\lambda_3} - \nu g_{\lambda_1\lambda_2}| = 0. \tag{6.42}$$

Более общо, если Y_λ — матрицы порядка n, связанные перестановочными соотношениями

$$Y_{\lambda_1}Y_{\lambda_2} - Y_{\lambda_2}Y_{\lambda_1} = c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}Y_{\lambda_3}, \tag{6.43}$$

то, заменяя в (5.22) X_λ на Y_λ и учитывая, что шпур от порядка сомножителей не зависит, получим

$$\operatorname{Sp}(Y_{\lambda_1}Y_{\lambda_2}) = \operatorname{Sp}(e^Y Y_{\lambda_1}Y_{\lambda_2}e^{-Y}) = u_{\lambda_1}^{\lambda_1'} u_{\lambda_2}^{\lambda_2'} \operatorname{Sp}(Y_{\lambda_1'}Y_{\lambda_2'}), \tag{6.44}$$

т. е. инвариантами алгебраических состояний будут собственные значения ν, определяемые из

$$|c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}\pi_{\lambda_3} - \nu \operatorname{Sp}(Y_{\lambda_1}Y_{\lambda_2})| = 0. \tag{6.45}$$

Наконец, если у $g_{\lambda_1\lambda_2}$ имеется обратная матрица $g^{\lambda_1\lambda_2}$, так что

$$g_{\lambda_1\lambda_2}g^{\lambda_2\lambda_3} = \delta_{\lambda_1}^{\lambda_3} \tag{6.46}$$

(как следует из теории алгебр Ли, такая матрица существует в том и только том случае, если алгебра Ли полупроста), то инвариантами алгебраических состояний будут собственные значения ν характеристического уравнения

$$|g^{\lambda_1\lambda_2}\pi_{\lambda_1}Y_{\lambda_2} - \nu E| = 0, \tag{6.47}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Доказательство следует из того, что

$$g^{\lambda_1\lambda_2}\pi_{\lambda_1}Y_{\lambda_2} = e^{Y}(g^{\lambda_1\lambda_2}\pi^0_{\lambda_1}Y_{\lambda_2})e^{-Y}, \qquad Y = \xi^{\lambda}Y_{\lambda}, \tag{6.48}$$

и что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов этих матриц. Обобщением (6.47) будет следующее характеристическое уравнение, собственные значения которого являются инвариантами алгебраических состояний лиево-ассоциативной алгебры G_A:

$$|g^{\lambda_1\lambda_1'}g^{\lambda_2\lambda_2'}\ldots g^{\lambda_k\lambda_k'}\pi_{\lambda_1\ldots\lambda_k}Y_{\lambda_1'}\ldots Y_{\lambda_k'} - \nu E| = 0. \tag{6.49}$$

Инварианты, определяемые с помощью указанных выше методов, могут быть использованы для инвариантно-алгебраической классификации состояний физических систем.

§ 3. Инвариантно-групповое определение энергии, импульса, координат центра масс и собственного момента изолированной физической системы

В качестве примера применения теории алгебраических состояний рассмотрим случай, когда инвариантные свойства физической системы как целого характеризуются группой Пуанкаре или, в пределе $c\to\infty$, группой Галилея. Соответственно этому алгебра Ли l будет задаваться перестановочными соотношениями (6.6), (6.7), (6.9) — (6.11). Числовые значения генераторов группы Ли l обозначим следующим образом:

$$\begin{gathered} p_k = \langle\pi|P_k\rangle, \qquad p_4 = 1/c\langle\pi|H\rangle, \\ m_k = \langle\pi|M_k\rangle, \qquad n_k = \langle\pi|N_k\rangle, \end{gathered} \tag{6.50}$$

или, в четырехмерной записи, в соответствии с (6.12),

$$p_\alpha = \langle\pi|P_\alpha\rangle, \tag{6.51}$$

$$m_{12}=m_3,\ m_{23}=m_1,\ m_{31}=m_2,\ m_{4k}=cn_k.$$

В общем случае введенные числовые значения будут иметь физический смысл средних от некоторых наблюдаемых. Чтобы найти алгебраические инварианты и детальнее уточнить смысл отдельных величин, применим (6.32) к случаю групповых преобразований, записанных в виде разложений (6.16), где физический смысл параметров ω^s, u^k и r^α установлен выше. При трехмерных вращениях, характеризуемых параметрами ω^s, величины $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ ведут себя как трехмерные векторы, а p_4 не меняется. При преобразовании с параметрами u^k величины p_α и $m_{\alpha\beta}$ ведут себя, соответственно, как четырехмерный вектор и антисимметричный тензор; в частности, p_α преобразуются по формулам (6.27) с заменой в них $\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{p}$ и t на $-p_4/c$. Для четырехмерного вектора p_α релятивистским инвариантом, не меняющимся при преобразованиях из собственной группы Лоренца, будет $p_\alpha p^\alpha$. Если это число меньше или равно нулю, то можно положить

$$p_\alpha p^\alpha = -m_0^2 c^2. \tag{6.51'}$$

Отсюда следует, что в некоторой системе отсчета средние значения p_α равны

$$\overset{0}{p}_k = 0, \qquad \overset{0}{p}_4 = m_0 c. \tag{6.52}$$

Совершая затем преобразование Лоренца, соответствующее движению системы как целого со скоростью $\boldsymbol{v}$, из формул типа (6.27), примененных к $\overset{0}{p}_\alpha$, получим

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p_4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.53}$$

Формулы (6.53) показывают, что как в классическом, так и в квантовом случае p_α имеют физический смысл составляющих 4-вектора средних энергии-импульса физической системы как целого, а инвариант m_0 можно интерпретировать как среднюю массу покоя всей системы.

Применяя далее преобразования пространственно-временного смещения с параметрами r^α, из (6.21) и (6.32) получим, что p_α и $m_{\alpha\beta}$ перейдут в

$$p_\alpha \to p_\alpha, \qquad m_{\alpha\beta} \to m_{\alpha\beta} + r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha. \tag{6.54}$$

Первая формула (6.54) показывает, что составляющие 4-вектора энергии-импульса системы как целого не меняются при пространственно-временны́х смещениях, так что масса покоя m_0 является одним из инвариантов алгебраических состояний.

Полагая $m_0 \neq 0$, найдем второй инвариант алгебраических состояний. Переходя к системе отсчета, в которой $p_k^0 = 0$, из второй формулы (6.54) получим

$$\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n} - m_0 \boldsymbol{r}. \tag{6.55}$$

Отсюда следует, что в данной системе отсчета вектор $\boldsymbol{n}$ с помощью соответствующего пространственного смещения можно обратить в нуль. Значение вектора $\boldsymbol{m}$ для этого случая мы обозначим через $\boldsymbol{s}$, т. е. в полученном алгебраическом состоянии

$$\boldsymbol{p}^0 = 0, \qquad \boldsymbol{n}^0 = 0, \qquad \boldsymbol{m}^0 = \boldsymbol{s}, \qquad p_4^0 = m_0 c. \tag{6.56}$$

Совершая затем пространственное смещение, характеризуемое вектором $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{n} = -m_0 \boldsymbol{r}. \tag{6.57}$$

Вектор $\boldsymbol{r}$, вводимый с помощью формулы (6.57), по определению будем называть вектором среднего положения центра масс системы как целого, а вектор $\boldsymbol{s}$, определяемый с помощью (6.56),— средним собственным моментом количества движения системы, или ее средним спином. Абсолютная величина s вектора $\boldsymbol{s}$ будет вторым инвариантом алгебраических состояний.

Применим собственное преобразование Лоренца к алгебраическому состоянию (6.56) и обозначим полученные при этом значения $m_{\alpha\beta}$ через $s_{\alpha\beta}$. Релятивистский тензор $s_{\alpha\beta}$ называется антисимметричным тензором среднего собственного момента количества движения системы, или среднего спина. Совершая затем преобразования пространственно-временно́го смещения с групповыми параметрами r^α, получим

$$m_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha \tag{6.58}$$

или, в компонентах $(s_{12}=s_3,\ s_{23}=s_1,\ s_{31}=s_2)$,

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p},\qquad n_k=s_{4k}/c-tp_k-m_0r_k. \tag{6.59}$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы при $\boldsymbol{p}=0$ составляющие s_{4k} обратились в нуль, является выполнение релятивистски инвариантных соотношений

$$p^\alpha s_{\alpha\beta}=0. \tag{6.60}$$

Приращения числовых значений с течением времени t, в соответствии с (6.31), определяются из

$$\frac{d\pi_\lambda}{dt}=\langle\pi\,|\,[H,\ X_\lambda]\rangle. \tag{6.61}$$

Отсюда имеем

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=0,\qquad \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}=0,\qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}=-\boldsymbol{p}. \tag{6.62}$$

Первые из этих соотношений выражают законы сохранения энергии, импульса и полного момента количества движения физической системы как целого. Чтобы дать физическое истолкование последнему соотношению, будем считать, что входящий в (6.59) вектор $\boldsymbol{r}$ характеризует положение центра масс системы для начального момента времени, тогда как для момента времени t радиус-вектор центра масс равен

$$r_k(t)=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m_0}\left(\frac{s_{4k}}{c}-n_k\right). \tag{6.63}$$

Отсюда с учетом (6.53), (6.59) и (6.62) следует

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}t, \tag{6.64}$$

т. е. центр масс системы движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$.

Формулы (6.58) и (6.59) могут быть рассмотрены также с несколько иной точки зрения. Если в момент времени $t=0$ числовые значения базисных элементов алгебры Ли l равны $\pi_\lambda=\langle\pi\,|\,e_\lambda\rangle$, то для времени t, согласно (6.32), они будут иметь вид

$$\pi_\lambda(t) = \langle \pi \,|\, e^{-t[H,}\, e_\lambda] \rangle = (\exp C_t)_\lambda^{\lambda_1} \pi_{\lambda_1}, \tag{6.65}$$

где $e^{-t[H,}\, e_\lambda] = e_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n [H, [H, \ldots [H, e_\lambda] \ldots]}{n!}$. В нашем случае $\pi_\lambda(t)$ являются функциями от постоянных величин m_0, $\boldsymbol{v}$, $s_{\alpha\beta}$ и от вектора $\boldsymbol{r}(t)$, зависимость которого от времени задается формулой (6.64). Согласно (6.65), от времени t не будут зависеть величины

$$\pi_\lambda = (\exp(-C_t))_\lambda^{\lambda_1} \pi_{\lambda_1}(t), \tag{6.66}$$

которые получаются в результате замены $\boldsymbol{r}(t)$ на $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}t$. Тогда величины p_α и $m_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как составляющие π_λ, где $\frac{d\pi_\lambda}{dt} = 0$, в связи с чем (6.58) перепишется в виде

$$m_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + r_\alpha(t)\, p_\beta - r_\beta(t)\, p_\alpha, \qquad \frac{dm_{\alpha\beta}}{dt} = 0, \quad r_4 = -ct. \tag{6.67}$$

Соответственно этому в (6.59) $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ будут постоянными векторами, а r_k будут составляющими вектора (t), характеризующего положение центра масс системы в зависимости от времени t.

В классической нестатистической теории числовые значения π_λ и инварианты алгебраических состояний алгебры Ли l, в соответствии с (6.37), будут полностью определять числовые значения и инварианты алгебраических состояний лиево-ассоциативной алгебры наблюдаемых G_A, характеризующей свойства физической системы как целого. В квантовой теории это уже не имеет места. В частности, инвариант алгебраических состояний m_0', определяемый из

$$\left\langle \pi \,\middle|\, \left(\frac{H^2}{c^2} - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2\right) \right\rangle = (m_0')^2 c^2, \tag{6.67'}$$

в общем случае может не совпадать с инвариантом, определяемым из формулы (6.51').

§ 4. Группа C_{15}, характеризующая инвариантные свойства нерелятивистских кулоновского и ньютоновского взаимодействий двух частиц

Как показано в § 7 гл. 2, как в классической, так и в квантовой механике от гамильтониана $H=\frac{p^2}{2m}-\frac{K_0}{r}$ с помощью неканонического перехода можно получить новый гамильтониан

$$K=\frac{p^2r}{2m}-H_0r. \tag{6.68}$$

Возьмем за образующие алгебры Ли составляющие r_s вектора $\boldsymbol{r}$ и новый гамильтониан K. В результате, как нетрудно проверить с помощью элементарных вычислений, получается алгебра Ли 15-го ранга. Соответствующая ей пятнадцатипараметрическая группа Ли C_{15} изоморфна так называемой группе конформных преобразований псевдоевклидова пространства с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, где $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-g_{44}=1$ и $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$.

