К.Телеман

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» *Москва 1967*

Алгебраическая топология — быстро развивающаяся математическая дисциплина, которая приобретает все большее значение для смежных областей математики: глобальной дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, теории аналитических функций многих комплексных переменных.

Настоящее изложение основ алгебраической топологии и теории дифференцируемых многообразий написано молодым румынским математиком К. Телеманом. Книга предназначена для первого ознакомления с предметом. Все доказательства приводятся полностью; от читателя требуется предварительное знакомство только с основными понятиями теории множеств, математического анализа и дифференциальной геометрии.

Книга представляет интерес для математиков всех специальностей и физиков-теоретиков. Она полезна студентам, аспирантам и научным работникам, желающим ознакомиться с указанной областью математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Русское издание настоящей книги по сравнению с румынским изданием содержит несколько дополнительных параграфов, касающихся связи между сингулярной симплициальной и кубической симплициальной теорией, теоремы Гуревича об инцидентном изоморфизме групп гомотопии и групп гомологий с целыми коэффициентами. Кроме того, в этом издании предложено обобщение фундаментальной группы и понятия связности с целью получения метода построения главных расслоений с заданной базой. Идея такого обобщения была намечена в румынском издании, а в рамках симплициальных комплексов она была развита Милнором в его работе, опубликованной в Annals of Mathematics в 1956 г.

При подготовке книги к переводу некоторые параграфы были переработаны. Автор надеется, что в таком виде книга станет более удобной тем, кто предполагает по ней изучать алгебраическую и дифференциальную топологию.

Большую благодарность автор приносит профессору Гэлбурэ за ценные замечания и своим ученикам Н. Попеску и Н. Бургеля за помощь при подготовке рукописи дополнительного материала для русского издания книги.

Автор выражает свою признательность профессору Н. В. Ефимову и профессору Г. Ф. Лаптеву, которые предложили перевести книгу на русский язык.

Автор благодарит Н. М. Остиану, взявшую на себя труд перевода книги, а также Г. Ф. Лаптева за большое внимание, которое он уделил редактированию русского перевода.

К. Телеман

Бухарест
9 июня 1967 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — учебник для студентов-математиков старших курсов. В нем изложены элементы алгебраической топологии, необходимые тем, кто желает изучить эту область современной математики, а также тем, кто интересуется приложениями алгебраической топологии к глобальной дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии и теории аналитических функций многих комплексных переменных.

Первые понятия алгебраической топологии в явной форме появились в начале нашего столетия в работах Пуанкаре. Отправным пунктом здесь являлось исследование периодов абелевых интегралов на римановых поверхностях и проблема униформизации алгебраических функций. Пуанкаре мы обязаны такими понятиями, как цепь, цикл, гомологичные циклы, а также строгим определением чисел Бетти и коэффициентов кручения. Пуанкаре ввел также понятия фундаментальной группы и универсальной накрывающей. Эти понятия относятся к классу пространств, которые теперь принято называть дифференцируемыми многообразиями. Они были определены как подпространства n-мерного числового пространства при помощи системы уравнений и системы неравенств. Пуанкаре установил связь между гомологическими инвариантами и существованием кратных интегралов.

Предложения, сформулированные Пуанкаре, были доказаны математиками, заложившими основы алгебраической топологии, такими, как Э. Нётер, С. Лефшец, Александер, Веблен, П. С. Александров, Л. С. Понтрягин, С. Эйленберг, А. Н. Колмогоров, Э. Чех. Их работы показали, что вместо чисел Бетти и коэффициентов кручения целесообразно рассматривать группы гомологий.

С другой стороны, из этих исследований выяснилось, что неестественно ограничиваться дифференцируемыми многообразиями. Были введены более общие топологические пространства, изучаемые в алгебраической топологии: полиэдры, симплициальные комплексы, клеточные комплексы. Были определены группы гомологий произвольного топологического пространства при помощи сингулярных или спектральных гомологий.

Одной из основных задач алгебраической топологии было доказательство инвариантности групп гомологий, определенных для полиэдров. Нужно было показать, что группы гомологий гомеоморфных полиэдров изоморфны. Первые доказательства принадлежат Александеру, П. С. Александрову, Л. С. Понтрягину, Э. Чеху. Наиболее простой путь состоит в построении некоторых групп, связанных с топологической структурой пространства и не связанных с его триангуляцией, и последующем доказательстве изоморфизма этих групп с группами гомологий, вычисленными при помощи триангуляции. В связи с этим были построены теории сингулярных и спектральных гомологий (по Чеху).

Гомотопические группы были введены Гуревичем (1930) как обобщения фундаментальной группы. Их изучение связано с теорией расслоенных пространств. Эти пространства появились первоначально в задачах дифференциальной геометрии, и значение их было выявлено Э. Картаном, Ш. Эресманом и А. Лихнеровичем в связи с теорией инфинитезимальных связностей и групп голономий.

Изучение расслоенных пространств привело к определению некоторых новых инвариантов, устанавливающих важные свойства некоторых специальных топологических пространств.

Возвращение к первоначальной идее Пуанкаре о связи гомологических инвариантов с изучением кратных интегралов на многообразиях привело к развитию важных разделов глобальной дифференциальной геометрии и анализа на дифференцируемых многообразиях. Этим мы обязаны в первую очередь Ж. де Раму, Ж. Лере, А. Картану и др .

В настоящей книге приведено решение простейших задач указанных типов в форме, в которой они встречаются в современных работах. Для облегчения чтения книги мы сочли целесообразным принять изложение, не зависящее от других учебников; все необходимые понятия и результаты приведены в первой главе.

Гл. I содержит понятия из алгебры и общей топологии, которые используются в последующих главах. В гл. II входят основные элементы теории гомологий с целыми коэффициентами. Здесь приводятся определения и первоначальные свойства групп сингулярных, кубических и симплициальных гомологий Чеха. Специально рассматриваются симплициальные полиэдры, образующие класс топологических пространств, играющих важную роль в алгебраической топологии. В гл. III в качестве обобщения гомологии Чеха рассматриваются группы когомологий с коэффициентами в проективной системе. Этот термин заменяет понятие предпучка, употребляемое в иностранной литературе наряду с понятием пучка. Автор стремился, однако, отделить алгебраическую теорию этих объектов от топологической. Поэтому пучки рассматриваются в книге в последнем параграфе. Гл. III играет подготовительную роль для доказательства теоремы де Рама (гл. IV), касающейся дифференцируемых многообразий. Изучение этих многообразий составляет в настоящее время важную область глобальной дифференциальной геометрии.

Гл. IV посвящена гомотопическим группам топологического пространства. Здесь указана связь этих групп с понятием расслоенного пространства в смысле Серра. Здесь введены понятия касательного вектора и векторного или тензорного поля на дифференцируемом многообразии. Эта глава важна также для тех, кто желает углубить свои знания в области алгебраической топологии.

Однако для доказательства теоремы де Рама эта глава не является необходимой.

Для понимания книги необходимо только знакомство с некоторыми элементарными понятиями теории множеств и анализа. Исключение составляет гл. V, которая, хотя и носит самостоятельный характер, не может быть прочитана с пользой без предварительного знакомства по крайней мере с каким-нибудь классическим учебником по дифференциальной геометрии.

Для целостности изложения мы сочли целесообразным приложить добавление, касающееся клеточных комплексов. Эти комплексы приводят к прямым методам вычисления гомологических групп целого ряда пространств, играющих важную роль.

Автор

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

А. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП[1])

1. Определение группы

Множество G элементов $a, b, c, \ldots$ называется *группой*, если в нем определена бинарная операция, сопоставляющая каждой паре элементов a, b из G элемент $c = ab$ из G таким образом, что выполнены следующие три аксиомы.

1. *Операция ассоциативна, т. е.* $(ab)c = a(bc)$ *для любых элементов* a, b, c *из* G.

2. *Существует правый единичный элемент, т. е. в* G *существует такой элемент* e, *что* $ae = a$ *для любого элемента* a *из* G.

3. *Операция обратима справа, т. е. для любого элемента* a *из* G *существует в* G *такой элемент* a', *что* $aa' = e$.

Элемент a' называется *правым обратным элементом* для a и обозначается a^{-1}.

Согласно условию 3, элемент $a^{-1} = a'$ также обладает обратным элементом $a'' = (a^{-1})^{-1}$, удовлетворяющим условию $a'a'' = e$. Следовательно, имеем $(a'a)a' = a'(aa') = a'e = a'$. Умножая справа на a'', получаем $[(a'a)a']a'' = a'a''$, откуда находим $a'a = e$. Это означает, что правый обратный элемент произвольного элемента a в то же время является и левым обратным элементом для a.

Отсюда вытекает, что e является и левым единичным элементом. Действительно, $ea = (aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = ae = a$.

Пусть a, b — два любых элемента группы G. Тогда элемент $x = a^{-1}b$ удовлетворяет уравнению

$$ax = b. \tag{1}$$

Если $x' \in G$ является некоторым решением этого уравнения, т. е. если $ax' = b$, то, умножая слева на a^{-1}, находим $a^{-1}(ax') = a^{-1}b$, или $x' = a^{-1}b$. Следовательно, уравнение (1) имеет в группе единственное решение. Аналогично доказывается существование и единственность решения уравнения $xa = b$.

Отсюда следует, что единица e группы и элемент, обратный данному элементу a, однозначно определены.

---

[1]) Для справок см.: Курош А. Г., Теория групп, ГТТИ, М., 1953; Лекции по общей алгебре, М., 1962.

Если для любых двух элементов a, b из G имеем $ab = ba$, то будем говорить, что группа G *коммутативная*, или *абелева*.

Примерами коммутативных групп являются: аддитивная группа $\mathbf{Z}$ целых чисел, мультипликативная группа отличных от нуля рациональных чисел (а также вещественных или комплексных чисел). Группа перестановок из n элементов служит примером некоммутативной группы.

2. Подгруппы

Подгруппой группы G называется непустое множество G' элементов из G, которое вместе с каждыми двумя элементами a, b содержит и элемент $a^{-1}b$.

Так как множество G' предполагается непустым, то оно содержит по крайней мере один элемент a и, следовательно, будет содержать и элемент $e = a^{-1}a$. Полагая $b = e$, находим, что G' содержит и элемент a^{-1}; наконец, взяв вместо a элемент a^{-1}, убеждаемся, что G' содержит вместе с элементами a, b и их произведение ab.

Мультипликативная группа отличных от нуля рациональных чисел есть подгруппа мультипликативной группы отличных от нуля вещественных чисел, а также мультипликативной группы отличных от нуля комплексных чисел.

3. Гомоморфизмы. Теоремы об изоморфизмах

Пусть заданы две группы G и H. *Гомоморфизмом из* G в H называется отображение f, которое каждому элементу a из G ставит в соответствие элемент $f(a)$ из H так, что для любых a, b из G выполняется условие

$$f(ab) = f(a) f(b). \tag{2}$$

Положив в условии (2) $a = e$, получим $f(b) = f(e) f(b)$.

Следовательно, гомоморфизм f отображает единицу группы G в единицу группы H.

Отсюда следует, что для $a \in G$ $f(a) f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e)$, т. е. $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$.

Гомоморфизм f называется *эпиморфизмом*, если $f(G) = H$, и *мономорфизмом*, если из $f(a) = f(b)$ следует $a = b$ для всех a, $b \in G$. Отображение f называется *изоморфизмом*, если оно является одновременно эпиморфизмом и мономорфизмом.

Элементы a группы G, которые гомоморфизм f отображает в единицу e' группы H, образуют подгруппу группы G. Действительно, если $f(a) = f(b) = e'$, то $f(a^{-1}b) = f(a^{-1}) f(b) = e'e' = e'$.

Эта подгруппа N называется *ядром гомоморфизма* f. Ядро обладает тем свойством, что для любого элемента t группы G и любого элемента a из N элемент $t^{-1}at$ также принадлежит N.

Это свойство следует из равенств

$$f(t^{-1}at) = f(t^{-1})\,f(a)\,f(t) = f(t^{-1})\,e'f(t) = f(t^{-1})\,f(t) = \\ = f(t^{-1}t) = f(e) = e'.$$

Любая подгруппа N группы G, такая, что из $a \in N$ следует $t^{-1}at \in N$ для всех $t \in G$, называется *нормальным делителем* группы G.

Следовательно, *ядро гомоморфизма некоторой группы G в группу H является нормальным делителем группы G.*

Обратно, *любой нормальный делитель N группы G является ядром некоторого гомоморфизма группы G в другую группу H.*

Доказательство. Каждому элементу t группы G поставим в соответствие класс tN, состоящий из элементов вида ta, где a — произвольный элемент из N. Множество всех таких классов обозначим H. Предположим, что два класса tN и uN имеют один общий элемент $ta = ub$, где $ub \in N$. Тогда $t = uba^{-1}$ и $u = tab^{-1}$. Следовательно, все элементы класса tN принадлежат классу uN и обратно. Мы видим, что два класса из множества N либо совсем не пересекаются, либо совпадают.

Множество H будет группой, если определить групповую операцию (умножение) равенством

$$(tN)\,(t'N) = (tt')\,N. \tag{3}$$

Действительно, как мы видели, один и тот же класс может быть представлен различными способами в виде tN. Пусть $tN = uN$ для двух элементов t и u из G. Поскольку $e \in N$, существует такой элемент α из N, что $u = t\alpha$. Аналогично, если $t'N = u'N$, то существует элемент α' из N такой, что $u' = t'\alpha'$.

Произведение классов uN, $u'N$, согласно формуле (3), будет равно $(uN)\,(u'N) = (uu')\,N = (t\alpha t'\alpha')\,N$.

Но, так как N — нормальный делитель, элемент $t'^{-1}\alpha t' = \beta$ принадлежит N и удовлетворяет соотношению $\alpha t' = t'\beta$. Поэтому

$$(uN)\,(u'N) = (tt'\beta\alpha')\,N = (tt')\,N.$$

Отсюда следует, что умножение классов, заданное формулой (3), определено в H независимо от способа представления классов.

Умножение классов ассоциативно. Действительно,

$$[(uN)\,(u'N)]\,(u''N) = (uN)\,[(u'N)\,(u''N)] = (uu'u'')\,N.$$

Класс $N = eN$ является единичным элементом в H:

$$(uN)\,(eN) = (ue)\,N = uN.$$

Для каждого класса uN имеется ему обратный $u^{-1}N$:

$$(uN)\,(u^{-1}N) = (uu^{-1})\,N = eN = N.$$

Следовательно, H — группа, единицей которой является $e' = N$.

Сопоставим произвольному элементу $t \in G$ класс $f(t) = tN$. Тогда формула (3) перепишется так:

$$f(t) f(t') = f(tt').$$

Отсюда следует, что f — гомоморфизм группы G в H. Поскольку $f(N) = e'$, ядро f содержит нормальный делитель N. Обратно, для тех $t \in G$, для которых $f(t) = e'$, класс tN совпадает с N, т. е. t содержится в N. Заметим, что построенный выше гомоморфизм является эпиморфизмом.

Группа H называется *факторгруппой* G по N и обозначается G/N, а f называется *каноническим гомоморфизмом* G в G/N.

Если f является гомоморфизмом группы G в группу H, то элементы вида $f(a)$ образуют подгруппу I группы H. В самом деле, если $x = f(a)$, $y = f(b)$, то $x^{-1}y = f(a^{-1}b)$, следовательно, $x^{-1}y \in I$. Подгруппа I называется *образом гомоморфизма* f.

Теорема 1. *Образом гомоморфизма f является группа, изоморфная факторгруппе группы G по ядру гомоморфизма f.*

В самом деле, обозначим через N ядро гомоморфизма f и через H — факторгруппу G/N. Сопоставляя каждому классу tN элемент $f(tN)$ из I, получаем отображение группы H в I, которое обозначим через g. Отображение g является гомоморфизмом группы H в I, так как $f[(tt')N] = f(tN) f(t'N)$.

Ядро гомоморфизма g содержит класс N. Более того, это ядро совпадает с классом N и, следовательно, сводится к единице группы H. Это показывает, что g — изоморфизм.

Теорема 2. *Пусть N и H — соответственно нормальный делитель и подгруппа группы G. Обозначим через K наименьшую подгруппу группы G, содержащую H и N. Тогда факторгруппы K/N и $H/H \cap N$ изоморфны.*

Доказательство. Группа K может быть определена как подгруппа группы G, состоящая из всех элементов вида nh, где n принимает значения из N и h принимает значения из H. Если nh и $n'h'$ — два таких элемента, то

$$u = (nh)^{-1}(n'h') = h^{-1}n^{-1}n'h' = h^{-1}n_0h',$$

где $n_0 = n^{-1}n'$ — элемент из N. Так как N является нормальным делителем группы G, то $h^{-1}n_0h$ — элемент n'' из N и

$$u = h^{-1}n_0h' = n''h^{-1}h' = n''h'',$$

где $h'' \in H$. Это показывает, что элементы вида nh образуют подгруппу группы G. Очевидно, эта подгруппа содержит группы H и N и сама содержится в любой другой подгруппе группы G содержащей H и N.

Рассмотрим канонический гомоморфизм f группы G в фактор-группу G/N. Этот гомоморфизм отображает подгруппу H группы G в подгруппу H' группы G/N, точнее H' является образом ограничения g гомоморфизма f на группу H. Из теоремы 1 следует, что H' изоморфна факторгруппе группы H по ядру гомоморфизма g. Но это ядро образовано из элементов группы H, принадлежащих ядру гомоморфизма f. Поэтому ядром g является пересечение $N \cap H$. Отсюда следует, что группа H' изоморфна факторгруппе $H/N \cap H$. С другой стороны, H' состоит из классов вида tN, где t — элемент из H. Эти классы принадлежат группе K, и их множество образует факторгруппу K/N. Следовательно, $H' = K/N$, и теорема 2 доказана.

Если f — мономорфизм группы G в группу G' и если N' — нормальный делитель группы G', то элементы из G, образы которых принадлежат N', образуют нормальный делитель N в G. В самом деле, если $f(a)$ и $f(b)$ принадлежат N', то $f(a^{-1}b) = f(a^{-1}) f(b)$ также принадлежит N', и $a^{-1}b$ — элемент из N, следовательно, N есть подгруппа группы G. Если a принадлежит N и t — произвольный элемент группы G, то

$$f(t^{-1}at) = f(t^{-1}) f(a) f(t) = f(t)^{-1} f(a) f(t).$$

Но $f(t)^{-1} f(a) f(t)$ — элемент группы N', так как N' содержит $f(a)$ и является нормальным делителем, следовательно, $t^{-1}at$ является элементом из N, откуда следует, что N является нормальным делителем группы G.

Теорема 3. *Если f — эпиморфизм, то группы G/N и G'/N' изоморфны.*

В самом деле, составим композицию эпиморфизма f группы G на G' и канонического гомоморфизма φ группы G' на G'/N'. В результате получим эпиморфизм f' группы G на группу G'/N'. Ядром эпиморфизма f' является N, так как ядро f' состоит из элементов группы G, образ которых при гомоморфизме f лежит в N'. В силу теоремы 1 группы G/N и G'/N' изоморфны.

Обозначим через $\mathcal{N}$ ядро эпиморфизма f. Очевидно, $\mathcal{N} \subset N$. В силу теоремы 1 группа G' изоморфна группе $G/\mathcal{N}$, а N' изоморфна факторгруппе $N/\mathcal{N}$. Вследствие этого теорема 3 может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 3'. *Если $\mathcal{N} \subset N$ — два нормальных делителя группы G, то группы G/N и $(G/\mathcal{N})/(N/\mathcal{N})$ изоморфны.*

Обобщение теоремы 3 получим, рассматривая гомоморфизм f некоторой группы G в группу G', отображающий нормальный делитель N группы G в некоторый нормальный делитель N' группы G', так что образ N не обязательно совпадает с N'. В этом случае можно показать, что существует гомоморфизм факторгруппы G/N

в факторгруппу G'/N'. В самом деле, класс tN отображается при гомоморфизме f в некоторое подмножество класса $t'N'$ $[t'=f(t)]$, так как $f(N) \subset N'$. Соответствие $tN \to t'N'$ является гомоморфизмом G/N в G'/N', ибо при этом соответствии имеем

$$(uN)(tN) \to (u'N')(t'N') = (u't'N'), \quad (utN) \to (u't'N'),$$

где $u' = f(u)$, $t' = f(t)$. Следовательно, имеет место

Теорема 4. *Пусть задан гомоморфизм f группы G в группу G', отображающий нормальный делитель $N \subset G$ в нормальный делитель $N' \subset G'$. Тогда можно определить каноническим образом некоторый гомоморфизм $\bar{f}$ группы G/N в группу G'/N'.*

Последнее означает, что гомоморфизм группы G/N в группу G'/N' определяется способом, не зависящим от групп G и N и от гомоморфизма f. Гомоморфизм $\bar{f}$ называется гомоморфизмом, индуцированным f на G/N.

4. Система образующих группы

Пусть M — непустое подмножество группы G. Элементы вида

$$ab \ldots c,$$

где $a, b, \ldots, c$ — элементы из M или элементы, обратные некоторым элементам из M, образуют подгруппу группы G. Эта подгруппа называется подгруппой группы G, *порожденной* множеством M. Если подгруппа, порожденная множеством M, совпадает с группой G, то говорят, что M есть *система образующих* группы G.

Любая группа допускает систему образующих, так как в качестве множества M можно взять множество, образованное из всех элементов группы G.

В любой группе для элементов $a, b, \ldots, c$ справедливы соотношения вида

$$aea^{-1} = e, \; aa^{-1} = e, \; (ba)(a^{-1}b^{-1}) = e, \; (cc^{-1})[(baa^{-1})b^{-1}] = e, \; \ldots .$$

Эти соотношения сводятся к тождествам, если воспользоваться свойством ассоциативности умножения в группе и тождествами $aa^{-1} = e$, $bb^{-1} = e$, $ae = a$, ... Левые части этих соотношений характеризуются следующими свойствами:

1. Они являются произведениями четного числа сомножителей $a \neq e$, причем наряду с сомножителем a в произведение входит и его обратный элемент a^{-1}.

2. В произведение входят по крайней мере два сомножителя a, a^{-1}, либо стоящих рядом, либо разделенных сомножителем e.

3. Свойства 1, 2 сохраняются, если опустить в произведении два соседних сомножителя a, a^{-1} либо сомножитель, равный e.

Соотношения $a \ldots b \ldots c = e$, левые части которых обладают перечисленными свойствами, будут называться *универсальными*.

Для любого соотношения $a \ldots b \ldots c = e$, не являющегося универсальным и содержащего p элементов $a, \ldots, b, \ldots, c, \ldots, e$, существует группа, содержащая не меньше чем p элементов, в которой это соотношение не выполняется по крайней мере для некоторых определенных p элементов группы.

Если группа G допускает такую систему образующих M, что между элементами множества M существуют только универсальные соотношения, то говорят, что группа G *свободная*, а M называют *базой* группы G.

Теорема 5. *Любая группа G является факторгруппой некоторой свободной группы F по ее нормальному делителю N.*

Для доказательства рассмотрим множество M элементов, порождающее группу G. Множество M порождает свободную группу F, элементами которой по определению являются слова, образованные буквами из M. Иначе говоря, группа F состоит из символов вида

$$f = ab \ldots c,$$

где $a, b, \ldots, c$ — элементы из M (следовательно, из G). Два символа f и f' будут отождествляться с одним и тем же элементом из F, если один из них может быть получен из второго путем вписывания между двумя его сомножителями или путем вычеркивания некоторого числа сомножителей вида uu^{-1}, e. Произведением двух слов $f = ab \ldots c$, $f' = a'b' \ldots c'$ по определению является слово $ff' = ab \ldots ca'b' \ldots c'$. При этих условиях легко обнаруживается, что F является группой. Группа F — свободная группа с базой M, так как между элементами множества M существуют только универсальные соотношения[1]). Можно определить эпиморфизм группы F на группу G, ставя в соответствие каждому слову $f = ab \ldots c$ элемент группы G, полученный умножением элементов $a, b, \ldots, c$, взятых в том же порядке, в каком они появляются в f. Обозначим через N ядро этого гомоморфизма. Согласно теореме 1, группа G будет изоморфна группе F/N. Нормальный делитель N называется *группой соотношений* группы G.

5. Группы с операторами

Оператором группы G называется гомоморфизм группы G в себя. Если этот гомоморфизм является изоморфизмом, то он называется

[1]) Каждый элемент $a \in M$ есть слово, состоящее из одной буквы. Здесь имеются в виду универсальные соотношения между элементами из M по отношению к умножению их как слов. — *Прим. ред.*

автоморфизмом. Можно получить пример автоморфизма, если взять фиксированный элемент t из группы G и поставить в соответствие каждому элементу x из G элемент $f_t(x)=t^{-1}xt$. f_t — гомоморфизм, так как $f_t(xy)=txyt^{-1}=(txt^{-1})(tyt^{-1})=f_t(x)f_t(y)$. Гомоморфизм f_t является эпиморфизмом, так как любой элемент x' из G при гомоморфизме f_t является образом элемента $x=t^{-1}x't$. Наконец, f_t — мономорфизм, так как соотношение $txt^{-1}=e$ влечет за собой равенство $x=e$. Автоморфизмы вида f_t называются *внутренними* автоморфизмами группы G, а автоморфизмы группы G, не являющиеся внутренними, называются *внешними*.

Автоморфизмы группы G образуют группу $a(G)$, а внутренние автоморфизмы образуют группу, являющуюся нормальным делителем $I(G)$ группы $a(G)$. В самом деле, если a — автоморфизм группы G, а f_t — внутренний автоморфизм группы G, соответствующий элементу t из G, то $a^{-1}f_ta$ — внутренний автоморфизм $f_{a(t)}$. Действительно, для любого x из G имеем

$$(af_ta^{-1})(x)=a[ta^{-1}(x)t^{-1}]=a(t)\cdot a[a^{-1}(x)]\cdot a(t^{-1})=$$
$$=[a(t)]\cdot x\cdot[a(t)]^{-1}=f_{a(t)}(x).$$

Можно заметить, кроме того, что группа $I(G)$ является образом некоторого гомоморфизма группы G в группу $a(G)$, а именно гомоморфизма f, ставящего в соответствие каждому элементу t из G элемент $f(t)=f_t$ из $a(G)$. Отображение $t\longrightarrow f_t$ является гомоморфизмом, так как

$$f_{tt'}(x)=(tt')x(tt')^{-1}=tt'xt'^{-1}t^{-1}=(f_tf_{t'})(x),$$

следовательно, $f_{tt'}=f_tf_{t'}$.

Ядро гомоморфизма f называется *центром* группы G. Оно состоит из элементов группы G, перестановочных со всеми элементами группы G.

Заметим, наконец, что нормальные делители некоторой группы G характеризуются свойством инвариантности относительно внутренних автоморфизмов.

Примером оператора группы G, не являющегося автоморфизмом, служит отображение, которое ставит в соответствие каждому элементу из G единичный элемент e. Этот оператор называется *тривиальным*.

Можно привести другие примеры, рассмотрев аддитивную группу $\mathbf{Z}$ целых чисел и отображение $\mathbf{Z}$ в себя $m\longrightarrow tm$, определяемое целым числом t. Это отображение представляет собой оператор, не являющийся эпиморфизмом, так как его образом является аддитивная группа T целых чисел, делящихся на t. T — нормальный делитель группы $\mathbf{Z}$ и факторгруппа $\mathbf{Z}/T$ имеет $|t|$ элементов, а именно $|t|$ классов вычетов целых чисел по модулю t. Так как гомоморфизм $m\longrightarrow tm$ отображает группу T в себя, то в соответствии с теоремой 4 он будет индуцировать гомоморфизм группы

$\mathbf{Z}/T$ в себя. Это отображение является тривиальным гомоморфизмом. Пусть z — целое число, не равное t. Отображение $m \longrightarrow zm$ также переводит группу T в себя, следовательно, и оно будет индуцировать гомоморфизм φ группы $\mathbf{Z}/T$ в себя. Ядро этого гомоморфизма будет образовано классами по модулю t чисел m, которые при умножении на z дают числа, делящиеся на t. Таким образом, мы получаем примеры операторов φ, не являющихся мономорфизмами.

Предположим, что группа G обладает множеством Δ операторов и что группа G' обладает множеством Δ' операторов, причем между Δ и Δ' существует взаимно однозначное соответствие φ. Будем говорить, что гомоморфизм f группы G в группу G' допускает тройку $(\Delta, \Delta', \varphi)$, если для любого оператора $\delta \in \Delta$ и любого x из G имеем $f[\delta(x)] = \delta'[f(x)]$, где $\delta' = \varphi(\delta) \in \Delta'$.

6. Прямое произведение групп

Пусть заданы две группы G_1 и G_2. Можно построить новую группу, рассмотрев множество пар элементов (x_1, x_2), где x_1 принадлежит группе G_1 и x_2 — группе G_2. Определив произведение двух пар (x_1, x_2) и (y_1, y_2) формулой $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$, получим группу. Единичным элементом этой группы является пара (e_1, e_2), где e_i — единица группы G_i, $i = 1, 2$. Обратным элементом для элемента (x_1, x_2) является элемент (x_1^{-1}, x_2^{-1}). Эта группа обозначается $G_1 \times G_2$ и называется *прямым произведением* групп G_1, G_2.

Группа $G_1 \times G_2$ допускает эпиморфизмы $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$ соответственно в группы G_1 и G_2.

Группа G_1 допускает мономорфизм i_1 в группу $G_1 \times G_2$, а группа G_2 допускает мономорфизм i_2 в группу $G_1 \times G_2$:

$$i_1(x_1) = (x_1, e_2), \quad i_2(x_2) = (e_1, x_2) \qquad (x_i \in G_i, \quad i = 1, 2).$$

Образы мономорфизмов i_1 и i_2, которые мы обозначим через G_1' и G_2', будут подгруппами группы $G_1 \times G_2$, изоморфными группам G_1 и G_2. Любой элемент (x_1, x_2) группы $G_1 \times G_2$ представляет собой произведение элемента группы G_1' на элемент группы G_2':

$$(x_1, x_2) = (x_1, e_2)(e_1, x_2).$$

При этом элементы групп G_1' и G_2' однозначно определены элементом (x_1, x_2).

Можно также заметить, что подгруппы G_1' и G_2' группы $G_1 \times G_2$ перестановочны, так как любой элемент группы G_1' перестановочен с любым элементом группы G_2'. Действительно, элемент группы G_1' имеет вид (x_1, e_2), а элемент группы G_2' имеет вид (e_1, x_2). Тогда

$$(x_1, e_2)(e_1, x_2) = (e_1, x_2)(x_1, e_2) = (x_1, x_2).$$

Ядром эпиморфизма p_i является группа G_j' $(i, j = 1, 2$ и $j \neq i)$.

Эти соображения могут быть обобщены, если рассмотреть произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ групп G_α, зависящих от индекса α, который пробегает произвольное конечное или бесконечное множество A.

Рассмотрим множество G функций g, определенных на A, со значениями в объединении непересекающихся множеств G_α, причем для любого α из A

$$g(\alpha) \in G_\alpha.$$

Такая функция g может быть представлена множеством ее значений $g_\alpha = g(\alpha)$, если положить $g = (g_\alpha)$. В множестве G можно определить произведение формулой $(gg')(\alpha) = g(\alpha) \cdot g'(\alpha)$. Правая часть этого равенства имеет смысл, так как $g(\alpha)$ и $g'(\alpha)$ являются элементами одной и той же группы. Эта формула может быть переписана следующим образом: $(g_\alpha)(g'_\alpha) = (g_\alpha g'_\alpha)$.

Легко проверить, что множество G, снабженное этим законом композиции, образует группу, единичным элементом которой является функция e, ставящая в соответствие каждому индексу α единичный элемент e_α группы G_α, а элементом, обратным элементу (g_α), является элемент (g_α^{-1}).

Группа G, построенная выше, называется *прямым произведением групп* G_α и обозначается $\prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$. Группа G допускает эпиморфизм p_α на группу G_α: $p_\alpha(g) = g(\alpha)$, и каждая группа G_α допускает мономорфизм i_α в группу G:

$$i_\alpha(x_\alpha) = g_{x_\alpha},$$

где через g_{x_α} обозначена функция, определенная на A и равная x_α для индекса α и e_β для любого другого индекса $\beta \neq \alpha$ из A.

Образы G'_α мономорфизмов i_α являются нормальными делителями группы G. Они попарно перестановочны между собой и изоморфны соответствующим группам G_α при каждом α.

Ядро эпиморфизма p_α состоит из функций g, для которых $g(\alpha) = e_\alpha$. Оно изоморфно прямому произведению групп G_β $(\beta \neq \alpha)$.

Из определения гомоморфизмов p_α и i_α следуют соотношения

$$p_\alpha i_\alpha = \mathrm{id}_{G_\alpha}, \quad p_\beta i_\alpha = t_{G_\alpha, G_\beta} \quad (\beta \neq \alpha),$$

где через id_{G_α} обозначен автоморфизм группы G_α, оставляющий инвариантными все элементы группы G_α, а через t_{G_α, G_β} — тривиальный гомоморфизм группы G_α в группу G_β, который отображает каждый элемент группы G_α в единичный элемент e_β группы G_β.

Группа G допускает нормальный делитель G', который образован функциями g, удовлетворяющими соотношениям $g(\alpha) = e_\alpha$ для всех значений индекса α, за исключением конечного числа[1]).

[1]) Иногда G' называют произведением, а G — полным прямым произведением групп G_α. (См. Курош А. Г., Теория групп, ГТТИ, М., 1953, стр. 111.) — *Прим. ред.*

Группа G' является наименьшей подгруппой группы G, содержащей образы G'_α мономорфизмов i_α.

Если G_α — абелевы группы, то G' называется *прямой суммой* групп G_α и обозначается $\sum\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Если множество индексов A конечное, то $G' = G$.

7. Абелевы группы

Абелевы группы обладают рядом специфических особенностей, позволяющих построить весьма глубокую и полную теорию этих групп, которая имеет большое значение для многих вопросов геометрии. Ниже мы остановимся на некоторых основных результатах теории абелевых групп.

Напомним, что в абелевых группах закон композиции обладает свойством коммутативности и обозначается знаком $+$. Нейтральный (единичный) элемент обозначается символом 0 и называется нулем.

Рассмотрим применительно к абелевой группе понятие системы образующих группы. Если M — такая система, то любой элемент $g \in G$ может быть представлен в форме

$$g = c_1 m_1 + \ldots + c_r m_r, \tag{4}$$

где $m_1, \ldots, m_r$ — элементы из M, а $c_1, \ldots, c_r$ — целые числа.

Абелева группа не может быть свободной группой в смысле, определенном выше, так как в такой группе выполняются соотношения $aba^{-1}b^{-1} = e$, которые не являются универсальными. Будем говорить, что *абелева группа G свободная*, если она содержит систему *свободных образующих*. Под этим мы понимаем систему образующих, которые не связаны никаким линейным соотношением вида

$$c_1 m_1 + \ldots + c_r m_r = 0, \tag{5}$$

где $m_i \in M$ и не все c_i равны нулю. Иначе говоря, если M — система свободных образующих, $m_1, \ldots, m_r$ — различные элементы из M, $c_1, \ldots, c_r$ — целые числа, то соотношение (5) удовлетворяется тогда и только тогда, когда все c_i — нули.

В этом случае мы будем говорить, что M является *базой* свободной абелевой группы G.

Группа $\mathbf{Z}$ целых чисел допускает в качестве базы множество, состоящее из одного элемента ($m_1 = 1$), следовательно, $\mathbf{Z}$ — свободная абелева группа.

Напротив, группа $\mathbf{Z}/T$ целых чисел по $\bmod t$ не является свободной, так как для любого элемента u из $\mathbf{Z}/T$ имеем $tu = 0$.

Абелева группа называется группой *конечного ранга*, если она допускает конечную базу. Число элементов базы называется тогда *рангом группы.* Это число не зависит от базы, а зависит только от группы[1]). Элемент g абелевой группы G называется периодическим, если существует целое число m такое, что $m \neq 0$ и $mg = 0$. Наименьшее целое число m, удовлетворяющее этим условиям, называется *порядком* элемента g (или его *периодом*).

Периодические элементы группы G образуют подгруппу Π группы G. В самом деле, если g и g' — периодические элементы с периодами m и m', то $mm'(g-g') = m' \cdot mg - m \cdot m'g' = 0$, следовательно, $(g-g')$ — также периодический элемент. Будем говорить, что Π — периодическая часть группы G. Так как в абелевой группе любая подгруппа является нормальным делителем, то можно рассмотреть факторгруппу $\Gamma = G/\Pi$.

Теорема 6. *Группа Γ не содержит периодических элементов, отличных от нуля.*

Действительно, элемент γ группы Γ является классом вида $g + \Pi$, где g — фиксированный элемент группы G. Для того чтобы $g + \Pi$ был периодическим элементом группы Γ, должно существовать целое число m такое, что $m(g + \Pi)$ совпадает с классом Π; это может иметь место, только если mg принадлежит Π, следовательно, если g — периодический. В этом случае $g + \Pi = \Pi$ и, следовательно, $(g + \Pi)$ — нулевой элемент группы Γ.

Пусть G — произвольная абелева группа; обозначим через L множество ненулевых элементов группы G.

Множество L порождает свободную абелеву группу F — прямую сумму (см. § 6) групп $\mathbf{Z}_\alpha$, изоморфных аддитивной группе $\mathbf{Z}$ целых чисел. Индекс α пробегает все множество L. Элементы f из F являются функциями, определенными на L и принимающими целые значения, не равные нулю только на некотором конечном подмножестве $L_f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ множества L, зависящем от f. Функции f, для которых в группе G имеем

$$\sum f(\alpha)\alpha = f(\alpha_1)\alpha_1 + \ldots + f(\alpha_r)\alpha_r = 0,$$

образуют подгруппу R группы F. Эта подгруппа является ядром гомоморфизма φ группы F в группу G, заданного формулой

$$\varphi(t) = f(\alpha_1)\alpha_1 + \ldots + f(\alpha_r)\alpha_r. \tag{6}$$

Образом гомоморфизма φ, очевидно, является вся группа G. Поэтому φ — эпиморфизм, и по теореме 1 G изоморфна F/R.

Отсюда следует, что абелева группа G изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы F по ее подгруппе R.

[1]) Если мы имеем две базы группы G, то переход от одной базы ко второй осуществляется при помощи некоторой матрицы с целыми элементами, а переход от второй базы к первой — при помощи обратной матрицы. Отсюда следует, что эти две матрицы — квадратные. Поэтому обе базы имеют одно и то же число элементов.

Пусть группа G обладает конечной системой образующих $\{g_1, \ldots, g_p\}$, т. е. любой элемент группы G имеет вид $g = C_1 g_1 + \ldots + C_p g_p$ $(C_i \in \mathbf{Z})$. Мы получим изоморфизм $G \approx F/R$, если возьмем в качестве F свободную абелеву группу с p, образующими $f_1, \ldots, f_p$, и в качестве R подгруппу группы F, образованную из тех элементов $c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p$, для которых $C_1 g_1 + \ldots + C_p g_p = 0$.

Пусть теперь F — произвольная свободная группа и R — ее подгруппа. Покажем, что группа R свободная.

Для доказательства предположим, что множество индексов L вполне упорядочено[1]); для каждого индекса $\alpha \in L$ обозначим через R_α подгруппу группы F, состоящую из функций $f \in R$, равных нулю при индексах $\beta \geqslant \alpha$, а через $\overline{R}_\alpha$ — подгруппу группы F, состоящую из функций $f \in R$, равных нулю при индексах $\beta > \alpha$. Следовательно, $R_\alpha \subset \overline{R}_\alpha$. Обозначим через f_α функцию f, равную нулю при $\beta \neq \alpha$ и равную единице при $\beta = \alpha$. Тогда для произвольного элемента $\bar{f} \in \overline{R}_\alpha$ будем иметь

$$\bar{f} = f + \bar{f}(\alpha) f_\alpha, \tag{7}$$

где функция $f \in R_\alpha$ совпадает с $\bar{f}$ при индексах $\beta \neq \alpha$ и равна нулю при $\beta = \alpha$.

Отображение $\bar{f} \to \bar{f}(\alpha)$ является ограничением на $\overline{R}_\alpha$ проекции p_α группы $\coprod_{\alpha \in L} \mathbf{Z}_\alpha$ на группу $\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{Z}$. Образом его будет подгруппа J_α группы $\mathbf{Z}_\alpha$. Эта группа будет состоять из целых чисел, кратных e_α, где e_α — наименьшее положительное число, содержащееся в J_α[2]).

Из формулы (7) следует, что R_α является ядром эпиморфизма $\bar{f} \to \bar{f}(\alpha)$ группы $\overline{R}_\alpha$ на J_α. Пусть $\bar{f} = r_\alpha$ — элемент группы $\overline{R}_\alpha$ такой, что $r_\alpha(\alpha) = e_\alpha$. Тогда для любого элемента $\bar{f}$ из $\overline{R}_\alpha$ будем иметь $\frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} \in \mathbf{Z}$ и

$$\bar{f} = \frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} r_\alpha + \left[\bar{f} - \frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} r_\alpha\right].$$

---

[1]) Упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если любое его подмножество содержит минимальный элемент, т. е. элемент, который меньше любого другого элемента подмножества. Теорема Цермело утверждает, что любое множество может быть вполне упорядочено. В доказательстве используется аксиома выбора. Для вполне упорядоченного множества L справедлив принцип трансфинитной индукции: если L' — подмножество множества L, содержащее минимальный элемент множества L, и если соотношение $(x \in L;\ x < a) \subset L'$ влечет за собой соотношение $a \in L'$ для любого $a \in L$, то $L' = L$.

[2]) До конца доказательства мы будем рассматривать только такие индексы α, для которых $e_\alpha \neq 0$.

Так как

$$f' = \bar{f} - \frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} r_\alpha \in \overline{R}_\alpha$$

и

$$\left[\bar{f} - \frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} r_\alpha\right](\alpha) = \bar{f}(\alpha) - \bar{f}(\alpha) = 0,$$

то f' принадлежит R_α. Отсюда следует, что любой элемент $\bar{f}$ из $\overline{R}_\alpha$ является суммой элемента f' из R_α и элемента $g_\alpha = \frac{\bar{f}(\alpha)}{e_\alpha} r_\alpha$, принадлежащего подгруппе G_α группы $\overline{R}_\alpha$, порожденной элементом r_α.

Группы G_α, соответствующие различным индексам $\alpha \in L$, попарно не пересекаются вне $\{0\}$. Действительно, если $\beta < \alpha$, то G_β принадлежит $\overline{R}_\beta$, а следовательно, и R_α, в то время как G_α не имеет с R_α общих ненулевых элементов, так как ненулевые элементы из G_α являются ненулевыми функциями от α.

Докажем, что каждая из групп $\overline{R}_\alpha$ является прямой суммой групп G_β, где $\beta \leqslant \alpha$. Теорема справедлива для первого элемента множества L, так как в этом случае R_α содержит только элемент 0, следовательно, $\overline{R}_\alpha$ совпадает с G_α.

Предположим, что мы доказали это свойство для всех индексов $\alpha < \alpha_0$. Мы видели, что произвольный элемент $\overline{R}_{\alpha_0}$ имеет вид

$$r = \rho_{\alpha_0} + g_{\alpha_0},$$

где ρ_{α_0} принадлежит R_{α_0}, а g_{α_0} принадлежит G_{α_0}.

Пусть α' — наименьший из индексов α, обладающих следующим свойством: ρ_{α_0} принадлежит $\overline{R}_\alpha$. Если выразить r в базе (f_β), то член f_{α_0} будет содержаться в g_{α_0}; отсюда следует, что ρ_{α_0} не содержит f_{α_0}, т. е. ρ_{α_0} является комбинацией конечного числа элементов f_{α_i}, где $\alpha_i < \alpha_0$, отсюда следует, что $\alpha' < \alpha_0$. Условие трансфинитной индукции применимо к группе $\overline{R}_{\alpha'}$, и, следовательно, $\overline{R}_{\alpha_0}$ является прямой суммой групп G_β, где $\beta < \alpha_0$, и группы G_{α_0}. Согласно принципу трансфинитной индукции, свойство, сформулированное выше, справедливо для любой группы $\overline{R}_\alpha$.

Если r — произвольный элемент группы R, то он является конечной линейной комбинацией элементов f_α, т. е. принадлежит подгруппе $\overline{R}_\alpha$; из сказанного выше следует, что r является конечной линейной комбинацией элементов r_α, т. е. группа R является прямой суммой групп G_α.

Итак, *любая подгруппа R свободной группы F есть свободная группа.*

Предположим теперь, что группа F/R не содержит ненулевых периодических элементов. В базах (f_α), (r_α) групп F и R мы имели соотношения вида

$$r_\alpha = e_\alpha f_\alpha + \rho_\alpha, \tag{8}$$

где ρ_α — конечная линейная комбинация с целыми коэффициентами из элементов с индексами $\beta < \alpha$, т. е.

$$\rho_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} c_\beta f_\beta,$$

где c_β — целые числа, не равные нулю лишь для конечного числа индексов β. Пусть α_0 — наименьший индекс α, для которого $e_\alpha \neq 0$, и пусть

$$r_{\alpha_0} = c_0 f_{\alpha_0} + c_1 f_{\alpha_1} + c_2 f_{\alpha_2} + \cdots + c_p f_{\alpha_p} \quad (c_0 = e_{\alpha_0} \neq 0) \tag{9}$$

— выражение r_{α_0} в базе (f_β). Коэффициенты c_0, c_i не могут иметь ни одного общего делителя $d > 1$. Действительно, в противном случае

$$c_0 = dc'_0, \quad c_i = dc'_i,$$

и элемент $f = c'_0 f_{\alpha_0} + c'_1 f_{\alpha_1} + \cdots + c'_p f_{\alpha_p}$ порождает в F/R периодический элемент $f + R$ периода d. Так как $c'_0 < c_0$, то f не принадлежит R и $f + R$ есть ненулевой элемент из F/R.

Можно считать, что $c_i > 0$, так как в противном случае мы заменили бы f_{α_i} на $-f_{\alpha_i}$. Пусть $\gamma_0 = c_{i_0}$ — наименьший из коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_p$. Рассмотрим элемент из F, заданный следующим образом:

$$\varphi_0 = f_{\alpha_{i_0}} + q'_{i_1} f_{\alpha_{i_1}} + \cdots + q'_{i_p} f_{\alpha_{i_p}},$$

где для каждого из индексов $i_j = 0, 1, \ldots, p$, $i_j \neq i_0$, мы обозначили через q'_{i_j} целую часть частного от деления c_{i_j} на γ_0. В таком случае можно записать

$$r_{\alpha_0} = \gamma_0 \varphi_0 + c'_{i_1} f_{\alpha_{i_1}} + \cdots + c'_{i_p} f_{\alpha_{i_p}} \quad (c'_{i_j} < c_{i_0}),$$

где c'_{i_j} — остаток от деления c_{i_j} на γ_0 $(j > 0)$.

Теперь можно рассмотреть наименьший из коэффициентов $\gamma_0, c'_{i_1}, \ldots, c'_{i_p}$, например, $\gamma'_0 = c'_{j_0}$; поступая так же, как и выше, приходим к соотношениям

$$r_{\alpha_0} = \gamma'_0 \varphi_1 + c''_{j_1} \varphi_0 + \cdots + c''_{j_p} f_{\alpha_{j_p}}, \quad c''_{j_k} < \gamma'_0,$$

$$\varphi_1 = f_{\alpha_{j_0}} + q''_{j_1} f_{\alpha_{j_1}} + \cdots + q''_{j_p} f_{\alpha_{j_p}}, \quad \alpha_{j_0} \neq \alpha_{i_0}.$$

Продолжая рассуждения, мы будем получать для r_{α_0} линейные комбинации элементов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ с целыми убывающими коэффициентами. Элементы $\varphi_0, \ldots, \varphi_p$ получаются из $f_{\alpha_0}, \ldots, f_{\alpha_p}$

линейным преобразованием, матрица которого — треугольная с целыми элементами, равными 1 на главной диагонали. Отсюда следует, что система $\varphi_0, \ldots, \varphi_p$ эквивалентна системе $f_{\alpha_0}, \ldots, f_{\alpha_p}$ и вместе с элементами f_β ($\beta \neq \alpha_0, \ldots, \alpha_p$) образует новую базу группы F. Так как коэффициенты в последовательных выражениях r_{α_0} строго убывают, то в последнем выражении мы будем иметь только один ненулевой коэффициент. Этот последний коэффициент будет равен 1, так как он является делителем всех коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_p$.

Таким образом, мы пришли к новой базе группы F, содержащей первый элемент базы группы R.

Предположив, что группа R допускает конечную базу, методом индукции покажем, что можно выбрать такую базу (φ_α) группы F, которая содержит некоторую базу группы R.

Действительно, пусть $r_1, \ldots, r_m$ — база группы R. Предположим, что мы выбрали базу (ε_α) группы F так, чтобы $r_1, \ldots, r_i$ были ее первыми i элементами, и покажем, что можно выбрать новую базу (ε'_α), у которой первыми $i+1$ элементами будут $r_1, \ldots, r_{i+1}$. Пусть $r_{i+1} = c_1 r_1 + \cdots + c_i r_i + c'_1 \varepsilon_{i+1} + \cdots + c'_p \varepsilon_{i+p}$ — выражение элемента r_{i+1} в базе (ε_α). Вместо r_{i+1} можно взять в качестве элемента базы группы R элемент $c'_1 \varepsilon_{i+1} + \cdots + c'_p \varepsilon_{i+p}$. Тогда рассуждение, проведенное выше, показывает, что можно выбрать новую базу группы F вида $r_1, \ldots, r_{i+1}, \varepsilon'_{i+2}, \ldots, \varepsilon'_{i+p}$.

Наконец, можно выбрать такую базу группы F, которая содержит базу группы R.

В этом случае группа $F/R = \Gamma$ изоморфна свободной абелевой группе, порожденной элементами базы группы F, которые не принадлежат группе R.

Следовательно, мы доказали

Предложение 1. *Если абелева группа Γ не содержит ненулевых периодических элементов и если Γ является факторгруппой свободной абелевой группы F по подгруппе R с конечным числом образующих, то группа Γ свободная.*

Из предложения 1 следует, в частности, что любая абелева группа Γ с конечным числом образующих, не содержащая ненулевых периодических элементов, — свободная. В самом деле, в этом случае можно предположить, что свободная группа F имеет то же число образующих, что и группа Γ, и тогда подгруппа R будет иметь конечное число образующих.

Рассмотрим теперь случай, когда факторгруппа F/R периодическая. Исчерпывающий результат получается, если предположить, что группа $\Pi = F/R$ имеет конечную систему образующих. Так как каждая из этих образующих имеет конечный период, то группа Π будет конечной. Обратно, любая конечная группа является периодической группой с конечным числом образующих, так как в качестве образующих можно взять элементы группы П.

Пусть П — периодическая группа с r образующими $g_1, \ldots, g_r$. Если $h_1, \ldots, h_r$ — периоды этих образующих, т. е. если $h_i > 0$, $h_i g_i = 0$, $hg_i \neq 0$ для $0 < h < h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то любой элемент группы П может быть представлен в виде

$$t = c_1 g_1 + \cdots + c_r g_r,$$

где $0 \leqslant c_i < h_i$. Отсюда следует, что группа П содержит самое большее $\chi = h_1 h_2 \ldots h_r$ элементов и для любого элемента $t \in П$ имеем

$$\chi t = 0.$$

Пусть d — наименьшее натуральное число, для которого при любом $t \in П$ имеет место равенство $dt = 0$, и пусть $d = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — разложение этого числа на простые множители.

Если t — элемент из П с периодом h, то из соотношений $dt = 0$, $ht = 0$ следует равенство

$$(md + nh)\, t = 0,$$

где m и n — любые целые числа. Мы можем выбрать их так, чтобы число $md + nh$ было наибольшим общим делителем δ чисел d и h. В этом случае $\delta t = 0$ и из соотношений $\delta \leqslant h$, $\delta \geqslant h$ следует $\delta = h$. Это равенство показывает, что период h любого элемента из П является делителем числа d. Следовательно,

$$h = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r} \qquad (0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i).$$

Так как числа $k_i = h/p_i^{\beta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ взаимно просты, то существуют r целых чисел $s_1, \ldots, s_r$ таких, что

$$s_1 k_1 + \cdots + s_r k_r = 1.$$

Поэтому

$$t = (s_1 k_1 + \cdots + s_r k_r)\, t = s_1 t_1 + \cdots + s_r t_r,$$

где

$$t_i = k_i t.$$

Из равенства $h = k_i p_i^{\beta_i}$ следует $p_i^{\beta_i} t_i = ht = 0$, и период элемента t_i самое большее равен $p_i^{\beta_i}$. Период элемента t_i является делителем $p_i^{\beta_i}$, значит, он имеет вид $p_i^{\gamma_i}$, где $0 < \gamma_i \leqslant \beta_i$. Из $p_i^{\gamma_i} t_i = 0$ получим, что

$$p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r} t = 0,$$

и, так как период элемента t равен $h = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$, имеем $\gamma_i = \beta_i$, следовательно, период элемента t_i равен $p_i^{\beta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Пусть Π_i — подгруппа группы Π, образованная из элементов t, для которых $p_i^{\alpha_i}t=0$. Вышеприведенные рассуждения показывают, что для любого элемента t из Π имеет место разложение

$$t=t_1+\cdots+t_r,$$

где $t_i\in\Pi_i$. Это разложение единственно. Действительно, если бы для t существовали два разложения такого вида, то, вычтя одно из другого, мы получили бы разложение элемента 0:

$$0=\bar{t}_1+\cdots+\bar{t}_r \qquad (\bar{t}_i\in\Pi_i).$$

Если хотя бы один из элементов $\bar{t}_i$ был бы отличным от 0, то, умножив последнее соотношение на $h/p_i^{\alpha_i}$, мы получили бы

$$\frac{h}{p_i^{\alpha_i}}\bar{t}_i=0.$$

Это невозможно, так как период $\bar{t}_i$ имеет вид $p_i^{\beta_i}$ $(0<\beta_i\leqslant\alpha_i)$, т. е. он взаимно прост с числом $h/p_i^{\alpha_i}$. Отсюда следует, что Π есть *прямая сумма групп* Π_i.

Пусть теперь Π — такая конечная абелева группа, что период любого ее элемента равен степени фиксированного простого числа p.

Обозначим через p^α наименьшую степень числа p, для которой $p^\alpha t=0$ при любом $t\in\Pi$. Будем говорить, что Π есть *группа Силова типа* p^α.

Пусть Π' — подгруппа группы Π, образованная из элементов t', для которых $p^{\alpha-1}t'=0$. Для любого элемента t из Π имеем $pt\in\Pi'$, так как $p^{\alpha-1}(pt)=p^\alpha t=0$. Отсюда следует, что все элементы факторгруппы $\Pi_1=\Pi/\Pi'$ имеют период p.

Пусть $g_1, \ldots, g_s$ — некоторая система образующих группы Π_1, например множество ее ненулевых элементов. Тогда имеют место соотношения

$$pg_1=0, \ldots, pg_s=0,$$

к которым можно добавить соотношения вида

$$c_1g_1+\cdots+c_sg_s=0.$$

При этом можно считать, что $0\leqslant c_i<p$, так как к левой части можно прибавить члены, кратные pg_i. Если $c_1\neq 0$, то c_1 и p взаимно просты, и существуют такие целые числа m, n, что $mc_1+np=1$. Используя это, получаем соотношение $g_1=c_2'g_2+\ldots$ $\ldots+c_s'g_s$, из которого следует, что Π_1 порождена элементами $g_2, \ldots, g_s$.

Если предположить, что Π_1 не может быть порождена элементами, число которых меньше s, то $c_1=0$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $c_2 = 0, \ldots, c_s = 0$. Отсюда следует, что если группа Π_1 порождена s элементами и не может быть порождена $s-1$ элементами, то Π_1 есть факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной s элементами $f_1, \ldots, f_s$, по подгруппе, порожденной элементами $pf_1, \ldots, pf_s$. Следовательно, Π_1 изоморфна прямому произведению s циклических групп порядка p.

Пусть $t_1, \ldots, t_s$ — s элементов группы Π таких, что $t_i + \Pi' = g_i$. Имеем $pt_i \in \Pi'$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Если $c_1t_1 + \cdots + c_st_s \in \Pi'$, то $c_1g_1 + \ldots + c_sg_s = 0$. Следовательно, c_i должны быть либо равны нулю, либо числам, кратным p. С другой стороны, для любого элемента t из Π выполняется соотношение вида

$$t + \Pi' = c_1g_1 + \cdots + c_sg_s \quad (0 \leqslant c_i < p);$$

следовательно, если ввести обозначения

$$\bar{t} = c_1t_1 + \cdots + c_st_s, \qquad t' = t - \bar{t},$$

то получаем

$$t = \bar{t} + t' \qquad (\bar{t} \in S_1, \ t' \in \Pi'), \tag{10}$$

где S_1 — подгруппа группы Π, порожденная элементами $t_1, \ldots, t_s$.

Предположим, что между элементами t_i имеет место соотношение вида

$$c_1t_1 + \cdots + c_st_s = 0 \qquad (0 \leqslant c_i < p^\alpha).$$

Предположим также, что наибольшая степень числа p, делящая каждый коэффициент c_i, есть p^σ. Если положить

$$c_i = p^\sigma c_i' \qquad (\sigma < \alpha),$$

то по крайней мере один коэффициент c_i' должен быть отличен от нуля и взаимно прост с p. Тогда

$$p^\sigma(c_1't_1 + \cdots + c_s't_s) = 0.$$

Значит, $t' = c_1't_1 + \cdots + c_s't_s \in \Pi'$ и, следовательно, $c_1'g_1 + \ldots$ $\ldots + c_s'g_s = 0$. Это показывает, что коэффициенты $c_1', \ldots, c_s'$ делятся на p. Мы пришли к противоречию, указывающему на то, что между элементами $t_1, \ldots, t_s$ могут существовать соотношения вида

$$c_1t_1 + \cdots + c_st_s = 0$$

только в том случае, когда все c_i делятся на p^α. Следовательно, подгруппа S_1, порожденная элементами $t_1, \ldots, t_s$, является прямым произведением s циклических групп порядка p^α. Из соотношения (10) следует, что группа Π/S_1 состоит только из элементов, имеющих период p^β, где $\beta < \alpha$. Следовательно, Π/S_1 есть группа Силова типа $p^{\alpha'}$ $(\alpha' < \alpha)$.

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Любая группа* Π *Силова типа* p^{α} *есть прямая сумма своих циклических подгрупп порядков* $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_n}$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \leqslant \alpha$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *однозначно определены.*

Проведем доказательство методом индукции по α. При $\alpha=1$ мы видели, что Π разлагается в прямую сумму s циклических групп порядка p. Пусть теперь $\alpha>1$.

Предположим, что теорема справедлива для всех индексов $\alpha'<\alpha$. Применим ее к группе Π/S_1, рассмотренной выше. Пусть

$$\Pi/S_1 = P_1 + \cdots + P_a \tag{11}$$

— разложение группы Π/S_1 в прямую сумму циклических групп. Можно считать, что P_j — это циклическая группа порядка $p^{\alpha'_j}$ $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_a \leqslant \alpha')$.

Обозначим через u'_j образующую группы P_j, а через u_j такой элемент из Π, что

$$u'_j = u_j + S_1.$$

Элементы u'_j $(j=1, 2, \ldots, a)$ удовлетворяют соотношениям

$$p^{\alpha'_j} u'_j = 0.$$

Следовательно, $p^{\alpha_j} u_j \in S_1$. Отсюда получаем разложение

$$p^{\alpha'_j} u_j = m_1^j t_1 + \cdots + m_s^j t_s.$$

Из равенств $p^{\alpha} u_j = p^{\alpha-\alpha'_j} \cdot p^{\alpha'_j} u_j = 0$ вытекает, что

$$p^{\alpha-\alpha'_j} m_1^j t_1 + \cdots + p^{\alpha-\alpha'_j} m_s^j t_s = 0.$$

Значит, $m_1^j, \ldots, m_s^j$ делятся на $p_j^{\alpha'}$. Положив

$$m_i^j = p^{\alpha'_j} n_i^j,$$

$$\bar{u}_j = u_j - n_1^j t_1 - \cdots - n_s^j t_s,$$

получаем соотношения

$$p^{\alpha'_j} \bar{u}_j = 0, \quad \bar{u}_j - u_j \in S_1, \quad u'_j = \bar{u}_j + S_1. \tag{12}$$

Покажем, что из любого соотношения

$$c_1 \bar{u}_1 + \cdots + c_a \bar{u}_a \in S_1 \tag{13}$$

следует, что $c_1 \bar{u}_1 + \cdots + c_a \bar{u}_a = 0$. В самом деле, из (13), переходя к классам по модулю S_1, получаем

$$c_1 u'_1 + \cdots + c_a u'_a = 0.$$

Так как u'_j являются образующими циклических групп P_j, прямая сумма которых есть Π/S_1, то c_j должны делиться на $p^{\alpha'_j}$. Поэтому из (12) следует

$$c_1\bar{u}_1 + \cdots + c_a\bar{u}_a = 0. \tag{14}$$

Соотношение (14) показывает, что $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_a$ порождают подгруппу Π^* группы Π, не имеющую с S_1 никаких общих элементов, кроме элемента 0, и что любое соотношение между $\bar{u}_j$ выводится из первой формулы (12). Следовательно, Π^* есть прямая сумма групп $\bar{P}_j$, порожденных элементами $\bar{u}_j$, а Π есть прямая сумма групп Π^* и S_1. Кроме того, $\bar{P}_j$ — циклические группы порядка $p^{\alpha'_j}$.

Таким образом, мы разложили группу Силова Π типа p^α в прямую сумму $a+s$ циклических групп, из которых первые a имеют порядок $p^{\alpha'_j}$ $(\alpha'_j<\alpha)$, а последние s — порядок p^α. Следовательно, группа Π имеет $p^{\alpha'_1+\cdots+\alpha'_a+s\alpha}$ элементов.

Число p^α и группа S_1 присоединены к группе Π инвариантным образом. Группа S_1 имеет $p^{s\alpha}$ элементов, следовательно, число s вполне определено группой Π. Оно представляет собой число циклических групп максимального порядка p^α, входящих в любое разложение группы Π в прямую сумму циклических групп.

Индукцией по α можно показать, что две прямые суммы циклических групп порядков p^{α_i} и p^{β_i} соответственно изоморфны тогда и только тогда, когда p^{α_i} совпадают с точностью до порядка следования с p^{β_i}.

Мы показали выше, что любая конечная периодическая группа Π является прямой суммой конечного числа подгрупп Π_i, являющихся группами Силова типа $p_i^{\alpha_i}$, где $p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$. Из последней теоремы следует, что группа Π разлагается в прямую сумму конечных циклических групп порядков $p_i^{\beta_i}$ (p_i — простые), которые вполне определены группой Π.

Следовательно, справедлива

Теорема 8. *Любая конечная периодическая группа* Π *изоморфна прямой сумме циклических групп порядков* p^α *(*p *— простые), причем совокупность чисел* p *и показателей* α *образует систему числовых инвариантов группы* Π.

Вернемся теперь к произвольной абелевой группе G и обозначим через Π ее периодическую часть, а через Γ факторгруппу G/Π. Если предположить, что G имеет конечное число образующих, то Γ будет обладать тем же свойством. Мы видели, что тогда группа Γ свободная (предложение 1). Пусть $\{\gamma_\rho\}$ является базой группы Γ и g_ρ — элементы из G, для которых

$$p(g_\rho) = g_\rho + \Pi = \gamma_\rho.$$

Тогда можно определить мономорфизм i группы Γ в G по формуле

$$i(c_1\gamma_1 + \dots + c_p\gamma_p) = c_1g_1 + \dots + c_pg_p.$$

Для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ при этом мономорфизме $i(\gamma) + \Pi = \gamma$, откуда следует, что $pi = 1$. Обозначив через g произвольный элемент группы G и положив

$$\bar{\gamma} = i(g + \Pi), \quad \pi = g - \bar{\gamma},$$

получим

$$\bar{\gamma} + \Pi = i(g + \Pi) + \Pi = g + \Pi.$$

Следовательно, $\pi = g - \bar{\gamma}$ принадлежит группе Π. Отсюда следует, что элемент g является суммой элемента $\bar{\gamma}$ из образа мономорфизма i и элемента π из группы Π. Ставя в соответствие каждому элементу g из G пару (γ, π), где $\gamma = g + \Pi$, $\pi = g - i(\gamma)$, получаем гомоморфизм φ группы G в прямое произведение $\Gamma \times \Pi$; ядро этого гомоморфизма тривиально, так как из $\gamma = \pi = 0$, $\gamma \in \Gamma$, $\pi \in \Pi$, следует $g + \Pi = 0$, откуда $\bar{\gamma} = i(g + \Pi) = 0$, $g = \pi + \bar{\gamma} = 0$. Образ гомоморфизма φ совпадает с группой $\Gamma \times \Pi$, так как любая пара (γ, π) из $\Gamma \times \Pi$ соответствует некоторому элементу из G, а именно элементу $g = \pi + \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma} = i(\gamma)$.

Отсюда следует, что φ — изоморфизм; получаем следующий результат.

Любая абелева группа G с конечным числом образующих изоморфна прямому произведению свободной группы Γ и периодической группы Π.

Группы Γ и Π допускают, очевидно, конечные системы образующих, в частности Π — конечная группа.

Учитывая результаты, полученные ранее для конечных групп, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 9. *Любая абелева группа G с конечным числом образующих изоморфна прямой сумме семейства групп, изоморфных группе целых чисел* $\mathbf{Z}$ *(свободных циклических групп), и семейства конечных циклических групп.*

8. Абелевы группы с операторами

Пусть G — абелева группа и Δ — область операторов этой группы. Композиция двух операторов из Δ дает новый оператор, который мы будем называть *произведением* данных операторов.

Можно определить также *сумму* и *разность* двух операторов f_1, f_2 формулой

$$(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x).$$

Обозначим через $\mathcal{J}_\Delta$ множество операторов группы G, которые могут быть получены из операторов, взятых из области Δ, конечным числом умножений, сложений и вычитаний. Будем говорить, что $\mathcal{J}_\Delta$ есть *кольцо операторов*, порожденное областью Δ. Если $\mathcal{J}_\Delta$ не содержит тождественного оператора $i\,[i(x) = x]$, то мы можем присоединить оператор i к области Δ. Если это сделано, мы будем говорить, что группа G с операторами из $\mathcal{J}_\Delta$ является *модулем над кольцом* $\mathcal{J}_\Delta$.

Кольцо $\mathcal{J}_\Delta$ содержит *тривиальный* оператор O,

$$O(x) = 0,$$

который играет роль нулевого элемента относительно сложения операторов; единичный оператор играет роль единичного элемента относительно умножения операторов. Можно заметить также, что произведение операторов дистрибутивно относительно сложения и вычитания, т. е.

$$f(f_1 \pm f_2) = ff_1 \pm ff_2, \qquad (f_1 \pm f_2)f = f_1 f \pm f_2 f.$$

В самом деле, для $x \in G$ имеем

$$[f(f_1 \pm f_2)](x) = f[f_1(x) \pm f_2(x)] = ff_1(x) \pm ff_2(x).$$

Если каждый ненулевой оператор из $\mathcal{J}_\Delta$ обладает обратным оператором относительно умножения, то будем говорить, что группа G с множеством операторов $\mathcal{J}_\Delta$ является *векторным пространством*, а $\mathcal{J}_\Delta$ будем называть *основным телом* этого векторного пространства и обозначать через k_Δ или k.

Если a — фиксированный элемент из G, то множество образов элемента a, полученных действием на a всех операторов из $\mathcal{J}_\Delta$ (или k_Δ), образует подгруппу G_a группы G, инвариантную относительно рассматриваемых операторов.

Отображение $f \to f(a)$ представляет собой гомоморфизм φ_a кольца $\mathcal{J}_\Delta$ (или k_Δ), рассматриваемого как аддитивная группа, в группу G.

В случае векторных пространств при любом $a \neq 0$ φ_a будет мономорфизмом тела k, так как если для некоторого оператора f из k имеем $f(a) = 0$, то, составляя композицию отображения f и обратного ему отображения, получаем $a = 0$.

Введем полную упорядоченность (см. примечание на стр. 21) в множестве ненулевых элементов векторного пространства V над телом k. Из трансфинитной последовательности, полученной таким образом, удалим элементы, которые могут быть получены из конечного числа элементов, предшествующих им, при помощи операции сложения или при помощи операторов из тела k.

Оставшееся множество называется *базисом* векторного пространства V и обладает следующим свойством: любой элемент из V получается из конечного числа элементов базиса путем сложения или применения операторов из k.

Обозначим через $\{e_\alpha\}$ базис пространства V, определенный, как указано выше, и через V_α — образ мономорфизма $f \to f(e_\alpha)$. Векторное пространство V изоморфно прямой сумме пространств V_α и может быть отождествлено с ней.

Если базис пространства V состоит из конечного числа p элементов, то p называется размерностью пространства V над телом k.

Пусть задано векторное пространство V над телом k. Если λ — оператор из k и x — элемент из V, то элемент $\lambda(x)$ из V будем обозначать λx и называть *произведением* λ *на* x. Условимся пользоваться этими же обозначениями и в случае модулей над кольцом операторов.

9. Группа гомоморфизмов одной группы в другую

Пусть заданы две абелевы группы G и H. Множество гомоморфизмов группы G в группу H будет абелевой группой, если определить сумму двух гомоморфизмов f_1 и f_2 следующей формулой:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Нулевым элементом этой группы является тривиальный гомоморфизм

$$O(x) = 0,$$

а обратным гомоморфизмом к f — гомоморфизм $(-f)$, заданный соотношением

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Группа, определенная таким образом, называется *группой гомоморфизмов группы* G *в группу* H и обозначается $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Если $G = H = \mathbf{Z}$ — группа целых чисел, то любой гомоморфизм f полностью определен образом m_f единицы

$$m_f = f(1),$$

который является целым числом. Имеем

$$m_{f_1+f_2} = (f_1+f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = m_{f_1} + m_{f_2}.$$

Следовательно, отображение $f \to m_f$ есть гомоморфизм группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ в $\mathbf{Z}$. Ядро этого гомоморфизма тривиально, а его образ совпадает, очевидно, с $\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что группа $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

Вообще, если F — свободная абелева группа, изоморфная прямой сумме групп $\mathbf{Z}_\alpha$, изоморфных группе $\mathbf{Z}$, то группа $\operatorname{Hom}(F, \mathbf{Z})$ изоморфна прямому произведению G групп $\mathbf{Z}_\alpha$. Действительно, любой гомоморфизм группы F в группу $\mathbf{Z}$ определен образами в $\mathbf{Z}$ единичных [1]) элементов групп $\mathbf{Z}_\alpha$, которые являются произвольными целыми числами.

Если G есть прямое произведение групп $\mathbf{Z}_\alpha$, изоморфных группе $\mathbf{Z}$, то группа $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G)$ изоморфна G, так как любая система гомоморфизмов $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_\alpha$ определяет гомоморфизм $\mathbf{Z} \to G$.

Если группа G имеет конечное число образующих, то группа $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, G)$ изоморфна группе G. Это становится очевидным, если разложить группу G в прямую сумму конечного числа циклических конечных или бесконечных групп.

Гомоморфизм f некоторой группы G в группу $\mathbf{Z}$ отображает периодический элемент группы G в нуль, так как $\mathbf{Z}$ не имеет ненулевых периодических элементов, и если $mx = 0$, то $f(mx) = mf(x) = 0$. Отсюда следует, что группа $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Z})$ изоморфна группе G/Π, где Π — периодическая часть группы G.

Пусть заданы две группы G и H с одной и той же областью операторов Δ [2]). Будем обозначать через $\operatorname{Hom}_\Delta(G, H)$ группу гомоморфизмов f группы G в группу H, для которых при любом x из G и ∂ из Δ имеем

$$\partial[f(x)] = f[\partial(x)].$$

Если ∂ — оператор из Δ и f — элемент группы $\operatorname{Hom}_\Delta(G, H)$, то отображение

$$f' = \partial(f)\colon x \to \partial[f(x)],$$

вообще говоря, не является элементом группы $\operatorname{Hom}_\Delta(G, H)$, так как для другого оператора ∂' из Δ мы имели бы

$$\partial'[f'(x)] = \partial'(\partial(f(x))) = \partial'(f(\partial(x))) = f(\partial'(\partial(x)))$$

и

$$f'(\partial'(x)) = \partial(f(\partial'(x))) = f(\partial(\partial'(x))).$$

Однако если операторы ∂ и ∂' перестановочны, то $\partial(f)$ — элемент группы $\operatorname{Hom}_\Delta(G, H)$, и Δ можно считать областью операторов и для группы $\operatorname{Hom}_\Delta(G, H)$.

Пусть G и G' — две абелевы группы и h — гомоморфизм группы G в группу G'. Составляя композицию любого гомоморфизма группы G' в группу H с гомоморфизмом h, получаем гомоморфизм группы G в группу H. Таким образом, мы получаем отобра-

---

1) Имеются в виду элементы e_α, которые соответствуют 1 при изоморфизме $\mathbf{Z}_\alpha \to \mathbf{Z}$. — *Прим. ред.*

2) Точнее, существует изоморфизм между областями операторов групп G и H, при помощи которого эти области отождествлены. — *Прим. ред.*

жение группы $\mathrm{Hom}(G', H)$ в группу $\mathrm{Hom}(G, H)$, которое, как легко проверить, является гомоморфизмом абелевых групп.

Точно так же, составляя композицию гомоморфизма h с некоторым гомоморфизмом группы H в группу G, получаем гомоморфизм группы H в группу G'. Следовательно, мы получаем отображение группы $\mathrm{Hom}(H, G)$ в группу $\mathrm{Hom}(H, G')$, которое также является гомоморфизмом.

Эти построения легко обобщить. Предположим, что задан гомоморфизм g группы G в группу G', гомоморфизм h группы H в группу H' и гомоморфизм f группы G' в группу H. Тогда произведение hfg является гомоморфизмом группы G в группу H' и отображение $f \longrightarrow hfg$ — гомоморфизмом группы $\mathrm{Hom}(G', H)$ в группу $\mathrm{Hom}(G, H')$. Этот гомоморфизм обозначается через $\mathrm{Hom}(g, h)$ и совпадает с гомоморфизмами, полученными выше, если предположить, что либо g, либо h является тождественным гомоморфизмом.

Группы $\mathrm{Hom}(G, H)$ встречаются при построении групп сингулярных когомологий топологического пространства.

10. Тензорное произведение двух абелевых групп

Пусть заданы две абелевы группы G и H. Множество $G \times H$ пар (g, h), где g — элемент группы G и h — элемент группы H, можно рассматривать как базу некоторой свободной абелевой группы F[1]. Рассмотрим в этой группе подгруппу R, порожденную элементами вида

$$(g_1, h) + (g_2, h) - (g_1 + g_2, h),$$
$$(g, h_1) + (g, h_2) - (g, h_1 + h_2).$$

Факторгруппа F/R называется *тензорным произведением групп* G и H и обозначается через $G \otimes H$.

Любой элемент из F имеет вид

$$c_1(g_1, h_1) + c_2(g_2, h_2) + \ldots + c_r(g_r, h_r),$$

где c_i — целые числа, g_i — элементы группы G и h_i — элементы из H. Его класс по модулю R есть элемент из $G \otimes H$ и обозначается следующим образом:

$$c_1(g_1 \otimes h_1) + c_2(g_2 \otimes h_2) + \ldots + c_r(g_r \otimes h_r).$$

Образующие подгруппы R образуют в группе $G \otimes H$ класс 0, следовательно, имеют место тождества

$$g_1 \otimes h + g_2 \otimes h = (g_1 + g_2) \otimes h,$$
$$g \otimes h_1 + g \otimes h_2 = g \otimes (h_1 + h_2).$$

---

[1]) F состоит из элементов вида $\sum_i \pm (g_i, h_i)$. —*Прим. ред.*

Если группа G изоморфна прямой сумме групп G_α и если группа H изоморфна прямой сумме групп H_β, то группа $G \otimes H$ изоморфна прямой сумме групп $G_\alpha \otimes H_\beta$.

Предположим, что группа G имеет единственную образующую g, а группа H — единственную образующую h. Если группы G и H свободные, то элементы множества $G \times H$ имеют вид

$$a_{mn} = (mg, nh).$$

Они образуют базу группы F. Элементы группы R имеют вид

$$c_1 a_{m_1 n_1} + \ldots + c_p a_{m_p n_p},$$

где $c_1 m_1 n_1 + \ldots + c_p m_p n_p = 0$. Действительно, это условие линейное и, как легко проверить, ему удовлетворяют образующие группы R. С другой стороны, класс по модулю R элемента $c_1 a_{m_1 n_1} + \ldots + c_p a_{m_p n_p}$ совпадает с классом элемента $(c_1 m_1 n_1 + \ldots$ $\ldots + c_p m_p n_p)(g, h)$, следовательно, он равен $(c_1 m_1 n_1 + \ldots$ $\ldots + c_p m_p n_p) g \otimes h$. Отсюда видно, что группа $G \otimes H$ имеет образующую $g \otimes h$ и $mg \otimes h$ равно нулю тогда и только тогда, когда $m = 0$. Следовательно, $G \otimes H$ — свободная группа с одной образующей и $G \otimes H \approx \mathbf{Z}$.

Если g — периодический элемент периода p, а h — непериодический, то элементы группы $G \times H$ имеют вид

$$a_{mn} = (mg, nh) \qquad (m = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Любой элемент группы $G \otimes H$ будет иметь вид

$$(mg) \otimes h,$$

и этот элемент будет равен нулю тогда и только тогда, когда m делится на p. Следовательно, если $H \approx \mathbf{Z}$, то $G \otimes H \approx G$.

Если g имеет период p и h имеет период q, то база группы F состоит из pq элементов

$$a_{mn} = mg \times nh \qquad (m < p,\ n < q).$$

Как и в предыдущих случаях, любой элемент группы $G \otimes H$ имеет вид $rg \otimes h$ и его можно принять за класс $(rg, h) + R$ или $(g, rh) + R$. Эти классы совпадают с R, только если $rg = 0$ или $rh = 0$, т. е. если r делится на один из периодов p или q.

Если p и q взаимно просты, то существуют целые числа a и b такие, что $ap + bq = 1$, и поэтому

$$g \otimes h = (ap + bq)\, g \otimes h = a \cdot pg \otimes h + b \cdot g \otimes qh = 0.$$

Следовательно, группа $G \otimes H$ сводится к нулевому элементу. Если p и q имеют общий делитель d, то $g \otimes h$ — периодический элемент периода d группы $G \otimes H$, следовательно, $G \otimes H$ — циклическая группа порядка d.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда G — аддитивная группа $\mathbf{R}$ рациональных чисел, а H — циклическая группа порядка p с образующей a ($pa=0$). Для любого числа m/n из $\mathbf{R}$ имеем

$$\frac{m}{n} \otimes a = p\frac{m}{np} \otimes a = \frac{m}{np} \otimes pa = 0.$$

Следовательно, в этом случае группа $G \otimes H$ содержит только нулевой элемент.

Предположим, что задан гомоморфизм g группы G в группу G' и гомоморфизм h группы H в группу H'. Отображение $(x, y) \longrightarrow [f(x), g(y)]$ может быть линейно расширено до гомоморфизма φ свободной группы F в F', который отображает группу R соотношений, дающих группу $G \otimes H$, в группу R' соотношений, дающих группу $G' \otimes H'$. Теорема 4 показывает, что φ индуцирует гомоморфизм группы $G \otimes H = F/R$ в группу $G' \otimes H' = F'/R'$. Этот гомоморфизм обозначается через $f \otimes g$.

Возвратимся к предыдущему примеру, где мы показали, что тензорное произведение $\mathbf{R} \otimes H$ аддитивной группы рациональных чисел на периодическую группу H является тривиальной группой, т. е. сводится к нулевому элементу. Отсюда следует, что группа $\mathbf{R}$ не является свободной группой. В самом деле, если бы группа $\mathbf{R}$ была прямой суммой семейства групп $\mathbf{Z}_\alpha$, изоморфных группе $\mathbf{Z}$, то $\mathbf{R} \otimes H$ была бы изоморфна прямой сумме групп $\mathbf{Z}_\alpha \otimes H$ и каждая из этих групп была бы изоморфна H. Следовательно, группа $\mathbf{R} \otimes H$ не была бы тривиальной.

Таким образом, группа $\mathbf{R}$ является примером группы без периодических элементов, не являющейся свободной группой.

Группа $\mathbf{R}$ порождается элементами вида

$$g_{p,i} = \frac{1}{p^i},$$

где p — простые числа, а i — целые положительные.

Свободная абелева группа F с базой $\{f_{p,i}\}$ допускает эпиморфизм, заданный отображением $f_{p,i} \longrightarrow g_{p,i}$, ядро которого R образовано элементами

$$r_{p,i} = pf_{p,i} - f_{p,i-1}.$$

Для каждого i элементы $f_{p,1}, \ldots, f_{p,i}$ базы группы F могут быть заменены элементами

$$r_{p,2}, \ldots, r_{p,i}, f_{p,i},$$

так как

$$f_{p,i-1} = pf_{p,i} - r_{p,i}, \quad f_{p,i-2} = p(pf_{p,i} - r_{p,i}) - r_{p,i-1}, \ \ldots .$$

Если мы захотим построить базу группы F, которая содержала бы все элементы $r_{p,1}, r_{p,2}, \ldots$, то, пользуясь способом, указанным при доказательстве теоремы 8, нужно поочередно исключить элементы $f_{p,1}$, $f_{p,2}$, ... Оставшаяся система $\{r_{p,i}\}$, однако, не будет базой группы F. Это обстоятельство подтверждает необходимость предположения, что группа должна иметь конечное число образующих.

Предположим, что группы G и H допускают общую область Δ попарно перестановочных операторов. Обозначим через $G \otimes_\Delta H$ факторгруппу группы $G \otimes H$ по подгруппе, образованной элементами вида

$$\partial(g) \otimes h - g \otimes \partial(h).$$

Δ может рассматриваться как область операторов над $G \otimes_\Delta H$, если в свободной группе F, порожденной группой $G \times H$, определить операторы ∂ формулой

$$\partial(g, h) = [\partial(g), h]$$

и заметить, что ∂ отображает подгруппу R в себя, т. е. индуцирует оператор ∂ в группе $G \otimes H$. Этот же оператор ∂ переводит элемент $\partial'(g) \otimes h - g \otimes \partial'(h)$ в элемент

$$\partial\partial'(g) \otimes h - \partial(g) \otimes \partial'(h) = \partial'\partial(g) \otimes h - \partial(g) \otimes \partial'(h) =$$
$$= \partial'(g') \otimes h - g' \otimes \partial'(h) \qquad [g' = \partial(g)].$$

Отсюда следует, что оператор ∂ индуцирует новый оператор в факторгруппе $G \otimes_\Delta H$.

11. Тензорная алгебра векторного пространства

Рассмотрим векторное пространство V над телом k и будем предполагать, что основное тело k коммутативно. Тогда $V \otimes_k V$ будет новым векторным пространством над тем же телом k. Определим по индукции следующие векторные пространства над k:

$$T_1 = V, \quad T_2 = T_1 \otimes V, \ \ldots, \ T_{i+1} = T_i \otimes V, \ \ldots .$$

Прямая сумма T этих векторных пространств будет новым векторным пространством над телом k.

Мы можем определить пространства T_i, непосредственно рассмотрев для $i = 1, 2, \ldots$ свободную абелеву группу F_i, порожденную системами $(x_1, \ldots, x_i)$ элементов из V. В группе F_i рассмотрим подгруппу R_i, порожденную элементами

$$(x_1, \ldots, x_{h-1}, u + v, x_{h+1}, \ldots, x_i) - (x_1, \ldots, x_{h-1}, u, x_{h+1}, \ldots, x_i) -$$
$$- (x_1, \ldots, x_{h-1}, v, x_{h+1}, \ldots, x_i),$$
$$(x_1, \ldots, x_{h-1}, \lambda(x_h), x_{h+1}, \ldots, x_i) - (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda(x_i)),$$

где $h=1, \ldots, i$, а λ — произвольный оператор из тела k. Отображения

$$(x_1, \ldots, x_i) \to (\ldots((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) \ldots) \otimes x_i$$

расширяются до эпиморфизмов группы F_i на группы T_i с ядрами R_i. Из теоремы 1 следует изоморфизм

$$T_i \approx F_i/R_i.$$

Этот изоморфизм определяет изоморфизм

$$T_i \otimes T_j \approx T_{i+j},$$

который индуцирован гомоморфизмом группы $F_i \otimes F_j$ в группу T_{i+j}, заданным отображением базы группы $F_i \otimes F_j$

$$(x_1, \ldots, x_i) \otimes (y_1, \ldots, y_j) \to (x_1, \ldots, x_i, y_1 \ldots y_j) + R_{i+j}.$$

Пусть $y_1, \ldots, y_i$ — фиксированные элементы пространства V. Рассмотрим отображение базы группы F_j в группу F_{i+j}:

$$(x_1, \ldots, x_j) \to (x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_i).$$

Это отображение определяет допустимый гомоморфизм $h_{y_1, \ldots, y_i}$ векторного пространства F_j в векторное пространство F_{i+j}. Этот гомоморфизм отображает подгруппу R_j в подгруппу R_{i+j}, следовательно, $h_{y_1, \ldots, y_i}$ индуцирует, согласно теореме 4, допустимый гомоморфизм $h'_{y_1, \ldots, y_i}$ факторгруппы $T_j = F_j/R_j$ в факторгруппу $T_{i+j} = F_{i+j}/R_{i+j}$. Отображение $(y_1, \ldots, y_i) \to h'_{y_1, \ldots, y_i}$ расширяется до допустимого гомоморфизма h векторного пространства F_i в векторное пространство $\mathrm{Hom}_k(T_j, T_{i+j})$, причем ядром гомоморфизма h является группа R_i. Отсюда следует, что h индуцирует допустимый гомоморфизм h' векторного пространства T_j в группу $\mathrm{Hom}_k(T_j, T_{i+j})$.