Генераторы X_λ группы C_{15} с образующими K, r_s выберем следующим образом:

$$M_{12}=p_2r_1-p_1r_2,\ \ldots,\ M_{4s}=-p_sr,\qquad S=\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)r, \tag{6.69}$$

$$K_4=-\frac{1}{2}K=\left(\frac{H_0}{2}-\frac{p^2}{4m}\right)r,$$

$$L_4=-\frac{1}{2}L=-\left(\frac{H_0}{2}+\frac{p^2}{4m}\right)r, \tag{6.70}$$

$$K_s=-\frac{H_0}{2}r_s+\left(\frac{p^2}{4m}\cdot\frac{r_s}{r}\right)r-\frac{1}{2m}\left(p_s\cdot\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right)r, \tag{6.71}$$

$$L_s=\frac{H_0}{2}r_s+\left(\frac{p^2}{4m}\cdot\frac{r_s}{r}\right)r-\frac{1}{2m}\left(p_s\cdot\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right)r. \tag{6.72}$$

Эти выражения справедливы одновременно в классической и в квантовой механике, в связи с чем точкой обозначается йорданово произведение наблюдаемых. В классической механике йорданово произведение совпадает с обычным, поэтому выражения (6.69)—(6.72) несколько упрощаются; например, в этом случае $S=(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})$ и т. д. Из (6.69)—(6.72) следует, что как в классической, так и в квантовой теории для 15 генераторов $M_{\alpha\beta}$, K_α, L_β, S (α, $\beta=1, 2, 3, 4$) выполняются перестановочные соотношения:

$$[M_{\alpha_1\alpha_2}, M_{\beta_1\beta_2}] = g_{\alpha_1\beta_2}M_{\alpha_2\beta_1} + g_{\alpha_2\beta_1}M_{\alpha_1\beta_2} - g_{\alpha_1\beta_1}M_{\alpha_2\beta_2} - g_{\alpha_2\beta_2}M_{\alpha_1\beta_1}; \tag{6.73}$$

$$[M_{\alpha_1\alpha_2}, K_\beta] = g_{\alpha_2\beta}K_{\alpha_1} - g_{\alpha_1\beta}K_{\alpha_2}, \quad [K_\alpha, K_\beta] = -\frac{H_0}{2m}M_{\alpha\beta}; \tag{6.74}$$

$$[M_{\alpha_1\alpha_2}, L_\beta] = g_{\alpha_2\beta}L_{\alpha_1} - g_{\alpha_1\beta}L_{\alpha_2}, \quad [L_\alpha, L_\beta] = \frac{H_0}{2m}M_{\alpha\beta}, \qquad [S, M_{\alpha\beta}] = 0; \tag{6.75}$$

$$[K_\alpha, L_\beta] = -\frac{H_0}{2m}g_{\alpha\beta}S, \quad [S, K_\alpha] = L_\alpha, \qquad [S, L_\alpha] = -K_\alpha. \tag{6.76}$$

Физический смысл группы C_{15}, характеризующей инвариантные свойства кулоновского взаимодействия, зависит не только от перестановочных соотношений (6.74)—(6.76), но и от алгебраических соотношений, связывающих между собой генераторы группы C_{15}. Рассмотрим этот вопрос подробнее для случая классической механики.

Из (6.69)—(6.72) следует, что в классической механике генераторы X_λ группы C_{15} связаны между собой тождественными соотношениями:

$$K_\alpha K^\alpha = \frac{H_0}{2m}S^2, \qquad L_\alpha L^\alpha = -\frac{H_0}{2m}S^2, \tag{6.77}$$

$$K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha = \frac{H_0 S}{2m}M_{\alpha\beta}, \qquad K_\alpha L^\alpha = 0. \tag{6.78}$$

Обозначим символами $m_{\alpha\beta}$, k_α, l_β, s числовые значения генераторов $M_{\alpha\beta}$, K_α, L_α, S в алгебраическом состоянии π, а числовые значения наблюдаемых r_s, p_s будем обозначать теми же буквами, что и сами наблюдаемые. Тогда из (6.77)—(6.78) следует, что в классической механике

$$k_\alpha k^\alpha = -l_\alpha l^\alpha = \frac{H_0}{2m}s^2,$$
$$k_\alpha l_\beta - k_\beta l_\alpha = \frac{H_0 s}{2m} m_{\alpha\beta}, \qquad k_\alpha l^\alpha = 0. \tag{6.79}$$

Из (6.79) имеем $(k_4 \pm l_4)^2 = (\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{l})^2$, т. е.

$$k = -2k_4 = \sqrt{(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{k})^2} - \sqrt{(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k})^2}. \tag{6.80}$$

Согласно (1.99), $d\tau = dt/r$, поэтому изменение числовых значений $\pi_\lambda = \langle\pi|X_\lambda\rangle$ с течением времени t в нашем случае определяется по формуле

$$\frac{d\pi_\lambda}{d\tau} = r\frac{d\pi_\lambda}{dt} = r\langle\pi|[K, X_\lambda]\rangle. \tag{6.81}$$

Отсюда с учетом (6.68)—(6.76) следует, что интегралами движения, не меняющимися с течением времени, будут $k = \langle\pi|K\rangle$, где для кулоновского и ньютоновского взаимодействий соответственно

$$k = -e_1 e_2, \qquad k = -\gamma m_1 m_2 \qquad (H_0 = p^2/2m - k_0/r), \tag{6.82}$$

а также вектор момента количества движения $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ и вектор

$$\boldsymbol{l} = \left(\frac{H_0}{2} + \frac{p^2}{4m}\right)\boldsymbol{r} - \frac{1}{2m}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{p} \equiv \frac{1}{2}\left(-\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}}{m} - \frac{k\boldsymbol{r}}{r}\right), \tag{6.83}$$

который в теории кулоновского взаимодействия известен под названием вектора Ленца или вектора Рунге — Ленца. Положим далее $\varepsilon = 1$, если $H_0 > 0$, и $\varepsilon = -1$, если $H_0 < 0$, и учтем, что согласно (6.70) знак $k_4 - l_4 = \sqrt{(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k})^2}$ совпадает со знаком у H_0, а у $k_4 + l_4$ совпадает со знаком минус, а также примем во внимание, что по (6.71) и (6.72) $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{l}-H_0\boldsymbol{r}$. Тогда из (6.80) имеем

$$k/\varepsilon H_0 = \sqrt{(\boldsymbol{r}-2\boldsymbol{l}/H_0)^2} - \varepsilon\sqrt{\boldsymbol{r}^2}. \tag{6.84}$$

Но (6.84) есть уравнение кривой второго порядка, которое при $\varepsilon=-1$ является уравнением эллипса, а при $\varepsilon=1$ — уравнением гиперболы. Если же $H_0=0$, то за генераторы C_{15} следует принять K_α, r_s, r, $M_{\alpha\beta}$, S, и из (6.73)—(6.76) получим (при $H_0=0$)

$$2\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{m}^2/m - kr, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{l}, \tag{6.85}$$

что совпадает с уравнением параболы. Таким образом, во всех случаях уравнение для траектории, описываемой вектором $\boldsymbol{r}(t)$, выводится из алгебраических тождеств, связывающих между собой генераторы группы C_{15}.

Возвращаясь к случаю с $H_0\neq 0$, отметим, что вектор $2\boldsymbol{l}/H_0$, согласно (6.84), характеризует расстояние между двумя фокусами кривой второго порядка, а $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}-2\boldsymbol{l}/H_0$ имеют смысл векторов смещений от двух фокусов. Соответственно вектор

$$\rho = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{l}/H_0 = -\boldsymbol{k}/H_0 \tag{6.86}$$

характеризует расстояние от центра кривой второго порядка до точек кривой. Из (6.86) и (6.81) имеем

$$\frac{d\rho_s}{d\tau} = \left\langle \pi \left| \left[-2K_4 - \frac{K_s}{H_0} \right] \right\rangle = -\frac{1}{m} m_{4s}, \tag{6.87}\right.$$

$$\frac{d^2\rho_s}{d\tau^2} = \frac{2}{m} \langle \pi | [K_4, M_{4s}] \rangle = -\frac{2}{m} \langle \pi | K_s \rangle = \frac{2H_0}{m} \rho_s.$$

Отсюда следует, что при замене времени t на новый параметр τ, для которого $d\tau = dt/r$, нерелятивистское кулоновское движение переходит в движение под действием гармонической силы, направленной к центру кривой второго порядка.

В соответствии с (6.32) числовые значения π_λ зависят от некоторых фиксированных значений π_λ^0 и от групповых параметров ξ^λ. Покажем, что в нашем случае фиксированное стандартное состояние π_λ^0 можно выбирать вполне определенным способом, после чего произвольное состояние системы из двух частиц, характеризуемое заданием числовых значений векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$, будет однозначно определяться по параметрам группы, переводящей π_λ^0 в π_λ.

Считая постоянную H_0 отличной от нуля, положим

$$Q_\alpha = \frac{L_\alpha - K_\alpha}{H_0}, \tag{6.88}$$

так что $\langle\pi | Q_s\rangle = r_s$, $\langle\pi | Q_4\rangle = -r$. Тогда из (6.74) — (6.76) следует

$$[\xi^\beta Q_\beta, M_{\alpha_1\alpha_2}] = \xi_{\alpha_1} Q_{\alpha_2} - \xi_{\alpha_2} Q_{\alpha_1}, \tag{6.89}$$
$$[\xi^\beta Q_\beta, Q_\alpha] = 0.$$

Полагая $\xi^s = p^s$, $\xi^4 = 0$, отсюда имеем

$$\langle\pi | \exp(p^s [Q_s, M_{\alpha_1\alpha_2}])\rangle = m_{\alpha_1\alpha_2} + p^s \langle\pi | [Q_s, M_{\alpha_1\alpha_2}]\rangle = 0. \tag{6.90}$$

Согласно (6.69) — (6.72), из $m_{4s} = 0$ следует

$$S = 0, \qquad l_\alpha = -k_\alpha = H_0 r_\alpha/2,$$

поэтому в результате преобразования

$$\pi_\lambda = \langle\pi | X_\lambda\rangle \to \langle\pi | \exp(p^s [Q_s, X_\lambda])\rangle \tag{6.91}$$

во всех выражениях для числовых значений π_λ следует положить $\boldsymbol{p} = 0$, т. е. новые π_λ будут зависеть лишь от трех независимых параметров, а именно от компонент вектора $\boldsymbol{r}$.

Совершая далее преобразование

$$\pi_\lambda = \langle\pi | X_\lambda\rangle \to \langle\pi | \exp(-\ln r [S, X_\lambda])\rangle \tag{6.92}$$

и учитывая, что $[S, Q_\alpha] = Q_\alpha$, а

$$\exp(-\ln r [S, Q_\alpha]) = e^{-\ln r} Q_\alpha = \frac{1}{r} Q_\alpha, \tag{6.93}$$

получим, что в результате этого преобразования длина вектора $\boldsymbol{r}$ станет равной единице. Наконец, остающиеся два параметра соответствуют произволу в углах поворота единичного вектора $\boldsymbol{r}/r$.

Отсюда следует, что за фиксированное стандартное состояние $\overset{0}{\pi}_\lambda$ можно принять такое алгебраическое состояние, для которого в числовых значениях $\pi_\lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ вектор $\boldsymbol{p}$ положен равным нулю, длина вектора $\boldsymbol{r}$ равна единице, а сам вектор $\boldsymbol{r}$ направлен вполне определенным образом, например, совпадает с направлением оси OX. Физический смысл рассматриваемых преобразований заключается в том, что эллиптическое ($H_0<0$) и гиперболическое ($H_0>0$) движения преобразуются в движения с той же энергией по участку прямой OX, лежащему, соответственно, внутри или вне отрезка $(0, 1)$, а стандартному состоянию соответствует случай, когда движущаяся точка достигает конца отрезка и меняет направление движения на противоположное, так что ее скорость в этот момент времени становится равной нулю.

Стандартное состояние можно было бы определять и иначе; например, с помощью соответствующего преобразования от рассмотренного выше стандартного состояния можно перейти к такому второму фиксированному стандартному состоянию, которое соответствует движению по окружности для $H_0<0$ и движению по прямой для $H_0>0$.

Важной особенностью введенной нами группы C_{15} является то, что она не меняет энергию H_0, но меняет постоянную взаимодействия, согласно (6.32) совпадающую с числовыми значениями $k=\langle\pi|K\rangle$. Например, если $H_0>0$, то, переходя от стандартного состояния $\overset{0}{\pi}_\lambda$ к состоянию, для которого параметры p_s, входящие в преобразование (6.91), удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{p}^2 = 2mH_0,$$

мы получим $k=0$, что соответствует обращению постоянной взаимодействия в нуль и преобразованию гиперболического движения в равномерное движение по прямой.

§ 5. Алгебраический метод нахождения спектра атома водорода

Используем инвариантные свойства нерелятивистского кулоновского взаимодействия относительно группы C_{15} для чисто алгебраического изучения спектра и стационарных состояний нерелятивистского атома водорода. Поскольку нам потребуется лишь подалгебра третьего ранга алгебры Ли, определяемой формулами (6.69) — (6.72), то мы заново выведем все необходимые соотношения, чтобы читатель, интересующийся лишь квантовомеханическими применениями, мог познакомиться с излагаемыми результатами без детального изучения всех свойств группы C_{15}, рассмотренных в предыдущем параграфе для случая классической теории.

Нахождение стационарных состояний атома водорода в нерелятивистском случае сводится к нахождению собственных значений $E_\varkappa$ и собственных функций $\psi_\varkappa$ уравнения

$$\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}\right)\psi = E\psi, \qquad E<0. \tag{6.94}$$

Здесь $m=m_e m_p/(m_e+m_p)$ — приведенная масса, m_e и m_p — массы электрона и протона, e — заряд электрона, индексом $\varkappa$ нумеруются собственные значения и собственные функции уравнения (6.94). Наблюдаемые являются операторами в гильбертовом пространстве, причем если ψ — вектор гильбертова пространства, то квадрат его нормы будем обозначать символом (ψ, ψ). Скобка Пуассона между наблюдаемыми A и B обозначается символом

$$[A, B] = \frac{i}{\hbar}(AB-BA). \tag{6.95}$$

В частности, перестановочные соотношения между функциями от $r=\sqrt{\sum_{s=1}^{3}(r^s)^2}$ и $p^2=\sum_{s=1}^{3}(p_s)^2$ определяются из

$$[p_{s_1}, r^{s_2}] = \delta_{s_1}^{s_2}, \qquad [r^{s_1}, r^{s_2}] = 0, \qquad [p_{s_1}, p_{s_2}] = 0. \tag{6.96}$$

От динамических переменных r^s и p_s перейдем к новым независимым переменным $\rho^s = \sqrt{-2mE}r^s$, $\pi_s = (\sqrt{-2mE})^{-1} p_s$.

Тогда

$$[\pi_{s_1}, \rho^{s_2}] = \delta^{s_2}_{s_1}, \qquad [\rho^{s_1}, \rho^{s_2}] = 0, \qquad [\pi_{s_1}, \pi_{s_2}] = 0. \tag{6.97}$$

Умножая обе части (6.94) слева на $mr/\sqrt{-2mE}$ и вводя обозначения $\lambda = me^2/\sqrt{-2mE}$, из (6.94) имеем

$$\frac{1}{2}(\rho\pi^2 + \rho)\psi = \frac{me^2}{\sqrt{-2mE}}\psi = \lambda\psi. \tag{6.98}$$

Уравнение (6.98) эквивалентно (6.94), так что если мы найдем собственные значения $\lambda_\varkappa$ и собственные функции уравнения (6.98), то ими будут определяться собственные функции уравнения (6.94).

Введем операторы

$$Y_3 = \frac{1}{2}(\rho\pi^2 + \rho), \qquad Y_2 = \frac{1}{2}\rho\left\{\pi_s\left(\frac{\rho^s}{\rho}\right) + \left(\frac{\rho^s}{\rho}\right)\pi_s\right\},$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}(\rho\pi^2 - \rho), \tag{6.99}$$

где по индексам s, встречающимся вверху и внизу, подразумевается суммирование от 1 до 3. Тогда из (6.97) следует, что эти операторы связаны между собой перестановочными соотношениями

$$[Y_3, Y_1] = -Y_2, \qquad [Y_3, Y_2] = Y_1, \qquad [Y_1, Y_2] = Y_3. \tag{6.100}$$

Заметим, что соотношения (6.100) непосредственно следуют из выведенных в предыдущем параграфе перестановочных соотношений (6.76) для генераторов K_4, L_4 и S группы C_{15}.

Из формул (6.100), справедливых как для классических, так и для квантовомеханических скобок Пуассона, вытекает, что Y_1, Y_2, Y_3 являются генераторами алгебры Ли L для группы вращений трехмерного псевдоевклидова пространства $O_{2,1}$.

Если положить

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2,\ M_1 = r^2 p_3 - r^3 p_2 = \rho^2 \pi_3 - \rho^3 \pi_2,\ \ldots, \tag{6.101}$$

где многоточием обозначены выражения, получаемые в результате циклической перестановки индексов 1, 2, 3, то из (6.99) с помощью простых вычислений получим

$$Y_3^2 - Y_1^2 - Y_2^2 = M^2. \tag{6.102}$$

Исходя из первоначального гильбертова пространства, в котором скалярное произведение векторов φ и ψ записывается в виде (φ, ψ), введем новое гильбертово пространство, обладающее тем свойством, что все векторы первого гильбертова пространства являются векторами второго пространства, а скалярное произведение векторов во втором пространстве определяется как

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \left(\varphi, \frac{1}{\rho} \psi \right). \tag{6.103}$$

Нетрудно видеть, что при новом определении скалярного произведения выполняются все свойства, требуемые от гильбертова пространства. В частности, квадрат новой нормы $\langle \psi, \psi \rangle \geqslant 0$, где равенство имеет место лишь в случае, когда $\psi = 0$.

Из (6.103) с учетом (6.99) следует, что при новом определении нормы операторы Y_1, Y_2, Y_3 будут эрмитовыми. Например,

$$\langle \varphi, Y_3 \psi \rangle = \left(\varphi, \frac{1}{\rho} Y_3 \psi \right) = \left(\varphi, \frac{1}{2} (\pi^2 + 1) \psi \right) = \\ = \left(\frac{1}{2} (\pi^2 + 1) \varphi, \rho \frac{1}{\rho} \psi \right) = \left(\frac{1}{2} (\rho \pi^2 + \rho) \varphi, \frac{1}{\rho} \psi \right) = \\ = \langle Y_3 \varphi, \psi \rangle. \tag{6.104}$$

Полагая $\varphi = \psi$, из (6.104) получим также, что

$$\langle \psi, Y_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} (\pi \psi, \pi \psi) + \frac{1}{2} (\psi, \psi) > 0. \tag{6.105}$$

Применим выведенные соотношения к задаче о нахождении векторов гильбертова пространства $\psi_\varkappa$ и собственных значений $\lambda_\varkappa$, удовлетворяющих уравнению (6.98), которое можно переписать в виде

$$Y_3\psi_\varkappa = \lambda_\varkappa\psi_\varkappa. \qquad (6.106)$$

Из (6.100) имеем

$$[Y_3, Y_1 \pm iY_2] = \pm i(Y_1 \pm iY_2), \qquad (6.107)$$

что с учетом (6.95) дает

$$Y_3(Y_1 + iY_2) - (Y_1 + iY_2)Y_3 = \hbar(Y_1 + iY_2), \qquad (6.108)$$

$$Y_3(Y_1 - iY_2) - (Y_1 - iY_2)Y_3 = -\hbar(Y_1 - iY_2). \qquad (6.109)$$

Действуя на обе части (6.106) слева операторами $Y_1 \pm iY_2$, из (6.108) и (6.109) получим

$$Y_3(Y_1 + iY_2)\psi_\varkappa = (\lambda_\varkappa + \hbar)(Y_1 + iY_2)\psi_\varkappa, \qquad (6.110)$$

$$Y_3(Y_1 - iY_2)\psi_\varkappa = (\lambda_\varkappa - \hbar)(Y_1 - iY_2)\psi_\varkappa. \qquad (6.111)$$

Из (6.111) следует, что если $\psi_\varkappa$ — собственный вектор оператора Y_3, принадлежащий собственному значению $\lambda_\varkappa$, то $(Y_1 - iY_2)\psi_\varkappa$ будет или собственным вектором того же оператора, принадлежащим собственному значению $\lambda_\varkappa - \hbar$, или нулем. Но по (6.105), если $\psi_\varkappa \neq 0$, то $\lambda_\varkappa > 0$, поэтому, действуя несколько раз оператором понижения $(Y_1 - iY_2)$ на $\psi_\varkappa$, после конечного числа шагов мы должны будем получить нуль. Если ψ_0 — последний из ненулевых полученных таким путем собственных векторов оператора Y_3, принадлежащий наименьшему собственному значению λ_0, то

$$Y_3\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \qquad (Y_1 - iY_2)\psi_0 = 0. \qquad (6.112)$$

Поскольку квадрат момента количества движения M^2 коммутирует с операторами Y_1, Y_2, Y_3, а собственные значения, как следует из групповой теории орбитального момента количества движения, могут равняться лишь $\hbar^2 l(l+1)$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$, то наряду с (6.112) можно положить

$$M^2\psi_0 = \hbar^2 l(l+1)\psi_0, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.113)$$

Умножая уравнение $(Y_1 - iY_2)\psi_0 = 0$ слева на $Y_1 + iY_2$ и учитывая (6.100), (6.102), (6.112) и (6.113), получим

$$(Y_1 + iY_2)(Y_1 - iY_2)\psi_0 = \{Y_1^2 + Y_2^2 - i(Y_1Y_2 - Y_2Y_1)\}\psi_0 =$$
$$= (Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 + Y_3^2 - \hbar Y_3)\psi_0 =$$
$$= \{\lambda_0^2 - \hbar\lambda_0 - \hbar^2 l(l+1)\}\psi_0 = 0. \quad (6.114)$$

Поскольку $\psi_0 \neq 0$, то выражение в последних фигурных скобках должно равняться нулю, откуда следует

$$\lambda_0 = \hbar(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.115)$$

(Второй корень в квадратном уравнении для λ_0, равный $-\hbar l$, следует отбросить из-за условия $\lambda_0 > 0$.) Действуя на ψ_0 оператором повышения $(Y_1 + iY_2)$, мы последовательно получим собственные векторы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\varkappa, \ldots$, принадлежащие собственным значениям

$$\lambda_1 = \hbar(l+2), \ \ldots, \qquad \lambda_\varkappa = \hbar(l + \varkappa + 1) = \hbar n,$$
$$\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.116)$$

Отсюда, с учетом (6.98), получим значения уровней энергии для атома водорода:

$$E_\varkappa = -\frac{me^4}{2\lambda_\varkappa^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2(l + \varkappa + 1)^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2},$$
$$\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \quad (6.117)$$

Значениями $\psi_\varkappa$ определяются собственные функции атома водорода в произвольном представлении. Так, в координатном представлении, где $\pi_s = (\hbar/i)(\partial/\partial\rho^s)$, $\psi_\varkappa$ являются функциями от ρ^s, т. е. $\psi_\varkappa = \psi_\varkappa(\rho^s) = \psi_\varkappa(\sqrt{-2mE_\varkappa}r^s)$ являются собственными функциями оператора энергии, выраженными в виде функций от r^s.

Из изложенного видно, что решенная нами задача о нахождении $\lambda_\varkappa$ и $\psi_\varkappa$ очень похожа на задачу о нахождении собственных функций и собственных значений оператора M_3, преобразующихся по неприводимому представлению группы O_3. Разница заключается в том, что когда O_3 заменяется на $O_{2,1}$, конечномерные унитарные представления заменяются на бесконечномерные.

§ 6. Спинорная параметризация в групповой теории нерелятивистского кулоновского и ньютоновского взаимодействий

Вернемся к общим алгебраическим проблемам, возникающим в теории кулоновского и ньютоновского взаимодействий.