Умножение в тензорной алгебре T будет определяться формулой

$$t_1 \otimes t_2 = [h'(t_1)](t_2),$$

которая для $t_1 \in T_i$ и $t_2 \in T_j$ дает элемент из T_{i+j}.

Векторное пространство T, снабженное этим законом умножения, называется *тензорной алгеброй* векторного пространства V. Канонические образы в T элементов $(x_1, \ldots, x_i)$ обозначаются через $x_1 \otimes \ldots \otimes x_i$.

12. Внешняя алгебра векторного пространства

Внешней алгеброй векторного пространства называется векторное факторпространство тензорной алгебры T по подгруппе D

алгебры T, образованной элементами вида

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \otimes x_n + \\ + x_1 \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_n,$$

т. е. суммами попарно взятых элементов $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, которые получаются один из другого перестановкой двух сомножителей x_i и x_j.

Канонический образ элемента $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ во внешней алгебре обозначается через $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Справедливы следующие тождества:

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_j \wedge \ldots \wedge x_n + \\ + x_1 \wedge \ldots \wedge x_j \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_n = 0.$$

Если векторное пространство V имеет конечный базис $e_1, \ldots, e_p$, то любой элемент внешней алгебры является суммой членов вида

$$\lambda e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \qquad (\lambda \in k).$$

Если в некотором члене два индекса оказываются одинаковыми, то в силу предыдущих тождеств такой член равен нулю. Отсюда следует, что внешняя алгебра образована элементами $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant p$. Внешняя алгебра p-мерного векторного пространства является векторным пространством размерности

$$p + C_p^2 + \ldots + C_p^p = 2^p - 1.$$

13. Группы с дифференцированием

Пусть d есть оператор группы G, который в композиции с самим собой дает нулевой оператор, т. е. $d[d(x)] = 0$ для любого x из G. Будем говорить, что d есть *оператор дифференцирования* в G, а пару (G, d) будем называть *группой с дифференцированием*.

В группе с дифференцированием (G, d) ядро оператора d называется *группой циклов* и обозначается Z, а образ B оператора d называется группой *границ*.

Если $x = dy$ — элемент из B[1]), то $dx = ddy = 0$, т. е. x принадлежит Z. Следовательно, группа границ является подгруппой группы циклов. Факторгруппа $H = Z/B$ называется группой гомологий группы с дифференцированием (G, d), и ее элементы называются классами гомологий: $z + B$ является классом гомологий элемента z из Z.

Пусть G' — допустимая подгруппа группы с дифференцированием (G, d), т. е. такая, что $d(G')$ принадлежит G'. Будем говорить просто, что G' есть подгруппа группы (G, d) и что G' можно рас-

---

[1]) Когда не может возникнуть разночтения, мы будем обозначать через dy образ $d(y)$ элемента y.

сматривать как группу с дифференцированием d', где d' — ограничение оператора d на G'. Обозначив через Z' и B' группу циклов и группу границ группы G', получим

$$Z' \subset Z, \qquad B' \subset B.$$

Так как $d(G') \subset G'$, то гомоморфизм d группы G в себя индуцирует в соответствии с теоремой 4 гомоморфизм, который мы будем также обозначать через d, факторгруппы $G'' = G/G'$ в себя.

Пусть B'' и Z'' — группа границ и группа циклов группы G'', а H, H' и H'' — группы гомологий групп G, G' и G''. Рассмотрим произвольный цикл a'' группы G''. Он удовлетворяет условию $da'' = 0$. По определению a'' является классом $a + G'$ элемента a группы G. Условие $d(a + G') = 0$ означает, что da принадлежит G'; поскольку $d(da) = 0$, da принадлежит Z', но не обязательно принадлежит B'.

Пусть b — другой элемент из класса $a + G'$. Тогда b имеет вид $b = a + g'$, где g' — элемент из G', и, следовательно, $db = da + dg'$. Более общо: рассмотрим элемент b'' из того класса гомологии, которому принадлежит элемент a''. Это значит, что b'' имеет вид

$$b'' = a'' + dc'', \qquad c'' \in G''.$$

Если b'' является классом $b + G'$ элемента b группы G, то получаем соотношение вида

$$b + G' = a + G' + dc,$$

где c принадлежит группе G. Следовательно,

$$b = a + dc + g',$$

где g' — элемент группы G'. Применив оператор d, получим

$$db = da + dg'.$$

Отсюда следует, что циклы da и db группы G' принадлежат одному классу гомологий из H'. Это показывает, что с каждым классом гомологий $a'' + B''$ группы G'' ассоциируется класс гомологий $a' + B'$ группы G'. Таким образом, мы получаем отображение группы H'' в группу H'. Легко проверить, что это отображение есть гомоморфизм. Этот гомоморфизм обозначается через ∂ и называется оператором границы пары (G, G').

Из соотношений $Z' \subset Z$ и $B' \subset B$ следует, что гомоморфизм включения i группы Z' в Z индуцирует гомоморфизм группы H' в группу H. Этот гомоморфизм обозначается через i_*.

Канонический эпиморфизм j группы G в группу G'' отображает подгруппу Z в подгруппу Z'' и группу B в группу B''. Действительно, в соответствии с определением оператора d группы G'' имеем

$$d(x + G') = dx + G'.$$

Таким образом, если $dx=0$, то $d(x+G')$ есть нулевой класс группы G'', и, следовательно, $j(x)=x+G'$ является циклом. Иначе говоря, $j(Z)\subset Z''$. Если $y=dx$, то

$$j(y)=dx+G'=d(x+G').$$

Следовательно, $j(y)$ принадлежит B''. Из этих свойств следует, что j индуцирует гомоморфизм j_* группы H в группу H''.

Итак, для пары групп с дифференцированием (G, d) и (G', d) $(G'\subset G)$ определены три гомоморфизма между соответствующими группами гомологий

$$H'\xrightarrow{i_*}H,\quad H\xrightarrow{j_*}H'',\quad H''\xrightarrow{\partial}H'.$$

Из этих гомоморфизмов мы легко можем составить последовательность групп и гомоморфизмов

$$\longrightarrow H''\xrightarrow{\partial}H'\xrightarrow{i_*}H\xrightarrow{j_*}H''\xrightarrow{\partial}H'\xrightarrow{i_*},$$

играющих фундаментальную роль в теории гомологий. Эту последовательность мы можем заменить диаграммой

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dr, "j_*"] & \\ H' \arrow[ur, "i_*"] & & H'' \arrow[ll, "\partial"] \end{tikzcd}$$

В последующих главах мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть (G, d) — группа с дифференцированием и G' — ее допустимая подгруппа $(dG'\subset G')$, такая, что*

$$d^{-1}(G')=G'+B,$$

т. е. любой элемент из G, граница которого лежит в G', является суммой некоторого элемента из G' и некоторой границы. Тогда группы $H(G)$ и $H(G')$ изоморфны.

Доказательство. Обозначим через i гомоморфизм включения G' в G, т. е. отображение, которое ставит в соответствие каждому элементу из G' тот же элемент, рассматриваемый как элемент из G. Так как

$$i(Z')\subset Z,\quad i(B')\subset B\quad (Z'=Z\cap G',\ B'=dG'),$$

то i индуцирует гомоморфизм i_* группы гомологий $H(G)=Z/B$,

$$i_*(z'+B')=z'+B\quad (z'\in Z').$$

Предположим, что $i_*(z'+B')=0$, т. е. $z'+B$ — нулевой класс из $H(G)$. Тогда z' есть элемент из B, следовательно, существует

$u \in G$ такое, что
$$z' = du.$$

По предположению для этого u существуют элементы $u' \in G'$ и $b \in B$ такие, что
$$u = u' + b.$$
Тогда
$$z' = du'.$$

Следовательно, z' — элемент из B' и $z' + B'$ — нулевой класс группы $H(G')$. Отсюда следует, что i_* — мономорфизм.

Пусть теперь $z + B$ — произвольный элемент из $H(G)$. Поскольку $dz = 0$, существуют элементы $z' \in G'$ и $b \in B$ такие, что $z = z' + b$. В этом случае
$$z + B = z' + B = i_*(z' + B').$$

Следовательно, i_* является эпиморфизмом. Лемма доказана.

Замечание. Справедливость леммы становится очевидной, если рассмотреть точную последовательность гомологий пары (G, G'). В самом деле, условие, сформулированное в лемме, сводится к предположению, что любой цикл группы G/G' является границей, т. е. $H(G/G') = 0$. Следовательно, мы получаем точную последовательность (см. § 14)
$$0 \xrightarrow{\partial} H(G') \xrightarrow{i_*} H(G) \xrightarrow{j_*} 0,$$
из которой следует, что ядром гомоморфизма i_* является 0 и образом i_* является $H(G)$, следовательно, i_* — изоморфизм.

14. Точные последовательности групп

Пусть G', G и G'' — три группы и i, j — гомоморфизмы группы G' в группу G и соответственно группы G в группу G''. Это можно записать в виде такой схемы:
$$G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G''.$$

Будем говорить, что эта схема представляет *точную последовательность*, если образ гомоморфизма i совпадает с ядром гомоморфизма j.

Будем считать, что 0 представляет тривиальную группу, содержащую один элемент. Для того чтобы последовательность
$$0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G$$
была точной, необходимо, чтобы j было мономорфизмом. В самом деле, образ гомоморфизма i содержит только единицу группы G, и если этот образ совпадает с ядром гомоморфизма j, то j — мономорфизм.

Последовательность

$$G \xrightarrow{j} G'' \xrightarrow{u} 0$$

будет точной тогда и только тогда, когда j будет эпиморфизмом, так как ядро гомоморфизма u совпадает со всей группой G''.

Последовательность, образованная из нескольких групп и нескольких гомоморфизмов

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \ldots G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots,$$

называется *точной*, если каждая из последовательностей

$$G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1}$$

является точной.

Простым примером точной последовательности будет следующая последовательность:

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \longrightarrow 0,$$

где G' — нормальный делитель группы G, G'' — факторгруппа группы G по G', i — включение G' в G и j — канонический гомоморфизм. В самом деле, в этом случае i есть мономорфизм, j — эпиморфизм, а образ мономорфизма i и ядро гомоморфизма j совпадают с группой G'.

Теорема 10. *Пусть H, H' и H'' — группы, построенные в § 13 для пары абелевых групп с дифференцированием G и G'. Тогда последовательность*

$$H' \xrightarrow{i_*} H \xrightarrow{j_*} H'' \xrightarrow{\partial} H' \xrightarrow{i_*} H$$

точная.

Для доказательства мы должны проверить, что выполняются три условия.

1. Образ гомоморфизма i_* совпадает с ядром гомоморфизма j_*. Действительно, пусть $a' + B'$ — элемент группы H', где a' — цикл из G'. Это значит, что $da' = 0$. Образом этого элемента при гомоморфизме i_* будет класс гомологий $a' + B$ группы H. Каноническим образом цикла a' в факторгруппе $G'' = G/G'$ является класс группы G', представляющий нулевой элемент группы G''. Образом класса $a' + B$ при гомоморфизме j_* по определению является класс гомологий канонического образа $j(a')$ цикла a' в группе G'', т. е. нулевой класс. Следовательно,

$$j_* i_* (a' + B') = j_* (a' + B) = 0$$

для любого класса $a' + B'$ из H', следовательно, ядро гомоморфизма j_* содержит образ гомоморфизма i_*.

Обратно, пусть $a+B$ — класс гомологий цикла a из группы G, так что $j_*(a+B)=j(a)+B''=0$. Тогда $j(a)=a+G'$ является границей некоторого класса $b+G'$ из группы G''. Таким образом,

$$a+G'=db+G'.$$

Отсюда следует, что существует такой элемент c' группы G', что $a=db+c'$ и тогда $a+B=c'+B=i_*(c'+B')$. Следовательно, если $a+B$ принадлежит ядру гомоморфизма j_*, то $a+B$ является образом некоторого элемента группы H' при гомоморфизме i_*.

2. Образ гомоморфизма j_* совпадает с ядром гомоморфизма ∂. Действительно, пусть $a+B$ — элемент группы H, где a — цикл из G, т. е. $da=0$. Тогда $j_*(a+B)=j(a)+B''=(a+G')+dG''$; $\partial j_*(a+B)$ по определению является классом гомологий $da+B'$ элемента da. Но $da=0$, следовательно, $\partial j_*=0$, и, значит, ядро гомоморфизма ∂ содержит образ гомоморфизма j_*.

Обратно, пусть $a''+dG''$ — элемент ядра гомоморфизма ∂, т. е. $\partial(a''+dG'')=0$. Если $a''=j(a)$, где a — элемент группы G, то

$$\partial(a''+dG'')=da+B'=0.$$

Поэтому da — граница некоторого элемента a' из G', т. е. $da=da'$. Но a'' — цикл из G'', следовательно,

$$da''=j(da)+B''=da+G'+B''=0.$$

Из равенства $da=da'$ вытекает, что a имеет вид $a=a'+c$, где c — цикл из группы G. Тогда $j(a)=j(c)+j(a')=j(c)$, откуда мы имеем $a''=j(c)$ и $a''+dG''=j_*(c+B)$. Итак, образ гомоморфизма j_* содержит ядро гомоморфизма ∂.

3. Образ гомоморфизма ∂ совпадает с ядром гомоморфизма i_*. Действительно, пусть $a''+B''$ — класс гомологий из H'', причем $a''=j(a)$. Тогда $\partial(a''+B'')=da+B'$. По определению гомоморфизма i_* имеем $i_*(da+B')=da+B=B$. Следовательно, $i_*\partial(a''+B'')=0$ и ядро гомоморфизма i_* содержит образ гомоморфизма ∂.

Обратно, если $a'+B'$ — элемент из H', где a' — цикл из G', то $da'=0$, и если $i_*(a'+B')=a'+B=0$, то a' есть граница некоторого элемента b группы G, $a'=db$ и $\partial[j(b)+B'']=$ $=db+B'=a'+B'$, следовательно, образ гомоморфизма ∂ содержит ядро гомоморфизма i_*.

Тем самым теорема 10 доказана.

Теорема 11. *Пусть последовательность*

$$G'\xrightarrow{f}G\xrightarrow{g}G''$$

точная. Тогда последовательность

$$\operatorname{Hom}(A, G')\xrightarrow{f^*}\operatorname{Hom}(A, G)\xrightarrow{g^*}\operatorname{Hom}(A, G'') \qquad (15)$$

точная, если группа A — свободная или группа G' — тривиальная, а последовательность

$$\mathrm{Hom}(G'', A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(G', A) \qquad (16)$$

точная, если группа A полная[1]) *или группа G'' является прямой суммой образа гомоморфизма g с другой подгруппой группы G'' (в частности, если g — эпиморфизм).*

Доказательство. В последовательностях (15) и (16) f^*, g^*, f_* и g_* являются гомоморфизмами, заданными формулами

$$f^*(\alpha') = f\alpha', \quad g^*(\alpha) = g\alpha, \quad f_*(\beta) = \beta f, \quad g_*(\beta'') = \beta'' g,$$

где

$$\alpha' \in \mathrm{Hom}(A, G'), \quad \alpha \in \mathrm{Hom}(A, G), \quad \beta \in \mathrm{Hom}(G, A), \quad \beta'' \in \mathrm{Hom}(G'', A).$$

Так как по предположению $gf = 0$, то $(g^* f^*)(\alpha') = gf\alpha' = 0$. Пусть α — гомоморфизм группы A в группу G, так что $g^*(\alpha) = g\alpha = 0$. Тогда для произвольного элемента $a \in A$ имеем $g[\alpha(a)] = 0$, т. е. $\alpha(a)$ принадлежит ядру гомоморфизма g. По предположению $\alpha(a)$ является тогда образом $f(x')$ элемента x' из G':

$$\alpha(a) = f(x').$$

Если группа A свободная и имеет базу $\{a_\lambda\}$, то для каждого индекса λ можно найти в группе G' такой элемент x'_λ, что $\alpha(a_\lambda) = f(x'_\lambda)$. Отображение $a_\lambda \longrightarrow x'_\lambda$, определенное на базе, может быть продолжено до гомоморфизма α' группы A' в группу G', и для любого элемента a из A мы будем иметь

$$\alpha(a) = (f\alpha')(a).$$

Таким образом, $\alpha = f\alpha' = f^*(\alpha')$.

Если группа G' тривиальная, то в качестве α' можно взять тривиальный гомоморфизм.

Пусть β'' — произвольный гомоморфизм группы G'' в группу A. Так как $gf = 0$, то $(f_* g_*)(\beta'') = \beta g f = 0$. Обратно, пусть β — элемент группы $\mathrm{Hom}(G, A)$ такой, что $f_*(\beta) = \beta f = 0$. Тогда для любого элемента x' из G' имеем $(\beta f)(x') = 0$. Следовательно, β отображает образ гомоморфизма f в 0; из сделанных предположений следует, что β будет отображать ядро гомоморфизма g в 0. Поэтому для любого $x \in G$ из $g(x) = 0$ следует $\beta(x) = 0$. Итак, если два элемента группы G имеют один и тот же образ при гомоморфизме g, то они будут иметь один и тот же образ и при гомоморфизме β. Поставим в соответствие каждому эле-

---

[1]) Абелева группа называется полной, если для любого элемента a из группы и любого целого числа p существует в группе элемент b такой, что $pb = a$.

менту x'' из образа гомоморфизма g образ такого элемента x из G при гомоморфизме β, для которого $g(x)=x''$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм γ'' образа G_1'' гомоморфизма g (подгруппы группы G'') в группу A, такой, что

$$\gamma'' g=\beta.$$

Пусть M — множество пар (Γ, γ), где Γ — подгруппа группы G'', содержащая группу G_1'', а γ — гомоморфизм группы Γ в A, который является продолжением гомоморфизма γ''. Множество M может быть частично упорядочено следующим образом. Соотношение

$$(\Gamma, \gamma)<(\Gamma', \gamma')$$

имеет место, если Γ является подгруппой группы Γ', а γ — ограничением гомоморфизма γ' на группу Γ. На основании теоремы Цорна множество M допускает по крайней мере один максимальный элемент $(\bar\Gamma, \bar\gamma)$. Если предположить, что группа A полная, то можно доказать, что $\bar\Gamma=G''$.

Предположим, что группа G'' содержит элемент x'', не принадлежащий $\bar\Gamma$, и что $\bar\Gamma$ содержит элементы, кратные элементу x''. Пусть p — наименьшее целое число, для которого px'' — элемент группы $\bar\Gamma$. Отображение

$$m \longrightarrow \bar\gamma(mpx'')$$

является гомоморфизмом группы целых чисел $\mathbf{Z}$ в группу A. Если группа A полная, то в группе A существует такой элемент a, что $pa=\bar\gamma(px'')$. Тогда отображение $mx'' \longrightarrow ma$ является гомоморфизмом φ группы g, порожденной элементом x'', в A, причем φ совпадает с $\bar\gamma$ на пересечении g с $\bar\Gamma$. Отсюда следует, что гомоморфизмы $\bar\gamma$ и φ имеют общее продолжение. Поэтому $(\bar\Gamma, \bar\gamma)$ может быть максимальным элементом только в том случае, если $\bar\Gamma=G''$.

Если группы g и $\bar\Gamma$ не имеют ни одного общего элемента, то можно продолжить гомоморфизм $\bar\gamma$ на группу, порожденную группой $\bar\Gamma$ и элементом x'', положив $\gamma(x'')=0$. Тогда мы вновь придем к заключению, что $(\bar\Gamma, \bar\gamma)$ — максимальный элемент множества M только в том случае, если $\bar\Gamma=G''$.

Следовательно, если группа A полная, то гомоморфизм γ'' может быть продолжен до гомоморфизма β'' группы G'' в группу A, и мы будем иметь

$$\beta=\beta'' g=g_*(\beta'').$$

Мы получаем, что образ гомоморфизма g_* содержит ядро гомоморфизма f_*. Если группа G'' есть прямая сумма группы G_1'' и другой подгруппы G''_2 группы G'', то можно продолжить гомоморфизм γ'' до гомоморфизма β'' группы G'' в группу A, положив $\beta''(G''_2)=0$.

В частности, теорема 11 справедлива, если A соответственно группа целых чисел для последовательности (15) и группа рациональных (или вещественных) чисел для последовательности (16).

Пусть задан гомоморфизм f группы G в группу H. Будем говорить, что гомоморфизм f нормальный, если в группе H можно найти такую подгруппу H', что H — прямая сумма подгруппы H' и образа гомоморфизма f.

Последнее утверждение теоремы 11 может быть сформулировано и в следующей форме.

Теорема 11'. *Если последовательность*

$$G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \qquad (17)$$

точная и гомоморфизм g нормальный, то последовательность

$$\mathrm{Hom}(G'', A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(G', A) \qquad (18)$$

тоже точная.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 12. *Если последовательность* (17) *точная и гомоморфизмы f и g нормальные, то последовательность*

$$A \otimes G' \xrightarrow{\bar{f}} A \otimes G \xrightarrow{\bar{g}} A \otimes G'' \qquad (19)$$

точная.

Пусть задан гомоморфизм f группы G' в группу G. Рассмотрим гомоморфизм f_1 свободной группы F', порожденной множеством $A \times G'$, в свободную группу F, порожденную множеством $A \times G$, определенный на базе группы F при помощи соотношений

$$f_1(a, x') = [a, f(x')].$$

Гомоморфизм f_1 отображает подгруппу R' группы F', порожденную элементами

$$(a+b,\ x'+y') - (a, x') - (a, y') - (b, x') - (b, y'),$$

в подгруппу R группы F, порожденную элементами

$$(a+b,\ x+y) - (a, x) - (a, y) - (b, x) - (b, y).$$

Следовательно, гомоморфизм f_1 индуцирует, согласно теореме 4, гомоморфизм $\bar{f}$ группы $A \otimes G' = F'/R'$ в группу $A \otimes G = F/R$. Аналогично определяется гомоморфизм $\bar{g}$.

Если $gf=0$, то $g_1 f_1 = 0$ и, следовательно, $\bar{g}\bar{f}=0$.

Если гомоморфизмы f и g нормальные, то группа G является прямой суммой образа G_1 гомоморфизма f со второй ее подгруппой G_2, а G'' — прямой суммой образа G''_1 гомоморфизма g с подгруппой G''_2, и последовательность (17) запишется так:

$$G' \xrightarrow{f} G_1 + G_2 \xrightarrow{g} G''_1 + G''_2. \qquad (20)$$

Если эта последовательность точная, то ядром гомоморфизма g является группа G_1, т. е. ограничение g_2 гомоморфизма g на G_2 есть мономорфизм, причем группы G_1 и G_2 имеют один общий элемент 0.

Обозначим через F_i $(i = 1, 2)$ свободную группу, порожденную множеством $A \times G_i$, и через R_i — группу соотношений, которая приводит к тензорному произведению

$$A \otimes G_i = F_i / R_i.$$

Аналогично определим группы F''_i и R''_i. Если L представляет собой один из символов G, F, R, G'', F'', R'', то группа L содержит прямую сумму групп L_1 и L_2, так как L_1 и L_2 имеют единственный общий элемент — нуль.

Нужно показать, что ядро гомоморфизма $\bar{g}$ в последовательности (19) содержится в образе гомоморфизма $\bar{f}$. Пусть $c_1, \ldots, c_p$ — целые числа и

$$u = c_1 a_1 \otimes x_1 + \ldots + c_p a_p \otimes x_p$$

— элемент из ядра гомоморфизма $\bar{g}$. Равенство

$$\bar{g}(u) = c_1 a_1 \otimes g(x_1) + \ldots + c_p a_p \otimes g(x_p) = 0$$

показывает, что

$$v'' = c_1 [a_1, g(x_1)] + \ldots + c_p [a_p, g(x_p)]$$

является элементом группы R''. Но $v'' \in F''_1$, так как элементы $g(x_1), \ldots, g(x_p)$ принадлежат группе G''_1. Отсюда следует, что $v'' \in R''_1$, т. е. $v'' = m_1 v''_1 + \ldots + m_r v''_r$ — линейная комбинация с целыми коэффициентами элементов v''_i вида

$$[a_i + b_i, g(y_i + z_i)] - [a_i, g(y_i)] - [a_i, g(z_i)] - [b_i, g(y_i)] - [b_i, g(z_i)] =$$
$$= g_1 [(a_i + b_i, y_i + z_i) - (a_i, y_i) - (a_i, z_i) - (b_i, y_i) - (b_i, z_i)],$$

где y_i и z_i — элементы группы G. Так как g — тривиальный гомоморфизм на G_1, то можно считать, что y_i и z_i принадлежат группе G_2. Тогда они определены однозначно их образами $g(y_i)$, $g(z_i)$, поскольку g является мономорфизмом группы G_2.

Из соотношения

$$\sum_{i=1}^{p} c_i [a_i, g(x_i)] - \sum_{j=1}^{r} m_i v''_i = g_1 \Big(\sum_{i=1}^{p} c_i (a_i, x_i) - \sum_{j=1}^{r} m_j v_j \Big) = 0,$$

где элементы $v_j \in R_2$ заданы уравнениями

$$v_j = (a_j + b_j,\ y_j + z_j) - (a_j,\ y_j) - (a_j,\ z_j) - (b_j,\ y_j) - (b_j,\ z_j),$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{p} c_i (a_i,\ x_i) - \sum_{j=1}^{r} m_j v_j$$

принадлежит ядру гомоморфизма g_1 группы F в F''. Но ядром гомоморфизма g_1 является группа F_1. Поэтому

$$v = \sum_{i=1}^{p} c_i (a_i,\ x_i)$$

принадлежит прямой сумме $R_2 + F_1$. Канонический образ

$$u = \sum_{i=1}^{p} c_i a_i \otimes x_i$$

элемента v в $A \otimes G$ принадлежит группе $A \otimes G_1$. Эта группа — образ гомоморфизма $\bar{f}$. Итак, мы доказали, что образ гомоморфизма $\bar{f}$ совпадает с ядром гомоморфизма $\bar{g}$, т. е. что последовательность (19) точная.

15. Индуктивные семейства абелевых групп

Напомним, что частично упорядоченное множество M называется *множеством, фильтрующимся влево*, если для любой пары элементов α и β из M можно найти элемент γ такой, что

$$\gamma < \alpha, \quad \gamma < \beta.$$

Индуктивным семейством называется совокупность F групп G_α и гомоморфизмов f_α^β с индексами α и β из фильтрующегося влево множества M, если выполнены следующие условия.

1. f_α^β определен для любой упорядоченной пары $\alpha < \beta$ и является гомоморфизмом группы G_β в группу G_α.

2. Для любых трех элементов α, β, γ из M, удовлетворяющих условию $\alpha < \beta < \gamma$, имеем

$$f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta f_\beta^\gamma. \tag{21}$$

Пусть G — прямая сумма групп G_α. Элемент $g \in G$ имеет вид

$$g = g_{\alpha_1} + \ldots + g_{\alpha_p}.$$

Элементы g, для которых существует такой индекс α, что

$$\alpha < \alpha_1, \quad \alpha < \alpha_2, \ \ldots, \alpha < \alpha_p,$$

и выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{p} f_{\alpha}^{\alpha_i}(g_{\alpha_i}) = 0,$$

образуют подгруппу N абелевой группы G. Действительно, если

$$g' = g'_{\beta_1} + \ldots + g'_{\beta_q}$$

и для некоторого индекса β ($\beta < \beta_1, \ldots, \beta < \beta_q$)

$$\sum_{j=1}^{q} f_{\beta}^{\beta_j}(g'_{\beta_j}) = 0,$$

то найдется индекс γ ($\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$), для которого

$$\sum_i f_{\gamma}^{\alpha_i}(g_{\alpha_i}) - \sum_j f_{\gamma}^{\beta_j}(g'_{\beta_j}) = f_{\gamma}^{\alpha}\left(\sum_i f_{\alpha}^{\alpha_i}(g_{\alpha_i})\right) - f_{\gamma}^{\beta}\left(\sum_i f_{\beta}^{\beta_j}(g'_{\beta_j})\right) = 0.$$

Эта подгруппа N содержит элементы вида $y - f_{\alpha}^{\beta}(y)$, где $\alpha < \beta$ и $y \in G_{\beta}$.

Факторгруппа $\Gamma = G/N$ называется индуктивным пределом семейства F и обозначается $\lim \operatorname{ind} F$.

Для каждого индекса α суперпозиция включения группы G_{α} в G и канонического гомоморфизма φ группы G в группу Γ является гомоморфизмом f^{α} группы G_{α} в Γ. Следовательно, для $g \in G_{\alpha}$

$$f^{\alpha}(g) = \varphi(g), \tag{22}$$

где g справа рассматривается как элемент группы G. Если $\alpha < \beta$, y — элемент группы G_{β} и $x = f_{\alpha}^{\beta}(y)$, то

$$f^{\alpha} f_{\alpha}^{\beta}(y) = f^{\alpha}(x) = \varphi(x) = \varphi[f_{\alpha}^{\beta}(y)] = f^{\beta}(y) \qquad [y - f_{\alpha}^{\beta}(y) \in N].$$

Следовательно,

$$f^{\beta} = f^{\alpha} f_{\alpha}^{\beta} \quad (\alpha < \beta). \tag{23}$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 13. *Если g_{α} — элемент группы G_{α}, для которого $f^{\alpha}(g_{\alpha}) = 0$, то существует индекс $\beta < \alpha$ такой, что $f_{\beta}^{\alpha}(g_{\alpha}) = 0$.*

В самом деле, из условия $f^{\alpha}(g_{\alpha}) = \varphi(g_{\alpha}) = 0$ следует, что g_{α}, который мы рассматривали как элемент прямой суммы G, принадлежит ядру N. Следовательно, g_{α} имеет вид

$$g_{\alpha} = g_{\alpha_1} + \ldots + g_{\alpha_p}, \tag{24}$$

где можно считать, что индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ различные. При этом для некоторого индекса $\beta < \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ выполнено равенство

$$f_{\beta}^{\alpha_1}(g_{\alpha_1}) + \ldots + f_{\beta}^{\alpha_p}(g_{\alpha_p}) = 0. \tag{25}$$

Так как G является прямой суммой групп G_α, то в формуле (24) один из индексов α_i должен равняться α, а для других индексов должно выполняться условие $g_{\alpha_i}=0$. Если, например, $\alpha_1=\alpha$, то из формул (24), (25) следует, что $g_\alpha = g_{\alpha_1}$ и $f_\beta^{\alpha_1}(g_{\alpha_1})=0$, следовательно, $f_\beta^\alpha(g_\alpha)=0$.

Пусть $F=\{G_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, $F'=\{G'_\alpha, f'^\beta_\alpha\}$ — два индуктивных семейства абелевых групп с одним и тем же множеством индексов M. Предположим, что для каждого индекса α из M задан гомоморфизм φ_α группы G_α в группу G'_α. Будем говорить, что семейство φ гомоморфизмов φ_α является гомоморфизмом семейства F в семейство F', если для любой упорядоченной пары индексов $\alpha<\beta$

$$\varphi_\alpha f_\alpha^\beta = f'^\beta_\alpha \varphi_\beta. \tag{25'}$$

Последовательность

$$F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F'',$$

состоящая из индуктивных семейств F', F, F'' и из гомоморфизмов φ и ψ, называется *точной*, если для каждого индекса α последовательность

$$G'_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} G_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} G''_\alpha$$

точная.

Пусть задан гомоморфизм φ индуктивного семейства F в индуктивное семейство F'. Этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм $\bar{\varphi}$ группы $\Gamma = \lim \operatorname{ind} F$ в группу $\Gamma' = \lim \operatorname{ind} F'$. А именно, гомоморфизмы φ_α определяют гомоморфизм φ^* прямой суммы G групп G_α в прямую сумму G' групп G'_α по формуле

$$\varphi^*(g_{\alpha_1}+\ldots+g_{\alpha_p}) = \varphi_{\alpha_1}(g_{\alpha_1})+\ldots+\varphi_{\alpha_p}(g_{\alpha_p}).$$

Гомоморфизм φ^* отображает нормальный делитель N группы G в нормальный делитель N' группы G', так как из соотношения

$$\sum_i f_\alpha^{\alpha_i}(g_{\alpha_i})=0$$

и равенства (25') следует

$$\sum_i f'^{\alpha_i}_\alpha \varphi_{\alpha_i}(g_{\alpha_i}) = \varphi_\alpha\Big(\sum_i f_\alpha^{\alpha_i}(g_{\alpha_i})\Big)=0.$$

Гомоморфизм $\bar{\varphi}$ можно определить как гомоморфизм факторгруппы G/N в факторгруппу G'/N', индуцированный гомоморфизмом φ^*.

Теорема 14. *Точной последовательности индуктивных семейств*

$$F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F'' \tag{26}$$

соответствует точная последовательность групп

$$\lim \operatorname{ind} F' \xrightarrow{\bar\varphi} \lim \operatorname{ind} F \xrightarrow{\bar\psi} \lim \operatorname{ind} F''. \qquad (27)$$

Доказательство. Пусть x' — элемент группы $\Gamma' = \lim \operatorname{ind} F'$. Элемент x' есть канонический образ $\rho'(g')$ элемента g' прямой суммы G' групп G'_α. Если

$$g' = g'_{\alpha_1} + \ldots + g'_{\alpha_p}$$

и если индекс α меньше любого из индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, то

$$x' = \rho'(g') = \rho'[f'^{\alpha_1}_{\alpha}(g'_{\alpha_1}) + \ldots + f'^{\alpha_p}_{\alpha}(g'_{\alpha_p})] = \rho'(g'_\alpha),$$

где $g'_\alpha = \sum\limits_i f'^{\alpha_i}_{\alpha}(g'_{\alpha_i})$ — элемент группы G'_α. Мы будем иметь

$$\bar\varphi(x') = \rho[\varphi_\alpha(g'_\alpha)]$$

и

$$\bar\psi\bar\varphi(x') = \rho''[\psi_\alpha\varphi_\alpha(g'_\alpha)] = \rho''(0) = 0,$$

так как (26) — точная последовательность. Следовательно, ядро гомоморфизма $\bar\psi$ содержит образ гомоморфизма $\bar\varphi$.

Пусть для некоторого элемента x группы $\Gamma = \lim \operatorname{ind} F$ имеем $\bar\psi(x) = 0$. Можно предположить, что x имеет вид

$$x = \rho(g_\alpha),$$

где g_α — элемент одной из групп G_α. Тогда

$$\bar\psi(x) = \rho''[\psi_\alpha(g_\alpha)] = 0.$$

Поэтому $\psi_\alpha(g_\alpha)$ принадлежит N'' — ядру ρ''.

Из теоремы 13 следует существование такого индекса $\beta < \alpha$, что

$$f''^{\alpha}_{\beta}[\psi_\alpha(g_\alpha)] = 0$$

и в силу соотношения (25′)

$$\psi_\beta[f^\alpha_\beta(g_\alpha)] = 0.$$

Следовательно, $g_\beta = f^\alpha_\beta(g_\alpha)$ принадлежит ядру гомоморфизма ψ_β. Так как последовательность (26) точная, то существует элемент g'_β группы G'_β, для которого

$$g_\beta = \varphi_\beta(g'_\beta).$$

Поэтому

$$\rho(g_\beta) = \bar\varphi[\rho'(g'_\beta)].$$

С другой стороны, используя соотношения (22) и (23), находим

$$\rho(g_\beta) = f^\beta(g_\beta) = f^\beta f^\alpha_\beta(g_\alpha) = f^\alpha(g_\alpha) = \rho(g_\alpha) = x.$$

Следовательно, $x=\overline{\varphi}(x')$, где $x'=\rho'(g'_\beta)$ — элемент группы Γ'. Таким образом, мы доказали, что ядро гомоморфизма $\overline{\psi}$ совпадает с ядром гомоморфизма $\overline{\varphi}$ и последовательность (27) точная.

Теорема 15. *Если гомоморфизмы f^α_β являются мономорфизмами, то f^α также являются мономорфизмами.*

16. Проективные семейства произвольных групп

Рассмотрим семейство групп G_α, зависящее от индекса α, который пробегает частично упорядоченное фильтрующееся вправо множество M. Это значит, что для любых элементов α и β из M существует элемент γ из M, который больше чем α и чем β ($\gamma>\alpha$, $\gamma>\beta$).

Предположим, что для каждой упорядоченной пары индексов $\alpha>\beta$ задан гомоморфизм f^α_β группы G_α в группу G_β так, что для $\alpha>\beta>\gamma$ выполняется равенство

$$f^\beta_\gamma f^\alpha_\beta=f^\alpha_\gamma.$$

Тогда мы будем говорить, что имеем *проективное семейство* $F=\{G_\alpha,\ f^\alpha_\beta\}_{\alpha\in M}$.

Пусть G — прямое произведение групп G_α. Элементы $g=(g_\alpha)$ из группы G, обладающие тем свойством, что для любых индексов $\alpha>\beta$ справедливо равенство

$$g_\beta=f^\alpha_\beta(g_\alpha), \tag{28}$$

образуют подгруппу Γ группы G. В самом деле, пусть для любых элементов $g=(g_\alpha)$ и $g'=(g'_\alpha)$ из G выполняется равенство (28) и

$$g'_\beta=f^\alpha_\beta(g'_\alpha). \tag{28'}$$

Тогда для всех α и β ($\alpha>\beta$) элемент $g''=g^{-1}g'$ имеет компоненты $g''_\alpha=g^{-1}_\alpha g'_\alpha$ и выполнены равенства

$$g''_\beta=g^{-1}_\beta g'_\beta=f^\alpha_\beta(g_\alpha)^{-1}f^\alpha_\beta(g'_\alpha)=f^\alpha_\beta(g^{-1}_\alpha g'_\alpha)=f^\alpha_\beta(g''_\alpha).$$

Группа Γ называется проективным пределом семейства $F=\{G_\alpha,f^\alpha_\beta\}$ и обозначается $\Gamma=\varprojlim\operatorname{pr}F$.

Можно также определить проективный предел для семейства группы G_α с индексами α из множества, фильтрующегося влево. В этом случае гомоморфизмы f^α_β должны быть определены для $\alpha<\beta$ на группе G_α и принимать значения в группе G_β.

Пусть $F=\{G_\alpha,\ f^\alpha_\beta\}$ — индуктивное семейство абелевых групп G_α и гомоморфизмов f^α_β с индексами из фильтрующегося влево множества M, и пусть A — произвольная абелева группа. Рассмотрим группы

$$H_\alpha = \mathrm{Hom}(G_\alpha, A)$$

и гомоморфизмы f'^β_α, заданные уравнениями

$$f'^\beta_\alpha(a_\beta) = a_\beta f^\alpha_\beta,$$

т. е. полученные присоединением к каждому элементу a_β из $\mathrm{Hom}(G_\beta, A)$ его произведения на гомоморфизм f^α_β. Эти группы и гомоморфизмы образуют проективное семейство F' абелевых групп. Пусть $\Gamma = \lim\operatorname{ind} F$, $\Gamma' = \lim\operatorname{pr} F'$. Элемент $x' = (a_\alpha)$ из Γ' представляет собой семейство гомоморфизмов $G_\alpha \xrightarrow{a_\alpha} A$ таких, что для $\alpha > \beta$ имеем $a_\alpha = a_\beta f^\alpha_\beta$. Гомоморфизмы a_α ставят в соответствие каждому элементу x из Γ элемент a из A, однозначно определенный одним из соотношений

$$a = a_\alpha(g_\alpha),$$

причем индекс α и элемент $g_\alpha \in G_\alpha$ выбраны так, что $f^\alpha(g_\alpha) = x$.

В самом деле, если

$$x = f^\alpha(g_\alpha) = f^\beta(g_\beta), \tag{29}$$

то для индекса $\gamma < \alpha$, β будем иметь равенства

$$x = f^\gamma f^\alpha_\gamma(g_\alpha) = f^\gamma f^\beta_\gamma(g_\beta).$$

Положив

$$g_\gamma = f^\alpha_\gamma(g_\alpha), \quad g'_\gamma = f^\beta_\gamma(g_\beta),$$

получим

$$a_\alpha(g_\alpha) = a_\gamma f^\alpha_\gamma(g_\alpha) = a_\gamma(g_\gamma), \tag{30}$$

$$a_\beta(g_\beta) = a_\gamma f^\beta_\gamma(g_\beta) = a_\gamma(g'_\gamma). \tag{30'}$$

Из формул (29) следует

$$f^\gamma(g_\gamma) = f^\gamma f^\alpha_\gamma(g_\alpha) = f^\alpha(g_\alpha) = x,$$

$$f^\gamma(g'_\gamma) = f^\gamma f^\beta_\gamma(g_\beta) = f^\beta(g_\beta) = x,$$

откуда $f^\gamma(g_\gamma - g'_\gamma) = 0$. Из теоремы 13 вытекает, что для некоторого индекса $\delta < \gamma$ имеем $f^\gamma_\delta(g_\gamma - g'_\gamma) = 0$. Поэтому

$$f^\gamma_\delta(g_\gamma) = f^\gamma_\delta(g'_\gamma) = g_\delta \in G_\delta.$$

Формулы (30) и (30′) приводят к равенствам

$$a_\alpha(g_\alpha) = a_\gamma(g_\gamma) = a_\delta f^\gamma_\delta(g_\gamma) = a_\delta(g_\delta),$$

$$a_\beta(g_\beta) = a_\gamma(g'_\gamma) = a_\delta f^\gamma_\delta(g'_\gamma) = a_\delta(g_\delta),$$

и мы получаем

$$a_\alpha(g_\alpha) = a_\beta(g_\beta).$$

Таким образом, определено отображение u группы Γ' в группу $\mathrm{Hom}(\Gamma, A)$. Именно, если $x'=(a_\alpha)$ — элемент из Γ' и $x=f^\alpha(g_\alpha)$ — элемент из Γ, то

$$[u(x')](x)=a_\alpha(g_\alpha). \tag{31}$$

Легко проверить, что u есть гомоморфизм группы Γ' в группу $\mathrm{Hom}(\Gamma, A)$.

Гомоморфизм $u(x')$ из группы $\mathrm{Hom}(\Gamma, A)$ — тривиальный, если $a_\alpha(g_\alpha)=0$ для любого индекса α и любого элемента $g_\alpha \in G_\alpha$. Следовательно, $u(x')=0$ тогда и только тогда, когда $x'=0$. Это означает, что u — мономорфизм.

Пусть φ — некоторый гомоморфизм группы Γ в группу A. Составляя композицию гомоморфизма φ с каждым из гомоморфизмов f^α, получаем семейство $x'=(a_\alpha)$ гомоморфизмов a_α групп G_α в группу A. Для двух индексов $\alpha > \beta$ и произвольного элемента g_α из G_α имеем

$$a_\alpha(g_\alpha)=\varphi f^\alpha(g_\alpha),$$

$$a_\beta f^\alpha_\beta(g_\alpha)=\varphi[f^\beta f^\alpha_\beta(g_\alpha)]=\varphi[f^\alpha(g_\alpha)].$$

Из этих равенств видно, что $a_\alpha=a_\beta f^\alpha_\beta$. Поэтому $x'\in\Gamma'$ и для элемента g_α из G_α имеем $a_\alpha(g_\alpha)=\varphi[f^\alpha(g_\alpha)]=\varphi[\rho(g_\alpha)]$. Следовательно, $[u(x')][\rho(g_\alpha)]=\varphi[\rho(g_\alpha)]$ и $u(x')=\varphi$.

Это означает, что любой элемент φ группы $\mathrm{Hom}(\Gamma, A)$ является образом $u(x')$ элемента x' из Γ'. Значит, мономорфизм v является в то же время и эпиморфизмом, т. е. определен изоморфизм

$$u:\mathrm{Hom}(\Gamma, A)\approx\Gamma'.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 16. *Если A — абелева группа, то с каждым индуктивным семейством $F=\{G_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ абелевых групп можно связать проективное семейство F' абелевых групп*

$$G'_\alpha=\mathrm{Hom}(G_\alpha, A),$$

причем имеет место изоморфизм $\lim\mathrm{pr}\, F'\approx\mathrm{Hom}(\lim\mathrm{ind}\, F, A)$.

17. Цепные комплексы

Цепным комплексом (комплексом K) называется абелева группа с дифференцированием (G, d), допускающая разложение в прямую сумму $G=\Sigma C_i$ подгрупп $C_i=C_i(K)$, $i=0, 1, 2, \ldots$, если $d(C_i)\subset C_{i-1}$ и $d(C_0)=0$. Элементы группы C_i называются *цепями размерности* i.

Введем подгруппы циклов и границ размерности i $(i=0, 1, 2, \ldots)$

$$Z_i(K)=Z\cap C_i(K), \quad B_i(K)=B\cap C_i(K).$$

Очевидно, что $B_i \subset Z_i$. Факторгруппы

$$H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K)$$

называются *группами гомологий* (размерности i) комплекса K.

Пусть H — группа гомологий группы с дифференцированием (G, d), и пусть $H(K)$ — прямая сумма групп $H_i(K)$. $H(K)$ называется полной группой гомологий комплекса K. Если $x+B$ — класс гомологий из H $(dx=0)$, то, положив

$$x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_p} \qquad (x_{i_k} \in C_{i_k})$$

(все индексы $i_1, \ldots, i_p$ различные), будем иметь

$$dx = dx_{i_1} + \ldots + dx_{i_p} = 0 \qquad (dx_{i_k} \in C_{i_k - 1}).$$

Так как индексы $i_k - 1$ также различные, мы получаем соотношения

$$dx_{i_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

из которых следует, что x_{i_k} — циклы размерности i_k. Если заменить цикл x циклом $x + dy = x'$ из того же класса гомологий (циклы, принадлежащие одному классу гомологий, называют гомологичными), то циклы x_{i_k} заменяются циклами вида $x'_{i_k} = x_{i_k} + dy_{i_k}$. Следовательно, циклы x_{i_k} и x'_{i_k} определяют один и тот же класс $x_{i_k} + B_{i_k}$. Поэтому можно определить гомоморфизмы p_{i*} группы H в группы $H_i(K)$ и гомоморфизм p_* группы H в группу $H(K)$ формулами

$$p_{i*}(x+B) = p_i(x) + B_i, \tag{32}$$

$$p_*(x+B) = \sum_{i=0,\,1,\,2,\,\ldots} p_{i*}(x+B), \tag{33}$$

где p_i — проектирование группы G на группу $C_i(K)$. Так как для каждого x из прямой суммы G существует конечное число ненулевых проекций $p_i(x)$, то последняя формула определяет элемент из прямой суммы $H(K)$ групп $H_i(K)$.

Предположим, что для некоторого элемента x из Z имеем $p_*(x+B) = 0$. Тогда $p_{i*}(x+B) = 0$ для всех индексов i. Следовательно, если

$$x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_p},$$

то x_{i_k} являются границами; в этом случае x также является границей, и $x+B$ является нулевым элементом группы H. Отсюда вытекает, что p_* — мономорфизм.

Пусть

$$h = (x_{i_1} + B_{i_1}) + \ldots + (x_{i_p} + B_{i_p})$$

— элемент группы $H(K)$. Положив

$$x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_p},$$

получим $h = p_*(x + B)$. Следовательно, p_* — эпиморфизм. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 17. *Группа гомологий группы с дифференцированием (G, d) изоморфна полной группе гомологий комплекса K.*

Предположим, что для каждого индекса i мы выбрали подгруппу C'_i группы цепей $C_i(K)$ комплекса K. Если для всех индексов i справедливо соотношение $d(C'_i) \subset C'_{i-1}$, то говорят, что группы C'_i образуют подкомплекс K' комплекса K. Этот подкомплекс будет определен в подгруппе $\left(G' = \sum_i C'_i, d\right)$ группы с дифференцированием (G, d).

Точная диаграмма, ассоциированная с парой групп с дифференцированием (G, G') (см. § 13)

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ {}^{i_*}\nearrow & & \searrow^{j_*} \\ H' & \longleftarrow & H'' \end{array}$$

приводит к точной последовательности

$$\begin{gathered} 0 \leftarrow H_0(K'') \xleftarrow{j_*} H_0(K) \xleftarrow{i_*} H_0(K') \xleftarrow{\partial} \\ \leftarrow H_1(K'') \xleftarrow{j_*} H_1(K) \xleftarrow{i_*} H_1(K') \xleftarrow{\partial} H_2(K'') \leftarrow \ldots \\ \ldots \leftarrow H_i(K') \xleftarrow{\partial} H_{i+1}(K'') \xleftarrow{j_*} H_{i+1}(K) \xleftarrow{i_*} H_{i+1}(K') \leftarrow \ldots, \qquad (34) \end{gathered}$$

где через K'' мы обозначили комплекс, ассоциированный с группой с дифференцированием $G'' = G/G'$ и с ее разложением в прямую сумму групп

$$C_i(K'') = C_i(K)/C_i(K').$$

Последовательность (34) называется точной последовательностью гомологий пары комплексов K, K' $(K' \subset K)$.

18. Симплициальные комплексы

Пусть M — произвольное множество и Σ — множество конечных подмножеств множества M. Множество Σ называют *симплициальным комплексом* с вершинами в множестве M, если из соотношений $\beta \in \Sigma$ и $\alpha \subset \beta$ следует $\alpha \in \Sigma$. Элементы множества Σ называются *гранями*. Если грань $\alpha \in \Sigma$ состоит из $q+1$ элементов множества M, то говорят, что α имеет *размерность* q, а эти $q+1$ элементов, которые образуют грань α, называются *вершинами* грани α.

Сингулярным симплексом $s=(x_0, \ldots, x_p)$, $x_i \in M$, размерности p называется упорядоченное множество, состоящее из $p+1$ элементов x_i, не обязательно различных, которые расположены на одной грани α комплекса Σ. Сингулярные симплексы комплекса Σ порождают свободную абелеву группу $C(\Sigma)$ [1]), которая может быть разложена в прямую сумму групп $C_q(\Sigma)$, где $C_q(\Sigma)$ — подгруппа группы $C(\Sigma)$, порожденная сингулярными симплексами размерности q. Элементы группы $C(\Sigma)$ называются сингулярными цепями.

Граница сингулярного симплекса $s=(x_0, \ldots, x_p)$ $(x_i \in \alpha,\ \alpha \in \Sigma)$ определяется формулой

$$ds = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p),$$

где символ $\hat{x}_i$ означает, что из соответствующей скобки удалена вершина x_i. Отображение d, определенное на образующих группы $C(\Sigma)$, можно продолжить до гомоморфизма группы $C(\Sigma)$ в себя, если положить

$$d(m_1 s_1 + \ldots + m_r s_r) = m_1\, ds_1 + \ldots + m_r\, ds_r.$$

Если s — симплекс размерности 0, т. е. симплекс, образованный одной вершиной, то по определению $ds=0$.

Теорема 18. *Оператор d является дифференцированием в группе $C(\Sigma)$.*

Достаточно для произвольного сингулярного симплекса s комплекса Σ проверить равенство $dd(s)=0$. Пусть

$$s=(x_0, x_1, \ldots, x_p) \quad (x_i \in M)$$

— симплекс размерности p. Для каждого индекса i $(0 \leqslant i \leqslant p)$ обозначим через s_i симплекс размерности $p-1$,

$$s_i = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p) = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p),$$

а для двух различных индексов $i<j$ $(0 \leqslant i < j \leqslant p)$ через s_{ij} симплекс размерности $p-2$,

$$s_{ij} = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_p).$$

Тогда

$$ds = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i s_i,$$

$$ds_i = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (s_i)_j,$$

$$dd(s) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i ds_i = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Big(\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (s_i)_j\Big).$$

[1]) Ее элементами являются формальные суммы сингулярных симплексов. — *Прим. ред.*

Заметим, что для $j < i$

$$(s_i)_j = s_{ji}$$

и для $j \geqslant i$

$$(s_i)_j = s_{i,\,j+1},$$

так как j-м членом последовательности $s_i = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$ является x_{j+1}. Поэтому

$$dd(s) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j s_{ji} + \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j=i}^{p-1} (-1)^j s_{i,\,j+1}.$$

Для любых двух индексов $r < t$ коэффициент при s_{rt} в выражении $dd(s)$ равен $(-1)^{r+t} + (-1)^{r+t-1} = 0$.

Таким образом, $dd(s) = 0$.

Отсюда следует, что группы C_i и оператор d определяют комплекс цепей $C(\Sigma) = K$.

Группы гомологий $H_i[C(\Sigma)]$ называются *группами гомологий с целыми коэффициентами симплициального комплекса* Σ и обозначаются $H_i(K) = H_i(\Sigma)$. Симплициальный комплекс Σ' называется подкомплексом комплекса Σ, если все грани комплекса Σ' являются гранями комплекса Σ. Сингулярные симплексы комплекса Σ' порождают подгруппы C'_i групп C_i, образуя подкомплекс $C(\Sigma')$ цепного комплекса $C(\Sigma)$.

Группы гомологий пары $[C(\Sigma), C(\Sigma')]$ называются *группами относительных гомологий с целыми коэффициентами пары* (Σ, Σ') и обозначаются $H_i(\Sigma, \Sigma')$.

С симплициальными комплексами Σ и Σ' $(\Sigma' \subset \Sigma)$ ассоциируется точная последовательность гомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_i(\Sigma') \xrightarrow{i_*} H_i(\Sigma) \xrightarrow{j_*} H_i(\Sigma, \Sigma') \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(\Sigma') \xrightarrow{i_*} \ldots,$$

называемая *точной последовательностью гомологий пары* (Σ, Σ').

Докажем теперь теорему, которая упрощает вычисление групп гомологий симплициального комплекса.

Предположим, что мы упорядочили некоторым образом множество M вершин симплициального комплекса Σ. Обозначим через $C'(\Sigma)$ цепной комплекс, порожденный упорядоченными симплексами $(x_{i_0}, \ldots, x_{i_p})$, у которых порядок следования вершин согласуется с порядком, принятым в множестве M, следовательно, $x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots \ldots < x_{i_p}$. Комплекс $C'(\Sigma)$ является подкомплексом комплекса $C(\Sigma)$, так как для любого симплекса s из $C'(\Sigma)$ симплексы цепи ds также принадлежат $C'(\Sigma)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 19. *Группы гомологий комплексов $C(\Sigma)$, $C'(\Sigma)$ одинаковой размерности изоморфны.*

Поставим в соответствие каждому симплексу $s=(x_0, \ldots, x_p)$ из Σ упорядоченный симплекс $(x_{i_0}, \ldots, x_{i_p})$, образованный теми же вершинами, но взятыми в порядке, установленном в множестве M:

$$x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots < x_{i_p}.$$

Определим гомоморфизм f группы $C(\Sigma)$ в группу $C'(\Sigma)$, положив

$$f(x_0, \ldots, x_p)=\varepsilon(x_{i_0}, \ldots, x_{i_p}),$$

где ε есть $+1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности подстановки $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & p \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$. Затем распространим отображение f по линейности на любую цепь из $C(\Sigma)$ [1].

Немедленно можно убедиться, что $fdc=dfc$ для любой цепи c из $C(\Sigma)$ и $fc=c$ для $c \in C'(\Sigma)$.

Определим теперь такой гомоморфизм D группы $C(\Sigma)$ в группу $C'(\Sigma)$, при котором для любой цепи c из $C(\Sigma)$

$$f(c)-c=dDc+Ddc \tag{35}$$

и для любого симплекса σ цепь $D\sigma$ состоит из симплекса с вершинами в σ и $D\sigma=0$ для $\sigma \in C'(\Sigma)$.

Построение оператора D ведется индукцией по размерности цепи c.

Если размерность c равна нулю, то $f(c)=c$, $dc=0$, и уравнение (35) удовлетворяется, если положить $Dc=0$.

Предположим теперь, что мы построили оператор D для цепей, размерность которых меньше q, и рассмотрим симплекс $s=(x_0, \ldots, x_q)$ из $C(\Sigma)$. ds — это цепь размерности $q-1$, и для нее оператор D определен. Рассмотрим цепь

$$Ds=x_0[f(s)-s-D\,ds],$$

где x_0 — вершина симплекса s, а запись множителя x_0 перед скобкой означает, что каждый симплекс цепи c дополняется вершиной x_0, за которой следуют его старые вершины в том же порядке. Тогда, пользуясь формулой (35), получаем

$$\begin{aligned} dDs &= f(s)-s-D\,ds-x_0\,d\,[f(s)-s-D\,ds]= \\ &= f(s)-s-D\,ds-x_0\,[df(s)-ds-(f(ds)-ds-Dd\,ds)]= \\ &= f(s)-s-D\,ds, \end{aligned}$$

и формула (35) сохраняется и для симплекса s.

Таким образом, оператор D определен для каждого симплекса s. Мы можем распространить его линейно на всю группу $C_q(\Sigma)$ и доказать по индукции формулу (35) для цепей любой размерности.

---

[1] Будем считать, что $f(\sigma)=0$ для любого сингулярного симплекса, имеющего две совпавшие вершины.

Формула (35) говорит, что для любой цепи c, для которой $dc \in C'(\Sigma)$, существует такая цепь

$$c' = f(c) - D\,dc \in C'(\Sigma),$$

что разность $c - c'$ является границей. Лемма, приведенная в § 13, показывает, что для любого q определены изоморфизмы

$$H_q(\Sigma) \approx H'_q(\Sigma).$$

Чтобы привести пример симплициального комплекса, рассмотрим случай, когда множество M состоит из $n+1$ элементов $A^0, \ldots, A^n$, и предположим, что множество Σ содержит все подмножества (конечные) множества M. Из доказательства, проведенного выше, следует, что любой цикл z положительной или нулевой размерности комплекса $C(\Sigma)$ является границей. В самом деле, если z — цикл, то, положив $Dz = A^0 z$, получим

$$d(Dz) = d(A^0 z) = z - A^0\,dz = z.$$

Отсюда следует, что группы гомологий размерностей $q > 0$ тривиальные.

Любая цепь из $C(\Sigma)$, размерность которой равна нулю, является циклом. Цепь

$$c = m_0 A^0 + \ldots + m_n A^n$$

может быть записана в виде

$$c = (m_0 + \ldots + m_n) A^0 + m_1 (A^1 - A^0) + \ldots + m_n (A^n - A^0) =$$
$$= (m_0 + \ldots + m_n) A^0 + m_1 d(A^0, A^1) + \ldots + m_n d(A^0, A^n).$$

Поэтому любой цикл из $C_0(\Sigma)$ гомологичен целому кратному цикла A^0. С другой стороны, цепь mA^0 может быть границей цепи из $C_1(\Sigma)$, только если $m = 0$. Действительно, для любой цепи $c' = \sum\limits_{i,j} m_{ij}(A^i, A^j)$ из $C_1(\Sigma)$ имеем $dc' = \sum\limits_{i,j} m_{ij}(A^j - A^i)$, откуда следует, что сумма коэффициентов границы всегда равна нулю. Следовательно, соответствие $c \to m_0 + \ldots + m_n$ есть изоморфизм группы $H_0(K) = Z_0(K)$ на группу целых чисел $\mathbf{Z}$:

$$H_0(K) \approx \mathbf{Z}.$$

В. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ[1])

1. Топологическое пространство

Топологическим пространством называется множество T, в котором выделено семейство $\mathcal{F}$ подмножеств, подчиненное следующим условиям:

[1]) Для справок см. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, ГИТТЛ, М., 1954; Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, М., 1958.

1. T — элемент семейства $\mathscr{F}$.

2. Любое объединение множеств из семейства $\mathscr{F}$ есть элемент семейства $\mathscr{F}$.

3. Пересечение двух множеств из семейства $\mathscr{F}$ есть множество из $\mathscr{F}$.

Семейство $\mathscr{F}$ называется *топологией* множества T, а его элементы называются *открытыми множествами* этой топологии. Строго говоря, топологическое пространство есть пара $(T, \mathscr{F})$, состоящая из множества T и топологии $\mathscr{F}$ множества T.

Из условия 2 следует, что пустое множество является элементом любой топологии $\mathscr{F}$ множества T, так как пустое множество можно рассматривать как объединение пустого семейства открытых множеств.

В множестве T, содержащем по крайней мере два элемента, существует несколько топологий. Например, все подмножества множества T удовлетворяют условиям 1, 2, 3 и, следовательно, образуют топологию множества T. Эта топология называется *дискретной* топологией множества T. Дискретная топология характеризуется тем, что множества, состоящие из одной точки, являются открытыми.

В любом множестве T можно определить *тривиальную топологию*, открытыми множествами которой являются только пустое множество и все множество T.

Множество топологий заданного множества T может быть частично упорядочено, если для двух топологий $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ принять, что $\mathscr{F}' > \mathscr{F}$, когда любое открытое множество в топологии $\mathscr{F}$ является открытым множеством и в топологии $\mathscr{F}'$. В этом случае говорят, что топология $\mathscr{F}'$ мажорирует топологию $\mathscr{F}$ или что $\mathscr{F}'$ есть более сильная топология, чем $\mathscr{F}$.

Дискретная топология мажорирует любую другую топологию множества T, а тривиальная топология мажорируется любой другой топологией множества T. Следовательно, частично упорядоченное множество топологий множества T содержит один первый элемент и один последний элемент.

Часто мы будем обозначать топологическое пространство $(T, \mathscr{F})$ одной буквой, например $\mathscr{T}$. В этом случае под точкой топологического пространства $\mathscr{T}$ мы будем понимать элемент множества T, а под открытым множеством топологического пространства $\mathscr{T}$ — элемент множества $\mathscr{F}$.

2. Окрестности. Базис

Пусть задана точка x топологического пространства $\mathscr{T}$. Будем называть *окрестностью* точки x любое множество V, которое содержит открытое множество U, содержащее в свою очередь точку x:

$$x \in U \subset V.$$

Если V — открытое множество, содержащее точку x, то V является окрестностью точки x. Такая окрестность называется открытой окрестностью. Из условий 1, 2, 3 легко получить такие следствия: любая точка x допускает в качестве окрестности все пространство $\mathcal{T}$; любое объединение окрестностей точки x и любое конечное пересечение окрестностей точки x являются окрестностями точки x; любая окрестность V точки x содержит окрестность V', и поэтому V будет окрестностью для любой точки из V'.

Семейство открытых множеств из $\mathcal{T}$ называется *базисом* топологического пространства $\mathcal{T}$, если любое открытое множество из $\mathcal{T}$ есть объединение множеств семейства.

Семейство B подмножеств некоторого множества T образует базис некоторой топологии в T, если T совпадает с объединением подмножеств из B и если любое конечное пересечение подмножеств из B есть объединение подмножеств из B. В самом деле, в этом случае пересечение любых двух объединений $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$ и $\bigcup\limits_{\beta} V'_\beta$ подмножеств V_α и V'_β из B равно объединению множеств из B.

Топология множества T, содержащая в качестве открытых множеств объединения вида $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \, (V_\alpha \in B)$, называется *топологией, порожденной семейством* B.

Произвольное семейство S подмножеств множества T также порождает в T некоторую топологию $\mathcal{F}$. А именно, открытыми множествами в этой топологии будут любые пересечения конечных наборов подмножеств из S (включая T как пересечение пустого множества подмножеств из S), а также любые объединения указанных пересечений (включая пустое множество как объединение пустого множества пересечений). Семейство S называется подбазисом топологии $\mathcal{F}$ или системой ее образующих.

3. Замкнутые множества

Замкнутыми множествами топологического пространства называются дополнения открытых множеств. Из условий 1, 2, 3 следует, что все пространство и пустое множество являются замкнутыми множествами. Любое пересечение замкнутых множеств является дополнением некоторого объединения открытых множеств, следовательно, является замкнутым множеством. Любое конечное объединение замкнутых множеств является дополнением конечного пересечения открытых множеств, т. е. оно является замкнутым множеством.

Если в топологическом пространстве $\mathcal{T}$ задано произвольное множество M, то пересечение замкнутых множеств, содержащих множество M, есть замкнутое множество, которое обозначается $\overline{M}$ и называется *замыканием* множества M. Если M есть замкнутое множество, то $\overline{M}=M$, так как M находится среди замкнутых множеств, содержащих M. В общем случае M является подмножеством своего замыкания $\overline{M}$.

Точка множества $\overline{M}$ называется *точкой прикосновения* множества M. Если точка x является точкой прикосновения множества $M-\{x\}$, то x называется *точкой накопления* множества M.

Существуют пространства, в которых множество $\{x\}$, состоящее из одной точки, не является замкнутым. Например, в топологическом пространстве $\mathcal{T}$, образованном двумя точками x и y с топологией $\mathcal{F}=(\varnothing, \{x, y\}, \{x\})$, дополнение $\{y\}$ множества $\{x\}$ не является открытым, следовательно, $\{x\}$ не является замкнутым множеством.

4. Подпространства

Топологическое пространство $\mathcal{T}$ канонически определяет в каждом из своих подмножеств A топологию. Эта топология называется *индуцированной топологией* на подмножестве A, *относительной топологией* или *топологией подпространства*. Открытыми множествами этой топологии являются пересечения подмножества A с открытыми подмножествами из $\mathcal{T}$. Эти пересечения образуют семейство, состоящее из подмножеств множества A, которые, как легко проверить, удовлетворяют условиям 1, 2, 3.

Теорема 1. *Пусть X и X' — два подмножества топологического пространства $\mathcal{T}$, таких, что $X'\subset X$. В множестве X' можно рассмотреть две топологии: топологию $\mathcal{F}$, индуцированную пространством $\mathcal{T}$, и топологию $\mathcal{F}'$, индуцированную подпространством X. Эти две топологии совпадают.*

Доказательство. Открытое множество из $\mathcal{F}$ имеет вид $U\cap X'$, где U — открытое множество пространства $\mathcal{T}$. Открытое множество топологии $\mathcal{F}'$ имеет вид $V\cap X'$, где V — открытое множество подпространства X. Тождественное совпадение топологий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ следует из соотношений

$$U\cap X'=(U\cap X)\cap X', \quad V\cap X'=(U\cap X)\cap X',$$

где $V=U\cap X$.

5. Покрытия

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества T называется *покрытием* множества T, если T является объединением подмножеств из $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{T}$ — топологическое пространство и если $\mathcal{A}$ — покрытие пространства $\mathcal{T}$ открытыми множествами, то говорят, что $\mathcal{A}$ — *открытое покрытие*.

Открытое покрытие $\mathcal{A}$ называется: *точечно конечным*, если любая точка из $\mathcal{T}$ принадлежит конечному числу множеств из $\mathcal{A}$; *локально конечным*, если любая точка из $\mathcal{T}$ обладает окрестностью, пересекающей конечное число множеств из $\mathcal{A}$; *конечного типа*, если любое множество покрытия пересекает конечное число множеств из $\mathcal{A}$; *конечным*, если оно образовано конечным числом множеств.

Каждое покрытие конечного типа — локально конечное, так как любая точка x из $\mathcal{T}$ принадлежит некоторому множеству из $\mathcal{A}$, являющемуся окрестностью точки x, пересекающей конечное число множеств из $\mathcal{A}$.

Множество открытых покрытий топологического пространства $\mathcal{T}$ может быть частично упорядочено двумя способами.

Покрытие $\mathcal{A}'$ *мажорирует* покрытие $\mathcal{A}$, если любое множество покрытия $\mathcal{A}$ принадлежит покрытию $\mathcal{A}'$. Этим определено отношение частичной упорядоченности, обозначаемое $\mathcal{A}' \succ \mathcal{A}$.

Покрытие $\mathcal{A}'$ называется *более тонким*, чем покрытие $\mathcal{A}$, если любое множество из $\mathcal{A}'$ содержится по крайней мере в одном множестве из $\mathcal{A}$. Таким образом, определено новое отношение частичной упорядоченности, которое обозначается $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ мажорирует покрытие $\mathcal{A}'$, то $\mathcal{A}'$ — более тонкое покрытие, чем $\mathcal{A}$. Обратное не верно.

Покрытие, образованное всеми открытыми множествами топологического пространства $\mathcal{T}$, мажорирует любое другое открытое покрытие пространства $\mathcal{T}$.

При отношении $\mathcal{A}' \succ \mathcal{A}$ множество открытых покрытий пространства $\mathcal{T}$ является фильтрующимся вправо, так как если заданы два покрытия $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то покрытие $\mathcal{A}$, образованное множествами покрытия $\mathcal{A}_1$ и множествами покрытия $\mathcal{A}_2$, мажорирует покрытие $\mathcal{A}_1$ и покрытие $\mathcal{A}_2$, следовательно, $\mathcal{A} \succ \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A} \succ \mathcal{A}_2$.

При отношении $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$ множество открытых покрытий пространства $\mathcal{T}$ является фильтрующимся влево, так как если заданы два покрытия $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то множества вида $U_1 \cap U_2$, где U_1 — множество покрытия $\mathcal{A}_1$, а U_2 — множество покрытия $\mathcal{A}_2$, образуют покрытие $\mathcal{A}'$, более тонкое, чем $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, следовательно, $\mathcal{A}' < \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}' < \mathcal{A}_2$. Это свойство играет важную роль при определении групп гомологий и когомологий по Чеху, которые являются индуктивными пределами групп, связанных с открытыми покрытиями.

6. Непрерывные отображения

Отображение f, ставящее в соответствие каждой точке x топологического пространства $\mathcal{T}$ точку $x' = f(x)$ топологического пространства $\mathcal{T}'$, называется непрерывным, если прообраз $f^{-1}(U')$ произвольного открытого множества U' из $\mathcal{T}'$ является открытым множеством в $\mathcal{T}$. Напомним, что прообразом некоторого множества U' называется множество *всех* точек x из $\mathcal{T}$, для которых $f(x)$ принадлежит U'.

Непрерывное отображение f может быть также охарактеризовано следующим условием: прообраз $f^{-1}(F')$ любого замкнутого множества F' из $\mathcal{T}'$ является замкнутым множеством из $\mathcal{T}$. В самом деле, известно, что дополнение множества $f^{-1}(F')$ совпадает с прообразом дополнения множества F'.

Если $\mathcal{T}$ — подпространство топологического пространства $\mathcal{T}'$, то включение f подпространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{T}'$ (т. е. отображение $f(x)=x$ для любого x из $\mathcal{T}$) является непрерывным отображением, так как прообразом открытого множества U' из $\mathcal{T}'$ является множество $U=U'\cap\mathcal{T}$ из $\mathcal{T}$, которое является открытым в индуцированной топологии.

Взаимно однозначное отображение f пространства $\mathcal{T}$ на пространство $\mathcal{T}'$ называется *гомеоморфизмом*, если f и f^{-1} являются непрерывными отображениями. Два пространства $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$, между которыми определен гомеоморфизм, называются гомеоморфными или *топологически эквивалентными*. Они обладают одними и теми же топологическими свойствами.

Пусть заданы два непрерывных отображения: отображение f пространства $\mathcal{T}$ в $\mathcal{T}'$ и отображение g пространства $\mathcal{T}'$ в пространство $\mathcal{T}''$. Их произведение gf также является непрерывным отображением. В самом деле, если U'' — открытое множество из $\mathcal{T}''$, то $U'=g^{-1}(U'')$ — открытое множество из $\mathcal{T}'$ и $U=f^{-1}(U')=(gf)^{-1}(U'')$ — открытое множество из $\mathcal{T}$.

7. Прямое произведение топологических пространств

Пусть $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in M}$ — семейство топологических пространств, зависящее от индекса α, который пробегает некоторое множество M. Функции x, ставящие в соответствие каждому индексу α из M элемент x_α пространства $\mathcal{T}_\alpha$, образуют множество T, которое называется прямым произведением множеств $\mathcal{T}_\alpha$. Элемент x из T может быть представлен множеством $(x_\alpha)_{\alpha\in M}$ значений функции x. Для каждого индекса α через p_α обозначается отображение множества T в пространство $\mathcal{T}_\alpha$, заданное формулой

$$p_\alpha(x)=x_\alpha.$$

Пусть U_α — открытые множества из $\mathcal{T}_\alpha$. Рассмотрим множество $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\subset T$ и обозначим через S совокупность всех таких множеств. Множество $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ состоит из функций $x=(x_\beta)_{\beta\in M}$, для которых единственная компонента x_α подчинена условию $x_\alpha\in U_\alpha$. Следовательно, $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ — прямое произведение множеств $\mathcal{T}_\beta$ $(\beta\neq\alpha)$ и множества U_α.

Пересечение конечного числа множеств из S, например $p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, является прямым произведением множеств $\mathcal{T}_\beta$ $(\beta \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и множеств $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Пусть B — семейство множеств такого вида. Пересечение двух множеств из B есть множество из B. Отсюда следует, что множества из B образуют базис некоторой топологии $\mathcal{F}$ множества T, а именно топологии, для которой открытыми множествами являются произвольные объединения множеств из B. Топологическое пространство $\mathcal{T}=(T, \mathcal{F})$ называется прямым произведением топологических пространств $\mathcal{T}_\alpha$.

Из определения топологии $\mathcal{F}$ следует, что p_α являются непрерывными отображениями топологического пространства $\mathcal{T}$ на пространства $\mathcal{T}_\alpha$. Более того, $\mathcal{F}$ мажорируется любой топологией множества T, для которой все отображения p_α непрерывны. В самом деле, если отображения p_α^{-1} непрерывны, то множества $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ открыты и тогда будут открытыми все множества из семейства B, а также их объединения. Следовательно, множества из семейства $\mathcal{F}$ также являются открытыми.

Если $x=(a_\alpha)_{\alpha \in M}$ — фиксированная точка из $\mathcal{T}$, а α_0 — фиксированный индекс, то точки $x=(x_\alpha)_{\alpha \in M}$ с компонентами

$$x_\alpha = a_\alpha \quad (\alpha \neq \alpha_0)$$

образуют подпространство $\mathcal{T}_{a, \alpha_0}$ топологического пространства $\mathcal{T}$. Отображение f пространства $\mathcal{T}_{\alpha_0}$ на $\mathcal{T}_{a, \alpha_0}$, заданное уравнениями

$$f(y) = x = (x_\alpha^y)_{\alpha \in M},$$

где $x_\alpha^y = a_\alpha$ $(\alpha \neq \alpha_0)$, $x_{\alpha_0}^y = y$, является гомоморфизмом, так как открытые множества из $\mathcal{T}_{a, \alpha_0}$ — образы $f(U)$ произвольных открытых множеств $U \subset \mathcal{T}_{\alpha_0}$. Отображение, обратное к f, является ограничением отображения p_{α_0} на $\mathcal{T}_{a, \alpha_0}$. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{T}$ содержит подпространства, гомеоморфные любому из пространств $\mathcal{T}_\alpha$.

Прямое произведение двух пространств $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ обозначается $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

8. Топологическая группа

Пусть G — группа, а $\mathcal{F}$ — топология множества G. Пара $\mathcal{G}=(G, \mathcal{F})$ называется топологической группой, если непрерывно отображение прямого произведения $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$, ставящее в соответствие каждой паре (x, y) элементов из G элемент $x y^{-1}$. В этом случае отображение $x \to x^{-1}$ также непрерывно, так как оно является произведением двух непрерывных отображений

$$x \to (e, x), \quad (u, v) \to uv^{-1}.$$

(Здесь e — единичный элемент группы G.) Отсюда следует непрерывность отображения $(x, y) \to (x, y^{-1})$ произведения $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ в себя. Отображение $(x, y) \to xy$ также является непрерывным отображением произведения $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ в топологическое пространство $\mathcal{G}$, так как оно получается композицией двух непрерывных отображений

$$(x, y) \to (x, y^{-1}), \quad (u, v) \to uv^{-1}.$$

Таким образом, для топологической группы $\mathcal{G}$ функция $x \to x^{-1}$ и функция двух переменных $(x, y) \to xy$ являются непрерывными функциями.

9. Примеры

Приведем теперь некоторые примеры, иллюстрирующие понятия, введенные в предыдущих параграфах. Пусть R — множество вещественных чисел. Произвольные объединения открытых интервалов (a, b) из R образуют семейство $\mathcal{F}$, удовлетворяющее условиям 1, 2, 3, т. е. определяют топологию в множестве R. Топологическое пространство $\mathcal{R} = (\mathrm{R}, \mathcal{F})$ называется *вещественной прямой* или вещественным числовым пространством размерности 1.

Окрестностями вещественного числа x являются множества из R, содержащие открытые интервалы, которые в свою очередь содержат точку x. Открытые интервалы (a, b) образуют базис пространства $\mathcal{R}$, так как пересечение двух интервалов — либо интервал, либо пустое множество.

Интервалы (a, b) заданной длины $|a - b| = l$ или интервалы (a, b) с рациональными концами a и b образуют покрытия пространства $\mathcal{R}$. Интервалы длины $l' < l$ образуют покрытие более тонкое, чем интервалы длины l.

Покрытие, образованное интервалами вида $(n - 2/3,\ n + 2/3)$, где n — целые числа, образует покрытие, являющееся в одно и то же время точечно конечным, локально конечным и покрытием конечного типа.

Непрерывное отображение f пространства $\mathcal{R}$ в себя — это функция, непрерывная в смысле Коши. Непрерывное отображение f является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда функция f монотонно убывающая или монотонно возрастающая, так как в окрестности экстремальной точки или в интервале, в котором f является постоянной, отображение f не взаимно однозначно.

Открытый интервал (a, b) с относительной топологией — топологическое пространство, гомеоморфное всей вещественной прямой при гомеоморфизме

$$f(x) = \operatorname{tg} \pi \frac{2x - a - b}{2(b - a)}.$$

Напротив, замкнутый интервал $[a, b]$ не может быть гомеоморфно отображен на $\mathcal{R}$, так как любая функция, непрерывная на $[a, b]$, ограничена. Если существовал бы гомеоморфизм φ интервала $[a, b]$ на $\mathcal{R}$, то непрерывное отображение φ интервала $[a, b]$ на $\mathcal{R}$ не было бы ограниченным.

Прямое произведение n пространств $\mathcal{R}$ обозначается $\mathcal{R}^n$ и называется n-мерным числовым пространством. Точками его являются упорядоченные системы $x=(x_1, \ldots, x_n)$ вещественных чисел. Базисом этого пространства является семейство n-мерных открытых параллелепипедов, определенных неравенствами

$$a_i < x_i < b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

или семейство открытых шаров различных радиусов r, определенных неравенствами

$$(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2 < r^2.$$

Прямые, параллельные оси x_1, с уравнениями

$$x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n,$$

рассматриваемые как подпространства пространства $\mathcal{R}^n$, гомеоморфны $\mathcal{R}$.

Для любого целого числа m отображение

$$[(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)] \longrightarrow (x_1-y_1, \ldots, x_m-y_m) \qquad (1)$$

прямого произведения $\mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m$ в $\mathcal{R}^m$ непрерывно. Следовательно, $\mathcal{R}^m$ с законом композиции $[(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)] \longrightarrow (x_1+y_1, \ldots, x_m+y_m)$ является топологической группой.

Подпространства пространства $\mathcal{R}^m$ представляют собой важные модели топологий. Приведем некоторые простые примеры.

Единичной сферой S^{m-1} называется множество точек из $\mathcal{R}^m$, удовлетворяющих уравнению

$$x_1^2+\ldots+x_m^2=1.$$

S^{m-1} — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{R}^m$, так как его дополнение состоит из точек $y=(y_1, \ldots, y_m)$, для которых

$$y_1^2+\ldots+y_m^2 \neq 1.$$

Если некоторая точка y удовлетворяет этому условию, то существует окрестность точки y, состоящая только из точек, которые удовлетворяют тому же условию. Следовательно, множество $\mathcal{R}^m - S^{m-1}$ открытое, как и всякое объединение открытых множеств. Отсюда следует, что множество S^{m-1} замкнутое.

Вообще, если задана непрерывная функция f, определенная на топологическом пространстве $\mathcal{T}$ и принимающая вещественные значения, то множество точек x из $\mathcal{T}$, для которых $f(x)=0$, замкнутое, так как оно является прообразом подмножества пространства $\mathscr{R}$, состоящего из точки 0, а это множество замкнуто в $\mathscr{R}$. Так как любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, то замкнуто множество точек из $\mathscr{T}$, в которых обращаются в нуль функции f некоторого заданного семейства $\{f\}$ непрерывных функций.

Для примера рассмотрим отображение f пространства $\mathscr{R}^m$ в пространство $\mathscr{R}^{m(m+1)/2}$, заданное соотношениями

$$y_{ij} = x_i x_j \quad (i \leqslant j = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где y_{ij} $(i \leqslant j)$ — координаты в пространстве $\mathscr{R}^{m(m+1)/2}$. Отображение f — непрерывное, так как вещественные функции $y_{ij} = x_i x_j$ непрерывны на пространстве $\mathscr{R}^m$. Вообще, если заданы p вещественных функций f_i, непрерывных на пространстве $\mathscr{R}^m$, то функция

$$f(x) = [f_1(x), \ldots, f_p(x)]$$

осуществляет непрерывное отображение пространства $\mathscr{R}^m$ в пространство $\mathscr{R}^p$. Для проверки рассмотрим открытое множество $U \subset \mathscr{R}^p$. Оно может быть покрыто семейством открытых параллелепипедов

$$U_\alpha : a_i^\alpha < x_i < b_i^\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

содержащихся в U. Прообраз $f^{-1}(U_\alpha)$ параллелепипеда U_α состоит из точек x пространства $\mathscr{R}^m$, для которых

$$f_i(x) \in (a_i^\alpha, b_i^\alpha) = I_i^\alpha.$$

Следовательно, $f^{-1}(U_\alpha)$ является конечным пересечением открытых множеств $f_i^{-1}(I_i^\alpha)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

С другой стороны,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha),$$

а потому $f^{-1}(U)$ — открытое множество. Отображение (2) ставит в соответствие каждой паре точек (x_i), $(-x_i)$ одну и ту же точку из $\mathscr{R}^{m(m+1)/2}$. Точки (x_i), $(-x_i)$ различные, если не все x_i — нули. Это имеет место, в частности, если точка (x_i) лежит на сфере S^{m-1}. Отсюда следует, что отображение f^{-1} ставит в соответствие каждой точке множества $f(S^{m-1})$ две различные точки (x_i) и $(-x_i)$, лежащие в сфере S^{m-1}, которые называются диаметрально противоположными.

Таким образом, f не определяет взаимно однозначного отображения сферы S^{m-1} и не является гомеоморфизмом. Однако отображение f индуцирует некоторый гомеоморфизм на любом открытом множестве сферы S^{m-1}, не содержащем диаметрально противоположных точек.

Локальным гомеоморфизмом называется отображение f, индуцирующее гомеоморфизмы на множествах базиса пространства, на котором это отображение определено. Так как любая точка сферы S^{m-1} принадлежит по крайней мере одному открытому множеству, не содержащему диаметрально противоположных точек, и так как множества такого вида образуют базис, то отображение (2) — локальный гомеоморфизм.

Образом S^{m-1} при отображении (2), как мы увидим в следующем параграфе, является пространство, гомеоморфное вещественному $(m-1)$-мерному проективному пространству.

10. Факторпространства

Пусть $\mathcal{T}$ — топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в $\mathcal{T}$. Обозначим через T' множество классов эквивалентности по этому отношению и через φ — каноническое отображение, которое ставит в соответствие каждой точке из $\mathcal{T}$ ее класс эквивалентности. Образ отображения φ совпадает тогда с T'. *Факторпространственной топологией* множества T' называется наиболее сильная топология $\mathcal{F}'$ множества T', для которой отображение φ непрерывно, т. е. $\mathcal{F}'$ более сильная, чем любая другая топология множества T', для которой φ непрерывно. Открытыми множествами топологии $\mathcal{F}'$ являются те подмножества множества T', прообразы которых при отображении φ — открытые множества в $\mathcal{T}$. Множества из T', обладающие этим свойством, определяют топологию, так как они удовлетворяют условиям 1, 2, 3 § 1. В самом деле,

$$\varphi^{-1}(T') = \mathcal{T}, \quad \varphi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

и для любого множества U'_α из T'

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_\alpha U'_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \varphi^{-1}(U'_\alpha).$$

Если $\varphi^{-1}(U'_\alpha)$ — открытые множества, то, как следует из последнего соотношения, $\varphi^{-1}\left(\bigcup\limits_\alpha U'_\alpha\right)$ — открытое множество. Из соотношения

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_\alpha U'_\alpha\right) = \bigcap_\alpha \varphi^{-1}(U'_\alpha)$$

следует, что прообраз в $\mathcal{T}$ любого конечного пересечения множеств U'_α — открытое множество, если $\varphi^{-1}(U'_\alpha)$ — открытые множества.

Топологическое пространство $\mathcal{T}' = (T', \mathcal{F}')$ называется факторпространством топологического пространства $\mathcal{T}$ по отношению эквивалентности R и обозначается $\mathcal{T}/R$.

Теорема 2. *Пусть f — отображение факторпространства $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/R$ в топологическое пространство $\mathcal{U}$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна компози-*

ция отображений $f\varphi$, *где* φ — *каноническое отображение* $\mathcal{T}$ *на* $\mathcal{T}'$.

В самом деле, если f непрерывно, то $f\varphi$ — произведение двух непрерывных отображений, т. е. непрерывное отображение. Обратно, если $f\varphi$ непрерывно, то для любого открытого множества U из $\mathcal{U}$ множество $(f\varphi)^{-1}(U)$ открыто в $\mathcal{T}$. Но

$$(f\varphi)^{-1}(U)=\varphi^{-1}[f^{-1}(U)],$$

и так как $\varphi^{-1}[f^{-1}(U)]$ открыто, то в соответствии с топологией пространства $\mathcal{T}'$ $f^{-1}(U)$ — множество, открытое в $\mathcal{T}'$. Следовательно, отображение f непрерывно.

Вещественное $(m-1)$-мерное проективное пространство P^{m-1} может быть определено как факторпространство. Для этого нужно исходить из топологического пространства $\mathcal{R}_1^m=\mathcal{R}^m-\{0\}$ (принимая во внимание, что в нем задана топология, индуцированная топологией пространства $\mathcal{R}^m$) и считать эквивалентными две точки x и y из $\mathcal{R}_1^m$, координаты которых x_i и y_i пропорциональны. Иначе говоря, классами эквивалентности $\varphi(x)$ являются прямые пространства $\mathcal{R}^m$, проходящие через начало O.

Поставив в соответствие каждой точке x сферы S^{m-1} прямую Ox, мы получим отображение ψ сферы S^{m-1} на проективное пространство P^{m-1}.

Будем называть проколотыми прямыми прямые Ox пространства $\mathcal{R}^m$, из которых мы удалили точку O. Если U — множество из P^{m-1}, то $\varphi^{-1}(U)$ — объединение проколотых прямых, и мы получаем соотношение

$$\psi^{-1}(U)=S^{m-1}\cap\varphi^{-1}(U).$$

Следовательно, если $\varphi^{-1}(U)$ открыто в $\mathcal{R}^m$, то $\psi^{-1}(U)$ открыто в S^{m-1} и обратно. Таким образом, множество U открыто в P^{m-1} тогда и только тогда, когда $\psi^{-1}(U)$ открыто в S^{m-1}. Значит, пространство P^{m-1} можно рассматривать как факторпространство сферы S^{m-1} при каноническом отображении ψ. Отсюда следует, что пространство P^{m-1} гомеоморфно факторпространству сферы S^{m-1} по отношению, которое отождествляет две диаметрально противоположные точки.

С другой стороны, отображение (2) сферы S^{m-1} в пространство $R^{m(m+1)/2}$ постоянно на парах диаметрально противоположных точек и является локальным гомеоморфизмом. Поэтому образ этого отображения гомеоморфен факторпространству сферы по отождествлению, определенному выше. Следовательно, это отображение является в конечном итоге гомеоморфизмом на проективное пространство P^{m-1}. Этот результат показывает, что проективное пространство P^{m-1} гомеоморфно подпространству числового пространства $\mathcal{R}^{m(m+1)/2}$.

Рассмотрим для большей ясности вещественное двумерное проективное пространство P^2, т. е. вещественную проективную плоскость. Из сказанного выше следует, что P^2 получается из сферы S^2 отождествлением диаметрально противоположных точек. Если обозначить через Σ^2 полусферу, ограниченную большим кругом C сферы S^2, то вообще каждая пара диаметрально

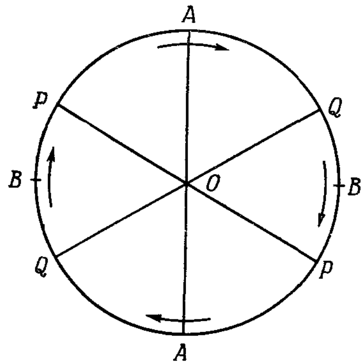

Рис. 1.

противоположных точек имеет в Σ^2 одного и только одного представителя. Исключение составляют только пары диаметрально противоположных точек, лежащих на C. Отсюда следует, что P^2 может быть получено из полусферы Σ^2 отождествлением диаметрально противоположных точек окружности C. Ортогональная проекция полусферы Σ^2 на плоскость окружности C есть гомеоморфизм, отображающий пространство Σ^2 во внутренность D круга C. Следовательно, P^2 может быть также определено как факторпространство пространства $\overline{D}=D+C$ по отношению, отождествляющему пары диаметрально противоположных точек, лежащих на C. На рис. 1 указаны две дуги PAQ и две дуги PBQ, точки которых попарно отождествляются в направлении, указанном стрелками.

11. Сумма семейства топологических пространств

Пусть $\{\mathscr{T}_\alpha\}$ — семейство топологических пространств. Предположим, что пространства не пересекаются, и обозначим через T объединение этих пространств. Множество T определяется как множество пар (α, x_α), состоящих из индекса α и точки x_α пространства $\mathscr{T}_\alpha$. Каждому индексу α соответствует отображение f_α пространства $\mathscr{T}_\alpha$ на множество T, $f_\alpha(x_\alpha)=(\alpha, x_\alpha)$.

Пусть $\mathscr{F}$ — наиболее сильная топология множества T, для которой все отображения f_α непрерывны. Подмножество U множества T будет открытым в топологии $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда все прообразы $f_\alpha^{-1}(U) \subset \mathcal{T}_\alpha$ открыты. Множество $f_\alpha^{-1}(U)$ образовано теми точками x из $\mathcal{T}_\alpha$, для которых $(\alpha, x) \in U$.

В частности, образы отображений f_α являются открытыми множествами $\mathcal{T}'_\alpha$ топологии $\mathcal{F}$, так как $f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}'_\alpha) = \mathcal{T}_\alpha$, $f_\beta^{-1}(\mathcal{T}'_\alpha) = \varnothing$ $(\beta \neq \alpha)$. Два множества $\mathcal{T}'_\alpha$ и $\mathcal{T}'_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ не пересекаются, так как для точек множества $\mathcal{T}'_\alpha$ первая компонента есть α, а для точек множества $\mathcal{T}'_\beta$ первая компонента есть β. Отсюда следует, что $\mathcal{T}'_\alpha$ не пересекается с объединением открытых множеств $\mathcal{T}'_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$, которое является открытым множеством $\mathcal{T}''_\alpha$ в топологии $\mathcal{F}$. Так как $\mathcal{T}'_\alpha$ образует покрытие множества T, то $\mathcal{T}''_\alpha$ является дополнением к $\mathcal{T}'_\alpha$. Следовательно, множества $\mathcal{T}'_\alpha$ одновременно замкнуты и открыты.

Топологическое пространство $\mathcal{T} = (T, \mathcal{F})$ называется *суммой* топологических пространств $\mathcal{T}_\alpha$.

Топологическое пространство, гомеоморфное сумме по крайней мере двух непустых топологических пространств, называется *несвязным*.

Связным называется пространство, не являющееся несвязным.

Из изложенных выше соображений следует, что в несвязном пространстве $\mathcal{T}$ существуют непустые множества, отличные от $\mathcal{T}$, которые одновременно являются замкнутыми и открытыми. Обратно, если топологическое пространство $\mathcal{T}$ содержит непустое одновременно замкнутое и открытое множество $\mathcal{A}$ (отличное от $\mathcal{T}$), то $\mathcal{T}$ гомеоморфно сумме своих подпространств $\mathcal{A}$, $\mathcal{T} - \mathcal{A}$.

Отсюда следует, что необходимое и достаточное условие того, чтобы топологическое пространство $\mathcal{T}$ было связным, состоит в том, чтобы $\mathcal{T}$ не содержало собственных непустых подмножеств, которые были бы одновременно замкнутыми и открытыми.

12. Отделимые пространства

Топологическое пространство называется *отделимым* или *хаусдорфовым* пространством, если любые две его различные точки соответственно принадлежат двум открытым непересекающимся множествам.

Пусть R — множество вещественных чисел. *Топологией Зарисского* в R называется топология $\mathfrak{Z}$, открытые множества которой являются дополнительными множествами конечных множеств из R. В этой топологии любые два непустых открытых множества имеют непустое пересечение, следовательно, топологическое пространство $(R, \mathfrak{Z})$ не является отделимым.

Напротив, вещественная прямая является отделимым пространством, так как любые две различные точки содержатся в двух непересекающихся интервалах.

Эквивалентное определение отделимых пространств следует из следующего предложения.

Предложение 1. *Пространство* $\mathcal{T}$ *отделимо тогда и только тогда, когда диагональ* Δ *прямого произведения* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *— замкнутое множество в* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. (*Диагональю* Δ *называется множество, образованное парами* (x, x), *где* $x \in \mathcal{T}$.)

В самом деле, если $\mathcal{T}$ — отделимое пространство, то для любой пары (x, y), где $x \neq y$, можно найти два открытых непересекающихся множества U и V, содержащих соответственно точку x и точку y. Тогда множество $U \times V$ является открытым множеством в $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, содержащим точку (x, y) и не содержащим ни одной точки из Δ. Дополнением множества $U \times V$ в $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ будет замкнутое множество, которое будет содержать множество Δ и не будет содержать точку (x, y). Отсюда следует, что замыкание $\bar{\Delta}$ множества Δ не содержит точки (x, y) и $\bar{\Delta}$ не содержит ни одной точки, не лежащей в Δ. Это значит, что Δ — замкнутое множество.

Обратно, если множество Δ замкнуто в $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \times \mathcal{T} - \Delta$ открыто, не пересекается с Δ и содержит любую точку (x, y), если $x \neq y$. Тогда $\mathcal{T} \times \mathcal{T} - \Delta$ содержит множество вида $U \times V$, где U и V открыты в $\mathcal{T}$ и $x \in U$, $y \in V$. Так как $U \times V \subset \mathcal{T} \times \mathcal{T} - \Delta$, то $U \times V$ не содержит точек из Δ, следовательно, U и V не пересекаются в $\mathcal{T}$. Это значит, что $\mathcal{T}$ — отделимое.

Предложение 2. *Любое подпространство отделимого пространства отделимо.*

В самом деле, если x и y — две различные точки подпространства $\mathcal{T}'$ отделимого пространства $\mathcal{T}$, то можно найти два непересекающихся открытых в $\mathcal{T}$ множества U и V, содержащих соответственно точки x и y. Множества $U \cap \mathcal{T}'$ и $V \cap \mathcal{T}'$ будут открытыми в $\mathcal{T}'$ непересекающимися множествами и будут содержать соответственно точки x и y. Следовательно, $\mathcal{T}'$ удовлетворяет условию отделимости.

Предложение 3. *Прямое произведение топологических пространств — отделимое топологическое пространство тогда и только тогда, когда каждый сомножитель является отделимым топологическим пространством.*

Доказательство. Мы видели, что прямое произведение $\mathcal{T}$ топологических пространств $\mathcal{T}_\alpha$ для каждого индекса α содержит подпространство, гомеоморфное $\mathcal{T}_\alpha$. Если $\mathcal{T}$ — отделимое топологическое пространство, то эти подпространства будут отделимыми, следовательно, $\mathcal{T}_\alpha$ также будут отделимыми.

Докажем обратное. Пусть все пространства $\mathcal{T}_\alpha$ отделимые, и пусть $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$ — две различные точки в $\mathcal{T}$. Тогда по крайней мере для одного индекса, например α_0, имеем $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$.

Пусть U_{α_0} и V_{α_0} — два открытых непересекающихся множества из $\mathcal{T}_{\alpha_0}$, содержащих соответственно точки x_{α_0} и y_{α_0}. Тогда открытые множества $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$, $p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$ из $\mathcal{T}$ содержат соответственно точки x и y и не пересекаются. Отсюда следует, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию отделимости.

13. Компактные пространства

Топологическое пространство $\mathcal{T}$ называется *компактным*, если оно отделимое и любое его открытое покрытие мажорирует некоторое конечное покрытие.

Предложение 1. *Любое замкнутое подмножество компактного пространства $\mathcal{T}$ есть компактное пространство в индуцированной топологии.*

В самом деле, подпространство $\mathcal{T}'$ компактного пространства $\mathcal{T}$ отделимое. Открытое покрытие $\mathcal{A}'$ подпространства $\mathcal{T}'$ представляет собой семейство множеств вида $\mathcal{T}' \cap U_\alpha$, где U_α — открытые множества в $\mathcal{T}$, объединение которых содержит множество $\mathcal{T}'$. Если $\mathcal{T}'$ замкнуто в $\mathcal{T}$, то его дополнение U открыто в $\mathcal{T}$ и множества U_α и U образуют открытое покрытие $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$. Так как пространство $\mathcal{T}$ компактно, то $\mathcal{A}$ мажорирует конечное покрытие $\mathcal{B}$. Если множество U не принадлежит покрытию $\mathcal{B}$, то, присоединяя его к $\mathcal{B}$, получаем новое конечное покрытие $\mathcal{C}$ пространства $\mathcal{T}$, мажорируемое множеством $\mathcal{A}$. Пусть $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}, U$ — множества покрытия $\mathcal{C}$, множества $U_{\alpha_1} \cap \mathcal{T}', \ldots, U_{\alpha_p} \cap \mathcal{T}', U \cap \mathcal{T}' = \varnothing$ образуют конечное покрытие $\mathcal{C}'$ множества $\mathcal{T}'$, а множества $U_{\alpha_1} \cap \mathcal{T}', \ldots, U_{\alpha_p} \cap \mathcal{T}'$ будут образовывать конечное покрытие $\mathcal{B}'$ множества $\mathcal{T}'$, мажорируемое множеством $\mathcal{A}'$.

Таким образом, любое открытое покрытие множества $\mathcal{T}'$ мажорирует некоторое конечное покрытие и $\mathcal{T}'$ — компактное пространство.

Предложение 2. *Компактное подпространство $\mathcal{T}'$ отделимого пространства $\mathcal{T}$ есть его замкнутое подмножество.*

Доказательство. Пусть x — точка из $\mathcal{T}$, не лежащая в подпространстве $\mathcal{T}'$. Так как пространство $\mathcal{T}$ отделимое, то для каждой точки x' из $\mathcal{T}'$ можно найти множество $U'_{x'}$, открытое в $\mathcal{T}$ и содержащее x', и множество $U_{x'}$, открытое в $\mathcal{T}$, содержащее x и не пересекающееся с $U'_{x'}$. Множества $U'_{x'} \cap \mathcal{T}'$ образуют открытое покрытие $\mathcal{T}'$, когда x' пробегает все $\mathcal{T}'$. Так как $\mathcal{T}'$ — компактное пространство, то это покрытие мажорирует некоторое конечное покрытие. Пусть $x_1', \ldots, x_p'$ — индексы множеств $U'_{x_1'} \cap \mathcal{T}', \ldots, U'_{x_p'} \cap \mathcal{T}'$, принадлежащих этому конечному покрытию. Пересечение U множеств $U_{x_1'}, \ldots, U_{x_p'}$ — открытое множество в $\mathcal{T}$. Оно содержит точку x и не пересекается ни с одним из множеств $U'_{x_1'} \cap \mathcal{T}', \ldots, U'_{x_p'} \cap \mathcal{T}'$, а следовательно, и с объединением $\mathcal{T}'$ этих множеств. В этом случае $\mathcal{T} - U$ есть замкнутое множество пространства $\mathcal{T}$, содержащее множество $\mathcal{T}'$ и не содержащее точки x. Из соотношения $\overline{\mathcal{T}'} \subset \mathcal{T} - U$ следует, что x не принадлежит $\overline{\mathcal{T}'}$. Это значит, что $\overline{\mathcal{T}'}$ содержит только точки из $\mathcal{T}'$, т. е. $\overline{\mathcal{T}'} = \mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}'$ — замкнутое подмножество множества $\mathcal{T}$.

Предложение 3. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении в отделимое пространство есть компактное пространство.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение компактного пространства $\mathcal{T}$ в отделимое пространство $\mathcal{U}$. Образ $\mathcal{T}'$ этого отображения — отделимое пространство, так как он является подпространством отделимого пространства.

Пусть $\mathcal{A}'$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{T}'$, и пусть $U_\alpha \cap \mathcal{T}'$ — множества покрытия $\mathcal{A}'$, причем можно предполагать, что множества U_α открыты в $\mathcal{U}$. Множества $f^{-1}(U_\alpha)$ совпадают с множествами $f^{-1}(U_\alpha \cap \mathcal{T}')$ и образуют покрытие $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$, которое является открытым, так как f — непрерывное отображение и U_α — открытые множества в $\mathcal{U}$. Однако пространство $\mathcal{T}$ компактно, следовательно, покрытие $\mathcal{A}$ мажорирует конечное покрытие $\mathcal{B}$ пространства $\mathcal{T}$. Пусть $f^{-1}(U_{\alpha_1}), \ldots$ $\ldots, f^{-1}(U_{\alpha_p})$ — множества покрытия $\mathcal{B}$. Тогда множества $U_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, U_{\alpha_p}$ покрывают пространство $\mathcal{T}'$ и множества $U_{\alpha_1} \cap \mathcal{T}', \ldots$ $\ldots, U_{\alpha_p} \cap \mathcal{T}'$ образуют открытое покрытие $\mathcal{B}'$ пространства $\mathcal{T}'$. Следовательно, любое открытое покрытие $\mathcal{A}'$ пространства $\mathcal{T}'$ мажорирует конечное покрытие $\mathcal{B}'$. Это значит, что $\mathcal{T}'$ компактно.

Теорема 3. (Теорема Тихонова.) *Прямое произведение семейства компактных пространств есть компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — прямое произведение компактных пространств $\mathcal{T}_\alpha$. Тогда $\mathcal{T}$ — отделимое пространство (предложение 3, § 12).

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное открытое покрытие топологического пространства $\mathcal{T}$. Дополнения множеств из $\mathcal{A}$ образуют семейство $\mathcal{B}$ замкнутых множеств в $\mathcal{T}$ с пустым пересечением. Предположим, что $\mathscr{A}$ не мажорирует ни одного конечного покрытия, т. е. что ни одно конечное объединение множеств из $\mathscr{A}$ не равно $\mathscr{T}$. В этом случае ни одно из конечных пересечений множеств из $\mathscr{B}$ не пусто.

Пусть Φ — совокупность семейств $\mathscr{C}$ множеств из $\mathscr{T}$, содержащих семейство $\mathscr{B}$ и обладающих тем свойством, что любое конечное пересечение множеств из каждого семейства $\mathscr{C}$ не пусто.

В множестве Φ рассмотрим отношение частичной упорядоченности, заданное включением: будем писать $\mathscr{C} > \mathscr{C}'$, если любое множество из семейства $\mathscr{C}'$ принадлежит и семейству $\mathscr{C}$. При помощи этого отношения немедленно убеждаемся, что любое упорядоченное подмножество Φ' множества Φ допускает в качестве верхней грани объединение семейств из Φ'. Из теоремы Цорна[1]) следует тогда, что Φ содержит по крайней мере один максимальный элемент. Пусть $\mathscr{B}^*$ — такой элемент. Тогда $\mathscr{B}^*$ является семейством непустых множеств из $\mathscr{T}$, обладающим следующими свойствами:

1) $\mathscr{B}^*$ содержит семейство $\mathscr{B}$, следовательно,

2) пересечение всех множеств из $\mathscr{B}^*$ пусто;

3) любое конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}^*$ принадлежит $\mathscr{B}^*$ (в противном случае, добавляя к $\mathscr{B}^*$ конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}^*$, получаем множество $\mathscr{B}_1^* > \mathscr{B}^*$);

4) если множество M из $\mathscr{T}$ пересекает любое множество из $\mathscr{B}^*$, то семейство $\mathscr{B}^*$ содержит множество M.

Для каждого индекса α обозначим через $\mathscr{B}_\alpha^*$ семейство множеств из $\mathscr{T}_\alpha$, являющихся образами множеств из $\mathscr{B}^*$ при проектировании p_α.

Любое конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}_\alpha^*$ не пусто, так как если для p множеств $F^{\lambda_1}, \ldots, F^{\lambda_p}$ из $\mathscr{B}^*$ мы имели бы $p_\alpha(F^{\lambda_1}) \cap \ldots \cap p_\alpha(F^{\lambda_p}) = \varnothing$, то $F^{\lambda_1} \cap \ldots \cap F^{\lambda_p} = \varnothing$, что противоречит свойству 3.

Обозначим через $\overline{\mathscr{B}^*}$ семейство, образованное замыканиями в $\mathscr{T}_\alpha$ множеств семейства $\mathscr{B}_\alpha^*$. Любое конечное пересечение множеств из $\overline{\mathscr{B}_\alpha^*}$ не пусто, так как такое пересечение содержит конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}_\alpha^*$. Пусть $\mathscr{C}_\alpha$ — семейство, состоящее из дополнений в $\mathscr{T}_\alpha$ множеств из $\overline{\mathscr{B}_\alpha^*}$. $\mathscr{C}_\alpha$ — семейство открытых множеств из $\mathscr{T}_\alpha$, такое, что любое конечное объединение множеств из $\mathscr{C}_\alpha$ отлично от $\mathscr{T}_\alpha$. Так как $\mathscr{T}_\alpha$ компактно, $\mathscr{C}_\alpha$ не может являться покрытием пространства $\mathscr{T}_\alpha$. Поскольку объединение множеств из $\mathscr{C}_\alpha$ не совпадает с $\mathscr{T}_\alpha$, то пересечение множеств из $\overline{\mathscr{B}_\alpha^*}$ будет не пусто. Следовательно, множества семейства $\mathscr{B}_\alpha^*$

---

[1]) См. Бурбаки Н., Теория множеств, «Мир», М., 1965, стр. 338. — *Прим. ред.*

имеют по крайней мере одну общую точку прикосновения x_α. Тогда любая окрестность U_α точки x_α пересекает любое множество F_α из $\mathscr{B}^*_\alpha$. Если x'_α принадлежит пересечению множества U_α с F_α и является проекцией $x'_\alpha = p_\alpha(x')$ точки $x' \in F$, причем F — множество семейства $\mathscr{B}^*$, то x' принадлежит и множеству $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Отсюда следует, что $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ пересекает любое множество семейства $\mathscr{B}^*$. В силу свойства 4 это означает, что семейство $\mathscr{B}^*$ содержит все множества вида $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, каким бы ни был индекс α и какой бы ни была окрестность U_α точки x_α. Из свойства 4 следует, что любое объединение или любое конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}^*$ само принадлежит семейству $\mathscr{B}^*$. Для множеств вида $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ это означает, что семейство $\mathscr{B}^*$ содержит все окрестности точки $x = (x_\alpha)$ из $\mathscr{T}$. Как следует из свойства 3, любое множество из $\mathscr{B}^*$ пересекает любую окрестность точки x. Поэтому x есть точка прикосновения каждого из множеств семейства $\mathscr{B}^*$, в частности точка прикосновения всех множеств из $\mathscr{B}$. Так как эти множества замкнуты, то x является общей точкой множеств из семейства $\mathscr{B}$, что противоречит свойству, установленному выше. Следовательно, мы не можем предполагать, что покрытие $\mathscr{A}$ не мажорирует ни одного конечного покрытия пространства $\mathscr{T}$. Теорема Тихонова доказана.

14. Примеры компактных пространств

Лемма Бореля — Лебега утверждает, что любое замкнутое множество из $\mathscr{R}^m$, точки которого имеют ограниченные координаты, компактно в индуцированной топологии.

Отсюда следует, что любой замкнутый параллелепипед из $\mathscr{R}^m$ — компактное пространство. Точно так же сфера S^{m-1} — компактное пространство, так как она является замкнутым и ограниченным подмножеством пространства $\mathscr{R}^m$.

Мы получили вещественное проективное пространство $\mathscr{P}^{m-1}$ как непрерывный образ сферы S^{m-1} в пространстве $\mathscr{R}^{m(m+1)/2}$. Из предложения 3 §13 следует, что пространство $\mathscr{P}^{m-1}$ также компактно.

Теорема Тихонова дает возможность построить неограниченное число компактных пространств.

Важным примером является прямое произведение любого семейства пространств I_α, гомеоморфных замкнутому отрезку $I = [0, 1]$ из $\mathscr{R}$.

Заметим, что теорема Тихонова допускает в качестве обратной теоремы

Предложение 1. *Если топологическое произведение $\mathscr{T}$ пространств $\mathscr{T}_\alpha$ компактно, то каждое пространство $\mathscr{T}_\alpha$ компактно.*

В самом деле, если пространство $\mathcal{T}$ компактно, то из предложения 3 § 12 следует, что каждое пространство $\mathcal{T}_\alpha$ отделимо. С другой стороны, пространство $\mathcal{T}_\alpha$ является непрерывным образом (при проекции p_α) компактного пространства $\mathcal{T}$. Отсюда на основании предложения 3 § 13 следует, что $\mathcal{T}_\alpha$ компактно.

Докажем теперь

Предложение 2. *Сумма семейства топологических пространств является компактным пространством тогда и только тогда, когда это семейство содержит только конечное число непустых пространств и каждое из этих пространств компактно.*

Условие необходимо, так как непустые множества $\mathcal{T}'_\alpha$ образуют открытое покрытие $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$ (см. § 11), которое не мажорирует ни одно покрытие, отличное от $\mathcal{A}$. Следовательно, для того чтобы $\mathcal{T}$ было компактным, необходимо, чтобы $\mathcal{A}$ было конечным покрытием.

Для произвольного открытого покрытия $\mathcal{A}_\alpha$ пространства $\mathcal{T}_\alpha$ семейство $f_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)$ [1]) представляет собой открытое покрытие пространства $\mathcal{T}'_\alpha \subset \mathcal{T}$ и вместе с множествами $\mathcal{T}'_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$ образует открытое покрытие пространства $\mathcal{T}$. Если это покрытие мажорирует конечное покрытие $\mathcal{B}$, то множества покрытия $\mathcal{B}$, пересекающие множество $\mathcal{T}'_\alpha$, лежат в $f_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)$ и число их конечно. Отсюда следует, что $f_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)$ мажорирует конечное покрытие пространства $\mathcal{T}'_\alpha$, а тогда и $\mathcal{A}_\alpha$ мажорирует конечное покрытие пространства $\mathcal{T}'_\alpha$. Следовательно, все $\mathcal{T}_\alpha$ являются компактными пространствами.

Обратно, предположим, что мы имеем конечное семейство компактных пространств $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$. Пусть $\mathcal{A}$ — открытое покрытие суммы $\mathcal{T}$ этих пространств. Обозначим через $\mathcal{B}$ открытое покрытие, образованное непустыми множествами из $\mathcal{T}$, имеющими вид $B = A \cap \mathcal{T}'_i$, где A — множество покрытия $\mathcal{A}$. Каждое из этих пересечений принадлежит одному из подпространств $\mathcal{T}'_1, \ldots, \mathcal{T}'_n$. Так как пространства $\mathcal{T}'_i$ компактны, то каждое $\mathcal{T}'_i$ покрыто конечным числом множеств из $\mathcal{B}$. Объединяя множества конечных покрытий, которые можно присоединить к пространствам $\mathcal{T}'_i$, получаем конечное покрытие пространства $\mathcal{T}$, мажорируемое покрытием $\mathcal{A}$. Это показывает, что пространство $\mathcal{T}$ компактно.

Компактным подпространством топологического пространства называется подпространство, которое компактно в индуцированной топологии.

Теорема 4. *Любое конечное объединение компактных подпространств отделимого пространства компактно.*

---

[1]) Через $f_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)$ обозначаем образы при отображении f_α множеств из семейства $\mathcal{A}_\alpha$.

Пусть $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ — компактные подпространства отделимого пространства $\mathcal{T}$. Их объединение $\mathcal{K}$ отделимо в индуцированной топологии. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathcal{A}$ топологического пространства $\mathcal{K}$. Множества этого покрытия имеют вид $\mathcal{K} \cap U$, где U — открытые множества из $\mathcal{T}$. Семейство множеств U обозначим через $\mathcal{U}$. Множества из семейства $\mathcal{U}$ покрывают каждое из пространств $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которое в силу его компактности может быть покрыто конечным числом N множеств вида $\mathcal{K}_i \cap U_j$, где $U_j \in \mathcal{U}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Множества $\mathcal{K} \cap U_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ будут образовывать конечное покрытие пространства $\mathcal{K}$, мажорируемое покрытием $\mathcal{A}$. Это означает, что $\mathcal{K}$ компактно.

15. Локально компактные пространства

Топологическое пространство $\mathcal{L}$ называется *локально компактным*, если оно отделимо и любая его точка лежит по крайней мере в одном открытом множестве с компактным замыканием. Множество U топологического пространства называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно. Мы можем, следовательно, сказать, что отделимое пространство локально компактно, если любая его точка принадлежит некоторому открытому относительно компактному множеству.

Нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 1. *Сумма любого семейства локально компактных пространств есть локально компактное пространство.*

Понятие локально компактного пространства обобщает понятие компактного пространства. Точная связь между этими двумя понятиями дается в следующей теореме П. С. Александрова.

Теорема 5. *Пространство локально компактно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно такому подпространству компактного пространства, что дополнение этого подпространства состоит из одной точки.*

Для доказательства необходимости рассмотрим локально компактное пространство $\mathcal{T}$ и обозначим через K объединение множества $\mathcal{T}$ с множеством $\{\omega\}$, состоящим из одного элемента — точки ω, — не принадлежащего $\mathcal{T}$. Можно, например, в качестве ω взять само пространство $\mathcal{T}$, так как $\mathcal{T}$ не является своей точкой. Таким образом, будем предполагать, что элементами множества K являются точки пространства $\mathcal{T}$, к которым добавлена точка ω.

Рассмотрим в K семейство $\mathcal{F}$, образованное открытыми множествами из $\mathcal{T}$ и дополнениями компактных множеств из $\mathcal{T}$, содержащими точку ω. Любое пересечение $\mathcal{K} = \bigcap K_\alpha$ компактных множеств K_α компактно, так как такое пересечение можно рассматривать как замкнутое подмножество $K_{\alpha_0} \cap (\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha)$ компактного пространства K_{α_0} (по теореме 1). Точно так же любое конечное объединение компактных подпространств пространства $\mathcal{T}$ компактно (по теореме 4).

Отсюда следует, что любое объединение R множеств из $\mathcal{F}$ представляет собой объединение открытого множества U из $\mathcal{T}$ и, быть может, дополнения в K компактного множества C из $\mathcal{T}$. В этом случае

$$R = U \cup (\mathcal{T} - C) \cup \{\omega\} = [\mathcal{T} - (C - U)] \cup \{\omega\} = \\ = [\mathcal{T} - (C - C \cap U)] \cup \{\omega\}.$$

Но $C \cap U$ открыто в C, следовательно, $(C - C \cap U)$ — замкнутое подмножество множества C и, следовательно, компактно. Отсюда получаем, что $R \in \mathcal{F}$.

Точно так же, если конечное пересечение $\mathcal{J}$ множеств из $\mathcal{F}$ представляет собой пересечение открытого множества из $\mathcal{T}$ с дополнением в K компактного множества C из $\mathcal{T}$, то мы получаем соотношение

$$\mathcal{J} = U \cap [(\mathcal{T} - C) \cup \{\omega\}] = U \cap (\mathcal{T} - C).$$

Но так как C компактно и $\mathcal{T}$ отделимо, то C замкнуто в $\mathcal{T}$ и, следовательно, $\mathcal{T} - C$ и $\mathcal{J}$ суть открытые множества.

Этим мы доказали, что семейство $\mathcal{F}$ является топологией в множестве K. Поскольку пересечения $\mathcal{T}$ с открытыми множествами топологии $\mathcal{F}$ — это открытые множества из $\mathcal{T}$, отсюда следует, что исходная топология множества $\mathcal{T}$ совпадает с индуцированной топологией $\mathcal{F}$ множества K. Следовательно, $\mathcal{T}$ гомеоморфно подпространству топологического пространства $\mathcal{K} \doteq = (K, \mathcal{F})$, причем дополнение этого подпространства образовано точкой ω.

Так как $\mathcal{T}$ локально компактно, то легко убедиться в том, что пространство $\mathcal{K}$ отделимо.

Остается показать, что пространство $\mathcal{K}$ компактно. Пусть $\mathcal{A}$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{K}$. Оно должно содержать дополнение некоторого компактного множества C из $\mathcal{T}$, так как эти дополнения являются единственными открытыми множествами из $\mathcal{K}$, содержащими точку ω. С другой стороны, компактное пространство C может быть покрыто конечным числом множеств покрытия $\mathcal{A}$. Эти множества, покрывающие множество C, вместе с множеством $\mathcal{K} - C$ образуют конечное покрытие пространства $\mathcal{K}$, мажорируемое покрытием $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{K}$ компактно.

Докажем, что условие теоремы 5 достаточно для локальной компактности пространства. Для этого докажем. что пространство $\mathcal{K} - \{\omega\}$ локально компактно, если пространство $\mathcal{K}$ является компактным пространством и ω — точка из $\mathcal{K}$.

Пусть x — произвольная точка из $\mathscr{K}$, отличная от ω. Точки x и ω принадлежат соответственно двум непересекающимся открытым множествам U и Ω, так как $\mathscr{K}$ — отделимое пространство. Дополнением к Ω будет замкнутое множество F, содержащее множество U. Но из предложения 1 § 13 следует, что F компактно, следовательно, оно является компактной окрестностью точки x. Так как множество F замкнуто, то оно содержит $\overline{U}$ — замыкание множества U в $\mathscr{K}$. Так как $\overline{U}$ — замкнутое подмножество компактного множества F, оно будет компактно в F и, следовательно, будет компактным подпространством пространства $\mathscr{K}$ (см. теорему 1). Этим доказано, что U относительно компактно. Так как x — произвольная точка множества $\mathscr{K}-\{\omega\}$, то пространство $\mathscr{K}-\{\omega\}$ локально компактно.

Иллюстрацией теоремы Александрова является числовое пространство $\mathscr{R}^m$. Это пространство локально компактно, так как любая его точка допускает в качестве компактных окрестностей замкнутые отрезки, внутри которых она лежит.

Пространство $\mathscr{R}^m$ не является компактным, так как покрытие, образованное открытыми сферами, не мажорирует никакого конечного покрытия.

Однако пространство $\mathscr{R}^m$ гомеоморфно подпространству сферы S^m, полученному удалением из S^m фиксированной точки ω. Гомеоморфизм пространств $\mathscr{R}^m$ и $S^m-\{\omega\}$ можно получить путем стереографической проекции сферы S^m из точки ω на плоскость, касательную к сфере в точке, диаметрально противоположной точке ω. Эта плоскость, очевидно, гомеоморфна пространству $\mathscr{R}^m$.

В конформной геометрии пространство $\mathscr{R}^m$ отождествляется с пространством $S^m-\{\omega\}$. В этом случае ω называется точкой Мёбиуса пространства $\mathscr{R}^m$.

16. Паракомпактные пространства

Другим обобщением понятия компактного пространства является понятие *паракомпактного* пространства. Так называется отделимое пространство, в котором для каждого открытого покрытия $\mathscr{A}$ можно найти локально конечное покрытие, более тонкое, чем $\mathscr{A}$ (см. § 5).

Любое компактное пространство является паракомпактным, так как, каким бы ни было покрытие $\mathscr{A}$ компактного пространства, $\mathscr{A}$ мажорирует конечное покрытие $\mathscr{A}'$, являющееся более тонким, чем покрытие $\mathscr{A}$, и локально конечным.

Предложение 1. *Сумма семейства паракомпактных пространств есть паракомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — покрытие суммы $\mathscr{T}$ паракомпактных подпространств $\mathscr{T}_\alpha$. Множества вида $A\cap\mathscr{T}_\alpha$, где A

принадлежит семейству $\mathcal{A}$, образуют покрытие $\mathcal{A}'$ суммы $\mathcal{T}$, более тонкое чем $\mathcal{A}$, так как $A \cap \mathcal{T}_\alpha \subset A$. С другой стороны, для любого индекса α множества $A \cap \mathcal{T}_\alpha$ образуют покрытие $\mathcal{A}'_\alpha$ пространства $\mathcal{T}_\alpha$. Так как $\mathcal{T}_\alpha$ паракомпактны, существует покрытие $\mathcal{B}_\alpha$ пространств $\mathcal{T}_\alpha$, локально конечное и более тонкое чем $\mathcal{A}'_\alpha$. Объединение $\mathcal{B}$ семейств $\mathcal{B}_\alpha$ является покрытием пространства $\mathcal{T}$, более тонким, чем покрытие $\mathcal{A}'$, и, следовательно, более тонким, чем покрытие $\mathcal{A}$. Покажем, что покрытие $\mathcal{B}$ локально конечно. Рассмотрим точку $x \in \mathcal{T}$. Подпространства $\mathcal{T}_\alpha$ покрывают пространство $\mathcal{T}$ и попарно не пересекаются. Следовательно, точка x принадлежит только одному из этих пространств, например пространству $\mathcal{T}_{\alpha_0}$. Так как покрытие $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ пространства $\mathcal{T}_{\alpha_0}$ локально конечно, существует окрестность U точки x, пересекающая только конечное число множеств из $\mathcal{B}_{\alpha_0}$. Эта окрестность U будет окрестностью точки x и в пространстве $\mathcal{T}$, которая пересекает то же конечное число множеств из $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ и не пересекает других множеств из $\mathcal{B}$. Это показывает, что покрытие $\mathcal{B}$ локально конечно. Так как открытое покрытие $\mathcal{A}$ произвольное, то мы доказали, что пространство $\mathcal{T}$ паракомпактно.

Сформулируем теперь теорему, указывающую на связь между понятиями локально компактного пространства и паракомпактного пространства. Теорема относится к узкому классу локально компактных пространств, а именно к локально компактным пространствам, *счетным в бесконечности*. Так называется локально компактное пространство, которое может быть покрыто счетным семейством компактных подпространств. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Если $\mathcal{L}$ — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, то $\mathcal{L}$ может быть покрыто счетным семейством $\{U_n\}$ открытых множеств U_n так, что $\overline{U}_n$ будет компактным подмножеством множества U_{n+1}.*

В самом деле, $\mathcal{L}$ есть объединение компактных подпространств C_n $(n=1, 2, \ldots)$, поэтому подпространства

$$K_n = \bigcup_{p=1}^{n} C_p$$

компактны (см. теорему 4), покрывают пространство $\mathcal{L}$ и удовлетворяют условию $K_n \subset K_{n+1}$.

Каждая точка x подпространства K пространства $\mathcal{L}$ содержится в некотором открытом и относительно компактном множестве U_x из $\mathcal{L}$. Множества U_x покрывают компактное пространство K, и мы можем выбрать конечное число таких множеств, например $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$, обладающих свойством

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_n}.$$

Множество

$$U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

открыто в $\mathscr{L}$ и содержится в компактном подпространстве

$$K' = \bar{U}_{x_1} \cup \bar{U}_{x_2} \cup \ldots \cup \bar{U}_{x_n}.$$

Его замыкание $\bar{U}$ в $\mathscr{L}$ будет содержаться в K' и будет являться замкнутым подмножеством в K', так как $\bar{U} = \bar{U} \cap K'$. Следовательно, $\bar{U}$ будет компактным подпространством пространства K' (по предложению 1 § 13), а значит, и пространства $\mathscr{L}$ (по теореме 1). Поэтому любое компактное подпространство K пространства $\mathscr{L}$ содержится в открытом множестве U с компактным замыканием $\bar{U}$.

Пусть U_1 — открытая относительно компактная окрестность подпространства K_1 (т. е. открытое множество, содержащее K_1). Определим множества U_2, U_3, ... по индукции; U_n — открытая окрестность, относительно компактная в $\mathscr{L}$, компактного множества $\bar{U}_{n-1} \cup K_n$. Множества U_n покрывают тогда пространство $\mathscr{L}$. Кроме того, $\bar{U}_n$ содержится в U_{n+1}, так как U_{n+1} является окрестностью множества $\bar{U}_n \cup K_{n+1}$. Таким образом, лемма доказана.

Докажем теперь, следуя Бурбаки, следующую теорему.

Теорема 6. *Локально компактное пространство, счетное в бесконечности, является паракомпактным.*

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное покрытие локально компактного пространства $\mathscr{L}$, счетного в бесконечности. Надо показать, что существует локально конечное покрытие $\mathscr{A}'$, более тонкое чем $\mathscr{A}$.

Пусть $\{U_n\}$ — счетное покрытие пространства $\mathscr{L}$ относительно компактными открытыми множествами, удовлетворяющими условиям леммы

$$\bar{U}_n \subset U_{n+1}.$$

Пусть для каждого n

$$V_n = \bar{U}_n \cap (\mathscr{L} - U_{n-1}),$$

$$W_n = U_{n+1} \cap (\mathscr{L} - \bar{U}_{n-2}).$$

V_n — замкнутое подмножество компактного пространства $\bar{U}_n$ ($\mathscr{L} - U_{n-1}$ замкнуто в $\mathscr{L}$!), следовательно V_n — компактное пространство. Поскольку W_n является пересечением двух открытых множеств, оно открыто. Из того, что $\bar{U}_{n-2} \subset U_{n-1}$, следует, что $\mathscr{L} - U_{n-1} \subset \mathscr{L} - \bar{U}_{n-2}$. Учитывая включение $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$, находим, что $V_n \subset W_n$.

Пусть задана произвольная точка x. Существует наименьший номер $n = n(x)$, при котором $x \in U_n$. Тогда x не принадлежит U_{n-1}.

В этом случае x принадлежит множеству $V_{n(x)}$. С другой стороны, x принадлежит по крайней мере одному множеству $A_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathscr{A}$. Положим

$$W_x = A_{\alpha(x)} \cap W_{n(x)}.$$

Множества W_x образуют открытое покрытие $\mathscr{W}$ пространства $\mathscr{L}$, более тонкое, чем покрытие $\mathscr{A}$.

Для каждого индекса n рассмотрим конечное число открытых множеств вида $W_i^n = W_{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p_n;\ x_i \in V_n)$, которые покрывают компактное пространство V_n. Множества W_i^n $(i = 1, 2, \ldots, p_n, n = 1, 2, \ldots)$ образуют открытое покрытие $\mathscr{W}^*$ пространства $\mathscr{L}$, более тонкое, чем $\mathscr{W}$, следовательно, более тонкое, чем покрытие $\mathscr{A}$. Покажем, что покрытие $\mathscr{W}^*$ локально конечно.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathscr{L}$ и наименьший индекс $n = n(x)$, для которого x лежит в U_n. Тогда x принадлежит множеству $U_n \cap (\mathscr{L} - U_{n-1})$. Но $U_n \cap (\mathscr{L} - U_{n-1})$ является подмножеством открытого множества $U_x = U_n \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{n-2})$. Для $p < n-2$ имеем

$$W_p \cap U_x = U_n \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{n-2}) \cap U_{p+1} \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{p-2}).$$

В силу

$$U_{p+1} \subset \overline{U}_{p+1} \subset U_{p+2} \subset \ldots \subset \overline{U}_{n-2}$$

получаем

$$W_p \cap U_x = U_{p+1} \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{n-2}) = \varnothing.$$

Точно так же для $p > n+1$ имеем

$$W_p \cap U_x = U_n \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{p-2}) \subset \overline{U}_{p-2} \cap (\mathscr{L} - \overline{U}_{p-2}) = \varnothing.$$

Отсюда следует, что окрестность U_x точки x пересекает только те множества W_i^p покрытия $\mathscr{W}^*$, для которых

$$n - 2 \leqslant p \leqslant n + 1.$$

Это значит, что U_x пересекает самое большее

$$p(x) = p_{n-2} + p_{n-1} + p_n + p_{n+1}$$

множеств из $\mathscr{W}^*$. Так как точка x произвольная, то покрытие $\mathscr{W}^*$ локально конечно. Таким образом, теорема доказана.

Важным примером локально компактного счетного в бесконечности пространства является числовое пространство $\mathscr{R}^m$. В самом деле, это пространство является объединением замкнутых шаров с радиусами, равными $\sqrt{m}$, центры которых имеют целочисленные координаты. Эти шары образуют, очевидно, счетное множество компактных подпространств пространства $\mathscr{R}^m$. Отсюда следует, что пространство $\mathscr{R}^m$ паракомпактно.

Теперь мы докажем теорему, которая позволяет получать другие примеры паракомпактных пространств, являющихся подпространствами в $\mathscr{R}^m$.

Теорема 7. *Любое замкнутое подмножество локально компактного счетного в бесконечности пространства есть локально компактное счетное в бесконечности пространство и, следовательно, паракомпактно.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество локально компактного счетного в бесконечности пространства $\mathscr{L}$, а $\{C_n\}$ — счетное покрытие пространства $\mathscr{L}$ компактными подпространствами. Тогда $\{A \cap C_n\}$ представляет собой покрытие топологического пространства A компактными пространствами. В самом деле, $A \cap C_n$ — замкнутое подмножество компактного пространства C_n и, следовательно, компактное подпространство в C_n. Тогда по теореме 1 пересечение $A \cap C_n$ является компактным подпространством пространства $\mathscr{L}$, и, значит, по той же теореме оно является компактным подпространством пространства A.

Остается доказать, что пространство A локально компактно. Пусть x — произвольная точка из A, а U — открытая относительно компактная окрестность точки x в $\mathscr{L}$. В этом случае подпространство $\bar{U}$ компактно в $\mathscr{L}$, а следовательно, подпространство $\bar{U} \cap A$ пространства A компактно. Так как $\bar{U} \cap A$ замкнуто в A и содержит $U \cap A$, замыкание $\overline{U \cap A}$ этого множества в A принадлежит компактному пространству $\bar{U} \cap A$. Значит, $\overline{U \cap A}$ компактно. Следовательно, множество $U \cap A$ открыто и относительно компактно в A и содержит точку x. Таким образом, A есть локально компактное пространство, а замечание, сделанное выше, показывает, что A счетно в бесконечности.

Из теоремы 7 следует, что любое подмножество пространства $\mathscr{R}^m$, полученное обращением в нуль системы непрерывных на $\mathscr{R}^m$ вещественных функций, есть паракомпактное пространство.

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{A}$ — открытое покрытие локально компактного и паракомпактного пространства $\mathscr{L}$. Существует открытое покрытие пространства $\mathscr{L}$, более тонкое чем $\mathscr{A}$, локально конечное и состоящее только из относительно компактных подмножеств пространства $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}$ локально компактно. Каждая его точка x принадлежит по крайней мере одному относительно компактному открытому множеству U_x.

Присоединим к каждой точке $x \in \mathscr{L}$ относительно компактную открытую окрестность U_x. Тогда мы получим открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства $\mathscr{L}$. Множества B вида $A \cap U_x$, где $A \in \mathscr{A}$ и $U_x \in \mathscr{U}$, образуют открытое покрытие $\mathscr{B}$ пространства $\mathscr{L}$, более тонкое чем $\mathscr{A}$. Замыкание каждого множества $A \cap U_x$ содержится в компактном множестве $\overline{U}_x$, следовательно, $A \cap U_x$ являются относительно компактными подмножествами пространства $\mathscr{L}$.

Мы предположили, что пространство $\mathscr{L}$ паракомпактно. Это означает, что покрытию $\mathscr{B}$ можно сопоставить локально конечное покрытие $\mathscr{A}'$, более тонкое чем $\mathscr{B}$. Каждое множество A' покрытия $\mathscr{A}'$ будет содержаться в некотором множестве из $\mathscr{B}$, которое будет иметь вид $A \cap U_x$. Следовательно, замыкание $\overline{A'}$ будет содержаться в компактном подпространстве $\overline{A \cap U_x}$, т. е. $\overline{A'}$ будет компактным. Отсюда мы заключаем, что A' относительно компактно, а это произвольное множество покрытия $\mathscr{A}'$. Таким образом, покрытие $\mathscr{A}'$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

17. Нормальные пространства

Усилением понятия отделимого пространства является понятие нормального пространства. Топологическое пространство $\mathscr{N}$ называется *нормальным*, если оно отделимо и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A_0, A_1 можно найти два открытых непересекающихся множества U_0, U_1 таких, что $A_0 \subset U_0$, $A_1 \subset U_1$.

Значение этого класса пространств в том, что в нормальном пространстве существует достаточно много непрерывных функций в смысле следующей теоремы.

Теорема Титце. *Пусть f — вещественная функция, определенная и непрерывная на замкнутом подмножестве A нормального пространства $\mathscr{N}$ и принимающая значения только из отрезка* $[0, 1]$. *Тогда существует вещественная функция F со значениями в том же интервале, определенная и непрерывная на пространстве $\mathscr{N}$ и равная f на множестве A.*

Теорема была доказана Титце для специального случая, когда $\mathscr{N}$ — числовое пространство $\mathscr{R}^n$. Урысон доказал эту теорему для случая произвольного нормального пространства, предполагая, что функция f принимает только два значения. В обобщенной форме, сформулированной выше, эта теорема известна под названием теоремы Титце, а доказательство, которое мы приводим здесь, следует идее доказательства Урысона.

Обозначим через D множество рациональных чисел вида

$$r = \frac{m}{2^n},$$

где n — целое положительное число, а m принимает нечетные значения $1, 3, \ldots, 2^n - 1$. Будем обозначать через $\overline{D}$ множество

$D \cup \{0, 1\}$. Для двух чисел $r = m/2^n$ и $r' = m'/2^{n'}$ из D будем писать $r \prec r'$ (r предшествует r'), если $n < n'$ или если $n = n'$ и $m < m'$. Запись $r < r'$ будет означать обычное отношение порядка в множестве рациональных или вещественных чисел.

Построим индукцией по n семейство открытых множеств U_r ($r \in D$), обладающих следующими свойствами.

1. U_r содержит замкнутое множество F_r, состоящее из точек множества A, в которых функция f принимает значения меньшие или равные r, т. е.

$$F_r = \{x \in A;\ f(x) \leqslant r\}.$$

2. $\bar{U}_r$ не содержит ни одной точки множества G^r, состоящего из тех точек множества A, в которых $f \geqslant r'$ для любого r', удовлетворяющего условиям

$$r' > r, \quad r' \prec r.$$

3. Если $r < r'$, то замыкание множества U_r содержится в $U_{r'}$.

Чтобы построить множества U_r, заметим, что для двух замкнутых и непересекающихся множеств F и F' в нормальном пространстве $\mathscr{N}$ существует по крайней мере одно открытое множество U, содержащее множество F и замыкание которого не пересекается с F'. В самом деле, в $\mathscr{N}$ существуют два непересекающихся открытых множества U и U' таких, что $F \subset U$ и $F' \subset U'$. В этом случае U включено в замкнутое множество $\mathscr{N} - U'$ и замыкание множества U лежит в том же $\mathscr{N} - U'$. Следовательно, это замыкание не пересекается с U' и тем более с F'. Для двух замкнутых непересекающихся множеств F и F' обозначим через $U(F - F')$ любое открытое множество, содержащее F, если его замыкание не пересекается с F'.

Перейдем теперь к построению множеств U_r. Для $r = {}^1/_2$ выберем в качестве множества U_r множество $U(F_{1/2} - G^{1/2})$. Такое множество существует, ибо множества

$$F_{1/2} = \left\{x \in A;\ f(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}, \quad G^{1/2} = \{x \in A;\ f(x) = 1\}$$

замкнуты и не пересекаются.

Для произвольного числа r из D обозначим через r_- наибольшее из чисел $r' \in D$, меньших чем r и предшествующих r, и через r_+ — наименьшее из чисел r'', больших чем r и тоже предшествующих r, т. е.

$$r_- < r < r_+, \quad r_- \prec r, \quad r_+ \prec r.$$

Из соотношений

$$r' < r, \quad r' \prec r; \quad r'' > r, \quad r'' \prec r$$

следует

$$r' \leqslant r_-, \quad r'' \geqslant r_+.$$

Если r имеет вид 2^{-n}, то

$$r_- = 0, \quad r_+ = 2^{-n+1};$$

если $r = 1 - 2^{-n}$, то

$$r_- = 1 - 2^{-n+1}, \quad r_+ = 1;$$

наконец, для $r = (2k+1)\,2^{-n}$ имеем

$$r_- = k \cdot 2^{-n+1}, \quad r_+ = (k+1)\,2^{-n+1}.$$

Предположим, что мы построили все множества $U_{r'}$ $(r' \prec r)$ так, чтобы выполнялись условия 1, 2, 3. Рассмотрим множества

$$P_r = F_r \cup \overline{U}_{r-}, \quad Q^r = G^r \cup (\mathcal{N} - U_{r+}).$$

Множества P_r и Q^r замкнутые, так как каждое из них является объединением двух замкнутых множеств. Кроме того, множества P_r и Q^r не пересекаются в силу соотношений

$$F_r \cap G^r = \varnothing, \quad F_r \subset U_{r+}, \quad \overline{U}_{r-} \cap G^r = \varnothing, \quad \overline{U}_{r-} \subset U_{r+},$$

которые следуют из условий 1, 2, 3.

Выберем в качестве U_r множество $U(P_r - Q^r)$. Тогда

$$U_r \supset F_r \cup \overline{U}_{r-}, \quad \overline{U}_r \subset (\mathcal{N} - G^r) \cap U_{r+}$$

и условия 1, 2, 3 будут выполнены и для индекса r. Принцип индукции обеспечивает возможность реализации условий 1, 2, 3. Кроме множеств U_r $(r \in D)$ рассмотрим еще множество $U_1 = \mathcal{N}$.

Построим теперь на пространстве $\mathcal{N}$ функцию F следующим образом. Для произвольной точки $x \in \mathcal{N}$ определим число $F(x)$ как нижнюю границу чисел $r \in \overline{D}$, для которых $x \in U_r$. Если x — точка множества A, для которой $f(x) < 1$, то между числом $f(x)$ и любым числом $\alpha > f(x)$ существует в D число r' и мы будем иметь $x \in F_{r'} \subset U_{r'}$. Отсюда следует, что в этих точках $F(x) = f(x)$. Если $f(x) = 1$, то точка x не принадлежит ни одному из множеств U_r, $r \in D$. Следовательно, она принадлежит только множеству $U_1 = \mathcal{N}$, откуда получаем, что $F(x) = 1 = f(x)$. Следовательно, функция F равна f в каждой точке множества A. Ясно, что F не принимает значений, лежащих вне интервала $[0, 1]$.

Покажем, что функция F непрерывна. Заметим для этого, что x не принадлежит ни одному из множеств $U_{r'}$, $(r' < r)$, если в точке x из $\mathcal{N}$ имеем $F(x) \geqslant r$, $r \in D$. Обратно, если точка x из $\mathcal{N}$ не принадлежит ни одному из множеств $U_{r'}$ $(r' < r)$, то нижняя граница чисел $r'' \in D$, для которых $x \in U_{r''}$, не меньше r и $F(x) \geqslant r$.

Мы доказали, следовательно, что

$$\{x \in \mathcal{N};\ F(x) \geqslant r\} = \bigcap_{\substack{r'<r \\ r' \in D}} (\mathcal{N} - U_{r'}) \text{ есть замкнутое множество,}$$

и отсюда следует, что

$$A_r = \{x \in \mathcal{N};\ \ F(x) < r\} \text{ есть открытое множество.} \qquad (3)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\{x \in \mathcal{N};\ F(x) \leqslant r\} = \bigcap_{r'>r} U_{r'} \text{ есть замкнутое множество.}$$

Для доказательства заметим, что точка x принадлежит каждому из множеств $U_{r'}$, $r' > r$, если $F(x) \leqslant r$. Действительно, если $x \notin U_{r'}$, то нижняя граница чисел r'', для которых $x \in U_{r''}$, не меньше r' и, следовательно, $F(x) > r$. Обратно, если точка x принадлежит каждому из множеств $U_{r'}$, $r' > r$, то нижняя граница чисел r'', для которых $x \in U_{r''}$, не может превышать r, и, следовательно, $F(x) \leqslant r$. Из условия 3 легко следует, что $\bigcap\limits_{r'>r} U_{r'} = \bigcap\limits_{r'>r} \overline{U}_{r'}$ есть замкнутое множество.

Итак,

$$B_r = \{x \in \mathcal{N};\ F(x) > r\} \text{ — есть открытое множество.} \qquad (4)$$

Из соотношений (3), (4) следует, что множества

$$C_{r,\,r'} = \{x \in \mathcal{N};\ \ r < F(x) < r'\}$$

открытые.

Пусть $\mathcal{D}$ — произвольное открытое множество на вещественной прямой. Оно представляет собой объединение открытых интервалов вида (r, r'), а значит, $F^{-1}(\mathcal{D})$ — объединение множеств $C_{r,\,r'}$. Отсюда следует, что $F^{-1}(\mathcal{D})$ — множество, открытое в $\mathcal{N}$. Это показывает, что функция F непрерывна, и тем самым доказательство теоремы Титце закончено.

Замечания. 1. Функция F называется непрерывным продолжением в $\mathcal{N}$ функции f.

2. Можно показать, что единственными топологическими пространствами, в которых теорема Титце справедлива, являются нормальные пространства. В самом деле, пусть A и B — два замкнутых и непересекающихся множества в топологическом пространстве $\mathcal{T}$. Функция f, определенная на замкнутом множестве $A \cup B$ условиями

$$f = 0 \text{ на } A,\ f = 1 \text{ на } B,$$

непрерывна на $A \cup B$. Предположим, что f допускает непрерывное продолжение F в $\mathcal{T}$. Тогда множества

$$U = \left\{x \in \mathcal{T};\ F(x) < \frac{1}{3}\right\},\ V = \left\{x \in \mathcal{T};\ F(x) > \frac{2}{3}\right\}$$

открытые, непересекающиеся и содержат соответственно множества A и B. Следовательно, если продолжение функции f на $\mathcal{T}$ возможно для любых замкнутых и непересекающихся множеств A и B, то пространство $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию нормальности.

3. Теорема Титце может быть обобщена, а именно: непрерывная вещественная функция (не обязательно ограниченная), определенная на замкнутом множестве A пространства $\mathcal{N}$, может быть продолжена на $\mathcal{N}$. Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $F=\frac{f}{1+|f|}$, принимающую значения в $(-1,1)$. Эта функция называется *преобразованной по Бэру* функцией f.

4. Другое обобщение теоремы Титце касается продолжения непрерывных функций, определенных на замкнутом множестве нормального пространства $\mathcal{N}$ и принимающих значения в числовом пространстве $\mathcal{R}^n$. Такая функция задается системой $(f_1, \ldots, f_n)$ непрерывных на A вещественных функций f_i. Каждая из этих функций f_i может быть продолжена до непрерывной на пространстве $\mathcal{N}$ функции F_i и система $(F_1, \ldots, F_n)$ реализует искомое продолжение.

5. Леммой Урысона называется предложение, которое получается из теоремы Титце в частном случае, когда множество A является объединением двух непересекающихся замкнутых множеств A_0 и A_1, причем $f=0$ на A_0 и $f=1$ на A_1.

Докажем теперь важное свойство паракомпактных пространств, найденное Дьёдонне.

Любое паракомпактное пространство $\mathcal{T}$ нормально.

Докажем прежде всего, что в $\mathcal{T}$ существуют два непересекающихся открытых множества U и V таких, что

$$x \in U, \quad F \subset V,$$

если F — замкнутое множество в паракомпактном пространстве $\mathcal{T}$ и точка x из $\mathcal{T}$ не принадлежит F. В самом деле, $\mathcal{T}$ является отделимым пространством. Следовательно, для каждой точки y из F можно найти два открытых непересекающихся множества U_y и V_y таких, что

$$x \in U_y, \quad y \in V_y.$$

Множества V_y и $\mathcal{T}-F$ образуют открытое покрытие пространства $\mathcal{T}$, когда y пробегает все множество F. Так как пространство $\mathcal{T}$ паракомпактно, существует покрытие $\mathcal{A}$, локально конечное и более тонкое, чем покрытие $\{V_y, \mathcal{T}-F\}_{y\in F}$. Тогда существует окрестность U' точки x, пересекающая конечное число множеств покрытия $\mathcal{A}$. Пусть $A_1, \ldots, A_p$ — множества из $\mathcal{A}$, которые пересекают множества U' и F. Эти множества не могут лежать в $\mathcal{T}-F$, следовательно, они принадлежат к множествам вида $V_{y_1}, \ldots, V_{y_p}$. Множество $U=U' \cap U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_p}$ будет окрестностью точки x, не пересекающей ни одного множества покрытия $\mathcal{A}$, которое пересекает множество F.

Следовательно, U не пересекается с объединением V этих множеств, и множества U и V удовлетворяют условиям

$$U \cap V = \varnothing, \quad x \in U, \quad F \subset V.$$

Предположим теперь, что точка x описывает замкнутое множество G, не пересекающееся с F. Для каждой точки $x \in G$ можно найти два открытых множества U_x и V_x таких, что

$$x \in U_x, \quad F \subset V_x, \quad U_x \cap V_x = \varnothing.$$

Множества U_x, $\mathcal{T}-G$ образуют открытое покрытие пространства $\mathcal{T}$, и можно найти локально конечное покрытие $\mathcal{B}$, более тонкое, чем покрытие $(U_x, \mathcal{T}-G)_{x\in G}$. Обозначим через U объединение множеств из $\mathcal{B}$, пересекающихся с множеством G. Множество U открыто и содержит G. Если y — произвольная точка из F, то существует окрестность V'_y точки y, которая пересекает конечное число множеств покрытия $\mathcal{B}$. Пусть $B_1, \ldots, B_q$ — множества из $\mathcal{B}$, которые пересекают множества V'_y и G. Тогда $B_1, \ldots, B_q$ не могут содержаться в $\mathcal{T}-G$ и содержатся в множествах вида $U_{x_1}, \ldots, U_{x_q}$. Если положить $V_y = V'_y \cap V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_q}$, то $V_y \cap U_{x_i} \subset \subset V_{x_i} \cap U_{x_i}$, следовательно, V_y не пересекается ни с одним из множеств U_{x_i}. Тем более V_y не будет пересекать ни одного из множеств $B_1, \ldots, B_q$. Поэтому $V_y \cap U = \varnothing$, так как B_i были единственными множествами из объединения U, которые могли бы пересекаться с множеством V_y. Следовательно, каждая точка $y \in F$ лежит в открытом множестве V_y, которое не пересекается с U. Если положить $V = \bigcup\limits_{y\in F} V_y$, то множества U и V будут удовлетворять условиям $F \subset V$, $G \subset U$, $U \cap V = \varnothing$. Отсюда следует, что $\mathcal{T}$ — нормальное пространство.

В качестве приложения леммы Урысона (см. п. 5 на стр. 92) докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in M}$ — локально конечное открытое покрытие нормального пространства $\mathcal{N}$. Тогда существует семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in M}$ вещественных функций, непрерывных на $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условиям:*

1. *Каждая функция f_α неотрицательна, т. е. $f_\alpha(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathcal{N}$.*

2. *$f_\alpha(x) = 0$ для всех точек x, не принадлежащих замкнутому подмножеству $S_\alpha \subset A_\alpha$.*

3. *Если x — произвольная точка из $\mathcal{N}$, а U — окрестность точки x, которая пересекает только конечное число множеств $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_m}$ локально конечного покрытия $\mathcal{A}$, то*

$$\sum_{i=1}^{m} f_{\alpha_i}(x) = 1.$$

Семейство функций f_α, удовлетворяющее условиям 1, 2, 3, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию $\mathcal{A}$.*

Для доказательства существования разбиения единицы используем следующую теорему.

Теорема 10. *Если $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in M}$ — точечно конечное покрытие (в частности, локально конечное — см. § 5) нормального про-*

странства $\mathcal{N}$, то существует покрытие $\mathcal{A}'=\{A'_\alpha\}_{\alpha\in M}$ такое, что для каждого индекса α множество A_α содержит замыкание в $\mathcal{N}$ множества A'_α.

Доказательство теоремы 10 (по Бурбаки). Обозначим через Φ множество открытых покрытий $\mathcal{B}=(B_\alpha)_{\alpha\in M}$ пространства $\mathcal{N}$ для любого индекса α из M, удовлетворяющих условию

$$B_\alpha=A_\alpha \text{ или } \overline{B}_\alpha\subset A_\alpha.$$

Во множестве Φ введем отношение частичной упорядоченности: $\mathcal{B}\gg\mathcal{B}'$, если $\overline{B}'_\alpha\subset A_\alpha$ влечет за собой равенство $B_\alpha=B'_\alpha$ при любом индексе $\alpha\in M$.

Любое упорядоченное подмножество Φ' множества Φ имеет верхнюю границу; если $\mathcal{B}'^\lambda=\{B'^\lambda_\alpha\}$ ($\alpha\in M$, $\lambda\in\Lambda$) являются покрытиями из семейства Φ', то мы можем определить новое покрытие $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}$ следующим образом: заметим, что если для некоторого индекса $\alpha\in M$ существует индекс $\lambda_0\in\Lambda$ такой, что

$$\overline{B}'^{\lambda_0}_\alpha\subset A_\alpha,$$

то $B'^\lambda_\alpha=B'^{\lambda_0}_\alpha$ для любого $\lambda\in\Lambda$, для которого $\overline{B}'^\lambda_\alpha\subset A_\alpha$, так как Φ' упорядоченное, и можно положить

$$B_\alpha=B'^{\lambda_0}_\alpha.$$

В противном случае имеем $B^\lambda_\alpha=A_\alpha$ ($\lambda\in\Lambda$) и полагаем $B_\alpha=A_\alpha$.

Докажем, что множества $B_\alpha\in\mathcal{B}$ покрывают пространство $\mathcal{N}$. В самом деле, пусть x — произвольная точка пространства $\mathcal{N}$. Так как покрытие $\mathcal{A}$ точечно конечное, то точка x принадлежит конечному числу множеств покрытия $\mathcal{A}$. Пусть $A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_n}$ — множества A_α, содержащие точку x. Для каждого индекса $\lambda\in\Lambda$ точка x принадлежит по крайней мере одному из множеств $B'^\lambda_{\alpha_1},\ldots,B'^\lambda_{\alpha_n}$, так как $\mathcal{B}'^\lambda$ — покрытия пространства $\mathcal{N}$ и $B'^\lambda_{\alpha_1},\ldots,B'^\lambda_{\alpha_n}$ являются единственными множествами из $\mathcal{B}'^\lambda$, которые могут содержать точку x (для $\beta\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ имеем $B^\lambda_\beta\subset A_\beta$, а x не принадлежит множеству A_β).

Если для некоторого индекса α_i имеем $B'^\lambda_{\alpha_i}=A_{\alpha_i}$, то, каким бы ни был индекс $\lambda\in\Lambda$, $B_{\alpha_i}=A_{\alpha_i}$ и точка x принадлежит множеству B_{α_i} покрытия $\mathcal{B}$.

Если индексы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ можно сопоставить индексам $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, при которых

$$\overline{B}'^{\lambda_i}_{\alpha_i}\subset A_{\alpha_i},$$

то

$$B_{\alpha_i}=B'^{\lambda_i}_{\alpha_i}=B'^\lambda_{\alpha_i}\quad(\lambda=\max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}).$$

Так как для любого фиксированного индекса λ точка x принадлежит объединению $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B'^{\lambda}_{\alpha_i}$, то она будет принадлежать и объединению $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$. Следовательно, множества B_α $(\alpha \in M)$ покрывают пространство $\mathscr{N}$.

Покрытие $\mathscr{B}$ мажорирует множество Φ', так как для любого покрытия $\mathscr{B}'$ из Φ' имеем $\mathscr{B} \gg \mathscr{B}'$ в силу способа, которым мы построили покрытие $\mathscr{B}$. Это означает, что к частично упорядоченному множеству Φ применима теорема Цорна, согласно которой Φ содержит по крайней мере один максимальный элемент $\mathscr{A}' = \{\mathscr{A}'_\alpha\}_{\alpha \in M}$.

Покажем теперь, что для покрытия $\mathscr{A}'$

$$\bar{A}'_\alpha \subset A_\alpha$$

при любом индексе $\alpha \in M$. Предположим обратное, т. е. что для некоторого индекса α имеем $\bar{A}'_\alpha = A_\alpha$. Построим тогда новое покрытие $\mathscr{A}'' = \{A''_\alpha\}_{\alpha \in M} \in \Phi$ такое, что $\mathscr{A}'' \gg \mathscr{A}'$. Для всех индексов $\beta \neq \alpha$ положим

$$A''_\beta = A'_\beta,$$

а для индекса α рассмотрим замкнутые непересекающиеся множества $F = \mathscr{N} - (\bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} A'_\beta)$, $G = \mathscr{N} - A'_\alpha$ (их дополнения покрывают пространство $\mathscr{N}$) и выберем в качестве A''_α открытое множество, содержащее множество F и не пересекающее некоторое открытое множество B, которое содержит множество G. Тогда

$$\mathscr{N} - (\bigcup_{\beta \neq \alpha} A''_\beta) \subset A''_\alpha \subset \mathscr{N} - B \subset A'_\alpha,$$

откуда следует, что множества A''_β и A''_α покрывают пространство $\mathscr{N}$ и что замыкание множества A''_α принадлежит замкнутому множеству $\mathscr{N} - B$, а потому и множеству A'_α. В этом случае $\mathscr{A}'' \in \Phi$, $\mathscr{A}'' \gg \mathscr{A}'$, т. е. $\mathscr{A}'$ не является максимальным в множестве Φ, что противоречит сделанному ранее предложению. Следовательно, для любого индекса α имеем $\bar{A}'_\alpha \subset A_\alpha$, и покрытие $\mathscr{A}'$ удовлетворяет всем условиям теоремы 10.

Доказательство теоремы 9. Применяя дважды теорему 10, можно найти два покрытия $\mathscr{A}' = \{A'_\alpha\}_{\alpha \in M}$, $\mathscr{A}'' = \{A''_\alpha\}_{\alpha \in M}$ таких, что для любого индекса α из M

$$\bar{A}''_\alpha \subset A'_\alpha, \quad \bar{A}'_\alpha \subset A_\alpha.$$

Так как множества $\bar{A}''_\alpha$ и $\mathscr{N} - A_\alpha$ замкнуты и не пересекаются в силу леммы Урысона, на пространстве $\mathscr{N}$ существует вещественная непрерывная неотрицательная функция f_α со значениями

$$f_\alpha = 1 \text{ на } \bar{A}''_\alpha, \quad f_\alpha = 0 \text{ на } \mathscr{N} - A_\alpha.$$

Пусть x — произвольная точка пространства $\mathcal{N}$. Существует окрестность U точки x, которая пересекает только конечное число множеств A_α (покрытие $\mathcal{A}$ локально конечно). Следовательно, существует только конечное число функций f_α, не равных нулю тождественно в U. Обозначим через f_U ограничение суммы этих функций на множество U и рассмотрим функции

$$g_\alpha^U = \frac{f_\alpha}{f_U}.$$

Они определены на U, так как для любой точки $x \in U$ и для любого индекса α имеем $x \in A''_\alpha$ и, следовательно, $f_\alpha(x) = 1$ и $f_U(x) \neq 0$.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — покрытие пространства $\mathcal{N}$ открытыми множествами U_λ, каждое из которых пересекает лишь конечное число множеств покрытия $\mathcal{A}$. Для каждого индекса λ рассмотрим вещественные функции, определенные и непрерывные на U_λ

$$g_\alpha^\lambda = g_\alpha^{U_\lambda} = \frac{f_\alpha}{f_{U_\lambda}}. \tag{5}$$

Если точка x принадлежит двум окрестностям U_λ и $U_{\lambda'}$, то $f_{U_\lambda}(x) = f_{U_{\lambda'}}(x)$ и

$$g_\alpha^\lambda(x) = g_\alpha^{\lambda'}(x).$$

Отсюда следует, что равенство

$$g_\alpha(x) = g^\lambda(x) \quad \text{для} \quad x \in U_\lambda$$

определяет семейство функций $\{g_\alpha\}$ на $\mathcal{N}$, которые непрерывны на каждом из замкнутых множеств U_λ.

Докажем, что функции g_α непрерывны на $\mathcal{N}$. Пусть D — открытое множество на вещественной прямой $\mathcal{R}$ и α — фиксированный индекс из M. Множество $g_\alpha^{-1}(D)$ является объединением множеств

$$(g_\alpha^\lambda)^{-1}(D) \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Так как каждая функция g_α^λ определена и непрерывна на некотором множестве U_λ, то множества $(g_\alpha^\lambda)^{-1}(D)$ открыты, а потому и объединение их $g_\alpha^{-1}(D)$ также открыто. Отсюда следует, что функции g_α непрерывны.

Как следует из формулы (5), в каждом из множеств $U_\lambda \in \mathcal{U}$ сумма ненулевых функций g_α равна 1.

Функции g_α, очевидно, не отрицательны, и для каждого индекса α функция g_α тождественно равна нулю за пределами замкнутого множества $\bar{A}''_\alpha \subset A_\alpha$. Следовательно, $\{g_\alpha\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 9.

18. Метрические пространства

Рассмотрим множество M и вещественную неотрицательную функцию d, определенную на прямом произведении $M \times M$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1. Для любых x и y из M имеем

$$d(x, y) = d(y, x);$$

2. Для любых x, y и z из M

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z);$$

3. Соотношение $d(x, y) = 0$ эквивалентно условию $x = y$.

Функция d называется *метрикой* множества M, а пара (M, d) называется *метрическим пространством*, $d(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Пусть имеется метрическое пространство $\mathscr{M} = (M, d)$. Обозначим через $\mathscr{B}$ семейство подмножеств множества M вида

$$S_{x_0, r} = \{x \in M;\ d(x, x_0) < r\} \quad (r > 0).$$

$S_{x_0, r}$ представляет собой множество точек x из M, расстояние которых от точки x_0 меньше положительного числа r. Эти множества называются *открытыми шарами* метрического пространства $\mathscr{M}$. Точнее $S_{x_0, r}$ — открытый шар с центром в точке x_0 и радиусом r.

Покажем, что семейство $\mathscr{B}$ образует базис некоторой топологии множества M. Для этого достаточно проверить, что пересечение двух шаров является объединением шаров.

Пусть $S_{x, r}$ и $S_{x', r'}$ — два шара из M и y — общая точка этих шаров, т. е.

$$d(x, y) < r, \quad d(x', y) < r'.$$

Рассмотрим положительное число ρ и точку $z \in M$, для которых

$$d(y, z) < \rho.$$

В силу условия 2 имеем

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \leqslant d + \rho,$$
$$d(x', z) \leqslant d(x', y) + d(y, z) \leqslant d' + \rho,$$

где мы положили $d = d(x, y)$, $d' = d(x', y)$.

В качестве ρ выберем положительное число, меньшее каждого из положительных чисел $r - d$, $r' - d'$. Тогда

$$d(x, z) < r, \quad d(x', z) < r'.$$

Следовательно, все точки шара $S_{y, \rho}$ принадлежат пересечению $S_{x, r} \cap S_{x', r'}$. Отсюда следует, что пересечение является объединением шаров $S_{y, \rho}$.

Топология множества M, порожденная базисом $\mathscr{B}$, называется *топологией, определенной метрикой* d. Открытыми множествами этой топологии являются произвольные объединения шаров метрического пространства $\mathscr{M}$.

Метрическое пространство $\mathscr{M}$ вместе с топологией, определенной метрикой пространства $\mathscr{M}$, называется *метрическим топологическим пространством* или просто метрическим пространством.

Евклидово пространство E^n является примером метрического пространства. Пространство E^n определяется как пара (R^n, d), состоящая из множества R^n упорядоченных систем из n вещественных чисел и метрики d, заданной формулой Пифагора

$$d(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}.$$

Легко проверить, что эта функция d удовлетворяет определению метрики. Так как шары этого метрического пространства образуют базис топологии числового пространства $\mathscr{R}^n$, то отсюда следует, что топологические пространства E^n и $\mathscr{R}^n$ гомеоморфны.

Заметим, что одно и то же топологическое пространство $\mathscr{T}$ может быть определено при помощи двух различных метрик. Например, пространство E^n и пространство, образованное точками того же пространства E^n, но с метрикой

$$d'(x, y) = [2(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2},$$

определяют одно и то же топологическое пространство.

Теорема 11. *Любое метрическое пространство нормально.*

Сначала проверим, что метрическое пространство $\mathscr{M}$ отделимо. В самом деле, пусть x, y — две различные точки пространства $\mathscr{M}$ и d_0 — расстояние между ними. Шары $S_{x, \frac{d_0}{3}}$ и $S_{y, \frac{d_0}{3}}$ являются открытыми множествами, содержащими соответственно точки x и y. Эти множества не пересекаются, так как для любой точки z из $S_{x, \frac{d_0}{3}}$

$$d(y, z) + d(z, x) \geqslant d(x, y) = d_0,$$

и, следовательно,

$$d(y, z) \geqslant d_0 - d(z, x) \geqslant d_0 - \frac{d_0}{3} = \frac{2d_0}{3},$$

т. е. точка z не принадлежит $S_{y, \frac{d_0}{3}}$.

Пусть теперь A и B — два замкнутых непересекающихся множества из $\mathscr{M}$. Рассмотрим на $\mathscr{M}$ две вещественные функции f и g, заданные следующим образом:

$$f(x) = \inf_{y \in A} \{d(x, y)\}, \qquad g(x) = \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

Докажем, что эти функции непрерывны. Для любого положительного числа r множество U_r, состоящее из точек x, для которых $f(x) > r$, является открытым множеством. Действительно, если $f(x) = r + \rho$ $(\rho > 0)$, т. е. если

$$d(x, y) \geqslant r + \rho$$

для любого y из A, то для любой точки x' из шара $S_{x, \frac{\rho}{3}}$ имеем

$$d(x', y) \geqslant d(x, y) - d(x, x') \geqslant r + \rho - \frac{\rho}{3} \geqslant r + \frac{2\rho}{3},$$

и, следовательно,

$$f(x') \geqslant r + \frac{2\rho}{3} > r.$$

Значит, U_r представляет собой объединение шаров.

Аналогично находим, что множество V_r точек x, для которых $f(x) < r$, также открыто. Вследствие этого множество точек x, для которых

$$r < f(x) < r',$$

открыто, так как оно является пересечением открытых множеств U_r и $V_{r'}$. Отсюда следует, что f и g — непрерывные функции.

Но тогда функции $g - 3f$ и $f - 3g$ также непрерывны, и, следовательно, точки x, в которых

$$g(x) - 3f(x) > 0,$$

образуют открытое множество U, а точки, для которых

$$f(x) - 3g(x) > 0,$$

образуют открытое множество V.

В точке x множества A $f(x) = 0$ и $g(x) > 0$, так как если бы $g(x)$ равнялось нулю, то в любом шаре с центром в точке x существовали бы точки y, принадлежащие множеству B, и x принадлежала бы множеству $\bar{B} = B$. Следовательно, все точки множества A принадлежат множеству U, т. е. $A \subset U$. Аналогично находим, что $B \subset V$. Наконец, множества U и V не пересекаются, так как неравенства $f \geqslant 0$, $g > 3f$, $f > 3g$ не могут выполняться одновременно. Теорема 11 доказана.

Для теоремы 11 верна обратная теорема, которой мы обязаны Урысону: *любое нормальное пространство со счетным базисом гомеоморфно метрическому пространству* (иначе говоря, метризуемо)[1]. Отметим также одну теорему Стоуна, согласно которой *любое метрическое пространство паракомпактно.*

---

[1]) Urison P., *Mathematische Annalen*, **94** (1925), 309—315.

19. Компактные метрические пространства

Докажем теперь две фундаментальные теоремы, касающееся компактных метрических пространств.

Теорема 12. *В компактном метрическом пространстве любое бесконечное множество имеет по крайней мере одну точку накопления.*

Пусть $\mathcal{K}$ — компактное метрическое пространство и M — бесконечное подмножество пространства $\mathcal{K}$. Для каждого натурального числа n рассмотрим конечное покрытие $\mathcal{A}_n$ пространства $\mathcal{K}$ шарами радиуса $1/n$. Выберем затем последовательность шаров S_1, S_2, S_3, ... из $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ..., т. е. последовательность шаров радиусов 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ..., так, чтобы каждое из множеств

$$\Sigma_{i+1} = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_i \cap S_{i+1} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{6}$$

содержало бы бесконечно много точек из M. Такая последовательность может быть построена по индукции следующим образом: для $n=1$ существует шар конечного покрытия $\mathcal{A}_1$, содержащий бесконечное множество точек из M. Пусть S_1 — такой шар. Предположим, что мы построили шары S_1, ..., S_n радиусов 1, 1/2 ..., $1/n$ так, чтобы Σ_n содержало бесконечное множество точек из M. $\overline{\Sigma}_n$ — компактное подпространство пространства $\mathcal{K}$, которое может быть покрыто конечным числом шаров радиуса $1/(1+n)$ и по крайней мере один из этих шаров будет содержать бесконечное множество точек из $M \cap \Sigma_n$. Один из этих шаров возьмем в качестве S_{n+1}.

Докажем, что множества $\overline{S}_i$ имеют общую точку. Предположим противное. Так как любое конечное пересечение замкнутых шаров $\overline{S}_i$ не пусто (в силу условия, которому удовлетворяют множества (6)), то при нашем предположении дополнения множеств $\overline{S}_i$ образуют открытое покрытие пространства $\mathcal{K}$, не мажорирующее ни одного конечного покрытия, а это противоречит условию компактности $\mathcal{K}$.

Рассмотрим теперь общую точку x замкнутых шаров $\overline{S}_i$. Любой шар $S_{x,\rho}$ с центром x и радиусом ρ содержит центр a_i шара S_i, если $1/i < \rho$. Для любой точки y из S_i

$$d(a_i, y) < \frac{1}{i}.$$

Поэтому

$$d(x, y) < \frac{2}{i},$$

и, следовательно, если $2/i < \rho$, то

$$S_i \subset S_{x,\rho}.$$

Итак, любой шар с центром в точке x содержит шар S_i, т. е. бесконечное множество точек множества M. Следовательно, x принадлежит любому замкнутому множеству, содержащему множество $M - \{x\}$, т. е. x является точкой накопления множества M.

Мы говорим, что множество M' имеет диаметр меньше ε, если для любых точек x и y из M' имеем $d(x, y) < \varepsilon$.

Теорема 13. (Теорема Лебега.) *Если метрическое пространство $\mathcal{M}$ компактно и $\mathcal{A}$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{M}$, то существует положительное число ε такое, что любое множество M' из $\mathcal{M}$, диаметр которого меньше ε, принадлежит по крайней мере одному множеству покрытия $\mathcal{A}$.*

Предположим противное. Это значит, что каждому натуральному числу n можно сопоставить множество M_n, не содержащееся ни в одном из множеств покрытия $\mathcal{A}$ и имеющее диаметр меньший чем $1/n$. Выберем в каждом из множеств M_n по одной точке x_n.

Если точки x_n образуют бесконечное подмножество M' пространства $\mathcal{M}$, то это подмножество имеет по крайней мере одну точку накопления y. Любой шар с центром в точке y содержит точки множества M'.

Пусть x_n — точка из M', лежащая в шаре $S_{y,\rho}$; тогда

$$d(y, x_n) < \rho.$$

Для произвольной точки z множества M_n

$$d(x_n, z) < \frac{1}{n},$$

и тогда

$$d(y, z) < \frac{1}{n} + \rho. \tag{7}$$

Пусть A — множество покрытия $\mathcal{A}$, содержащее точку y. Обозначим через d_0 нижнюю границу множества чисел $d(y, t)$, где t пробегает замкнутое множество $\mathcal{M} - A$. Так как $\mathcal{M} - A$ не содержит точку y, то $d_0 > 0$. Если выбрать $\rho < d_0/2$ и $n > 2/d_0$, из соотношения (7) следует

$$d(y, z) < d_0.$$

Из этого неравенства видно, что любая точка множества M_n ($n > 2/d_0$) принадлежит множеству A. Следовательно, $M_n \subset A$, и таким образом мы пришли к противоречию. Теорема 13 доказана.

ГЛАВА II

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ[1])

1. Стандартный симплекс

Стандартным симплексом размерности q называется множество Δ^q точек $x=(x_0, \ldots, x_q)$ евклидова пространства E^{q+1}, удовлетворяющих условиям

$$x_i \geqslant 0 \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ q), \quad x_0+x_1+\ldots+x_q=1. \tag{1}$$

Подмножество Δ^q пространства E^{q+1} замкнуто и ограничено, следовательно, оно является компактным подпространством. Подмножество Δ^q евклидова пространства выпукло, так как если Δ^q содержит две точки $x=(x_0, \ldots, x_q)$ и $y=(y_0, \ldots, y_q)$, то оно содержит все точки отрезка $\overline{xy}$, т. е. все точки вида $z=(z_0, \ldots, z_q)$, где

$$z_i=x_i+t\,(y_i-x_i) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{2}$$

В самом деле,

$$z_i=(1-t)\,x_i+ty_i \geqslant 0,$$

поскольку $y_i \geqslant 0$, $x_i \geqslant 0$, и

$$\sum_{i=0}^{q} z_i=(1-t)\sum_{i=0}^{q} x_i+t\sum_{i=0}^{q} y_i=1,$$

ибо точки x и y удовлетворяют соотношению (1).