Группа C_{15} с генераторами (6.69)—(6.72), введенная в § 4, характеризуется, во-первых, своими структурными постоянными[1]) и, во-вторых, тождественными соотношениями между генераторами, которые в классической механике имеют вид (6.77)—(6.78). Эти соотношения, как и соотношения между соответствующими числовыми значениями, должны быть инвариантны относительно преобразований из присоединенного представления группы, характеризуемого матричными элементами (6.35). Обсуждая еще раз результаты § 4, можно заметить, что имеется возможность обратить постановку проблемы, а именно, брать за исходные величины генераторы группы C_{15}, связанные тождествами (6.77)—(6.78), после чего $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ будут определяться по (6.69)—(6.72), а динамика движения будет заключаться в (6.81). При этом закон нерелятивистского кулоновского или ньютоновского взаимодействий становится следствием не только перестановочных соотношений, но и алгебраических тождеств (6.77)—(6.78) между генераторами группы C_{15}, в связи с чем изучение подробного рода алгебраических тождеств становится ключом к изучению

---

[1]) Алгебра Ли с такими перестановочными соотношениями, согласно математической терминологии, является одной из действительных форм простой алгебры Ли A_3. Соответствующая группа Ли изморфна 15-параметрической группе конформных преобразований четырехмерного пространства.

алгебраических свойств элементарных взаимодействий. Переходя к рассмотрению алгебраических тождеств между генераторами X_λ, инвариантных относительно присоединенного представления, мы будем для простоты в основном ограничиваться неквантовым случаем.

Генераторы X_λ связаны соотношениями

$$[X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]_X = c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3} X_{\lambda_3}, \tag{6.118}$$

определяющими абстрактную алгебру Ли. Пусть Y_λ задают какое-либо точное представление Y той же самой алгебры Ли, так что

$$[Y_{\lambda_1}, Y_{\lambda_2}]_Y = Y_{\lambda_1} Y_{\lambda_2} - Y_{\lambda_2} Y_{\lambda_1} = c_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3} Y_{\lambda_3}. \tag{6.119}$$

Будем считать, что X_λ являются генераторами полупростой алгебры Ли (группа C_{15} проста, так что для нее это условие заведомо выполняется), т. е. для определяемых по (6.41) элементов $g_{\lambda_1\lambda_2}$ существуют элементы обратной матрицы $g^{\lambda_1\lambda_2}$, определяемые по (6.46). Скобки Пуассона (6.118) и (6.119) являются независимыми в том смысле, что если взять прямое произведение $G_X \times G_Y$ ассоциативной алгебры G_X с образующими X_λ и ассоциативной алгебры G_Y с образующими Y_λ (так что $X_{\lambda_1} Y_{\lambda_2} = Y_{\lambda_2} X_{\lambda_1} \in G_X \times G_Y$), то

$$[Y_\lambda X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]_X = Y_\lambda [X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]_X, \tag{6.120}$$

$$[X_\lambda Y_{\lambda_1}, Y_{\lambda_2}]_Y = X_\lambda [Y_{\lambda_1}, Y_{\lambda_2}]_Y. \tag{6.121}$$

Рассмотрим величину

$$\Phi = g^{\lambda_1\lambda_2} X_{\lambda_1} Y_{\lambda_2} = X_{\lambda_1} Y^{\lambda_1},$$

являющуюся элементом из $G_X \times G_Y$. Для любых элементов $F \in G_X \times G_Y$ положим

$$[X_\lambda, F]_X = \hat{X}_\lambda F, \qquad [Y_\lambda, F]_Y = \hat{Y}_\lambda F. \tag{6.122}$$

При преобразованиях из присоединенной группы X_{λ_1} и $Y^{\lambda_1} = g^{\lambda_1\lambda_2} Y_{\lambda_2}$ переходят в

$$\tilde{X}_{\lambda_1} = (\exp \xi^\lambda \hat{X}_\lambda) X_{\lambda_1} = u_{\lambda_1}^{\lambda_1'}(\xi) X_{\lambda_1'}, \tag{6.123}$$

$$\widetilde{Y}^{\lambda_1}=(\exp \xi^{\lambda}\hat{Y}_{\lambda})\, Y^{\lambda_1}=\{\exp \xi^{\lambda} Y_{\lambda}\}\, Y^{\lambda_1}\{\exp(-\xi^{\lambda} Y_{\lambda})\}, \quad (6.124)$$

где равенство в правой части (6.124) является следствием (5.22). Тогда из $X_{\lambda_1}Y^{\lambda_1}=\widetilde{X}_{\lambda_1}\widetilde{Y}^{\lambda_1}$ и из

$$(\exp \xi^{\lambda}\hat{X}_{\lambda})\,\Phi=\widetilde{X}_{\lambda_1}Y^{\lambda_1}=X_{\lambda_1'}u_{\lambda_1}^{\lambda_1'}Y^{\lambda_1} \qquad (6.125)$$

с учетом (6.124) следует

$$\widetilde{\Phi}=\widetilde{X}_{\lambda_1}Y^{\lambda_1}=\exp(-\xi^{\lambda}Y_{\lambda})\,\Phi\exp(\xi^{\lambda}Y_{\lambda}). \qquad (6.126)$$

Формула (6.126) может быть использована для нахождения и изучения инвариантных алгебраических связей-соотношений, накладываемых на генераторы X_{λ}, т. е. таких алгебраических соотношений, которые не меняются при замене X_{λ} на $\widetilde{X}_{\lambda}$. В самом деле, поскольку Y_{λ} являются линейно независимыми матрицами некоторого порядка, то Φ является матрицей того же порядка с элементами из алгебры G_X, а преобразование (6.126) получается в результате умножения элемента Φ справа на матрицу $\exp \xi^{\lambda}Y_{\lambda}$, а слева — на обратную к ней матрицу. Поэтому, накладывая на Φ условия, инвариантные относительно такого рода преобразований, мы тем самым накладываем инвариантные алгебраические связи-соотношения на генераторы X_{λ}.

С помощью результатов § 5 гл. 5 введем теперь матрицы Y_{λ}, осуществляющие простейшее точное неприводимое представление группы C_{15}. В исходных перестановочных соотношениях (6.73)—(6.76) положим $H_0=\varepsilon p_0^2/2m$, где $\varepsilon=1$, если $H_0>0$, и $\varepsilon=-1$, если $H_0<0$. Из этих соотношений с учетом (6.40) и (6.46) находим, что если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $g_{\lambda_1\lambda_2}=0$, $g^{\lambda_1\lambda_2}=0$, если же $\lambda_1=\lambda_2$, то $g_{\lambda_1\lambda_2}$ и $g^{\lambda_1\lambda_2}$ с точностью до несущественного общего множителя равны $+1$ или -1. После этого генераторы X_{λ}, задаваемые с помощью (6.69)—(6.72), соответствующие им матричные генераторы Y_{λ}, а также $g_{\lambda\lambda}$ и $g^{\lambda\lambda}$ определяются с помощью следующей сводки формул.

λ	X_λ	Y_λ	$g_{\lambda\lambda}$	$g^{\lambda\lambda}$	
1, 2, 3; $\varepsilon = \pm 1$	$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_S = M_S$	$\frac{1}{2} RR_S$	-1	-1	(6.127)
4, 5, 6; $\varepsilon = \pm 1$	$M_{4S} = - p_S r$	$\frac{1}{2} R_4 R_S$	1	1	(6.128)
7, 8, 9; $\varepsilon = 1$	$\frac{2m}{p_0} K_S = - \frac{1}{p_0} \left[p_S \cdot \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) \right] r + \left(\frac{\left(p^2 - p_0^2 \right)}{2p_0} \cdot \frac{r_S}{r} \right) r$	$\frac{1}{2} iJR_S$	-1	-1	(6.129)
10; $\varepsilon = 1$	$\frac{2m}{p_0} K_4 = \frac{p_0^2 - p^2}{2p_0} r$	$\frac{1}{2} iJR_4 = \frac{1}{2} iR$	1	1	(6.130)
7, 8, 9; $\varepsilon = -1$	$\frac{2m}{p_0} L_S = - \frac{1}{p_0} \left[p_S \cdot \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) \right] r + \left(\frac{\left(p^2 - p_0^2 \right)}{2p_0} \cdot \frac{r_S}{r} \right) r$	$\frac{1}{2} iJR_S$	-1	-1	(6.131)
10; $\varepsilon = -1$	$\frac{2m}{p_0} L_4 = \frac{p_0^2 - p^2}{2p_0} r$	$\frac{1}{2} iJR_4$	1	1	(6.132)
11, 12, 13; $\varepsilon = 1$	$\frac{2m}{p_0} L_S = - \frac{1}{p_0} \left[p_S \cdot \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) \right] r + \left(\frac{\left(p^2 + p_0^2 \right)}{2p_0} \cdot \frac{r_S}{r} \right) r$	$\frac{1}{2} R_S$	1	1	(6.133)
14; $\varepsilon = 1$	$\frac{2m}{p_0} L_4 = - \frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} r$	$\frac{1}{2} R_4$	-1	-1	(6.134)
11, 12, 13; $\varepsilon = -1$	$\frac{2m}{p_0} K_S = - \frac{1}{p_0} \left[p_S \cdot \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) \right] r + \left(\frac{\left(p^2 + p_0^2 \right)}{2p_0} \cdot \frac{r_S}{r} \right) r$	$\frac{1}{2} R_S$	1	1	(6.135)
14; $\varepsilon = -1$	$\frac{2m}{p_0} K_4 = - \frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} r$	$\frac{1}{2} R_4$	-1	-1	(6.136)
15; $\varepsilon = \pm 1$	$S = \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) r$	$- \frac{1}{2} iJ$	1	1	(6.137)

Тот факт, что выписанные выражения для Y_λ действительно определяют представление алгебры Ли для C_{15}, проверяется путем непосредственных вычислений с учетом рассмотренных в § 5 гл. 5 свойств действительного представления алгебры ${}^3A_5$. При этом для всех Y_λ следы равны нулю, и выполняются условия, вытекающие из (5.131):

$$Y_\lambda^* R_4 + R_4 Y_\lambda = 0, \tag{6.138}$$

или, если обозначить $T_\xi = \exp \xi^\lambda Y_\lambda$,— эквивалентное условие:

$$T_\xi^* R_4 = R_4 T_\xi^{-1}. \tag{6.139}$$

Выписанная выше сводка формул справедлива как для классических, так и для квантовомеханических генераторов X_λ. При дальнейшем изучении алгебраических соотношений для простоты будем рассматривать лишь классический случай. В соответствии с результатами § 5 гл. 5 введем обозначения

$$Q = r^s R + r R_4 = r^\alpha R_\alpha, \qquad P = p^s R_s. \tag{6.140}$$

Из формул (6.127)—(6.137), совершая алгебраические преобразования, с помощью формул (6.140) и (5.105)—(5.107) получим, что при $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2X_\lambda Y^\lambda = \\
&= \frac{1}{2}(PQ - QP) + \frac{p_0}{2}(1 + iJ)Q + \frac{P^2}{2p_0}(1 - iJ)Q - \\
&\qquad - \frac{(PQ + QP)}{2p_0}(1 - iJ)P - \frac{1}{2}(PQ + QP)iJ = \\
&= \frac{1}{2}P(1+iJ)Q - \frac{1}{2}(1+iJ)QP + \frac{p_0}{2}(1 + iJ)Q - \frac{P}{2p_0}(1+iJ)QP = \\
&= \exp\left[(1 - iJ)\frac{P}{2p_0}\right]\frac{p_0}{2}(1+iJ)Q\exp\left[-(1-iJ)\frac{P}{2p_0}\right];
\end{aligned} \tag{6.141}$$

здесь мы учли, что из

$$\left[\frac{1}{2}(1-iJ)\right]^2 = \frac{1}{2}(1-iJ), \qquad (1+iJ)(1-iJ) = 0, \tag{6.142}$$

следует

$$\exp\left[\pm(1-iJ)\frac{P}{2p_0}\right]=1\pm\frac{1}{2}(1-iJ)\frac{P}{2p_0}. \quad (6.143)$$

При $\varepsilon=-1$ получаем в точности то же самое выражение. Таким образом, в обоих случаях

$$\Phi=T^{-1}\Phi_0T, \qquad \Phi_0=\frac{p_0}{2}(1+iJ)Q, \quad (6.144)$$

где преобразование T соответствует переходу от общего алгебраического состояния к рассмотренному в § 4 стандартному алгебраическому состоянию.