Последнее свойство позволяет ввести в Δ^q *линейную структуру*: будем говорить, что точки $x^1, \ldots, x^r$ из Δ^q *линейно зависимы*, если существуют r действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ таких, что

$$\lambda_1^2+\ldots+\lambda_r^2 \neq 0,$$
$$\lambda_1+\ldots+\lambda_r=0$$

и

$$\lambda_1 x^1+\ldots+\lambda_r x^r=0. \tag{3}$$

---

[1]) Для справок см. Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958, Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, М. — Л., 1947, Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, М., 1947.

Если через x_i^α обозначить координаты точки x^α, равенство (3) означает, что для каждого индекса $i=0, \ldots, q$ должно выполняться условие

$$\lambda_1 x_i^1 + \ldots + \lambda_r x_i^r = 0.$$

Линейно зависимые точки в Δ^q можно получить, если выбрать в Δ^q p произвольных точек $x^1, \ldots, x^p$ и взять p неотрицательных чисел $u_1, \ldots, u_p$, сумма которых равна единице: $u_1 + \ldots + u_p = 1$. Тогда точки $x^1, \ldots, x^p$ и точка

$$x = u_1 x^1 + \ldots + u_p x^p \tag{4}$$

будут линейно зависимыми в Δ^q. В самом деле, все координаты точки x неотрицательны, их сумма равна единице $(x_0 + \ldots + x_q = 1)$ и соотношение (4) может быть записано в виде (3).

Точки $x^1, \ldots, x^p$ называются *линейно независимыми*, если они не являются линейно зависимыми.

Точки A^α из Δ^q $(\alpha=0, \ldots, q)$, имеющие координаты

$$x_i^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq \alpha, \\ 1, & \text{если } i = \alpha, \end{cases}$$

линейно независимы, потому что соотношение

$$\sum_{\alpha=0}^{q} \lambda_\alpha A^\alpha = 0$$

влечет за собой $\lambda_i = 0$ $(i=0, \ldots, q)$. Точки A^α называются *вершинами* симплекса Δ^q.

Любая точка x из Δ^q линейно зависит от точек A^α, так как если $x_i (i=0, \ldots, q)$ — ее координаты, то

$$x = x_0 A^0 + x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q$$
$$(x_i \geqslant 0, \ x_0 + \ldots + x_q = 1).$$

Отсюда следует, что в пространстве Δ^q существует $q+1$ линейно независимых точек, но не существует $q+2$ линейно независимых точек.

Кроме линейной структуры множество Δ^q допускает и структуру метрического пространства. Расстояние между двумя точками из Δ^q можно определить как расстояние между этими точками в евклидовом пространстве E^{q+1}, т. е. считать, что расстояние $d(x,y)$ между точками $x=(x_i)$ и $y=(y_i)$ определяется формулой

$$d(x, y) = [(x_0 - y_0)^2 + \ldots + (x_q - y_q)^2]^{1/2}. \tag{5}$$

Симплексом Δ^q мы будем называть множество, определенное соотношениями (1) и снабженное линейной структурой и структурой метрического пространства так, как это было показано выше.

На рис. 2 представлены симплексы Δ^1 и Δ^2.

Симплексом Δ^0 является точка вещественной прямой $\mathcal{R}$, абсцисса которой равна 1.

Границей симплекса Δ^q называется множество точек из Δ^q, для которых выполняются соотношения (1), причем по крайней мере одна из координат тождественно равна нулю.

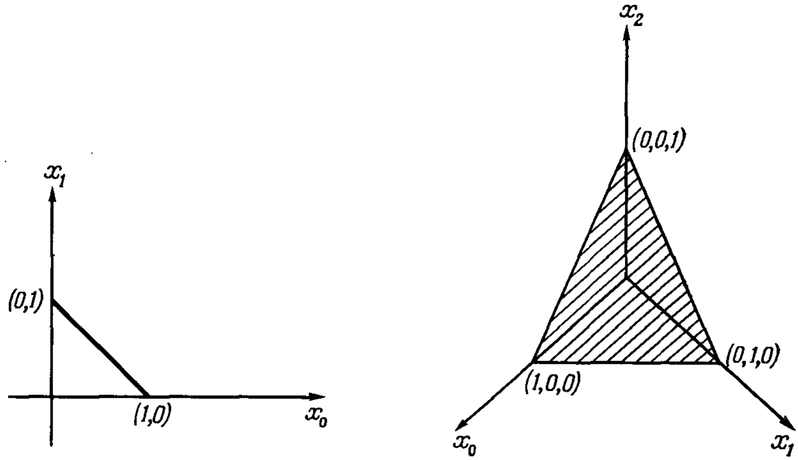

Рис. 2.

Внутренность симплекса Δ^q образована точками x из Δ^q, все координаты x_i которых положительны.

Обозначим через $\Delta^q_{i_1, \ldots, i_p}$ $(0 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant q)$ множество точек $x = (x_0, \ldots, x_q)$ из Δ^q, для которых

$$x_{i_1} = \ldots = x_{i_p} = 0.$$

Множества $\Delta^q_{i_1, \ldots, i_p}$ называются *гранями симплекса размерности* $q-p$. Они принадлежат границе симплекса Δ^q, и число их равно C^p_{q+1}.

Каждая грань $\Delta^q_{i_1, \ldots, i_p}$ содержит $q-p+1$ вершин, а именно вершины A^α, где $\alpha \neq i_1, \ldots, i_p$.

Грани Δ^q_i размерности $q-1$ содержат каждая q вершин. Например, грань Δ^q_0 содержит вершины $A^1, \ldots, A^q$ и не содержит вершину A^0.

Линейный симплекс является обобщением стандартного симплекса. Если $P^0, \ldots, P^q$ линейно независимые точки в евклидовом пространстве E^N, то мы будем называть *линейным симплексом*, порожденным этими точками, множество точек x из E^N

вида

$$x=\lambda_0 P^0+\ldots+\lambda_q P^q, \tag{6}$$
$$\lambda_i \geqslant 0 \ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ q);\ \lambda_0+\ldots+\lambda_q=1.$$

Линейный симплекс, который обозначается $(P^0, \ldots, P^q)$, также является компактным и выпуклым подпространством метрического пространства E^N.

Если каждой точке (6) симплекса $(P^0, \ldots, P^q)$ поставить в соответствие точку из Δ^q, координаты которой x_i равны λ_i, то мы получим гомеоморфизм пространства $(P^0, \ldots, P^q)$ на пространство Δ^q и этот гомеоморфизм будет сохранять линейную зависимость точек. Предоставляем читателю возможность самостоятельно установить эти свойства. Мы покажем только, что указанное выше отображение симплекса $(P^0, \ldots, P^q)$ в Δ^q определено однозначно. Для этого достаточно показать, что любая точка x из $(P^0, \ldots, P^q)$ допускает единственное представление вида (6).

В самом деле, если бы таких представлений было два, мы получили бы соотношение вида

$$(\lambda_0-\lambda_0')\,P^0+\ldots+(\lambda_q-\lambda_q')\,P^q=0, \tag{7}$$

где $\lambda_i-\lambda_i' \neq 0$ по крайней мере для одного индекса i, или

$$m_0 P^0+\ldots+m_q P^q=0,$$

причем

$$\sum_{i=0}^{q} m_i=\sum_{i=0}^{q} \lambda_i-\sum_{i=0}^{q} \lambda_i'=1-1=0.$$

Тогда точки $P^0, \ldots, P^q$ не являлись бы линейно независимыми.

Грани симплекса Δ^q являются примерами линейных симплексов.

Например, грань $\Delta^q_{i_1, \ldots, i_p}$ может быть представлена символом $(A^{j_0}, \ldots, A^{j_{q-p}})$, где $j_0, \ldots, j_{q-p}$ — индексы, заключенные между 0 и q и отличные от $i_1, \ldots, i_p$. Например, $\Delta^q_0=(A^1, \ldots, A^q)$.

Два линейных симплекса могут представлять собой одно и то же множество точек из E^N. Например, линейные симплексы $(P^0, \ldots, P^q)$ и $(P^{i_0}, \ldots, P^{i_q})$, где $i_0, \ldots, i_q$ — перестановка чисел $0, \ldots, q$, обладают этим свойством. Такие симплексы считаются различными. Иначе говоря, линейный симплекс — это множество точек с определенным порядком следования его вершин.

В частности, под гранью симплекса Δ^q мы будем понимать линейный симплекс, вершинами которого являются вершины симплекса Δ^q, упорядоченные в соответствии с естественным порядком индексов. Например, p-мерными гранями симплекса Δ^q являются линейные симплексы

$$(A^{j_0}, \ldots, A^{j_p}),\ 0 \leqslant j_0 < j_1 < \ldots < j_p \leqslant q.$$

Для каждой грани $\Delta^q_{i_1 \ldots i_p} = (A^{j_0}, \ \ldots \ A^{j_{q-p}})$ $(i_\alpha \neq i_\beta)$ существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $\rho_{i_1 \ldots i_p} = \rho^{j_0 \ldots j_{q-p}}$ стандартного симплекса Δ^{q-p} в симплекс Δ^q, заданное соотношением

$$\rho_{i_1 \ldots i_p}(x_0, \ \ldots, \ x_{q-p}) = x_0 A^{j_0} + \ldots + x_{q-p} A^{j_{q-p}},$$

где $x_0, \ \ldots, \ x_{q-p}$ — координаты точки x из Δ^{q-p}.

2. Сингулярные симплексы топологического пространства

Сингулярным симплексом размерности q топологического пространства $\mathcal{T}$ называется непрерывное отображение f топологического пространства Δ^q в топологическое пространство $\mathcal{T}$. Множество таких сингулярных симплексов размерности q пространства $\mathcal{T}$ обозначим через Σ_q.

Обозначим далее через $\mathcal{L}$ свободную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{T}$. Группа $\mathcal{L}$ является прямой суммой семейства групп $\mathbf{Z}_x$, изоморфных группе $\mathbf{Z}$ целых чисел и зависящих от индекса x, пробегающего множество $\mathcal{T}$. Будем отождествлять множество $\mathcal{T}$ с базисом группы $\mathcal{L}$. Тогда элемент из $\mathcal{L}$ будет иметь вид $c_1 t_1 + \ldots + c_m t_m$, где $c_1, \ \ldots, \ c_m$ — целые числа, а $t_1, \ \ldots, \ t_m$ — точки из $\mathcal{T}$.

Рассмотрим теперь множество произвольных отображений множества Δ^q в группу $\mathcal{L}$. Это множество будет наделено структурой абелевой группы $\mathcal{A}$, если для двух отображений f и g положить

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \Delta^q).$$

Отображения из Σ_q, рассматриваемые как отображения множества Δ^q в группу $\mathcal{L}$, порождают подгруппу группы $\mathcal{A}$. Эта подгруппа называется *группой сингулярных цепей* размерности q пространства $\mathcal{T}$ и обозначается $C_q(\mathcal{T})$. Элементами группы $C_q(\mathcal{T})$ являются отображения f множества Δ^q в $\mathcal{L}$ вида

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_m f_m(x), \tag{8}$$

где $c_1, \ \ldots, c_m$ — целые числа, а $f_1, \ \ldots, \ f_m \in \Sigma_q$ — сингулярные симплексы размерности q пространства $\mathcal{T}$.

Из формулы (8) следует, что группа $C_q(\mathcal{T})$ изоморфна свободной абелевой группе, порожденной множеством Σ_q. В самом деле, запишем формулу (8) в символическом виде

$$f = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m.$$

Можно рассматривать f как элемент свободной абелевой группы, порожденной множеством Σ_q. Отсюда следует, что Σ_q можно отождествить с базой свободной абелевой группы $C_q(\mathcal{T})$.

Элементы (8) называются *сингулярными цепями* размерности q топологического пространства $\mathcal{T}$.

Пусть задан сингулярный симплекс $f \in \Sigma_q$. Ему можно сопоставить $q+1$ сингулярных симплексов $f^{(i)} \in \Sigma_{q-1}$ при помощи формул

$$f^{(i)}(x) = f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{q-1}) =$$
$$= f(x_0 A^0 + \ldots + x_{i-1} A^{i-1} + x_i A^{i+1} + \ldots + x_{q-1} A^q), \qquad (9)$$

где $x = (x_0, \ldots, x_{q-1})$ — текущая точка из Δ^{q-1}. В обозначениях, введенных в § 1, имеем

$$f^{(i)} = f\rho_i,$$

т.е. отображение $f^{(i)}$ представляет собой произведение непрерывных отображений

$$\rho_i : \Delta^{q-1} \to \Delta^q, \quad f : \Delta^q \to \mathcal{T}.$$

Граница ∂f сингулярного симплекса f определяется как сингулярная цепь

$$\partial f = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f^{(i)} = f^{(0)} - f^{(1)} + \ldots + (-1)^q f^{(q)}. \qquad (10)$$

Подобно тому, как это сделано в гл. I, A, § 18, можно показать, что

$$\partial\partial f = 0 \qquad (11)$$

для любого сингулярного симплекса f. Отображение ∂, определенное на базе Σ_q группы $C_q(\mathcal{T})$, расширяется до гомоморфизма ∂ группы $C_q(\mathcal{T})$ в группу $C_{q-1}(\mathcal{T})$, если положить

$$\partial(c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m) = c_1 \partial f_1 + \ldots + c_m \partial f_m.$$

Из формулы (11) следует

$$\partial\partial = 0. \qquad (12)$$

Формула (12) показывает, что группы $C_q(\mathcal{T})$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, вместе с гомоморфизмами ∂ образуют цепной комплекс (см. гл. I, A, § 17) $K = K(\mathcal{T})$, если на Σ_0 положить по определению $\partial = 0$.

Циклы и границы комплекса K[1]) называются соответственно *циклами* и *сингулярными границами* пространства $\mathcal{T}$. Группы гомологий $H_q(K)$ называются *группами сингулярных гомологий* пространства T.

3. Линейно связные пространства

Топологическое пространство $\mathcal{T}$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек a и b из $\mathcal{T}$ можно найти непрерывное отображение φ отрезка $I = [0, 1]$ в $\mathcal{T}$ такое, что

$$\varphi(0) = a, \qquad \varphi(1) = b.$$

[1]) См. стр. 55.—*Прим. ред.*

Отображение φ называется *путем* в пространстве $\mathscr{T}$, соединяющим точки a и b.

Теорема 1. *Группа сингулярных гомологий $H_0(\mathscr{T})$ непустого линейно связного пространства $\mathscr{T}$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$ целых чисел.*

Доказательство. Сингулярные цепи размерности 0 пространства $\mathscr{T}$ являются элементами вида

$$f = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m,$$

где $c_i \in \mathbf{Z}$, а f_i — непрерывные отображения симплекса Δ^0 в $\mathscr{T}$. Так как Δ^0 состоит из одной точки A, то каждое отображение f_i может быть представлено своим образом $f_i(A) = a_i$. Отсюда следует, что $C_0(\mathscr{T})$ — свободная абелева группа $\mathscr{L}$, порожденная множеством $\mathscr{T}$, причем ее элементы имеют вид

$$f = c_1 a_1 + \ldots + c_m a_m \qquad (c_i \in \mathbf{Z},\ a_i \in \mathscr{T}). \tag{13}$$

Цепь f всегда является циклом, так как при $f \in Z_0$ имеем $\partial f = 0$. Следовательно, $Z_0(\mathscr{T}) = C_0(\mathscr{T})$.

Поставим в соответствие каждому циклу (13) сумму

$$\mathcal{J}(f) = c_1 + \ldots + c_m,$$

которая называется *индексом Кронеккера* цикла f. Мы получим гомоморфизм $\mathcal{J}$ группы $Z_0(\mathscr{T})$ в группу $\mathbf{Z}$. Образом этого гомоморфизма является $\mathbf{Z}$, потому что для любого целого числа $m \in \mathbf{Z}$ можно выбрать точку $p \in \mathscr{T}$ так, что для цепи mp будем иметь $\mathcal{J}(mp) = m$. Если показать, что ядро гомоморфизма $\mathcal{J}$ совпадает с группой $B_0(\mathscr{T})$, то из теоремы 1 (гл. I, A, § 3) будет следовать, что $\mathbf{Z}$ изоморфна группе $H_0(\mathscr{T}) = Z_0(\mathscr{T})/B_0(\mathscr{T})$.

Рассмотрим цикл $f = c_1 a_1 + \ldots + c_m a_m$. Выберем в пространстве $\mathscr{T}$ произвольную точку p и рассмотрим m непрерывных отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ отрезка $I = [0, 1]$ в $\mathscr{T}$, для которых

$$\varphi_i(0) = p, \qquad \varphi_i(1) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Каждое отображение φ_i определяет сингулярный симплекс $g_i \in \Sigma_1$ при помощи формулы

$$g_i(x_0, x_1) = \varphi_i(x_1) \qquad (x_0 \geqslant 0,\ x_1 \geqslant 0,\ x_0 + x_1 = 1).$$

Мы имеем

$$\partial g_i = a_i - p, \tag{14}$$

следовательно, можно записать

$$f = c_1 \partial g_1 + \ldots + c_m \partial g_m + \mathcal{J}(f)\, p = \partial (c_1 g_1 + \ldots + c_m g_m) + \mathcal{J}(f)\, p.$$

Если $\mathcal{J}(f) = 0$, то f — граница. Обратно, если f — граница, то

$$\mathcal{J}(f)\, p = f - \partial (c_1 g_1 + \ldots + c_m g_m) \tag{15}$$

также должно быть границей, поскольку $B_0(\mathcal{T})$ является подгруппой группы $Z_0(\mathcal{T})$. Формула (14) показывает, что для любой границы индекс Кронеккера равен нулю. Индексом Кронеккера цикла, записанного в левой части уравнения (15), является $\mathcal{J}(f)$, следовательно, должно выполняться равенство $\mathcal{J}(f)=0$. Таким образом, ядром $\mathcal{J}$ является $B_0(\mathcal{T})$ и теорема 1 доказана.

4. Стягиваемые пространства

Топологическое пространство $\mathcal{T}$ называется стягиваемым, если существует непрерывное отображение h прямого произведения $\mathcal{T}\times I$ в топологическое пространство $\mathcal{T}$, обладающее следующими свойствами:

$$h(x,\ 0)=x, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} h(x,\ 1)=p, \\ h(p,\ t)=p \quad (t\in I), \end{gathered} \tag{17}$$

где x — произвольная точка из $\mathcal{T}$, а p — фиксированная точка из $\mathcal{T}$.

Стягиваемое пространство является линейно связным, так как любая точка может быть соединена с точкой p путем φ, заданным формулой

$$\varphi(t)=h(x,\ t).$$

Числовое пространство $\mathcal{R}^n$ — стягиваемое, так как в качестве функции h можно взять непрерывное отображение

$$h(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)=[(1-t)\,x_1,\ \ldots,\ (1-t)\,x_n].$$

Линейные симплексы из $\mathcal{R}^n$ также являются стягиваемыми пространствами. Вообще, любое выпуклое множество Γ из $\mathcal{R}^n$ есть стягиваемое пространство. Действительно, если p — фиксированная точка, а x — любая точка из Γ, то функция

$$h(x,\ t)=tp+(1-t)\,x$$

непрерывна и принимает значение из Γ для $t\in[0,\ 1]$.

Теорема 2. *Группы гомологий $H_q(\mathcal{T})$ $(q\geqslant 1)$ стягиваемого пространства — тривиальные (состоят только из нуля).*

Докажем, что для $q\geqslant 1$ имеем

$$B_q(\mathcal{T})\supset Z_q(\mathcal{T}), \tag{18}$$

если $\mathcal{T}$ — стягиваемое пространство.

Пусть f — произвольный сингулярный симплекс, $f\in\Sigma_q$. Пользуясь функцией h, обладающей свойствами (16), (17), можно ассоциировать с симплексом f сингулярный симплекс $Df \in \Sigma_{q+1}$, положив

$$(Df)(x_0, \ldots, x_{q+1}) = \begin{cases} h\left[f\left(\frac{x_0}{1-x_{q+1}}, \ldots, \frac{x_q}{1-x_{q+1}}\right), x_{q+1}\right], \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } x_{q+1} \neq 1, \\ p, \text{ если } x_{q+1} = 1. \end{cases}$$

Граница симплекса Df задается формулой

$$(\partial Df)(x_0, \ldots, x_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i h\left[f^{(i)}\left(\frac{x_0}{1-x_q}, \ldots, \frac{x_{q-1}}{1-x_q}\right), x_q\right] + \\ + (-1)^{q+1} f(x_0, \ldots, x_q),$$

т. е.

$$\partial Df = (-1)^{q+1} f + D\partial f. \tag{19}$$

Если сингулярной цепи

$$\zeta = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m \in C_q(\mathscr{T})$$

сопоставить сингулярную цепь

$$D\zeta = c_1 Df_1 + \ldots + c_m Df_m \in C_{q+1}(\mathscr{T}),$$

то формула (19) приводит к соотношению

$$\zeta = (-1)^{q+1}(\partial D\zeta - D\partial\zeta). \tag{20}$$

Предположим, что ζ — цикл, т. е. $\partial\zeta = 0$. Тогда

$$\zeta = (-1)^{q+1}\partial D\zeta = \partial[(-1)^{q+1} D\zeta], \tag{21}$$

откуда следует, что ζ является границей. Включение (18) доказано, а из него следует теорема 2.

Рассуждения, приведенные выше, показывают, что сингулярный цикл ζ топологического пространства S, образованный сингулярными симплексами, образы которых принадлежат одному и тому же стягиваемому подпространству R пространства S, является границей. Например, если пространство S является сферой S^n и образы симплексов, образующих цикл ζ, не содержат некоторой точки ω из S^n, то ζ является границей. В самом деле, мы видели (гл. I, B, § 15), что подпространство $S^n - \{\omega\}$ гомеоморфно числовому пространству $\mathscr{R}^n$, следовательно, оно стягиваемое.

5. Гомоморфизм, ассоциированный с непрерывным отображением

Рассмотрим два топологических пространства $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ и непрерывное отображение φ пространства $\mathscr{T}$ в $\mathscr{T}'$. Каждому сингулярному симплексу $f \in \Sigma_q$ пространства $\mathscr{T}$

$$f : \Delta^q \to \mathscr{T}$$

можно поставить в соответствие сингулярный симплекс f' пространства $\mathcal{T}'$ по формуле $f' = \varphi f \in \Sigma'_q$. Это позволяет определить гомоморфизм $\bar{\varphi}$ свободной абелевой группы $C_q(\mathcal{T})$ с базой Σ_q в группу $C_q(\mathcal{T}')$:

$$\bar{\varphi}(c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m) = c_1(\varphi f_1) + \ldots + c_m(\varphi f_m). \tag{22}$$

Если обозначить через ∂ и ∂' операторы дифференцирования комплексов $K(\mathcal{T})$ и $K(\mathcal{T}')$, то для $f \in \Sigma_q$, $f' \in \Sigma_{q'}$ будем иметь

$$\partial f = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \varphi_i,$$

$$\partial' f' = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f' \varphi_i,$$

где φ_i — отображения Δ^{q-1} на грани размерности $q-1$ стандартного симплекса Δ^q, определенные формулами

$$\varphi_i(x_0, \ldots, x_{q-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{q-1}).$$

Если $f' = \varphi f$, то в силу ассоциативности композиции отображений имеем

$$\partial' f' = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varphi(f \varphi_i)$$

и в силу формулы (22)

$$\partial' f' = \bar{\varphi}\left[\sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \varphi_i\right].$$

Следовательно, $\partial' f' = \partial'(\varphi f) = \bar{\varphi}(\partial f)$. Но из формулы (22) для цепей, состоящих из одного симплекса, следует $\bar{\varphi}(f) = \varphi f$. Поэтому

$$(\partial' \bar{\varphi})(f) = (\bar{\varphi} \partial)(f). \tag{23}$$

Так как гомоморфизмы ∂ и $\bar{\varphi}$ удовлетворяют соотношению (23) для любой образующей f группы $C_q(\mathcal{T})$, то

$$\partial' \bar{\varphi} = \bar{\varphi} \partial. \tag{24}$$

Если под ∂ понимать универсальный оператор, определенный на категории всех комплексов, и обозначать этот оператор тем же символом ∂, то формулу (23) можно трактовать как свойство перестановочности гомоморфизмов ∂ и $\bar{\varphi}$.

Соотношение (24) показывает также, что $\partial[\bar{\varphi}(\zeta)] = 0$, если ζ — сингулярный цикл пространства $\mathcal{T}$, т. е. если $\partial\zeta = 0$. Следовательно, $\bar{\varphi}(\zeta)$ — сингулярный симплекс пространства $\mathcal{T}'$ и

$$\bar{\varphi}[Z_q(\mathcal{T})] \subset Z_q(\mathcal{T}'). \tag{25}$$

Для границы $\beta = \partial u$, $u \in C_{q+1}(\mathscr{T})$, из формулы (24) следует

$$\bar{\varphi}(\beta) = (\bar{\varphi}\partial)(u) = \partial[\bar{\varphi}(u)],$$

и, следовательно, $\bar{\varphi}(\beta)$ — сингулярная граница пространства $\mathscr{T}'$. Это можно записать формулой

$$\bar{\varphi}[B_q(\mathscr{T})] \subset B_q(\mathscr{T}'). \tag{26}$$

Формулы (25), (26) показывают, что можно применить теорему 4 (гл. I, А, § 3), согласно которой гомоморфизм $\bar{\varphi}$ индуцирует гомоморфизм φ_* факторгруппы $H_q(\mathscr{T}) = Z_q(\mathscr{T})/B_q(\mathscr{T})$ в факторгруппу $H_q(\mathscr{T}') = Z_q(\mathscr{T}')/B_q(\mathscr{T}')$. Гомоморфизм φ_* называется *гомоморфизмом, индуцированным непрерывным отображением* φ *на группах гомологий* пространства $\mathscr{T}$.

Если задано новое непрерывное отображение ψ пространства $\mathscr{T}'$ в топологическое пространство $\mathscr{T}''$, то для $f \in \Sigma_q$ имеем

$$\overline{\psi\varphi}(f) = \psi\varphi f = \bar{\psi}(\varphi f) = \bar{\psi}[\bar{\varphi}(f)].$$

Это значит, что гомоморфизм $\overline{\psi\varphi}$ совпадает с произведением гомоморфизмов $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$:

$$\overline{\psi\varphi} = \bar{\psi}\bar{\varphi}.$$

В таком случае индуцированные гомоморфизмы будут обладать тем же свойством

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*. \tag{27}$$

Предположим теперь, что φ является тождественным отображением пространства $\mathscr{T}$ в себя. Тогда для любого сингулярного симплекса $f \in \Sigma_q$ будем иметь

$$\bar{\varphi}(f) = \varphi f = f,$$

значит, $\bar{\varphi}$ — тождественный гомоморфизм группы $C_q(\mathscr{T})$. Этот гомоморфизм будет индуцировать тождественный гомоморфизм $H_q(\mathscr{T})$, т. е.

$$\varphi_*(h) = h$$

для любого класса гомологий $h \in H_q(\mathscr{T})$.

Это свойство символически может быть выражено соотношением

$$\varphi_*(\mathrm{id}) = \mathrm{id}, \tag{28}$$

где под id понимается тождественное отображение топологического пространства или некоторой группы на себя.

Если φ и ψ — гомеоморфизмы и один из них является обратным для второго, т. е. если

$$\varphi\psi = \mathrm{id}, \quad \psi\varphi = \mathrm{id},$$

то, как следует из формул (27) и (28),

$$\varphi_*\psi_* = \mathrm{id}, \qquad \psi_*\varphi_* = \mathrm{id}.$$

Это значит, что φ_* и ψ_* являются взаимно обратными изоморфизмами. Мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Группы гомологий двух гомеоморфных пространств изоморфны.*

Эта теорема показывает, что группы гомологий являются топологическими инвариантами топологических пространств.

6. Группы относительных гомологий

Рассмотрим подпространство $\mathcal{U}$ топологического пространства $\mathcal{T}$. Обозначим через i отображение, ставящее в соответствие каждой точке из $\mathcal{U}$ ту же точку, рассматриваемую как точку из $\mathcal{T}$. Оно непрерывно, так как прообразом открытого множества $\mathcal{D}$ из $\mathcal{T}$ при отображении i является множество $\mathcal{D} \cap \mathcal{U}$, которое открыто в $\mathcal{U}$. Следовательно, i индуцирует гомоморфизм $\bar{i}$ группы $C_q(\mathcal{U})$ в группу $C_q(\mathcal{T})$ и гомоморфизм i_* группы $H_q(\mathcal{U})$ в группу $H_q(\mathcal{T})$. Отображение i является мономорфизмом, так как каждой сингулярной цепи

$$\sigma = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m \qquad [c_i \in \mathbf{Z},\ f_i \in \Sigma_q(\mathcal{U})]$$

оно ставит в соответствие сингулярную цепь

$$i(\sigma) = c_1(if_1) + \ldots + c_m(if_m) = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m,$$

и $\bar{i}(\sigma)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$. Это свойство позволяет отождествлять при отображении i группу $C_q(\mathcal{U})$ с ее образом в $C_q(\mathcal{T})$. Комплекс $K(\mathcal{U})$ становится тогда подкомплексом комплекса $K(\mathcal{T})$.

Отсюда следует, что с каждой парой топологических пространств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$) можно ассоциировать точную последовательность гомологий (гл. I, A, § 14)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_q(\mathcal{U}) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathcal{T}) \xrightarrow{j_*} H_q(\mathcal{T}, \mathcal{U}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{i_*} \ldots, \tag{29}$$

где через $H_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ мы обозначили группы гомологий фактор-комплекса $C_q(\mathcal{T})/C_q(\mathcal{U})$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда пространство $\mathcal{T}$ есть замкнутый шар D_n, образованный точками $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathcal{R}^n$, для которых

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1,$$

а $\mathcal{U}^n$ — внутренность этого шара, определенная соотношением

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1.$$

Пространства D_n и $\mathcal{U}^n$ стягиваемые, так как они являются выпуклыми множествами в $\mathcal{R}^n$ (впрочем, $\mathcal{U}^n$ гомеоморфно пространству $\mathcal{R}^n$ при гомеоморфизме

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (\rho x_1, \ldots, \rho x_n),$$

где $\rho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$). Поэтому точная последовательность гомологий пары $(D_n, \mathcal{U}^n)$ может быть записана следующим образом:

$$\ldots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{j_*} H_q(D_n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\partial} 0 \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_1(D_n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\partial} H_0(\mathcal{U}^n) \xrightarrow{i_*} H_0(D_n) \xrightarrow{j_*} H_0(D_n, \mathcal{U}^n). \quad (30)$$

Из точности последовательности вытекает, что равный нулю образ гомоморфизма j_* совпадает с ядром гомоморфизма ∂ из первой строки, равным $H_q(D_n, \mathcal{U}^n)$. Следовательно,

$$H_q(D_n, \mathcal{U}^n) = 0 \qquad (q > 1). \quad (31)$$

Во второй строке последовательности (30) ядро гомоморфизма $\partial: H_1(D_n, \mathcal{U}^n) \longrightarrow H_0(\mathcal{U}^n)$ тривиально и ∂ — мономорфизм. Итак, группа $H_1(D_n, \mathcal{U}^n)$ изоморфна образу мономорфизма ∂, т. е. ядру гомоморфизма i_*:

$$H_1(D_n, \mathcal{U}^n) \approx \text{ядру } i_*. \quad (32)$$

С другой стороны, пространства $\mathcal{U}^n$ и D_n линейно связны, и мы имеем

$$H_0(\mathcal{U}^n) \approx H_0(D_n) \approx \mathbf{Z}. \quad (33)$$

Следовательно, $H_0(D_n)$ не содержит периодических элементов. Но образ гомоморфизма i_* изоморфен факторгруппе группы $H_0(\mathcal{U}^n) \approx \mathbf{Z}$ по ядру гомоморфизма i_* (теорема 1, гл. I, A, § 3). Периодическая часть этой факторгруппы равна нулю, если ядро гомоморфизма i_* тривиальное. Из формулы (32) следует тогда, что

$$H_1(D_n, \mathcal{U}^n) = 0. \quad (34)$$

Для вычисления группы $H_0(D_n, \mathcal{U}^n)$ заметим, что группа $C_0(D_n) = Z_0(D_n)$ образована элементами вида

$$\alpha = c_1 a_1 + \ldots + c_m a_m, \quad (35)$$

где c_i — целые числа, $a_i \in D_n$; группа $C_0(\mathcal{U}^n) = Z_0(\mathcal{U}^n)$ образована элементами того же вида, но при условии, что $a_i \in \mathcal{U}^n$. Отсюда следует, что каждый класс факторгруппы $C_0(D_n)/C_0(\mathcal{U}^n)$ может быть представлен элементом вида (35), где a_i — точки сферы S^{n-1}, определенной уравнением $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Следовательно,

$$C_0(D_n)/C_0(\mathcal{U}^n) \approx C_0(S^{n-1}).$$

Если α — такой элемент, то, сопоставляя ему индекс Кронеккера $\mathcal{J}(\alpha)=c_1+\ldots+c_m$, получаем эпиморфизм $\mathcal{J}$ группы $C_0(D_n)/C_0(\mathcal{U}^n)$ на группу $\mathbf{Z}$.

Границами размерности 0 факторкомплекса $K(D_n)/K(\mathcal{U}^n)$ являются классы вида

$$\partial u+C_0(\mathcal{U}^n), \quad u\in C_1(D^n).$$

Но любому элементу из $C_0(D_n)/C_0(\mathcal{U}^n)$ может быть придан такой вид. Например, класс из $C_0(D_n)/C_0(\mathcal{U}^n)$, который представлен элементом α, заданным формулой (35), может быть записан как

$$\alpha'=c_1(a_1-p)+\ldots+c_m(a_m-p),$$

где p — точка из $\mathcal{U}^n$. Очевидно, что $\alpha'=\partial u$, $u\in C_1(D_n)$, т. е. α' — граница.

Отсюда

$$H_0(D^n, \mathcal{U}^n)=0. \tag{36}$$

Из формул (31), (34), (36) получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Все группы гомологий пары $(D^n, \mathcal{U}^n)$ — тривиальные.*

Стандартный симплекс Δ^n гомеоморфен пространству D^n (замкнутому n-мерному шару) при гомеоморфизме, отображающем $\mathcal{U}^n$ на внутренность симплекса Δ^n. Отсюда следует, что теорема 4 сохраняет силу и для пары, состоящей из симплекса Δ^n и его внутренности.

7. Кубические сингулярные цепи

Обозначим через I^0 пространство, состоящее из одной точки, через $I^1=I$ — единичный отрезок $[0, 1]$ и через I^n — прямое произведение n пространств I^1. Пространство I^n является подпространством числового пространства $\mathcal{R}^n$, образованным точками $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполняются условия

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

Пространство I^n называется *n-мерным единичным кубом.*

Сингулярным кубом топологического пространства $\mathcal{T}$ называется любое непрерывное отображение f куба I^n в $\mathcal{T}$. Сингулярные кубы пространства $\mathcal{T}$ порождают свободную абелеву группу $Q_n(\mathcal{T})$, называемую *группой кубических сингулярных цепей* пространства $\mathcal{T}$.

Как и в случае симплициальных цепей, определяется гомоморфизм $\partial=\partial'$ группы $Q_n(\mathcal{T})$ в группу $Q_{n-1}(\mathcal{T})$, удовлетворяющий условию $\partial'\partial'=0$. Для любой образующей $f: I^n\to\mathcal{T}$ положим по определению

$$(\partial' f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, [f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}) - \\ - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1})].$$

Этим отображение ∂ будет определено на всей группе $Q_n(\mathscr{T})$, так как оно предполагается линейным. Для проверки соотношения $\partial'\partial' = 0$ введем для некоторого отображения

$$f: I^n \to \mathscr{T}$$

обозначение

$$f_i^\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n-1}) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \ldots, t_{n-1}) \\ (\varepsilon = 0, 1).$$

Тогда

$$\partial' f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (f_i^0 - f_i^1),$$

$$\partial'\partial' f = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\partial' f_i^0 - \partial' f_i^1). \tag{38}$$

Но

$$\partial' f_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^j [(f_i^\varepsilon)_j^0 - (f_i^\varepsilon)_j^1]. \tag{39}$$

Для ε, $\eta = 0, 1$ введем обозначения

$$f_{ij}^{\varepsilon\eta}(t_1, \ldots, t_{n-2}) = f(t_1, \ldots, \varepsilon, \ldots, \eta, \ldots, t_{n-2}),$$

где $i < j$, ε стоит на i-м месте, а η — на j-м месте. Тогда имеем соотношения

$$(f_i^\varepsilon)_j^\eta = \begin{cases} f_{i, j+1}^{\varepsilon\eta}, & \text{если } j \geqslant i, \\ f_{ji}^{\varepsilon\eta}, & \text{если } i > j. \end{cases} \tag{40}$$

Из формул (38), (39), (40) получаем последовательно

$$\partial'\partial' f = \sum_{i, j} (-1)^{i+j} [(f_i^0)_j^0 - (f_i^0)_j^1 - (f_i^1)^0 + (f_i^1)_j^1] = \\ = \sum_{i \leqslant j} (-1)^{i+j} (f_{i, j+1}^{00} - f_{i, j+1}^{01} - f_{i, j+1}^{10} + f_{i, j+1}^{11}) + \\ + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} (f_{ji}^{00} - f_{ji}^{01} - f_{ji}^{10} + f_{ji}^{11}).$$

Убеждаемся немедленно, что для $r < s$ коэффициент при сингулярном кубе $f_{rs}^{\varepsilon\eta}$ равен

$$(-1)^{\varepsilon+\eta} [(-1)^{r+s-1} + (-1)^{r+s}] = 0.$$

Следовательно, соотношение

$$\partial'\partial' = 0 \tag{41}$$

доказано и можно рассматривать комплекс цепей $[Q_n(\mathcal{T}),\ \partial']$, положив $\partial' = 0$ на $Q_0(\mathcal{T})$.

Для определения групп кубических сингулярных гомологий составим факторкомплекс комплекса $Q = [Q_n(\mathcal{T}), \partial']$ по подкомплексу $D = (D_n, \partial')$, называемому подкомплексом вырожденных цепей (см. § 8). Группа $D_n(\mathcal{T})$ порождена отображениями $d: I^n \to \mathcal{T}$, постоянными относительно t_1, т. е. имеющими вид

$$d(t_1, t_2, \ldots, t_n) = d(0, t_2, \ldots, t_n).$$

Для сингулярных кубов $d \in D_n$ имеем $\partial'(d) \in D_{n-1}$, так как

$$\partial' d = -[d_1^0 - d_1^1] + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i (d_i^0 - d_i^1).$$

Но $d_1^0 = d_1^1$ и $d_i^\varepsilon \in D_{n-1}$ $(i > 1)$, следовательно, $\partial'[D_n(\mathcal{T})] \subset D_{n-1}(\mathcal{T})$ и поэтому $D = \{D_n(\mathcal{T}),\ \partial'\}$ — подкомплекс комплекса Q. Группы сингулярных кубических гомологий пространства $\mathcal{T}$ определяются как группы гомологий факторкомплекса $Q^* = Q/D$. Циклами в Q_n^* являются классы вида $\gamma + D_n$, где $\gamma \in Q_n$ и $\partial\gamma \in D_{n-1}$, а границами в Q_n^* — классы вида $\partial\gamma + D_n$, где $\gamma \in Q_{n+1}$. Обозначим через $\Gamma_n(\mathcal{T})$ и $F_n(\mathcal{T})$ соответственно группу циклов и группу границ из $Q_n^*(\mathcal{T})$.

Непрерывное отображение f топологического пространства $\mathcal{T}$ в топологическое пространство $\mathcal{T}'$ определяет гомоморфизм $\bar{\bar{f}}$ группы $Q_n(\mathcal{T})$ в группу $Q_n(\mathcal{T}')$

$$\bar{\bar{f}}(c_1 q_1 + \ldots + c_m q_m) = c_1(fq_1) + \ldots + c_m(fq_m), \tag{42}$$

где $q_1, \ldots, q_m$ — сингулярные кубы и $c_1, \ldots, c_m$ — целые числа.

Положив для сингулярного куба q

$$q' = \bar{\bar{f}}(q) = fq,$$

получим

$$\partial' q' = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (q_i'^0 - q_i'^1),$$

где

$$\begin{aligned} q_i'^\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n-1}) &= q'(t_1, \ldots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \ldots, t_{n-1}) = \\ &= f[q(t_1, \ldots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \ldots, t_{n-1})] = \\ &= f[q_i^\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n-1})] = (fq_i^\varepsilon)(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \\ &= [\bar{\bar{f}}(q_i^\varepsilon)](t_1, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\partial'\bar{\bar{f}}(q)=\bar{\bar{f}}\partial'(q)$ для любого сингулярного куба q. Это можно записать так:

$$\partial'\bar{\bar{f}}=\bar{\bar{f}}\partial'. \tag{43}$$

8. Кубические сингулярные гомологии стягиваемого пространства

Докажем теперь, что группы кубических гомологий $\mathscr{H}_n(\mathscr{T})$ стягиваемого пространства $\mathscr{T}$ задаются теми же формулами, что и группы сингулярных симплициальных гомологий, т. е.

$$\mathscr{H}_0(\mathscr{T})\approx\mathbf{Z},\quad \mathscr{H}_q(\mathscr{T})=0\quad (q>0). \tag{44}$$

Кубы I^0 и I^1 гомеоморфны симплексам Δ^0 и Δ^1. Поэтому способ вычисления группы $H_0(\mathscr{T})$ связного линейного пространства $\mathscr{T}$ применим и к группе

$$\mathscr{H}_0(\mathscr{T})\approx\mathbf{Z}.$$

Предположим теперь, что $\mathscr{T}$ — стягиваемое пространство, т. е. существует непрерывное отображение

$$h:\mathscr{T}\times I\to\mathscr{T},$$

при котором

$$h(x,\ 0)=x,\quad h(x,\ 1)=a,\quad h(a,\ t)=a\quad (t\in I)$$

для любого x из $\mathscr{T}$ и фиксированной точки a пространства $\mathscr{T}$. Докажем, что любой цикл $\gamma\in\Gamma_q(\mathscr{T})$ $(q>0)$ является границей.

Поставим в соответствие каждому сингулярному кубу

$$c:I^q\to\mathscr{T}$$

сингулярный куб $\mathscr{D}c\in Q_{q+1}(\mathscr{T})$, положив

$$(\mathscr{D}c)(t_1,\ \ldots,\ t_{q+1})=h[c(t_1,\ \ldots,\ t_q),\ t_{q+1}].$$

Тогда $\mathscr{D}$ является отображением базы свободной абелевой группы $Q_q(\mathscr{T})$ в абелеву группу $Q_{q+1}(\mathscr{T})$. Это отображение можно продолжить до гомоморфизма $\mathscr{D}$ группы $Q_q(\mathscr{T})$ в $Q_{q+1}(\mathscr{T})$. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}(\partial\mathscr{D}c)(t_1,\ \ldots,\ t_q)=\sum_{i=1}^{q}(-1)^i[h[c(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},0,t_i,\ \ldots,\ t_{q-1}),\ t_q]-\\ -h[c(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ 1,\ t_i,\ \ldots,\ t_{q-1}),\ t_q]]+\\ +(-1)^{q+1}[h[c(t_1,\ \ldots,t_q),0]-h[c(t_1,\ \ldots,t_q),\ 1]],\end{aligned}$$

следовательно,

$$\partial\mathscr{D}c=\mathscr{D}\partial c+(-1)^{q+1}c-(-1)^{q+1}e_q, \tag{45}$$

где через e_q мы обозначили постоянное отображение

$$e_q(t_1, \ldots, t_q) = a.$$

Пусть элемент из $Q_q(\mathscr{T})$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{p} m_i c_i \quad (m_i \in \mathbf{Z})$$

определяет цикл $\gamma + D_q$ в комплексе Q_q^*, так что

$$\partial\gamma \in D_{q-1}(\mathscr{T}).$$

Применим формулу (45) к каждому из сингулярных кубов c_i и составим линейную комбинацию с коэффициентами m_i. Мы получим

$$\partial\mathscr{D}\gamma = \mathscr{D}\,\partial\gamma + (-1)^{q+1}\gamma + (-1)^q \Big(\sum_{i=1}^{p} m_i\Big) e_q. \tag{46}$$

Из определения операции $\mathscr{D}$ следует

$$\mathscr{D}\,[D_q(\mathscr{T})] \subset D_{q+1}(\mathscr{T}).$$

Поэтому из формулы (46) следует

$$\gamma = (-1)^{q+1}\,\partial\mathscr{D}\gamma + d,$$

где

$$d = (-1)^q\,\mathscr{D}\,\partial\gamma + \Big(\sum_{i=1}^{p} m_i\Big) e_q$$

— вырожденная цепь. Отсюда мы видим, что цикл γ определяет границу комплекса Q^*.

В любой теории гомологий необходимо, чтобы группы гомологий стягиваемого пространства были тривиальными для размерностей, превышающих 0. Формулы, посредством которых мы проверили это положение в случае кубических сингулярных гомологий, обосновывают необходимость введения факторизации комплекса Q по подкомплексу D вырожденных цепей.

Значение формул $\mathscr{H}_q(\mathscr{T}) = 0$ при $q > 0$ и для стягиваемых пространств $\mathscr{T}$ станет ясным, после того как мы докажем изоморфизм групп $\mathscr{H}_q(\mathscr{T})$ и $H_q(\mathscr{T})$ для любого топологического пространства.

Замечание 1. Если $\mathscr{T}$ — стягиваемое пространство, то рассуждения, проведенные при доказательстве формул (44), показывают, что все группы гомологий комплекса $Q = \{Q_n(\mathscr{T}),\ \partial'\}$ сингулярных кубических цепей изоморфны группе $\mathbf{Z}$. В самом деле, из формулы (46) следует, что любой цикл γ из Q_q $(\partial'\gamma = 0)$ является суммой границы и целого кратного me_q постоянного отображения e_q. Ассоциируя с циклом γ число $\mathscr{T}(\gamma) = m$, получаем гомоморфизм группы циклов группы Q_q в группу целых чисел $\mathbf{Z}$. Ядро этого гомоморфизма состоит из границ группы Q_q. Действительно, если $\gamma = \sum_{i=1}^{p} m_i c_i$ —

граница, то $\sum_{i=1}^{p} m_i = 0$, и обратно, если $\sum_{i=1}^{p} m_i = 0$, то формула (46) показывает, что γ — граница. Теорема 1 (гл. 1, А, § 3) утверждает тогда, что

$$H_q(Q) \approx \mathbf{Z}$$

для любого целого числа $q \geqslant 0$.

Замечание 2. Цепи факторкомплекса $Q^* = Q/D$ образуют свободную абелеву группу, так как каждый класс $\gamma + D$ содержит либо цепь 0, либо цепь, образованную только невырожденными сингулярными кубами. Следовательно, группы $Q_n^*(\mathscr{T})$ изоморфны свободным абелевым группам, порожденным невырожденными сингулярными кубами размерности n. Это замечание указывает на то, что гомоморфизмы группы Q^* определены их значениями на классах невырожденных сингулярных кубов, а эти значения произвольны.

9. Эквивалентность симплициальных и кубических сингулярных гомологий

Теорема 5. *В любом топологическом пространстве группы симплициальных сингулярных гомологий и кубических сингулярных гомологий для каждой размерности изоморфны.*

Доказательство. Стандартный симплекс Δ^0 и куб I^0 гомеоморфны, так как каждый из них состоит из одной точки; отсюда следует, что

$$C_0(\mathscr{T}) = Q_0(\mathscr{T}) = Z_0(\mathscr{T}) = \Gamma_0(\mathscr{T}), \tag{47}$$

так как обе группы — свободные абелевы группы с одной и той же базой $\mathscr{T}$.

Симплекс Δ^1 и куб I^1 также гомеоморфны при гомеоморфизме $\theta_1 : I^1 \to \Delta^1$, который задается формулой

$$\theta_1(x_1) = (x_0, x_1) \tag{48}$$

и отображает каждую точку x_1 из I^1 в точку $(1 - x_1, x_1)$ из Δ^1. Отсюда следует, что каждому сингулярному симплексу

$$f : \Delta^1 \to \mathscr{T}$$

можно поставить в соответствие сингулярный куб

$$q = \overline{\theta}_1(f) = f\theta_1 : I^1 \to \mathscr{T}. \tag{49}$$

Имеем

$$\partial f = f(0, 1) - f(1, 0), \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\partial' q = q^1 - q^0 &= (f\theta_1)(1) - (f\theta_1)(0) = \\ &= f[\theta_1(1)] - f[\theta_1(0)] = \\ &= f(0, 1) - f(1, 0),\end{aligned}$$

и отсюда

$$\partial' \overline{\theta}_1 = \partial. \tag{51}$$

Так как θ_1—гомеоморфизм, $\overline{\theta}_1$ будет изоморфизмом группы $C_1(\mathscr{T})$ в $Q_1(\mathscr{T})$, и по формуле (51)

$$\overline{\theta}_1[Z_1(\mathscr{T})]=\Gamma_1(\mathscr{T}),\quad B_0(\mathscr{T})=F_0(\mathscr{T}). \tag{52}$$

Соотношения (52) и (47) показывают, что θ_1 индуцирует изоморфизм

$$H_0(\mathscr{T})\to\mathscr{H}_0(\mathscr{T}). \tag{53}$$

Выше мы установили, что существует изоморфизм

$$\overline{\theta}_1: C_1(\mathscr{T})\to Q_1(\mathscr{T}), \tag{54}$$

удовлетворяющий условию (51). Рассмотрим изоморфизм, обратный этому изоморфизму,

$$\overline{\eta}_1: Q_1(\mathscr{T})\to C_1(\mathscr{T}). \tag{55}$$

Он определен формулой $\overline{\eta}_1(q)=q\eta_1$, где η_1 — гомеоморфизм, обратный θ_1, т. е. $\eta_1(x_0, x_1)=x_1$. Гомоморфизм $\overline{\eta}_1$ удовлетворяет условию

$$\partial'=\partial\overline{\eta}_1. \tag{51'}$$

Составив композицию гомоморфизма

$$\partial': Q_2(\mathscr{T})\to Q_1(\mathscr{T})$$

с гомоморфизмом (55), получим гомоморфизм

$$\overline{\eta}_1\partial': Q_2(\mathscr{T})\to C_1(\mathscr{T}), \tag{56}$$

который сингулярному кубу $q\in Q_2(\mathscr{T})$ сопоставляет цепь

$$\zeta=(\overline{\eta}_1\partial')(q)\in C_1(\mathscr{T}).$$

Из формул (51) и (41) получаем

$$\partial\zeta=(\partial\overline{\eta}_1\partial')(q)=(\partial'\partial')\,q=0.$$

Следовательно, ζ — цикл из $C_1(\mathscr{T})$. Обозначим через i тождественное отображение куба I^2 в себя. Тогда будем иметь $q=qi$. Отображение i можно рассматривать как сингулярный куб куба I^2, а непрерывное отображение $q: I^2\to\mathscr{T}$ определяет гомоморфизм $\overline{\overline{q}}$ группы $Q_2(I^2)$ в группу $Q_2(\mathscr{T})$. Поэтому qi можно рассматривать как $\overline{\overline{q}}(i)$, и мы получаем

$$\zeta=(\overline{\eta}_1\partial'\overline{\overline{q}})(i).$$

Пользуясь формулой (43), можем записать

$$\zeta=(\overline{\eta}_1\overline{\overline{q}}\partial')(i), \tag{57}$$

причем здесь $\overline{\overline{q}}$ — гомоморфизм, индуцированный непрерывным отображением $q: I^2\to\mathscr{T}$ на группе $Q_1(I^2)$, а $\overline{\eta}_1$ — гомоморфизм группы

$Q_1(\mathcal{T})$ в $C_1(\mathcal{T})$, индуцированный отображением $\eta_1(x_0, x_1) = x_1$ симплекса Δ^1 в I^1. Поэтому для образующей g группы $Q_1(I^2)$, являющейся непрерывным отображением $g: I^1 \to I^2$, имеем

$$\bar{\bar{q}}(g) = qg, \quad \bar{\eta}_1[\bar{\bar{q}}(g)] = qg\eta_1 = \bar{q}(g\eta_1) = \bar{q}\bar{\eta}_1(g).$$

Здесь мы обозначили через $\bar{q}$ гомоморфизм, индуцированный отображением q на $C_1(I^2)$ и определенный на образующих группы $C_1(I^2)$ формулой $\bar{q}(f) = qf$. Таким образом,

$$\bar{\eta}_1\bar{\bar{q}} = \bar{q}\bar{\eta}_1, \tag{58}$$

и формулу (57) можно переписать следующим образом:

$$\zeta = (\bar{q}\bar{\eta}_1\partial')(i) = \bar{q}[(\bar{\eta}_1\partial')(i)]. \tag{59}$$

Но $(\bar{\eta}_1\partial')(i)$ — цикл из $C_1(I^2)$, так как при помощи формулы (51′) получаем

$$(\partial\bar{\eta}_1\partial')(i) = \partial'\partial'(i) = 0.$$

Так как пространство I^2 стягиваемое, то $H_1(I^2) = 0$, и поэтому цикл $\bar{\eta}_1\partial'(i)$ является границей ∂u и принадлежит $B_1(I^2)$, $u \in C_2(I^2)$. Из формулы (59) следует тогда, что

$$\zeta = \bar{q}(\partial u).$$

Но по формуле (24) гомоморфизмы $\bar{q}$ и ∂ перестановочны, и мы можем записать

$$\zeta = \partial[\bar{q}(u)].$$

Отсюда следует, что каждой образующей q группы $Q_2(\mathcal{T})$ можно поставить в соответствие элемент $\bar{q}(u) = f_q$ группы $C_2(\mathcal{T})$ так, чтобы выполнялось условие

$$\zeta = (\bar{\eta}_1\partial')(q) = \partial f_q. \tag{60}$$

Рассмотрим теперь отображение $q \to f_q$ и обозначим через $\bar{\eta}_2$ гомоморфизм, индуцированный этим отображением на группе $Q_2(\mathcal{T})$ со значениями в $C_2(\mathcal{T})$. Из равенств (60) получаем

$$\bar{\eta}_1\partial' = \partial\bar{\eta}_2. \tag{61}$$

Формула (51′) показывает, что гомоморфизм $\bar{\eta}_1$ преобразует цикл из $Q_1(\mathcal{T})$ в цикл из $C_1(\mathcal{T})$. Действительно, если задан цикл $\gamma \in Q_1(\mathcal{T})$ $(\partial'\gamma = 0)$, то

$$\partial\bar{\eta}_1(\gamma) = \partial'\gamma = 0.$$

Из формулы (61) следует, что гомоморфизм $\bar{\eta}_1$ отображает границы из $Q_1(\mathscr{T})$ в границы из $C_1(\mathscr{T})$. Действительно, если

$$\beta = \partial' u \qquad [u \in Q_2(\mathscr{T})],$$

то

$$\bar{\eta}_1(\beta) = (\bar{\eta}_1 \partial')(u) = \partial[\bar{\eta}_2(u)].$$

Гомоморфизм $\bar{\eta}_1$ отображает вырожденные кубы в границы из $C_1(\mathscr{T})$, так как если $q(x_1) = a = \mathrm{const}$, то отображение $\bar{\eta}_1(q) = q\eta_1$ является постоянным отображением $\Delta^1 \to a$, совпадающим с границей постоянного отображения $\Delta^2 \to a$.

В силу теоремы 4 (гл. I, A, § 3) $\bar{\eta}_1$ индуцирует гомоморфизм группы гомологий $\mathscr{H}_1(\mathscr{T})$ комплекса Q^* в факторгруппу $H_1(\mathscr{T})$.

Докажем, что для любого топологического пространства $\mathscr{U}$ и для любого n можно определить гомоморфизм

$$\bar{\eta}_n^{\mathscr{U}} : Q_n^*(\mathscr{U}) \to C_n(\mathscr{U}),$$

для которого будут выполняться соотношения

$$\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \partial' = \partial \bar{\eta}_n^{\mathscr{T}}, \tag{62}$$

$$\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{U}'} \bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi} \bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{U}}, \tag{63}$$

если φ — любое непрерывное отображение пространства $\mathscr{U}$ в пространство $\mathscr{U}'$, а $\bar{\varphi}$ и $\bar{\bar{\varphi}}$ — гомоморфизмы, индуцированные отображением φ на группах цепей C_n и Q_n^*.

Предположим, что мы построили гомоморфизмы $\bar{\eta}_1^{\mathscr{U}}, \bar{\eta}_2^{\mathscr{U}}, \ldots$ $\ldots, \bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{U}}$, удовлетворяющие соотношениям (62), (63), и что $\bar{\eta}_p^{\mathscr{U}}(D_p) = 0$ для $p = 2, 3, \ldots, n-1$ и для любого пространства $\mathscr{U}$. Рассмотрим отображение $\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \partial'$ группы $Q_n^*(\mathscr{T})$ в группу $C_{n-1}(\mathscr{T})$, где $\mathscr{T}$ — произвольное топологическое пространство. Повторяя рассуждения, проведенные выше для $n = 2$, покажем, что каждому сингулярному кубу $q : I^n \to \mathscr{T}$ можно поставить в соответствие сингулярную цепь $\bar{\eta}_n^{\mathscr{T}}(q) \in C_n(\mathscr{T})$ так, чтобы $(\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \partial')(q) = \partial[\bar{\eta}_n^{\mathscr{T}}(q)]$ и чтобы $\eta_n(q)$ равнялось нулю, если сингулярный куб — вырожденный.

Обозначив через i тождественное отображение куба I^n в себя и рассматривая i как сингулярный куб пространства I^n, при помощи формул (43), (63) получим

$$\zeta = (\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \partial')(q) = (\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \partial' \bar{\bar{q}})(i) = (\bar{\eta}_{n-1}^{\mathscr{T}} \bar{\bar{q}} \partial')(i) = (\bar{q} \bar{\eta}_{n-1}^{I^n} \partial')(i) =$$
$$= \bar{q}[(\bar{\eta}_{n-1}^{I^n} \partial')(i)].$$

Цепь $(\bar{\eta}^{I^n}_{n-1}\partial')(i)$ из $C_{n-1}(I^n)$ является циклом, так как, используя формулу (62) для $n-1$, имеем

$$(\partial\bar{\eta}^{I^n}_{n-1}\partial')(i) = [(\partial\bar{\eta}^{I^n}_{n-1})\partial'](i) = (\bar{\eta}^{I^n}_{n-2}\partial'\partial')(i) = 0.$$

Так как I^n — стягиваемое, то $H_{n-1}(I^n)=0$, и, следовательно, $(\bar{\eta}^{I^n}_{n-1}\partial')(i)$ является границей некоторой цепи u:

$$(\bar{\eta}^{I^n}_{n-1}\partial')(i) = \partial u. \tag{64}$$

Ставя в соответствие каждому невырожденному сингулярному кубу q цепь $\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(q) = \bar{q}(u)$, получаем

$$\partial[\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(q)] = (\partial\bar{q})(u) = \bar{q}(\partial u) = (\bar{q}\bar{\eta}^{I^n}_{n-1}\partial')(i) = \zeta,$$

следовательно, для любого сингулярного невырожденного куба $g \in Q_n(\mathcal{T})$ будем иметь

$$(\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_{n-1}\partial')(q) = \partial[\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(q)]. \tag{65}$$

Для вырожденных кубов q положим $\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(q)=0$. Тогда формула (55) будет справедлива и для вырожденных кубов, так как $\partial' q \in D_{n-1}$ и $(\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_{n-1}\partial')(q)=0$ для $q \in D_n$ в силу предположения индукции.

Отображение $\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\boldsymbol{\eta}}^{\mathcal{T}}_n$ группы $Q_n(\mathcal{T})$ в группу $C_n(\mathcal{T})$ и мы будем иметь

$$\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_{n-1}\partial' = \partial\eta^{\mathcal{T}}_n, \quad \bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(D_n) = 0. \tag{66}$$

Последнее из равенств (66) показывает, что $\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n$ индуцирует гомоморфизм $\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n$ группы $Q^*_n(\mathcal{T})$ в группу $C_n(\mathcal{T})$ и для этого гомоморфизма выполняется условие (62). Для любого непрерывного отображения $\varphi: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ и для любого сингулярного куба $q \in Q_n(\mathcal{T})$ имеем

$$(\bar{\eta}^{\mathcal{T}'}_n\bar{\bar{\varphi}})(q) = \bar{\eta}^{\mathcal{T}'}_n(\varphi q) = \bar{\varphi}\bar{q}(u) = \bar{\varphi}[\bar{q}(u)] = \bar{\varphi}[\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n(q)].$$

Следовательно,

$$\bar{\eta}^{\mathcal{T}'}_n\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n.$$

Мы доказали таким образом индукцией по n, что существует последовательность гомоморфизмов

$$\bar{\eta}^{\mathcal{T}}_n : Q^*_n(\mathcal{T}) \to C_n(\mathcal{T}),$$

определенных для каждого топологического пространства $\mathcal{T}$, которые удовлетворяют соотношениям (62) и (63).

Формула (62) показывает, что для цикла $\gamma \in Q_n^*(\mathcal{T})$ образ $\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}(\gamma)$ — цикл из $C_n(\mathcal{T})$. Действительно, если $\partial'\gamma \in D_n(\mathcal{T})$, то $\bar{\eta}_{n-1}^{\mathcal{T}}\partial'(\gamma) = 0$ и из (62) следует, что $\partial[\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}(\gamma)] = 0$.

Если же мы имеем границу $\partial'\alpha$ из $Q_n^*(\mathcal{T})$, то $\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}(\partial'\alpha)$ также является границей, так как

$$\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}[\partial'(\alpha)] = \partial[\bar{\eta}_{n+1}^{\mathcal{T}}(\alpha)].$$

Отсюда следует, что гомоморфизмы $\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}$ индуцируют гомоморфизмы $\eta_n^{*\mathcal{T}}$ групп кубических гомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$ в группы симплициальных гомологий $H_n(\mathcal{T})$.

Последовательность гомоморфизмов $\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}$ не единственная, так как она зависит от выбора элементов $u \in C_n(I^n)$, которые удовлетворяют условию

$$\partial u = (\bar{\eta}_{n-1}^{I^n}\partial')(i). \tag{67}$$

Если вместо цепи u выбрать другую цепь $v \in C_n(I^n)$ так, чтобы

$$\partial v = (\bar{\eta}_{n-1}^{I^n}\partial')(i), \tag{68}$$

то вместо гомоморфизма $\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}$ будем иметь гомоморфизм $\bar{\zeta}_n^{\mathcal{T}}$, заданный соотношением

$$\bar{\zeta}_n^{\mathcal{T}}(q) = \bar{q}(v).$$

Для любого куба q будем иметь

$$\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}(q) - \bar{\zeta}_n^{\mathcal{T}}(q) = \bar{q}(u - v).$$

Однако $u - v$ есть цикл из $C_n(I^n)$, ибо $\partial u = \partial v$. Пространство I^n стягиваемое, поэтому $u - v$ является границей ∂w и мы имеем

$$\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}(q) - \bar{\zeta}_n^{\mathcal{T}}(q) = (\bar{q}\partial)w = \partial[\bar{q}(w)],$$

отсюда следует

$$\eta_n^{*\mathcal{T}} = \zeta_n^{*\mathcal{T}}.$$

Таким образом, любая последовательность гомоморфизмов $\{\bar{\eta}_n\}$, удовлетворяющих соотношениям (62), (63), индуцирует ту же последовательность гомоморфизмов $\{\eta_n^*\}$ между группами гомологий $\mathcal{H}_n$ и H_n.

Поменяем теперь ролями комплексы Q_*^n и C_n в рассуждениях, проведенных выше, и заметим, что фундаментальное свойство, позволившее построить по индукции гомоморфизмы η_n, а именно $H_{n-1}(I^n) = H_n(I^n) = 0$, сохраняется после этой замены. Действительно, согласно теореме 5, имеем

$$\mathcal{H}_{n-1}(\Delta^n) = \mathcal{H}_n(\Delta^n) = 0.$$

Мы получаем последовательность гомоморфизмов

$$\bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} : C_n(\mathcal{T}) \to Q_n^*(\mathcal{T}),$$

удовлетворяющих формулам, аналогичным (62), (63),

$$\bar{\theta}_{n-1}^{\mathcal{T}} \partial = \partial' \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}}, \tag{62'}$$

$$\bar{\theta}_n^{\mathcal{T}'} \bar{\varphi} = \bar{\bar{\varphi}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}}, \tag{63'}$$

причем $\bar{\theta}_0^{\mathcal{T}}$ являются изоморфизмом; гомоморфизмы $\theta_n^{*\mathcal{T}}$, индуцированные на группах гомологий $H_n(\mathcal{T})$ в силу того, что они удовлетворяют условиям (62'), (63'), не будут зависеть от последовательности $\{\bar{\theta}_n^{\mathcal{T}}\}$.

Аналогично можно показать, что любая последовательность гомоморфизмов

$$\left.\begin{array}{c} j_n^{\mathcal{T}} : C_n(\mathcal{T}) \to C_n(\mathcal{T}), \\ j_{n-1}^{\mathcal{T}} \partial = \partial j_n^{\mathcal{T}}, \quad j_n^{\mathcal{T}'} \bar{\varphi} = \bar{\varphi} j_n^{\mathcal{T}}, \\ j_0^{\mathcal{T}}(\alpha) = \alpha \quad [\alpha \in C_0(\mathcal{T})] \end{array}\right\} \tag{69}$$

индуцирует тождественные гомоморфизмы групп $H_n(\mathcal{T})$. Действительно, тождественные гомоморфизмы групп $C_n(\mathcal{T})$ удовлетворяют предыдущим условиям.

Однако гомоморфизмы

$$j_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} \tag{70}$$

удовлетворяют условиям (69), так как имеем последовательно

$$\partial j_n^{\mathcal{T}} = \partial \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_{n-1}^{\mathcal{T}} \partial' \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_{n-1}^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_{n-1}^{\mathcal{T}} \partial = j_{n-1}^{\mathcal{T}} \partial,$$

$$\bar{\varphi} j_n^{\mathcal{T}} = \bar{\varphi} \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\bar{\varphi}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\varphi},$$

$$j_0^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_0^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_0^{\mathcal{T}} = \text{тождественное отображение.}$$

Отсюда следует, что $j_n^{\mathcal{T}} = \bar{\eta}_n^{\mathcal{T}} \bar{\theta}_n^{\mathcal{T}}$ индуцирует тождественное отображение в группе $H_n(\mathcal{T})$ при любом n и при любом пространстве $\mathcal{T}$.

Следовательно, $\eta_n^{*\mathcal{T}} \theta_n^{*\mathcal{T}}$ — тождественное отображение группы $H_n(\mathcal{T})$. Аналогичным путем находим, что $\theta_n^{*\mathcal{T}} \eta_n^{*\mathcal{T}}$ — тождественное отображение группы $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$. Эти два соотношения показывают, что $\theta_n^{*\mathcal{T}}$ и $\eta_n^{*\mathcal{T}}$ являются изоморфизмами. В самом деле, если для некоторого элемента $\alpha \in H_n(\mathcal{T})$ имеем $\theta_n^{*\mathcal{T}}(\alpha)=0$, то из $\eta_n^{*\mathcal{T}}\theta_n^{*\mathcal{T}}(\alpha)=\alpha$ следует, что $\alpha=0$. Таким образом, $\theta_n^{*\mathcal{T}}$ — мономорфизм. Если α' — произвольный элемент из $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$, то $\alpha'=\theta_n^{*\mathcal{T}}(\alpha)$, где $\alpha=\eta_n^{*\mathcal{T}}(\alpha')$, поэтому $\theta_n^{*\mathcal{T}}$ является также эпиморфизмом.

Таким образом, мы доказали, что группы $H_n(\mathcal{T})$ и $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$ изоморфны для любого топологического пространства $\mathcal{T}$ и любого $n \geqslant 0$.

Приведем теперь несколько простых примеров отображений

$$\bar{\eta}_n^{\mathcal{T}}: Q_n^*(\mathcal{T}) \longrightarrow C_n(\mathcal{T}),$$

$$\bar{\theta}_n^{\mathcal{T}}: C_n(\mathcal{T}) \longrightarrow Q_n^*(\mathcal{T}),$$

удовлетворяющих условиям (62), (63), (62′), (63′). Если обозначить через i_n тождественное отображение куба I^n, через j_n тождественное отображение стандартного симплекса Δ^n, затем через f произвольный сингулярный куб топологического пространства $\mathcal{T}$, а через g сингулярный симплекс этого пространства, то i_n и j_n можно интерпретировать соответственно как сингулярный куб куба I^n и сингулярный симплекс симплекса Δ^n. Мы будем иметь

$$f=fi_n=\bar{\bar{f}}(i_n), \quad g=gj_n=\bar{g}(j_n).$$

Применив формулы (63), (63′), получим

$$\begin{aligned} \eta_n^{\mathcal{T}}(f)&=\eta_n^{\mathcal{T}}[\bar{\bar{f}}(i_n)]=(\eta_n^{\mathcal{T}}\bar{\bar{f}})(i_n)=(\bar{f}\eta_n^{I^n})(i_n)=\bar{f}[\eta_n^{I^n}(i_n)], \\ \theta_n^{\mathcal{T}}(g)&=\theta_n^{\mathcal{T}}[\bar{g}(j_n)]=(\theta_n^{\mathcal{T}}\bar{g})(j_n)=(\bar{\bar{g}}\theta_n^{\Delta^n})(j_n)=\bar{\bar{g}}[\theta_n^{\Delta^n}(j_n)]. \end{aligned} \tag{69'}$$

Отсюда следует, что отображения $\eta_n^{\mathcal{T}}$ и $\theta_n^{\mathcal{T}}$ полностью определены сингулярными цепями

$$\alpha_n=\eta_n^{I^n}(i_n) \in C_n(I^n),$$

$$\beta_n=\theta_n^{\Delta^n}(j_n) \in \theta_n^*(\Delta^n).$$

В соответствии с формулами (62), (62′) эти цепи должны удовлетворять рекуррентным условиям

$$\begin{aligned} \partial\alpha_n=\partial\eta_n^{I^n}(i_n)&=\bar{\eta}_{n-1}^{I^n}(\partial' i_n)=\bar{\eta}_{n-1}^{I^n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\tau_i^0-\tau_i^1)\Big]= \\ &=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0-\bar{\tau}_i^1)[\eta_{n-1}^{I^{n-1}}(i_{n-1})]= \\ &=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0-\bar{\tau}_i^1)(\alpha_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\partial'\beta_n = \partial'\theta_n^{\Delta^n}(j_n) = \bar{\theta}_{n-1}^{\Delta^n}(\partial j_n) = \bar{\theta}_{n-1}^{\Delta^n}\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \rho_i\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \bar{\bar{\rho}}_i\,[\theta_{n-1}^{\Delta^{n-1}}(j_{n-1})] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \bar{\bar{\rho}}_i(\beta_{n-1}),$$

где мы обозначили через τ_i^0, τ_i^1, ρ_i отображения

$$\tau_i^0,\ \tau_i^1 : I^{n-1} \longrightarrow I^n; \quad \rho_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n,$$

заданные формулами

$$\tau_i^\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (t_1, \ldots, t_{i-1}, \varepsilon, t_i, \ldots, t_{n-1}) \qquad (\varepsilon = 0,\ 1),$$

$$\rho_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}).$$

Обратно, для того чтобы отображения $\eta_n^{\mathscr{T}}$, $\theta_n^{\mathscr{T}}$, определенные формулами (69′), удовлетворяли формулам (62), (62′) для любого топологического пространства $\mathscr{T}$, достаточно, чтобы цепи α_n и β_n удовлетворяли рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \partial\alpha_n &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0 - \bar{\tau}_i^1)(\alpha_{n-1}), \\ \partial'\beta_n &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \bar{\bar{\rho}}_i(\beta_{n-1}). \end{aligned} \qquad (69'')$$

Частным решением первой последовательности соотношений (69″) являются цепи α_n^0, определенные соотношениями

$$\alpha_0^0(A) = B,\ \ \alpha_n^0 = O_n\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0 - \bar{\tau}_i^1)(\alpha_{n-1}^0)\right], \qquad (69''')$$

где $A = \Delta^0$, $B = I^0$, O_n — центр тяжести куба I^n, а буква O в записи цепи α указывает на то, что симплексы s цепи α следует заменить симплексами Os, у которых O— первая вершина, а s — грань, противолежащая вершине O так чтобы коэффициенты цепи остались неизменными (см. § 10). В самом деле, из формулы (71) § 10 следует, что цепи α_n^0 удовлетворяют первым соотношениям (69″). Симплексы цепей α_n^0 образуют разложение куба I^n, аналогичное барицентрическому подразделению симплекса Δ^n, которое будет определено в следующем параграфе.

Второй же формуле (69″) удовлетворяет отображение

$$\beta_n : I^n \longrightarrow \Delta^n,$$

заданное формулами Серра

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 - t_1, \\ &x_1 = t_1 (1 - t_2), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_i = t_1 \ldots t_i (1 - t_{i+1}), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_{n-1} = t_1 \ldots t_{n-1} (1 - t_n), \\ &x_n = t_1 \ldots t_n. \end{aligned} \tag{69$^{\text{IV}}$}$$

В самом деле, отображение (69^{IV}) преобразует грани $t_1 = 1$, $t_2 = 1, \ldots, t_n = 1$, $t_n = 0$ куба I^n в грани $x_0 = 0$, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ симплекса Δ^n. Остальные $n-1$ граней размерности $(n-1)$ куба I^n преобразуются в грани симплекса Δ^n размерности, не превосходящей $n-2$, так что отображения $\beta_n \tau_i^0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ образуют невырожденные сингулярные кубы размерности $n-1$ симплекса Δ^n. Следовательно, в $Q_{n-1}^*(\Delta^n)$ имеем

$$\partial' \beta_n = - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \beta_n \tau_i^1 + (-1)^n \beta_n \tau_n^0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \beta_n \tau_i^1 + (-1)^n \beta_n \tau_n^0.$$

С другой стороны, отображение $\beta_n \tau_i^1 : I^{n-1} \to \Delta^n$ задано формулами

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 - t_1, \\ &x_1 = t_1 (1 - t_2), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_{i-1} = 0, \\ &x_i = t_1 \ldots t_{i-1} (1 - t_i), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_n = t_1 \ldots t_{n-1} \end{aligned}$$

и совпадает с отображением $\rho_{i-1} \beta_{n-1}$. Отображение $\beta_n \tau_n^0 : I^{n-1} \to \Delta^n$ задано формулами

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 - t_1, \\ &\vdots \\ &x_i = t_1 \ldots t_i (1 - t_{i+1}), \\ &\vdots \\ &x_{n-1} = t_1 \ldots t_{n-1}, \\ &x_n = 0 \end{aligned}$$

и совпадает с отображением $\rho_n\beta_{n-1}$. Следовательно, имеем

$$\partial'\beta_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \rho_i \beta_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \rho_i (\beta_{n-1}).$$

Можно заметить, что преобразование (69^{IV}) гомеоморфно отображает внутренность куба I^n на внутренность симплекса Δ^n, так как для любых точек $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $x_i \neq 0$, оно обратимо и β_n^{-1} может быть записано в виде

$$t_1 = 1 - x_0,\ t_2 = 1 - \frac{x_1}{t_1},\ \ldots,\ t_{i+1} = 1 - \frac{x_i}{t_1 \ldots t_i},\ \ldots,\ t_n = \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-1}}.$$

Следовательно, мы имеем

$$t_1 \neq 0,\ 1;\ t_2 \neq 0,\ 1;\ \ldots;\ t_n \neq 0,\ 1.$$

10. Барицентрическое подразделение линейного симплекса

Пусть $\sigma = (A^0, \ldots, A^p)$ — линейный симплекс в евклидовом пространстве E^n, причем $A^0, \ldots, A^p$ — независимые точки этого пространства. Напомним, что в понятие линейного симплекса σ входит: 1) множество $|\sigma|$ точек вида $\lambda_0 A^0 + \ldots + \lambda_p A^p$ ($\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_0 + \ldots + \lambda_p = 1$); 2) порядок, в котором следуют вершины $A^0, \ldots, A^p$; 3) линейная структура множества $|\sigma|$; 4) топология метрического пространства, индуцированная топологией метрического пространства E^n.

С топологическим пространством $|\sigma|$ ассоциируется сингулярная цепь размерности p, которая называется *цепью барицентрических подразделений* симплекса σ и обозначается $\mathrm{Sd}\,\sigma$. Для введения этого понятия обозначим через g_0 центр тяжести множества $|\sigma|$, т. е. точку, имеющую координаты

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \frac{1}{p+1}.$$

Если $P^0, P^1, \ldots, P^r$ — произвольные точки из $|\sigma|$, то через $[P^0, \ldots, P^r]$ условимся обозначать сингулярный симплекс пространства $|\sigma|$, определенный непрерывным отображением $f\colon \Delta^r \to |\sigma|$, действующим по формуле

$$f(x_0, \ldots, x_r) = x_0 P^0 + \ldots + x_r P^r, \tag{70}$$

где $(x_0, \ldots, x_r)$ — точка из Δ^r.

Симплексы вида $[P^0, \ldots, P^r]$ являются сингулярными симплексами частного типа, так как отображение (70) сохраняет соотношение линейной зависимости точек из Δ^r и $|\sigma|$. Поэтому мы будем их называть *линейными сингулярными симплексами.*

Заметим, что в случае линейного сингулярного симплекса $[P^0, \ldots, P^r]$ линейная независимость точек $P^0, \ldots, P^r$ не предполагается, как это делалось в случае линейных симплексов $(A^0, \ldots, A^p)$. Условимся, наконец, обозначать через $P[P^0, \ldots, P^r]$ линейный сингулярный симплекс $[P, P^0, \ldots, P^r]$. Это обозначение удобно, если симплекс $[P^0, \ldots, P^r]$ записывается одной буквой s. В этом случае Ps будет обозначать симплекс

$$P[P^0, \ldots, P^r] = [P, P^0, \ldots, P^r].$$

Если α — линейная сингулярная цепь, т. е. цепь, образованная линейными сингулярными симплексами

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} c_i [P_i^0, \ldots, P_i^r],$$

а P — точка из E^n, то через $P\alpha$ будем обозначать цепь

$$P\alpha = \sum_{i=1}^{p} c_i [P, P_i^0, \ldots, P_i^r].$$

Заметим, что при таких обозначениях справедлива формула

$$\partial(P\alpha) = \alpha - P\,\partial\alpha. \qquad (71)$$

В самом деле, для сингулярного симплекса $[P^0, \ldots, P^r]$ имеем

$$\partial[P^0, \ldots, P^r] = [P^1, \ldots, P^r] - [P^0, P^2, \ldots, P^r] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r [P^0, \ldots, P^{r-1}], \qquad (72)$$

так как для любого отображения f по формуле (70)

$$f_i(x_0, \ldots, x_{r-1}) = f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{r-1}) =$$
$$= x_0P_0 + \ldots + x_{i-1}P_{i-1} + x_iP_{i+1} + \ldots + x_{r-1}P_r.$$

Применяя формулу (72) к симплексу $[P, P^0, \ldots, P^r]$, приходим к тождеству (71).

Для линейного симплекса σ или для линейного сингулярного симплекса s цепь барицентрических подразделений является линейной сингулярной цепью, которая определяется индукцией по размерности этого симплекса. Для симплекса размерности 0, $s = (A^0)$, будем полагать

$$\mathrm{Sd}\, s = [A^0] = [s]. \qquad (73)$$

Пусть $[s]$ — сингулярный симплекс, ассоциированный с симплексом $s = (P^0, \ldots, P^r)$ при помощи формулы $[s] = [P^0, \ldots, P^r]$.

Для линейного симплекса s произвольной размерности или для линейного сингулярного симплекса $[s]$ барицентрическое подразделение $\mathrm{Sd}\, s$ задается рекуррентной формулой

$$\mathrm{Sd}\,[s] = \mathrm{Sd}\, s = g_s\, \mathrm{Sd}\, \partial[s], \qquad (74)$$

где g_s — центр тяжести симплекса s, а оператор Sd распространяется на линейные сингулярные цепи по линейности.

В частности, если $s=(A^0, A^1)$, то, обозначив через g_{01} середину отрезка A^0A^1, т. е. точку $g_{01}=\frac{1}{2}(A^0+A^1)$, будем иметь

$$\mathrm{Sd}\,(A^0, A^1)=g_{01}\,\mathrm{Sd}\,[(A^1)-(A^0)]=g_{01}\,[(A^1)-(A^0)],$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Sd}\,(A^0, A^1)=[g_{01}, A^1]-[g_{01}, A^0]. \tag{75}$$

Для $s=(A^0, A^1, A^2)$, симплекса размерности 2, обозначив через g центр тяжести треугольника $A^0A^1A^2$, $g=\frac{1}{3}(A^0+A^1+A^2)$, получим

$$\mathrm{Sd}\,(A^0, A^1, A^2)=g\,\mathrm{Sd}\,[(A^1, A^2)-(A^0, A^2)+(A^0, A^1)]=$$
$$=g\,[(g_{12}, A^2)-(g_{12}, A^1)-(g_{02}, A^2)+(g_{02}, A^0)+(g_{01}, A^1)-(g_{01}, A^0)],$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Sd}\,(A^0, A^1, A^2)=[g, g_{12}, A^2]-[g, g_{12}, A^1]-$$
$$-[g, g_{02}, A^2]+[g, g_{02}, A^0]+[g, g_{01}, A^1]-[g, g_{01}, A^0]. \tag{76}$$

На рис. 3 представлены симплексы, составляющие цепь $\mathrm{Sd}\,(A^0, A^1, A^2)$, и указана стрелками ориентация этих симплексов.

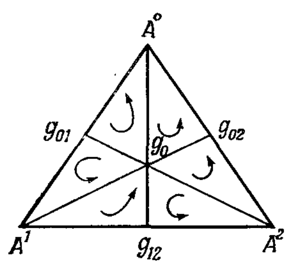

Рис. 3.

Под *ориентацией* мы понимаем порядок, в котором следуют вершины симплекса, если этот симплекс входит в формулу (76) со знаком плюс, и обратный порядок в случае знака минус.

Будем называть *вырожденным* линейный сингулярный симплекс $s=[A^0, \ldots, A^r]$, вершины которого $A^0, \ldots, A^r$ линейно зависимы, т. е. связаны соотношением вида

$$\lambda_0A^0+\ldots+\lambda_rA^r=0,$$

где не все λ_i — нули и

$$\lambda_0+\ldots+\lambda_r=0.$$

Это означает, что они расположены в линейном пространстве размерности $r-1$. В случае когда это условие не выполняется, будем говорить, что симплекс $[A^0, \ldots, A^r]$ невырожденный.

Будем называть носителем линейного сингулярного симплекса $s=[P^0, \ldots, P^r]$ множество $|s|$ точек, лежащих в образе отображения (70). Докажем следующую теорему для линейных симплексов $\sigma=(A^0, \ldots, A^p)$,

Теорема 6. *Симплексы, которые образуют линейную сингулярную цепь барицентрического подразделения* $\mathrm{Sd}\,\sigma$, *являются невырожденными и объединение их носителей совпадает с множеством* $|\sigma|$. *Носители двух симплексов из* $\mathrm{Sd}\,\sigma$ *не имеют общих внутренних точек.*

Доказательство. Из определения (74) цепи $\mathrm{Sd}\,\sigma$ следует, что симплексы, которые образуют эту цепь, имеют вид

$$[g, g_{i_{p-1}}, g_{i_{p-2}}, \ldots, g_{i_0}], \tag{77}$$

где g — центр тяжести симплекса σ, g_{i_k} — центр тяжести симплекса $(A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$, а $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ — различные вершины симплекса σ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$.

Следовательно,

$$g_{i_k}=\frac{1}{k+1}(A_{i_0}+A_{i_1}+\ldots+A_{i_k}). \tag{78}$$

Если бы существовало линейное соотношение вида

$$\lambda_k g_{i_k}+\lambda_{k-1} g_{i_{k-1}}+\ldots+\lambda_0 g_{i_0}=0,$$

где $\lambda_k \neq 0$, $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k=0$, то из формулы (78) вытекало бы линейное соотношение между точками $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$, а именно соотношение

$$\alpha_k A_{i_k}+\ldots+\alpha_0 A_{i_0}=0,$$

где $\alpha_k=\frac{\lambda_k}{k+1} \neq 0$ и, вообще,

$$\alpha_i=\frac{\lambda_k}{k+1}+\frac{\lambda_{k-1}}{k}+\ldots+\frac{\lambda_i}{i+1}. \tag{79}$$

Кроме того, поскольку

$$\lambda_i=(i+1)(\alpha_i-\alpha_{i+1}), \quad \lambda_k=(k+1)\alpha_k, \tag{80}$$

выполнены равенства

$$\begin{aligned}\lambda_0+\ldots+\lambda_k &= (\alpha_0-\alpha_1)+2(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(k+1)\alpha_k= \\ &= \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=0.\end{aligned}$$

Это показывает, что точки $A^0, \ldots, A^k$ не являются линейно независимыми, что противоречит определению линейного симплекса.