С помощью (6.144) покажем, что для случая кулоновского и ньютоновского взаимодействий алгебраические соотношения между генераторами X_λ приводят к следующим алгебраическим тождествам, инвариантным относительно преобразований из присоединенной группы:

$$\Phi^2=0, \quad (6.145)$$

$$\Phi Y_\lambda\Phi=X_\lambda\Phi. \quad (6.146)$$

Соотношение (6.145) является следствием (6.144) при учете того, что $(1+iJ)Q(1+iJ)Q=(1+iJ)(1-iJ)Q^2=0$, а его инвариантность относительно преобразований из присоединенной группы вытекает из (6.125).

Покажем, что соотношения (6.146) не меняются при замене в (6.123) X_λ на $\tilde{X}_\lambda=u_\lambda^{\lambda_1}X_{\lambda_1}$. Умножая обе части (6.146) на $u_{\lambda_1}^{\lambda}$, суммируя по λ, а затем умножая обе части слева на $\exp(-\xi^\lambda Y_\lambda)$ и справа на $\exp(\xi^\lambda Y_\lambda)$, с учетом (6.123), (6.124), (6.126) получим

$$\tilde{\Phi}Y_\lambda\tilde{\Phi}=\tilde{X}_\lambda\tilde{\Phi}, \quad (6.147)$$

что доказывает инвариантность (6.146). Отсюда следует, что для доказательства справедливости (6.146) достаточно ограничиться частным случаем, когда $\Phi=\Phi_0$, $X_\lambda=X_\lambda^0$, так как общий случай будет получаться отсюда с помощью преобразований из присоединенной группы. Если $\boldsymbol{p}=0$, т. е. если $\Phi=\Phi_0$, то из (6.127)—(6.137) видно, что отличными от нуля будут лишь генераторы X^0_λ, совпадающие с $\frac{2m}{p_0}K_\alpha = -\frac{p_0}{2}r_\alpha, \frac{2m}{p_0}L_\alpha = \frac{p_0}{2}r_\alpha$. Учитывая, что

$$QR_\alpha = r^\beta R_\beta R_\alpha = r_\alpha + \frac{1}{2}r^\beta(R_\beta R_\alpha - R_\alpha R_\beta),$$

а также в силу того, что $Q^2 = 0$,

$$QR_\alpha Q = r_\alpha Q + \frac{1}{2}QR_\alpha Q,$$

т. е.

$$QR_\alpha Q = 2r_\alpha Q. \tag{6.148}$$

Из (6.144) получим

$$\Phi_0 Y_\lambda \Phi_0 = X^0_\lambda \Phi_0, \tag{6.149}$$

откуда, вследствие инвариантности формулы (6.146), формула (6.149) будет справедлива для общего случая.

Извлечем следствия из полученных результатов. Из (6.127)—(6.137) следует, что $\mathrm{Sp}\,(Y^{\lambda_1}Y_{\lambda_2}) = \delta^{\lambda_1}_{\lambda_2}$, поэтому

$$\mathrm{Sp}\,(\Phi Y_\lambda) = X_\lambda. \tag{6.150}$$

Далее, 15 матриц Y_λ и единичная матрица E образуют полную систему линейно независимых матриц четвертого порядка над полем комплексных чисел, поэтому если M — произвольная комплексная матрица четвертого порядка или, более общо, матрица с элементами из алгебры G_x, то с учетом (6.145), (6.146) и (6.150) имеем

$$\Phi И \Phi = \mathrm{Sp}\,(И\Phi)\,\Phi, \tag{6.151}$$

или, в компонентах,

$$\Phi^\alpha_\beta И^\beta_\gamma \Phi^\gamma_\delta = (\Phi^\gamma_\beta И^\beta_\gamma)\,\Phi^\alpha_\delta. \tag{6.152}$$

Полагая здесь $И^\beta_\gamma = \delta^\beta_{\beta_1}\delta^{\gamma_1}_\gamma$, получим, что при всех $\alpha, \beta, \beta_1, \gamma_1$

$$\Phi^\alpha_{\beta_1}\Phi^{\gamma_1}_\delta = \Phi^{\gamma_1}_{\beta_1}\Phi^\alpha_\delta, \tag{6.153}$$

что возможно, лишь если

$$\Phi^{\alpha}_{\beta} = \psi^{\alpha}\varphi_{\beta}. \tag{6.154}$$

Отсюда следует, что когда при преобразованиях из присоединенной группы Φ переходит в $\tilde{\Phi}=S\Phi S^{-1}$, столбец ψ с компонентами ψ^{α} переходит в

$$\tilde{\psi} = S\psi, \qquad S = \exp(\xi^{\lambda}Y_{\lambda}). \tag{6.155}$$

Положив

$$\varphi_{\alpha} = \overline{\varphi^{\beta}}(R_4)_{\beta\alpha}, \qquad \psi_{\alpha} = \overline{\psi^{\beta}}(R_4)_{\beta\alpha} \tag{6.156}$$

и обозначив через φ стобец с компонентами φ^{α}, а через φ^*—соответствующую строку с комплексно сопряженными элементами, с учетом (6.139) и (6.154) имеем

$$(\tilde{\varphi}^* R_4) = \varphi^* R_4 S^{-1} = (S\varphi)^* R_4, \tag{6.157}$$

т. е. столбец φ переходит в

$$\tilde{\varphi} = S\varphi, \tag{6.158}$$

причем по (6.139)

$$\tilde{\varphi}^* R_4 \tilde{\psi} = \varphi^* S^* R_4 S\psi = \varphi^* R_4 \psi = \mathrm{inv}. \tag{6.159}$$

В частном случае, когда отличны от нуля лишь ξ^{λ} с $\lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6$, формулы (6.155), (6.158) показывают, что по отношению к преобразованиям из собственной группы Лоренца ψ и φ ведут себя, как обычные спиноры (причем в формулах (5.96)—(5.98) в качестве матрицы R можно взять R_4). Поскольку группа Ли с генераторами Y_{λ} изоморфна пятнадцатипараметрической группе конформных преобразований четырехмерного псевдоевклидова пространства, то в общем случае комплексные столбцы ψ, φ, преобразующиеся по (6.155), (6.158), будем называть конформными спинорами. Умножая обе части (6.138) на X^{λ}, суммируя по λ и учитывая, что $R_4^* = -R_4$, получим

$$(R_4\Phi)^* = R_4\Phi, \tag{6.160}$$

или, в компонентах с учетом (6.154) и (6.156),

$$\overline{\psi}_{\alpha}\varphi_{\beta} = \overline{\varphi}_{\alpha}\psi_{\beta}, \tag{6.161}$$

Отсюда следует, что (с точностью до несущественного действительного множителя) φ_α совпадают с ψ_α, так что компоненты Φ выражаются через компоненты одного комплексного спинора:

$$\Phi^\alpha_\beta = \psi^\alpha (\psi^* R_4)_\beta. \tag{6.162}$$

При этом, согласно (6.145),

$$\psi^* R_4 \psi = 0. \tag{6.163}$$

Подставляя в (6.146) вместо матричных элементов Φ^α_β их выражения (6.162), получаем

$$X_\lambda = \psi_\alpha (Y_\lambda)^\alpha_\beta \psi^\beta = \psi^* R_4 Y_\lambda \psi. \tag{6.164}$$

С помощью (6.127)—(6.137) (где для неквантового случая йорданово произведение заменяется на обычное) формула (6.164) перепишется в виде следующей системы алгебраических тождеств:

$\lambda = 1, 2, 3, \varepsilon = \pm 1;$

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_s = \frac{1}{2} \psi^* R_4 R R_s \psi = \frac{1}{2} \psi^* J R_s \psi, \tag{6.165}$$

$$\lambda = 4, 5, 6, \varepsilon = \pm 1; \qquad -r p_s = -\frac{1}{2} \psi^* R_s \psi, \tag{6.166}$$

$\lambda = 7, 8, 9, \varepsilon = \pm 1;$

$$-\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})\, p_s}{p_0} + \frac{(p^2 - p_0^2)}{2p_0} r_s = -\frac{1}{2} i \psi^* R R_s \psi, \tag{6.167}$$

$$\lambda = 10, \ \varepsilon = \pm 1; \qquad \frac{p_0^2 - p^2}{2p_0} = \frac{1}{2} i \psi^* J \psi, \tag{6.168}$$

$\lambda = 11, 12, 13, \varepsilon = \pm 1;$

$$-\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})\, p_s}{p_0} + \frac{(p^2 + p_0^2)}{2p_0} r_s = \frac{1}{2} \psi^* R_4 R_s \psi, \tag{6.169}$$

$$\lambda = 14, \varepsilon = \pm 1; \qquad -\frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} r = -\frac{1}{2} \psi^* \psi, \tag{6.170}$$

$$\lambda = 15, \varepsilon = \pm 1; \qquad (\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} i \psi^* R \psi. \tag{6.171}$$

Здесь (в связи со специальным выбором множителя пропорциональности между ψ и φ) компоненты ψ имеют размерность корня из произведения длины на импульс. Компоненты конформного спинора ψ определяются по (6.163)—(6.164) с точностью до фазового множителя [1]). При этом перестановочные соотношения (6.118) между генераторами X_λ будут следствием перестановочных соотношений между компонентами ψ.

В самом деле, если положить

$$[\psi^{\alpha_1}, \psi^{\alpha_2}]_X = 0, \qquad [\psi_{\alpha_1}, \psi_{\alpha_2}]_X = 0, \qquad [\psi^{\alpha_1}, \psi_{\alpha_2}]_X = \delta^{\alpha_1}_{\alpha_2}, \tag{6.172}$$

то из (6.164) имеем

$$[X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]_X = [\psi_{\alpha_1} Y^{\alpha_1}_{\lambda_1 \alpha_2} \psi^{\alpha_2}, \psi_{\beta_1} Y^{\beta_1}_{\lambda_2 \beta_2} \psi^{\beta_2}] =$$

$$= \psi_{\alpha_1} Y^{\alpha_1}_{\lambda_1 \alpha_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta_1} Y^{\beta_1}_{\lambda_2 \beta_2} \psi^{\beta_2} - \delta^{\beta_2}_{\alpha_1} Y^{\alpha_1}_{\lambda_1 \alpha_2} \psi^{\alpha_2} \psi_{\beta_1} Y^{\beta_1}_{\lambda_2 \beta_2} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1 \lambda_2} X_{\lambda_3}, \tag{6.173}$$

так как $Y_{\lambda_1} Y_{\lambda_2} - Y_{\lambda_2} Y_{\lambda_1} = c^{\lambda_3}_{\lambda_1 \lambda_2} Y_{\lambda_3}$. Если же от X_λ перейти к числовым значениям π_λ, то после замены X_λ на π_λ формулами (6.163)—(6.171) будут определяться инвариантные соотношения между π_λ, причем числовые значения компонент ψ (для которых мы оставим прежние обозначения) по-прежнему преобразуются по формуле (6.155).

Таким образом, алгебраическое состояние в нашем случае полностью определяется заданием конформного спинора, на который наложено инвариантное условие (6.163). В связи с этим формулы (6.163)—(6.171) дают возможность выражать на языке теории спиноров все результаты, связанные с инвариантно-групповой теорией нерелятивистского кулоновского или ньютоновского взаимодействий.

Рассмотрим несколько примеров.

---

[1]) Для фактического нахождения ψ по известным X_λ можно воспользоваться тем, что $\psi = \psi_{(1)} + i\psi_{(2)}$, а величинами (6.164) определяется система тензоров, выраженных через два действительных спинора $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$; см. литературные указания.

Пусть спинор ψ является собственным вектором матрицы $2Y_{15}=-iJ$ с собственным значение -1, т. е.

$$iJ\psi=\psi. \tag{6.174}$$

Если записать ψ в виде спинора дираковского типа (5.139), то (6.174) эквивалентно первому из соотношений (5.147), поэтому, как показано в § 5 гл. 5, отсюда следует, что в выражении (5.139) $\psi_{(1)}=0$ и ψ выражается черед один действительный спинор $\psi_{(2)}$ по формуле

$$\psi=\frac{1}{2}(1+iJ)\psi_{(2)}. \tag{6.175}$$

Согласно (5.145) выражение $\psi^*\hat{A}\psi$ будет равно нулю, если $\hat{A}J=-J\hat{A}$, поэтому из (6.165) и (6.166) имеем

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=0, \qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{p}=0, \tag{6.176}$$

т. е. из (6.174) следует

$$\boldsymbol{p}=0, \tag{6.177}$$

так что соотношение (6.174) является одним из условий нахождения системы в первом стандартном алгебраическом состоянии. Из (6.174) следует, что согласно (6.168) (с заменой там справа $iJ\psi$ на ψ) и (6.170)

$$p_0r=\psi^*\psi, \qquad r=\frac{\psi^*\psi}{p_0}, \tag{6.178}$$

так что в выражении $p_0=\sqrt{2m\varepsilon H_0}$ перед корнем должен браться знак плюс. Далее из (6.167) (с заменой справа ψ на $iJ\psi$) получаем

$$p_0r_s=\psi^*R_4R_s\psi. \tag{6.179}$$

Если на ψ наложить совместное с (6.178) дополнительное условие

$$R_4R_1\psi=\psi, \tag{6.180}$$

то из (6.179) следует $r_1=r$, $r_2=r_3=0$, т. е. вектор $\boldsymbol{r}$ будет направлен вдоль оси OX, что соответствует первому стандартному алгебраическому состоянию.