Следовательно, симплексы цепи $\mathrm{Sd}\,\sigma$ невырождены.

Точка x, принадлежащая носителю симплекса $[g, g_{i_{p-1}}, \ldots, g_{i_0}]$, имеет вид

$$x = \alpha_p g + \alpha_{p-1} g_{i_{p-1}} + \ldots + \alpha_0 g_{i_0}, \tag{81}$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$. С учетом формул (78) находим

$$x = x_{i_0} A_{i_0} + x_{i_1} A_{i_1} + \ldots + x_{i_p} A_{i_p}, \tag{82}$$

где

$$x_{i_k} = \frac{\alpha_p}{p+1} + \frac{\alpha_{p-1}}{p} + \ldots + \frac{\alpha_k}{k+1}. \tag{83}$$

Из этих соотношений следуют неравенства

$$x_{i_0} \geqslant x_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant x_{i_p} \geqslant 0 \tag{84}$$

и равенство

$$x_{i_0} + \ldots + x_{i_p} = 1; \tag{84'}$$

в формуле (84) неравенства будут строгими, если все числа α_i положительны, т. е. если x — внутренняя точка симплекса $(g, g_{i_{p-1}}, \ldots, g_{i_0})$. Отсюда следует, что два симплекса такого вида не имеют общих внутренних точек, так как координаты x_i точки

$$x = x_0 A^0 + \ldots + x_p A^p \tag{85}$$

могут быть упорядочены единственным образом, если $x_i \neq x_j \neq 0$ $(i \neq j)$.

Формулы (83) могут быть обращены:

$$\alpha_j = (j+1)\,(x_{i_j} - x_{i_{j+1}}), \quad \alpha_p = (p+1)\,x_p. \tag{86}$$

Следовательно, точка (85) симплекса $\sigma = (A^0, \ldots, A^p)$ принадлежит симплексу $[g, g_{i_{p-1}}, \ldots, g_{i_0}]$, если координаты x_i удовлетворяют неравенствам (84). Теорема 6 доказана.

Из предыдущего доказательства следует, что цепь $\mathrm{Sd}\,\sigma$ образована из $(p+1)!$ линейных сингулярных симплексов, так как каждой перестановке индексов $0, 1, \ldots, p$ соответствует один симплекс (77).

Диаметром множества в метрическом пространстве называется точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками множества.

Если x — внутренняя точка симплекса $\sigma = (A^0, \ldots, A^p)$, а y — переменная точка этого симплекса, то максимум расстояния $d(x, y)$ достигается, когда y принадлежит границе σ. Действительно, если y — внутренняя точка, то луч xy пересекает границу симплекса σ

в некоторой точке z и

$$d(x, z) > d(x, y).$$

Если y — фиксированная точка на границе симплекса σ, то по той же причине максимум расстояния достигается для точки x, которая также лежит на границе σ.

Предположим теперь, что x и y — две точки границы σ, причем x — фиксированная, а y — переменная точка, принадлежащая некоторому отрезку на грани $(A^{i_1}, \ldots, A^{i_p})$ симплекса σ. В этом случае максимум расстояния $d(x, y)$ достигается, когда y является одним из концов отрезка.

Отсюда следует, что максимум расстояния $d(x, y)$ достигается для точки y, лежащей на границе симплекса $(A^{i_1}, \ldots, A^{i_p})$. Если теперь заставить точку y описывать отрезок этой границы, например, отрезок, лежащий в симплексе $(A^{i_2}, \ldots, A^{i_p})$, то аналогичным путем найдем, что максимум расстояния $d(x, y)$ достигается на границе симплекса $(A^{i_2}, \ldots, A^{i_p})$.

Продолжая таким же образом, находим, что максимум расстояния $d(x, y)$ соответствует вершине $y = A_{i_k}$. Фиксируем теперь y в этой вершине и повторим рассуждения, проведенные выше, считая x переменной точкой. Мы увидим, что максимум расстояния $d(x, y)$ достигается, когда x и y являются вершинами симплекса σ. Поэтому

Диаметр линейного симплекса равен длине одного из его ребер.

Предположим, что диаметр симплекса σ равен $d = d(A^i, A^j)$. Оценим диаметр какого-нибудь из симплексов цепи $\mathrm{Sd}\,\sigma$. Рассмотрим симплекс $\sigma' = [g, g_{i_{p-1}}, \ldots, g_{i_0}]$, где

$$g_{i_k} = \frac{1}{k+1}(A_{i_0} + A_{i_1} + \ldots + A_{i_k}).$$

Из результата, установленного выше, следует, что диаметр d' симплекса σ' равен длине одного из ребер $g_{i_k} g_{i_h}$. Предположив, что $k > h > 0$, получаем неравенство

$$d' = d(g_{i_k}, g_{i_h}) < d(g_{i_k}, A_{i_\alpha}), \tag{87}$$

где A_{i_α} — одна из вершин $A_{i_0}, \ldots, A_{i_h}$, так как g_{i_h} — внутренняя точка симплекса $(A_{i_0}, \ldots, A_{i_h})$. Луч $A_{i_\alpha} g_{i_k}$ пересекает вторично границу симплекса $(A_{i_0}, \ldots, A_{i_k})$ в центре тяжести g_α грани, противолежащей A_{i_α}:

$$g_\alpha = \frac{1}{k}(A_{i_0} + \ldots + A_{i_{\alpha-1}} + A_{i_{\alpha+1}} + \ldots + A_{i_k}).$$

Поэтому

$$g_{i_k} = \frac{A_{i_\alpha}}{k+1} + \frac{k}{k+1} g_\alpha.$$

Следовательно, точка g_{i_k} делит отрезок $A_{i_\alpha} g_\alpha$ в отношении k:

$$d(A_{i_\alpha}, g_{i_k}) = \frac{k}{k+1} d(A_{i_\alpha}, g_\alpha) \leqslant \frac{k}{k+1} d.$$

Учитывая соотношение (87), находим

$$d' \leqslant \frac{k}{k+1} d \leqslant \frac{p}{p+1} d.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Диаметр d' любого из симплексов цепи* $\mathrm{Sd}\,\sigma$ *удовлетворяет неравенству*

$$d' \leqslant \frac{p}{p+1} d, \tag{88}$$

где p — размерность, а d — диаметр симплекса σ.

С каждым линейным симплексом $\sigma = (A^0, \ldots, A^p)$ можно ассоциировать две линейные сингулярные цепи: цепь $[\sigma] = [A^0, \ldots, A^p]$ и цепь $\mathrm{Sd}\,\sigma$. Найдем разность этих цепей. Для этого введем оператор R, который ставит в соответствие каждому линейному симплексу σ или каждому линейному сингулярному симплексу $[\sigma]$ размерности p линейную сингулярную цепь размерности $p+1$. Оператор R определим по индукции: для симплексов σ размерности 0 положим $R\sigma = 0$. Для симплексов произвольной размерности R определяется рекуррентной формулой

$$R\sigma = R[\sigma] = g_\sigma([\sigma] - \mathrm{Sd}\,\sigma - R\partial[\sigma]), \tag{89}$$

где g_σ — центр тяжести симплекса σ и R определяется на линейных сингулярных цепях по линейности. Докажем следующую теорему.

Теорема 8. *Операторы* Sd *и* R *удовлетворяют соотношениям*

$$\partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma = \mathrm{Sd}\,\partial[\sigma], \tag{90}$$

$$[\sigma] - \mathrm{Sd}\,\sigma = \partial R\sigma + R\,\partial[\sigma]. \tag{91}$$

Эти формулы доказываются индукцией по размерности симплекса σ. Для симплексов σ размерности 0 имеем

$$\mathrm{Sd}\,\sigma = [\sigma], \quad \partial[\sigma] = 0,$$

следовательно,

$$\partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma = \mathrm{Sd}\,\partial[\sigma] = 0.$$

Предположив, что равенство (90) справедливо для симплексов размерности $p-1$, из формул (74), (71) находим для симплекса σ размерности p

$$\partial\,\mathrm{Sd}\,\sigma = \partial(g_\sigma\,\mathrm{Sd}\,\partial[\sigma]) = \mathrm{Sd}\,\partial[\sigma] - g_\sigma\partial\,\mathrm{Sd}\,\partial[\sigma].$$

Но $\partial[\sigma]$ — цепь размерности $p-1$, и предположение индукции дает

$$\partial \operatorname{Sd} \partial [\sigma] = \operatorname{Sd} \partial \partial [\sigma] = 0.$$

Таким образом, мы доказали для симплекса σ формулу (90).

Формула (91) справедлива для симплексов размерности нуль, так как в этом случае оба члена равны нулю. Предположим, что формула (91) справедлива для симплексов размерности $p-1$ и вычислим границу цепи (89), используя соотношение (71). Будем иметь

$$\partial R\sigma = [\sigma] - \operatorname{Sd}\sigma - R\,\partial[\sigma] - g_\sigma(\partial[\sigma] - \partial \operatorname{Sd}\sigma - \partial R\,\partial[\sigma]).$$

Но здесь выражение, стоящее в скобках после символа g_σ, равно нулю. Действительно, пользуясь формулами (90) и (91) для цепи $\partial[\sigma]$ размерности $p-1$, получаем

$$\partial[\sigma] - \partial \operatorname{Sd}\sigma - \partial R\,\partial[\sigma] = \partial[\sigma] - \operatorname{Sd}\partial[\sigma] - \\ - (\partial[\sigma] - \operatorname{Sd}\partial[\sigma] - R\partial\,\partial[\sigma]) = 0.$$

Следовательно, формула (91) справедлива и для симплекса размерности p. Теорема 8 доказана.

Операторы Sd и R, определенные на линейных симплексах или на линейных сингулярных симплексах, расширяются по линейности на линейные сингулярные цепи. Для произвольной сингулярной цепи u из формул (90) и (91) следует

$$\partial \operatorname{Sd} u = \operatorname{Sd}\partial u, \tag{92}$$

$$u - \operatorname{Sd} u = \partial R u + R\,\partial u. \tag{93}$$

Обозначим через Sd^n и R^n итерированные операторы Sd и R, т. е. операторы, определенные формулами

$$\operatorname{Sd}^1 = \operatorname{Sd}, \quad \operatorname{Sd}^n = \operatorname{Sd}(\operatorname{Sd}^{n-1}),$$
$$R^1 = R, \quad R^n = R(R^{n-1}).$$

Заменяя в формулах (92), (93) цепь u последовательно цепями $\operatorname{Sd} u$, $\operatorname{Sd}^2 u$, ..., $\operatorname{Sd}^{n-1}u$, получаем

$$\partial \operatorname{Sd}^n u = \operatorname{Sd}\partial \operatorname{Sd}^{n-1} u = \ldots = \operatorname{Sd}^n \partial u, \tag{94}$$

$$\operatorname{Sd} u - \operatorname{Sd}^2 u = \partial R \operatorname{Sd} u + R\partial \operatorname{Sd} u,$$
$$\operatorname{Sd}^2 u - \operatorname{Sd}^3 u = \partial R \operatorname{Sd}^2 u + R\,\partial \operatorname{Sd}^2 u,$$
$$\vdots \tag{95}$$
$$\operatorname{Sd}^{n-1}u - \operatorname{Sd}^n u = \partial R \operatorname{Sd}^{n-1} u + R\partial \operatorname{Sd}^{n-1} u.$$

Сложим почленно равенства (93) и (95):

$$u - \operatorname{Sd}^n u = \partial \sum_{i=0}^{n-1} R \operatorname{Sd}^i u + R \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Sd}^i \partial u. \tag{96}$$

Формула (96) показывает, что разность $u - \mathrm{Sd}^n u$ является суммой некоторой границы и линейной сингулярной цепи, образованной симплексами, носители которых содержатся в границах симплексов цепи u.

11. Теорема о покрытиях

При помощи операторов Sd и R в группах $C_q(\mathcal{T})$ сингулярных (симплициальных) цепей топологического пространства $\mathcal{T}$ определим операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$.

Пусть задано непрерывное отображение φ топологического пространства $\mathcal{U}$ в пространство $\mathcal{T}$. Мы условились обозначать через $\overline{\varphi}$ гомоморфизм группы $C_q(\mathcal{U})$ в группу $C_q(\mathcal{T})$, определенный на базисе $C_q(\mathcal{U})$ формулой

$$\overline{\varphi}(f) = \varphi f, \tag{97}$$

где f — произвольное непрерывное отображение стандартного симплекса Δ^q в $\mathcal{U}$. Если f — сингулярный симплекс пространства $\mathcal{T}$, то $\overline{f}$ будет гомоморфизмом группы $C_q(\Delta^q)$ в группу $C_q(\mathcal{T})$.

Мы условились представлять линейный сингулярный симплекс $\sigma : \Delta^r \longrightarrow E^n$ образами $P^0, \ldots, P^r$ вершин симплекса Δ^r в E^n:

$$\sigma = [\sigma(A_0), \ldots, \sigma(A_r)] = [P^0, \ldots, P^r].$$

Таким образом, символ $[P^0, \ldots, P^r]$ означает непрерывное отображение симплекса Δ^r в E^n:

$$[P^0, \ldots, P^r](x_0, \ldots, x_r) = x_0 P^0 + \ldots + x_r P^r. \tag{98}$$

Если образ отображения σ принадлежит множеству U из E^n, то симплекс σ можно считать сингулярным симплексом подпространства U. Этот сингулярный симплекс будет обозначаться тем же символом $\sigma = [P^0, \ldots, P^r]$.

Для стандартного симплекса $\Delta^r = (A^0, \ldots, A^r)$ выражение $[\Delta^r] = [A^0, \ldots, A^r]$ представляет тождественное отображение симплекса Δ^r в себя. Тогда в соответствии с формулой (97) $\overline{\sigma}([\Delta^r])$ является произведением тождественного отображения симплекса Δ^r и отображения σ. Итак,

$$\overline{\sigma}([\Delta^r]) = \sigma[\Delta^r] = \sigma. \tag{99}$$

Пусть $\beta = [B^0, \ldots, B^p]$ — линейный сингулярный симплекс из Δ^r и g_β — его центр тяжести

$$g_\beta = \frac{1}{p+1}(B^0 + \ldots + B^p).$$

Так как σ — линейное отображение, то отсюда получаем

$$\sigma(g_\beta) = \frac{1}{p+1}[\sigma(B^0) + \sigma(B^1) + \ldots + \sigma(B^p)], \tag{100}$$

значит, $\sigma(g_\beta)$ — центр тяжести симплекса $\beta' = [\sigma(B^0), \ldots, \sigma(B^p)]$. Поскольку

$$\beta' = \sigma\beta = \bar{\sigma}(\beta),$$

для любого линейного симплекса

$$\beta : \Delta^p \longrightarrow \Delta^r, \quad \sigma : \Delta^r \longrightarrow \Delta^q$$

можно записать

$$\sigma(g_\beta) = g_{\sigma\beta} = g_{\bar{\sigma}(\beta)}. \tag{101}$$

Определим теперь операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$ на группах $C_q(\mathcal{T})$ сингулярных (симплициальных) цепей топологического пространства $\mathcal{T}$, положив на сингулярных симплексах $f : \Delta^q \longrightarrow \mathcal{T}$

$$\mathcal{S}(f) = \bar{f}(\operatorname{Sd}\Delta^q), \tag{102}$$

$$\mathcal{R}(f) = \bar{f}(R\Delta^q). \tag{103}$$

Если $\mathcal{T} = E^n$, а f — линейный сингулярный симплекс пространства E^n, то

$$\mathcal{S}(f) = \operatorname{Sd} f, \tag{104}$$

$$\mathcal{R}(f) = Rf. \tag{105}$$

Докажем формулы (104), (105) индукцией по размерности q симплекса f. Для $q = 0$ имеем

$$\operatorname{Sd}\Delta^0 = [\Delta^0], \quad \bar{f}([\Delta^0]) = f = \operatorname{Sd} f,$$

а также

$$R\Delta^0 = 0, \quad \bar{f}(R\Delta^0) = 0 = Rf.$$

Предположим тогда, что формулы (104), (105) справедливы для симплексов размерности $q-1$, и докажем справедливость этих формул для симплексов f размерности q. Обозначив через g центр тяжести симплекса Δ^q, а через g_f центр тяжести симплекса f, получим

$$\mathcal{S}(f) = \bar{f}(\operatorname{Sd}\Delta^q) = \bar{f}(g\operatorname{Sd}\partial[\Delta^q]) = g_f \cdot \bar{f}(\operatorname{Sd}\partial[\Delta^q]).$$

Но если A^j — вершины симплекса Δ^q и

$$\varphi_i^{q-1} = [A^0, \ldots, A^{i-1}, A^{i+1}, \ldots, A^q]$$

— сингулярные симплексы размерности $q-1$, то

$$\partial[\Delta^q] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varphi_i^{q-1}.$$

Следовательно, можно записать

$$\mathscr{S}(f)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_f\bar{f}(\mathrm{Sd}\,\varphi_i^{q-1}).$$

Так как формула (104) справедлива для $f=\varphi_i^{q-1}$, то

$$\mathrm{Sd}\,\varphi_i^{q-1}=\bar{\varphi}_i^{q-1}(\mathrm{Sd}\,\Delta^{q-1}).$$

Отсюда вытекают формулы

$$\mathscr{S}(f)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_f\cdot\bar{f}\bar{\varphi}_i^{q-1}(\mathrm{Sd}\,\Delta^{q-1})=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_f\cdot\overline{f\varphi_i^{q-1}}(\mathrm{Sd}\,\Delta^{q-1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_f\cdot\mathrm{Sd}\,(f\varphi_i^{q-1})=g_f\cdot\mathrm{Sd}\Big(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f\varphi_i^{q-1}\Big)=$$
$$=g_f\cdot\mathrm{Sd}\,\partial f=\mathrm{Sd}\,f.$$

Итак, мы проверили справедливость формулы (104) для симплексов размерности q.

Аналогично можно записать

$$\mathscr{R}(f)=\bar{f}(R\Delta^q)=\bar{f}[g([\Delta^q]-\mathrm{Sd}\,\Delta^q-R\partial[\Delta^q])]=$$
$$=g_f\bar{f}\Big([\Delta^q]-\mathrm{Sd}\,\Delta^q-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i R\varphi_i^{q-1}\Big),$$

или, пользуясь соотношениями (99), (104) и предположением индукции,

$$\mathscr{R}(f)=g_f\Big(f-\mathrm{Sd}\,f-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\bar{f}(\bar{\varphi}_i^{q-1}(R\Delta^{q-1}))\Big)=$$
$$=g_f\Big(f-\mathrm{Sd}\,f-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\overline{f\varphi_i^{q-1}}(R\Delta^{q-1})\Big)=$$
$$=g_f\Big(f-\mathrm{Sd}\,f-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i R(f\varphi_i^{q-1})\Big)=$$
$$=g_f\Big(f-\mathrm{Sd}\,f-R\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f\varphi_i^{q-1}\Big).$$

Следовательно, в конечном итоге

$$\mathscr{R}(f)=g_f(f-\mathrm{Sd}\,f-R\,\partial f).$$

Это соотношение вместе с формулой (89) приводит нас к равенству (105).

Докажем теперь, что для сингулярных цепей f произвольного топологического пространства $\mathscr{T}$

$$\partial\mathscr{S}f=\mathscr{S}\,\partial f, \tag{106}$$
$$f-\mathscr{S}f=\partial\mathscr{R}f+\mathscr{R}\,\partial f. \tag{107}$$

Достаточно доказать справедливость этих формул для случая, когда f — сингулярный симплекс. Из определения (102) следует

$$\partial \mathcal{S} f = \partial \bar{f}\,(\mathrm{Sd}\,\Delta^q).$$

Пользуясь формулами (23) и (90), можно записать

$$\partial \mathcal{S} f = \bar{f}\,(\partial\,\mathrm{Sd}\,\Delta^q) = \bar{f}\,(\mathrm{Sd}\,\partial\,[\Delta^q]) = \bar{f}\,\Big(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\mathrm{Sd}\,\varphi_i^{q-1}\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\bar{f}\bar{\varphi}_i^{q-1}\,(\mathrm{Sd}\,\Delta^{q-1}) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\overline{f\varphi_i^{q-1}}\,(\mathrm{Sd}\,\Delta^{q-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\mathcal{S}\,(f\varphi_i^{q-1}) = \mathcal{S}\,\Big(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,f\varphi_i^{q-1}\Big) = \mathcal{S}\,\partial f.$$

Аналогично из формул (103), (23), (91) находим

$$\partial \mathcal{R}\,(f) = \partial \bar{f}\,(R\Delta^q) = \bar{f}\,(\partial R\Delta^q) = \bar{f}\,([\Delta^q] - \mathrm{Sd}\,\Delta^q - R\partial\,[\Delta^q]).$$

Пользуясь формулами (102), (99), (105), получаем

$$\partial \mathcal{R}\,(f) = f - \mathcal{S} f - \bar{f}\Big(R\sum_{i=0} (-1)^i\,\varphi_i^{q-1}\Big) =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \bar{f}\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,R\varphi_i^{q-1} =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \bar{f}\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\bar{\varphi}_i^{q-1}\,(R\Delta^{q-1}) =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\overline{f\varphi_i^{q-1}}\,(R\Delta^{q-1}) =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\mathcal{R}\,(f\varphi_i^{q-1}) =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \mathcal{R}\sum_{i=0}^{q} (-1)^i\,\varphi_i^{q-1} =$$

$$= f - \mathcal{S} f - \mathcal{R}\,\partial f.$$

Таким образом, мы доказали справедливость формулы (107) для симплексов размерности q. Формулы (106) и (107) установлены.

Из них можно вывести равенства, аналогичные соотношениям (94), (96):

$$\partial \mathcal{S}^n f = \mathcal{S}^n\,\partial f, \tag{108}$$

$$f - \mathcal{S}^n f = \partial \mathcal{R} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i f + \mathcal{R} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}^i\,\partial f. \tag{109}$$

Теорема 9. *Пусть $\mathscr{A}$ — открытое покрытие топологического пространства $\mathscr{T}$. Сингулярные симплексы f пространства $\mathscr{T}$, образы которых таковы, что каждый из них содержится в некотором множестве покрытия $\mathscr{A}$, порождают подкомплекс $K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ комплекса $K(\mathscr{T})$ сингулярных цепей пространства $\mathscr{T}$. Группы гомологий этого комплекса изоморфны группам сингулярных гомологий пространства $\mathscr{T}$.*

Доказательство. Учитывая лемму, доказанную в § 13 гл. I, А, достаточно доказать, что любая сингулярная цепь c пространства $\mathscr{T}$, для которой $\partial c \in K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, гомологична цепи комплекса $K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, т. е.

$$c = c' + \partial b \qquad [c' \in K(\mathscr{T}, \mathscr{A}),\ b \in K(\mathscr{T})]. \tag{110}$$

Пусть $\mathscr{B}$ — покрытие стандартного симплекса Δ^q, образованное прообразами множеств покрытия $\mathscr{A}$ при отображении f; покрытие $\mathscr{B}$ можно обозначить $f^{-1}(\mathscr{A})$.

В соответствии с теоремой Лебега (гл. I, В, § 19) существует такое положительное число ε, что любое множество M из Δ^q, диаметр которого меньше ε, содержится по крайней мере в одном множестве покрытия $\mathscr{B}$.

С другой стороны, цепь $\mathrm{Sd}^n \Delta^q$ образована, согласно теореме 7, симплексами, диаметр которых не превышает

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^n \sqrt{2}$$

Для достаточно большого n это число меньше любого ε. Следовательно, для достаточно большого n каждый симплекс цепи принадлежит некоторому множеству покрытия $\mathscr{B}$. Из формулы

$$\mathscr{S}^n f = \bar{f}\,(\mathrm{Sd}^n f)$$

вытекает, что цепь $\mathscr{S}^n f$ образована сингулярными симплексами, лежащими в множествах покрытия $\mathscr{A}$. Поэтому $\mathscr{S}^n f$ является цепью комплекса $K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$.

Предположим теперь, что задана сингулярная цепь $c \in C_q(\mathscr{T})$ пространства $\mathscr{T}$, для которой

$$\partial c \in C_{q-1}(\mathscr{T}, \mathscr{A}). \tag{110'}$$

Так как цепь c является конечной линейной комбинацией сингулярных симплексов, то для достаточно большого целого числа n

$$\mathscr{S}^n c \in C_q(\mathscr{T}, \mathscr{A}).$$

С другой стороны, для сингулярного симплекса g из $C_q(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ цепи $\mathscr{S} g$ и $\mathscr{R} g$ принадлежат группам $C_q(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ и $C_{q+1}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ соответственно, так как образы симплексов цепей $\mathscr{S} g$ и $\mathscr{R} g$ содержатся в образе симплекса g. Применив это замечание к цепи (110'), находим

$$\mathscr{R}\sum_{i=0}^{n-1}\mathscr{S}^i\,\partial c\in C_q(\mathscr{T},\ \mathscr{A}).$$

Если положить

$$c'=\mathscr{S}^n c+\mathscr{R}\sum_{i=0}^{n-1}\mathscr{S}^i\,\partial f,$$

$$b=\mathscr{R}\sum_{i=0}^{n-1}\mathscr{S}^i f,$$

то условие (110) будет выполнено в силу формулы (109). Таким образом, теорема 9 доказана.

Можно доказать теорему, аналогичную теореме 9, для кубических сингулярных гомологий.

В самом деле, в евклидовом пространстве E^n вместо линейных сингулярных симплексов можно рассмотреть *линейные сингулярные кубы*, понимая под ними отображения f куба I^q в пространство E^n, удовлетворяющие условиям линейности

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

для любых точек x и y из I^q и любых положительных вещественных чисел λ и μ, связанных соотношением $\lambda+\mu=1$.

Если f — сингулярный куб размерности q, а P — точка из E^n, то сингулярный куб Pf размерности $q+1$ можно определить формулой

$$(Pf)(t_1,\ \ldots,\ t_{q+1})=t_{q+1}f(t_1,\ \ldots,\ t_q)+(1-t_{q+1})P.$$

Граница сингулярного куба Pf задается формулой

$$\partial(Pf)=P\,\partial f+(-1)^{q+1}P+(-1)^q f,$$

которая заменяет формулу (71).

Барицентрическое подразделение куба f определяется той же рекуррентной формулой (74), а оператор R — формулой (89). Все соотношения, установленные выше для сингулярных симплексов, могут быть распространены на сингулярные кубы, если пренебречь вырожденными кубами, следовательно, если принимать во внимание только цепи комплекса $Q^*=Q/D$.

12. Гомотопные отображения

Два непрерывных отображения f и g некоторого топологического пространства $\mathscr{T}$ в другое топологическое пространство $\mathscr{T}'$ называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение h прямого произведения $\mathscr{T}\times I$ в пространство $\mathscr{T}'$, что для любой точки x из $\mathcal{T}$

$$h(x, 0) = f(x), \ h(x, 1) = g(x).$$

Функция h называется *гомотопией* или *непрерывной деформацией* отображения f в g.

Мы встречали функцию h такого рода при изучении стягиваемых пространств. Там пространства $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ были совпавшими, f было тождественным отображением пространства $\mathcal{T}$

$$f(x) = x \quad (x \in \mathcal{T}),$$

а отображение g — постоянным отображением

$$g(x) = p \quad (x \in \mathcal{T}, \ p \in \mathcal{T}).$$

Отсюда следует, что стягиваемое пространство можно определить как топологическое пространство, в котором тождественное отображение гомотопно некоторому постоянному отображению.

Возвратимся к общему случаю двух непрерывных и гомотопных отображений f и g пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{T}'$.

Отображения f и g определяют два гомоморфизма $\bar{\bar{f}}$ и $\bar{\bar{g}}$ группы сингулярных кубических цепей $Q_n^*(\mathcal{T})$ в группу $Q_n^*(\mathcal{T}')$. Эти гомоморфизмы индуцируют два гомоморфизма f_* и g_* группы кубических сингулярных гомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$ в группу гомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{T}')$.

Теорема 10. *Если отображения f и g гомотопны, то гомоморфизмы f_* и g_* совпадают.*

Доказательство. Гомоморфизмы $\bar{\bar{f}}$ и $\bar{\bar{g}}$ определены на базе группы $Q_n^*(\mathcal{T})$ формулами

$$\bar{\bar{f}}(q) = fq, \quad \bar{\bar{g}}(q) = gq,$$

где q — невырожденный сингулярный куб пространства $\mathcal{T}$ размерности n.

Если отображения f и g гомотопны, то существует непрерывная деформация h отображения f в отображение g; она является непрерывным отображением прямого произведения $\mathcal{T} \times I$ в пространство $\mathcal{T}'$.

Поставим в соответствие каждому сингулярному кубу q размерности n пространства $\mathcal{T}$ сингулярный куб $\mathcal{D}q$ размерности $n+1$ пространства $\mathcal{T}'$ при помощи формулы

$$(\mathcal{D}q)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = h(q(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Тогда, продолжая по линейности отображение $\mathcal{D}$ базы $Q_n(\mathcal{T})$, мы получаем гомоморфизм $\mathcal{D}$ группы $Q_n(\mathcal{T})$ в группу $Q_{n+1}(\mathcal{T}')$. Простые вычисления приводят к формуле

$$(\partial\mathcal{D}q)(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [h(q(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}), x_n) -$$
$$- h(q(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1}), x_n)] +$$
$$+ (-1)^{n+1} [h(q(x_1, \ldots, x_n), 0) - h(q(x_1, \ldots, x_n), 1)],$$

которая символически может быть записана в виде

$$\partial \mathcal{D} q = \mathcal{D}\, \partial q + (-1)^{n+1} [\overline{\overline{f}}(q) - \overline{\overline{g}}(q)].$$

Так как эта формула линейна относительно q, то она распространяется на группу $Q_n(\mathcal{T})$ сингулярных цепей.

Заметим, что из определения отображения $\mathcal{D}$ следует, что оно переводит вырожденные кубы пространства $\mathcal{T}$ в вырожденные кубы пространства $\mathcal{T}'$. Действительно, если отображение q постоянно относительно переменной x_1, то отображение $\mathcal{D}q$ обладает тем же свойством.

Отсюда следует, что $\mathcal{D}$ индуцирует гомоморфизм $\mathcal{D}^*$ фактор-группы $Q_n^*(\mathcal{T}) = Q_n(\mathcal{T})/D_n(\mathcal{T})$ в группу $Q_n^*(\mathcal{T}')$. Полученная выше формула сохраняет свой вид для гомоморфизма $\mathcal{D}^*$. В частности, для цикла z группы $Q_n^*(\mathcal{T})$ получаем формулу

$$\overline{\overline{f}}(z) - \overline{\overline{g}}(z) = (-1)^{n+1} \partial \mathcal{D}^* z,$$

которая показывает, что $\overline{\overline{f}}(z)$ и $\overline{\overline{g}}(z)$ являются гомологичными циклами группы $Q_n^*(\mathcal{T}')$.

Отсюда следует, что $\overline{\overline{f}}$ и $\overline{\overline{g}}$ индуцируют один и тот же гомоморфизм группы гомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{T})$ в группу гомологий $\mathcal{H}_n(\mathcal{T}')$.

13. Гомология сфер S^n $(n \geqslant 1)$

В качестве приложения теорем 9 и 10 вычислим группы гомологий сфер. Для $n \geqslant 1$ сфера S^n связна, и в силу результатов § 3 имеем

$$H_0(S^n) \approx \mathbf{Z}.$$

Для вычисления остальных групп гомологий сферы S^n предположим, что S^n — единичная сфера в E^{n+1}, определенная уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1,$$

и рассмотрим открытые множества U и V в S^n, заданные неравенствами (рис. 4)

$$\begin{aligned} U &: x_{n+1} > -\varepsilon \\ V &: x_{n+1} < \varepsilon \end{aligned} \qquad (0 < \varepsilon < 1). \tag{111}$$

Множества U и V покрывают сферу S^n. Теорема 9 показывает, что гомологии сферы S^n совпадают с гомологиями цепного комплекса $K(S^n, \{U, V\})$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением сингулярных цепей из S^n, образы симплексов которых принадлежат либо U, либо V.

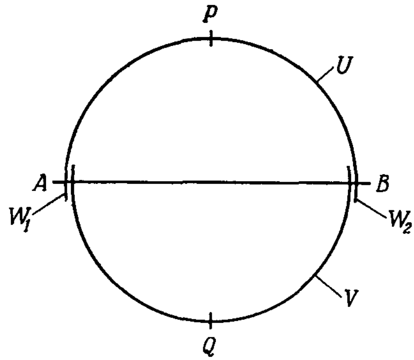

Рис. 4.

Рассмотрим случай $n=1$, т. е. вычислим группы гомологий окружности $H_q(S^1)$, $q \geqslant 1$ (рис. 4). Цепь из $C_q(S^1, \{U, V\})$ имеет вид

$$z = u + v,$$

где $u \in C_q(U)$, $v \in C_q(V)$.

Если z — цикл, то

$$\partial u = -\partial v,$$

и тогда ∂u — цепь из $C_{q-1}(U \cap V)$. Но множество $U \cap V$ имеет две связные компоненты W_1 и W_2, в которых лежат соответственно точки A и B.

Пусть $q=1$. В этом случае ∂u является линейной комбинацией точек из $U \cap V$

$$\partial u = m_1 a_1 + \ldots + m_p a_p + n_1 b_1 + \ldots + n_q b_q,$$

где a_i — точки из связной компоненты W_1, а b_j — точки из связной компоненты W_2 пересечения $U \cap V$ и $\sum\limits_i m_i + \sum\limits_j n_j = 0$.

Обозначим через P точку из U, а через $\overline{Px}$ обозначим сингулярный симплекс, который отображает точку $(0, 1) \in \Delta^1$ в P и $(1, 0)$ в x. Следовательно, $\overline{Px}$ является непрерывным отображением, например гомеоморфизмом симплекса Δ^1 (гомеоморфного отрезку $[0, 1]$) на дугу Px. Тогда

$$\partial u = \sum_i m_i (a_i - P) + \sum_j n_j (b_j - P) = \\ = \partial \left(\sum_i m_i \overline{Pa_i} + \sum_j n_j \overline{Pb_j} \right).$$

Поэтому

$$u = \sum_i m_i \overline{Pa_i} + \sum_j n_j \overline{Pb_j} + s, \tag{112}$$

где s — цикл из $C_1(U)$. Так как множество U стягиваемо, то любой цикл из $C_1(U)$ является границей.

Аналогично можно показать, что v имеет вид

$$v = \sum_i m'_i \overline{Qa_i} + \sum_j n'_j \overline{Qb_j} + t, \tag{113}$$

где $Q \in V$ и t — граница из V. Складывая (112) и (113), получаем

$$z = u + v = \sum_i (m_i \overline{Pa_i} + m'_i \overline{Qa_i}) + \sum_j (n_j \overline{Pb_j} + n'_j \overline{Qb_j}) + \partial w.$$

Но $z = u + v$ является циклом, и для того, чтобы ∂z не содержал сингулярных симплексов a_i, b_j, должны выполняться условия

$$m_i + m'_i = 0, \qquad n_j + n'_j = 0$$

для всех индексов i, j. Таким образом, z имеет вид

$$z = \sum_i m_i (\overline{Pa_i} - \overline{Qa_i}) + \sum_j n_j (\overline{Pb_j} - \overline{Qb_j}) + \partial w. \tag{114}$$

Рассмотрим цепь

$$\alpha = \left(\sum_i m_i\right) \overline{PQ},$$

где $\overline{PQ}$ — гомеоморфизм симплекса Δ^1 на дугу PAQ. Немедленно находим, что

$$\partial \alpha = \partial \sum_i m_i (\overline{Pa_i} - \overline{Qa_i}),$$

т. е.

$$\alpha - \sum_i m_i (\overline{Pa_i} - \overline{Qa_i})$$

— цикл. Учитывая, что дуга $QAPB$, содержащая этот цикл, является стягиваемым пространством, получаем соотношение

$$\sum_i m_i (\overline{Pa_i} - \overline{Qa_i}) = \left(\sum_i m_i\right) \overline{PQ} + \partial a.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_j n_j (\overline{Pb_j} - \overline{Qb_j}) = \left(\sum_j n_j\right) \overline{\overline{PQ}} + \partial b,$$

где $\overline{\overline{PQ}}$ — сингулярный симплекс, образ которого лежит на дуге PBQ. Таким образом, формула (114) принимает вид

$$z = \lambda \overline{PQ} + \mu \overline{\overline{PQ}} + \partial c.$$

Так как z является циклом, то должно выполняться условие

$$\partial z = \lambda (Q - P) + \mu (Q - P) = 0.$$

Отсюда следует $\lambda + \mu = 0$, и мы получаем формулу

$$z = \lambda (\overline{PQ} - \overline{\overline{PQ}}) + \partial c, \tag{115}$$

дающую общий вид циклов из $C_1(S^1, \{U, V\})$.

Выясним, может ли цикл z вида (115) при $\lambda \neq 0$ быть границей сингулярной цепи u из $C_2(S^1)$. В этом случае мы имели бы

$$\lambda (\overline{PQ} - \overline{\overline{PQ}}) = \partial v \qquad (\lambda \neq 0), \tag{116}$$

где v — также цепь из $C_2(S^1)$.

Если имеет место соотношение (116), то вращение окружности S^1 приводит к соотношению

$$\lambda (\overline{AB} - \overline{\overline{AB}}) = \partial a \qquad [a \in C_2(S^1)], \tag{117}$$

где $\overline{AB}$ — гомеоморфизм симплекса Δ^1 на дугу APB, а $\overline{\overline{AB}}$ — гомеоморфизм симплекса Δ^1 на дугу AQB.

В этом случае из доказательства теоремы 9 следует соотношение того же вида (117), в котором a — цепь из комплекса $C_2(S^1, \{U, V\})$. Следовательно, можно предполагать, что a имеет вид

$$a = u - v, \tag{118}$$

где $u \in C_2(U)$, $v \in C_2(V)$.

В этом случае, очевидно, мы имеем

$$\partial u \in C_1(U), \qquad \partial v \in C_1(V),$$

и из соотношения

$$\lambda (\overline{AB} - \overline{\overline{AB}}) = \partial u - \partial v$$

следует, что ∂u и ∂v имеют вид

$$\partial u = \lambda \overline{AB} + w, \tag{119}$$

$$\partial v = \lambda \overline{\overline{AB}} + w. \tag{120}$$

Но $\partial\partial u = \partial\partial v = 0$, и поэтому

$$\partial w = \lambda (A - B). \tag{121}$$

Из соотношений (119), (120) мы получаем

$$w \in C_1(U \cap V),$$

т. е. w разлагается в сумму двух цепей

$$w = w_1 + w_2, \qquad w_1 \in C_1(W_1), \qquad w_2 \in C_1(W_2).$$

Так как группы $C_1(W_1)$ и $C_1(W_2)$ не имеют общих ненулевых элементов, то из (121) следует

$$\partial w_1 = \lambda A, \qquad \partial w_2 = -\lambda B;$$

но последние соотношения возможны, только если $\lambda = 0$, поскольку мы показали, что в связном пространстве индекс Кронеккера границы размерности 0 равен нулю.

Таким образом, цепь z, заданная формулой (115), является границей только тогда, когда $\lambda = 0$. Поэтому отображение $z \to \lambda$ индуцирует изоморфизм группы $H_1(S^1)$ на группу $\mathbf{Z}$, т. е.

$$H_1(S^1) \approx \mathbf{Z}. \tag{122}$$

Рассмотрим теперь цикл $z \in C_q(S^1, \{U, V\})$, $q > 1$. Этот цикл имеет вид

$$z = u + v,$$

где u и v — цепи, $u \in C_q(U)$, а $v \in C_q(V)$. Условие $\partial z = \partial u + \partial v = 0$ показывает, что $\partial u = -\partial v$ есть цепь из $C_{q-1}(U \cap V)$.

Но так как пересечение $U \cap V$ является объединением двух непересекающихся множеств W_1 и W_2, то цепь ∂u разлагается в сумму $\alpha + \beta$ цепи α, образованной из симплексов, образы которых лежат W_1, и цепи β, образованной симплексами, образы которых принадлежат W_2. Таким образом,

$$\partial u = \alpha + \beta.$$

Из $\partial\partial u = \partial\alpha + \partial\beta = 0$ следует $\partial\alpha = \partial\beta = 0$, поэтому α и β — циклы соответственно из W_1 и W_2. Так как W_1 и W_2 — стягиваемые пространства, то

$$\alpha = \partial\lambda, \qquad \beta = \partial\mu,$$

где

$$\lambda \in C_q(W_1), \qquad \mu \in C_q(W_2).$$

Отсюда $\partial u = \partial\lambda + \partial\mu$, или $\partial(u - \lambda - \mu) = 0$, т. е. $u - \lambda - \mu$ является циклом. Но симплексы цепи $u - \lambda - \mu$ принадлежат дуге $W_1 \cup U \cup W_2$, которая стягиваема. Следовательно, $u - \lambda - \mu$ есть граница:

$$u - \lambda - \mu = \partial a. \tag{123}$$

Из равенств $\partial v = -\partial u = -(\alpha + \beta) = -\partial(\lambda + \mu)$ аналогичным путем находим

$$v + \lambda + \mu = \partial b. \tag{124}$$

Складывая равенства (123) и (124), находим, что $z = u + v$ является границей. Следовательно,

$$H_q(S^1) = H_q(S^1, \{U, V\}) = 0 \qquad (q > 1). \tag{125}$$

Рассмотрим теперь сферу S^n $(n>1)$ и покрытие $\{U, V\}$, образованное окрестностями (111). Пересечение $W=U\cap V$ связно, если $n>1$ (рис. 5).

Любой цикл z из $C_q(S^n, \{U, V\})$ разлагается в сумму

$$z=u+v, \qquad u\in C_q(U), \qquad v\in C_q(V), \tag{126}$$

и из соотношения $\partial z=0$ следует

$$\partial u=-\partial v\in C_{q-1}(W). \tag{126'}$$

Так как $\partial\partial u=0$, то ∂u — цикл из $C_{q-1}(W)$. Рассмотрим точки $P(0, \ldots, 0, 1)$, $Q(0, \ldots, 0, -1)$ на S^n и сферу S^{n-1}, полученную пересечением сферы S^n с гиперплоскостью

$$x_{n+1}=0.$$

Любая точка $A\in W$ принадлежит дуге большого круга PAQ сферы S^n, пересекающего сферу S^{n-1} в некоторой точке M.

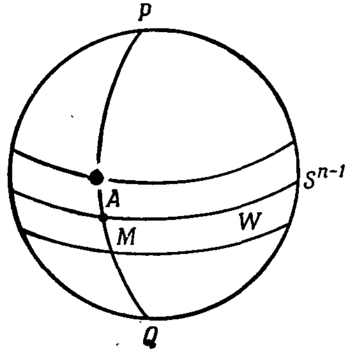

Рис. 5.

Обозначим через h непрерывное отображение прямого произведения $W\times I$ в S^n, которое ставит в соответствие каждой точке A из W и каждому числу $t\in I$ точку A' дуги PAM, для которой

$$MA'=(1-t)\,MA.$$

Роль отображения h аналогична роли отображения, используемого в определении стягиваемых пространств. Чтобы применить отображение h, удобнее рассматривать кубические сингулярные гомологии сферы S^n. Действительно, каждому сингулярному кубу f подпространства $W\subset S^n$ можно поставить в соответствие сингулярный куб $Df\in Q_{q+1}(W)$ по формуле

$$(Df)(t_1, \ldots, t_{q+1})=h[f(t_1, \ldots, t_q), t_{q+1}].$$

Отображение D можно расширить до гомоморфизма группы $Q_q(W)$ в $Q_{q+1}(W)$.

Из очевидных свойств функции h

$$h(A, 0) = A, \qquad h(A, 1) = M,$$
$$A \in W, \qquad M \in S^{n-1},$$

следует формула

$$\partial(Df) = D\partial f + (-1)^{q+1} f + (-1)^q f', \tag{127}$$

где f' — сингулярный куб

$$f'(t_1, \ldots, t_q) = h[f(t_1, \ldots, t_q), 1],$$

принадлежащий группе $Q_q(S^{n-1})$.

Формула (127) распространяется на цепи. В частности, если f — цикл, то

$$f = f' - (-1)^q \partial(Df), \tag{128}$$

где $f' \in Q_q(S^{n-1})$.

Так как цепи ∂u и ∂v, входящие в формулу (126′), являются циклами из $C_{q-1}(W)$, имеем равенства

$$\partial u = -\partial v = \sigma + \partial w, \tag{129}$$

где $\sigma \in C_{q-1}(S^{n-1})$, а $w \in C_q(W)$.

Докажем индукцией по n, что

$$H_q(S^n) = 0, \quad n \geqslant 1; \qquad q \neq 0, n. \tag{130}$$

Для $n = 1$ формула (130) была доказана. Предположим, что формула (130) справедлива для $n-1$, и докажем ее для n.

Если $q - 1 \neq n - 1$, т. е. $q \neq n$, то цикл $\sigma \in C_{q-1}(S^{n-1})$ является границей $\partial\rho$ элемента из $C_q(S^{n-1})$ и тем более из $C_q(W)$. Из формулы (129) следует тогда, что

$$\partial u = -\partial v = \partial(\rho + w),$$

или

$$\partial(u - \rho - w) = 0.$$

Поэтому $u - \rho - w$ есть цикл из $C_q(U \cup W)$.

Но циклы из $C_q(U \cup W)$ являются границами, так как $U \cup W$ совпадает с U и поэтому является стягиваемым пространством. Таким образом,

$$u = \rho + w + \partial a, \qquad a \in C_q(U).$$

Аналогично находим

$$v = -\rho - w + \partial b, \qquad b \in C_q(V).$$

Складывая два последних равенства, получаем

$$z = u + v = \partial(a + b).$$

Следовательно, любой цикл из $C_q(S^n)$ является границей. Это значит, что формула (130) справедлива для размерности n, если она справедлива для размерности $n-1$.

Остается вычислить группы $H_n(S^n)$. Для $n=1$ мы видели, что $H_1(S^1)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$. Докажем, что и для $n \geqslant 1$

$$H_n(S^n) \approx \mathbf{Z}. \tag{131}$$

Точнее говоря, докажем, что элементами группы $H_n(S^n)$ являются классы гомологий сингулярных цепей вида

$$\lambda(f-g), \tag{132}$$

где $\lambda \in \mathbf{Z}$, а f и g — два гомеоморфизма куба I^n на две взаимно дополнительные полусферы сферы S^n, например, на полусферы S^n_+, S^n_-, определенные соотношениями

$$S^n_+ : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \qquad x_{n+1} \geqslant 0,$$
$$S^n_- : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \qquad x_{n+1} \leqslant 0.$$

При этом окажется, что отображения f и g имеют одинаковые ограничения на границу куба I^n. Цепь $f-g$ называется *фундаментальным циклом* сферы. Ни одно ненулевое кратное этого цикла не является границей. Действительно, при $n=1$ это свойство было

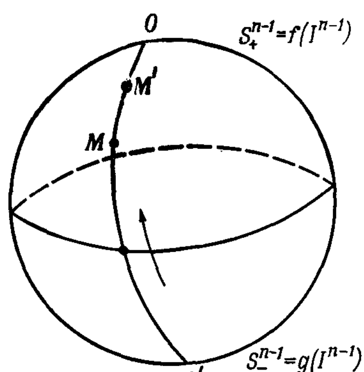

Рис. 6.

доказано. Предположим, что это свойство доказано для сферы S^{n-1} и докажем его для сферы S^n. Так как цепь σ из формулы (129) при $q=n$ является циклом из $C_{n-1}(S^{n-1})$, то по предположению индукции она будет иметь вид $\lambda(f-g)$. Здесь f и g — гомеоморфизмы куба I^{n-1} на полусферы S_+^{n-1}, S_-^{n-1}, у которых ограничения на границу куба I^{n-1} совпадают (рис. 6).

Обозначим через O полюс полусферы S_+^{n-1} и через O' — полюс полусферы S_-^{n-1} (см. рис. 6). Каждая точка M сферы S^{n-1}, отличная от точек O и O', лежит на вполне определенной дуге большого круга OMO'. Рассмотрим непрерывное отображение h прямого произведения $S^{n-1} \times I$ в S^{n-1}, которое ставит в соответствие каждой точке M, отличной от O или O', и каждому числу $t \in I = [0, 1]$ точку M' на дуге OMO', так что

$$\widehat{OM'} = (1-t)\,\widehat{OM}, \quad \text{если} \quad M \in S_+^{n-1},$$

$$\widehat{O'M'} = (1+t)\,\widehat{O'M}, \quad \text{если} \quad M \in S_-^{n-1}$$

(здесь через $\widehat{AB}$ обозначена длина дуги AB на сфере S^{n-1}).

Отображение h является непрерывной деформацией тождественного отображения i сферы S^{n-1} в отображение j, которое стягивает полусферу S_+^{n-1} в точку O и растягивает полусферу S_-^{n-1} до S^{n-1}, при этом граница полусферы S_-^{n-1} стягивается в точку O.

Из теоремы 10 следует, что $f-g$ и $\overline{\overline{j}}(f-g)$ являются двумя гомологичными циклами сферы S^{n-1}.

Но $\overline{\overline{j}}(f)$ — вырожденный сингулярный куб сферы S^{n-1}, так как jf отображает куб I^{n-1} в точку O. Отсюда следует, что класс гомологий сингулярного цикла

$$C = -\overline{\overline{j}}(g) = -jg$$

является образующей группы $\mathscr{H}_{n-1}(S^{n-1})$. Образ отображения C — сфера S^{n-1}, причем C переводит всю границу куба I^{n-1} в точку O.

Отсюда следует, что при $q=n$ цепь σ из формулы (129) можно привести к виду

$$\sigma = \rho C \qquad (\rho \in \mathbf{Z}). \tag{133}$$

Полусфера S_+^n гомеоморфна кубу I^n при гомеоморфизме F, который отображает границу куба I^n на сферу S^{n-1}. Можно, например, предположить, что гомеоморфизм F отображает грань $x_n = 0$ куба I^n на полусферу S_-^{n-1}, а остальную часть границы куба I^n на полусферу S_+^{n-1}. Отображение h, определенное выше, может быть продолжено до отображения H прямого произведения полусферы S_+^n и отрезка I в S_+^n следующим образом. Если A — точка полусферы S_+^n (рис. 7) и если P — центр этой полусферы, то дуга большого круга PA встречает сферу S^{n-1} в точке M. Определим $H(A, t)$. Пусть $M' = h(M, t)$ и A' — точка на дуге PM', для которой $\widehat{PA'} = \widehat{PA}$. Тогда положим $H(A, t) = A'$.

Формула

$$H(A, 1) = J(A)$$

определяет отображение J полусферы S_+^n в себя, переводящее подпространство S_+^{n-1} в точку O. Отсюда следует, что отображение JF куба I^n в сферу S^n отображает грань I^{n-1}, заданную уравнением

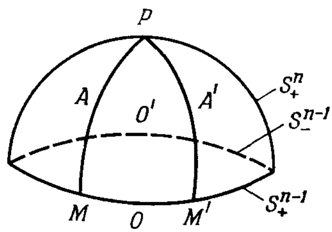

Рис. 7.

$x_n = 0$, на сферу S^{n-1}, а остальную часть границы куба I^n в точку O этой сферы. Следовательно, JF — сингулярный куб f сферы S^n, для которого

$$\partial f = (-1)^n (C - o). \tag{134}$$

Здесь через o обозначено постоянное отображение

$$o(I^{n-1}) = \{O\} \subset S^{n-1}.$$

Аналогично можно найти сингулярный куб g сферы S^n, образ которого лежит в S_-^n, так что

$$\partial g = (-1)^n (C - o).$$

Формулы (129), (133), (134) дают соотношение

$$\partial u = m\,\partial f + \partial w \qquad (m = \pm \rho),$$

если пренебречь вырожденным кубом o. Отсюда $\partial(u - mf - w) = 0$, т. е. цепь $u - mf - w$ является сингулярным циклом размерности n на полусфере S_+^n. Из теоремы 2 следует, что $u - mf - w$ является границей $\partial\alpha$. Следовательно, мы имеем соотношение

$$u = mf + w + \partial\alpha.$$

Аналогичным путем из формулы (129) находим соотношение

$$v = -mg - w + \partial\beta.$$

Складывая последние два соотношения, получаем

$$z = u + v = m(f - g) + \partial(\alpha + \beta).$$

Отображения f и g преобразуют куб I^n соответственно в S_+^n и S_-^n и переводят границу куба I^n в S^{n-1}. Для того чтобы цепь z была циклом, необходимо, чтобы ограничения отображений f и g на границу I^n совпадали.

Аналогичные рассуждения, проведенные для круга, показывают, что цикл $m(f-g)$ может быть границей, только если $m=0$. Таким образом, мы получаем, что группа $\mathscr{H}_n(S^n)$ образована классами гомологий вида $m(f-g)$, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами m, и формула (131) доказана.

Предположим, что справедливо соотношение

$$m(f-g)=\partial a. \tag{135}$$

Так как f, g принадлежат соответственно группам $C_n(U)$, $C_n(V)$ и, следовательно, $f-g \in C_n(S^n, \{U, V\})$, то из доказательства теоремы 9 следует, что соотношение (135) будет удовлетворено для некоторой цепи $a \in C_{n+1}(S^n, \{U, V\})$.

Такая цепь представляет собой разность

$$a=u-v$$

цепей $u \in C_{n+1}(U)$ и $v \in C_{n+1}(V)$. Из соотношения (135) следуют тогда две формулы

$$mf=\partial u+w,$$
$$mg=\partial v+w,$$

где цепь w принадлежит $C_n(S^n, U \cap V)$. Дифференцируя первую из этих формул и учитывая равенство (134), получаем

$$\partial w=\pm m(C-o).$$

Это соотношение не может выполняться при $m \neq 0$, так как ∂w принадлежит $C_n(U \cap V)$, а C не принадлежит $C_n(U \cap V)$.

Формулы (130) и (131) вместе с общим результатом, установленным нами в связи с группой $H_0(\mathscr{T})$ связного пространства, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 11. *Группы гомологий сферы S^n ($n \geqslant 1$) задаются формулами*

$$H_q(S^n)=0 \quad (q \neq 0 \ n); \ H_0(S^n) \approx H_n(S^n) \approx \mathbf{Z}.$$

Обозначим через D^n шар размерности n, который определяется в евклидовом пространстве E^n неравенством

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1 \tag{136}$$

и границей которого является сфера S^{n-1}. Шар D^n является стягиваемым пространством, следовательно, его группы гомологий тривиальные, за исключением группы $H_0(D^n) \approx \mathbf{Z}$.

Учитывая предыдущую теорему, находим, что точная последовательность гомологий пары (D^n, S^{n-1}), т. е.

$$\xrightarrow{\partial} H_q(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(D^n) \xrightarrow{j_*} H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{q-1}(D^n) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_0(D^n),$$

записывается для $q=n$ следующим образом:

$$0 \xrightarrow{j_*} H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} 0,$$

откуда следует изоморфизм

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \approx \mathbf{Z}. \qquad (137)$$

Для $q \neq n$, 0 имеем точную последовательность

$$0 \xrightarrow{j_*} H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} 0,$$

показывающую, что группа $H_q(D^n, S^{n-1})$ тривиальная, так как образом отображения j_* является 0, а ядром ∂ — группа $H_q(D^n, S^{n-1})$.

Группа $H_0(D^n, S^{n-1})$ также тривиальна, так как любая цепь из D^n размерности нуль является границей, к которой присоединяется, быть может, цепь из S^{n-1}. Итак, мы получаем следующий результат:

Группы гомологий пары (D^n, S^{n-1}) тривиальные, за исключением группы $H_n(D^n, S^{n-1})$, которая изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

Рассмотрим теперь два концентрических шара

$$D^n: x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1,$$

$$D'^n: x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \rho \qquad (\rho < 1)$$

и вычислим группы гомологий шарового слоя $\Gamma^n = D^n - D'^n$. Проектированием из общего центра шаров O из любого цикла, принадлежащего $C_q(\Gamma^n)$, получаем цикл на границе S^{n-1} шара D^n. Если $q \neq 0$, $n-1$, то оба эти цикла будут границами, следовательно,

$$H_q(\Gamma^n) = 0 \qquad (q \neq 0,\ n-1). \qquad (137')$$

Сингулярный куб σ: $I^{n-1} \longrightarrow \Gamma^n$, образ которого принадлежит S^{n-1} и образует ее фундаментальный цикл S^{n-1}, является циклом из $C_{n-1}(\Gamma^n)$. Однако этот цикл не является границей, так как в противном случае

$$\sigma = \partial u, \quad u \in C_n(\Gamma^n),$$

и сингулярный куб σ в то же время был бы границей проекции цепи u на S^{n-1} из центра O. Поскольку любой цикл из $C_{n-1}(\Gamma^n)$ гомологичен циклу из $C_{n-1}(S^{n-1})$, мы получаем следующий результат:

$$H_{n-1}(\Gamma^n) \approx \mathbf{Z}. \qquad (137'')$$

14. Теорема о вырезании

Пусть $\mathcal{U}$ — подпространство топологического пространства $\mathcal{T}$. Объединение D всех открытых множеств из $\mathcal{T}$, содержащихся в $\mathcal{U}$, называется *внутренностью* множества $\mathcal{U}$ в $\mathcal{T}$. Если A — подмножество пространства $\mathcal{T}$, замыкание $\bar{A}$ которого содержится в D, то действие, посредством которого осуществляется переход от пары $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ к паре $(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$, называется *вырезанием*.

Теорема 12. *Группы гомологий пары $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ инвариантны относительно вырезания.*

Нужно доказать, что при любой размерности q группы $H_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ и $H_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$ изоморфны. Из условия $\bar{A} \subset D$ следует, что множества D и $\mathcal{T} - \bar{A}$ образуют открытое покрытие $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$, а D и $(\mathcal{T} - \bar{A}) \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} - \bar{A}$ образуют открытое покрытие $\mathcal{B}$ подпространства $\mathcal{U}$. В процессе доказательства теоремы 9 было показано, что любая цепь $c \in C_q(\mathcal{T})$, граница которой принадлежит $C_{q-1}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$, имеет вид $c' + \partial b$, где $c' \in C_q(\mathcal{T}, \mathcal{A})$. Цепь c' в свою очередь разлагается в сумму двух цепей

$$c' = d + \alpha,$$

причем

$$d \in C_q(D), \quad \alpha \in C_q(\mathcal{T} - \bar{A}).$$

Следовательно,

$$c = d + \alpha + \partial b. \tag{138}$$

Рассмотрим теперь включение i — гомоморфизм группы $C_q(\mathcal{T} - A)$ в группу $C_q(\mathcal{T})$, который ставит в соответствие каждой цепи, образованной сингулярными симплексами размерности q, образы которых лежат в $\mathcal{T} - A$, ту же цепь, которая рассматривается как элемент группы $C_q(\mathcal{T})$. Гомоморфизм i отображает подгруппу $C_q(\mathcal{U} - A)$ группы $C_q(\mathcal{T} - A)$ в подгруппу $C_q(\mathcal{U})$, и поэтому индуцирует гомоморфизм i_* факторгруппы

$$C_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A) = C_q(\mathcal{T} - A)/C_q(\mathcal{U} - A)$$

в факторгруппу $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U}) = C_q(\mathcal{T})/C_q(\mathcal{U})$. Цикл из $C_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$ является классом элемента $c \in C_q(\mathcal{T} - A)$, граница которого ∂c содержится в $C_{q-1}(\mathcal{U} - A)$. Образом элемента c при гомоморфизме i будет тот же элемент c и граница его принадлежит $C_{q-1}(\mathcal{U})$. Следовательно, i_* переводит циклы из $C_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$ в циклы из $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$.

Границей в $C_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$ является класс элемента вида ∂u, где u — цепь, содержащаяся в $C_{q+1}(\mathcal{T} - A)$. Образ $i(\partial u) = \partial u$ будет границей элемента $u \in C_{q+1}(\mathcal{T})$. Мы видим, что i_* переводит границы из $C_q(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$ в границы из $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Следовательно, i_* индуцирует гомоморфизм φ группы гомологий $H_q(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$ пары $(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$ в группу гомологий $H_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ пары $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Покажем, что это изоморфизм.

1. φ — мономорфизм. Действительно, рассмотрим цикл $c+C_q(\mathcal{U}-A)$ из $C_q(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$. Тогда

$$\partial c \in C_{q-1}(\mathcal{U}-A).$$

Предположим, что

$$i_*[c+C_q(\mathcal{U}-A)] = c+C_q(\mathcal{U})$$

— граница в группе $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. В этом случае имеем соотношение

$$c = \partial u, \quad u \in C_{q+1}(\mathcal{T}).$$

Из формул (138) следует, что u имеет вид

$$u = d + \alpha + \partial b,$$

где

$$d \in C_{q+1}(D) \subset C_{q+1}(\mathcal{U}), \quad \alpha \in C_{q+1}(\mathcal{T}-\bar{A}) \subset C_{q+1}(\mathcal{T}-A).$$

Поэтому

$$c = \partial u = \partial d + \partial \alpha. \tag{139}$$

Из включения $d \in C_{q+1}(D)$ следует, что $\partial d \in C_q(D)$, а из равенства $\partial d = c - \partial\alpha$, что $\partial d \in C_q(\mathcal{T}-A)$, так как c и $\partial\alpha$ принадлежат $C_q(\mathcal{T}-A)$. Следовательно, ∂d является цепью из

$$C_q(D) \cap C_q(\mathcal{T}-A) \subset C_q(D-A) \subset C_q(\mathcal{U}-A),$$

поскольку образы симплексов цепи ∂d должны одновременно принадлежать и $C_q(D)$, и $C_q(\mathcal{T}-A)$. Из формулы (139) следует

$$c + C_q(\mathcal{U}-A) \in \partial C_{q+1}(\mathcal{T}-A) + C_q(\mathcal{U}-A),$$

т. е. класс цепи c является границей в $C_q(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$. Таким образом, мы показали, что прообраз границы из $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ при отображении φ является границей из $C_q(\mathcal{T}-A, \mathcal{U}-A)$, и тем самым доказали, что φ — мономорфизм.

2. φ — эпиморфизм. Рассмотрим цикл

$$c + C_q(\mathcal{U})$$

из группы $C_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Для него

$$\partial c \in C_{q-1}(\mathcal{U}).$$

Из формулы (138) следует

$$\partial d + \partial\alpha \in C_{q-1}(\mathcal{U})$$

и, так как ∂d — элемент группы $C_{q-1}(D) \subset C_{q-1}(\mathcal{U})$,

$$\partial\alpha \in C_{q-1}(\mathcal{U}).$$

С другой стороны, $\alpha \in C_q(\mathcal{T} - \bar{A}) \subset C_q(\mathcal{T} - A)$, и поэтому $\partial\alpha \in C_{q-1}(\mathcal{T} - A)$. Таким образом,

$$\partial\alpha \in C_{q-1}(\mathcal{U} - A).$$

Отсюда следует, что $\alpha + C_q(\mathcal{U} - A)$ — цикл из группы $C_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$. Образом при отображении i_* этого цикла будет

$$i(\alpha) + C_q(\mathcal{U}) = \alpha + C_q(\mathcal{U}) = c - d - \partial b + C_q(\mathcal{U}) = c - \partial b + C_q(\mathcal{U}),$$

и, следовательно, отображение φ переводит класс гомологий цикла $\alpha + C_q(\mathcal{U} - A)$ в класс гомологий цикла $C + C_q(\mathcal{U})$. Значит, любой элемент из $H_q(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ является образом при отображении φ некоторого элемента из $H_q(\mathcal{T} - A, \mathcal{U} - A)$. Итак, φ — эпиморфизм. Теорема 11 доказана.

15. Группы гомологий вещественного проективного пространства P^n

В качестве приложения теоремы о вырезании вычислим группы гомологий проективного пространства P^n. Мы видели, что это пространство может быть определено как факторпространство единичной сферы S^n из E^{n+1} по отношению R, устанавливающему эквивалентность диаметрально противоположных точек сферы S^n. Каждая точка из P^n представляет собой пару точек, из которых по крайней мере одна принадлежит полусфере

$$S^n_+ : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \ x_{n+1} \geqslant 0.$$

Точка $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ из S^n_+ эквивалентна другой точке x' из S^n_+, только если $x_{n+1} = 0$, и в этом случае x и x' — диаметрально противоположные точки сферы

$$S^{n-1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1, \ x_{n+1} = 0.$$

Отсюда следует, что проективное пространство P^n может быть определено так же, как факторпространство полусферы S^n_+ по отношению, отождествляющему диаметрально противоположные точки из S^{n-1}.

Запишем точную последовательность гомологий пары $(P^n, \mathcal{U}^n)$, где $\mathcal{U}^n = S^n_+ - S^{n-1}$. Так как $\mathcal{U}^n$ — стягиваемое пространство, то

$$H_q(\mathcal{U}^n) = 0 \ (q > 0), \ H_0(\mathcal{U}^n) \approx \mathbf{Z}. \tag{140}$$

Поэтому точная последовательность гомологий пары $(P^n, \mathcal{U}^n)$

$$\ldots \to H_q(\mathcal{U}^n) \xrightarrow{i_*} H_q(P^n) \xrightarrow{j_*} H_q(P^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(\mathcal{U}^n) \to \ldots$$
$$\ldots \to H_1(\mathcal{U}^n) \to H_1(P^n) \to H_1(P^n, \mathcal{U}^n) \to H_0(\mathcal{U}^n) \to H_0(P^n)$$

дает точные последовательности

$$0 \xrightarrow{i_*} H_q(P^n) \xrightarrow{j_*} H_q(P^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\partial} 0 \quad (q > 1), \tag{141}$$

$$0 \xrightarrow{i_*} H_1(P^n) \xrightarrow{j_*} H_1(P^n, \mathcal{U}^n) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z}. \tag{142}$$

Из точной последовательности (141) немедленно следуют гомоморфизмы

$$H_q(P^n) \approx H_q(P^n, \mathcal{U}^n) \quad (q > 1). \tag{143}$$

Из точной последовательности (142) следует, что группа $H_1(P^n)$ изоморфна подгруппе группы $H_1(P^n, \mathcal{U}^n)$, так как ядро отображения j_* тривиальное. Однако можно заметить, что j_* — эпиморфизм, так как если бы его образ не совпадал с группой $H_1(P^n, \mathcal{U}^n)$, то образ ∂ имел бы в $\mathbf{Z}$ ненулевые элементы, поскольку ядро ∂ совпадает с образом j_*. Но тогда последний гомоморфизм i в последовательности (142) имел бы нетривиальное ядро и образ гомоморфизма i содержал бы только периодические элементы, что невозможно. Таким образом мы имеем изоморфизм (143) и при $q = 1$, т. е.

$$H_q(P^n) \approx H_q(P^n, \mathcal{U}^n) \qquad (q \geqslant 1). \tag{143'}$$

Мы свели вопрос к вычислению групп относительных гомологий пары $(P^n, \mathcal{U}^n)$. Из теоремы о вырезании следует, что если Δ^n — открытая шапочка полусферы S^n_+ с полюсом C в точке $(0, \ldots, 0, 1)$, определенная, например, соотношениями

$$\Delta^n : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \quad x_{n+1} > \frac{1}{2},$$

то

$$H_q(P^n, \mathcal{U}^n) \approx H_q(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n). \tag{144}$$

Пространство $\mathcal{U}^n - \Delta^n$ гомеоморфно сферическому поясу, следовательно, его гомологии заданы формулами (137′), (137″). В силу этого из точной последовательности групп гомологий пары $(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n)$ получаем формулы, аналогичные (143),

$$H_q(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n) \approx H_q(P^n - \Delta^n), \tag{144'}$$

для размерностей $q \neq n - 1$, n. Кроме того, мы устанавливаем, что $H_1(P^n - \Delta^n)$ изоморфна подгруппе группы $H_1(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n)$. Из изоморфизмов (143), (144), (144′) следует

$$H_q(P^n) \approx H_q(P^n - \Delta^n) \qquad (q \neq n, \ n - 1). \tag{144''}$$

Таким образом, вопрос сведен к вычислению групп $H_q(P^n - \Delta^n)$. Воспользуемся кубическими сингулярными гомологиями. Пусть $f : I^q \to P^n - \Delta^n$ есть сингулярный куб пространства $P^n - \Delta^n$. Обозначим через h отображение

$$(P^n - \Delta^n) \times I \to P^n - \Delta^n,$$

определенное следующим образом. Каждая точка M из $S^n - \Delta^n$ лежит на четверти дуги большого круга $CPMQ$ сферы S^n, где Q — точка на S^{n-1} (рис. 8), а P — точка на границе шапочки Δ^n. По определению $h(M, t)$ есть точка M' дуги PQ, для которой

$$M'Q = (1-t)\, MQ.$$

Следовательно,

$$h(M, 0) = M, \quad h(M, 1) = Q, \tag{145}$$

а если M лежит на сфере S^{n-1}, то для любого числа $t \in I$ имеем

$$h(M, t) = M. \tag{146}$$

Отображение h, обладающее этими свойствами, называется ретракцией (стягиванием путем деформации) пространства $P^n - \Delta^n$

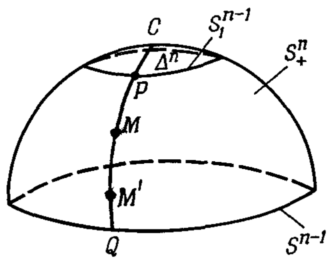

Рис. 8.

на подпространство S^{n-1}. Из того, что ретракция h не переставляет точки из S^{n-1}, следует, что h индуцирует непрерывное отображение H прямого произведения $(P^n - \Delta^n) \times I$ в $P^n - \Delta^n$, обладающее свойствами (145), для которого произвольная точка $u \in P^{n-1}$ удовлетворяет соотношению

$$H(M, t) = M. \tag{147}$$

Обозначим через P^{n-1} подпространство пространства P^n — канонический образ сферы $S^{n-1} \subset S^n$, т. е. подпространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек из S^{n-1}. Каждому сингулярному кубу

$$f : I^q \to P^n - \Delta^n$$

поставим в соответствие сингулярный куб

$$\mathcal{D}f : I^{q+1} \to P^n - \Delta^n,$$

определенный формулой

$$\mathcal{D}f(x_1, \ldots, x_{q+1}) = H[f(x_2, \ldots, x_{q+1}), x_1]. \tag{148}$$

Из соотношений (145), (147) и из определения границы сингулярного куба следует, что

$$\partial \mathcal{D} f = -\mathcal{D}\, \partial f + (f - g),$$

где g — сингулярный куб, заданный соотношением

$$g(x_1, \ldots, x_q) = H[f(x_1, \ldots, x_q), 1].$$

Следовательно, g реализуется проектированием образа куба f из полюса C на пространство P^{n-1}. В результате получается образ, лежащий в P^{n-1}, следовательно, $g \in Q_q(P^{n-1})$. Для произвольной цепи c из $Q_q(P^n - \Delta^n)$ следует соотношение

$$\partial \mathcal{D} c + \mathcal{D} \partial c = c - c', \tag{149}$$

где c' — проекция цепи c из центра C на P^{n-1}, и потому

$$c' \in Q_q(P^{n-1}).$$

Если c — цикл, то формула (149) принимает вид

$$c' = c - \partial \mathcal{D} c. \tag{150}$$

Отсюда следует, что с каждым циклом $c \in Q_q(P^n - \Delta^n)$ можно ассоциировать цепь $c' \in Q_q(P^{n-1})$. Цепь c' также является циклом, ибо, дифференцируя (150), находим $\partial c' = \partial c = 0$. Отображение $c \to c'$ линейное и, следовательно, является гомоморфизмом группы циклов $\Gamma_q(P^n - \Delta^n)$ в группу циклов $\Gamma_q(P^{n-1})$. Если c' — граница, т. е. $c' = \partial u$, $u \in Q_{q+1}(P^{n-1})$, то из равенства (150) следует

$$c' = \partial u + \partial \mathcal{D} u.$$

Поэтому c' является границей в $Q_q(P^n - \Delta^n)$.

Отсюда следует, что гомоморфизм включения

$$i: Q_q(P^{n-1}) \to Q_q(P^n - \Delta^n) \tag{151}$$

индуцирует эпиморфизм группы $\mathcal{H}_q(P^{n-1})$ на группу $\mathcal{H}_q(P^n - \Delta^n)$.

Предположим, что c' — граница в $Q_q(P^n - \Delta^n)$, например $c' = \partial u$. Применяя формулу (149) к цепи u, получаем $\partial \mathcal{D} u + \mathcal{D} c' = u - u'$, где u' — цепь из $Q_{q+1}(P^{n-1})$. Дифференцируя последнее соотношение, находим

$$c' = \partial(u' + \mathcal{D} c').$$

Но если $c' \in Q_q(P^{n-1})$, то $\mathcal{D} c'$ является вырожденной цепью в силу формулы (148), определяющей оператор $\mathcal{D}$. Отсюда следует, что цикл c' принадлежит классу 0 группы гомологий $\mathcal{H}_q(P^{n-1})$. Таким образом, мы показали, что гомоморфизм (151) индуцирует изоморфизм групп гомологий

$$\mathcal{H}_q(P^{n-1}) \approx \mathcal{H}_q(P^n - \Delta^n). \tag{152}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (144″), находим

$$\mathcal{H}_q(P^n) \approx \mathcal{H}_q(P^{n-1}) \qquad (q \neq n,\ n-1). \tag{153}$$

Заметим, что из формулы (153) для $q \geqslant m+1$ и $m=n$ следует

$$\mathscr{H}_q(P^m) \approx \mathscr{H}_q(P^{m-1});$$

затем из формулы (153) для $q \geqslant m+1$, $n=m-1$ находим

$$\mathscr{H}_q(P^{m-1}) \approx \mathscr{H}_q(P^{m-2}).$$

Продолжая таким же образом, находим, наконец,

$$\mathscr{H}_q(P^m) = \mathscr{H}_q(P^1) \qquad (q > m).$$

Но одномерное проективное пространство P^1 гомеоморфно окружности S^1. Действительно, отождествляя в S^1 диаметрально противоположные точки, получаем пространство, гомеоморфное полуокружности, у которой отождествлены концы. Поэтому $\mathscr{H}_{m+1}(P^1) = 0$, откуда следует, что

$$\mathscr{H}_q(P^m) = 0 \qquad (q > m). \tag{154}$$

Рассмотрим точную последовательность пары $(P^n - \Delta^n, \mathscr{U}^n - \Delta^n)$ для размерностей $q=n-1$, n. Учитывая формулы (137′), (137″), (144), (152), (154), получаем точные последовательности

$$0 \to \mathscr{H}_n(P^n - \Delta^n, \mathscr{U}^n - \Delta^n) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}_{n-1}(\mathscr{U}^n - \Delta^n) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \mathscr{H}_{n-1}(P^n - \Delta^n) \xrightarrow{\gamma} \mathscr{H}_{n-1}(P^n - \Delta^n, \mathscr{U}^n - \Delta^n) \to 0, \tag{155}$$

$$0 \to \mathscr{H}_n(P^n) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{Z} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1}) \xrightarrow{\gamma} \mathscr{H}_{n-1}(P^n) \to 0, \tag{156}$$

где группа $\mathfrak{Z}$ изоморфна $\mathbf{Z}$. Из последовательностей (155) и (156) следует, что группа $\mathscr{H}_n(P^n)$ изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{Z}$, следовательно, $\mathscr{H}_n(P^n)$ либо тривиальна, либо изоморфна группе $\mathbf{Z}$. В первом случае β — мономорфизм, а γ — всегда эпиморфизм. Следовательно, в первом случае группа $\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1})$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathfrak{Z}$ и поэтому $\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1})$ изоморфна $\mathfrak{Z}$. Если $\mathscr{H}_n(P^n)$ изоморфна группе $\mathfrak{Z}$, то образ α будет подгруппой группы $\mathfrak{Z}$, изоморфной группе $\mathfrak{Z}$. Следовательно, ядро гомоморфизма β будет нетривиальным. Но группа $\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1})$ не содержит периодических элементов, так как она либо нулевая, либо изоморфна $\mathfrak{Z}$. Таким образом, ядром гомоморфизма β должна была быть группа $\mathfrak{Z}$. В этом случае образ β будет нулем, а образом α будет вся группа $\mathfrak{Z}$.

Так как γ — эпиморфизм и его ядро является нулем, то

$$\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1}) \approx \mathscr{H}_{n-1}(P^n). \tag{157}$$

Таким образом, возможны два случая:

$$\mathscr{H}_n(P^n) = 0, \qquad \mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1}) \approx \mathbf{Z}; \tag{158}$$

$$\mathscr{H}_n(P^n) \approx \mathbf{Z}, \qquad \mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1}) \approx \mathscr{H}_{n-1}(P^n). \tag{159}$$

Из точной последовательности (155) следует, что во втором из этих случаев, когда α — изоморфизм, образующей циклической группы $\mathcal{H}_n(P^n) \approx \mathcal{H}_n(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n)$ является класс гомологий цепи c из $Q_n(P^n - \Delta^n)$, граница ∂c которой лежит в $Q_{n-1}(\mathcal{U}^n - \Delta^n)$. При этом класс ∂c является образующей группы $Q_{n-1}(\mathcal{U}^n - \Delta^n)$.

Но, как мы знаем из § 13, образующая группы гомологий $\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{U}^n - \Delta^n)$ сферического пояса $\mathcal{U}^n - \Delta^n$ соответствует фундаментальному циклу σ границы S_1^{n-1} этого пояса, где S_1^{n-1} в нашем случае является сферой

$$S_1^{n-1}: x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Однако в качестве фундаментального цикла σ сферы S_1^{n-1} можно взять сингулярный куб, который представляет собой непрерывное отображение куба I^{n-1} в S_1^{n-1}, переводящее границу куба в некоторую точку из S_1^{n-1}.

Если цепь c $(\partial c = \sigma)$ рассматривать как элемент группы $Q_n(P^n)$, то в силу изоморфизмов, заданных включением

$$Q_n(P^n - \Delta^n, \mathcal{U}^n - \Delta^n) \subset Q^n(P^n, \mathcal{U}^n)$$

и проекцией

$$Q_n(P^n) \longrightarrow Q_n(P^n, \mathcal{U}^n),$$

она будет отличаться от цикла $z \in Q_n(P^n)$ на элемент $\alpha \in Q_n(\mathcal{U}^n)$. То есть

$$c = z + \alpha, \quad \alpha \in Q_n(\mathcal{U}^n), \quad \partial z = 0. \tag{160}$$

Отсюда следует

$$\sigma = \partial c = \partial \alpha. \tag{161}$$

Рассмотрим сингулярный куб $f \in Q_n(\mathcal{U}^n)$, заданный непрерывным отображением куба I^n на замкнутый шар $\overline{\Delta}^n$, при котором грань $x_n = 0$ переходит в S_1^{n-1}, а остальная часть границы I^n переходит в точку. Имеем $\partial f = \sigma = \partial \alpha$, так как σ — сингулярный куб, заданный непрерывным отображением I^{n-1} в $S_1{}^{n-1}$, переводящим границу I^{n-1} в некоторую точку из $S_1{}^{n-1}$.

Поэтому $f - \alpha$ есть цикл из $Q_n(\mathcal{U}^n)$. Но $\mathcal{U}^n$ — стягиваемое пространство, следовательно, $f - \alpha$ есть граница $\partial\beta$ в $Q_n(\mathcal{U}^n)$. Тогда имеем

$$\alpha = f - \partial\beta.$$

Из формулы (160) находим вид цикла z, класс гомологий которого образует группу $\mathcal{H}_n(P^n)$:

$$z = c - f + \partial\beta. \tag{162}$$

Так как цепь c принадлежит $Q_n(P^n - \Delta^n)$, то к ней можно применить оператор $\mathcal{D}$. Из формул (149) и (161) следует, что

$$c = c' + \partial\mathcal{D}c + \mathcal{D}\sigma, \qquad c' \in Q_n(P^{n-1}). \tag{163}$$

Если написать формулу (149) для цикла σ, то получим

$$\partial\mathscr{D}\sigma = \sigma - \sigma', \tag{164}$$

где σ' — проекция σ на P^{n-1} из точки C. Дифференцируя соотношение (163) и учитывая, что $\partial c = \sigma$, находим

$$\partial c' = \sigma'. \tag{165}$$

Из формул (162), (163), (165) следует, что любой цикл $z \in Q_n(P^n)$ имеет вид

$$z = (\mathscr{D}\sigma - f) + \partial u + \rho c', \quad \rho \in \mathbf{Z}. \tag{166}$$

Обозначим через c'' проекцию цепи c из центра C на сферу S_1^{n-1}. Тогда для c'' получим формулу, аналогичную формуле (149), в которую входит та же цепь c', так как c и c'' имеют одну и ту же проекцию на P^{n-1}:

$$c'' = c' + \partial\mathscr{D}c'' + \mathscr{D}\partial c''.$$

Выразив отсюда c' и подставив в формулу (166), получим

$$z = \rho\,[\mathscr{D}(\sigma - \partial c'') - f + c''] + \partial v. \tag{167}$$

Теперь в качестве фундаментального цикла сферы S_1^{n-1} вместо σ возьмем цикл $\tau = \sigma - \partial c''$ и обозначим через g цепь $f - c''$, тогда

$$\partial g = \partial f - \partial c'' = \sigma - \partial c'' = \tau. \tag{168}$$

Формула (167) может быть записана следующим образом:

$$z = \rho\,(\mathscr{D}\tau - g) + \partial v \qquad (\rho \text{ — целое}). \tag{168$'$}$$

Следовательно, если группа гомологий $\mathscr{H}_n(P^n)$ не тривиальна, то ее классы представлены цепями вида (168′), где τ — фундаментальный цикл сферы S_1^{n-1}, а g — сингулярная цепь шара Δ^n, удовлетворяющая условию (168).

Обозначим через ω_n каноническое отображение сферы S^n на проективное пространство P^n, т. е. отображение, которое ставит в соответствие каждой точке из S^n пару, образованную этой точкой и точкой, симметричной ей относительно центра сферы. Рассмотрим n-мерный сингулярный куб φ сферы S^n, заданный гомоморфизмом куба I^n на полусферу S_+^n. Тогда $\bar{\omega}_n(\varphi) = \omega_n\varphi$ является сингулярным кубом проективного пространства P^n. Докажем индукцией по n, что $\mathscr{H}_n(P^n) = 0$ для четных n и $\mathscr{H}_n(P^n) \approx \mathbf{Z}$ для нечетных n; $\bar{\omega}_n(\varphi)$ — цикл и класс гомологий цикла $\bar{\omega}_n(\varphi) = \omega_n\varphi$ является образующей группы $\mathscr{H}_n(P^n)$.

При $n = 1$ пространством P^n является окружность S^1 и мы видели, что $\mathscr{H}_1(S^1)$ — группа, изоморфная группе $\mathbf{Z}$; фундаментальный цикл окружности получается непрерывным отображением отрезка $I = [0, 1]$ на S^1, переводящим концы 0 и 1 отрезка I в одну и ту же точку окружности S^1. Если P^1 получается из S^1 отождествлением диаметрально противоположных точек A и B (рис. 9), то композиция непрерывного отображения φ отрезка I на дугу AB, которое переводит точки 0, 1 в A и B, и отображения ω_1, отождествляющего точки A и B, дает непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на образ S'^1 отображения ω_1. Эта композиция является фундаментальным циклом S'^1, так как при отображении $\omega_1\varphi$ граница $\{0, 1\}$ отрезка I переводится в одну точку из S'^1.

Утверждение, которое мы хотим доказать, справедливо для $n = 0$, так как сфера S^0 образована двумя точками $(1, -1)$

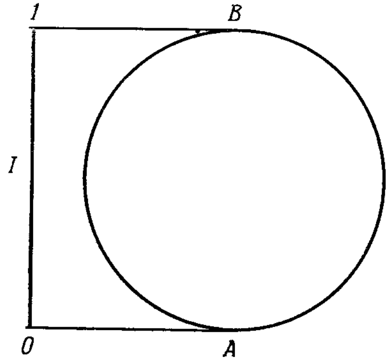

Рис. 9.

вещественной прямой, а проективное пространство P состоит из одной точки. Следовательно, $\mathscr{H}_0(P^0) \approx \mathbf{Z}$ и фундаментальный цикл P^0 получается наложением отображения $I^0 \to \{1\}$ на каноническое отображение $\{1, -1\} \to P^0$.

Предположим, что сформулированное выше свойство справедливо для проективного пространства P^{n-1}, и докажем его справедливость для пространства P^n. Мы должны рассмотреть два случая:

1. n — четное число, следовательно, $n-1$ — нечетное. Цикл σ' в формуле (164) имеет вид $2\overline{\omega}_{n-1}(\varphi)$, так как он является образом при отображении ω_n проекции цепи σ из точки C (рис. 8), а σ является фундаментальным циклом сферы S_1^{n-1}. Действительно, обозначим через $\bar{\sigma}$ цепь, симметричную цепи σ относительно центра сферы S^{n-1}. Цикл $\bar{\sigma}$ гомологичен σ, так как он получается из σ вращением (симметрия относительно точки в n-мерном евклидовом пространстве четного числа измерений является вращением). Но вращение может быть непрерывно деформировано в тождественное преобразование. Поэтому циклы σ и $\bar{\sigma}$ определяют один и тот же класс гомологий сферы S^{n-1}. Отсюда получаем, что $\overline{\omega}_{n-1}(\sigma) = 2\overline{\omega}_{n-1}$. В соответствии с предположением индукции $2\overline{\omega}_{n-1}(\varphi)$ является циклом и не является границей в S^{n-1}. Следовательно, соотноше-

ние (165) невозможно. Итак, случай (159) невозможен, если n — четное число. Это означает, что $\mathscr{H}_n(P^n)=0$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда n — нечетное число. В этом случае $\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1})$ — тривиальная группа. Из точной последовательности (156) следует, что ядро гомоморфизма β, т. е. образ эпиморфизма α, совпадает с $\mathbf{Z}$ и, следовательно, $\mathscr{H}_n(P^n)\approx\mathbf{Z}$. Отсюда также находим, что

$$\mathscr{H}_{n-1}(P^n)=0. \tag{169}$$

Из формулы (168') следует, что группа $\mathscr{H}_n(P^n)$ порождается классом элемента вида $\mathscr{D}\tau-g$, который, как легко проверить, гомологичен циклу $\overline{\omega}_n(\varphi)$.

В результате получаем следующие формулы:

$$\mathscr{H}_n(P^n)=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четное},\\ \mathbf{Z}, & \text{если } n \text{ нечетное}.\end{cases} \tag{170}$$

В случае когда n — нечетное, мы нашли, кроме того,

$$\mathscr{H}_{n-1}(P^n)=0. \tag{171}$$

Вычислим группу гомологий $\mathscr{H}_{n-1}(P^n)$ в случае, когда n — четное число. Из точной последовательности (156) следует, что $\mathscr{H}_{n-1}(P^n)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathscr{H}_{n-1}(P^{n-1})\approx\mathbf{Z}$ по ее подгруппе, которая в свою очередь изоморфна $\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что $\mathscr{H}_{n-1}(P^n)$ является нулевой группой или циклической группой конечного порядка. Поскольку гомоморфизм γ является эпиморфизмом, из фундаментального цикла пространства P^{n-1} или пары $P^n-\Delta^n$, мы получаем образующую группы $\mathscr{H}_{n-1}(P^n)$.

Из рассуждений, проведенных выше, следует, что фундаментальный цикл пространства P^{n-1} получается проектированием из C на P^{n-1} сингулярного куба сферы S_1^{n-1}, покрывающего полусферу $(S_1^{n-1})_+$ этой сферы. Если эту цепь в P^{n-1} умножить на два, то получим цепь σ', которую мы встречали выше. А цепь σ' в силу формулы (164) и равенства $\partial f=\sigma$ является границей цепи $f-\mathscr{D}\sigma$. Отсюда следует, что для четного n

$$\mathscr{H}_{n-1}(P^n)\approx\mathbf{Z}_2, \tag{172}$$

где через $\mathbf{Z}_2$ мы обозначили абелеву группу с двумя элементами 0 и α, где $2\alpha=0$, следовательно, $\mathbf{Z}_2$ — циклическая группа второго порядка.

Собирая вместе формулы (153), (154), (170), (171), (172), получаем следующий результат.

Теорема 13. *Группы гомологий вещественных проективных пространств P^n задаются формулами*

$$\mathscr{H}_q(P^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } q > n, \\ \mathbf{Z}_2, & \text{если } q = 2p - 1 \leqslant n - 1, \\ 0, & \text{если } q = 2p \leqslant n - 1, \end{cases}$$

$$\mathscr{H}_n(P^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное}, \\ \mathbf{Z}, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

В самом деле, из формулы (153) при $q < n$ следует

$$\mathscr{H}_q(P^n) \approx \mathscr{H}_q(P^{q+1}).$$

Причем мы пользовались формулой (171) или (172) в зависимости от четности q.

16. Регулярные покрытия

Рассмотрим топологическое пространство $\mathscr{T}$, снабженное открытым покрытием конечного типа.

Назовем *вершинами* покрытия его минимальные элементы, т. е. множества, не содержащие других множеств этого покрытия.

Открытое покрытие $\mathscr{B}$ назовем *нормальным*, если любое конечное пересечение множеств из $\mathscr{B}$ принадлежит $\mathscr{B}$ и каждое множество из $\mathscr{B}$ содержит конечное число вершин.

Нормальное покрытие можно построить, исходя из произвольного покрытия конечного типа $\mathscr{A}$. Для этого достаточно взять в качестве $\mathscr{B}$ все конечные пересечения максимальных элементов покрытия $\mathscr{A}$. Покрытие $\mathscr{B}$ будет покрытием конечного типа, так как любое множество из $\mathscr{B}$ пересекает конечное число максимальных множеств из $\mathscr{A}$. В покрытии конечного типа каждое множество содержит вершину и не может содержать бесконечного множества вершин. Первое требование в определении нормального покрытия для покрытия $\mathscr{B}$ также выполнено.

Будем говорить, что нормальное покрытие $\mathscr{B}$ является *регулярным*, если все множества покрытия $\mathscr{B}$ являются стягиваемыми подпространствами пространства $\mathscr{T}$.

Со всяким нормальным покрытием $\mathscr{B}$ можно ассоциировать симплициальный комплекс $K(\mathscr{B})$ следующим образом: рассмотрим множество M вершин покрытия $\mathscr{B}$ и будем говорить, что конечное подмножество σ множества M является симплексом, если вершины из σ принадлежат одному и тому же множеству из $\mathscr{B}$. Множество так определенных симплексов σ будем называть симплициальным комплексом $K(\mathscr{B})$.

Любая точка x из $\mathcal{T}$ принадлежит конечному числу множеств покрытия $\mathcal{B}$. Пересечение β_x этих множеств содержит конечное число вершин, так как $\mathcal{B}$ — покрытие конечного типа.

Рассмотрим отображение φ множества $\mathcal{T}$ в множество M, для которого

$$\varphi(x) \subset \beta_x, \quad x \in \mathcal{T}. \tag{173}$$

Это значит, что отображение φ ставит в соответствие каждой точке $x \in \mathcal{T}$ вершину покрытия $\mathcal{B}$, которая принадлежит каждому из множеств покрытия $\mathcal{B}$, содержащих точку x.

Пусть Δ_q — стандартный симплекс с вершинами $A^0, \ldots, A^q$. Каждому сингулярному симплексу f пространства $\mathcal{T}$,

$$f : \Delta_q \longrightarrow \mathcal{T},$$

образ которого принадлежит одному из множеств β покрытия $\mathcal{B}$, поставим в соответствие симплекс комплекса $K(\mathcal{B})$, вершинами которого являются элементы $\varphi[f(A^0)], \ldots, \varphi[f(A^q)]$. Все множества $\varphi(f(A^i))$ содержатся в множестве β, ибо $f(A^i) \in \beta$. Поэтому они определяют симплекс комплекса $K(\mathcal{B})$. Обозначим этот симплекс символом f^{φ}. Отображение

$$f \longrightarrow f^{\varphi}$$

распространяется по линейности до гомоморфизма $\overline{\varphi}$ цепного комплекса $C(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ в цепной комплекс, ассоциированный с симплициальным комплексом $K(\mathcal{B})$ (см. § 11 и гл. I, A, § 18). Для доказательства справедливости этого свойства достаточно показать, что гомоморфизм $\overline{\varphi}$ перестановочен с дифференцированием в этих двух цепных комплексах, т. е.

$$\overline{\varphi}\partial = \partial\overline{\varphi}.$$

Для этого в свою очередь достаточно рассмотреть сингулярные симплексы f пространства $\mathcal{T}$, образ каждого из которых лежит в одном из множеств покрытия $\mathcal{B}$. Имеем

$$\partial f = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f^{(i)},$$

где $f^{(i)}$ отображают вершины

$$A^0, A^1, \ldots, A^{q-1} \tag{174}$$

симплекса Δ^{q-1} соответственно в точки

$$f(A^0), f(A^1), \ldots, f(A^{i-1}), f(A^{i+1}), \ldots, f(A^q). \tag{175}$$

Следовательно,

$$\overline{\varphi}(\partial f) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \overline{\varphi}(f^{(i)}),$$

причем $\bar{\varphi}(f^{(i)})$ — симплекс из $K(\mathscr{B})$, вершинами которого являются образы точек последовательности (175) при отображении φ. С другой стороны, $\bar{\varphi}(f)$ является цепью, образованной симплексами

$$\{\varphi[f(A^0)], \ldots, \varphi[f(A^q)]\} \in K(\mathscr{B}), \tag{176}$$

и

$$\partial\bar{\varphi}(f) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i g^{(i)},$$

где $g^{(i)}$ — симплекс, вершинами которого, за исключением вершины $\varphi[f(A^i)]$, являются вершины симплекса (176). Равенство $\partial\bar{\varphi}f = \bar{\varphi}\,\partial f$ становится теперь очевидным.

Теорема 14. *Если покрытие $\mathscr{B}$ регулярное, то гомоморфизм*

$$\bar{\varphi}: C(\mathscr{T}, \mathscr{B}) \to C[K(\mathscr{B})] \tag{177}$$

индуцирует в группах гомологий изоморфизм

$$\varphi_*: H_q(\mathscr{T}, \mathscr{B}) \to H_q\{C[K(\mathscr{B})]\} \tag{178}$$

для всех размерностей q.

Доказательство. Рассмотрим отображение ψ множества M в пространство $\mathscr{T}$, при котором образ $\psi(\beta)$ любой вершины $\beta \in M$ принадлежит множеству β,

$$\psi(\beta) \in \beta. \tag{179}$$

Так как вершины попарно не пересекаются, то $\psi(\beta)$ не принадлежит вершине, отличной от β.

Пусть $q+1$ вершина $\beta_0, \ldots, \beta_q$ покрытия $\mathscr{B}$ принадлежит множеству $\beta \in \mathscr{B}$, т. е. образует симплекс $K(\mathscr{B})$. Тогда точки $\psi(\beta_0), \ldots, \psi(\beta_q)$ принадлежат множеству β. Так как пространство β стягиваемо, то существует сингулярный симплекс $f: \Delta^q \to \mathscr{T}$, для которого

$$f(A^i) = \psi(\beta_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, q). \tag{180}$$

Можно доказать это свойство индукцией по q. Для $q=0$ утверждение тривиально. Пусть для любых q точек $a_0, \ldots, a_{q-1}$ стягиваемого пространства β можно найти сингулярный симплекс

$$f: \Delta^{q-1} \to \beta$$

такой, что $f(A^i) = a_i \quad (i = 0, 1, \ldots, q-1)$. Тогда при помощи непрерывного отображения h прямого произведения $\beta \times I$ в β, для которого

$$h(x, 0) = x \quad (x \in \beta),$$
$$h(x, 1) = a_q,$$

можно определить сингулярный симплекс $\mathscr{D}f$, для которого

$$(\mathscr{D}f)(A^i) = a_i \qquad (i = 0, \ldots, q).$$

Действительно, например, можно положить (см. стр. 110)

$$(\mathscr{D}f)(x_0, \ldots, x_q) = h\left[f\left(\frac{x_0}{1-x_q}, \ldots, \frac{x_{q-1}}{1-x_q}\right), x_q\right].$$

Покажем, что каждому симплексу $\sigma \in K(\mathscr{B})$ можно поставить в соответствие сингулярный симплекс f^σ пространства $\mathscr{T}$ так, чтобы выполнялось условие (180) и чтобы гомоморфизм $\overline{\psi}$, полученный продолжением отображения $\sigma \longrightarrow f^\sigma$, был перестановочен с оператором дифференцирования:

$$\partial\overline{\psi} = \overline{\psi}\partial. \tag{181}$$

Построим отображение $\sigma \longrightarrow f^\sigma$ индукцией по q. При $q = 0$ каждой вершине β из M сопоставим сингулярный симплекс $f^\beta : \Delta^0 \longrightarrow \psi(\beta)$. Предположим, что мы построили сингулярные симплексы f^σ, которые соответствуют различным симплексам σ размерности $q-1$ комплекса $K(\mathscr{B})$. Рассмотрим симплекс $\sigma = (\beta_0, \ldots, \beta_q)$ размерности q симплициального комплекса $K(\mathscr{B})$. Обозначим через $\sigma^{(i)}$ грани σ

$$\sigma^{(i)} = (\beta_0, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_q);$$

мы считали, что сингулярные симплексы $f^{\sigma^{(i)}}$ построены. Симплекс f^σ должен удовлетворять условию

$$\partial f^\sigma = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f^{\sigma^{(i)}}.$$

Таким образом, мы должны построить отображение $f^\sigma : \Delta^q \longrightarrow \mathscr{T}$ при заданном его ограничении на границу Δ^q. Мы можем построить отображение f^σ так, чтобы его образ лежал в минимальном стягиваемом пространстве γ покрытия $\mathscr{B}$, содержащем вершины β_i, т. е. все точки $f^\sigma(A^i) = \psi(\beta_i)$ $(i = 0, \ldots, q)$. Действительно, пусть g — центр тяжести симплекса Δ^q, x — произвольная точка из Δ^q, x' — пересечение луча gx с границей Δ^q, а $t = \frac{xx'}{gx'}$ — отношение, в котором точка x' делит отрезок xg. Обозначим через p точку из γ, а через h непрерывную деформацию тождественного отображения γ в постоянное отображение $\gamma \longrightarrow p$. Тогда мы можем определить отображение f^σ формулой

$$f^\sigma(x) = h\left[f^{\sigma^{(i)}}(x'), t\right], \tag{182}$$

где i — индекс одной из вершин A^j симплекса Δ^q, противолежащей грани, содержащей x'. Если существует несколько вершин A^{i_1}, $A^{i_2}, \ldots, A^{i_n}$, обладающих этим свойством, т. е. если x' принадлежит грани размерности $q-r < q-1$, то $f^{\sigma^{(i)}}(x')$ не зависит от этих индексов i. Действительно, если формула (181) справедлива для симплексов σ' размерности $< q-1$, то $f^{\sigma(i)}(x')$ совпадает со значением в x' отображения $f^{\sigma'(i)}$, где

$$\sigma' = \{\beta_{j_0}, \ldots, \beta_{j_{q-r}}\} \qquad (\beta_{j_\alpha} \neq \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r})\ ^{1)}.$$

Отсюда следует, что мы можем определить отображение $f: \sigma \to f^\sigma$ для симплексов σ любой размерности q. Продолжая это отображение по линейности, получаем гомоморфизм $\bar{\psi}$ цепного комплекса $C[K(\mathscr{B})]$, ассоциированного с симплициальным комплексом $K(\mathscr{B})$, в цепной комплекс $C(\mathscr{T}, \mathscr{B})$, ассоциированный с пространством $\mathscr{T}$ и покрытием $\mathscr{B}$.

Рассмотрим произвольный симплекс $\sigma = \{\beta_0, \ldots, \beta_q\}$ комплекса $K(\mathscr{B})$. Множества $\beta_0, \ldots, \beta_q$ являются тогда вершинами покрытия $\mathscr{B}$, принадлежащими одному и тому же множеству β из $\mathscr{B}$. По определению гомоморфизма $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}(\sigma) = f^\sigma$ — сингулярный симплекс, образ которого содержится в некотором множестве $\beta \in \mathscr{B}$, содержащем минимальные множества $\beta_0, \ldots, \beta_q$. Вершины симплекса Δ^q переходят при отображении f^σ в точки $f^\sigma(A^i)$, причем

$$f^\sigma(A^i) \in \beta_i \qquad (i = 0, \ldots, q).$$

Симплекс $\bar{\varphi}(f^\sigma) = \bar{\varphi}\bar{\psi}(\sigma)$ будет образован теми же вершинами β_i, взятыми в том же порядке. Следовательно, $(\overline{\varphi\psi})(\sigma) = \sigma$ и поэтому

$$\bar{\varphi}\bar{\psi} = 1. \tag{183}$$

Гомоморфизм $\bar{\psi}$ индуцирует гомоморфизм ψ^* между группами гомологий комплексов $K(\mathscr{B})$ и $C(\mathscr{T}, \mathscr{B})$,

$$\psi^*: H_q[K(\mathscr{B})] \to H_q(\mathscr{T}, \mathscr{B}). \tag{183'}$$

Покажем, что гомоморфизмы (178) и (183') взаимно обратны. Построим индукцией по q последовательность отображений

$$D_q: C_q(\mathscr{T}, \mathscr{B}) \to C_{q+1}[K(\mathscr{B})],$$

удовлетворяющую условию

$$c - \bar{\psi}\bar{\varphi}c = D_{q-1}\partial c + \partial D_q c \tag{184}$$

для любой цепи $c \in C_q(\mathscr{T}, \mathscr{B})$ и такую, чтобы $D_q c$ принадлежало множеству β из $\mathscr{B}$, как только цепь c принадлежит множеству β.

Рассмотрим сингулярный симплекс f размерности 0 пространства $\mathscr{T}$, образ которого совпадает с точкой $p \in \mathscr{T}$; точка $\bar{\varphi}(f)$ является вершиной $\varphi(p)$ комплекса $K(\mathscr{B})$, т. е. вершиной β_0,

[1]) В действительности же $f^{\sigma'}$ есть отображение в γ стандартного симплекса Δ^{q-r}. Мы обозначили через x' и точку из Δ^{q-r}, которая переводится в x' при линейном отображении стандартного симплекса Δ^{q-r} в Δ^q, определенном отображением $A^\alpha \to A^{j_\alpha}$.

содержащейся в каждом из множеств $\beta \in \mathscr{B}$, которые содержат точку p; $\overline{\psi}\overline{\varphi}(f)$ есть сингулярный симплекс пространства $\mathscr{T}$, отображающий стандартный симплекс Δ^0 в точку $\psi(\beta_0)$ из β_0. Точки p и $\psi(\beta_0)$ принадлежат каждому из множеств β из $\mathscr{B}$, содержащих точку p. Такие множества существуют в силу способа выбора множества β_0. Отсюда следует, что p и $p' = \psi(\beta_0)$ являются точками одного и того же стягиваемого пространства β. Пусть h — непрерывная деформация тождественного отображения множества β в себя в постоянное отображение $\beta \to a \in \beta$. Рассмотрим цепь $\gamma = f - g$, образованную сингулярными симплексами f и $g : \Delta^1 \to \beta$, заданными следующим образом:

$$f(x_0, x_1) = h(p, x_0), \quad g(x_0, x_1) = h(p', x_0).$$

Она удовлетворяет условию

$$\partial\gamma = \partial f - \partial g = p - p'.$$

Отсюда следует, что соотношение (184) будет удовлетворяться, если положить

$$D_1 f = \gamma.$$

Предположим, что мы построили операторы $D_1, \ldots, D_{q-1}$ для симплексов размерностей $1, \ldots, q-1$ комплекса $C(\mathscr{T}, \mathscr{B})$ и продолжили эти операторы до гомоморфизмов групп $C_i(\mathscr{T}, \mathscr{B})$, порожденных этими симплексами. Мы хотим показать теперь, как построить оператор D_q, удовлетворяющий условию (184). Для цепи $c \in C_q(\mathscr{T}, \mathscr{B})$ рассмотрим цепь из $C_q(\mathscr{T}, \mathscr{B})$, заданную формулой

$$c' = c - \overline{\psi}\overline{\varphi}c - D_{q-1}\partial c. \tag{185}$$

Так как оператор D_{q-1} удовлетворяет условию (184), то, заменив в этом условии c на ∂c, получим

$$\partial D_{q-1}\partial c = \partial c - \overline{\psi}\overline{\varphi}\,\partial c,$$

или, поскольку ∂ перестановочно с гомоморфизмами $\overline{\psi}$ и $\overline{\varphi}$,

$$\partial D_{q-1}\partial c = \partial(c - \overline{\psi}\overline{\varphi}c).$$

Дифференцируя формулу (185), получаем

$$\partial c' = \partial(c - \overline{\psi}\overline{\varphi}c) - \partial(c - \overline{\psi}\overline{\varphi}c) = 0,$$

следовательно, c' — цикл из $C_q(\mathscr{T}, \mathscr{B})$. Предположим, что цепь c сводится к сингулярному симплексу f, образ которого лежит в множестве $\beta \in \mathscr{B}$. Тогда образы симплексов, составляющих границу симплекса f, будут лежать в β и по предположению индукции $D\partial f$ также будет цепью подпространства β.

Отображение $\overline{\varphi}$ переводит симплекс f в симплекс σ комплекса $K(\mathscr{B})$, причем вершины $\varphi[f(A^i)]$ симплекса σ образуют минимальные множества β_i, содержащиеся в β, так как β содержит точки $f(A^i)$. Сингулярный симплекс $f^\sigma = \overline{\psi}(\sigma)$ содержится в β, причем его вершины $f^\sigma(A^i)$ лежат в множествах β_i, так как f^σ содержится в минимальном множестве β покрытия $\mathscr{B}$, содержащем точки $f^\sigma(A^i)$ (а следовательно, и множества β_i).

Таким образом, $(\overline{\psi}\overline{\varphi})(C) \subset \beta$ для $C \subset \beta$, и формула (185) показывает, что цикл c', который соответствует цепи $c = f$, содержится в стягиваемом пространстве β. Тогда c' является границей ∂u цепи u из $C_{q+1}(\beta) \subset C_{q+1}(\mathscr{T}, \mathscr{B})$. Положив $D_q f = u$, будем иметь

$$\partial D_q f = c' = c - \overline{\psi}\overline{\varphi} c - D_{q-1}\partial f.$$

Итак, формула (184) удовлетворяется.

Существование операторов D_q показывает, что для любого цикла c комплекса $C(\mathscr{T}, \mathscr{B})$ циклы c и $\overline{\psi}\overline{\varphi} c$ отличаются на границу, т. е. принадлежат одному и тому же классу гомологий. Отсюда следует, что

$$\psi^* \varphi^* = 1.$$

Это соотношение вместе с соотношением (183) показывает, что φ^* и ψ^* являются взаимно обратными изоморфизмами. Тем самым теорема 14 доказана.

Следствие. Для регулярного покрытия $\mathscr{B}$ топологического пространства $\mathscr{T}$ существует изоморфизм

$$H_q(\mathscr{T}) \approx H_q[K(\mathscr{B})]. \tag{186}$$

Это следует из теорем 9 и 14.

17. Симплициальные полиэдры

Рассмотрим абстрактное упорядоченное множество M и симплициальный комплекс K, вершинами которого являются элементы множества M. Тогда K является множеством конечных подмножеств множества M, причем вместе с некоторым подмножеством σ множество K содержит любое подмножество $\sigma' \subset \sigma$ (гл. I, A, § 18). Возьмем $q+1$ элементов $\beta_0, \ldots, \beta_q$ из M таких, что $\beta_0 < \beta_1 < \ldots$ $\ldots < \beta_q$ и $(\beta_0, \ldots, \beta_q)$ — симплекс σ комплекса K. Рассмотрим пару (Δ^q, σ), состоящую из стандартного симплекса Δ^q и симплекса σ. Обозначим через $\Delta\sigma$ множество пар (x, σ), где x — переменная точка из Δ^q. Между множествами $\Delta\sigma$ и Δ^q существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое отображением

$$x \to (x, \sigma). \tag{187}$$

Так как $\sigma = (\beta_0, \ldots, \beta_q)$, то образ x в σ при отображении (187) можно определить формулой

$$y = x_0\beta_0 + \ldots + x_q\beta_q.$$

Будем говорить, что $x_0, \ldots, x_q$ являются координатами точки y в $\Delta\sigma$.

Введем в $\Delta\sigma$ топологию, в которой открытыми множествами являются образы открытых множеств из Δ^q при отображении (187). Тогда $\Delta\sigma$ становится топологическим пространством, гомеоморфным Δ^q. Обозначим через D топологическую сумму пространств $\Delta\sigma$ для всех σ из множества K.

Каждая точка $y \in D$ принадлежит одному и только одному из множеств $\Delta\sigma$. Этому множеству соответствует симплекс $\sigma = (\beta_0, \ldots, \beta_q)$ из K, и имеет место разложение $y = x_0\beta_0 + \ldots + x_q\beta_q$, где $x_0, \ldots, x_q$ — координаты y. Пусть y' — вторая точка из D, $\Delta\sigma'$ — множество, содержащее эту точку, и $y' = x'_0\beta'_0 + \ldots + x'_p\beta'_p$ — разложение y' в $\Delta\sigma'$. Будем говорить, что точки y и y' *эквивалентны*, если y и y' выражаются одинаково после устранения нулевых координат. Точки y и y' эквивалентны только тогда, когда симплексы σ и σ' имеют общую грань $\sigma'' = \{\beta''_0, \ldots, \beta''_r\}$ и когда $x_i = x'_j$, если $\beta_i = \beta'_j \in \sigma''$.

Обозначим через $\mathscr{S}$ факторпространство топологического пространства D по отношению эквивалентности, определенному выше. Обозначим через $S\sigma$ канонический образ множества $\Delta\sigma$ из D в факторпространстве $\mathscr{S}$. Пространство $\mathscr{S}$ представляет собой объединение подпространств $S\sigma$, причем эти подпространства попарно могут пересекаться. Множества $S\sigma$ называются *симплексами*, а $\mathscr{S}$ называется *симплициальным полиэдром*, ассоциированным с комплексом K.

Для любых двух симплексов σ и σ' из K получаем соотношение

$$S\sigma \cap S\sigma' = S\sigma'', \quad \sigma'' = \sigma \cap \sigma'. \tag{188}$$

Любая точка p пространства $\mathscr{S}$ принадлежит множеству $S\sigma$, для которого симплекс σ имеет минимальную размерность и этот симплекс σ является пересечением всех симплексов σ', для которых $S\sigma'$ содержат точку p. Если обозначить через $\beta_0, \ldots, \beta_q$ вершины симплекса σ, то

$$p = x_0\beta_0 + \ldots + x_q\beta_q, \tag{189}$$

причем $x_i > 0$ $(i = 0, \ldots, q)$ и $\sum_{i=0}^{q} x_i = 1$.

Будем говорить, что p — *внутренняя точка* симплекса $S\sigma$. Таким образом, любая точка p симплициального полиэдра $\mathscr{S}$ является внутренней точкой определенного симплекса, который мы обозначим $S\sigma_p$.

Каждую точку p из $\mathcal{S}$ можно рассматривать как вещественную функцию, определенную на множестве M и принимающую ненулевые значения только в конечном числе точек β_i, а именно, если точка p задана формулой (189), то функция p определена формулами

$$p(\beta)=\begin{cases} x_i, & \text{если } \beta=\beta_i,\ i=0, \ldots, q, \\ 0, & \text{если } \beta\neq\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q. \end{cases}$$

Определим в $\mathcal{S}$ метрику d следующим соотношением:

$$d(p, p')=\left\{\sum_{\beta\in M}[p(\beta)-p'(\beta)]\right\}^{1/2}. \tag{190}$$

Симплициальный комплекс K называется локально конечным, если каждая его вершина принадлежит конечному числу симплексов.

Докажем следующую теорему.

Теорема 15. *Если $\mathcal{S}$ — симплициальный полиэдр, ассоциированный с локально конечным симплициальным комплексом K, то фактортопология пространства $\mathcal{S}$ совпадает с топологией, определенной метрикой* (190).

Доказательство. Открытыми множествами фактортопологии пространства $\mathcal{S}$ являются множества, прообразы которых в D открыты. Если σ — максимальный симплекс из K, т. е. симплекс, не содержащийся ни в каком другом симплексе из K, то прообразом множества внутренних точек симплекса $S\sigma$ является внутренность симплекса $\Delta\sigma$. Следовательно, этот образ открыт в D и внутренность $S\sigma$ будет открытой в $\mathcal{S}$. Между множествами $S\sigma$ и $\Delta\sigma$ существует взаимно однозначное соответствие. Некоторое подмножество из $S\sigma$ открыто в $\mathcal{S}$, если пересечение его прообраза с $\Delta\sigma'$ открыто в $\Delta\sigma'$ для любой грани σ' симплекса σ. Отсюда следует, что подпространства $S\sigma$ пространства $\mathcal{S}$, соответствующие максимальным симплексам σ, гомеоморфны $\Delta\sigma$ и, значит, стандартному симплексу соответствующей размерности. Кроме того, отсюда мы видим, что множество будет открытым в $\mathcal{S}$, если его пересечение с каждым из подпространств $S\sigma$ является открытым множеством в $S\sigma$ при любом симплексе σ из K, принадлежащем максимальному симплексу.

Если комплекс K локально конечный, то любой симплекс σ является гранью по крайней мере одного максимального симплекса. Действительно, некоторая вершина симплекса σ может быть вершиной конечного числа симплексов из K. Из этих симплексов мы можем выбрать максимальный симплекс, содержащий σ.

Из этих же рассуждений следует, что произвольная точка p из $\mathcal{S}$ содержится в максимальном симплексе $S\sigma$, причем она не обязательно принадлежит внутренности симплекса. Пусть $S(p)$ — объединение внутренностей симплексов $S\sigma$, содержащих точку p. Множество $S(p)$ пересекает только симплексы, содержащие p. В самом деле, если внутренность симплекса $S\sigma''$ пересекает симплекс $S\sigma'$, то σ'' является гранью σ' и $S\sigma'' \subset S\sigma'$. Поэтому $S\sigma'$ содержит точку p, если $S\sigma''$ обладает этим свойством. Но пересечение $S\sigma'$ с $S(p)$ является внутренностью симплекса $S\sigma'$, которая открыта в $S\sigma'$.

Следовательно, $S(p)$ пересекает любое подмножество $S\sigma$ по открытой части $S\sigma$. Отсюда следует, что $S(p)$ — открытая окрестность точки p топологического пространства $\mathcal{S}$.

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — вершины[1]) полиэдра $\mathcal{S}$, принадлежащие тем симплексам $S\sigma$, которые содержат точку p. Предположим, что точка p имеет ненулевые координаты $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_s}$ $(s \leqslant r)$ и ε — наименьшая из этих координат. Точки $p' \in \mathcal{S}$, для которых

$$d(p, p') < \varepsilon' \qquad (\varepsilon' < \varepsilon), \tag{191}$$

также имеют ненулевые координаты $x'_{\beta_1}, \ldots, x'_{\beta_s}$, поскольку из $x'_{\beta_1} = 0$ по формуле (190) следовало бы

$$d(p, p') \geqslant |p(\beta_1) - p'(\beta_1)| \geqslant \varepsilon > \varepsilon'.$$

Отсюда видно, что шары (191) принадлежат объединению $S(p)$ внутренностей симплексов $S\sigma$, содержащих точку p, и пересекают каждый симплекс $S\sigma \subset S(p)$ по открытому множеству. При этом топология $S\sigma'$ является топологией метрического пространства с метрикой, индуцированной формулой (190). Таким образом, шары (191) являются открытыми окрестностями точки p в фактор-пространстве $\mathcal{S}$.

Пусть задана открытая окрестность V точки $p \in \mathcal{S}$. Пересечение $V \cap S(p)$ также является открытой окрестностью V' точки p. Окрестность V' пересекает любой симплекс $S\sigma' \ni p$ по окрестности точки p в $S\sigma'$, содержащей шар $S_{p, \rho(\sigma')} \subset S\sigma'$ с центром p и радиусом $\rho(\sigma')$. Однако существует конечное число таких симплексов σ', для которых $S\sigma' \ni p$, т. е. содержащих точку p. Поэтому существует наименьшее из чисел $\rho(\sigma')$. Обозначим его через η. Тогда каждый из шаров $S_{p,\rho(\sigma')}$ содержит пересечение $S\sigma'$ с шаром $S_{p, \eta} \subset \mathcal{S}$, заданным формулой

$$S_{p, \eta} : d(p, p') < \eta.$$

Заменим теперь η числом, которое меньше η и меньше каждой из координат точки p. Тогда

$$S_{p, \eta} \cap S\sigma \subset V' \cap S\sigma, \qquad S_{p, \eta} \subset S(p),$$

[1]) Условимся обозначать симплексы S_β через β и называть их вершинами симплициального полиэдра $\mathcal{S}$. Естественный порядок индексов вершин β_i не соответствует здесь порядку в множестве M.

откуда следует

$$S_{p,\,\eta} = S_{p,\,\eta} \cap S(p) \subset V' \subset V.$$

Таким образом, мы показали, что любое открытое множество факторпространства $\mathcal{S}$ может быть покрыто шарами, центры которых принадлежат этому множеству и каждый из этих шаров является открытым множеством в $\mathcal{S}$.

Следовательно, шары метрики (190) образуют базис топологии пространства $\mathcal{S}$ и топология в $\mathcal{S}$ может быть определена при помощи метрики (190). Теорема 15 доказана.

В дальнейшем мы будем предполагать, что комплекс K локально конечный.

Для каждого β из M отображение

$$p \to p(\beta)$$

является функцией, определенной на топологическом пространстве $\mathcal{S}$. Эту функцию мы будем обозначать символом $\bar{\beta}$, т. е.

$$\bar{\beta}(p) = p(\beta). \tag{192}$$

Функции $\bar{\beta}$ непрерывны на $\mathcal{S}$. Действительно, неравенство

$$|\bar{\beta}(p) - \bar{\beta}(p')| \leqslant d(p, p') \tag{193}$$

показывает, что прообраз открытого множества вещественной прямой является объединением шаров. Действительно, любое открытое множество A вещественной прямой является объединением интервалов. Если x — точка из A, то A содержит интервал вида $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$. Если для некоторой точки $p \in \mathcal{S}$ имеем $\bar{\beta}(p) = x$, то формула (193) показывает, что для любой точки p' из шара

$$d(p, p') < \varepsilon$$

точка $\bar{\beta}(p')$ принадлежит множеству A.

Рассмотрим симплекс $S\sigma$ из $\mathcal{S}$. Функция $\bar{\sigma}$, определенная на $\mathcal{S}$ равенством

$$\bar{\sigma}(p) = \max_{\beta \in \sigma} \bar{\beta}(p), \tag{194}$$

также непрерывна на $\mathcal{S}$.

Пусть $M(\sigma)$ — множество вершин из $M-\sigma$, принадлежащих симплексам $\sigma' \in K$, которые содержат по крайней мере по одной вершине из σ.

Число симплексов σ', обладающих этим свойством, конечно, так как комплекс K локально конечный.

Следовательно, множество $M(\sigma)$ конечно и функция $\bar{\bar{\sigma}}$, определенная на $\mathcal{S}$ формулой

$$\bar{\bar{\sigma}}(p) = \max_{(\beta \in M(\sigma)} \bar{\beta}(p), \tag{195}$$

непрерывна на $\mathcal{S}$.

Точки p из $\mathscr{S}$, для которых

$$\bar{\sigma}(p) - \bar{\bar{\sigma}}(p) > 0, \tag{196}$$

образуют открытое множество в $\mathscr{S}$, содержащее симплекс $S\sigma$, поскольку для некоторой точки p из $S\sigma$ имеем

$$\bar{\beta}(p) = 0 \text{ для } \beta \in M(\sigma),$$

$$\bar{\beta}(p) > 0 \text{ для } \beta \in \sigma.$$

Для точки p симплекса $S\sigma'$, не содержащего в качестве вершины ни одной вершины из σ, имеем $\bar{\beta}(p) = 0$ для любого $\beta \in \sigma$, и значит $\bar{\sigma}(p) - \bar{\bar{\sigma}}(p) < 0$.

Таким образом, из условия (196) следует, что точка p — внутренняя для одного из симплексов $S\sigma$, имеющих общие вершины с $S\sigma$, и что

$$\bar{\beta}(p) < \bar{\sigma}(p) \tag{197}$$

для любого $\beta \in M - \sigma$.

Обозначим через $\mathscr{S}(\sigma)$ открытое множество точек из $\mathscr{S}$, удовлетворяющих условию (196). В частности, если β — произвольная вершина, то множество $\mathscr{S}(\beta)$ состоит из точек p, для которых $\bar{\beta}(p) > \bar{\beta}'(p)$ для всех $\beta' \neq \beta$.

Следовательно, для любой вершины β из σ имеем $\mathscr{S}(\beta) \subset \mathscr{S}(\sigma)$. Можно даже утверждать, что

$$\mathscr{S}(\sigma') \subset \mathscr{S}(\sigma) \tag{198}$$

для любой пары симплексов, удовлетворяющей условию $\sigma' \subset \sigma$. Предыдущее соотношение может быть уточнено при помощи формулы

$$\mathscr{S}(\sigma) \cap \mathscr{S}(\sigma') = \mathscr{S}(\sigma \cap \sigma'). \tag{198$'$}$$

Она следует немедленно из определения множества $\mathscr{S}(\sigma)$. Действительно, если для некоторой точки p из $\mathscr{S}$ максимум функции $\beta \to p(\beta)$ достигается на каждом из множеств σ и σ', то максимум этой функции достигается на множестве $\sigma \cap \sigma'$, и обратно.

Любая точка из $\mathscr{S}$ принадлежит по крайней мере одному симплексу $S\sigma$, и имеет место включение

$$S\sigma \subset \mathscr{S}(\sigma). \tag{199}$$

Отсюда следует, что открытые множества $\mathscr{S}(\sigma)$ образуют покрытие Σ пространства $\mathscr{S}$.

Максимальными элементами покрытия Σ являются множества $\mathscr{S}(\sigma)$, для которых σ — максимальный симплекс в K, а минимальными элементами, т. е. вершинами покрытия Σ — множества $\mathscr{S}(\beta)$, как это следует из соотношения (198').

Любое множество $\mathscr{S}(\sigma)$ содержит конечное число вершин, а именно вершины $\mathscr{S}(\beta)$, соответствующие вершинам $\beta \in \sigma$. Поэтому из равенства (198′) следует, что покрытие Σ нормальное (см. § 16). Покажем, что Σ является регулярным покрытием, т. е. что каждое множество $\mathscr{S}(\sigma)$ стягиваемое.

Действительно, из рассуждений, проведенных выше, следует, что $\mathscr{S}(\sigma)$ содержится в объединении $V(\sigma)$ внутренностей симплексов $S\sigma'$, имеющих общие вершины с симплексом $S\sigma$. Следовательно, точка p из $\mathscr{S}(\sigma)$ имеет вид

$$p = x_0\beta_0 + x_1\beta_1 + \ldots + x_m\beta_m, \tag{200}$$

где

$$x_0 \geqslant x_i, \ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ \ldots, \ m), \ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1, \ \beta_0 \in \sigma,$$

а $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ — вершины симплекса σ'.

Предположим, что $\sigma \cap \sigma' = (\beta_0, \ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_n)$. Тогда $x_0 > x_j$ $(j = n+1, \ \ldots, \ m)$.

Рассмотрим отображение h произведения $\mathscr{S}(\sigma) \times I$ в $\mathscr{S}(\sigma)$, которое для каждой точки p, заданной формулой (200), и для каждого $t \in I$ определяется формулой

$$h(p, t) = t\,\frac{x_0\beta_0 + \ldots + x_n\beta_n}{x_0 + \ldots + x_n} + (1-t)\,p. \tag{201}$$

Заметим, что это отображение определено, так как каждая точка p является внутренней только для одного симплекса $S\sigma'$. Отображение непрерывно на каждом произведении $S\sigma' \times I$ $[S\sigma' \subset \mathscr{S}(\sigma)]$, и, следовательно, оно непрерывно на $\mathscr{S}(\sigma) \times I$. Так как для каждого $t \in I$ точка $h(p, t)$ принадлежит симплексу $S\sigma'$, то образ отображения h содержится в множестве $V(\sigma)$. Более того, точка $h(p, t)$ принадлежит множеству $\mathscr{S}(\sigma)$, так как для любого $t \in I$ и любой вершины β_j, не принадлежащей σ, имеют место неравенства

$$(1-t)x_0 + \frac{tx}{x_0 + \ldots + x_n} \geqslant x_0 > x_j \geqslant (1-t)\,x_j.$$

Отсюда следует, что формула (201) определяет непрерывное отображение прямого произведения $\mathscr{S}(\sigma) \times I$ в пространство $\mathscr{S}(\sigma)$. Ясно, что это отображение представляет собой непрерывную деформацию тождественного отображения множества $S(\sigma)$ в проекцию множества $\mathscr{S}(\sigma)$ на симплексе $S\sigma$. Но $S\sigma$ — стягиваемое пространство и, налагая деформацию h на деформацию тождественного отображения симплекса $S\sigma$ в постоянное отображение, получаем деформацию тождественного отображения $\mathscr{S}(\sigma)$ в постоянное отображение.

Следовательно, множество $\mathscr{S}(\sigma)$ образует регулярное покрытие и для пространства $\mathscr{S}$ *справедливо* следствие из теоремы 14. Получаем следующую теорему.

Теорема 16. *Группы гомологий симплициального полиэдра $\mathscr{S}$, ассоциированного с локально конечным симплициальным комплексом K, изоморфны группам гомологий комплекса K.*

Из теоремы 14 следует, что всякое топологическое пространство $\mathscr{T}$, допускающее по крайней мере одно регулярное покрытие $\mathscr{B}$, обладает теми же группами гомологий, что и симплициальный полиэдр $\mathscr{S}$, ассоциированный с комплексом K, который определен покрытием $\mathscr{B}$ (§ 15).

В гл. VI мы покажем, что для топологических пространств одного важного класса, а именно для дифференцируемых многообразий, всегда существует регулярное покрытие.

18. Гомологии Чеха

Предыдущие рассмотрения естественным образом приводят нас к группам гомологий, введенным Чехом. Возвратимся к симплициальному полиэдру, ассоциированному с симплициальным локально конечным комплексом K. Мы видели, что группы сингулярных гомологий топологического пространства $\mathscr{S}$ изоморфны группам гомологий симплициального комплекса K. Можно получить другое определение групп $H_q(\mathscr{S})$, если к каждой вершине β полиэдра $\mathscr{S}$ присоединить открытую окрестность U_β, образованную объединением внутренностей симплексов $\mathscr{S}_\sigma$ пространства $\mathscr{S}$, имеющих β в качестве вершины. Если $\beta_0, \ldots, \beta_q$ — вершины некоторого симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ из $\mathscr{S}$, то внутренность симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ принадлежит каждой из окрестностей $U_{\beta_0}, \ldots, U_{\beta_q}$. Поэтому пересечение этих окрестностей

$$U_{\beta_0 \ldots \beta_q} = U_{\beta_0} \cap U_{\beta_1} \cap \ldots \cap U_{\beta_q} \tag{202}$$

не пусто. Обратно, если для $q+1$ вершины $\beta_0, \ldots, \beta_q$ из $\mathscr{S}$ пересечение (202) не пусто, то в $\mathscr{S}$ существует по крайней мере одна точка p, имеющая ненулевые координаты $p(\beta_0), \ldots, p(\beta_q)$. Симплекс $\mathscr{S}_{\sigma_p}$, содержащий точку p внутри себя, будет иметь среди своих вершин точки $\beta_0, \ldots, \beta_q$. Так как любая грань симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ есть симплекс из $\mathscr{S}$, то $\beta_0, \ldots, \beta_q$ являются вершинами одного и того же симплекса из $\mathscr{S}$. Следовательно:

Для того чтобы пересечение $U_{\beta_0 \ldots \beta_q}$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_0, \ldots, \beta_q$ были вершинами некоторого симплекса $\mathscr{S}_\sigma$.

Окрестность U_β называется *открытой звездой* вершины β в полиэдре $\mathcal{S}$, а $U_{\beta_0 \ldots \beta_q}$ называется *открытой звездой* симплекса $\mathcal{S}_\sigma$ с вершинами $\beta_0, \ldots, \beta_q$.

Звезды U_β образуют открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{S}$, так как любая точка p из $\mathcal{S}$ является внутренней для некоторого симплекса $\mathcal{S}_\sigma$ и принадлежит звезде каждой вершины этого симплекса. Множества покрытия $\mathcal{U}$ зависят от индекса β, пробегающего множество M, и $\beta_0, \ldots, \beta_q$ образуют симплекс в комплексе K тогда и только тогда, когда пересечение множеств $U_{\beta_0}, \ldots, U_{\beta_q}$ не пусто.

Это замечание приводит нас к следующему построению. Пусть задано открытое покрытие $\mathcal{U}$ топологического пространства $\mathcal{T}$. Рассмотрим симплициальный комплекс $K'(\mathcal{U})$, вершинами которого являются элементы покрытия $\mathcal{U}$, а симплексами — те конечные системы множеств из $\mathcal{U}$, пересечение которых не пусто. Можно показать на примерах, что группы гомологий комплекса $K'(\mathcal{U})$ не изоморфны группам $H_q(\mathcal{T})$, так как они зависят не только от пространства $\mathcal{T}$, но и от покрытия $\mathcal{U}$.

Только для определенных покрытий $\mathcal{U}$ группы $H_q[K'(\mathcal{U})]$ и $H_q(\mathcal{T})$ изоморфны. К сожалению, такие покрытия нельзя охарактеризовать условиями, пригодными для любого топологического пространства $\mathcal{T}$. Поэтому нам придется, взяв покрытия $\mathcal{U}$, которые могут быть определены на топологическом пространстве, определить группы гомологий как пределы групп, соответствующих этим покрытиям. Чешский математик Эдуард Чех уточнил эту идею. Он использовал отношение частичной упорядоченности в множестве покрытий $\mathcal{U}$ топологического пространства $\mathcal{T}$, определенное следующим образом. Покрытие $\mathcal{U}'$ тоньше, чем покрытие $\mathcal{U}$, если любое множество из $\mathcal{U}'$ содержится в некотором множестве из $\mathcal{U}$. Это соотношение записывается $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ (гл. I, B, § 5).

С каждым покрытием $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ мы ассоциируем симплициальный комплекс $K'(\mathcal{U})$, вершинами которого являются элементы множества $\mathcal{U}$, а симплексами — конечные подмножества из $\mathcal{U}$, имеющие непустое пересечение в $\mathcal{T}$. Если множества $U_1, \ldots, U_n$ из $\mathcal{U}$ имеют непустое пересечение, то любая система, образованная при помощи p множеств из U_i $(i = 1, \ldots, n)$, имеет непустое пересечение. Следовательно, множество $K'(\mathcal{U})$ конечных подмножеств из $\mathcal{U}$ действительно является симплициальным комплексом. Обозначим через $C'_q(\mathcal{U})$ группу цепей размерности q комплекса $K'(\mathcal{U})$.

Мы определили (гл. I, A, § 18) границу цепи

$$c = \sum_{i=1}^{p} m_i \sigma_i \quad (m_i \text{ — целые числа})$$

симплициального комплекса как цепь

$$\partial c = \sum_{i=1}^{p} m_i \, \partial \sigma_i .$$

При этом под границей $\partial\sigma$ сингулярного симплекса σ размерности q понимается

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sigma^{(j)},$$

где $\sigma^{(j)}$ — симплекс, образованный вершинами σ, взятыми в том порядке, в каком они следуют в σ, за исключением вершины с номером j.

Если покрытие $\mathcal{U}'$ тоньше, чем $\mathcal{U}$, то существует функция φ (функция перехода от $\mathcal{U}'$ к $\mathcal{U}$), ставящая в соответствие каждому множеству U' из $\mathcal{U}'$ такое множество $\varphi(U')$ из $\mathcal{U}$, что

$$U' \subset \varphi(U'). \tag{203}$$

Ясно, что это условие не определяет однозначно функцию φ. Рассмотрим функцию φ перехода от $\mathcal{U}'$ к $\mathcal{U}$, обладающую свойством (203), и определим для каждого q гомоморфизм $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_q$ группы $C'_q(\mathcal{U}')$ в группу $C'_q(\mathcal{U})$ формулой

$$\bar{\varphi}_q\Big(\sum_{i=1}^{p} m_i \{U_0'^i, \ldots, U_q'^i\}\Big) = \sum_{i=1}^{p} m_i \{\varphi(U_0'^i), \ldots, \varphi(U_q'^i)\}. \tag{204}$$

Если $U_0', \ldots, U_q'$ — множества из $\mathcal{U}'$ с непустым пересечением, то в силу соотношения (203) множества $\varphi(U_0'), \ldots, \varphi(U_q')$ обладают тем же свойством. Следовательно, если $\{U_0', \ldots, U_q'\}$ — симплекс из $K'(\mathcal{U}')$, то $\{\varphi(U_0'), \ldots, \varphi(U_q')\}$ — симплекс из $K'(\mathcal{U})$, и определение (204) имеет смысл.

Из определения границы симплекса $\sigma' = \{U_0', \ldots, U_q'\}$ следует, что

$$\partial\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\partial. \tag{205}$$

Действительно, применяя операторы, записанные в левой и правой частях равенства (205) к симплексу $\sigma' = \{U_0', \ldots, U_q'\}$, получаем один и тот же результат

$$(\partial\bar{\varphi})(\sigma') = (\bar{\varphi}\partial)(\sigma') =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \{\varphi(U_0'), \ldots, \varphi(U_{i-1}'), \varphi(U_{i+1}'), \ldots, \varphi(U_q')\}.$$

Отсюда следует, что гомоморфизмы $\bar{\varphi}_q$ определяют гомоморфизм $\bar{\varphi}$ цепного комплекса $C[K'(\mathcal{U}')]$ в цепной комплекс $C[K'(\mathcal{U})]$. Мы знаем, что такой гомоморфизм индуцирует гомоморфизм φ^* групп гомологий $H_q[K'(\mathcal{U}')]$ в группы гомологий $H_q[K'(\mathcal{U})]$.

Мы хотим показать теперь, что гомоморфизм φ^* не зависит от выбора функции φ. Для этого рассмотрим другую функцию перехода ψ от $\mathcal{U}'$ к $\mathcal{U}$, обладающую свойством

$$U' \subset \psi(U').$$

Введем обозначение $C_q(\mathcal{U}) = C_q[K'(\mathcal{U})]$.

Обозначим далее через D гомоморфизм группы $C_q(\mathcal{U}')$ в группу $C_{q+1}(\mathcal{U})$, определенный на образующих группы $C_q(\mathcal{U}')$ формулой

$$D(\{U'_0, \ldots, U'_q\}) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \{\varphi(U'_0), \ldots, \varphi(U'_j), \psi(U'_j), \ldots, \psi(U'_q)\}.$$

Вычислим границу цепи $D(\{U'_0, \ldots, U'_q\})$. Для простоты записи положим $\varphi(U'_i) = U_i$, $\psi(U'_i) = V_i$. Тогда получим

$$\partial D(\{U'_0, \ldots, U'_q\}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \Big[\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \{U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_j, V_j, \ldots, V_q\} +$$
$$+ \sum_{i=j}^{q} (-1)^{i-1} \{U_0, \ldots, U_j, V_j, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_q\}\Big], \qquad (206)$$

где значок ^ над буквой означает, что в последовательности эта буква пропущена. Единственным членом правой части равенства (206), не содержащим буквы V, является член

$$(-1)^q \cdot (-1)^{q-1} \{U_0, \ldots, U_q\} = -\{U_0, \ldots, U_q\} =$$
$$= -\bar{\varphi}(\{U'_0, \ldots, U'_q\}), \qquad (207)$$

а единственным членом, не содержащим буквы U,

$$(-1)^0 \cdot (-1)^0 \{V_0, \ldots, V_q\} = \{V_0, \ldots, V_q\} = \bar{\psi}(\{U'_0, \ldots, U'_q\}). \qquad (208)$$

Коэффициент при $\{U_0, \ldots, U_{j-1}, V_j, \ldots, V_q\}$ в этой формуле имеет вид

$$(-1)^j (-1)^j + (-1)^{j-1} (-1)^j = 0.$$

Отсюда следует, что кроме слагаемых (207), (208) в правую часть формулы (206) входит еще сумма

$$\sum_{j=0}^{q} \Big(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \{U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_j, V_j, \ldots, V_q\} +$$
$$+ \sum_{i=j+1}^{q} (-1)^{i+j-1} \{U_0, \ldots, U_j, \ldots, V_j, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_q\}\Big).$$

Запишем эту сумму так, чтобы был выделен член, не содержащий фиксированного индекса i:

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j-1}\{U_0, \ldots, U_j, V_j, \ldots, \hat{V}_i, \ldots, V_q\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=i+1}^{q}(-1)^j\{U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_j, V_j, \ldots, V_q\}\right)=$$

$$=-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i D(\{U_0', \ldots, \hat{U}_i', \ldots, U_q'\})=$$

$$=-D\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\{U_0', \ldots, \hat{U}_i', \ldots, U_q'\}\right)=-D\partial\{U_0', \ldots, U_q'\}.$$

В результате мы получили формулу

$$\partial Dc=\bar{\psi}(c)-\bar{\varphi}(c)-D\partial c. \tag{209}$$

Эта формула справедлива для любого симплекса $c=\{U_0', \ldots, U_q'\}$ и для любой цепи из $C_q(\mathcal{U}')$. Из формулы (209) следует, что для каждого цикла c циклы $\bar{\psi}(c)$, $\bar{\varphi}(c)$ отличаются границей, т. е. принадлежат одному классу гомологий. Таким образом, мы показали, что для двух отображений φ и ψ

$$\psi^*=\varphi^*. \tag{209'}$$

Следовательно, мы связали с каждым покрытием $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ последовательность групп гомологий $H_q'(\mathcal{U})=H_q[K'(\mathcal{U})]$, и для любого покрытия $\mathcal{U}'$, более тонкого чем $\mathcal{U}$, мы получили гомоморфизм

$$\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}: H_q'(\mathcal{U}')\to H_q'(\mathcal{U}) \qquad (\mathcal{U}'<\mathcal{U}). \tag{210}$$

Если заданы три покрытия $\mathcal{U}''<\mathcal{U}'<\mathcal{U}$ и два отображения $\varphi:\mathcal{U}''\to\mathcal{U}'$ и $\psi:\mathcal{U}'\to\mathcal{U}$, удовлетворяющие условию (203), то $\bar{\psi}\bar{\varphi}=\overline{\psi\varphi}$. Отсюда следует соотношение

$$\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}''}=\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}\varphi_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}''}. \tag{210'}$$

Множество покрытий топологического пространства $\mathcal{T}$ образует множество, фильтрующееся влево при отношении частичной упорядоченности „$<$" (гл. I, В, § 5). Наличие гомоморфизмов (210), удовлетворяющих соотношениям (210'), позволяет рассмотреть для каждого q проективный предел групп $H_q'(\mathcal{U})$ и гомоморфизмов $\varphi_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ (гл. I, A, § 16). Этот предел называется *группой гомологий Чеха* размерности q топологического пространства $\mathcal{T}$ и обозначается $H_q'(\mathcal{T})$.

Замечание. Из формулы (209′) следует, что группы $H'_q(\mathcal{U})$ и $H'_q(\mathcal{U}')$ двух одинаково тонких (т. е. таких, что одновременно $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}' > \mathcal{U}$) покрытий топологического пространства $\mathcal{T}$ изоморфны при любом q. Действительно, пусть φ — отображение множества $\mathcal{U}'$ в $\mathcal{U}$, а φ' — отображение множества $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}'$, при которых

$$U' \subset \varphi(U'),\quad U \subset \varphi'(U) \qquad (U' \in \mathcal{U}',\ U \in \mathcal{U}).$$

В этом случае $\varphi\varphi'$ — отображение множества $\mathcal{U}$ в себя, и

$$U \subset (\varphi\varphi')(U) \qquad (U \in \mathcal{U}).$$

А алогично $\varphi'\varphi$ — отображение множества $\mathcal{U}'$ в себя, и

$$U' \subset (\varphi'\varphi)(U') \qquad (U' \in \mathcal{U}').$$

Обозначим через 1 тождественное отображение множества $\mathcal{U}$, через $1'$ тождественное отображение множества $\mathcal{U}'$. Эти отображения индуцируют тождественные отображения 1^*, $1'^*$ в группах $H'_q(\mathcal{U})$ и $H'_q(\mathcal{U}')$. Применив формулу (209′) к парам отображений $(1, \varphi\varphi')$ и $(1', \varphi'\varphi)$, получим

$$(\varphi\varphi')^* = 1^*, \qquad (\varphi'\varphi)^* = 1'^*,$$

и, следовательно,

$$\varphi^*\varphi'^* = 1^*, \qquad \varphi'^*\varphi^* = 1'^*.$$

Отсюда вытекает, что φ^* и φ'^* являются взаимно обратными гомоморфизмами. Поэтому имеют место изоморфизмы

$$H_q(\mathcal{U}) \approx H_q(\mathcal{U}').$$

Простым примером одинаково тонких покрытий является покрытие, состоящее из одного множества $\{\mathcal{T}\}$, и покрытие, состоящее из всех открытых множеств из $\mathcal{T}$. Для первого покрытия

$$H'_0 \approx \mathbf{Z},\ H'_q = 0 \qquad (q > 0). \tag{211}$$

Отсюда следует, что эти формулы справедливы и для второго покрытия. Справедливость формул (211) объясняется тем, что рассматриваемые покрытия являются максимальными в множестве всех покрытий, т. е. такими, что любое другое покрытие будет более тонким или таким же тонким.

С гомологиями Чеха связаны две важные задачи:

1. Каковы топологические пространства, на которых гомологии Чеха совпадают с сингулярными гомологиями с точностью до изоморфизма?

2. Для каких покрытий $\mathcal{U}$ топологического пространства $\mathcal{T}$ группы $H'_q(\mathcal{U})$ изоморфны группам гомологий Чеха $H'_q(\mathcal{T})$ пространства $\mathcal{T}$?

Мы дадим частичный ответ на первый вопрос, показав, что для локально конечного симплициального полиэдра группы гомологий Чеха изоморфны группам сингулярных гомологий. Ответим также и на второй вопрос, обобщая результат, полученный для случая, когда $\mathcal{T}$ — симплициальный полиэдр.

Мы показали, что группы сингулярных гомологий локально конечного симплициального полиэдра $\mathcal{S}$ изоморфны группам гомологий комплекса $K'(\mathscr{U})$, ассоциированного с покрытием $\mathscr{U}$, образованным звездными окрестностями U_β вершин β из $\mathscr{S}$. Отсюда можно заключить, что группы гомологий Чеха пространства $\mathscr{S}$ изоморфны группам сингулярных гомологий.

Доказательство этого факта основывается на следующем замечании. Пусть $\mathscr{S}_{\sigma_0}$ — симплекс полиэдра $\mathscr{S}$ с вершинами $\beta_0, \ldots, \beta_q$ и $g_{i_0, \ldots, i_p}$ — центр тяжести грани $\mathscr{S}_{i_0, \ldots, i_p} \subset \mathscr{S}_{\sigma_0}$, т. е. точка, заданная формулой

$$g_{i_0, \ldots, i_p} = \frac{1}{p+1} (\beta_{i_0} + \ldots + \beta_{i_p}). \qquad (212)$$

Тогда из этих центров тяжести и центров тяжести симплексов $\mathscr{S}_\sigma$, имеющих общую грань с $\mathscr{S}_{\sigma_0}$, можно составить симплициальный комплекс K_{σ_0}, ассоциированный симплициальный полиэдр которого $\mathscr{S}^*_{(\sigma_0)}$ гомеоморфен $\mathscr{S}$.

В самом деле, обозначим через M_{σ_0} множество, образованное вершинами полиэдра $\mathscr{S}$, центрами тяжести граней $\mathscr{S}_{\sigma_0}$ и центрами тяжести симплексов $\mathscr{S}_{\sigma'}$, имеющих по одной общей грани с $\mathscr{S}_{\sigma_0}$. Тогда будем иметь

$$M_{\sigma_0} = M \cup G_{\sigma_0} \cup G'_{\sigma_0},$$

где G_{σ_0} — множество центров тяжести граней $\mathscr{S}_{\sigma_0}$, а G'_{σ_0} — множество центров тяжести симплексов $\mathscr{S}_{\sigma'}$, соседних с $\mathscr{S}_\sigma$. Множество G_{σ_0} конечно: оно содержит $(2^{q+1}-1)$ элементов, среди которых находятся и вершины $\beta_0, \ldots, \beta_q$, множество G'_{σ_0} также конечно, так как полиэдр $\mathscr{S}$ локально конечный, и, следовательно, каждая вершина β_i симплекса $\mathscr{S}_{\sigma_0}$ является вершиной конечного числа граней симплексов $\mathscr{S}_{\sigma'}$, соседних с $\mathscr{S}_{\sigma_0}$.

Обозначим через K_{σ_0} множество конечных подмножеств множества M_{σ_0}, которые принадлежат одному из следующих типов:

1. Любое подмножество, которое является симплексом из K, но не содержит элементов из $G_{\sigma_0} \cup G'_{\sigma_0}$.

2. Любое упорядоченное подмножества $\{g^{(0)}, \ldots, g^{(p)}\}$, составленное из элементов $g^{(0)}, \ldots, g^{(p)}$ множества M_{σ_0}, являющихся центрами тяжести вида (212), причем если $\mathscr{S}\sigma^{(i)}$ — симплекс с центром $g^{(i)}$, то $\mathscr{S}\sigma^{(i)}$ — грань симплекса $\mathscr{S}\sigma^{(i+1)}$.

3. Подмножества вида $\sigma \cup \{g^{(0)}, \ldots, g^{(p)}\}$, где σ—множество типа 1, $\{g^{(0)}, \ldots, g^{(p)}\}$ — типа 2 и $\sigma \subset \mathscr{S}\sigma_0$.

Немедленно замечаем, что любое подмножество подмножества одного из перечисленных типов является подмножеством одного из этих типов.

Следовательно, множество K_{σ_0} — симплициальный комплекс. Остается показать, что симплициальный полиэдр $\mathscr{S}^*_{(\sigma_0)}$, ассоциированный с этим комплексом, гомеоморфен полиэдру $\mathscr{S}$. Определим гомеоморфизм f полиэдра $\mathscr{S}^*_{(\sigma_0)}$ в полиэдр $\mathscr{S}$ при помощи семейства гомеоморфизмов $f_{\sigma*}$ симплексов $\mathscr{S}^*_{\sigma*}$ из $\mathscr{S}^*_{(\sigma_0)}$ в помножества симплексов $\mathcal{S}_\sigma$ из $\mathcal{S}$. Потребуем, чтобы гомеоморфизм $f_{\sigma*}$ совпадал с ограничением на $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ любого гомеоморфизма $f_{\tau*}$, определенного на симплексах $\mathcal{S}^*_{\tau*}$, допускающих $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ в качестве грани.

Для произвольного симплекса $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ типа 1 (для которого $\sigma^* = \sigma \in K$) отображение $f_{\sigma*}$ является естественным линейным отображением симплекса $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ на симплекс $\mathcal{S}_\sigma$, причем вершины симплексов $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ и $\mathcal{S}_\sigma$ обозначены одинаково.

Если $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ — симплекс второго типа, т. е. если

$$\sigma^* = \{g^{(0)},\ g^{(1)}, \ldots, g^{(p)}\},$$

то $f_{\sigma*}$ — линейное отображение, определенное формулами

$$f_{\sigma*}(g^{(i)}) = g^{(i)} \in \mathcal{S}_{\sigma_0},$$

где в левой части равенства $g^{(i)}$ считается вершиной комплекса K_{σ_0}, а в правой $g^{(i)}$ рассматривается как центр тяжести грани симплекса $\mathcal{S}_{\sigma_0}$.

Наконец, если $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ — симплекс третьего типа, т. е. если

$$\sigma^* = \sigma \bigcup \{g^{(0)}, \ldots, g^{(p)}\},$$

то $f_{\sigma*}$ — линейное отображение, определенное формулами

$$f_{\sigma*}(\beta) = \beta \ (\beta \in \sigma), \qquad f_{\sigma*}(g^{(i)}) = g^{(i)},$$

где в левых частях равенств под β и $g^{(i)}$ понимаются вершины из K_{σ_0}, а в правых частях — центры тяжести некоторых граней из $\mathcal{S}$.

В каждом из этих трех случаев гомоморфизм $f_{\sigma*}$ определен на вершинах симплекса $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ и затем распространен по линейности на этот симплекс. Отсюда следует, что $f_{\sigma*}$ совпадает с ограничением $f_{\tau*}$ на $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$, если $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ — грань симплекса $\mathcal{S}^*_{\tau*}$. В частности, для двух соседних симплексов $\mathcal{S}^*_{\sigma*}$ и $\mathcal{S}^*_{\tau*}$ отображения $f_{\sigma*}$ и $f_{\tau*}$ совпадают на пересечении $\mathcal{S}^*_{\sigma*\cap\tau*}$ этих симплексов.

Так как каждое отображение $f_{\sigma*}$ — гомеоморфизм, то отображение f пространства $\mathcal{S}^*_{(\sigma_0)}$ в пространство $\mathcal{S}$, определенное соотношением

$$f(p) = f_{\sigma*}(p), \quad \text{если} \quad p \in \mathcal{S}^*_{\sigma*},$$

будет гомеоморфизмом $\mathcal{S}^*_{(\sigma_0)}$ на $\mathcal{S}$.

В качестве следствия для групп с сингулярными гомологиями имеем

$$H_q(\mathcal{S}^*_{(\sigma_0)}) \approx H_q(\mathcal{S}). \tag{213}$$

Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{S}$. Любая точка p из $\mathcal{S}$ принадлежит множеству $U \in \mathcal{U}$. Предположим, что точка p лежит в симплексе $\mathcal{S}_\sigma$. Множество U содержит шар достаточно малого радиуса ε с центром в точке p. В силу теоремы 7 существует целое положительное число n, для которого диаметры всех симплексов барицентрического подразделения порядка n симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ меньше чем $\varepsilon/2$. Выполнив достаточное число гомеоморфизмов $\mathscr{S} \to \mathscr{S}^*_{(\sigma)}$, построенных выше, приходим к симплициальному полиэдру $\mathscr{S}^*_{p,\sigma}$, гомеоморфному $\mathscr{S}$ при гомоморфизме $f_{p,\sigma}$, причем $f^{-1}_{p,\sigma}(U)$ содержит звездную окрестность U^* в $\mathscr{S}^*_{p,\sigma}$. Следовательно, точка $p \in \mathscr{S}$ допускает окрестность вида $f_{p,\sigma}(U^*)$, содержащуюся в U. Мы можем покрыть компактное пространство $\mathscr{S}_\sigma$ конечным числом окрестностей вида $f_{p,\sigma}(U^*)$, используя барицентрические подразделения симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ надлежащих порядков $n_1, \ldots, n_s$. Пусть n — наибольший из этих порядков, а $\mathscr{S}^*_n(\sigma)$ — полиэдр, который получается из $\mathscr{S}$ после выполнения n операций $\mathscr{S} \to \mathscr{S}^*(\sigma')$. Тогда любая точка $p^* \in \mathscr{S}^*_n(\sigma)$, канонический образ которой $f_\sigma(p^*)$ в $\mathscr{S}$ содержится в $\mathscr{S}_\sigma$, допускает звездную окрестность, содержащуюся в прообразе окрестности U в $\mathscr{S}^*_n(\sigma)$.

Пусть с каждым симплексом $\mathscr{S}_\sigma$ из $\mathscr{S}$ ассоциировали симплициальный полиэдр $\mathscr{S}^*_{(\sigma)}$ и гомеоморфизм f_σ: $\mathscr{S}^*(\sigma) \to \mathscr{S}$, обладающий свойством, что любая точка из $f_\sigma^{-1}(\mathscr{S}_\sigma)$ допускает звездную окрестность, содержащуюся в некотором множестве вида $f_\sigma^{-1}(U)$ $(U \in \mathscr{U})$.

Рассмотрим образы в $\mathscr{S}$ вершин всех полиэдров $\mathscr{S}^*(\sigma)$, ассоциированных с симплексами $\mathscr{S}_\sigma$ из $\mathscr{S}$. В каждом симплексе $\mathscr{S}_\sigma$ лежит конечное число таких образов. Действительно, $\mathscr{S}_\sigma$ граничит с конечным числом симплексов $\mathscr{S}_{\sigma'}$, которые могли бы ввести вершины из $\mathscr{S}^*(\sigma')$. Кроме того, после первого барицентрического подразделения симплекса $\mathscr{S}_{\sigma'}$ операции $\mathscr{S} \to \mathscr{S}^*(\sigma'')$, примененные к симплексам $\mathscr{S}_{\sigma''}$, соседним с $\mathscr{S}_{\sigma'}$, но не являющимся соседними с $\mathscr{S}_\sigma$, не вводят новых точек в симплексы подразделения, содержащие грани из $\mathscr{S}_\sigma$. Из образов в $\mathscr{S}_\sigma$ можно составить одно подразделение симплекса $\mathscr{S}_\sigma$ (не обязательно барицентрическое). Предположим, что мы выполнили эту операцию в каждом из симплексов $\mathscr{S}_\sigma$. Мы получим симплициальный полиэдр $\overline{\mathscr{S}}$ и гомеоморфизм $\bar{f}$: $\overline{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$ такие, что любая точка $\bar{p}$ из $\overline{\mathscr{S}}$ допускает звездную окрестность, содержащуюся в множестве $\bar{f}^{-1}(U)$, $U \in \mathscr{U}$.

Известно, что группы гомологий покрытия Σ полиэдра $\overline{\mathscr{S}}$ звездными окрестностями изоморфны группам сингулярных гомологий полиэдра $\overline{\mathscr{S}}$ или $\mathscr{S}$. С другой стороны, покрытие Σ более тонкое, чем покрытие $\overline{\mathscr{U}}$, образованное множествами $\bar{f}^{-1}(U)$, где $U \in \mathscr{U}$. Следовательно, имеем гомоморфизмы вида (210)

$$\psi^{\Sigma}_{\overline{\mathscr{U}}}: H_q(\Sigma) \to H_q(\overline{\mathscr{U}}).$$

Композициями этих гомоморфизмов с изоморфизмами

$$\theta_{\Sigma}: H_q(\mathscr{S}) \to H_q(\Sigma) \tag{214}$$

являются гомоморфизмы

$$\varphi_{\overline{\mathcal{U}}}^{\overline{\Sigma}}\theta_{\overline{\Sigma}} = \psi_{\overline{\mathcal{U}}} : H_q(\mathcal{S}) \to H_q(\overline{\mathcal{U}}). \qquad (214')$$

Если покрытие $\mathcal{U}'$ более тонкое чем $\mathcal{U}$, а покрытие $\overline{\Sigma}'$ более тонкое чем $\overline{\mathcal{U}}'$, то из (210) следует

$$\varphi_{\overline{\mathcal{U}}}^{\overline{\Sigma}'} = \varphi_{\overline{\mathcal{U}}}^{\overline{\mathcal{U}}'} \varphi_{\overline{\mathcal{U}}'}^{\overline{\Sigma}'},$$

откуда, умножая на $\theta_{\overline{\Sigma}}$ справа и учитывая (214'), находим

$$\psi_{\overline{\mathcal{U}}} = \varphi_{\overline{\mathcal{U}}}^{\overline{\mathcal{U}}'} \psi_{\overline{\mathcal{U}}'}. \qquad (215)$$

Последняя формула показывает, что семейство гомоморфизмов (214') определяет гомоморфизм ψ группы $H_q(\mathcal{S})$ в проективный предел $H'_q(\mathcal{S})$ групп $H_q(\overline{\mathcal{U}})$ и гомоморфизмов $\varphi_{\overline{\mathcal{U}}}^{\overline{\mathcal{U}}'}$:

$$\psi : H_q(\mathcal{S}) \to H'_q(\mathcal{S}).$$

При этом $\varphi_{\overline{\mathcal{U}}}\psi = \psi_{\overline{\mathcal{U}}}$, где $\varphi_{\overline{\mathcal{U}}}$ — канонический гомоморфизм $H'_q(\mathcal{S}) \to H_q(\overline{\mathcal{U}})$.

С другой стороны, мы имеем проектирующий гомоморфизм проективного предела в группу $H_q(\overline{\Sigma})$

$$\varphi_{\overline{\Sigma}} : H'_q(\mathcal{S}) \to H_q(\overline{\Sigma}), \qquad (216)$$

где $\overline{\Sigma}$ — покрытие пространства $\mathcal{S}$. Произведение гомоморфизмов ψ и $\varphi_{\overline{\Sigma}}$ совпадает с изоморфизмом $\theta_{\overline{\Sigma}}$:

$$\varphi_{\overline{\Sigma}}\psi = \theta_{\overline{\Sigma}} \qquad (216')$$

по определению гомоморфизма ψ и в силу того, что $\psi_{\overline{\Sigma}} = \theta_{\overline{\Sigma}}$.

Из формулы (216') следует, что образ гомоморфизма $\varphi_{\overline{\Sigma}}$ совпадает с образом изоморфизма $\theta_{\overline{\Sigma}}$, т. е. с $H_q(\overline{\Sigma})$, а также что ядро гомоморфизма $\varphi_{\overline{\Sigma}}$ имеет с образом ψ только один общий элемент — нейтральный элемент из $H'_q(\mathcal{S})$. Но образ ψ совпадает с группой $H'_q(\mathcal{S})$, так как для $\mathcal{U} = \Sigma$ отображение $\psi_{\overline{\mathcal{U}}}$ — изоморфизм.

В результате получаем, что ядро гомоморфизма $\varphi_{\overline{\Sigma}}$ тривиальное, и, следовательно, $\varphi_{\overline{\Sigma}}$ — изоморфизм группы $H'_q(\mathcal{S})$ на группу $H_q(\overline{\Sigma})$. Из изоморфизма (214) выводим изоморфизм групп $H_q(\mathcal{S})$ и $H'_q(\mathcal{S})$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 17. *Если $\mathcal{S}$ — локально конечный симплициальный полиэдр, то группы сингулярных гомологий и группы гомологий*

Чеха пространства $\mathcal{S}$ для любой размерности q изоморфны группам $H_q(\Sigma)$, ассоциированным с покрытием Σ пространства $\mathcal{S}$ звездными окрестностями.

Заметим, что основной момент доказательства состоит в установлении связи между покрытием Σ и регулярным покрытием $\mathcal{B}$, образованным окрестностями $\mathcal{S}(\sigma)$ симплексов $\mathcal{S}_\sigma$. Суть этой связи состоит в следующем свойстве:

Каждая вершина β покрытия $\mathcal{B}$ лежит в звездной окрестности U_β этой вершины. $p+1$ вершина $\beta_0, \ldots, \beta_p$ образует симплекс, т. е. принадлежат одному множеству B из $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда окрестности $U_{\beta_0}, \ldots, U_{\beta_p}$ имеют непустое пересечение.

Точнее говоря, если B — наименьшее множество из $\mathcal{B}$, содержащее множества $\{\beta_0, \ldots, \beta_p\}$, и эти вершины образуют симплекс, то пересечение

$$B \cap U_{\beta_0} \cap U_{\beta_1} \cap \cdots \cap U_{\beta_p}$$

не пусто.

Действительно, B является окрестностью $\mathcal{S}(\sigma)$ симплекса $\mathcal{S}_\sigma$, где $\sigma = \{\beta_0, \ldots, \beta_p\}$ и B образовано точками p из $\mathcal{S}$, для которых

$$\overline{\overline{\sigma}}(p) - \overline{\sigma}(p) < 0;$$

любая внутренняя точка p симплекса $\mathcal{S}_\sigma$ удовлетворяет этому соотношению и лежит в каждой из окрестностей

$$U_{\beta_0}, \ldots, U_{\beta_p}.$$

Если ввести обозначение

$$B = \beta_0 \vee \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_p, \tag{217}$$

то предыдущее свойство может быть записано следующим образом:

$$(\beta_0 \vee \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_p) \cap U_{\beta_0} \cap U_{\beta_1} \cap \cdots \cap U_{\beta_p} \neq \varnothing. \tag{218}$$

Можно привести и такую формулировку этого свойства: если к покрытию Σ добавить все непустые конечные пересечения множеств из Σ, то мы получим новое покрытие Σ' столь же тонкое, как и Σ. Максимальными множествами покрытия Σ' будут множества U_β. Заметим, что любое множество из локально конечного покрытия $\mathcal{B}$ содержит конечное число вершин, т. е. что любое множество из $\mathcal{B}$ имеет вид (217). Поэтому мы можем установить взаимно однозначное соответствие между семействами $\mathcal{B}$ и Σ' при помощи отображения

$$\varphi: \beta_0 \vee \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_p \to U_{\beta_0} \cap \cdots \cap U_{\beta_p}, \tag{219}$$

определенного тогда и только тогда, когда $\beta_0, \ldots, \beta_p$ являются вершинами одного и того же симплекса σ.

Свойство (218) может быть выражено при помощи следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\varphi(B_1 \vee B_2) = \varphi(B_1) \cap \varphi(B_2), \text{ если } \varphi(B_1) \cap \varphi(B_2) \neq \varnothing, \\ B \cap \varphi(B) \neq \varnothing \quad (B,\ B_1,\ B_2 \in \mathscr{B}),\end{gathered} \tag{220}$$

где $B_1 \vee B_2$ — наименьшее множество из $\mathscr{B}$, содержащее B_1 и B_2.

Рассмотрим теперь открытое покрытие Σ' топологического пространства $\mathscr{T}$, такое, что любое конечное непустое пересечение множеств из Σ' принадлежит Σ'. Пусть существуют регулярное покрытие $\mathscr{B}$ пространства $\mathscr{T}$ и отображение $\varphi: \mathscr{B} \to \Sigma'$, удовлетворяющие условиям (220) для любых B, B_1 и B_2 из $\mathscr{B}$.

В этом случае симплициальный комплекс $K'(\Sigma)$, ассоциированный с покрытием Σ, образованный максимальными множествами из Σ', совпадает с симплициальным комплексом $K(\mathscr{B})$, ассоциированным с регулярным покрытием $\mathscr{B}$. Следовательно, группы гомологий этих комплексов изоморфны. Но в силу теоремы 14 группы гомологий последнего комплекса изоморфны группам сингулярных гомологий пространства $\mathscr{T}$. Следовательно,

$$H'_q(\Sigma) \approx H_q(\mathscr{T}).$$

С другой стороны, покрытия Σ и Σ' одинаково тонкие, и поэтому

$$H'_q(\Sigma) \approx H'_q(\Sigma').$$

Итак, мы получили изоморфизмы

$$H'_q(\Sigma') \approx H'_q(\Sigma) \approx H_q(\mathscr{T}),$$

которые являются ответом на второй вопрос, поставленный нами на стр. 186.

19. Примеры симплициальных полиэдров

Пусть задано множество, состоящее из $q+1$ элемента $A^0, \ldots, A^q$. Подмножества этого множества, состоящие не больше чем из q точек, образуют симплициальный комплекс K. Элементы комплекса K находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями размерности $\leqslant q-1$ стандартного симплекса Δ^q, так как любые $p+1$ из вершин стандартного симплекса Δ^q образуют грань размерности p симплекса Δ^q. Из определения симплициального полиэдра, ассоциированного с симплициальным комплексом, следует, что для комплекса K, определенного выше, ассоциированный симплициальный полиэдр $\mathscr{S}$ может быть отождествлен с границей Δ^q, т. е. с объединением граней размерности $\leqslant q-1$ симплекса Δ^q. Так как любая грань размерности $\leqslant q-1$ содержится по крайней мере в одной грани размерности $q-1$, то $\mathscr{S}$ является объединением граней размерности $q-1$ симплекса Δ^q и образует границу Δ^q, которую мы будем обозначать $\dot{\Delta}^q$.

Если g — центр тяжести симплекса Δ^q и если S^{q-1} — сфера с центром в точке g, то все радиусы, проведенные из g, пересекают границу $\dot{\Delta}^q$ в некоторой точке P и сферу S^{q-1} в некоторой

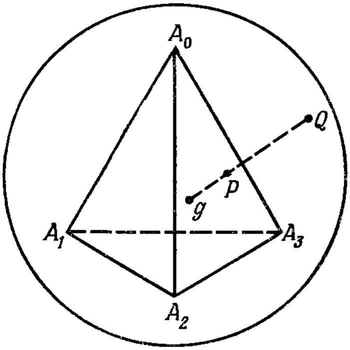

Рис. 10.

точке Q. Если каждой точке P из $\dot{\Delta}^q$ поставить в соответствие соответствующую точку Q сферы S^{q-1}, то получим гомеоморфизм полиэдра $\dot{\Delta}^q$ на сферу S^{q-1} (рис. 10).

Точка g имеет координаты

$$x_i = \frac{1}{q+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, q).$$

Сфера S^{q-1} определена уравнением вида

$$\sum_{i=0}^{q}\left(x_i - \frac{1}{q+1}\right)^2 = r^2, \qquad \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,$$

а граница $\dot{\Delta}^q$ соотношениями

$$x_0 x_1 \ldots x_q = 0,$$
$$x_0 + \ldots + x_q = 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = 0, \ldots, q).$$

Если точка P из $\dot{\Delta}^q$ имеет координаты $(x_0, \ldots, x_q)$, то точка Q сферы S^{q-1} будет иметь координаты

$$x_i' = \frac{1}{q+1} + \rho\left(x_i - \frac{1}{q+1}\right) \quad (i = 0, \ldots, q), \tag{221}$$

где

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{\sum_{i=0}^{q}\left(x_i - \frac{1}{q+1}\right)^2}}. \tag{222}$$

Формулы (221) и (222) определяют гомеоморфизм полиэдра $\dot{\Delta}^q$ на сферу S^{q-1}.

Посредством этого гомеоморфизма грани из $\dot{\Delta}^q$ гомеоморфно отображаются на определенные подмножества сферы S^{q-1}. Говорят, что эти подмножества образуют *триангуляцию* сферы S^{q-1}.

Вообще, если пространство $\mathcal{T}$ гомеоморфно полиэдру $\mathcal{S}$, то образы в $\mathcal{T}$ симплексов из $\mathcal{S}$ образуют *триангуляцию* пространства $\mathcal{T}$. Образы в $\mathcal{T}$ звездных окрестностей вершин полиэдра $\mathcal{S}$ образуют покрытие пространства $\mathcal{T}$ стягиваемыми открытыми множествами, так как звездная окрестность может быть стянута радиально к ее центру.

Звездной окрестностью вершины A^i в $\dot{\Delta}^q$ является объединение внутренностей симплексов из $\dot{\Delta}^q$, допускающих точку A^i в качестве вершины. Эта окрестность совпадает с множеством $\dot{\Delta}^q - \Delta_i^q$, где через Δ_i^q обозначена грань, противолежащая вершине A^i в Δ^q. В самом деле, любая точка из $\dot{\Delta}^q - \Delta_i^q$ имеет ненулевую координату x_i, следовательно, является внутренней для некоторого симплекса, допускающего в качестве вершины точку A^i. Обратно, если некоторая точка из $\dot{\Delta}^q$ является внутренней для симплекса, допускающего в качестве вершины точку A^i, то координата x_i этой точки не равна нулю и точка не принадлежит грани Δ_i^q.

Пользуясь теоремой 16, можно вычислить группы гомологий сферы S^{q-1}, рассмотрев полиэдр $\dot{\Delta}^q$ и вычислив группы гомологий комплекса K, допускающего $\dot{\Delta}^q$ в качестве ассоциированного полиэдра. Например, для $q=3$ комплекс K образован следующими симплексами:

$$\sigma_3=\{A^0, A^1, A^2\},\quad \sigma_2=\{A^0, A^1, A^3\},\quad \sigma_1=\{A^0, A^2, A^3\},$$
$$\sigma_0=\{A^1, A^2, A^3\};$$
$$\sigma_{01}=\{A^0, A^1\},\ \sigma_{02}=\{A^0, A^2\},\ \sigma_{03}=\{A^0, A^3\},\ \sigma_{12}=\{A^1, A^2\},$$
$$\sigma_{13}=\{A^1, A^3\},\ \sigma_{23}=\{A^2, A^3\};$$
$$\sigma^0=\{A^0\},\ \sigma^1=\{A^1\},\ \sigma^2=\{A^2\},\ \sigma^3=\{A^3\}.$$

При этом

$$\partial\{A^i, A^j, A^k\}=\{A^j, A^k\}-\{A^i, A^k\}+\{A^i, A^j\}$$
$$(i<j<k),$$
$$\partial\{A^i, A^j\}=\{A^j\}-\{A^i\},\quad \partial\{A^i\}=0.$$

Для того чтобы цепь $a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3$ была циклом, должно выполняться условие

$$a_0(\sigma_{23}-\sigma_{13}+\sigma_{12})+a_1(\sigma_{23}-\sigma_{03}+\sigma_{02})+a_2(\sigma_{13}-\sigma_{03}+\sigma_{01})+$$
$$+a_3(\sigma_{12}-\sigma_{02}+\sigma_{01})=0,$$

т. е. $a_0=-a_1=+a_2=-a_3$. Отсюда следует, что циклы комплекса K имеют вид

$$z=\rho(\sigma_0-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3) \quad (\rho \text{— целое}).$$

Ни один из этих циклов не может быть границей, так как комплекс K не содержит симплексов размерности 3. Следовательно,

$$H_2(S^2)\approx H_2(K)\approx \mathbf{Z}.$$

Цепь размерности 1 комплекса K имеет вид

$$c=\sum_{i<j} a_{ij}\sigma_{ij}$$

и, следовательно,

$$\partial c=\sum_{i<j} a_{ij}(\sigma^j-\sigma^i).$$

Коэффициент при $-\sigma^0$ в выражении ∂c равен $a_{01}+a_{02}+a_{03}$, и эта сумма должна равняться нулю.