Аналогичный анализ показывает, что состояние, у которого

$$iJ\psi = -\psi, \tag{6.181}$$

несовместимо с соотношениями (6.165)—(6.171) и потому невозможно, т. е. у системы из двух нерелятивистских частиц, взаимодействующих по закону Кулона или Ньютона, не может существовать такое алгебраическое состояние, для которого определяемый из (5.139) действительный спинор $\psi_{(2)}$ равнялся бы нулю.

Пусть теперь ψ является собственным вектором матрицы iR. Поскольку квадрат этой матрицы равен единичной матрице, то собственное значение может равняться лишь $+1$ или -1, т. е.

$$iR\psi = \pm\psi. \tag{6.182}$$

Заменяя в (6.171) $iR\psi$ на $\pm\psi$, имеем

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}) = \pm\frac{1}{2}\psi^*\psi. \tag{6.183}$$

Далее из (6.168) с учетом (6.182) и (6.163) имеем

$$\frac{p_0^2 - p^2}{2p_0}\boldsymbol{r} = 0, \qquad p^2 = p_0^2, \tag{6.184}$$

так что при $\varepsilon = 1$ для состояния, удовлетворяющего (6.128), $-K_0 = e_1e_2 = 0$ (или $-K_0 = \gamma m_1 m_2 = 0$), т. е. постоянная взаимодействия обращается в нуль и движение по гиперболе переходит в движение по прямой. При этом по (6.170)

$$-p_0\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}\psi^*\psi, \tag{6.185}$$

откуда из (6.183) и (6.184) следует, что векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ направлены по одной прямой. Если $\varepsilon = -1$, то

$$H_0 = -\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - \frac{K_0}{r},$$

и из (6.184) и (6.185) имеем

$$K_0 = \frac{rp_0^2}{2m} = \frac{p_0\psi^*\psi}{m}, \qquad p_0 > 0. \tag{6.186}$$

Наконец, интересным является алгебраическое состояние, для которого

$$\bar{\psi} = \psi, \tag{6.187}$$

т. е. для которого ψ является действительным спинором. Из (6.171) и (6.168) следует, что в этом случае

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}) = 0, \qquad p^2 = p_0^2. \tag{6.188}$$

Поэтому $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{p}$, и если $\varepsilon = 1$, то $K_0 = 0$. Условием (6.187) определяется, таким образом, второе стандартное алгебраическое состояние.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что при заданных $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ и $p_0 = \sqrt{2m\varepsilon H_0}$ алгебраическое состояние в случае движения по эллипсу или окружности, когда $\varepsilon = -1$, характеризуется в точности тем же конформным спинором ψ, что и в случае движения по гиперболе или прямой, когда $\varepsilon = 1$. В этом проявляется соответствие между движениями с одинаковыми по абсолютной величине, но разными по знаку числовыми значениями энергии H_0. Однако законы изменения состояния с течением времени в обоих случаях различны. Генератору $K = -2K_4$, определяющему динамический закон изменения состояния с изменением τ, при $\varepsilon = -1$, согласно (6.136), соответствует матрица $-\frac{p_0}{2m}R_4$, т. е.

$$\varepsilon = -1, \quad \psi_\tau = \exp\left(-\frac{p_0\tau}{2m}R_4\right)\psi, \tag{6.189}$$

а при $\varepsilon = 1$, согласно (6.130), — матрица $-\frac{p_0}{2m}iJR_4$, т. е.

$$\varepsilon = 1, \qquad \psi_\tau = \exp\left(-\frac{p_0\tau}{2m}iJR_4\right)\psi. \tag{6.190}$$

Поэтому, например, при $\varepsilon=-1$ второе стандартное состояние с течением времени остается стандартным (частица движется по окружности), а при $\varepsilon=1$ это уже не имеет места.

Полученные выше результаты показывают, что нерелятивистское кулоновское и ньютоновское взаимодействия двух частиц характеризуются, во-первых, алгеброй Ли для группы C_{15} и, во-вторых, ее спинорным представлением. Этот факт заслуживает специального внимания, так как применяемая в современной физике теория классических и квантовых систем, как известно, переобогащена в том смысле, что в природе не существует допускаемых теорией всевозможных потенциалов элементарных взаимодействий. Система из двух частиц, взаимодействующих по закону Ньютона или Кулона, всегда служила простейшим частным случаем для проверки применимости новых общих физических подходов. В связи с этим возникает проблема — нельзя ли обобщить изложенные алгебраические результаты применительно к более сложным случаям, в том числе к случаю систем, содержащих более двух частиц, а также к случаю других элементарных взаимодействий?

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ [1)]

Глава 1

Особенность современной математики, заключающаяся в выделении все более абстрактных понятий вне связи с их конкретными реализациями, находит отражение в очень большом числе математических работ. В частности, формулировка в § 1 главной идеи современной математики близка к формулировке Бурбаки [1]. Вместе с тем, во избежание путаницы с укоренившимся в алгебраической литературе на русском языке [2, 3] термином «структура», мы заменяем примененное в русском переводе Бурбаки слово «структура» на термин «математическая схема». Согласно русскому переводу Бурбаки ([4], стр. 396) «...структуры рода T характеризуются схемой образования множества M, исходя из E, F, G, и свойствами, определяющими T, которые называются аксиомами этих структур». Отсюда видно, что и с точки зрения трактата Бурбаки было бы вполне обосновано, если бы термин «структура» был переведен как «схема» (или абстрактная математическая схема), что не привело бы к путанице в терминологии в связи с понятием структуры как «решетки». Что касается другой новой терминологии Бурбаки (см., например, [4—6]), то она выработана без учета приложений и ее целесообразность в некоторых случаях сомнительна. Поэтому мы предпочитаем пользоваться более обычной алгебраической терминологией, имеющейся, например, в книге Куроша [2], обладающей большими научно-методическими достоинствами.

За дальнейшими деталями об универсальных алгебрах мы отсылаем к книгам Куроша [2] и Кона [7]; в последней из них имеется значительная библиография. Детальные сведения о группах автоморфизмов алгебраических систем имеются в монографии Плоткина [8]. С основными понятиями математической логики можно познакомиться, например, по [9], где имеются дальнейшие

---

1) Поскольку при первоначальном изучении предмета значительно удобнее пользоваться не статьями, а книгами и монографиями, то при ссылках в первую очередь указываются книги, в которых можно найти также указания на многочисленные оригинальные работы. Ссылки даются лишь на работы, обсуждавшиеся при чтении курса и повлиявшие на его содержание.

библиографические указания. От всех цитированных выше работ наше изложение отличается направленностью в сторону физических приложений; в частности, идеи общей теории универсальных алгебр применяются нами для того, чтобы на частных примерах можно было изучить общие закономерности, присущие физическим системам.

Глава 2

§ 1. Лучшей книгой, дающей возможность получить ясное представление о кольцах и других рассматриваемых нами алгебраических системах и в то же время не обремененной ненужными для физиков деталями, является курс лекций Куроша [2]. Дальнейшие более подробные результаты о математических свойствах ассоциативных, лиевых и йордановых колец и алгебр можно найти в монографиях [10—15], где имеется подробная библиография.

§ 2. В физических работах термин «наблюдаемые» стал широко применяться после Дикара, курс которого [16] до сих пор остается классическим руководством, близким по духу к более современным алгебраическим идеям. Вместе с тем Дирак не был в достаточной степени знаком с алгебраическим аппаратом, поэтому хотя он фактически изучает алгебры, но не называет их алгебрами и не использует более тонкие и глубокие алгебраические понятия и результаты. К числу таких понятий, ускользнувших от внимания Дирака и других физиков, является рассмотренная в § 2 возможность дать чисто алгебраическое истолкование постоянной Планка, основанная на том, что переход от классической механики к кваитовой связывается с изменением примитивного класса алгебры иаблюдаемых. Эта идея открывает возможность создания алгебраической теории физических теорий, причем другие изменения примитивного класса алгебры наблюдаемых, в принципе, могут приводить к другнм возможным физическим теориям, отличным как от классической, так и от квантовой механики.

§ 3 — § 4. С теорией полей и тел можно познакомиться по многим алгебраическим курсам (см., например, [2, 17]). В физике в большинстве случаев применялись лишь поля действительных и комплексных чисел, однако в последнее время возрос интерес к кватернионам в связи с их применениями в теории относительности и в квантовой механике (см., например, [18], где имеются дальнейшие литературные указания). Совместное рассмотрение поля действительных чисел, поля комплексных чисел и тела кватернионов необходимо также из общетеоретических соображений, так как лишь в этом случае становится возможным сформулировать важные общие теоремы (см., например, доказываемые далее теоремы об алгебрах с числовыми значениями), относящиеся к алгебрам наблюдаемых.

Определение обобщенных функций как элементов из дуального векторного пространства или как функционалов по отношению к некоторому векторному пространству основных функций соответствует методу введения обобщенных функций (распределений), излагаемому во многих современных руководствах (см. [19—22]). Следует отметить, что переход от конечномерного векторного пространства к бесконечномерному в отдельных случаях требует топологических доопределений, связанных с необходимостью учитывать сходимость бесконечных рядов, однако мы, чтобы не усложнять изложение, намеренно не касаемся топологических вопросов. Комбинирование сразу двух алгебраических методов — метода эндоморфизмов векторного пространства и метода перехода к дуальному векторному пространству,— приводящее к определению обобщенных функций разных ступеней, в литературе до сих пор, насколько нам известно, не рассматривалось.

§ 5. Наиболее исчерпывающим руководством по теории структур является монография Биркгофа [3] (последнее английское издание которой на русский язык пока не переведено). При первом ознакомлении достаточно ограничиться книгой Куроша [2], которую следует считать наиболее пригодной как для математиков широкого профиля, так и для физиков. Иллюстрацией значений формул (2.36) — (2.38) может служить конечная проективная геометрия над полем или телом Q. Как доказывается в курсах алгебраической геометрии (см. [23], гл. 6), если в проективной геометрии ввести всевозможные линейные многообразия, то они образуют дедекиндову структуру с дополнениями, характеризуемую соотношениями (2.36) — (2.40), причем обратно, заданием этой абстрактной структуры определяется как размерность проективной геометрии, так и поле или тело Q, над которым она рассматривается. Этот результат был обобщен фон Нейманом и другими ([24], см. также [25]) для введения глубокой структурной классификации таких подалгебр алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, центр которых совпадает с основным полем. В русском переводе трактата Бурбаки и в некоторых советских математических работах вместо термина «структура» применяется также термин «решетка» (один из переводов английского слова lattice). Однако, учитывая выдающиеся заслуги А. Г. Куроша в создании советской алгебраической школы и принимая во внимание большие методические достоинства его курса, мы считаем, что книгу Куроша [2] целесообразно принять за своего рода стандарт в отношении русской алгебраической терминологии.

§ 6. Дальнейшие сведения об алгебрах, являющихся специальными случаями колец, можно найти в уже цитированных монографиях [2], [6], [10—13]. Рассматриваемый в этом параграфе переход от алгебр над полем комплексных чисел и телом кватернионов к алгебрам над полем действительных чисел и связанное с этим расширение группы автоморфизмов алгебр опираются на идею автора о том, что в релятивистской квантовой механике алгебры операторов следует рассматривать над полем действительных чисел, тогда как число i целесообразно включать не в поле, а в алгебру. Эта идея, примененная к релятивистскому уравнению для частицы со спином 1/2 ([26], [27], см. также [28]), приводит к тому, что поскольку группа автоморфизмов алгебры квантовомеханических операторов расширяется, то оказывается необходимым учитывать антилинейные преобразования волновой функции, в связи с чем частицы со спином 1/2 становится возможным описывать при помощи полностью релятивистских двухкомпонентных волновых функций, заменяющих четырехкомпонентные волновые функции Дирака. Это приводит к замене четырехкомпонентного уравнения Дирака на двухкомпонентное уравнение автора [26], [27], независимо переоткрытое Фейнманом и Гелл-Манном [29] в связи с универсальной теорией слабых взаимодействий. О переходе от квантовой механики над полем комплексных чисел к квантовой механике над полем действительных чисел см. также [30].

§ 7. Требование о том, чтобы алгебра наблюдаемых порождалась конечным числом образующих, в алгебраической терминологии [8] означает, что эта алгебра должна быть нетеровой. Постулат о конечном числе образующих, как следует из рассмотренного примера с моментом количества движения, приводит к коренному отличию разрабатываемой нами теории от предложенной Софусом Ли [31—33] теории функциональных групп и касательных преобразований.

Переход от (2.80) к (2.81) можно совершить не только путем индукции по n, но также с помощью специфических методов теории групп и алгебр Ли (см., например, [34], формула (28)), частично обобщенных Фейнманом и другими физиками (см., например, [35] и цитированные там работы) на случай более сложных операторных выражений.

Изложение теории неканонических преобразований и основанного на ней метода перехода от одного временно́го параметра к другому следует статье автора [36].

§ 8. Вводимое нами определение π-состояния объединяет и обобщает определения состояния физической системы в классической механике, квантовой механике, равновесной и неравновесной статистической механике (см., например, [16], [37—40]). Наше определение алгебр с числовыми значениями опирается на использование дуального пространства и применимо к любым алгебрам с произвольным числом бинарных алгебраических операций. В работах по функциональному анализу понятие, аналогичное ассоциативным алгебрам с числовыми значениями, вводилось в теории гильбертовых колец или H^*-алгебр (см. [41]). При переходе к бесконечномерному случаю, вообще говоря, необходимо проводить доопределения конечномерных алгебраических конструкций, связанные с необходимостью привлекать топологические понятия (см., например, [39], [41]), однако, чтобы не усложнять изложение, мы ограничиваемся рассмотрением лишь основных алгебраических идей, относящихся к теории π-состояний физических систем.

В ряде недавних работ (см. например, [100], где «алгебраические состояния» называются просто «состояниями») показано, что алгебраический подход, опирающийся на понятие о π-состояниях, это не просто другое оформление известных результатов, но что с ним по существу связаны основы новой физической теории, так как имеются случаи, когда алгебраические состояния в квантовой теории нельзя описывать с помощью матрицы плотности или волновой функции, и что в квантовой теории систем с бесконечным числом степеней свободы оказывается невозможным применение единого гильбертова пространства.

§ 9. Исходным пунктом направления, охарактеризованного в этом параграфе, служит работа Биркгофа и фон Неймана [42]. Изложение математического аппарата квантовой механики в духе Биркгофа — фон Неймана, в тесной связи с теорией структур, проводится в фундаментальной монографии Никодима [43]. На русском языке краткое изложение вопросов, связанных с «логикой квантовой механики», можно найти в [44]. Наша терминология близка к [45].

Глава 3

§ 1 — § 2. С упоминаемым в § 1 методом оперирования с подмножествами алгебр G, обладающими определенными свойствами, можно познакомиться по ряду алгебраических курсов и монографий [10—13]. В этих курсах операции с рассматривавшимися подмножествами еще не выделились в самостоятельный раздел алгебры. Введение понятия об алгебрах структуроидов дает возможность окончательно осуществить такое выделение. Термин «структуроид» связан с тем, что здесь мы имеем дело одновременно со «структурой» и «группоидом». Если вместо терминологии Куроша принять терминологию Бурбаки, то эквивалентным термином было бы слово «латтисоид» («latticoid», от слова «lattice».— решетка).

Понятие о структуроидах, дающее возможность сначала изучать общие свойства алгебр разных видов, а затем рассматривать уже более специальные алгебры, можно было бы использовать для методической перестройки упомянутых выше алгебраических курсов. Однако изучение структуроидов имеет самостоятельное значение, так как их свойства инвариантны по отношению к выбору образующих универсальных алгебр и потому отражают наиболее глубокие свойства алгебр.

§ 3 — § 4. Первоначально понятия о лиевых и лиево-ассоциативных структуроидах возникли в связи с проблемой перенесения видоизмененных идей Галуа на задачи, возникающие при алгебраизации физических задач и теорий (см., например, [46], [47]). В случае, если алгебры наблюдаемых являются лиево-порождаемыми, как это имеет место для кулоновского взаимодействия двух частиц [36], полное решение физических задач удается сводить к задачам из теории конечных алгебр Ли.

Вопрос о связях в аналитической механике (без использования алгебраического подхода) подробно рассмотрен, например, в книге Ланцоша [48]. В квантовой теории полей необходимость учета связей особенно подчеркивается в работах Дирака. Сам

Дирак не использует алгебраического аппарата (в частности, элементы алгебры наблюдаемых он называет q-числами и т. д.), однако его книги [49], [50] содержат ряд интересных общих идей, по существу, носящих алгебраический характер. Хотя наш подход отличается от подхода Дирака, в ряде случаев (например, в связи с формулой (3.31)) можно установить соответствие с результатами Дирака.

Глава 4

§ 1 — § 4. С общей теорией конечномерных ассоциативных алгебр и с теорией их представлений можно познакомиться по монографиям [13], [51], [52]. Рассматриваемое в тексте применение теории структуроидов позволяет заметно упростить доказательства ряда теорем (имеющиеся, например, в [52]). Теорема, доказанная в § 3, вместе с формулами (4.13) и (4.16) соответствует теореме Веддерберна — Нетер (см. [13], стр. 189), согласно которой простые кольца с условием минимальности для левых и правых идеалов исчерпываются полными матричными кольцами над некоторыми телами. Однако полученные выше соотношения приводят также к уточнению этой теоремы, связанному с выяснением вида элементов $e_{\beta_1}^{\beta_2}$ и с формулой (4.17), позволяющей по известной алгебре определить тело, о котором говорится в теореме Веддерберна — Нетер.

Следует отметить, что хотя в тексте для простоты рассматриваются лишь алгебры конечного ранга с числовыми значениями, многие полученные результаты непосредственно переносятся также на алгебры бесконечного ранга (см. [53], [41]).

§ 5 — § 6. Термин «алгебры альтернионов» и соответствующая система обозначений предложены Б. А. Розенфельдом, монография которого [54] содержит ряд ценных результатов об их свойствах и геометрических приложениях. Частный случай алгебр Клиффорда над полем комплексных чисел рассмотрен, например, в [55].

В теории алгебр Ли давно используется метод выделения нормальных действительных форм (см., например, [56]). Соответственно этому выделение базисной алгебры действительных спиноров в качестве нормальной действительной формы ассоциативной алгебры альтернионов проведено нами в связи с особым значением этой алгебры для релятивистской теории [26, 28] и теории квантованных полей [57, 58]. Отождествление алгебр альтернионов с алгебрами с числовыми значениями позволяет упростить доказательство теорем о структуре и представлениях этих алгебр и дает возможность установить результаты, общие с алгебраической теорией физических систем. В связи с этим становится возможным пользоваться интуитивными представлениями, выработанными в одной области (например, в теории спиноров), для решения задач в другой области (например, в теории квантованных полей). Многие результаты, полученные для конечномерной модели квантованных волновых полей, с помощью методов функционального анализа [39, 41, 59] могут быть перенесены также на бесконечиомерный случай.

Вместе с тем для систем с бесконечным числом степеней свободы могут возникать также дополнительные математические особенности (см. [100]), которые необходимо учитывать при построении строгой алгебраической теории квантованных волновых полей.

Глава 5

§ 1 — § 3. С основными результатами теории групп и алгебр Ли можно познакомиться по монографиям [60—66]. Классическая теория групп Ли опирается на три основные теоремы Софуса Ли (см., например, [60], [61]). Однако серьезным недостатком классической теории является то, что она относится только к тому специальному случаю, когда генераторы X_λ являются дифференциальными операторами первого порядка. Наше изложение, связанное с идеями Кэмпбелла—Хаусдорфа [67—69], учитывает тот факт, что в физике часто приходится иметь дело также с генераторами более общего вида. Рассмотренный в §§ 1 и 2 простой метод обоснования теории групп Ли, опирающийся на основную теорему о связи между алгебрами Ли и группами Ли, первоначально предложен в [34], [70].

Материал § 3 связан с проникновением методов теории ассоциативных алгебр в теорию групп. По поводу интегрирования по группе см., например, [71], [72]. Дополнительные детали и библиографию можно найти в [73], [74]. Рассмотренная в конце § 3 связь теории шаровых функций с теорией представлений группы вращений более подробно изучена в [73] (см. также цитированную там литературу, например [75]). Формула (5.73) может служить примером тесной связи между теорией представлений групп Ли и теорией специальных функций. Альтернативным, а в ряде случаев и более общим подходом в развивавшейся независимо групповой теории специальных функций служит метод конечно- и бесконечномерных представлений алгебр Ли, который в частных случаях, как показано Миллером [76], приводит к популярному среди физиков методу факторизации [77] и с помощью которого, согласно [78], можно также построить обобщение метода факторизации на случай функций, зависящих от нескольких переменных и нескольких квантовых чисел. Вообще, в настоящее время стало ясно, что почти все специальные функции, возникающие при точном решении задач теоретической физики, могут быть получены с помощью методов теории представлений групп и алгебр Ли.

§ 4. Понятие о спинорной группе рассмотрено у Розенфельда [54]. Наш метод изложения отличается выдвижением на первый план основных алгебраических теорем, в первую очередь теоремы об автоморфизмах простых алгебр. Кроме того, специальное внимание уделено вопросам, приводящим к понятию о действительных спинорах для алгебры $B_n = {}^{n+}A_{2n+1}$. Поскольку B_n изоморфна алгебре квантованных фермионных полей, то, в соответствии с [58], действительные спиноры в многомерном пространстве являются объектами, аналогичными волновым функциям в теории квантованных полей.

§ 5. Алгебраический метод описания электромагнитного поля предложен в [90], где можно найти также детали отдельных выкладок. В практическом отношении, по-видимому, наибольший интерес представляют приложения этого метода, связанные с рассмотренным в тексте обобщением теории функций комплексного переменного и с электродинамическими применениями условий моногенности Мойсила [91] — Федорова [92]. Дальнейшие детали имеются в [93]. Мы лишь бегло касаемся группы внешних преобразований электродинамических величин. Наибольшие приложения эта группа нашла в связи с изучением уравнений электродинамики при наличии гипотетических магнитных зарядов [94], однако, поскольку на опыте такие заряды до сих пор не обнаружены, то в тексте мы этих вопросов не касаемся. Допущение о том, что 4-вектор импульса является особым, независимо вводилось многими авторами (см., например, [95], где принята другая терминология). Отмеченная в тексте возможность записи двухкомпонентного уравнения Вейля в виде тензорных уравнений специального вида установлена в [96]. Общий метод записи в тензорной форме уравнений, содержащих два действительных спинора, рассмотрен в [97]. Уравнения (5.157) и (5.158) впервые введены и изучены в [26]; в [27] они обобщены на случай наличия у частицы аномального магнитного момента, а в [28] согласованы с универсальной теорией слабых взаимодействий [29] и переписаны в уточненной, более общей форме. После создания универсальной теории слабых взаимодействий предложение брать во всех случаях за основу не четырехкомпонентную, а двухкомпонентную волновую функцию для частиц со спином 1/2 вслед за [28], [29] высказывалось и в ряде других работ (см., например, [98]). Вопросам, связанным с двухкомпонентными уравнениями, было посвящено также значительное число других работ, освещенных в ряде обзоров (из которых особенно можно рекомендовать [99]), однако в них обычно не учитываются отдельные рассмотренные в тексте тонкие математические детали, связанные с антилинейным законом преобразования двухкомпонентных волновых функций по отношению к отражениям.