Условимся, что

$$a_{ij}=-a_{ji}, \text{ если } i>j. \tag{223}$$

Тогда условия, при которых цепь c является циклом, имеют вид

$$a_{01}+a_{02}+a_{03}=0,$$
$$a_{10}+a_{12}+a_{13}=0,$$
$$a_{20}+a_{21}+a_{23}=0,$$
$$a_{30}+a_{31}+a_{32}=0.$$

Очевидно, только три из этих уравнений независимы, так как сумма левых частей уравнений в силу формулы (223) равна нулю.

Из первых трех уравнений, положив

$$a_{01}=a_2+a_3,$$
$$a_{02}=a_1-a_3,$$
$$a_{12}=a_0+a_3,$$

получим

$$a_{03}=-a_1-a_2,$$
$$a_{13}=a_2-a_0,$$
$$a_{23}=a_0+a_1,$$

откуда следует, что цепь c является границей цепи $a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+$ $+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3$. Следовательно, любой цикл размерности 1 является границей и

$$H_1(S^2)\approx H_1(K)=0.$$

Любая цепь размерности 0 комплекса K является циклом. Из формулы

$$\partial\sigma_{0j}=\sigma^j-\sigma^0$$

следует, что σ^1, σ^2 и σ^3 отличаются от σ^0 на границу. Поэтому любой класс гомологий размерности 0 содержит кратное σ^0, т. е.

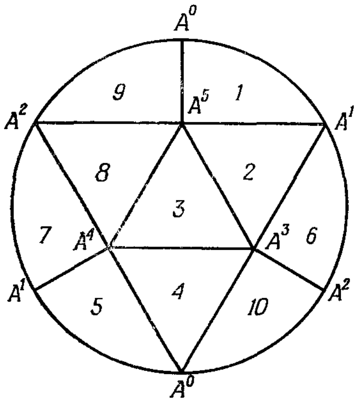

Рис. 11.

класс $\{\sigma^0\}$ порождает группу $H_0(K)$. Так как индекс Кронеккера любой границы равен нулю, то ни одно из кратных σ^0 не является границей, и мы получаем изоморфизмы

$$H_0(K)\approx H_0(S^2)\approx \mathbf{Z}.$$

Вещественная проективная плоскость P^2 также гомеоморфна симплициальному полиэдру, а именно полиэдру, ассоциированному с комплексом K, который изображен на рис. 11. Этот полиэдр имеет 6 вершин: A^0, A^1, A^2, A^3, A^4, A^5, 10 граней размерности 2 и 15 ребер.

Для того чтобы цепь размерности 2

$$z=a① \quad +b② \quad +c③ \quad +d④ \quad +e⑤+\ldots$$

была циклом, должно выполняться условие

$$0=\partial z=(a+e)\{A^0,A^1\}+(a-b)\{A^1,A^5\}+(b-c)\{A^3,A^5\}+$$
$$+(c+d)\{A^3,A^4\}-(d+e)\{A^0,A^4\}+\ldots,$$

откуда следует, что

$$a+e=a-b=b-c=c+d=d+e=0,$$

т. е. $a=b=c=d=e=0$. Следовательно, цепь z не может содержать граней ①, ②, ③, ④, ⑤. Из соображений симметрии она не может содержать и остальных граней. Это значит, что $z=0$, таким образом, не существует в K ненулевых циклов размерности 2. Мы получаем

$$H_2(P^2)=H_2(K)=0.$$

Для вычисления группы $H_1(K)$ заметим, что формулы

$$\begin{aligned}
&\{A^1, A^5\}=\partial\{A^0, A^1, A^5\}+\{A^0, A^5\}-\{A^0, A^1\};\\
&\{A^1, A^3\}=-\partial\{A^1, A^2, A^3\}+\{A^1, A^2\}+\{A^2, A^3\};\\
&\{A^2, A^4\}=\partial\{A^1, A^2, A^4\}+\{A^1, A^4\}-\{A^1, A^2\};\\
&\{A^2, A^5\}=\partial\{A^0, A^2, A^5\}+\{A^0, A^5\}-\{A^0, A^2\};\\
&\{A^0, A^3\}=-\partial\{A^0, A^2, A^3\}+\{A^0, A^2\}+\{A^2, A^3\};\\
&\{A^0, A^4\}=-\partial\{A^0, A^1, A^4\}+\{A^0, A^1\}+\{A^1, A^4\};\\
&\{A^3, A^4\}=\partial\{A^0, A^3, A^4\}-\{A^0, A^3\}+\{A^0, A^4\};\\
&\{A^4, A^5\}=\partial\{A^2, A^4, A^5\}-\{A^2, A^4\}+\{A^2, A^5\};\\
&\{A^3, A^5\}=\partial\{A^1, A^3, A^5\}-\{A^1, A^3\}+\{A^1, A^5\}
\end{aligned}$$

показывают, что любой цикл из $C_1(K)$ отличается границей от цикла вида

$$z=\alpha_0\{A^1, A^2\}-\alpha_1\{A^0, A^2\}+\alpha_2\{A^0, A^1\}+\beta_0\{A^0, A^5\}+\\
+\beta_1\{A^1, A^4\}+\beta_2\{A^2, A^3\}.$$

Для того чтобы последняя формула определяла цикл, необходимо, чтобы

$$0=\partial z=(-\alpha_0+\alpha_2-\beta_1)\{A^1\}+(\alpha_0-\alpha_1-\beta_2)\{A^2\}+\\
+(\alpha_1-\alpha_2-\beta_0)\{A^0\}+\beta_0\{A^5\}+\beta_1\{A^4\}+\beta_2\{A^3\}.$$

Отсюда следует

$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=0,$$
$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2,$$

и цикл z имеет вид

$$z=\rho(\{A^1, A^2\}-\{A^0, A^2\}+\{A^0, A^1\}). \tag{224}$$

Для того чтобы цепь c из $C_2(K)$ имела границу вида (224), нужно, чтобы эта цепь содержала все десять граней с такими коэффициентами, при которых в ∂c не войдут внутренние ребра. Это значит, что

$$c=m(\{A^0, A^1, A^5\}+\{A^1, A^3, A^5\}+\{A^3, A^4, A^5\}-\{A^0, A^3, A^4\}-\\
-\{A^0, A^1, A^4\}+\{A^1, A^2, A^3\}-\{A^1, A^2, A^4\}-\{A^2, A^4, A^5\}-\\
-\{A^0, A^2, A^5\}-\{A^0, A^2, A^3\}),$$

и граница c имеет вид

$$\partial c = 2m(\{A^0, A^1\} - \{A^0, A^2\} + \{A^1, A^2\}).$$

Если положить $m=1$, то цепь

$$\gamma = \{A^0, A^1\} - \{A^0, A^2\} + \{A^1, A^2\}$$

не будет границей, в то время как 2γ — граница; отсюда следует, что любой цикл из $C_1(K)$ гомологичен либо цепи γ, либо нулю. Отсюда

$$H_1(P^2) \approx H_1(K) \approx \mathbf{Z}_2,$$

где $\mathbf{Z}_2$ — циклическая группа второго порядка.

Таким образом, мы вновь получили для пространств S^2 и P^2 результаты, полученные ранее другим путем.

Заметим, что в случае проективной плоскости комплекс K является подкомплексом комплекса, образованного гранями стандартного симплекса Δ^5, так как K является множеством подмножеств множества, образованного шестью элементами $A^0, A^1, \ldots, A^5$, которые можно рассматривать как вершины симплекса Δ^5.

Рассмотрим теперь комплекс K_p, зависящий от целого числа p, который имеет $2+12p$ вершин $O, P, A_i, A'_i, B_i, B'_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, K_i, L_i$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, $42p$ ребер

$$\begin{gathered} OC_i,\ OD_i,\ OE_i,\ OF_i,\ OG_i,\ OH_i,\ OK_i,\ OL_i,\ C_iD_i,\\ D_iE_i,\ E_iF_i,\ F_iG_i,\ G_iH_i,\ H_iK_i,\ K_iL_i,\ L_iC_{i+1},\ C_iP,\ C_iA_i,\ D_iA_i,\ D_iA'_i,\\ E_iA'_i,\ E_iP,\ E_iB_i,\ F_iB_i,\ F_iB'_i, G_iB'_i,\ G_iP,\ G_iA'_i,\ H_iA'_i,\ H_iA_i,\ K_iA_i,\ K_iP,\\ K_iB'_i,\ L_iB'_i,\ L_iB_i,\ C_{i+1}B_i,\ PA_i,\ A_iA'_i,\ A'_iP,\ PB_i,\ B_iB'_i,\ B'_iP \end{gathered}$$

и $28p$ граней

$$\begin{gathered} OC_iD_i,\ OD_iE_i,\ OE_iF_i,\ OF_iG_i,\ OG_iH_i,\ OH_iK_i,\ OK_iL_i,\\ OL_iC_{i+1},\ C_iPA_i,\ C_iA_iD_i,\\ D_iA_iA'_i,\ D_iA'_iE_i,\ A'_iE_iP,\ PE_iB_i,\ E_iB_iF_i,\ B_iF_iB'_i,\\ B'_iF_iG_i,\ B'_iG_iP,\ PG_iA'_i,\\ G_iA'_iH_i,\ A'_iH_iA_i,\ H_iA_iK_i,\ A_iK_iP,\ PK_iB'_i,\\ K_iB'_iL_i,\ B'_iL_iB_i,\ L_iB_iC_{i+1},\ B_iC_{i+1}P \end{gathered}$$

(рис. 12). Следовательно, K_p является подкомплексом комплекса, образованного гранями стандартного симплекса Δ^{12p+1}.

Цепь c размерности 2 комплекса K_p является циклом только тогда, когда она содержит все $28p$ граней с коэффициентами, равными по абсолютной величине и имеющими надлежащие знаки. Действительно, каждое ребро принадлежит всегда двум граням и для того, чтобы ребро не входило в границу цепи c, нужно, чтобы эти две грани входили с коэффициентами, имеющими одинаковые абсолютные значения и надлежащие знаки. Отсюда следует, что циклы из $C_2(K_p)$ являются кратными цепи, образованной из всех граней K_p с коэффициентами $+1$ или -1, причем произвольным остается знак, стоящий перед одной гранью,

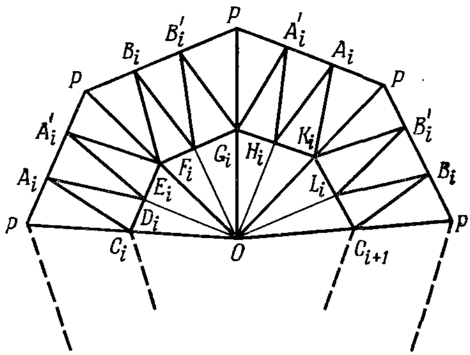

Рис. 12.

а все остальные знаки определяются им. В $C_2(K_p)$ не существует границ, ибо K_p не имеет симплексов размерности 3. Поэтому

$$H_2(K_p) \approx \mathbf{Z}.$$

Для определения группы $H_1(K_p)$ условимся понимать под записью $c \sim c'$, что $c - c'$ есть граница. Тогда получим соотношения

$$C_iA_i \sim C_iP + PA_i, \quad A_iD_i \sim A_iC_i + C_iD_i, \ \ldots;$$
$$OD_i \sim OC_i + C_iD_i, \ \ldots .$$

Они показывают, что класс гомологий цикла ζ из $C_1(K_p)$ не изменится, если заменить ребра, соединяющие точку, которая лежит на периметре многоугольника $C_iD_i \ldots C_{i+1} \ldots$, с точкой O или с некоторой точкой многоугольника $PA_iA_i'B_iB_i' \ldots$, надлежащей комбинацией ребер этих двух многоугольников и ребер OC_1, PC_1. Следовательно, любой класс гомологий содержит цикл вида

$$\zeta = aOC_1 + bPC_1 + \sum_{i=1}^{p} (m_iC_iD_i + n_iD_iE_i + p_iE_iF_i +$$
$$+ q_iF_iG_i + r_iG_iH_i + s_iH_iK_i + t_iK_iL_i +$$
$$+ u_iL_iC_{i+1} + a_iPA_i + a_i'A_iA_i' + a_i''A_i'P +$$
$$+ b_iPB_i + b_i'B_iB_i' + b_i''B_i'P).$$

Однако для такой цепи

$$\partial\zeta = -aO - bP + aC_1 + bC_1 + \sum_{i=1}^{p} [m_i(D_i - C_i) +$$
$$+ n_i(E_i - D_i) + p_i(F_i - E_i) + q_i(G_i - F_i) + r_i(H_i - G_i) +$$
$$+ s_i(K_i - H_i) + t_i(L_i - K_i) + u_i(C_{i+1} - L_i) +$$
$$+ a_i(A_i - P) + a_i'(A_i' - A_i) + a_i''(P - A_i') +$$
$$+ b_i(B_i - P) + b_i'(B_i' - B_i) + b_i''(P - B_i')],$$

и из условия $\partial\zeta = 0$ следует

$$a = b = 0, \quad m_i = n_i = p_i = q_i = r_i = s_i = t_i = u_i = m_{i+1},$$
$$a_i = a_i' = a_i'', \quad b_i = b_i' = b_i''.$$

Таким образом, циклы из $C_1(K_p)$ гомологичны циклам вида

$$\zeta = \sum_{i=1}^{p} [m(C_iD_i + D_iE_i + E_iF_i + F_iG_i + G_iH_i + H_iK_i + K_iL_i + L_iC_{i+1}) +$$
$$+ a_i(PA_i + A_iA_i' + A_i'P) + b_i(PB_i + B_iB_i' + B_i'P)].$$

Так как выражение в скобках с коэффициентом m является границей, то можно считать, что $m = 0$.

Ни один из циклов

$$u_i = PA_i + A_iA_i' + A_i'P,$$
$$v_i = PB_i + B_iB_i' + B_iP$$

не может быть границей и ни одна из линейных комбинаций этих циклов не может быть границей, так как граница любой цепи из $C_2(K_p)$ содержит по крайней мере одно внутреннее ребро (рис. 12). Отсюда следует, что группа $H_1(K_p)$ является свободной абелевой группой классов гомологий циклов u_i и v_i, следовательно, имеем

$$H_1(K_p) \approx \mathbf{Z}^{2p},$$

где мы обозначили через $\mathbf{Z}^{2p}$ прямое произведение $2p$ групп, изоморфных группе $\mathbf{Z}$.

Симплициальный полиэдр, ассоциированный с комплексом K_p, получается из плоского выпуклого многоугольника с $4p$ сторонами a_i, b_i, a_i', b_i' $(i = 1, 2, \ldots, p)$ отождествлением сторон a_i с a_i', соответственно b_i с b_i', как показано на рис. 13. Именно сторона, описанная a_i при движении точки P_i к P_i', отождествляется со стороной a_i', описанной при движении от P_i''' к P_i''. Сторона $P_i'P_i''$ отождествляется с $P_{i+1}P_i'''$.

При таком отождествлении точки P_i, P_i', P_i'', P_i''' отождествляются с одной и той же точкой P. Топологическое пространство, полученное таким отождествлением, называется *тором с p дырами*

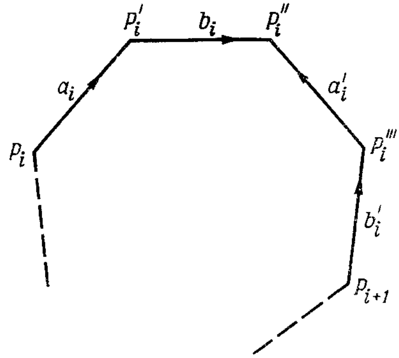

Рис. 13.

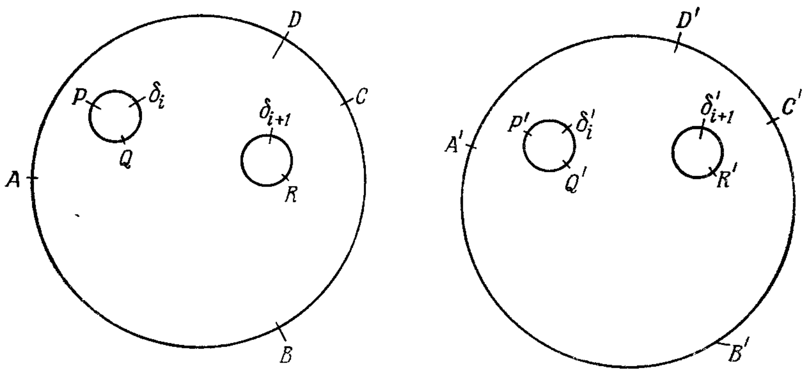

Рис. 14.

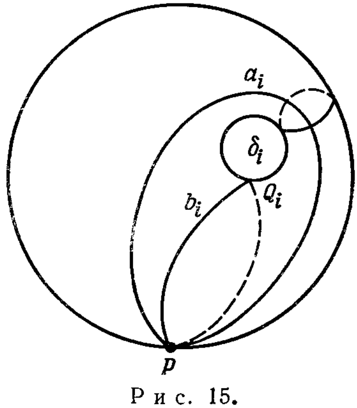

Рис. 15.

или *компактной ориентированной поверхностью рода* p или *сферой с* p *ручками.*

Это пространство может быть получено также из двух кругов D и D', из которых удалено по p кругов (рис. 14) ∂_i и ∂'_i ($i=1, 2, \ldots, p$). Отождествим границы кругов D и D', соответственно ∂_i и ∂'_i, так, чтобы наложились следующие точки: A на A',

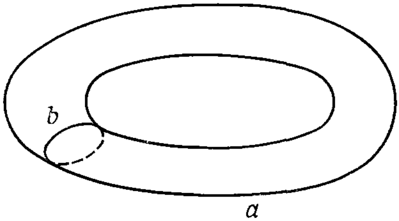

Рис. 16.

B на B', C на C', P на P', Q на Q'. В этом случае получается поверхность вида, указанного на рис. 15. Действительно, разрежем поверхность, указанную на рис. 15, по линиям a_i, b_i, которые выходят из P и возвращаются в P, причем a_i огибает дыру δ_i,

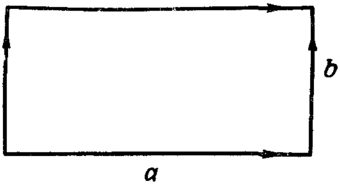

Рис. 17.

а b_i проходит через Q_i с одной стороны поверхности на другую ее сторону. Мы получим криволинейный многоугольник с $4p$ сторонами, гомеоморфный многоугольнику, описанному выше.

При $p=1$ получается обычный тор (рис. 16), который после разрезания по замкнутым линиям a и b превращается в прямоугольник (рис. 17).

В результате можно сформулировать следующее утверждение.

Группы гомологий тора D_p, *имеющего* p *дыр, задаются формулами*

$$\begin{aligned} H_0(D_p) &\approx H_2(D_p) \approx \mathbf{Z}, \\ H_1(D_p) &\approx \mathbf{Z}^{2p}, \end{aligned} \tag{225}$$

а группы размерности, превышающей 2, — *нулевые.*

20. Приложения групп гомологий

Подпространство $\mathcal{U}$ топологического пространства $\mathcal{T}$ называется ретрактом $\mathcal{T}$, если существует непрерывное отображение f пространства $\mathcal{T}$ на $\mathcal{U}$, оставляющее фиксированной каждую точку множества $\mathcal{U}$. То есть должны выполняться условия:

1. $f(x) \in \mathcal{U}$ для любого $x \in \mathcal{T}$,
2. $f(x) = x$ для любого $x \in \mathcal{U}$.

Покажем, что *сфера* S^{n-1}

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \tag{226}$$

не является ретрактом шара

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1. \tag{227}$$

Действительно, предположим, что существует непрерывное отображение f, определенное на шаре (227), со значениями на сфере (226), оставляющее фиксированной каждую точку этой сферы. В этом случае отображение произведения $S^{n-1} \times I$ в S^{n-1}, заданное формулой

$$h(x_1, \ldots, x_n, t) = f[(1-t)x_1, \ldots, (1-t)x_n]$$
$$[(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}],$$

было бы непрерывной деформацией тождественного отображения сферы S^{n-1} в постоянное отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \to f(0, 0, \ldots, 0).$$

Следовательно, S^{n-1} оказывалось бы стягиваемым пространством, что невозможно при $n > 1$. Действительно, мы показали, что $H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbf{Z}$, в то время как группы гомологий стягиваемого пространства тривиальны при размерностях, превышающих 0. Противоречие имеет место и в случае $n = 1$, так как в этом случае сфера S^{n-1} состояла бы из двух точек и, следовательно, имело бы место соотношение $H_0(S^0) \approx \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, в то время как группа гомологий $H_0(\mathcal{T})$ стягиваемого пространства изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

В качестве приложения полученного результата докажем теорему.

Теорема Брауера. *Любое непрерывное отображение* f *шара* (227) *в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. такую точку* x, *для которой*

$$f(x) = x.$$

Предположим, что отображение f не оставляет ни одной неподвижной точки, т. е. что $f(x) \neq x$ для любой точки x шара (227).

В таком случае каждой точке x шара можно поставить в соответствие точку y сферы S^{n-1}, лежащую на луче, выходящем из $f(x)$ к x. Если обозначить через x'_i координаты точки $x' = f(x)$, то мы будем иметь $y_i = x_i - \rho(x'_i - x_i)$,
где ρ задано формулой

$$\rho = \frac{\Sigma x_i^2 - x_i x'_i - \sqrt{\sum\limits_i (x_i - x'_i)^2 + \left(\sum\limits_i x_i x'_i\right)^2 - \left(\sum\limits_i x_i^2\right)\left(\sum\limits_i x'^2_i\right)}}{\sum\limits_i (x_i - x'_i)^2}.$$

Отсюда следует, что отображение $x \to y$ является непрерывным отображением шара (227) на сферу (226). Если x лежит на сфере (226), т. е. если $\sum\limits_i x_i^2 = 1$, то $\rho = 0$ и, следовательно, $y = x$. Таким образом, отображение $x \to y$ определяло бы ретракцию шара на сферу S^{n-1}, что невозможно. Это показывает, что отображение f должно сохранять неподвижной по крайней мере одну точку.

21. Топологический характер размерности симплекса

Мы условились говорить, что линейный симплекс σ имеет размерность q, если он имеет $q+1$ линейно независимых вершин. Покажем теперь, что размерность симплекса есть топологический инвариант, т. е. что симплекс размерности q не может быть гомеоморфным симплексу размерности $q' \neq q$. С этой целью докажем следующую лемму.

Лемма. *Необходимое и достаточное условие того, чтобы линейный симплекс σ имел размерность $< q$, состоит в том, чтобы любое непрерывное ∂-отображение*[1] *f любой грани σ' симплекса σ в сферу S^q было ∂-гомотопно*[1] *некоторому постоянному отображению.*

1. Условие достаточно. Действительно, предположим, что симплекс σ имеет размерность $q' \geqslant q$, т. е. что он линейно порождается q' линейно независимыми вершинами $P^0, \ldots, P^q, \ldots, P^{q'}$. Существует непрерывное отображение φ симплекса $\sigma' = (P^0, \ldots, P^q)$ в сферу S^q, переводящее границу симплекса σ' в точку p сферы S^q. Следовательно, композиция отображения φ с некоторым изоморфизмом Δ^q на σ' определяет фундаментальный цикл сферы S^q и отображение φ не ∂-гомотопно постоянному отображению.

2. Условие необходимо. В самом деле, предположим, что существует ∂-отображение f грани σ' симплекса σ на сферу S^q, не ∂-гомотопное постоянному отображению. Покажем тогда, что раз-

[1] Под ∂-отображением и ∂-гомотопией мы понимаем такие отображения, определенные на некотором симплексе σ', которые постоянны на границе $\dot{\sigma}'$ симплекса σ'.

мерность грани σ' равна по крайней мере q, т. е. что σ' имеет по крайней мере $q+1$ вершину. Действительно, сфера S^q гомеоморфна симплициальному полиэдру, ассоциированному с комплексом K, образованным гранями размерности $\leqslant q$ стандартного симплекса Δ^{q+1}. Следовательно, существует регулярное покрытие $\mathscr{B}$ сферы S^q (см. § 18). Обозначим через β_i $(i=0, \ldots, q+1)$ минимальные множества этого покрытия и через $\mathscr{A}$ покрытие $f^{-1}(\mathscr{B})$, образованное прообразами в σ' множеств из $\mathscr{B}$. Существуют положительное число ε такое, что любое множество диаметра $<\varepsilon$ содержится в некотором множестве из $\mathscr{A}$ (гл. I, В, § 19), и барицентрическое подразделение порядка n симплекса σ', любой симплекс которого имеет диаметр меньше ε. Пусть $P^1, \ldots, P^N$ — вершины этого подразделения и $Q^\alpha = f(P^\alpha)$ — их образы при отображении f на сферу S^q.

Каждая точка Q^α принадлежит одному из множеств покрытия $\mathscr{B}$. Обозначим через B^α пересечение всех множеств из $\mathscr{B}$, содержащих точку Q^α, а через $\beta_{i\alpha}$ — вершину покрытия $\mathscr{B}$, содержащуюся в B^α, и наконец через M^α — точку множества $\beta_{i\alpha} \in \mathscr{B}$.

Любой симплекс рассматриваемого подразделения принадлежит некоторому множеству из $\mathscr{A}$, т. е. образ его лежит в некотором множестве B из $\mathscr{B}$. Так как множества B стягиваемы, то отображение

$$\varphi\colon P^\alpha \to M^\alpha$$

может быть линейно продолжено до непрерывного отображения на каждый симплекс $(P^{\alpha_0}, \ldots, P^{\alpha_r})$ подразделения σ'. Следовательно, φ продолжается до непрерывного отображения φ симплекса σ в $\dot{\Delta}^{q+1}$, обладающего следующим свойством: для любого x из σ' $f(x)$ и $\varphi(x)$ лежат в одном и том же множестве $B \in \mathscr{B}$, а именно в том множестве, которому принадлежит образ симплекса σ', содержащего точку x. Если в качестве одной из точек M^α выбрать точку $y_0 = f(\dot{\sigma}') \in S^q$, то будем иметь $\varphi(\dot{\sigma}') = \{y_0\}$.

Если на мгновение отождествить сферу S^q с полиэдром, ассоциированным с комплексом K, т. е. с границей симплекса Δ^{q+1}, то каждой точке x из σ' и каждому числу $t \in I$ можно поставить в соответствие точку из S^q, определенную отображением

$$h(x, t) = (1-t) f(x) + t\varphi(x).$$

Отображение h непрерывно и определяет ∂-гомотопию отображений f и φ.

Если бы размерность σ' была меньше q, то каждый симплекс рассматриваемого подразделения обладал бы тем же свойством и его образом при отображении φ был бы симплекс, имеющий самое большее q вершин. Поэтому образом φ было бы объединение граней симплекса Δ^{q+1} размерностей, не больших чем $q-1$. Следовательно, этот образ не содержал бы внутренних точек граней размерности q симплекса Δ^{q+1}.

Возвратимся к сфере S^q. Отображение f гомотопно отображению φ, образ которого не покрывает сферу S^q. Если из сферы S^q удалить точку O, не принадлежащую образу φ, то φ можно рассматривать как отображение σ' в стягиваемое пространство $S^q-\{O\}$. Но любое непрерывное отображение φ в стягиваемое пространство R гомотопно постоянному отображению, так как если h — деформация тождественного отображения R в постоянное отображение, то отображение

$$(x, t) \longrightarrow h(\varphi(x), t)$$

является гомотопией, связывающей отображение φ с постоянным отображением. В этом случае отображение f было бы гомотопным постоянному отображению, что противоречит предположению. Следовательно, размерность σ' не может быть меньше q, т. е. размерность σ должна быть больше или равна q. Таким образом, для того чтобы размерность σ была меньше q, необходимо, чтобы любое ∂-отображение любой грани σ в S^q было ∂-гомотопно постоянному отображению. Тем самым лемма доказана.

Предположим теперь, что мы имеем два гомеоморфных симплекса σ^q и $\sigma^{q'}$ размерностей $q>q'$, и пусть F — гомеоморфизм симплекса $\sigma^{q'}$ на σ^q. Симплекс σ^q допускает непрерывное ∂-отображение f на сферу S^q, не ∂-гомотопное постоянному отображению.

В силу леммы ∂-отображение fF симплекса $\sigma^{q'}$ на сферу S^q ∂-гомотопно постоянному отображению g. Пусть h' — гомотопия, связывающая отображение fF с постоянным отображением $\sigma^{q'} \longrightarrow$ $\longrightarrow p \in S^q$.

Отображение

$$h(x, t)=h'[F^{-1}(x), t]$$

будет тогда ∂-гомотопией, связывающей отображение $fF \cdot F^{-1}=f$ с постоянным отображением

$$x \longrightarrow p,$$

что противоречит предположению, сделанному выше, относительно отображения f.

Следовательно, два линейных симплекса σ^q и $\sigma^{q'}$ гомеоморфны только тогда, когда $q=q'$. Тем самым мы доказали топологический характер размерности симплекса.

Размерностью симплициального полиэдра $\mathcal{S}$ называется наибольшая из размерностей симплексов, которые образуют этот полиэдр.

Из предыдущих рассуждений следует, что если симплициальный полиэдр $\mathcal{S}$ имеет размерность q, то существует подпространство $\mathscr{S}_\sigma$ пространства $\mathscr{S}$ и непрерывное ∂-отображение f подпространства $\mathscr{S}_\sigma$ в сферу S^q, не ∂-гомотопное ни одному постоянному отображению.

Покажем, что два симплициальных полиэдра $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ разных размерностей n и n' не гомеоморфны. Предположим, что $n > n'$, и допустим, что существует гомеоморфизм F полиэдра $\mathscr{S}'$ на полиэдр $\mathscr{S}$. Для всякого симплекса $s \in \mathscr{S}$ размерности n существует непрерывное ∂-отображение в сферу S^n

$$f\colon\ s \longrightarrow S^n,$$

не ∂-гомотопное постоянному отображению. Множество $\sigma' = F^{-1}(s)$ является компактным подмножеством из $\mathscr{S}'$, так как оно есть непрерывный образ компактного пространства s в метрическом (и, следовательно, отделимом) пространстве $\mathscr{S}'$. Произведение $f' = fF$ — непрерывное отображение множества $\sigma' \subset \mathscr{S}'$ на сферу S^n. Так как σ' компактно, оно пересекает конечное число множеств регулярного покрытия полиэдра $\mathscr{S}'$, а потому пересекает конечное число симплексов из $\mathscr{S}'$. Для каждого симплекса s' из $\mathscr{S}'$, который пересекает множество σ', определено непрерывное отображение $f_{s'}$ пересечения $s' \cap \sigma'$ в сферу S^n. Будем рассматривать $f_{s'}$ как отображение множества $s' \cap \sigma'$ в метрическое пространство $\mathscr{R}^{n+1}$. В силу теоремы Титце (гл. I, B, § 17) существует непрерывное отображение $\tilde{f}_{s'}\colon s' \longrightarrow \mathscr{R}^{n+1}$, продолжающее отображение $f_{s'}$. Обозначим через p проекцию пространства $\mathscr{R}^{n+1} - \{O\}$ на сферу S^n, которая каждой точке $M \neq O$ из $\mathscr{R}^{n+1}$ ставит в соответствие точку M' пересечения луча OM со сферой S^n. Отображение $p\tilde{f}_{s'}$ определено на множестве

$$A_{s'} = \tilde{f}_{s'}^{-1}(\mathscr{R}^{n+1} - \{O\}),$$

которое открыто в s' и содержит множество $\sigma' \cap s'$. Следовательно, $p\tilde{f}_{s'}$ является продолжением отображения $f_{s'}\colon\ \sigma' \cap s' \longrightarrow S^n$ на множество $A_{s'}$. Для барицентрического подразделения достаточно большого порядка симплекса s' диаметры симплексов подразделения меньше $d/2$, где d — расстояние от замкнутого множества $s' \cap \sigma'$ до замкнутого множества $s' - A_{s'}$. Симплексы этого подразделения, которые пересекают множество $s' \cap \sigma'$, содержатся в $A_{s'}$, и на этих симплексах определено отображение $p\tilde{f}_{s'}$. Повторяя эти рассуждения для всех симплексов s' из $\mathscr{S}'$, для которых $s' \cap \sigma' \neq \varnothing$, получаем отображение $\tilde{f}'\colon \mathscr{S}'' \longrightarrow S^n$, определенное на конечном объединении $\mathscr{S}'' \supset \sigma'$ симплексов подразделения $\mathscr{S}'$, которое продолжает отображение f'. Но $\mathscr{S}''$ — симплициальный полиэдр размерности $n'' \leqslant n' < n$. Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для симплексов, показывают, что отображение $\tilde{f}'$ гомотопно постоянному отображению $\mathscr{S}'' \longrightarrow p \in S^n$. Если h' — такая гомотопия, то отображение h: $s \times I \to S^n$, заданное формулой

$$h(x, t) = h'(F^{-1}(x), t) \qquad (x \in s),$$

является ∂-деформацией отображения f в некоторое постоянное отображение. Это противоречит предположению, сделанному относительно отображения f. Следовательно, не существует гомоморфизма $F: \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 18. *Размерности двух гомеоморфных симплициальных полиэдров одинаковы.*

22. Группы когомологий

Пусть задан цепной комплекс $K = \{C_q, \partial\}$, где C_q — абелевы группы и ∂ — оператор дифференцирования, определенный на прямой сумме групп C_q так, что

$$\partial(C_q) \subset C_{q-1}.$$

С комплексом K можно ассоциировать *коцепной комплекс* $K' = \{C^q, \delta\}$, где C^q — группа гомоморфизмов группы C_q в группу целых чисел $\mathbf{Z}$, т. е.

$$C^q = \operatorname{Hom}(C_q, \mathbf{Z}).$$

Элементы группы C^q называются *коцепями размерности* q.

Оператор δ определяется формулой

$$(\delta f)(t) = f(\partial t), \quad t \in C_{q+1}, \quad f \in C^q, \tag{228}$$

иначе говоря, δ сопоставляет каждому гомоморфизму f группы C_q в группу $\mathbf{Z}$ гомоморфизм δf группы C_{q+1} в $\mathbf{Z}$, который каждой цепи $t \in C_{q+1}$ ставит в соответствие целое число $f(\partial t)$.

Из формулы (228) следует

$$(\delta\delta f)(u) = (\delta f)(\partial u) = f(\partial\partial u) = 0,$$

т. е.

$$\delta\delta = 0.$$

Это показывает, что δ — дифференцирование, для которого

$$\delta(C^q) \subset C^{q+1}. \tag{229}$$

Коциклами группы C^q являются коцепи f размерности q, для которых $\delta f = 0$, а коцепи вида δg, $g \in C^{q-1}$, называются *кограницами*. В силу формулы (229) коциклы из C^q образуют подгруппу $Z^q(K)$, а кограницы из C^q — подгруппу $B^q(K)$ группы $Z^q(K)$. Факторгруппы

$$H^q(K') = H^q(K) = Z^q(K)/B^q(K)$$

называются группами *когомологий* комплекса K' или цепного комплекса K, с которым ассоциирован комплекс K'.

Из формулы (228) следует, что $f(\partial t)=0$ для любой цепи $t \in C_{q+1}$, если f — коцикл, т. е. если $\delta f=0$. Следовательно, для коцикла $f \in C^q$ имеем

$$f(B_q)=0. \qquad (230)$$

Обратно, если для некоторой коцепи $f \in C^q$ имеет место соотношение (230), то для любой цепи $t \in C_q$ имеем

$$(\delta f)(t)=f(\partial t)=0.$$

Значит, $\delta f=0$, т. е. f — коцикл. Таким образом, соотношение (230) характеризует коциклы группы $C^q(K)$.

Из формулы (230) следует, что любой коцикл f индуцирует гомоморфизм факторгруппы C_q/B_q в группу $\mathbf{Z}$. Обратно, любой гомоморфизм факторгруппы C_q/B_q, наложенный на канонический гомоморфизм группы C_q в C_q/B_q, дает коцикл. Следовательно, имеем $Z^q \approx \operatorname{Hom}(C_q/B_q, \mathbf{Z})$.

Если f — кограница, т. е. $f=\delta g$ $(g \in C^{q-1})$, то из формулы (228) следует

$$f(u)=g(\partial u), \quad u \in C_q.$$

Итак, f определена ограничением гомоморфизма g на подгруппу B_{q-1} из C_{q-1}.

Если предположить, что u — цикл, т. е. $\partial u=0$, то получим $f(u)=0$. Следовательно, для кограниц группы C^q имеем

$$f(Z_q)=0. \qquad (231)$$

Обратно, если коцепь f удовлетворяет условию (231), то гомоморфизм

$$f\colon C_q \to \mathbf{Z}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\bar{f}\colon C_q/Z_q \to \mathbf{Z}.$$

Так как Z_q — ядро эпиморфизма

$$\partial\colon C_q \to B_{q-1},$$

то

$$C_q/Z_q \approx B_{q-1},$$

и, следовательно, f определяет гомоморфизм

$$g\colon B_{q-1} \to \mathbf{Z}.$$

Гомоморфизмы f, g и $\bar{f}$ связаны соотношениями

$$f(t)=\bar{f}(t+Z_q)=g(\partial t).$$

Поэтому гомоморфизм f определен гомоморфизмом g группы B_{q-1} в группу $\mathbf{Z}$.

Если гомоморфизм g может быть продолжен до гомоморфизма $\bar{g}$ группы C_{q-1}, то f — кограница коцепи $\bar{g}$, так как для любой коцепи $t \in C_q$

$$f(t) = g(\partial t) = \bar{g}(\partial t).$$

Продолжение $\bar{g}$ гомоморфизма g существует, если группа C_{q-1} может быть разложена в прямую сумму группы B_{q-1} и некоторой подгруппы B'_{q-1}.

В результате получаем следующую теорему.

Теорема 19. *Группа коциклов Z^q изоморфна группе* $\operatorname{Hom}(C_q/B_q, \mathbf{Z})$; *группа кограниц B^q изоморфна группе* $\operatorname{Hom}(B_{q-1}, \mathbf{Z})$, *если любой гомоморфизм группы B_{q-1} в $\mathbf{Z}$ может быть продолжен до гомоморфизма группы C_{q-1} в группу $\mathbf{Z}$.*

Пусть $L = \{D_q, \partial\}$ — подкомплекс комплекса K (т. е. мы имеем $D_q \subset C_q$, $\partial(D_q) \subset D_{q-1}$) такой, что группы гомологий комплексов K и L изоморфны,

$$H_q(K) \approx H_q(L), \tag{232}$$

при изоморфизме, заданном включением L в K.

Из точной последовательности пары (K, L)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*} \ldots,$$

где i_* — изоморфизмы, следует, что ядром изоморфизма j_* является $H_q(K)$. Это значит, что образом j_* будет 0, и, следовательно, гомоморфизм ∂ должен быть мономорфизмом. С другой стороны, образ ∂ совпадает с ядром мономорфизма i_*. Поскольку это ядро нулевое, образом мономорфизма ∂ будет 0. Итак, $H_q(K, L) = 0$.

Таким образом, любой цикл из $C_q(K, L)$ является границей. Иными словами, для любой цепи u из $C_q = C_q(K)$, для которой

$$\partial u \in C_{q-1}(L),$$

должна существовать цепь u' из $C_q(L)$ такая, что

$$u = u' + b \quad [b \in B_q(K)]. \tag{233}$$

Предположим, что каждая группа C_q свободная и β_q — ее база и что β_0 содержит базу группы D_0. Построим индукцией по размерности q последовательность гомоморфизмов $p: C_q \to D_q$, $\mathscr{D}: C_q \to C_{q+1}$ так, чтобы выполнялись соотношения (234), (235), (236), приведенные ниже:

$$p\partial = \partial p, \tag{234}$$

$$\mathscr{D}c' = 0, \quad p(c') = c' \text{ для любого } c' \in D_q, \tag{235}$$

$$p(c) \in D_q, \quad c - p(c) = \mathscr{D}\partial c + \partial\mathscr{D}c \text{ для любого } c \in C_q. \tag{236}$$

Для цепи c размерности 0 имеем $\partial c = 0$, и из формулы (233) следует, что существует цепь $c' \in D_0$ такая, что

$$c - c' \in B_0. \tag{237}$$

Если для каждого элемента c базиса β_0 выбрать c' так, чтобы выполнялись условия (235) и (237), то отображение $p: c \to c'$ может быть продолжено до гомоморфизма

$$p: C_0 \to D_0.$$

Аналогично выберем для каждого элемента c базиса β_0 такой элемент $u \in C_1$, что $\partial u = c - c'$. Это возможно в силу формулы (237). Полагая $u = \mathscr{D}(c)$, получаем гомоморфизм

$$\mathscr{D}: C_0 \to C_1,$$

и формула (236) справедлива для размерности 1.

Предположим, что мы построили гомоморфизмы $\mathscr{D}$ и p до размерности $q-1$ включительно. Рассмотрим элемент c базы β_q группы C_q. Имеем $\partial c \in C_{q-1}$ и, следовательно, элемент $\mathscr{D}\, \partial c$ определен. Пользуясь формулой (236) для цепи ∂c, простыми вычислениями находим

$$\partial(c - \mathscr{D}\, \partial c) = \partial c - \partial \mathscr{D}\, \partial c = \partial c - (\partial c - p\, \partial c - \mathscr{D}\, \partial\partial c) = p(\partial c). \tag{238}$$

Но $p(\partial c) \in D_{q-1}$, следовательно, можно применить формулу (233) к цепи $\bar{c} = c - \mathscr{D}\, \partial c$. При этом обнаруживается, что существуют цепи $c' \in D_q$ и $u \in C_{q+1}$ такие, что

$$c - \mathscr{D}\, \partial c = c' + \partial u.$$

Если положить $u = \mathscr{D} c$, $c' = p(c)$, то последняя формула принимает вид (236), а формула (238) дает

$$p(\partial c) = \partial(c' + \partial u) = \partial c' = \partial p(c).$$

Следовательно, при выборе, сделанном выше, выполняется и условие (234). Если $c \in D_q$, то $\partial c \in D_q$ и $D \partial c = 0$; в этом случае выберем $c' = c$ и $u = 0$ и тогда условие (235) будет выполнено.

Рассмотрим теперь коцепной комплекс $L = \{D^q, \delta\}$, ассоциированный с комплексом $L = \{D_q, \partial\}$.

Составляя композицию гомоморфизмов

$$p: C_q \to D_q, \quad \mathscr{D}: C_q \to C_{q+1}$$

с гомоморфизмами типа

$$f': D_q \to \mathbf{Z}, \quad g: C_{q+1} \to \mathbf{Z},$$

получаем гомоморфизмы

$$f'p = \bar{p}(f'): C_q \to \mathbf{Z}, \quad g\mathscr{D} = \overline{\mathscr{D}}(g): C_q \to \mathbf{Z}.$$

Таким образом, операторы p и $\mathscr{D}$ определяют операторы

$$\bar{p}: D^q \to C^q, \quad \overline{\mathscr{D}}: C^{q+1} \to C^q.$$

Включение

$$i\colon D_q \subset C_q$$

также сопоставляет каждой коцепи $f \in C^q$ коцепь f' из D^q при помощи ограничения гомоморфизма f на группу $D_q \subset C_q$:

$$f' = \bar{i}(f) = f \mid D_q = fi.$$

Следовательно, мы имеем гомоморфизм

$$\bar{i}\colon C^q \to D^q.$$

Из соотношения (235), применяя гомоморфизм $f' \in D^q$, получаем

$$(f'p)(c') = f(c') = f'(c'),$$

или

$$\bar{i}[\bar{p}(f')] = f'.$$

Последнее соотношение можно записать в следующей символической форме:

$$\bar{i}\bar{p} = 1. \tag{238'}$$

Вычислим для произвольной цепи $f' \in C^q$ сумму

$$(\bar{\mathscr{D}}\delta)(f) + (\delta\bar{\mathscr{D}})(f).$$

Для произвольного коцикла $c \in C_q$ будем иметь

$$(\bar{\mathscr{D}}\delta f)(c) = [(\delta f)\mathscr{D}](c) = f(\partial\mathscr{D}c),$$

$$(\delta\bar{\mathscr{D}}f)(c) = (\bar{\mathscr{D}}f)(\partial c) = f(\mathscr{D}\,\partial c).$$

Пользуясь формулой (236), получаем

$$(\bar{\mathscr{D}}\delta f)(c) + (\delta\bar{\mathscr{D}}f)(c) = f(\partial\mathscr{D}c + \mathscr{D}\,\partial c) = f[c - p(c)],$$

или, иначе,

$$\bar{\mathscr{D}}\delta f + \delta\bar{\mathscr{D}}f = f - fp.$$

Но так как образ гомоморфизма p принадлежит группе D_q, то

$$fp = f'p = \bar{p}(f') = (\bar{p}\cdot\bar{i})(f)$$

и, следовательно,

$$\bar{\mathscr{D}}\delta f + \delta\bar{\mathscr{D}}f = f - \bar{p}(\bar{i})(f). \tag{239}$$

Гомоморфизмы

$$\bar{i}: C^q \to D^q, \qquad \bar{p}: D^q \to C^q$$

индуцируют гомоморфизмы между группами когомологий комплексов K и L:

$$i^*: H^q(K) \to H^q(L), \qquad p^*: H^q(L) \to H^q(K).$$

Из формулы (238') следует, что

$$i^*p^* = 1, \tag{240}$$

а из формулы (239) находим аналогичную формулу

$$p^*i^* = 1. \tag{241}$$

Действительно, из (239) следует, что f и $(\overline{pi})(f)$ — коциклы, отличающиеся на кограницу, если f — коцикл, т. е. если $\delta f = 0$. Следовательно,

$$p^*i^*(f + B^q) = f + B^q. \tag{242}$$

Формулы (241), (240) показывают, что p^* и i^* — изоморфизмы. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 20. *Если группы C_q комплекса $K = \{C_q, \partial\}$ свободные и если для некоторого подкомплекса $L = \{D_q, \partial\}$ имеют место изоморфизмы*

$$H_q(K) \approx H_q(L) \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots), \tag{243}$$

и C_0 допускает базу, содержащую базу группы D_0, то группы когомологий этих двух комплексов также соответственно изоморфны

$$H^q(K) \approx H^q(L) \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots). \tag{244}$$

23. Группы когомологий двумерных компактных ориентируемых поверхностей рода p, сферы S^n и вещественного проективного пространства P^n

Мы показали, что для двумерной компактной ориентируемой поверхности S рода p существует фундаментальный цикл σ размерности 2; $2p$ циклов размерности 1, например $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_p$; и цикл размерности 0, которым может быть произвольная точка q. Эти циклы независимы в том смысле, что ни одна линейная комбинация с целыми коэффициентами этих циклов не является границей. Мы показали также, что любой другой цикл поверхности отличается от комбинации указанных выше циклов на границу. Отсюда следует, что элементы σ, a_i, b_i, и q порождают подкомплекс L цепного комплекса K (состоящего из сингулярных цепей или цепей некоторой триангуляции поверхности), группы гомологий которого изоморфны группам гомологий самого комплекса K. Оператор дифференцирования этого подкомплекса L — нулевой, так как элементы из L являются циклами.

Группа коцепей D^2 комплекса L образована гомоморфизмами свободной абелевой группы (σ), порожденной циклом σ, в группу $\mathbf{Z}$. Любая коцепь из D^2 является коциклом, так как в L не существует ненулевых коцепей размерности 3. Ни один ненулевой коцикл из D^2 не может быть кограницей. Действительно, если $f = \delta g$ — элемент из D^2, где g — коцепь из D^1, то для любой цепи $c = m\sigma$ из C_2 будем иметь $f(c) = g(\partial c) = g(0) = 0$. Отсюда следует что

$$H^2(S) = \operatorname{Hom}[(\sigma), \mathbf{Z}] \approx \mathbf{Z}. \tag{245}$$

Сходные рассуждения показывают, что любая коцепь из D^1 является коциклом и что не существует ненулевых коциклов, являющихся кограницами. Поэтому группа когомологий $H^1(S)$ изоморфна группе гомоморфизмов свободной абелевой группы с $2p$ образующими a_i, b_i в группу $\mathbf{Z}$, т. е.

$$H^1(S) \approx \mathbf{Z}^{2p}. \tag{246}$$

Аналогично доказывается справедливость формулы

$$H^0(S) \approx \mathbf{Z}. \tag{247}$$

Группы когомологий, размерность которых превышает 2, — нулевые, так как поверхности имеют размерность 2.

Для сферы S^n рассмотрим подкомплекс L комплекса K сингулярных цепей, порожденный фундаментальным циклом σ сферы S^n и циклом размерности 0, например некоторой точкой g сферы. Тогда включение L в K будет индуцировать изоморфизмы между группами гомологий комплексов L и K. Дифференцирование в комплексе L тривиальное. Отсюда следует, что единственными ненулевыми группами когомологий сферы S^n являются группы

$$H^0(S^n) \approx H^n(S^n) \approx \mathbf{Z}.$$

В предыдущих примерах комплексы L не содержали ненулевых границ. В случае вещественного проективного пространства P^n такой комплекс не может быть построен. В самом деле, мы видели, что ненулевыми циклами в P^n являются кратные некоторого цикла, которым может быть: точка $q \in P^n$, проективные подпространства пространства P^n нечетной размерности, меньшей чем n, например, P^1, P^3, ..., и, наконец, кратные фундаментального цикла P^n, если n — нечетное число. Удвоенные циклы P^1, P^3, ... являются границами. Рассмотрим цепи Q^2, Q^4, ... четной размерности из P^n, границами которых являются цепи $2P^1$, $2P^3$, ... и комплекс L, порожденный элементами $(q, P^1, Q^2, P^3, Q^4, \ldots, \alpha^n)$, где $\alpha^n = P^n$, если n — нечетное, и $\alpha^n = Q^n$, если n — четное. Группы гомологий этого комплекса изоморфны группам гомологий пространства P^n при изоморфизме, заданном включением комплекса L в комплекс сингулярных цепей пространства P^n.

Для коцепи f четной размерности $(f \in D^{2p},\ p > 0)$ комплекса L имеем $(\delta f)(D_{2p+1}) = f(\partial D_{2p+1}) = 0$, так как цепями нечетной размерности являются циклы. Отсюда следует, что любая коцепь $f \in D^{2p}$ является коциклом.

Для коцепи $g \in D^{2p-1}$ имеем $(\delta g)(Q^{2p}) = g(\partial Q^{2p}) = g(2P^{2p-1}) = 2g(P^{2p-1})$. Следовательно, образ кограницы δg образован четными числами $2m$, $m = g(P^{2p-1})$, и составляет подгруппу группы $\mathbf{Z}$, порожденную числами $2m$. Обратно, если положить $g(P^{2p-1}) = m$ для любого целого числа m, то получим коцепь $g \in D^{2p-1}$, причем образ кограницы δg этой коцепи порожден в $\mathbf{Z}$ элементами $2m$.

Если обозначить через γ^{2p} коцикл, определенный формулой

$$\gamma^{2p}(Q^{2p}) = 1,$$

то любой другой коцикл из D^{2p} будет иметь вид $m\gamma^{2p}$ и для четных значений m получим кограницы. Следовательно, мы будем иметь

$$H^{2p}(P^n) \approx \mathbf{Z}_2 \qquad (0 < 2p < n), \tag{248}$$

где $\mathbf{Z}_2$ — циклическая группа второго порядка.

Для $p = 0$ не существует кограниц в D^0, следовательно,

$$H^0(P^n) = D^0 \approx \mathbf{Z}. \tag{249}$$

Если коцепь f принадлежит D^{2p+1}, $2p+1 < n$, и если $(\delta f)(D^{2p+2}) = f(\partial D^{2p+2}) = 0$, то эта коцепь является коциклом. Но группа ∂D^{2p+2} порождена элементом $2P^{2p+1}$. Следовательно, должно выполняться соотношение $2f(P^{2p+1}) = 0$, откуда $f = 0$. Таким образом, не существует коциклов нечетной размерности меньше n и

$$H^{2p+1}(P^n) = 0 \qquad (2p+1 < n). \tag{250}$$

Если $f \in D^n$, а n — нечетное число, то $(\delta f)(D^{n+1}) = 0$, так как $D^{n+1} = 0$. Следовательно, любая коцепь из D^n является коциклом. Для определения кограниц из D^n рассмотрим коцепь $g \in D^{n-1}$. Для цепи $c \in D_n$ будем иметь $(\delta g)(c) = g(\partial c)$; но любая цепь из D_n является циклом, так как она — кратное пространства P^n. Следовательно, $\delta g = 0$, и в D^n не существует ненулевых кограниц. В случае нечетного n можно записать изоморфизм

$$H^n(P^n) = D^n \approx \mathbf{Z}, \tag{251}$$

так как группа D_n свободная и имеет одну образующую P^n. Следовательно,

$$D^n = \operatorname{Hom}(D_n, \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим четные n. Группа D^n порождена Q^n и коцепь $f: D^n \to \mathbf{Z}$ является кограницей тогда и только тогда, когда $f(Q^n)$ — четное число: следовательно,

$$H^n(P^n) \approx \mathbf{Z}_2. \tag{251'}$$

Формулы (248), (249), (250), (251), (251') дают группы когомологий вещественных проективных пространств размерности n. Симплициальный полиэдр $\mathcal{S}$ размерности n называется *ориентируемым*, если $H_n(\mathcal{S}) \neq 0$, и *неориентируемым* в противном случае.

Отсюда следует, что вещественные проективные пространства нечетной размерности — ориентируемые, а четномерные пространства — неориентируемые.

Заметим в качестве еще одного примера, что для стягиваемых пространств $\mathscr{T}$ группы гомологий комплекса сингулярных цепей $C(\mathscr{T})$ совпадают с группами гомологий подкомплекса $D(\mathscr{T})$, порожденного некоторой точкой из $\mathscr{T}$. Однако группы когомологий того подкомплекса, кроме группы размерности 0, являющейся руппой $\mathbf{Z}$, тривиальные. Следовательно,

$$H^0(\mathscr{T}) \approx \mathbf{Z}, \quad H^q(\mathscr{T}) = 0 \qquad (q > 0).$$

ГЛАВА III

ИНДУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП НА ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1])

1. Индуктивные системы абелевых групп и ассоциированные группы гомологий

Пусть задано топологическое пространство $\mathcal{T}$. Будем называть индуктивной системой абелевых групп на $\mathcal{T}$ структуру $\mathcal{J}=\{G_U, \varphi_U^V\}$, состоящую из некоторой функции, которая каждому открытому множеству U из $\mathcal{T}$ ставит в соответствие абелеву группу G_U, и функции φ, которая каждой паре открытых множеств U и V при условии $U\subset V$ ставит в соответствие гомоморфизм

$$\varphi_U^V: G_U \to G_V, \tag{1}$$

причем

$$\varphi_V^W \varphi_U^V = \varphi_U^W \tag{2}$$

для любой тройки $U\subset V\subset W$.

Следовательно, $\mathcal{J}$ — индуктивное семейство абелевых групп, множеством индексов которого является множество открытых множеств пространства $\mathcal{T}$, упорядоченное путем включения.

Пусть задано открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$. Обозначим через $K(\mathcal{U})$ симплициальный комплекс, образованный конечными упорядоченными подмножествами $\{U_0, \ldots, U_q\}$ семейства $\mathcal{U}$, имеющими непустые пересечения в $\mathcal{T}$, т. е. $U_0\cap U_1\cap\ldots\cap U_q\neq\varnothing$. Обозначим далее через $C(\mathcal{U}, \mathcal{J})$ прямую сумму групп

$$\mathcal{J}\{U_0, \ldots, U_q\} = G_{U_0\cap\ldots\cap\, q},$$

зависящих от индекса $\{U_0, \ldots, U_q\}\in K(\mathcal{U})$[2]). Определим в группе

---

[1]) См. для справок: Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, М., 1961; Серр Ж. П., Когерентные алгебраические пучки, сборник «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, стр. 372—450; Hirzebruch F., Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie, Springer, 1962.

[2]) Множество U из $\mathcal{T}$ будет, возможно, записываться несколькими различными способами как пересечение множеств из $\mathcal{U}$. В этом случае группа G_U появляется столько же раз в прямой сумме $C(\mathcal{U}, \mathcal{T})$.

$C(\mathcal{U}, \mathcal{J})$ оператор дифференцирования формулой

$$\partial g = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varphi_{U_0\cap\ldots\cap U_q}^{U_0\cap\ldots\cap\hat{U}_i\cap\ldots\cap U_q}(g) \quad (g \in \mathcal{J}\{U_0, \ldots, U_q\}), \tag{3}$$

где $\varphi_{U_0\cap\ldots\cap U_q}^{U_0\cap\ldots\cap\hat{U}_i\cap\ldots\cap U_q}(g)$ — элемент группы $\mathcal{J}\{U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_q\}$ ($\hat{U}_i$ означает, что в соответствующем выражении пропущено U_i). Немедленно убеждаемся, что

$$\partial\partial = 0. \tag{4}$$

Действительно, учитывая соотношение (2) и принимая во внимание, что

$$U_0 \cap \ldots \cap U_q \subset \left\{\begin{matrix} U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_i \cap \ldots \cap U_q \\ U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_j \cap \ldots \cap U_q \end{matrix}\right\} \subset$$
$$\subset U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_i \cap \ldots \cap \hat{U}_j \cap \ldots \cap U_q,$$

для элемента g из $\mathcal{J}\{U_0, \ldots, U_q\}$ можно записать

$$\partial\partial g = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial [\varphi_{U_0\cap\ldots\cap U_q}^{U_0\cap\ldots\cap\hat{U}_i\cap\ldots\cap U_q}(g)] =$$
$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Big[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \varphi_{U_0\cap\ldots\cap U_q}^{U_0\cap\ldots\cap\hat{U}_j\cap\ldots\cap U_i\cap\ldots\cap U_q}(g) +$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j-1} \varphi_{U_0\cap\ldots\cap U_q}^{U_0\cap\ldots\cap\hat{U}_i\cap\ldots\cap\hat{U}_j\cap\ldots\cap U_q}(g)\Big].$$

Каждая система $\{U_0, \ldots, \hat{U}_r, \ldots, \hat{U}_s, \ldots, U_q\}$ встречается в предыдущем равенстве два раза: один раз с коэффициентом $(-1)^{r+s}$ и второй раз с коэффициентом $(-1)^{r+s-1}$, что и доказывает соотношение (4).

Следовательно, прямая сумма $C(\mathcal{U}, \mathcal{J})$ — группа с дифференцированием, которая может быть превращена в комплекс. Для этого нужно ввести подгруппы $C_q(\mathcal{U}, \mathcal{J})$, каждая из которых состоит из прямой суммы групп $\mathcal{J}\{U_0, \ldots, U_q\}$ при заданном q.

Предоставляем читателю возможность убедиться самостоятельно в том, что в частном случае, когда все группы G_U изоморфны группе $\mathbf{Z}$, а изоморфизмы φ_U^V представляют собой тождественное отображение группы $\mathbf{Z}$, цепной комплекс $K(\mathcal{U}, \mathcal{J}) = \{C_q(\mathcal{U}, \mathcal{J}), \partial\}$ совпадает с комплексом, который появляется в теории гомологий по Чеху.

Так же как и в теории Чеха, если заданы два покрытия $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ (причем $\mathcal{U}'$ — более тонкое покрытие, чем $\mathcal{U}$) и если ρ — отображение $\mathcal{U}'$ в $\mathcal{U}$, при котором

$$U' \subset \rho(U') \text{ для любого } U' \text{ из } \mathcal{U}', \tag{5}$$

то можно определить гомоморфизм

$$\bar{\rho}: K(\mathfrak{U}', \mathfrak{J}) \to K(\mathfrak{U}, \mathfrak{J}),$$

принимая для элементов $g \in \mathfrak{J}\{U_0, \ldots, U_q\}$

$$\bar{\rho}(g) = \varphi_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}^{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(g), \quad U_i = \rho(U'_i). \tag{6}$$

Гомоморфизм $\bar{\rho}$ перестановочен с дифференцированием комплексов $K(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$, $K(\mathfrak{U}', \mathfrak{J})$, так как результат этих дифференцирований записывается при помощи операций только над системой индексов $\{0, 1, \ldots, q\}$. Если имеются два различных отображения ρ и σ, подчиненных условию (6), то, как и в теории Чеха, можно определить гомоморфизм

$$D: C_q(\mathfrak{U}', \mathfrak{J}) \to C_{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$$

формулой

$$Dg = \sum_{i=0}^{q} (-1)^j \varphi_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}^{U_0 \cap \ldots \cap U_j \cap V_j \cap V_{j+1} \cap \ldots \cap V_q}(g),$$

где

$$g \in C_q(\mathfrak{U}', \mathfrak{J}), \quad U_i = \rho(U'_i), \ V_i = \sigma(U'_i).$$

Имеет место соотношение

$$\partial Dg + D\,\partial g = \bar{\sigma}(g) - \bar{\rho}(g).$$

Из него видно, что гомоморфизмы $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$ индуцируют один и тот же гомоморфизм между группами гомологий комплексов $K(\mathfrak{U}', \mathfrak{J})$, $K(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$:

$$\psi_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}: H(\mathfrak{U}', \mathfrak{J}) \to H(\mathfrak{U}, \mathfrak{J}).$$

Это позволяет построить проективный предел групп $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ и гомоморфизмов $\psi_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}$. Этот предел называется *группой гомологий пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами из индуктивной системы $\mathfrak{J}$* и обозначается $H(\mathcal{T}, \mathfrak{J})$. Если мы ограничимся подгруппами $C_q(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ комплексов $K(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$, то получим *группы гомологий $H_q(\mathcal{T}, \mathfrak{J})$* размерности *$q$ топологического пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами из $\mathfrak{J}$*.

Если G_U для каждого открытого множества U представляет собой одну и ту же группу G и для любой пары $U \subset V$ φ_U^V является тождественным отображением группы G на себя, то говорят, что $\mathfrak{J}$ есть *постоянная* система, и соответствующие группы гомологий обозначаются $H_q(\mathcal{T}, G)$. Если G — аддитивная группа рациональных чисел или аддитивная группа вещественных чисел, то группы $H_q(\mathcal{T}, G)$ называются группами гомологий пространства $\mathcal{T}$ с рациональными или соответственно с вещественными коэффициентами.

Обозначим через $G_U = C_q(U)$ свободную абелеву группу, порожденную множеством сингулярных симплексов размерности q пространства $\mathcal{T}$, образы которых лежат в множестве U. Гомоморфизм $\varphi_U^V : G_U \to G_V$ $(U \subset V)$ определим как включение группы G_U в G_V (если образ симплекса лежит в U, то он лежит и в V). При этом мы получим индуктивную систему групп на пространстве $\mathcal{T}$.

Другой пример индуктивной системы групп на пространстве $\mathcal{T}$ можно получить, если каждому открытому множеству U сопоставить сингулярную гомологию $H_q(U)$ подпространства U и определить гомоморфизм

$$\varphi_U^V : H_q(U) \to H_q(V) \qquad (U \subset V)$$

как гомоморфизм, индуцированный включением группы $C_q(U)$ в $C_q(V)$.

2. Проективные системы абелевых групп

Проективной системой $\mathcal{P} = \{H_U, \psi_V^U\}$ абелевых групп на топологическом пространстве $\mathcal{T}$ называется функция, которая ставит в соответствие каждому открытому множеству U из $\mathcal{T}$ абелеву группу H_U вместе с системой гомоморфизмов

$$\psi_U^V : H_V \to H_U \qquad (U \subset V), \tag{7}$$

определенных для каждой пары $U \subset V$ и подчиненных условию

$$\psi_U^V \psi_V^W = \varphi_U^W \qquad (U \subset V \subset W). \tag{8}$$

Элементы группы H_U называются *сечениями* системы $\mathcal{P}$ над множеством U.

Пусть заданы индуктивная система $\mathcal{J} = \{G_U, \varphi_U^V\}$ на пространстве $\mathcal{T}$ и произвольная абелева группа A. Можно определить проективную систему $\mathcal{P} = \{H_U, \psi_U^V\}$, положив

$$H_U = \operatorname{Hom}(G_U, A),$$
$$\psi_U^V(\alpha) = \alpha\varphi_U^V \quad [\alpha \in \operatorname{Hom}(G_V, A),\ U \subset V].$$

В самом деле, если α — гомоморфизм группы G_V в группу A, то $\alpha\varphi_U^V$ — гомоморфизм группы G_U в группу A и, следовательно, ψ_U^V — гомоморфизм группы $H_V = \operatorname{Hom}(G_V, A)$ в группу $H_U = (\operatorname{Hom} G_U, A)$.

Пусть $U \subset V \subset W$ и $\alpha \in \operatorname{Hom}(G_W, A)$. Тогда

$$(\psi_U^V \psi_V^W)(\alpha) = \psi_U^V(\alpha\varphi_V^W) = \alpha\varphi_V^W \varphi_U^V = \alpha\varphi_U^W = \psi_U^W(\alpha).$$

Условие (1) влечет за собой условие (8) и, следовательно, группы H_U и гомоморфизмы ψ_U^V определяют проективную систему.

Любая постоянная система абелевых групп является одновременно проективной и индуктивной.

Другой пример проективной системы можно получить, если каждому открытому множеству U пространства $\mathscr{T}$ сопоставить аддитивную группу C_U непрерывных функций, определенных на подпространстве U пространства $\mathscr{T}$, а гомоморфизм

$$\psi_U^V : C_V \to C_U \qquad (U \subset V)$$

определить как оператор, который каждой функции, определенной на V, ставит в соответствие ее ограничение на U.

Пусть заданы две проективные системы $\mathscr{P} = \{H_U, \psi_U^V\}$ и $\mathscr{P}' = \{H'_U, \psi'^V_U\}$, определенные на одном и том же топологическом пространстве $\mathscr{T}$. Система гомоморфизмов ρ_U, определенных для каждого открытого множества $U \subset \mathscr{T}$,

$$\rho_U : H_U \to H'_U,$$

и подчиненных требованию коммутативности

$$\psi'^V_U \rho_V = \rho_U \varphi_U^V \qquad (U \subset V) \tag{9}$$

для любой пары открытых множеств из $\mathscr{T}$, связанных условием $U \subset V$, называется *гомоморфизмом* системы $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}'$.

Подсистемой системы $\mathscr{P} = \{H_U, \varphi_U^V\}$ называется система $\mathscr{P}' = \{H'_U, \psi'^V_U\}$, для которой группы H'_U являются подгруппами групп H_U, а ψ'^V_U являются ограничениями гомоморфизмов ψ_U^V на подгруппы H'_V.

Группы H'_U должны удовлетворять условиям

$$\psi_U^V(H'_V) \subset H'_U.$$

Включения

$$i_U : H'_U \to H_U$$

определяют гомоморфизм системы $\mathscr{P}'$ в систему $\mathscr{P}$.

Если $\rho = \{\rho_U\}$ — гомоморфизм проективной системы $\mathscr{P}$ в проективную систему $\mathscr{P}'$, то каждому открытому множеству U можно поставить в соответствие ядро N_U гомоморфизма ρ_U. Из условия (9) следует, что $\psi_U^V(\alpha)$ — элемент группы N_U, если α — элемент группы N_V. Действительно,

$$\rho_U [\psi_U^V(\alpha)] = \psi'^V_U [\rho_V(\alpha)] = \varphi'^V_U(0) = 0$$

для любого открытого множества $U \subset V$. Поэтому

$$\psi_U^V(N_V) \subset N_U \qquad (U \subset V).$$

Отсюда следует, что группы N_V вместе с ограничениями на них гомоморфизмов ψ_U^V образуют подсистему системы $\mathscr{P}$. Эта подсистема называется ***ядром гомоморфизма*** ρ и обозначается $\mathscr{N}(\rho)$.

Если каждому открытому множеству U сопоставить образ I'_U гомоморфизма ρ_U, то для элемента $\alpha' = \rho_V(\alpha)$ $(\alpha \in H_V)$ группы I'_V будем иметь

$$\psi'^V_U(\alpha) = \psi'^V_U(\rho_V(\alpha)) = \rho_U(\psi^V_U(\alpha)),$$

следовательно, $\psi'^V_U(I'_V) \subset I'_U$ и группы I'_V вместе с ограничениями на них гомоморфизмов ρ_V образуют подсистему системы $\mathcal{P}'$. Эта подсистема называется *образом гомоморфизма* ρ и мы будем ее обозначать $\mathcal{J}(\rho)$.

Пусть задана проективная система $\mathcal{P} = \{H_U, \psi^V_U\}$ и ее подсистема $\mathcal{P}' = \{H'_V, \psi'^V_U\}$.

Поставим в соответствие каждому открытому множеству U факторгруппу $H''_U = H_U/H'_U$. Из свойства

$$\psi^V_U(H'_V) \subset H'_U$$

вытекает, что гомоморфизм ψ^V_U индуцирует гомоморфизм $\overline{\psi}^V_U$ группы H''_V в группу H''_U, заданный соотношением

$$\overline{\psi}^V_U(\alpha + H'_V) = \psi^V_U(\alpha) + H'_U \quad (\alpha \in H_V).$$

Для трех множеств $U \subset V \subset W$ имеем

$$(\overline{\psi}^V_U\overline{\psi}^W_V)(\alpha + H'_W) = \overline{\psi}^V_U[\psi^W_V(\alpha) + H'_V] = (\psi^V_U\psi^W_V)(\alpha) + H'_U =$$
$$= \psi^W_U(\alpha) + H'_U = \overline{\psi}^W_U(\alpha + H'_W).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\psi}^V_U\overline{\psi}^W_V = \overline{\psi}^W_U.$$

Таким образом, гомоморфизмы $\overline{\psi}^V_U$ и группы H''_U образуют проективную систему на пространстве $\mathcal{T}$. Эта система называется *факторсистемой* системы $\mathcal{P}$ по подсистеме $\mathcal{P}'$ и обозначается $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$.

Если обозначить через ρ_U каноническое отображение группы H_U на факторгруппу $H''_U = H_U/H'_U$, то для элемента $\alpha \in H_V$ и для подмножества $U \subset V$ будем иметь

$$\rho_U[\psi^V_U(\alpha)] = \psi^V_U(\alpha) + H_U = \overline{\psi}^V_U(\alpha + H_V) = \overline{\psi}^V_U[\rho_V(\alpha)],$$

откуда

$$\rho_U\psi^V_U = \overline{\psi}^V_U\rho_V.$$

Это уравнение показывает, что гомоморфизмы ρ_U определяют гомоморфизм ρ системы $\mathcal{P}$ на систему $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$. Ядром гомоморфизма ρ является, очевидно, система $\mathcal{P}'$, а образом ρ будет факторсистема $\mathcal{P}/\mathcal{P}'$.

Последовательность систем и гомоморфизмов

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}''$$

называется *точной*, если образ гомоморфизма α совпадает с ядром гомоморфизма β.

Нулевая система, которая каждому открытому множеству U сопоставляет тривиальную группу $H_U=0$, обозначается через 0.

Если гомоморфизм α входит в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F},$$

т. е. если ядро α равно нулю, то говорят, что α — *мономорфизм*.

Если гомоморфизм β: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ таков, что последовательность

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

точная, т. е. если образ β совпадает с системой $\mathcal{F}''$, то говорят, что β — *эпиморфизм*.

Изоморфизмом системы $\mathcal{F}$ на систему $\mathcal{F}'$ является гомоморфизм, который одновременно является мономорфизмом и эпиморфизмом.

Будем говорить, что проективная система $\mathcal{F}=\{H_U, \psi_V^U\}$ — *существенная*, если выполняется следующее условие: если для некоторого открытого множества U и для элемента t группы H_U существует открытое покрытие $\mathcal{A}$ множества U такое, что

$$\psi_A^U(t)=0 \text{ для любого } A \text{ из } \mathcal{A},$$

то $t=0$. Это условие можно сформулировать следующим образом: *любое локально тривиальное сечение тривиально.*

Проективная система $\mathcal{F}$ будет называться *полной*, если для любой системы открытых множеств U, U_α $(\alpha \in M)$, связанных соотношением

$$U=\bigcup_{\alpha \in M} U_\alpha,$$

и для любой системы элементов $t_\alpha \in H_{U_\alpha}$, связанных соотношениями

$$\psi_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(t_\alpha)=\psi_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(t_\beta),$$

где α и β — произвольные элементы из M, существует элемент t группы H_U такой, что для любого индекса α из M имеем

$$\psi_{U_\alpha}^U(t)=t_\alpha.$$

Это условие можно сформулировать следующим образом: любая *когерентная* система сечений t_α над множествами U_α может быть объединена в сечение над объединением множеств U_α.

В любой системе $\mathcal{F}$ локально тривиальные сечения над множеством U образуют подгруппу H_U^0 группы H_U. Для двух множеств

$U \subset V$ образ при отображении ψ_U^V локально тривиального элемента из H_V является локально тривиальным элементом из H_U. Действительно, если

$$V = \bigcup_\alpha V_\alpha, \quad t \in H_V, \quad \psi_{V_\alpha}^V(t) = 0,$$

то

$$U = \bigcup_\alpha (U \cap V_\alpha), \quad \psi_{U\cap V_\alpha}^U [\psi_U^V(t)] = \psi_{U\cap V_\alpha}^V(t) = \psi_{U\cap V_\alpha}^{V_\alpha} \psi_{V_\alpha}^V(t) = 0.$$

Следовательно, можно рассмотреть подсистему $\mathcal{F}_0 = \{H_U^0, \varphi_U^{0V}\}$ системы $\mathcal{F}$ и факторсистему $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.

Система $\mathcal{F}^*$ существенная. Действительно, предположим, что в $H_U^* = H_U/H_U^0$ существует локально тривиальное сечение t^* и для множеств U_α имеем

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = U, \quad \psi_{U_\alpha}^{*U}(t^*) = 0.$$

Если $t^* = t + H_U^0$ $(t \in H_U)$, то

$$\psi_{U_\alpha}^{*U}(t^*) = \psi_{U_\alpha}^U(t) + H_{U_\alpha}^0,$$

и из условия $\psi_{U_\alpha}^{*U}(t^*) = 0$ следует

$$t_\alpha = \psi_{U_\alpha}^U(t) \in H_{U_\alpha}^0.$$

В этом случае существует такое открытое покрытие множества U_α:

$$U_\alpha = \bigcup_\lambda U_\lambda^{(\alpha)},$$

что для любых индексов α и λ

$$\psi_{U_\lambda^{(\alpha)}}^{U_\alpha}(t_\alpha) = \psi_{U_\lambda^{(\alpha)}}^U(t) = 0.$$

Отсюда следует, что t локально тривиально, т. е. $t \in H_V^0$. Тогда $t^* = 0 \in H_U^*$.

Пусть $\mathcal{F} = \{H_U, \psi_U^V\}$ — проективная система. Рассмотрим для каждого открытого множества V и каждого открытого покрытия $\mathcal{V}$ множества V множество когерентных систем сечений $\{t_{V'}\}_{V' \in \mathcal{V}}$, т. е. удовлетворяющих условию

$$\psi_{V'\cap V''}^{V'}(t_{V'}) = \psi_{V'\cap V''}^{V''}(t_{V''})$$

для любых $V', V'' \in \mathcal{V}$. Когерентные системы $\{t_{V'}\}_{V'\in\mathcal{V}}$ образуют группу $H_V^{\mathcal{V}}$, если естественным образом определить сложение:

$$\{t_{V'}\}_{V'\in\mathcal{V}} + \{s_{V'}\}_{V'\in\mathcal{V}} = \{s_{V'} + t_{V'}\}_{V'\in\mathcal{V}}.$$

В прямой сумме $\mathscr{H}_V$ групп $H_V^{\mathscr{V}}$, соответствующих всем открытым покрытиям $\mathscr{V}$ множества V, определим подгруппу R_V, порожденную элементами

$$\{t_{V'}\}_{V'\in\mathscr{V}_1}-\{t_{V''}\}_{V''\in\mathscr{V}_2},$$

для которых при любых $V'\in\mathscr{V}_1$ и любых $V''\in\mathscr{V}_2$ имеем

$$\psi^{V'}_{V'\cap V''}(t_{V'})-\psi^{V''}_{V'\cap V''}(t_{V''})=0.$$

Группы $\mathscr{H}_U$ вместе с гомоморфизмами $\psi^V_U\colon \mathscr{H}_V\to\mathscr{H}_U$, заданными формулой

$$\psi^V_U(\{t'_V\}_{V'\in\mathscr{V}})=\{\psi^{V'}_{U\cap V'}(t_{V'})\}_{V'\in\mathscr{V}},$$

определяют полную проективную систему $\overline{\mathscr{F}}$. Это немедленно следует из определения групп $\mathscr{H}_V$. Элементы группы R_V — локально тривиальные, следовательно, система $\overline{\mathscr{F}}$ не является существенной. Покажем, что R_V образует группу всех локально тривиальных элементов из $\mathscr{H}_V$. Действительно, рассмотрим p открытых покрытий $\mathscr{V}_i$ множества V, и пусть

$$T=\sum_{i=1}^{p}\{t_{V'_{(i)}}\}_{V'_{(i)}\in\mathscr{V}_i} \tag{10}$$

— локально тривиальный элемент группы $\mathscr{H}_V$. Множества вида

$$V'=V'_{(1)}\cap V'_{(2)}\cap\dots\cap V'_{(p)}\quad (V'_{(i)}\in\mathscr{V}_i) \tag{11}$$

образуют открытое покрытие $\mathscr{V}$ того же множества V. Если T локально тривиально, то существует покрытие $\mathscr{U}$ множества V такое, что для любого U' из $\mathscr{U}$

$$\psi^V_{U'}(T)=\sum_{i=1}^{p}\{\psi^{V'_{(i)}}_{V'_{(i)}\cap U'}(t_{V'(i)})\}_{V'_{(i)}\in\mathscr{V}_i}=0.$$

Из этих соотношений для покрытия $\mathscr{V}$, состоящего из множеств V' вида (11), следует

$$\psi^V_{U'\cap V'}(T)=(\psi^{U'}_{U'\cap V'}\psi^V_{U'})(T)=\sum_{i=1}^{p}\{\psi^{V'_{(i)}}_{U'\cap V'}(t_{V'_{(i)}})\}_{V'\in\mathscr{V}}=0.$$

Тогда можно записать

$$T=\sum_{i=1}^{p}[\{t_{V'_{(i)}}\}_{V'_{(i)}\in\mathscr{V}_i}-\{\psi^{V'_{(i)}}_{U'\cap V'}(t_{V'_{(i)}})\}_{\substack{U'\in\mathscr{U}\\ V'\in\mathscr{V}}}],$$

откуда мы заключаем, что T — элемент группы R_V.

Обозначим через $\mathscr{R}$ систему групп R_V и гомоморфизмов, индуцированных на группах R_V гомоморфизмами ψ^V_U.

Поскольку $\mathscr{R}$ образована локально тривиальными сечениями системы $\overline{\mathscr{F}}$, факторгруппа $\overline{\mathscr{F}}/\mathscr{R}$ существенная.

Заметим, что если для некоторого элемента T, не обязательно локально тривиального, ввести обозначение

$$t_{V'\cap U'} = \sum_{i=1}^{p} \psi^{V'_{(i)}}_{U'\cap V'}(t_{V'_{(i)}}),$$

то T будет иметь вид

$$T = \{t_{V'\cap U'}\}_{\substack{U'\in\mathscr{U}\\ V'\in\mathscr{V}}} + \alpha_V \qquad (\alpha_V \in R_V).$$

Пусть множество U_λ зависит от индекса $\lambda \in \Lambda$. В каждом множестве U_λ рассмотрим сечения из $\overline{\mathscr{F}}/\mathscr{R}$, например

$$T^*_\lambda = \{t^\lambda_{V^\lambda}\}_{V^\lambda \in \mathscr{V}^\lambda} + R_{U_\lambda},$$

где $\mathscr{V}^\lambda$ — покрытие множества U_λ. Если для двух индексов λ и λ'

$$\psi^{V^\lambda}_{V^\lambda\cap V^{\lambda'}}(T^*_\lambda) = \psi^{V^{\lambda'}}_{V^\lambda\cap V^{\lambda'}}(T^*_{\lambda'}),$$

то можно рассмотреть элемент из $\mathscr{H}_U$, где $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$,

$$T = \{t^\lambda_{V^\lambda}\}_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ V^\lambda\in\mathscr{V}^\lambda}},$$

и тогда

$$\psi^U_{U_\lambda}(T) + R_{U_\lambda} = T^*_\lambda.$$

Отсюда следует, что факторсистема $\overline{\mathscr{F}}/\mathscr{R}$ полная.

Подсистема $\mathscr{F}'$ существенной системы $\mathscr{F}$ также является существенной. Действительно, если в $\mathscr{F}$ не существует ненулевых локально тривиальных сечений, то и $\mathscr{F}'$ не может обладать такими сечениями.

Если $\mathscr{F}' = \{H'_U, \psi'^V_U\}$ — полная подсистема существенной системы $\mathscr{F} = \{H_U, \psi^V_U\}$, то факторсистема $\mathscr{F}'' = \mathscr{F}/\mathscr{F}'$ существенная.

Действительно, обозначим через ρ_U канонический гомоморфизм группы H_U на группу

$$H''_U = H_U/H'_U.$$

Пусть f'' — такой элемент группы H''_U, что

$$\psi''^U_{U_\alpha}(f'') = 0$$

для всех множеств U_α некоторого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in M}$ множества U. Тогда для того элемента f из H_U, для которого

$$\rho_U(f) = f'',$$

мы будем иметь

$$\rho_{U_\alpha}[\psi_{U_\alpha}^{U}(f)] = \psi_{U_\alpha}''^{U}[\rho_U(f)] = \psi_{U_\alpha}''^{U}(f'') = 0.$$

Следовательно,

$$\psi_{U_\alpha}^{U}(f) \in H'_{U_\alpha}$$

для любого индекса $\alpha \in M$. Элементы

$$f_\alpha = \psi_{U_\alpha}^{U}(f)$$

групп H'_{U_α} для любых индексов α и β из M удовлетворяют условию

$$\psi'^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = \psi'^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta),$$

так как

$$\psi'^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = \psi^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}[\psi^{U}_{U_\alpha}(f)] = \psi^{U}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f) =$$
$$= \psi^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}[\psi^{U}_{U_\beta}(f)] = \psi'^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta).$$

Если система $\mathcal{F}' = \{H'_U, \psi'^{V}_{U}\}$ полная, то в группе H'_U существует элемент f', для которого

$$\psi'^{U}_{U_\alpha}(f') = f_\alpha = \psi^{U}_{U_\alpha}(f)$$

при любом индексе $\alpha \in M$. Но $\psi'^{U}_{U_\alpha}$ является ограничением гомоморфизма $\psi^{U}_{U_\alpha}$ на группу H'_U. Поэтому последнее соотношение может быть переписано

$$\psi^{U}_{U_\alpha}(f' - f) = 0,$$

и, если система $\mathcal{F}$ существенная, то $f = f'$ и

$$f'' = \rho_U(f) = \rho_U(f') = 0.$$

Из предыдущего доказательства следует, что система $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ существенная, если предположить, что система $\mathcal{F}'$ полная и содержит локально тривиальные сечения системы $\mathcal{F}$ для любого множества U.

Факторсистема полной системы по ее подсистеме не всегда полная.

Проективная система, которая одновременно является существенной и полной, будет называться *канонической*. Из предыдущих рассуждений следует, что по каждой проективной системе $\mathcal{F}$ можно построить каноническую систему.

3. Группы когомологий, ассоциированные с проективной системой

Пусть задана проективная система $\mathcal{P}=\{H_U, \psi_U^V\}$. Каждому покрытию $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ можно сопоставить прямое произведение $C'(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ групп

$$\mathcal{P}(\{U_0, \ldots, U_q\}) = H_{U_0 \cap \ldots \cap U_q},$$

соответствующих взятым из $\mathcal{U}$ конечным упорядоченным системам $\{U_0, \ldots, U_q\}$, имеющим непустое пересечение $U_0 \cap \ldots \cap U_q$. Как и в случае гомологий индуктивной системы (см. § 1), в прямом произведении $C'(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ возьмем каждую группу H_U столько раз, сколько раз можно получить множество U как пересечение множеств из $\mathcal{U}$. Значит, сомножители прямого произведения зависят от индекса системы $\{U_0, \ldots, U_q\}$, а не от множества $U=U_0 \cap \ldots \cap U_q$. Следовательно, элемент группы $C'(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ является функцией f, ставящей в соответствие каждой системе $\{U_0, \ldots, U_q\}$ элемент $f\{U_0, \ldots, U_q\}$ группы $H_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}$. Из равенства $U_0 \cap \ldots \cap U_q = U'_0 \cap \ldots \cap U'_q$ не следует, что

$$f\{U_0, \ldots, U_q\} = f\{U'_0, \ldots, U'_q\}.$$

Группа $C'(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ есть прямое произведение групп $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$, где $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ — прямое произведение групп $\mathcal{P}(\{U_0, \ldots, U_q\})$, соответствующих системам $\{U_0, \ldots, U_q\}$ из $q+1$ элемента. Группы $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ называются *группами коцепей* размерности q покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами из проективной системы $\mathcal{P}$. Элементы групп $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ называются *коцепями* размерности q покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами из $\mathcal{P}$.