Глава 6

Математический аппарат, связанный со свойствами однородной и неоднородной группы Лоренца, излагается во многих книгах (см., например, [72], [75], [79—83]), а различные детали подробно изучаются во многих специальных работах. По поводу обычного негруппового вывода формул преобразований Лоренца см., например, [84]. Материалы § 2—§ 5 связаны с проблемой последовательной алгебраической переформулировки теории физических систем; §§ 4 и 5 содержат более подробное развитие идей, сформулированных в [36]. У истоков алгебраического подхода к задаче о групповом нахождении спектра атома водорода лежит метод факторизации [76], [77] и групповая теория атома водорода [85—88], [36]. Принципиальная возможность чисто группового вывода всех свойств атома водорода, установленная в [36] (см. также [89]), позволяет рассматривать получение дискретного спектра нерелятивистского атома водорода в качестве одной из задач, возникающих при последовательном алгебраическом описании системы из двух частиц. При этом все расчеты оказываются аналогичными и столь же простыми, как и в случае обычной алгебраической теории момента количества движения.

Результаты § 6, являющиеся последовательным развитием идей, содержащихся в [36] и [97], публикуются впервые. Четырехмерное представление пятнадцатипараметрической группы конформных преобразований неоднократно рассматривалось в литературе, однако вне связи с теорией кулоновского и ньютоновского взаимодействий. С точки зрения стандартных физических руководств, посвященных квантовомеханическим применениям представлеиий групп Ли, наиболее иеожиданным, вероятно, является тот факт, что теория представлений групп и алгебр Ли может иметь неизвестные ранее важные приложения также и в классической теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, Архитектура математики, В. кн. Бурбаки Н., Очерки по истории математики, ИЛ, 1963, стр. 245—259.
2. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
3. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1962.
4. Н. Бурбаки, Теория множеств, «Мир», 1965.
5. Н. Бурбаки, Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра, Физматгиз, 1962.
6. Н. Бурбаки, Алгебра. Модули, кольца, формы, «Наука», 1966.
7. П. Кон, Универсальная алгебра, «Мир», 1968.
8. К. М. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966.
9. Р. Линдон, Заметки по логике, «Мир», 1968.
10. Н. Джекобсон, Строение колец, ИЛ, 1961.
11. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, «Мир», 1964.
12. N. Jacobson, Structure and representations of Jordan algebras, Providence, American mathematical society, 1968.
13. Б. Л. Ван дер Варден, Современная алгебра, ч. 2, Гостехиздат, 1947.
14. К. Шевалле, Теория групп Ли, т. 3, ИЛ, 1958.
15. Сб. «Теория алгебр Ли», Топология групп Ли, ИЛ, 1962.
16. П. Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
17. С. Ленг, Алгебра, «Мир», 1968.
18. J. M. Jauch, Projective representation of the Poincare group in a quaternionic Hilbert space, В кн. «Group theory and its applications», N. Y., Acad. Press, 1968, стр. 131—182.
19. Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», 1965.

20. Л. Шварц, Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.
21. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
22. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Пространства основных и обобщенный функций, Физматгиз, 1958.
23. Б. Ходж, Д. Пидо, Методы алгебраической геометрии, т. 1, ИЛ, 1954.
24. F. J. Murray, J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math. **37**, 116—229 (1936), Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 208—248 (1937); Ann. Math. **44**, 716—800 (1943).
25. Л. А. Скорняков, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, Физматгиз, 1961.
26. Г. А. Зайцев, Релятивистски инвариантные уравнения для электрона, заменяющие систему уравнений Дирака, ЖЭТФ **28**, 5, 524—529, 1955.
27. Г. А. Зайцев, К вопросу об основном релятивистски инвариантном уравнении для частицы со спином 1/2, ДАН СССР **113**, № 6, 1248—1250 (1957).
28. Г. А. Зайцев, Связь усовершенствованного группового варианта двухкомпонентной теории с проблемой несохранения четности и с универсальной теорией слабых взаимодействий, Труды ИХТИ, Юбилейный выпуск, Иваново, 1968, стр. 30—36.
29. R. Feynmann, M. Gell-Mann, Theory of Fermi interaction, Phys. Rev. **109**, № 1, 193—198 (1958).
30. E. C. Stuekelberg, Quantum theory in real Hilbert space, Helv, phys. acta, **33**, № 8, 727—752 (1960).
31. S. Lie, F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 2, s. 178—210, Leipzig, Teubner, 1888.
32. Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947.
33. Т. Леви-Чивита, У. Амальди, Курс теоретической механики, т. **2**, гл. 10, ИЛ, 1951.
34. Г. А. Зайцев, О связи теории относительности с теорией групп, В кн. М. А. Тоннела, Основы электромагнетизма и теории относительности, ИЛ, 1962, перев. с франц. Г. А. Зайцева — дополнение переводчика, стр. 445—475.
35. Г. А. Соколик, Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.

36. Г. А. Зайцев, Неканонический переход от одного гамильтониаиа к другому, ЖЭТФ 56, 1, 186—199 (1969).
37. Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
38. И. Сигал, Математические проблемы релятивистской физики, «Мир», 1968.
39. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», 1969.
40. Д. Рюэль, Статистическая механика, Строгие результаты, «Мир», 1971; С. Фудзита, Введение в неравновесную квантовую статистическую механику, «Мир», 1969.
41. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», 1968; Н. Бурбаки, Нормированные алгебры, «Мир», 1972.
42. G. Birkhoff, J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. of math. 37, 823—843 (1936).
43. O. M. Nikodym, The mathematical apparatus for quantum theories, Berlin, Springer, 1966.
44. Дж. Макки, Лекции по математическим основам квантовой механики, «Мир», 1965.
45. V. S. Varadarajan, Geometry of quantum theory, vol. 1, Princeton, New Jersey, Van Nostrand, 1968.
46. Г. А. Зайцев, Рецензия на книгу: Ю. Нееман, Алгебраическая теория физики частиц (англ.), «Новые книги за рубежом», Серия А, № 2, 66—69, (1968).
47. Г. А. Зайцев, Алгебры наблюдаемых и их изучение с помощью теории структуроидов. Тезисы докладов по алгебре, математич. логике и вычислит. матем., Конференция пед. вузов центральной зоны РСФСР, Иваново, 1970, стр. 145—147.
48. К. Ланцош, Вариационные принципы механики, «Мир», 1965.
49. П. Дирак, Лекции по квантовой механике, «Мир», 1968.
50. П. Дирак, Лекции по квантовой терии поля, «Мир», 1971.
51. Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», 1969.
52. М. Холл, Теория групп, ИЛ, 1962.
53. Г. А. Зайцев, О. В. Пшеничников, О полупростоте алгебр бесконечного ранга с числовыми значениями, применяемых для квантовомеханического описания физических систем, Труды ИХТИ 13, Иваново, 123—126 (1972).

54. Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, Гостехиздат, 1955.
55. П. К. Рашевский, Теория спиноров, УМН **10**, вып. 2 (64), 3—110 (1955); Э. Картан, Теория спиноров, ИЛ, 1947.
56. А. И. Сирота, А. С. Солодовников, Некомпактные полупростые группы ЛИ, УМН **18**, вып. 3 (111), 87—144 (1963).
57. A. L. B. De Rocha, M. Schönberg, On the Clifford and Jordan — Wigner algebras. Rev. Union mat. argent. Asoc. fis. argent. **20**, 239—258 (1962).
58. Г. А. Зайцев, Основные формулы для многомерного действительного спинора и алгебраическая модель квантованных волновых полей, ДАН СССР **156**, № 2, 294—297 (1964).
59. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, Физматгиз, 1965.
60. Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.
61. Л. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1948.
62. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
63. D. Montgomery, L. Zippin, Topological transformations groups, New York, Interscience, 1955.
64. К. Шевалле, Теория Групп Ли, т. 1, ИЛ, 1948.
65. Д. П. Желобенко, Компактные группы Ли и их представления, «Наука», 1970.
66. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», 1964.
67. J. E. Campbell, Introductory treatise on Lie theory of finite continuous transformation groups. Oxford, 1903.
68. F. Hausdorf, Ber. Sachs. Ges. **58**, 19 (1906).
69. Е. Б. Дынкин, О представлении ряда $\log(e^x e^y)$ для некоммутирующих x, y через коммутаторы, Матем. сб. 25, 155—162 (1949).
70. Г. А. Зайцев, Проблема инвариантио-группового изучения множеств предельных геометрий и специальные подалгебры Ли, В сб. «Первая Всесоюзная геометрическая конференция, Тезисы и аннотации обзорных докладов и кратких сообщений», Киев, 1962, Труды ИвТИ, Иваново, 1972; Абстрактные схемы физики и теория физических теорий, В сб. «Философия и физика», Изд-во Воронежск. ун-та, 5—19, 1972.

71. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его примеиения, ИЛ, 1950.
72. Th. Kahan, Theorie des groupes en physique classique et quantique, t. 1, Paris, Dunod, 1960.
73. Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965.
74. G. A. Pozzi, Continuous unitary representations of locally compact groups, Application to quantum dynamics, Nuovo Cim Suppl., 4, № 1, 37—171 (1966).
75. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
76. W. Miller, Jr., On Lie algebras and some special functions of mathematical physics, Mem. Amer. Math. Soc. № 5, 1—43 (1964); Lie theory and special functions, New York, Acad. Press, 1968.
77. L. Infeld, T. E. Hull, The factorization method, Rev. Mod. Phys. 23, 21 (1951). Имеется перевод в сб. «Математика» 10, № 3, 39 (1966); Х. Грин, Матричная квантовая механика, «Мир», 1968.
78. Е. В. Морозов, Г. А. Зайцев, А. А. Зайцев, Обобщенный метод факторизации и возникновение факторизуемых уравнений, Труды ИХТИ 12, Иваново, 63—68 (1971).
79. М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
80. В. Хейне, Теория групп в квантовой механике, ИЛ, 1963.
81. М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, «Мир», 1966.
82. Т. Я. Любарский, Теория групп и ее применение к физике, Физматгиз, 1957.
83. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, «Мир», 1963.
84. М. А. Тоннела, Основы электромагнетизма и теории относительности, ИЛ, 1962.
85. W. Pauli, Uber das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik, Zs. f. Phys. 36, 336—363 (1926).
86. V. Fock, Wasserstoffatom und nicht-euklidische Geometrie, Zs. f. Phys. 98, 145—154 (1935).
87. V. Bargmann, Zur Theorie des Wasserstoffatoms, Zs. f. Phys. 99, 576—582 (1936).

88. И. А. Малкин, В. И. Манько, Симметрия атома водорода, ЯФ 3, 372—382 (1966); Письма в ЖЭТФ 2, 230 (1965).
89. H. Bacry, J. L. Richard, Group theoretical treatment for the relativistic hydrogen atom, Preprint Inst. Advanced Study, Princeton, N. J., (1966); В. Ф. Дмитриев, Ю. Б. Румер, Алгебра O (2, 1) и атом водорода, Теор. и матем. физ. 5, 276—280 (1970).
90. Г. А. Зайцев, Описание электромагнитного поля при помощи матриц, ЖЭТФ 28, вып. 5, 524—529 (1955).
91. G. C. Moisil, Sur les quaternions monogenes, Bull. Sc. Math. 55, 168—174 (1931).
92. В. С. Федоров, О моногенности в пространстве, Изв. АН СССР, серия матем. 9, № 4, 257—274 (1945).
93. Г. А. Зайцев, А. М. Солунин, Об алгебраическом методе релятивистского решения уравнений Максвелла, Изв. вузов, Физика, № 6, 14—18 (1972).
94. Г. А. Зайцев, Уравнения Максвелла общего вида и группа внешних преобразований электромагнитных величин, Изв. вузов, Физика, № 12, 19—23 (1969); Г. А. Зайцев, А. М. Солунин, О некоторых свойствах внешнеинвариантных уравнений Максвелла и физическом смысле группы внешних преобразований, Изв. вузов, Физика, № 11, 53—57 (1969); К вопросу о внешией инвариантности уравнений Максвелла в пространстве со средой, В сб. «Некоторые дифференциальные уравнения математической физики и теории колебаний», Иваново, 91—97, 1970.
95. J. Rzewuski, Field theory, Part 1, Warszawa, 1958.
96. Г. А. Зайцев, Применение действительных спиноров для описания электромагнитного поля, ЖЭТФ 25, вып. 6, 657—678 (1953).
97. Г. А. Зайцев, Тензоры, характеризуемые двумя действительными спинорами, ЖЭТФ 29, вып. 2, 166—175 (1955).
98. N. J. Jonescu-Pallas, A relativistic wave equation for 1/2 spin particle, Rev. roumaine phys. 13, № 5, 461—469 (1968).
99. Сб. «Теоретическая физика 20 века», ИЛ, 1962.
100. G. G. Emch, Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, N. Y., Wiley Interscience, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