Отнесем каждому элементу $f=(f\{U_0, \ldots, U_q\})$ группы $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ элемент δf из $C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ по формуле

$$(\delta f)\{U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1}\} = \\ = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \psi_{U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1}}^{U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_i \cap \ldots \cap U_{q+1}} (f\{U_0, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, U_{q+1}\}). \quad (12)$$

Мы получим гомоморфизм δ группы $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ в группу $C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$, который называется *кограничным оператором*.

Коцепь δf называется *кограницей* коцепи f.

Коцепь f, для которой $\delta f=0$, называется *коциклом*. Любая кограница является коциклом, так как

$$\delta\delta = 0. \quad (13)$$

Действительно, введем обозначения

$$U = U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1}; \quad \{U\} = \{U_0, \ \ldots, \ U_{q+1}\};$$

$$U^i = U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_i \cap \ldots \cap U_q; \quad \{U^i\} = \{U_0, \ \ldots, \ \hat{U}_i, \ \ldots, \ U_{q+1}\};$$

$$U^{ij} = U_0 \cap \ldots \cap \hat{U}_i \cap \ldots \cap \hat{U}_j \cap \ldots \cap U_{q+1} \quad (i < j);$$

$$\{U^{ij}\} = \{U_0, \ \ldots, \ \hat{U}_i, \ \ldots, \ \hat{U}_j, \ \ldots, \ U_{q+1}\} \quad (i < j).$$

Тогда для коцепи $f \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$\delta\delta f)\{U_0, \ \ldots, \ U_{q+1}\} = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \psi_U^{U^i} ((\delta f)\{U^i\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \psi_U^{U^i} \Big(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \psi_{U^i}^{U^{ji}} (f\{U^{ji}\}) + \sum_{j=i+1}^{q+1} (-1)^{j-1} \psi_{U^i}^{U^{ij}} (f\{U^{ij}\}) \Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} \Big[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \psi_U^{U^{ji}} (f\{U^{ji}\}) + \sum_{j=i+1}^{q+1} (-1)^{j-1} \psi_U^{U^{ij}} (f\{U^{ij}\}) \Big] =$$

$$= \sum_{r<s=1}^{q+1} [(-1)^{r+s} + (-1)^{r+s-1}] \, \psi_U^{U^{rs}} (f\{U^{rs}\}) = 0.$$

Коциклы из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ образуют группу $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, а кограницы из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ образуют подгруппу $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ группы $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Факторгруппа

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

называется *группой когомологий* размерности q покрытия $\mathcal{U}$, соответствующей системе $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{U}'$ — покрытие более тонкое, чем покрытие $\mathcal{U}$, и ρ — отображение множества $\mathcal{U}'$ в множество $\mathcal{U}$, при котором

$$U' \subset \rho(U') \tag{14}$$

для любого U' из $\mathcal{U}'$. Можно определить гомоморфизм $\bar{\rho}$ группы $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ в группу $C^q(\mathcal{U}', \mathcal{F})$, сопоставляя каждой коцепи $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ коцепь $\bar{\rho}(f)$ по формуле

$$[\bar{\rho}(f)]\{U_0', \ \ldots, \ U_q'\} = \psi_{U_0' \cap \ldots \cap U_q'}^{U_0 \cap \ldots \cap U_q} (f\{U_0, \ \ldots, \ U_q\}), \tag{14'}$$

где $U_0 = \rho(U_0')$, $\ldots$, $U_q = \rho(U_q')$. Очевидно, что

$$\delta\bar{\rho} = \bar{\rho}\delta, \tag{14''}$$

так как операторы кограницы сводятся к операциям над индексами $0, \ \ldots, \ q$, а гомоморфизм $\bar{\rho}$ не меняет их. Из предыдущей формулы следует, что $\bar{\rho}$ отображает коциклы в коциклы и кограницы в кограницы.

Рассмотрим два отображения ρ и σ, удовлетворяющие условиям (14). Если ввести гомотопию

$$D : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q-1}(\mathcal{U}', \mathcal{F}),$$

заданную формулой

$$(Df)\{U'_0, \ldots, U'_{q-1}\} = \\ = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \psi^{U_0 \cap \ldots \cap U_i \cap V_i \cap \ldots \cap V_{q-1}}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_{q-1}} (f\{U_0, \ldots, U_i, V_i, \ldots, V_{q-1}\}),$$

где

$$U_i = \rho(U'_i), \; V_i = \sigma(U'_i),$$

то получим

$$\bar{\sigma}(f) - \bar{\rho}(f) = (\delta D)(f) + (D\delta)(f).$$

Отсюда видно, что гомоморфизмы $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$ ставят в соответствие каждому коциклу $f\,(\delta f = 0)$ коциклы $\bar{\sigma}(f)$ и $\bar{\rho}(f)$, отличающиеся на границу:

$$\bar{\sigma}(f) - \bar{\rho}(f) = \delta(D(f)). \tag{15}$$

Так как для каждого гомоморфизма $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho}(Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}),$$

$$\bar{\rho}(B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}),$$

то гомоморфизм $\bar{\rho}$ индуцирует гомоморфизм ρ^* между группами когомологий

$$\rho^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}).$$

Из формулы (15) для двух отображений ρ и σ, удовлетворяющих условиям (14), мы получаем

$$\rho^* = \sigma^*.$$

Поэтому к каждому открытому покрытию $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ система $\mathcal{F}$ присоединяет последовательность групп $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. К каждой паре покрытий $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, где $\mathcal{U}'$ более тонкое, чем $\mathcal{U}$, можно присоединить последовательность гомоморфизмов

$$\theta^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}).$$

Рассмотрим третье покрытие $\mathcal{U}''$, более тонкое, чем $\mathcal{U}'$, и отображение

$$\tau : \mathcal{U}'' \to \mathcal{U}',$$

при котором для любого множества U'' из $\mathcal{U}''$

$$U'' \subset \tau(U'').$$

Для отображений ρ и τ и отображения $\rho\tau : \mathcal{U}'' \to \mathcal{U}$ получаем формулу

$$\overline{\rho\tau} = \overline{\rho}\,\overline{\tau}.$$

Из нее следует, что для отображений, индуцированных на группах когомологий,

$$(\rho\tau)^* = \rho^*\tau^*;$$

поэтому

$$\theta_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}\theta_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}} = \theta_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}}.$$

Таким образом, группы $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ и гомоморфизмы $\theta_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$ для каждого q определяют индуктивное семейство групп и гомоморфизмов (гл. I, A, § 15). Индуктивный предел этого семейства называется *группой когомологий размерности q пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами в проективной системе $\mathcal{P}$.*

Коцепь размерности 0 покрытия $\mathcal{U}$ является функцией f, сопоставляющей каждому множеству $U \in \mathcal{U}$ элемент f_U группы $\mathcal{P}\{U\} = H_U$. Коцепь f — коцикл, если для любых двух множеств U и V из $\mathcal{U}$ с непустым пересечением $U \cap V$ имеем

$$\psi_{U\cap V}^U(f_U) = \psi_{U\cap V}^V(f_V).$$

Отсюда следует, что элементы f_U образуют когерентную систему сечений на множествах покрытия $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$. Если система $\mathcal{P}$ полна, то существует элемент $f_{\mathcal{T}}$ группы $\mathcal{P}\{\mathcal{T}\} = H_{\mathcal{T}}$ такой, что для любого открытого множества U имеем

$$\psi_U^{\mathcal{T}}(f_{\mathcal{T}}) = f_U. \tag{16}$$

Если система $\mathcal{P}$ также и существенна, то элемент $f_{\mathcal{T}}$ — единственный. В самом деле, из соотношений $\psi_U^{\mathcal{T}}(f_{\mathcal{T}}) = \psi_U^{\mathcal{T}}(f'_{\mathcal{T}})$ следует $\psi_U^{\mathcal{T}}(f_{\mathcal{T}} - f'_{\mathcal{T}}) = 0$ и для существенной системы

$$f_{\mathcal{T}} = f'_{\mathcal{T}}.$$

Следовательно, если система $\mathcal{P}$ полная и существенная, то коциклы размерности 0 находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H_{\mathcal{T}}$. Эти элементы называются *сечениями над $\mathcal{T}$ системы $\mathcal{P}$.*

Коцикл размерности 0 не может быть кограницей, так как не существует коцепей размерности -1. Следовательно, $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = 0$ и

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}).$$

Из предыдущего же замечания следует изоморфизм

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \approx H_{\mathcal{T}}.$$

Итак, если $\mathfrak{F}$ — полная существенная система, то группа когомологий $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ размерности 0 определяется покрытием $\mathcal{U}$ с точностью до изоморфизма. Если $\mathcal{U}'$ — покрытие более тонкое, чем $\mathcal{U}$, и задано отображение $\rho: \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию (14), то для каждой коцепи f из $C^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ имеем $[\bar{\rho}(f)]\{U'\} = \psi^U_{U'}(f\{U\})$. Обозначим через $f_{\mathcal{T}}$ и $f'_{\mathcal{T}}$ элементы группы $H_{\mathcal{T}}$ (единственные, если $\mathfrak{F}$ существенная), для которых

$$\psi^{\mathcal{T}}_U(f_{\mathcal{T}}) = f_U,\ \psi^{\mathcal{T}}_{U'}(f'_{\mathcal{T}}) = f'_{U'} \quad (U \in \mathcal{U},\ U' \in \mathcal{U}',\ f' = \bar{\rho}(f)).$$

Тогда для $U' \subset U$

$$\psi^{\mathcal{T}'}_U(f_{\mathcal{T}}) = \psi^U_{U'}\psi^{\mathcal{T}}_U(f_{\mathcal{T}}) = \psi^U_{U'}(f_U) = f'_{U'} = \psi^{\mathcal{T}}_{U'}(f'_{\mathcal{T}}).$$

Отсюда, если $\mathfrak{F}$ — существенная система, следует

$$f_{\mathcal{T}} = f'_{\mathcal{T}}.$$

Поэтому, если каждому коциклу f из $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ сопоставить сечение $f_{\mathcal{T}}$ над $\mathcal{T}$, ограничения которого на множества U совпадают соответственно с f_U, и если коциклу $f' = \bar{\rho}(f)$ сопоставить сечение $f'_{\mathcal{T}}$, определенное аналогичным образом для f', то

$$f_{\mathcal{T}} = f'_{\mathcal{T}}.$$

Отсюда вытекает, что в случае полной и существенной системы гомоморфизмы $\theta^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}$ являются изоморфизмами. В этом случае группа когомологий $H^0(\mathcal{T}, \mathfrak{F})$ изоморфна каждой из групп $H^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ и в итоге получаем изоморфизм

$$H^0(\mathcal{T}, \mathfrak{F}) = H_{\mathcal{T}}.$$

Таким образом, группа когомологий размерности 0 пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами из $\mathfrak{F}$ изоморфна группе сечений над $\mathcal{T}$, если система $\mathfrak{F}$ полная и существенная.

Пусть над топологическим пространством $\mathcal{T}$ задана произвольная проективная система $\mathfrak{F} = \{H_U, \psi^V_U\}$. Эта система определяет на каждом открытом множестве U проективную систему $\mathfrak{F}|U$, которая сопоставляет каждому открытому множеству V из U группу H_V (если рассматривать V как открытое множество в $\mathcal{T}$) и каждой паре $V \subset W$ гомоморфизм

$$\psi^W_V : H_W \to H_V;$$

$\mathfrak{F}|U$ называется *ограничением* системы $\mathfrak{F}$ на пространство U.

Обозначим через H'_U группу когомологий $H^0(U) = Z^0(U, \mathfrak{F}|U)$ топологического пространства U с коэффициентами в системе $\mathfrak{F}|U$. Для каждого открытого множества V, содержащего множество U, можно определить гомоморфизм

$$\psi_U^{\prime V}: H'_V \to H'_U,$$

если поставить в соответствие каждому коциклу $f \in Z^0(V, \mathcal{F}|V) = H'_V$ его ограничение на U, т. е. функцию f', ставящую в соответствие каждому открытому множеству $W \subset U$ элемент $f'_W = f_W$.

Отсюда следует, что с каждой проективной системой $\mathcal{F} = \{H_U, \psi_U^V\}$ ассоциируется проективная система $\mathcal{F}' = \{H'_U, \psi_U^{\prime V}\}$, для которой $H'_U = H^0(U, \mathcal{F}|U)$. Если система $\mathcal{F}$ полная и существенная, то систему $\mathcal{F}'$ можно отождествить с системой $\mathcal{F}$. Действительно, любой коцикл f из $Z^0(U, \mathcal{F}|U)$ определяет в этом случае сечение над U с коэффициентами из $\mathcal{F}$, т. е. элемент F из группы H_U такой, что

$$\psi_{U'}^U(F) = f_{U'}$$

для любого открытого множества U' из U. Элемент F однозначно определен этим свойством.

Рассмотрим проективную систему $\mathcal{C}$, сопоставляющую каждому открытому множеству U топологического пространства $\mathcal{T}$ аддитивную группу C_U вещественных функций f, определенных и непрерывных на U. Эта система существенная и полная. Действительно, если функция f, определенная на U, равна нулю на множествах некоторого покрытия множества U, тогда f равна нулю и на U. Пусть мы имеем систему функций f_α, определенных и непрерывных на множествах U_α покрытия множества U, причем f_α и f_β равны на $U_\alpha \cap U_\beta$. Тогда функция f, определенная на U и равная f_α на U_α, непрерывна и является объединением элементов f_α из групп C_{U_α}.

Группа когомологий $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ системы $\mathcal{C}$, следовательно, изоморфна группе $C_{\mathcal{T}}$, т. е. аддитивной группе функций, непрерывных на всем пространстве $\mathcal{T}$.

4. Точная последовательность когомологий пары проективных систем

Рассмотрим проективную систему $\mathcal{F}$ абелевых групп на топологическом пространстве $\mathcal{T}$ и подсистему $\mathcal{F}'$ системы $\mathcal{F}$. Из пары $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ можно составить точную последовательность проективных систем

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0, \tag{17}$$

где 0 — нулевая система, а $\mathcal{F}''$ — факторсистема систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$, т. е. если $\mathcal{F} = \{H_U, \psi_U^V\}$ и $\mathcal{F}' = \{H'_U, \psi_U^{\prime V}\}$, то $\mathcal{F}'' = \{H''_U, \psi_U^{\prime\prime V}\}$, где

$$H''_U = H_U / H'_U,$$

а $\psi_U^{''V}$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом ψ_U^V на факторгруппе H''_V. В последовательности (17) α является гомоморфизмом включения системы $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}$, а β — каноническим гомоморфизмом; иначе говоря, α является системой гомоморфизмов α_U, отображающих группы H'_U в H_U, а β — системой канонических гомоморфизмов

$$\beta_U\colon H_U \to H_U/H'_U = H''_U.$$

Вообще, пусть задан гомоморфизм ρ систем $\mathcal{F} = \{H_U, \psi_U^V\}$ в проективную систему $\mathcal{Q} = \{K_U, \omega_U^V\}$, т. е. система гомоморфизмов

$$\rho_U\colon H_U \to K_U,$$

удовлетворяющих закону коммутативности

$$\rho_U \psi_U^V = \omega_U^V \rho_V. \tag{18}$$

Тогда можно определить гомоморфизм $\bar\rho = \bar\rho_{\mathcal{U}}$ группы $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ в группу $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$, если для коцепи $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ положить

$$\bar\rho(f)\{U_0, \ldots, U_q\} = \rho_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\}).$$

Так как операторы кограницы сводятся к операциям над индексами $0, \ldots, q$, а гомоморфизм $\bar\rho$ не меняет их, то

$$\delta\bar\rho = \bar\rho\delta.$$

Из этой формулы вытекает, что $\delta[\bar\rho(f)] = \bar\rho[\delta(f)] = 0$, если f — коцикл из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, т. е. если $\delta f = 0$. Это значит, что $\bar\rho(f)$ — коцикл из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$. Следовательно,

$$\bar\rho[Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})] \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q}). \tag{18'}$$

Аналогично если имеем кограницу $\delta f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, то ее образ при отображении $\bar\rho$

$$\bar\rho[\delta(f)] = \delta[\bar\rho(f)]$$

будет кограницей в $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$. Следовательно,

$$\bar\rho[B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})] \subset B^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q}). \tag{19}$$

Формулы (18), (19) показывают, что $\bar\rho$ индуцирует гомоморфизм $\rho^*_{\mathcal{U}}$ группы когомологий $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ в группу когомологий $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$:

$$\rho^*_{\mathcal{U}}\colon H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{Q}). \tag{20}$$

Для покрытия $\mathcal{U}'$, более тонкого, чем $\mathcal{U}$, имеем гомоморфизм

$$h^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}\colon H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \tag{21}$$

и гомоморфизм

$$k^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}\colon H^q(\mathcal{U}, \mathfrak{G}) \to H^q(\mathcal{U}', \mathfrak{G}). \tag{22}$$

Можно рассмотреть также гомоморфизм, аналогичный гомоморфизму (20),

$$\rho^*_{\mathcal{U}'}\colon H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}', \mathfrak{G}).$$

Докажем, что справедлив закон коммутативности

$$\rho^*_{\mathcal{U}} h^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} = k^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} \rho^*_{\mathcal{U}}. \tag{23}$$

Для этого будем предполагать, что гомоморфизмы $h^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}$ и $k^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}$ индуцированы одним и тем же отображением

$$\tau\colon \mathcal{U}' \to \mathcal{U},$$

удовлетворяющим для любого U' из $\mathcal{U}'$ условию $U' \subset \tau(U')$.

Если f — коцикл из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, то $\bar{\tau}(f)$ будет коциклом $f' \in C^q(\mathcal{U}', \mathcal{F})$, заданным формулой

$$f'\{U'_0, \ldots, U'_q\} = \psi^{U_0 \cap \ldots \cap U_q}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\})$$
$$(U_i = \tau(U'_i)),$$

а $\bar{\rho}_{\mathcal{U}'}(f')$ будет коциклом $g' \in C^q(\mathcal{U}', \mathfrak{G})$, заданным формулой

$$g'\{U'_0, \ldots, U'_q\} = \rho_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}(f'\{U'_0, \ldots, U'_q\}).$$

Поэтому

$$(\bar{\rho}_{\mathcal{U}'} \bar{\tau}_{\mathcal{F}})(f)\{U'_0, \ldots, U'_q\} = \rho_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q} \psi^{U_0 \cap \ldots \cap U_q}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\}). \tag{24}$$

Если к коциклу f применить гомоморфизм $\bar{\rho}_{\mathcal{U}}$, то получим коцикл $g \in C^q(\mathcal{U}, \mathfrak{G})$ по формуле

$$g\{U_0, \ldots, U_q\} = \rho_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\}).$$

Образ при $\bar{\tau}_{\mathfrak{G}}$ коцикла g задается формулой

$$[\bar{\tau}_{\mathfrak{G}}(g)]\{U'_0, \ldots, U'_q\} = \omega^{U_0 \cap \ldots \cap U_q}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}(g\{U_0, \ldots, U_q\}). \tag{25}$$

Из равенств (18), (24) и (25) следует, что

$$(\bar{\rho}_{\mathcal{U}} \bar{\tau}_{\mathcal{F}})(f)\{U'_0, \ldots, U'_q\} = (\bar{\tau}_{\mathfrak{G}} \bar{\rho}_{\mathcal{U}})(f)\{U'_0, \ldots, U'_q\}. \tag{25'}$$

Мы получаем формулу (23), переходя к гомоморфизмам, индуцированным гомоморфизмами $\bar{\rho}$, $\bar{\tau}_{\mathcal{F}}$, $\bar{\tau}_{\mathfrak{G}}$ на группах когомологий.

Закон коммутативности (23) показывает, что гомоморфизмы $\rho^*_{\mathcal{U}}$, определенные для открытых покрытий $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$, образуют гомоморфизм индуктивного семейства групп и гомоморфизмов $\{H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), h^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}\}$ в индуктивное семейство групп и гомоморфизмов $\{H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) k^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}\}$. Из рассуждений, приведенных в гл. I, A, § 15, следует, что гомоморфизмы $\rho^*_{\mathcal{U}}$ определяют гомоморфизм ρ^* индуктивного предела $H^q(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ первого семейства в индуктивный предел $H^q(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ второго семейства.

Таким образом, мы доказали, что гомоморфизм ρ проективной системы $\mathcal{F}$ в проективную систему $\mathcal{G}$ индуцирует гомоморфизм ρ^* группы когомологий $H^q(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ в группу $H^q(\mathcal{T}, \mathcal{G})$ для каждой размерности q.

Вернемся к точной последовательности проективных систем (17) и рассмотрим открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$. Можно выписать последовательность групп и гомоморфизмов

$$0 \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \xrightarrow{\bar{\alpha}_{\mathcal{U}}} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\beta}_{\mathcal{U}}} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to 0. \qquad (26)$$

Покажем, что эта последовательность точная. Действительно, если коцепь f' принадлежит $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$, то коцепь $f = \bar{\alpha}_{\mathcal{U}}(f')$ задается формулой

$$f\{U_0, \ldots, U_q\} = \alpha_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f'\{U_0, \ldots, U_q\}) = f'\{U_0, \ldots, U_q\}. \qquad (27)$$

Поскольку $\alpha_{\mathcal{U}}$ является включением группы H'_U в группу H_U для любого открытого множества U, то $\bar{\alpha}_{\mathcal{U}}(f')$ будет нулевой коцепью из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$ только тогда, когда f' — ненулевая коцепь из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Следовательно, $\bar{\alpha}_{\mathcal{U}}$ — мономорфизм.

Образом коцепи $f = \bar{\alpha}_{\mathcal{U}}(f')$ при отображении $\bar{\beta}_{\mathcal{U}}$ является коцепь f'', для которой

$$\begin{aligned} f''\{U_0, \ldots, U_q\} &= \beta_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\}) = \\ &= (\beta_{U_0 \cap \ldots \cap U_q} \alpha_{U_0 \cap \ldots \cap U_q})(f'\{U_0, \ldots, U_q\}) = \\ &= \beta_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f'\{U_0, \ldots, U_q\}). \end{aligned}$$

Так как β — канонический гомоморфизм группы H_U на группу $H''_U = H_U / H'_U$ и $\beta_U(H'_U) = 0$ для любого открытого множества U, отсюда следует, что $f'' = 0$.

Обратно, пусть для некоторой коцепи $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ имеем $\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(f) = 0$, т. е.

$$\beta_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\}) = 0$$

для любой системы $\{U_0, \ldots, U_q\}$ с непустым пересечением $U_0 \cap \ldots \cap U_q$. Тогда

$$f\{U_0, \ldots, U_q\} \in H'_{U_0 \cap \ldots \cap U_q}.$$

Таким образом, коцепь $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$ имеет вид $\bar{\alpha}_{\mathcal{U}}(f')$, $f' \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$.

Остается показать, что $\bar{\beta}_{\mathcal{U}}$ — эпиморфизм. Пусть коцепь f'' лежит в $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'')$.

Для каждой системы $\{U_0, \ldots, U_q\}$ открытых множеств коцепь f'' определяет элемент $f''\{U_0, \ldots, U_q\}$ группы $H''_U = H_U/H'_U$ $(U = U_0 \cap \ldots \cap U_q)$, т. е. для каждой системы $\{U_0, \ldots, U_q\}$ существует элемент $f\{U_0, \ldots, U_q\}$ группы H_U такой, что

$$\beta_U(f\{U_0, \ldots, U_q\}) = f''\{U_0, \ldots, U_q\}.$$

Функция f: $\{U_0, \ldots, U_q\} \to f\{U_0, \ldots, U_q\}$ является в этом случае коцепью из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, для которой

$$\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(f) = f''.$$

Следовательно, последовательность (26) точная, и для каждой размерности q

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \approx C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}').$$

Введем обозначения

$$C'^q = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'), \quad C^q = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad C''^q = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}''),$$
$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\mathcal{U}}, \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}_{\mathcal{U}}$$

и рассмотрим точную последовательность (26). В этих обозначениях

$$0 \to C'^q \xrightarrow{\bar{\alpha}} C^q \xrightarrow{\bar{\beta}} C''^q \to 0. \tag{28}$$

Мы видели, что каждой коцепи f'' из C''^q можно сопоставить коцепь $f \in C^q$, для которой $\bar{\beta}(f) = f''$. Если f'' — коцикл, т. е. если $\delta f'' = 0$, то $\bar{\beta}(\delta f) = \delta\bar{\beta}(f) = 0$ и коцепь δf принадлежит Z'^{q+1}. Если f'' — кограница, т. е. $f'' = \delta g''$ $(g'' \in C''^{q-1})$, и коцепь $f \in C^q$ удовлетворяет условию $\bar{\beta}(f) = f''$, то, обозначив через g коцепь из C^q, для которой $\bar{\beta}(g) = g''$, получим

$$\delta\bar{\beta}(g) = \bar{\beta}(\delta g) = \bar{\beta}(f).$$

Следовательно, $\bar{\beta}(f - \delta g) = 0$. Отсюда получаем, что $f - \delta g \in C'^q$, и поэтому $\delta f = \delta(f - \delta g)$ будет элементом из $\delta(C'^q) = B'^{q+1}$. Таким образом, если к каждому коциклу f'' из группы C''^q присоединить кограницу δf одной из коцепей f множества $\bar{\beta}^{-1}(f'')$, то δf будет элементом из C'^{q+1}, класс которого $\delta f + B'^{q+1}$ зависит только от класса $f'' + B''^q$ коцикла f''. Так как соответствие

$$f'' + B''^q \to \delta f + B'^{q+1}$$

линейное, то оно будет гомоморфизмом группы когомологий H''^q в группу когомологий H'^{q+1}. Этот гомоморфизм также обозначается через δ и называется *кограничным оператором точной последовательности* (28)

$$\delta\colon H''^q \to H'^{q+1}. \tag{29}$$

Здесь $H''^q = Z''^q/B''^q$, $H'^{q+1} = Z'^{q+1}/B'^{q+1}$ — группы когомологий размерности q и $q+1$ систем $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}'$.

С другой стороны, как мы показали выше, гомоморфизмы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ индуцируют гомоморфизмы $\alpha^* = \alpha^*_{\mathcal{U}}$, $\beta^* = \beta^*_{\mathcal{U}}$ между группами когомологий:

$$\alpha^*\colon H'^q \to H^q, \quad \beta^*\colon H^q \to H''^q.$$

Таким образом, можно построить бесконечную последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\begin{gathered} 0 \to H'^0 \xrightarrow{\alpha^*} H^0 \xrightarrow{\beta^*} H''^0 \xrightarrow{\delta} H'^1 \xrightarrow{\alpha^*} H^1 \xrightarrow{\beta^*} \ldots \\ \ldots \xrightarrow{\delta} H'^q \xrightarrow{\alpha^*} H^q \xrightarrow{\beta^*} H''^q \xrightarrow{\delta} H'^{q+1} \xrightarrow{\alpha^*} \ldots . \end{gathered} \tag{30}$$

Покажем, что последовательность (30) точная. Действительно, обозначим через C', C и C'' прямые суммы групп C'^q, C^q и C''^q соответственно. Тогда пара (C, δ) образует группу с дифференцированием, а (C', δ) является подгруппой этой группы с дифференцированием. (C'', δ) — факторгруппа группы (C, δ) по (C', δ). Таким образом, можно записать точную последовательность пары (C, C') (см. гл. I, A, § 14)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H' \arrow[rr, "\alpha^*"] & & H \arrow[dl, "\beta^*"] \\ & H'' \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

Из соотношений

$$\begin{gathered} \alpha^*(H'^q) \subset H^q, \quad \alpha^{*-1}(H^q) \subset H'^q; \\ \beta^*(H^q) \subset H''^q, \quad \beta^{*-1}(H''^q) \subset H^q; \\ \delta(H''^q) \subset H'^{q+1}, \quad \delta^{-1}(H'^{q+1}) \subset H''^q \end{gathered}$$

следует, что указанная выше последовательность распадается в бесконечную точную последовательность (30).

Мы доказали, что каждой точной последовательности проективных систем на топологическом пространстве $\mathcal{T}$

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0$$

и каждому покрытию $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ можно сопоставить точную последовательность, образованную группами когомологий гомоморфизмами, индуцированными α и β, и кограничными операторами

$$0 \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \xrightarrow{\alpha^*_{\mathcal{U}}} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^*_{\mathcal{U}}} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\delta} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \xrightarrow{\alpha^*_{\mathcal{U}}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^*_{\mathcal{U}}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \ldots . \tag{31}$$

Покажем, что для покрытия $\mathcal{U}'$, более тонкого, чем покрытие $\mathcal{U}$, кограничные операторы

$$\delta_{\mathcal{U}}: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}'),$$

$$\delta_{\mathcal{U}'}: H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}'') \to H^{q+1}(\mathcal{U}', \mathcal{F}')$$

удовлетворяют условиям перестановочности вида (23), т. е.

$$\delta_{\mathcal{U}'} h''^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} = h'^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} \delta_{\mathcal{U}}; \tag{32}$$

здесь $h''^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}$, $h'^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}$ — гомоморфизмы

$$h''^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}''),$$

$$h'^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'}: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to H^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}').$$

Действительно, пусть f'' — коцикл из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'')$, g'' — его образ в $C^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}'')$, заданный соотношением

$$g''\{U'_0, \ldots, U'_q\} = \psi^{U_0 \cap \ldots \cap U_q}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_q}(f\{U_0, \ldots, U_q\})$$

$$(U'_i \subset U_i).$$

Для того чтобы найти образ g'' при $\delta_{\mathcal{U}}$, выберем элемент $g \in C^q(\mathcal{U}', \mathcal{F})$, для которого

$$\bar{\beta}_{\mathcal{U}'}(g) = g''. \tag{33}$$

Тогда

$$\delta_{\mathcal{U}'}[g'' + B^q(\mathcal{U}', \mathcal{F}'')] = \delta g + B^{q+1}(\mathcal{U}', \mathcal{F}').$$

Применим теперь к коциклу f'' оператор $\delta_{\mathcal{U}}$; для этого выберем элемент $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, для которого

$$\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(f) = f''. \tag{34}$$

Тогда

$$\delta_{\mathcal{U}}[f'' + B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'')] = \delta f + B^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}').$$

Образ δf в $C^{q+1}(\mathcal{U}', \mathcal{F}')$ задается формулой

$$(\delta f)'\{U'_0, \ldots, U'_{q+1}\} = \psi^{U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1}}_{U'_0 \cap \ldots \cap U'_{q+1}}[(\delta f)\{U_0, \ldots, U_{q+1}\}].$$

Для проверки соотношения (32) достаточно проверить, что выполняется соотношение

$$(\delta g)\{U_0', \ldots, U_{q+1}'\} = \psi_{U_0'\cap\ldots\cap U_{q+1}'}^{U_0\cap\ldots\cap U_{q+1}}[(\delta f)\{U_0, \ldots, U_{q+1}\}]. \quad (35)$$

Принимая во внимание формулы (33), (34) и (25′), можно предположить, что

$$g = \bar{\tau}_{\mathcal{P}}(f), \quad (36)$$

так как в этом случае

$$\bar{\beta}_{\mathcal{U}'}(g) = \bar{\beta}_{\mathcal{U}'}[\bar{\tau}_{\mathcal{P}}(f)] = \bar{\tau}_{\mathcal{P}''}[\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(f)] = \bar{\tau}_{\mathcal{P}''}(f'') = g''.$$

Из равенства (35) следует, что

$$\delta g = \delta_{\mathcal{U}'}[\bar{\tau}_{\mathcal{P}}(f)].$$

Применив формулу (14″), получим

$$\delta g = \bar{\tau}_{\mathcal{P}}[\delta(f)].$$

Следовательно,

$$(\delta g)\{U_0', \ldots, U_{q+1}'\} = \psi_{U_0'\cap\ldots\cap U_{q+1}'}^{U_0\cap\ldots\cap U_{q+1}}[(\delta f)\{U_0, \ldots, U_{q+1}\}].$$

Это доказывает справедливость равенства (35) и одновременно с этим условие перестановочности (32).

Применяя формулы (23) к гомоморфизмам α и β и учитывая условие (32), находим, что $\alpha_{\mathcal{U}}^*$, $\beta_{\mathcal{U}}^*$ и $\delta_{\mathcal{U}}$ являются гомоморфизмами индуктивных семейств групп и гомоморфизмов $\{H^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'), \overset{'\mathcal{U}}{h_{\mathcal{U}'}}\}$, $\{H^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}), h_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}\}$, $\{H^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}''), \overset{''\mathcal{U}}{h_{\mathcal{U}'}}\}$, зависящими от одного и того же индекса $\mathcal{U}$, пробегающего множество всех открытых покрытий пространства $\mathcal{T}$.

Из результатов гл. I, А, § 18, следует, что гомоморфизмы $\alpha_{\mathcal{U}}^*$, $\beta_{\mathcal{U}}^*$, $\delta_{\mathcal{U}}$ индуцируют гомоморфизмы α^*, β^* и δ групп когомологий пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами в системах $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}''$ для каждой размерности q. Таким образом, мы получаем точную последовательность вида

$$H^0(\mathcal{T}, \mathcal{P}') \xrightarrow{\alpha^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \xrightarrow{\beta^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{T}, \mathcal{P}') \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\partial} H^q(\mathcal{T}, \mathcal{P}') \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(\mathcal{T}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\mathcal{T}, \mathcal{P}') \to \ldots, \quad (37)$$

которая называется *точной последовательностью когомологий пары* $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ *проективных систем* над топологическим пространством $\mathcal{T}$.

5. Резольвенты проективной системы

Пусть задана проективная система $\mathcal{P}$ над топологическим пространством $\mathcal{T}$. Будем называть *резольвентой* системы $\mathcal{P}$ любую последовательность проективных систем $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \ldots$ и гомоморфизмов $\rho_i\colon \mathcal{Q}_i \longrightarrow \mathcal{Q}_{i+1}$, $\rho\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}_0$, такую, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\rho} \mathcal{Q}_0 \xrightarrow{\rho_0} \mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\rho_1} \ldots \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{Q}_{i+1} \xrightarrow{\rho_{i+1}} \ldots \tag{38}$$

является точной и группы когомологий каждой системы $\mathcal{Q}_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$, размерность которых больше нуля, тривиальны, т. е.

$$H^q(\mathcal{T}, \mathcal{Q}_i) = 0 \quad (q \geqslant 1,\ i = 0, 1, \ldots). \tag{39}$$

Гомоморфизмы $\rho, \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{i+1}, \ldots$ индуцируют гомоморфизмы $\rho^*, \rho_0^*, \rho_1^*, \ldots, \rho_{i+1}^*, \ldots$ групп когомологий систем $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_i$ для каждой размерности q.

Так как каждая последовательность (38) точная, то образ $\mathcal{J}(\rho_i)$ гомоморфизма ρ_i совпадает с ядром $\mathcal{N}(\rho_{i+1})$ гомоморфизма ρ_{i+1} и можно рассмотреть подсистемы

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{N}(\rho_0), \quad \mathcal{P}_q = \mathcal{N}(\rho_q) = \mathcal{J}(\rho_{q-1}) \quad (q = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

С другой стороны, $\mathcal{N}(\rho_q)$ — подсистема системы $\mathcal{Q}_q$, следовательно, имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\rho_q) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{Q}_q,$$

где α_q — гомоморфизм включения. Имеем также и точную последовательность

$$\mathcal{Q}_q \xrightarrow{\rho_q} \mathcal{J}(\rho_q) = \mathcal{N}(\rho_{q+1}) \longrightarrow 0,$$

так как образом гомоморфизма ρ_q является $\mathcal{J}(\rho_q) = \mathcal{N}(\rho_{q+1})$. Итак, получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\rho_q) \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{Q}_q \xrightarrow{\rho_q} \mathcal{N}(\rho_{q+1}) \longrightarrow 0. \tag{41}$$

Запишем точную последовательность когомологий последовательности (41) (см. § 4):

$$H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \xrightarrow{\alpha_q^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{Q}_q) \xrightarrow{\rho_q^*} H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)) \xrightarrow{\alpha_q^*} \ldots \xrightarrow{\delta} H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \xrightarrow{\alpha_q^*} H^i(\mathcal{T}, \mathcal{Q}_q) \xrightarrow{\rho_q^*}$$
$$\xrightarrow{\rho_q^*} H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \xrightarrow{\delta} H^{i+1}[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \xrightarrow{\alpha_q^*} \ldots.$$

Из соотношений (39) получаем точные последовательности

$$H^0(\mathcal{T}, \mathfrak{C}_q) \xrightarrow{\rho_q^*} H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \xrightarrow{\delta} H^1[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \xrightarrow{\alpha_q^*} 0, \qquad (42)$$

$$0 \xrightarrow{\rho_q^*} H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \xrightarrow{\delta} H^{i+1}[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \xrightarrow{\alpha_q^*} 0 \quad (i = 1, 2, \ldots). \qquad (43)$$

Согласно (43), операторы δ являются изоморфизмами для индексов $i \geqslant 1$. Следовательно,

$$H^{i+1}[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \approx H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]. \qquad (44)$$

Изоморфизм (44) имеет место для всех индексов $i \geqslant 1$ и для всех индексов q, равных $0, 1, \ldots$. Следовательно,

$$H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \approx H^{i+1}[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \approx \ldots \approx H^{i+q+1}[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_0)].$$

Однако из точной последовательности (38) следует, что

$$\mathcal{N}(\rho_0) = \mathcal{J}(\rho) = \mathcal{P},$$

так как ρ — мономорфизм, позволяющий отождествить систему $\mathcal{P}$ с подсистемой системы $\mathfrak{C}_0$. Итак, получаем изоморфизмы

$$H^{i+q+1}(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \approx H^i[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \quad (i \geqslant 1).$$

Для $i = 1$ это означает

$$H^{q+1}(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \approx H^1[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \quad (q \geqslant 0). \qquad (45)$$

Из точной последовательности (42) следует, однако, что группа $H^1[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)]$ является образом гомоморфизма δ, ядро которого совпадает с образом гомоморфизма ρ_q^*. Следовательно,

$$H^1[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \approx \frac{H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]}{\rho_q[H^0(\mathcal{T}, \mathfrak{C}_q)]}. \qquad (46)$$

Рассмотрим точную последовательность проективных систем

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\rho_{q+1}) \xrightarrow{\alpha_{q+1}} \mathfrak{C}_{q+1} \xrightarrow{\rho_{q+1}} \mathcal{N}(\rho_{q+2}) \longrightarrow 0,$$

которая приводит к точной последовательности групп

$$H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] \xrightarrow{\alpha_{q+1}^*} H^0[\mathcal{T}, \mathfrak{C}_{q+1}] \xrightarrow{\rho_{q+1}^*} H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+2})] \xrightarrow{\delta} \ldots \qquad (46')$$

Последняя последовательность показывает, что ядро $\mathcal{N}(\rho_{q+1}^*)$ гомоморфизма ρ_{q+1}^* совпадает с образом $\mathcal{J}(\alpha_{q+1}^*)$ гомоморфизма α_{q+1}^*. Но α_{q+1}^* — мономорфизм.

Действительно, $H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$ является индуктивным пределом групп $H^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$, которые зависят от покрытия $\mathcal{U}$ и гомоморфизмов $h_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$, соответствующих паре покрытий $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, причем $\mathcal{U}'$ тоньше, чем $\mathcal{U}$. С другой стороны, как мы показали в § 3, для любого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$

$$H^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] = Z^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$$

и (α^*_{q+1}) совпадает с гомоморфизмом включения $(\bar{\alpha}_{q+1})$ группы $Z^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$ в группу $Z^0[\mathcal{U}, Q_{q+1}]$. Если $\alpha_{q+1}(f)$ для коцикла $f \in Z^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$ определяет класс 0 в проективном пределе групп $Z^0[\mathcal{U}, \mathcal{C}_{q+1}]$, то существует покрытие $\mathcal{U}'$ пространства $\mathcal{T}$, более тонкое, чем покрытие $\mathcal{U}$, такое, что для отображения

$$\tau: \mathcal{U}' \to \mathcal{U}, \quad \tau(U') \supset U' \quad (U' \in \mathcal{U}')$$

будем иметь $\bar{\tau}(f) = 0$ (гл. I, A, § 15); в этом случае для любого множества U' из $\mathcal{U}'$ имеем $f\{U'\} = \psi_{U'}^{\tau(U')} f\{\tau(U')\} = 0$, и это свойство сохраняется, если считать, что f — цикл из $Z^0[\mathcal{U}', \mathcal{C}_{q+1}]$. Тогда $\bar{\tau}(f)$ и, следовательно, f определяют класс 0 в индуктивном пределе $H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$ групп $Z^0[\mathcal{U}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$. Отсюда следует, что гомоморфизм α^*_{q+1}, определенный гомоморфизмами $(\bar{\alpha}_{q+1})_{\mathcal{U}}$, соответствующими покрытиям $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$, является мономорфизмом.

В силу этого обстоятельства можно отождествить группу $H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})]$ с образом гомоморфизма α^*_{q+1}, который, как мы видели, совпадает с ядром $\mathcal{N}(\rho^*_{q+1})$ гомоморфизма ρ^*_{q+1}. Следовательно,

$$H^0[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_{q+1})] = \mathcal{N}(\rho^*_{q+1}).$$

и, таким образом, формула (46) принимает вид

$$H^1[\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_q)] \approx \frac{\text{ядро } \rho^*_{q+1}}{\text{образ } \rho^*_q}. \tag{47}$$

Из изоморфизмов (45), (47) получаем

$$H^{q+1}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \approx \frac{\text{ядро } \rho^*_{q+1}}{\text{образ } \rho^*_q} \quad (q \geqslant 0). \tag{48}$$

Для выяснения значения формулы (48) заметим, что гомоморфизмы ρ^*, ρ^*_q, входящие в формулу (48), являются гомоморфизмами, индуцированными гомоморфизмами ρ, ρ_q на группах когомологий размерности нуль систем $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, ..., которые вместе с группами когомологий образуют последовательность

$$0 \to H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{C}_0) \xrightarrow{\rho_0^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{C}_1) \xrightarrow{\rho_1^*} \dots. \tag{49}$$

Так как последовательность (38) точная, мы получаем соотношение

$$\rho_0\rho = 0, \quad \rho_1\rho_0 = 0, \ \dots, \quad \rho_{q+1}\rho_q = 0, \ \dots.$$

По формуле

$$(\rho\rho')^* = \rho^*\rho'^*,$$

справедливой для любой пары гомоморфизмов ρ и ρ' между проективными системами, для которых произведение $\rho\rho'$ имеет смысл, получаем

$$\rho_0^*\rho^* = 0, \quad \rho_1^*\rho_0^* = 0, \ \ldots, \quad \rho_{q+1}^*\rho_q^* = 0, \ \ldots, \tag{50}$$

следовательно, образ каждого гомоморфизма ρ_q^* является подгруппой ядра гомоморфизма ρ_{q+1}^*.

Формулы (50) показывают, что группы и гомоморфизмы последовательности (49) образуют коцепной комплекс [1]). Факторгруппы, которые входят в формулу (48), в действительности являются группами когомологий этого комплекса.

Формула (48) показывает, что группы когомологий размерности $q > 0$ проективной системы $\mathcal{F}$ изоморфны группам когомологий коцепного комплекса (49), присоединенного к резольвенте (38) системы $\mathcal{F}$.

Мы получаем формулу, аналогичную формуле (48) для группы когомологий размерности 0 системы, т. е. для группы $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Действительно, из точной последовательности (38) следует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{\rho_0} \mathcal{N}(\rho_1) \to 0, \tag{51}$$

так как образ ρ_0 совпадает с ядром гомоморфизма ρ_1. Рассуждения, аналогичные проведенным для последовательности (46′), показывают, что ρ индуцирует мономорфизм ρ^* группы $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = \lim\operatorname{ind}\{Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}), h_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}\}$ в $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{C}_0) = \lim\operatorname{ind}\{Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}), h_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}\}$. Поэтому можно отождествить группу $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ с образом ρ^*. С другой стороны, из точной последовательности (51) следует точная последовательность

$$H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{C}_0) \xrightarrow{\rho_0^*} H^0(\mathcal{T}, \mathcal{N}(\rho_1)) \xrightarrow{\delta} \ldots .$$

Из нее видно, что образ гомоморфизма ρ^* совпадает с ядром гомоморфизма ρ_0^*, и, значит,

$$H^0(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = \text{ядро } \rho_0^*. \tag{52}$$

Формулы (48), (52) позволяют вычислить группы когомологий проективной системы $\mathcal{F}$ при помощи резольвенты системы $\mathcal{F}$.

---

[1]) В гл. I, A, § 17, мы рассматривали цепные комплексы, которые определялись как группы с дифференцированием (G, d), в которых G была прямой суммой $G_0 + G_1 + \ldots + G_q + \ldots$, причем $d(G_i) \subset G_{i-1}$. Коцепным комплексом называется группа с дифференцированием (G, δ), в которой G разложена в прямую сумму $G = G^0 + G^1 + \ldots$, причем $\delta G^i \subset G^{i+1}$.

6. Тонкие проективные системы на паракомпактных пространствах

Рассмотрим паракомпактное пространство $\mathcal{T}$. Проективная система $\mathfrak{F}=\{H_U, \psi_V^U\}$, определенная на пространстве $\mathcal{T}$, называется *тонкой*, если к каждому локально конечному открытому покрытию $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$ можно присоединить систему гомоморфизмов $\{\rho^A\}_{A:\mathcal{A}}$ пространства $\mathcal{T}$ в себя и систему замкнутых множеств $\{V^A\}_{A:\mathcal{A}}$ $(V^A \subset A)$ так, что

1. $\rho_W^A(H_W)=0$ для любого открытого множества $W \subset A - V^A$,
2. $\sum\limits_A \rho_W^A(t)=t$ для любого открытого множества W, пересекающего только конечное число множеств $A \in \mathcal{A}$, и для любого элемента t из группы H_W.

Докажем следующую теорему, связанную с тонкими системами.

Теорема 1. *Группы когомологий $H^q(\mathcal{T}, \mathfrak{F})$ паракомпактного пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами в тонкой канонической системе $\mathfrak{F}$ являются нулевыми для размерностей $q \geqslant 1$.*

Доказательство. Докажем сначала, что для любого локально конечного покрытия $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$

$$H^q(\mathcal{A}, \mathfrak{F})=0 \quad (q \geqslant 1). \tag{53}$$

Для каждой размерности $q \geqslant 1$ определим гомоморфизм

$$\mathcal{D}: C^q(\mathcal{A}, \mathfrak{F}) \to C^{q-1}(\mathcal{A}, \mathcal{T}),$$

который для любой коцепи f из группы $C^q(\mathcal{A}, \mathfrak{F})$ удовлетворяет условию вида

$$(\mathcal{D}\delta)(f) \pm (\delta\mathcal{D})(f) = \pm f. \tag{54}$$

Рассмотрим коцепь f из группы $C^q(\mathcal{A}, \mathfrak{F})$ и систему $\{A_0, \ldots, A_{q-1}\}$, состоящую из q множеств покрытия $\mathcal{A}$ с непустым пересечением. Для каждого множества $A \in \mathcal{A}$ обозначим через f^A коцепь из $C^{q-1}(\mathcal{A}, \mathfrak{F})$, которая сопоставляет каждой системе $\{A_0, \ldots, A_{q-1}\}$ элемент группы $H_{A_0\cap\ldots\cap A_{q-1}}$, определенный соотношениями

$$\begin{aligned}\psi^{A_0\cap\ldots\cap A_{q-1}}_{A_0\cap\ldots\cap A_{q-1}\cap A}(f^A\{A_0, \ldots, A_{q-1}\}) &= \\ = \rho^A_{A_0\cap\ldots\cap A_{q-1}\cap A}(f\{A_0, \ldots, A_{q-1}, A\}),\end{aligned} \tag{55}$$

$$\psi^{A_0\ldots A_{q-1}}_{A_0\cap\ldots\cap A_{q-1}\cap(\mathcal{T}-V^A)}(f^A\{A_0, \ldots, A_{q-1}\})=0.$$

По предположению ρ^A — гомоморфизм системы $\mathcal{F}$ в себя. Пересечение множеств

$$B = A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1} \cap A, \quad B' = A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1} \cap (\mathcal{T} - V^A)$$

выражается формулой

$$C = B \cap B' = A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1} \cap (A - V^A).$$

Положим $D = A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1}$, $\{D\} = \{A_0, \ldots, A_{q-1}\}$. Формулы (55) примут тогда вид

$$\psi^D_{D \cap A}(f^A\{D\}) = \psi^D_B(f^A\{D\}) = \rho^A_B(f\{B\}) = \rho^A_{D \cap A}(f\{D, A\}),$$
$$\psi^D_{B'}(f^A\{D\}) = 0. \tag{55'}$$

Из условия перестановочности операторов ρ^A_V, ψ^U_V следует

$$\psi^B_C \psi^D_B (f^A\{D\}) = \psi^B_C[\rho^A_B(f\{B\})] = \rho^A_C[\psi^B_C(f\{B\})].$$

Условие 1 из определения тонких систем вместе с включением $C \subset A - V^A$ показывает, что

$$\psi^B_C[\rho^A_B(f\{B\})] = 0 = \psi^{B'}_C[\psi^D_{B'}(0)].$$

Следовательно, уравнения (55) совместны, так как их правые члены представляют собой когерентные сечения на множествах B и B'. Так как система $\mathcal{F}$ каноническая, то на $D = A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1}$ существует одно и только одно сечение $f^A\{D\}$, удовлетворяющее условиям (55). Функция $\{A_0, \ldots, A_{q-1}\} \to f^A\{A_0, \ldots, A_{q-1}\}$ является коцепью из $C^{q-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$.

Так как покрытие $\mathcal{A}$ локально конечно, то любая точка $x \in A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1}$ обладает такой окрестностью W_x, что множество $A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1} \cap W_x$ пересекается только с конечным числом множеств A из $\mathcal{A}$. Оператор $\mathcal{D}$ определяется формулой $\mathcal{D}f = \sum_A f^A$. Иначе говоря, $\mathcal{D}f$ является коцепью, заданной соотношениями

$$\psi^D_{D \cap W_x}(\mathcal{D}f)\{A_0, \ldots, A_{q-1}\} = \sum_A \psi^D_{D \cap W_x}(f^A\{A_0, \ldots, A_{q-1}\}), \tag{56}$$

где сумма распространяется на все множества $A \in \mathcal{A}$, для которых пересечение $W_x \cap A_0 \cap \ldots \cap A_{q-1} \cap A$ не пусто. Легко проверить, что сечения, определенные таким образом, на множествах $D \cap W_x$ могут быть согласованы.

Вычислим кограницу коцепи f^A размерности $q-1$, заданной формулами (55) или (55'). Для любой системы $\{A_0, \ldots, A_q\}$ имеем

$$(\delta f^A)\{A_0, \ldots, A_q\} = \\ = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi^{A_0 \cap \ldots \cap \hat{A}_i \cap \ldots \cap A_q}_{A_0 \cap \ldots \cap A_q}(f^A\{A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_q\}).$$

Пусть x — произвольная точка пересечения $A_0 \cap \ldots \cap A_q$. Она принадлежит конечному числу множеств покрытия $\mathscr{A}$, следовательно, существует открытое множество M, содержащее точку x и лежащее в каждом из множеств, которые входят в $\mathscr{A}$ и содержат точку x. В частности, множество M содержится в каждом из множеств $A_0, \ldots, A_q$.

Введем обозначения

$$\{D\} = \{A_0, \ldots, A_q\}, \quad D = A_0 \cap \ldots \cap A_q;$$

$$\{D^i\} = \{A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_q\}, \quad D^i = A_0 \cap \ldots \cap \hat{A}_i \ldots \cap A_q.$$

Тогда

$$(\delta f^A)\{D\} = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi_D^{D^i} (f^A \{D^i\}).$$

Применив гомоморфизм ψ_M^D, получим

$$\psi_M^D [(\delta f^A)] \{D\} = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi_M^{D^i} (f^A \{D^i\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi_M^{A \cap D^i} \psi_{A \cap D^i}^{D^i} (f^A \{D^i\}).$$

В силу формулы (55)

$$\psi_M^D [(\delta f^A) \{D\}] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi_M^{A \cap D^i} \rho_{A \cap D^i}^A (f \{D^i, A\}). \tag{57}$$

Из формулы (56), суммируя по индексу A, получаем

$$\psi_M^D [(\delta \mathscr{D} f) \{A_0, \ldots, A_q\}] = \sum_{i=0}^{q} (-1^i) \sum_A \psi_M^{A \cap D^i} \rho_{A \cap D_i}^A (f \{D^i, A\}) =$$

$$= \rho_M^A \Big[\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sum_A \psi_M^{A \cap D^i} (f \{D^i, A\}) \Big]. \tag{58}$$

С другой стороны, для коцепи f

$$(\delta f) \{A_0, \ldots, A_q, A\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \psi_{A_0 \cap \ldots \cap A_q \cap A}^{A_0 \cap \ldots \cap \hat{A}_i \cap \ldots \cap A_q \cap A} (f \{A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_q, A\}) +$$

$$+ (-1)^{q+1} \psi_{A_0 \ldots \cap A_q \cap A}^{A_0 \cap \ldots \cap A_q} (f \{A_0, \ldots, A_q\}).$$

Теперь, пользуясь формулами (55′), (56), можно записать

$$\psi_M^D(\mathscr{D}\delta f)\{D\} = \psi_M^D\left[\sum_A (\delta f^A)\{D\}\right] =$$

$$= \sum_A \psi_M^{D\cap A}(\psi_{D\cap A}^D((\delta f^A)\{D\})) = \sum_A \psi_M^{D\cap A}[\rho_{D\cap A}^A((\delta f)\{D,\ A\})] =$$

$$= \sum_A \rho_M^A\{\psi_M^{D\cap A}\left[\sum_{i=0}^q (-1)^i\,\psi_{D\cap A}^{D^i\cap A}(f\{D^i,\ A\})\right] +$$

$$+ (-1)^{q+1}\,\psi_{D\cap A}^D(f\{D\})\} =$$

$$= \sum_A \rho_M^A\left[\sum_{i=0}^q (-1)^i\,\psi_M^{D^i\cap A}(f\{D^i,\ A\})\right] + (-1)^{q+1}\,\psi_M^D\sum_A \rho_D^A(f\{D\})],$$

где сумма распространяется на множества A, содержащие точку x, т. е. на множество M.

Из последней формулы и из соотношения (58) путем вычитания находим

$$\psi_M^D\left[(-1)^{q+1}\sum_A \rho_D^A(f\{D\}) + (\delta\mathscr{D}f)\{D\} - (\mathscr{D}\delta f)\{D\}\right] = 0. \qquad (59)$$

Здесь можно предполагать, что сумма распространена на все множества $A\in\mathscr{A}$, содержащие множество M.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathscr{M}$ множества $D = A_0\cap\ldots\cap A_q$ множествами M, такое, что каждой точке x из D соответствует окрестность $M_x\in\mathscr{M}$, содержащаяся во всех множествах $A\in\mathscr{A}$, которые содержат точку x, и пересекающая только конечное число множеств $A\in\mathscr{A}$.

Кроме того, предположим, что для каждого x множество M_x не пересекает никаких множеств V^A, кроме тех, для которых A содержит множество M_x. Такой выбор множества M_x возможен, так как множества V^A замкнуты и число множеств V^A, которые могли бы пересекать множество M_x, конечно.

В этом случае в формуле (59) можно считать, что $M\in\mathscr{M}$, и распространить сумму на все множества A, которые пересекают D. Действительно, для этих множеств A, не содержащих множества M, будем иметь $M\subset\mathscr{T} - V^A$ и по условию 1 из определения тонких систем получим

$$\psi_M^D\rho_D^A(f\{D\}) = \rho_M^A\psi_M^D(f\{D\}) = 0.$$

Поскольку равенство (59) справедливо для каждого из множеств $M\in\mathscr{M}$ и система $\mathscr{F}$ существенная, имеет место соотношение

$$(-1)^{q+1}\sum_A \rho_D^A(f\{D\}) = (\mathscr{D}\delta f)\{D\} - (\delta\mathscr{D}f)\{D\}, \qquad (60)$$

где сумма распространена на все множества A, пересекающие множества M. Из условия 2, наложенного по определению на тонкие системы, следует, что

$$(-1)^{q+1}\psi_M^D f\{D\} = (-1)^{q+1}\sum_A \rho_M^A \psi_M^D(f\{D\}) = \psi_M^D(\mathscr{D}\delta f - \delta\mathscr{D}f)\{D\},$$

и, поскольку $\mathscr{F}$ существенная, мы получаем формулу

$$(-1)^{q+1} f = \mathscr{D}\delta f - \delta\mathscr{D}f. \tag{61}$$

Из нее видно, что любой коцикл f из группы $C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ является кограницей, так как если $\delta f = 0$, то

$$f = (-1)^q \delta(\mathscr{D}f) = \delta[(-1)^q \mathscr{D}f].$$

Поэтому $Z^q(\mathscr{A}, \mathscr{F}) = B^q(\mathscr{A}, \mathscr{F})$ и

$$H^q(\mathscr{A}, \mathscr{F}) = 0. \tag{62}$$

Это равенство справедливо для всех размерностей q, для которых можно определить операторы $\mathscr{D}$, т. е. для $q \geqslant 1$. Таким образом, формула (53) доказана.

Рассмотрим теперь произвольное открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства $\mathscr{T}$. Так как пространство $\mathscr{T}$ паракомпактно, то существует открытое покрытие $\mathscr{A}$, локально конечное и более тонкое, чем $\mathscr{U}$. Для такого покрытия существует гомоморфизм

$$h_{\mathscr{A}}^{\mathscr{U}} : H_q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathscr{A}, \mathscr{F}).$$

Группа $H^q(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ была определена как индуктивный предел семейства групп $H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ и гомоморфизмов $h_{\mathscr{U}'}^{\mathscr{U}}$. Это значит, что $H^q(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ является факторгруппой прямой суммы S^q групп $H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ по подгруппе R^q, порожденной элементами вида $t - h_{\mathscr{U}'}^{\mathscr{U}}(t)$ $(t \in H^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}))$. Для $q \geqslant 1$ и $\mathscr{U}' = \mathscr{A}$ имеем $H^q(\mathscr{A}, \mathscr{F}) = 0$, следовательно, $h_{\mathscr{A}}^{\mathscr{U}}(t) = 0$. Отсюда вытекает, что любой элемент $t \in S^q$ лежит в R^q. Значит, $R^q = S^q$, $S^q/R^q = 0$, т. е. мы доказали формулу

$$H^q(\mathscr{T}, \mathscr{F}) = 0 \quad (q \geqslant 1) \tag{63}$$

и тем самым теорему 1.

Чтобы привести пример тонкой проективной системы, рассмотрим паракомпактное пространство $\mathscr{T}$ и систему $\mathscr{C}$, которая сопоставляет каждому открытому множеству U аддитивную группу C_U вещественных функций, определенных и непрерывных на U. Гомоморфизмы ψ_U^V $(U \subset V)$ определяются, если взять для каждой функции из C_V ее ограничение на множество U.

Система $\mathscr{C}$, определенная таким образом, называется *системой ростков непрерывных функций* на пространстве $\mathscr{T}$.

Покажем, что система $\mathscr{C}$ тонкая. Действительно, в гл. I, В, § 17, мы доказали, что для любого локально конечного покрытия $\mathscr{A}$ паракомпактного пространства $\mathscr{T}$ существует разбиение единицы, т. е. система неотрицательных функций $\varphi_A (A \in \mathscr{A})$, непрерывных на $\mathscr{T}$ и таких, что каждая функция φ_A равна нулю вне некоторого замкнутого множества V^A, содержащегося в A, а сумма функций φ_A в каждой точке из $\mathscr{T}$ равна 1.

Каждая функция φ_A определяет гомоморфизм ρ_U^A группы C_U, если умножить каждую функцию $f \in C_U$ на ограничение функции φ_A на множество U: $\rho_U^A(f) = f(\varphi_A \mid U)$. Гомоморфизмы ρ_U^A для заданного индекса A образуют гомоморфизм ρ^A системы $\mathscr{C}$, а множество гомоморфизмов ρ^A, присоединенных к множествам A покрытия $\mathscr{A}$, удовлетворяют условиям 1, 2 из определения тонкой системы. Мы доказали таким образом следующую теорему.

Теорема 2. *Проективная система $\mathscr{C}$ ростков непрерывных функций на паракомпактном пространстве $\mathscr{T}$ тонкая.*

Применив теорему 1, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Группы когомологий размерности $q \geqslant 1$ паракомпактного пространства $\mathscr{T}$ с коэффициентами в системе $\mathscr{C}$ ростков непрерывных функций на $\mathscr{T}$ тривиальные:*

$$H^q(\mathscr{T}, \mathscr{C}) = 0 \qquad (q \geqslant 1).$$

7. Индуктивные семейства проективных систем

Рассмотрим семейство проективных систем $\{\mathscr{P}_\alpha\}_{\alpha \in M}$, определенных на топологическом пространстве $\mathscr{T}$. Системы $\mathscr{P}_\alpha$ зависят от индекса α, пробегающего частично упорядоченное множество M, фильтрующееся влево. Предположим, что для каждой упорядоченной пары индексов $\alpha > \beta$ из M задан гомоморфизм ρ_β^α системы $\mathscr{P}_\alpha$ в систему $\mathscr{P}_\beta$ такой, что для трех индексов $\alpha > \beta > \gamma$ имеем

$$\rho_\gamma^\alpha = \rho_\gamma^\beta \rho_\beta^\alpha.$$

Будем говорить тогда, что $\{\mathscr{P}_\alpha\}_{\alpha \in M}$ — *индуктивное семейство проективных систем* на пространстве $\mathscr{T}$.

Приведем пример индуктивного семейства проективных систем. Для этого рассмотрим проективную систему $\mathscr{P} = \{H_U, \psi_U^V\}$ на пространстве $\mathscr{T}$ и обозначим через $\mathscr{M}$ множество открытых покрытий пространства $\mathscr{T}$. Присоединим к каждому покрытию $\mathscr{A} \in \mathscr{M}$ систему $\mathscr{P}_{\mathscr{A}}$, определенную следующим образом. Пусть U — открытое множество из $\mathscr{T}$. Рассмотрим множество сечений $t_{A, U}$ системы $\mathscr{P}$ над множествами $A \cap U$, $A \in \mathscr{A}$, и будем называть сечениями системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ над множеством U семейства сечений $\{t_{A,U}\}_{A\in\mathcal{A}}$, которые при любых $A, A'\in\mathcal{A}$ удовлетворяют условию

$$\psi^{A\cap U}_{A\cap A'\cap U}(t_{A,U}) = \psi^{A'\cap U}_{A\cap A'\cap U}(t_{A',U}). \tag{64}$$

Если даны два множества U и $V(U\subset V)$ и сечение $\{t_{V,A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ над множеством V, определим ограничение этого сечения на U формулой

$$^{\mathcal{A}}\psi^{V}_{U}(\{t_{A,V}\}_{A\in\mathcal{A}}) = \{\psi^{V\cap A}_{U\cap A}(t_{A,V})\}_{A\in\mathcal{A}}.$$

Группа $^{\mathcal{A}}H_U$ сечений над U системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ образует вместе с гомоморфизмами $^{\mathcal{A}}\psi^{V}_{U}$ проективную систему $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Пусть $\mathcal{A}'$ — покрытие более тонкое, чем $\mathcal{A}$. Присоединим к каждому множеству A' из $\mathcal{A}'$ множество A из $\mathcal{A}$, содержащее A', т. е. введем в рассмотрение функцию α: $\mathcal{A}'\to\mathcal{A}$ такую, что $\alpha(A')\supset A'$ для любого A' из $\mathcal{A}'$. Тогда каждому сечению $s = \{t_{A,U}\}_{A\in\mathcal{A}}$ системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ над множеством U можно сопоставить сечение s' системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}'}$, положив

$$s' = \{\psi^{\alpha(A')\cap U}_{U\cap A'}(t_{\alpha(A'),U})\}_{A'\in\mathcal{A}'}.$$

Отображение $\bar\alpha$: $s\to s'$ не зависит от выбора функции α. Действительно, если A_1 и A_2 — два множества из $\mathcal{A}$, содержащие множество A', то в силу формулы (64) получаем

$$\psi^{A_1\cap U}_{U\cap A'}(t_{A_1,U}) = \psi^{A_1\cap A_2\cap U}_{U\cap A'}\psi^{A_1\cap U}_{A_1\cap A_2\cap U}(t_{A_1,U}) =$$
$$= \psi^{A_1\cap A_2\cap U}_{U\cap A'}\psi^{A_2\cap U}_{A_1\cap A_2\cap U}(t_{A_2,U}) = \psi^{A_2\cap U}_{U\cap A'}(t_{A_2,U}).$$

Следовательно, для каждого открытого множества U пространства $\mathcal{T}$ имеем гомоморфизм α_U группы $^{\mathcal{A}}H_U$ в группу $^{\mathcal{A}'}H_U$. Для множества $V\supset U$ и для сечения $s = \{t_{A,V}\}_{A\in\mathcal{A}}$ системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ над V имеем

$$(^{\mathcal{A}'}\psi^{V}_{U}\bar\alpha_V)(s) = {}^{\mathcal{A}'}\psi^{V}_{U}(\{\psi^{\alpha(A')\cap V}_{U\cap A'}(t_{\alpha(A'),V})\})_{A'\in\mathcal{A}'} =$$
$$= \{\psi^{V\cap A'}_{U\cap A'}\psi^{\alpha(A')\cap V}_{V\cap A'}(t_{\alpha(A'),V})\}_{A'\in\mathcal{A}'} =$$
$$= \{\psi^{\alpha(A')\cap U}_{A'\cap U}\psi^{\alpha(A')\cap V}_{\alpha(A')\cap U}(t_{\alpha(A'),V})\}_{A'\in\mathcal{A}'} =$$
$$= \bar\alpha_V(^{\mathcal{A}}\psi^{V}_{U}(\{t_{A,V}\}_{A\in\mathcal{A}})) = (\bar\alpha_U{}^{\mathcal{A}}\psi^{V}_{U})(s).$$

Отсюда следует, что гомоморфизмы $\bar\alpha_U$: $^{\mathcal{A}}H_U = {}^{\mathcal{A}'}H_U$ удовлетворяют условию перестановочности

$$^{\mathcal{A}'}\psi^{V}_{U}\bar\alpha_V = \bar\alpha_V{}^{\mathcal{A}}\psi^{V}_{U}.$$

В силу этого условия гомоморфизмы $\bar{\alpha}_U$ определяют гомоморфизм $\rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$ системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ в систему $\mathcal{F}_{\mathcal{A}'}$.

Итак, системы $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ вместе с гомоморфизмами $\rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$ образуют индуктивное семейство проективных систем на пространстве $\mathcal{T}$.

Для каждого открытого множества U группы ${}^{\mathcal{A}}H_U$ вместе с гомоморфизмами $(\rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'})_U$ образуют индуктивное семейство групп, имеющее в качестве предела $\mathcal{H}_U$. Если V — открытое множество, содержащее U, то гомоморфизмы

$$ {}^{\mathcal{A}}\psi^V_U\colon {}^{\mathcal{A}}H_V \to {}^{\mathcal{A}}H_U $$

определяют гомоморфизм индуктивного семейства $\{{}^{\mathcal{A}}H_V, (\rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'})_V\}$ в индуктивное семейство $\{{}^{\mathcal{A}}H_U, (\rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'})_U\}$ и, следовательно, индуцируют гомоморфизм (гл. I, A, § 15)

$$ \psi^V_U\colon \mathcal{H}_V \to \mathcal{H}_U. $$

Группы $\mathcal{H}_U$ вместе с гомоморфизмами ψ^V_U определяют проективную систему $\bar{\mathcal{F}}$ на пространстве $\mathcal{T}$, которую можно назвать *пределом индуктивного семейства* $\{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}, \rho^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}\}$.

Система $\bar{\mathcal{F}}$ совпадает с проективной системой, которую мы построили в § 2. Мы показали там, что она является существенной и полной. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Любая проективная система $\mathcal{F}$ на пространстве $\mathcal{T}$ определяет индуктивное семейство проективных систем $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ на пространстве $\mathcal{T}$, зависящее от покрытия $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}$ и допускающее в качестве предела каноническую проективную систему.*

8. Пучки абелевых групп над топологическим пространством

Пусть задана проективная система $\mathcal{F} = \{H_U, \psi^V_U\}$ на топологическом пространстве $\mathcal{T}$. Каждой точке $x \in \mathcal{T}$ можно поставить в соответствие индуктивное семейство $F_x = \{H_{U_x}, \psi^{V_x}_{U_x}\}$ абелевых групп H_{U_x}, где U_x — открытые множества из $\mathcal{T}$, содержащие точку x, а H_{U_x} — группы, присоединенные к ним системой $\mathcal{F}$. Предел G_x индуктивного семейства F_x называется *группой ростков сечений системы* $\mathcal{F}$ в точке x. Множество групп G_x, когда x пробегает пространство $\mathcal{T}$, называется *пучком абелевых групп* над пространством $\mathcal{T}$, определенным системой $\mathcal{F}$. Объединение $\mathcal{G}$ групп G_x называется *накрывающим пространством* над пространством $\mathcal{T}$, присоединенным к системе $\mathcal{P}$. Накрывающее пространство $\mathcal{G}$ допускает проекцию p на пространство $\mathcal{T}$, так как каждая точка y из $\mathcal{G}$ принадлежит определенной группе G_x и в качестве проекции можно взять отображение

$$p\colon y \longrightarrow x \qquad (y \in G_x).$$

G_x является факторгруппой прямой суммы S_x групп H_{U_x}. Отсюда следует, что каждый элемент t группы H_{U_x} определяет элемент группы G_x, а именно класс элемента t, рассматриваемый как элемент в S_x. Этот класс называется ростком, определенным элементом t в точке x.

Пусть задан элемент t группы H_U, присоединенный системой $\mathcal{P}$ к открытому множеству U. Этот элемент определяет в каждой из точек x множества U росток $t_x \in G_x$. Таким образом, t определяет отображение $x \longrightarrow t_x$ множества U в накрывающее пространство $\mathcal{G}$. Это отображение называется *сечением*, определенным t в пространстве $\mathcal{G}$, и будет обозначаться $\tilde{t}$. Образ отображения $\tilde{t}$ будет обозначаться символом $[t]$.

Таким образом, к каждому открытому множеству U пространства $\mathcal{T}$ и к каждому элементу t из группы H_U мы присоединили множество $[t]$ накрывающего пространства $\mathcal{G}$. Ростком элемента $t=0$ группы $H_{\mathcal{T}}$ в каждой точке x является элемент 0 группы G_x. Следовательно, нулевые элементы групп G_x образуют множество $[t]$, где $t=0 \in H_{\mathcal{T}}$. Для любого $t \in H_U$ проекция p пространства $\mathcal{G}$ на $\mathcal{T}$ индуцирует взаимно однозначное соответствие множества $[t]$ на множество U, так как для каждой точки $x \in U$ существует единственная точка из $[t]$, проектирующаяся в x, а именно росток t_x, определенный в точке x.

Предположим, что элементы $t \in H_U$ и $s \in H_V$ таковы, что множества $[s]$ и $[t]$ имеют общую точку y. В этом случае множества U и V имеют общую точку $x = p(y)$ и $y = s_x = t_x$. Отсюда следует, что сечения s и t определяют один и тот же росток в точке x, следовательно, s и t принадлежат одному классу прямой суммы S_x групп H_{U_x}. Другими словами, $s-t$ определяет класс 0 группы S_x. В этом случае существует группа H_{W_x} $(W_x \subset U \cap V)$, для которой (гл. I, А, § 15)

$$\psi^U_{W_x}(t) = \psi^V_{W_x}(s).$$

Если обозначить через r элемент группы H_{W_x}, определенный любой из двух частей последнего равенства, то для каждой точки x' множества W_x будем иметь

$$r_{x'} = s_{x'} = t_{x'}.$$

Отсюда следует, что образ r при отображении

$$\widetilde{r}\colon x' \to r_{x'}$$

принадлежит множествам $[s]$ и $[t]$. Таким образом, если множества $[s]$ и $[t]$ имеют общую точку y, то они содержат подмножество того же вида $[r]$, содержащее точку y. Это свойство указывает на то, что множества вида $[t]$ могут образовывать базис топологии множества $\mathcal{G}$. Эта топология называется *канонической топологией* накрывающего пространства $\mathcal{G}$. В дальнейшем под накрывающим пространством мы будем понимать пространство $\mathcal{G}$ вместе с его канонической топологией. Открытыми множествами пространства $\mathcal{G}$ являются, следовательно, произвольные объединения множеств вида $[t]$. Имеют место следующие предложения:

1. Отображение p накрывающего пространства $\mathcal{G}$ на пространство $\mathcal{T}$ непрерывно. Действительно, прообраз $p^{-1}(U)$ открытого множества $U \subset \mathcal{T}$ является объединением множеств $[t]$, соответствующих сечениям t из групп H_V, присоединенных к множествам $V \subset U$.

2. Каждая точка $y \in \mathcal{G}$ принадлежит открытому множеству $[t]$, на котором отображение p взаимно однозначно. Более того, p является локальным гомеоморфизмом, так как p устанавливает гомеоморфизмы между окрестностями $[t]$ точек из $\mathcal{G}$ и проекциями этих окрестностей на $\mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathcal{G} + \mathcal{G}$ подпространство прямого произведения $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, образованное парами (y_1, y_2), для которых $p(y_1) = p(y_2)$. Можно определить отображение μ топологического пространства $\mathcal{G} + \mathcal{G}$ в пространство $\mathcal{G}$, сопоставляя каждой паре $(y_1, y_2) \in \mathcal{G} + \mathcal{G}$ элемент $y_1 + y_2$ из группы $G_{p(y_1)} = G_{p(y_2)}$.

3. Отображение μ, введенное выше, непрерывно. Действительно, пусть D — открытое множество в пространстве $\mathcal{G}$, $y \in D$ и $[t]$ — окрестность точки y, содержащаяся в D. Если пара точек (y_1, y_2) из $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям

$$p(y_1) = p(y_2), \quad y_1 + y_2 = y,$$

то можно считать, что y_1 и y_2 являются ростками, определенными в точке $x = p(y_1) = p(y_2)$ двумя сечениями t_1 и t_2 в группе H_U, причем U — открытое множество, содержащее точку x. Из равенства $y = y_1 + y_2$ следует, что для ограничений t', t'_1, t'_2 сечений t, t_1, t_2 на открытое множество $W \subset p([t]) \cap U$ выполнено соотношение

$$t' = t'_1 + t'_2.$$

Следовательно, для любой точки x' из W получаем

$$t'_x = (t'_1)_{x'} + (t'_2)_{x'},$$

откуда следует, что множество $\mu^{-1}([t])$ является объединением множеств из $\mathcal{G}+\mathcal{G}$ вида

$$(\mathcal{G}+\mathcal{G})\cap([t_1']\times[t_2']).$$

Так как эти множества открыты, то и множество $\mu^{-1}([t])$ открыто, и этим же свойством обладает множество $\mu^{-1}(D)$, которое является объединением множеств вида $\mu^{-1}([t])$.

Можно доказать обратное. Пусть задано топологическое пространство $\mathcal{G}$ и локально гомеоморфное отображение p пространства $\mathcal{G}$ на пространство $\mathcal{T}$, такое, что прообразом точки $x\in\mathcal{T}$ является группа $G_x\subset\mathcal{G}$, и отображения μ: $\mathcal{G}+\mathcal{G}\to\mathcal{G}$, $x\to 0\in G_x$ непрерывны. Тогда на пространстве $\mathcal{T}$ можно найти такую проективную систему $\mathcal{P}$, что $\mathcal{G}$ будет накрывающим пространством, присоединенным к проективной системе $\mathcal{P}$.

Это условие, вообще говоря, не определяет однозначно систему $\mathcal{P}$. Однако единственность с точностью до изоморфизма будет обеспечена, если потребовать дополнительно, чтобы $\mathcal{P}$ являлась канонической системой [1]).

Действительно, обозначим через m открытое множество из $\mathcal{G}$, на котором проекция p взаимно однозначна. В любой полной системе $\mathcal{P}$, допускающей $\mathcal{G}$ в качестве накрывающего пространства, m должно быть объединением непересекающихся множеств $[t_\alpha]$, так как когерентные сечения t_α из $\mathcal{P}$ объединяются в сечение t. Здесь сечения t_α — когерентные, и они допускают объединения t. Если $\mathcal{P}$ является одновременно и существенной, то сечения t_α и t и множества $p(t_\alpha)$, $p(t)=\bigcup\limits_\alpha p(t_\alpha)$ однозначно определены. Обратно, любое сечение t над открытым множеством $U\subset\mathcal{T}$ в системе $\mathcal{P}$ определяет в $\mathcal{G}$ открытое множество m, на котором p является взаимно однозначным отображением.

Отсюда следует, что для любого множества $U\subset\mathcal{T}$ элементы группы H_U находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми множествами $m\subset\mathcal{G}$, на которых p взаимно однозначно и для которых $p(m)=U$. Если отождествить элементы группы H_U с этими множествами m из $\mathcal{G}$, то сложение в группе H_U определится равенством

$$(m_1)_x+(m_2)_x=(m_1+m_2)_x \qquad (x\in U), \tag{65}$$

где через m_x обозначено пересечение множества m с группой $G_x=p^{-1}(x)$. Действительно, если заданы два сечения t_1 и t_2 над U, то росток, определенный суммой t_1+t_2 в точке $x\in U$, является суммой ростков, определенных в x каждым из сечений.

[1]) Две проективные системы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ называются изоморфными, если существуют два гомоморфизма ρ: $\mathcal{P}\to\mathcal{P}'$, ρ': $\mathcal{P}'\to\mathcal{P}$ таких, что $\rho\rho'=1$, $\rho'\rho=1$.

Таким образом, мы доказали, что любая каноническая проективная система $\mathcal{P}$, допускающая в качестве накрывающего пространства пространство $\mathcal{G}$, изоморфна системе, которая сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset \mathcal{T}$ множество H_U открытых множеств из $\mathcal{G}$, отображенных взаимно однозначно проекцией p в множестве U, причем сумма в H_U определена формулой (65).

Проективная система $\mathcal{P}$, присоединенная таким образом к накрывающему пространству $\mathcal{G}$, называется *канонической системой*, присоединенной к структуре $(\mathcal{G}, p)$ или пучку групп $G_x \subset \mathcal{G}$.

Таким образом, выше к каждой проективной системе $\mathcal{P}$ мы присоединили накрывающее пространство $\mathcal{G}$ и обнаружили, что к $\mathcal{G}$ можно присоединить каноническую систему $\mathcal{P}'$. Можно показать, что $\mathcal{P}'$ изоморфна индуктивному пределу семейства проективных систем $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, присоединенных к системе $\mathcal{P}$. Легко также показать, что $\mathcal{P}'$ изоморфна $\mathcal{P}$, если система $\mathcal{P}$ каноническая.

ГЛАВА IV

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА[1])

А. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

1. Абсолютные гомотопические группы топологического пространства

Рассмотрим топологическое пространство $\mathcal{T}$ и фиксированную точку x_0 этого пространства. Обозначим через I^n единичный куб числового пространства R^n, т. е. множество точек $(t_1, \ldots, t_n)$, для которых

$$0 \leqslant t_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Обозначим через $S_n(x_0)$ множество непрерывных отображений f куба I^n в пространство $\mathcal{T}$, для которых

$$f(\dot{I}^n) = \{x_0\}, \tag{2}$$

где $\dot{I}^n$ — граница куба I^n, т. е. множество точек из I^n, для которых по крайней мере в одном из соотношений (1) имеет место равенство. В множестве $S_n(x_0)$ введем закон композиции, поставив в соответствие каждой паре элементов f и g из $S_n(x_0)$ отображение $f * g$ куба I^n в пространство $\mathcal{T}$, определенное соотношениями

$$(f * g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \left(t_1 \leqslant \frac{1}{2}\right), \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \left(t_1 \geqslant \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Это определение корректно, так как для $t_1 = \frac{1}{2}$ получаем

$$f(1, t_2, \ldots, t_n) = g(0, t_2, \ldots, t_n) = x_0.$$

Отображение $f * g$ непрерывно, так как прообразом открытого множества U из $\mathcal{T}$ является объединение множеств $(f^{-1}(U))'$ и $(g^{-1}(U))''$. Здесь штрихи имеют следующий смысл: через A' мы обозначаем образ множества $A \subset I^n$ при преобразовании

$$t_1' = \frac{t_1}{2}, \; t_2' = t_2, \ldots, t_n' = t_n,$$

[1]) Для справок см. Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953; Серр Ж. П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, сборник «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, стр. 9—114.

а через B'' — образ множества $B \subset I^n$ при преобразовании

$$t_1'' = \frac{1+t_1}{2}, \quad t_2'' = t_2, \ \ldots, \ t_n'' = t_n.$$

Множества $A = f^{-1}(U)$, $B = g^{-1}(U)$ открыты в I^n, а предыдущие преобразования являются гомеоморфизмами куба I^n в себя. Поэтому A', B'' также будут открытыми множествами в I^n.

Введем теперь в множестве $S_n(x_0)$ отношение эквивалентности, назвав элементы f и g из $S_n(x_0)$ гомотопными, если существует непрерывное отображение h произведения $I^n \times I$ в пространство $\mathcal{T}$, при котором

$$\begin{aligned} &h(b, t) = x_0 \qquad (t \in I), \\ &h(a, 0) = f(a), \qquad h(a, 1) = g(a) \end{aligned} \tag{4}$$

для любой точки b из $\dot{I}^n$ и любой точки a из I^n. Таким образом, h является непрерывной деформацией отображения f в отображение g, оставляющей на месте точку x_0.

Покажем, что гомотопия является отношением эквивалентности. Если $f_1 \simeq f_2$ (следует читать: отображение f_1 гомотопно отображению f_2) и если $f_2 \simeq f_3$, то $f_1 \simeq f_3$. Действительно, предположим, что h является деформацией отображения f_1 в f_2 и k — деформацией отображения f_2 в f_3, т. е. что имеют место равенства

$$h(b, t) = k(b, t) = x_0 \quad (b \in \dot{I}^n, \ t \in I),$$
$$h(a, 0) = f_1(a), \ h(a, 1) = k(a, 0) = f_2(a), \ k(a, 1) = f_3(a) \ (a \in I^n).$$

Тогда отображение l произведения $I^n \times I$ в $\mathcal{T}$, заданное соотношениями

$$l(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} h(t_1, \ldots, t_n, 2t) & \left(t \leqslant \frac{1}{2}\right), \\ k(t_1, \ldots, t_n, 2t-1) & \left(t \geqslant \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

является деформацией отображения f_1 в f_3, оставляющей на месте точку x_0. Следовательно,

$$l(b, t) = x_0 \qquad (b \in \dot{I}^n, \ t \in I),$$
$$l(a, 0) = f_1(a), \ l(a, 1) = f_3(a) \qquad (a \in I^n).$$

Итак, гомотопность является транзитивным отношением.

Рефлексивность $f \simeq f$ становится очевидной, если выбрать постоянную деформацию отображения f в f

$$h(a, t) = f(a) \qquad (a \in I^n, \ t \in I).$$

Для проверки симметричности заметим, что из деформации h отображения f_1 в f_2 получается деформация h' отображения f_2 в f_1, если положить

$$h'(t_1, \ldots, t_n, t) = h(t_1, \ldots, t_n, 1-t).$$

Действительно,

$$h'(b, t) = h(b, 1-t) = x_0 \quad (b \in \dot{I}^n, t \in I),$$
$$h'(a, 0) = h(a, 1) = f_2(a) \quad (a \in I^n),$$
$$h'(a, 1) = h(a, 0) = f_1(a).$$

Множество $S_n(x_0)$ распадается на классы эквивалентности, которые называются *классами гомотопий с фиксированной точкой* x_0. Последнее замечание сделано с целью обратить внимание на то, что мы учитываем не все непрерывные деформации отображений из $S_n(x_0)$, а только те, которые оставляют фиксированной точку x_0, т. е. для которых

$$h(b, t) = x_0$$

для любой точки b границы $\dot{I}^n$ куба I^n. Если бы мы не наложили этого ограничения, то любые два отображения из $S_n(x_0)$ были бы эквивалентными, поскольку любое непрерывное отображение $f: I^n \to \mathcal{T}$ допускает непрерывную деформацию в постоянное отображение

$$e_n: I^n \to \{x_0\}, \tag{5}$$

если применить отображение $H: I^n \times I \to \mathcal{T}$, заданное формулой

$$H(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = f[(1-t)t_1, \ldots, (1-t)t_n].$$

Действительно,

$$H(t_1, \ldots, t_n, 0) = f(t_1, \ldots, t_n),$$
$$H(t_1, \ldots, t_n, 1) = f(0, \ldots, 0) = x_0,$$

однако для точек из $\dot{I}^n$, лежащих, например, на грани $t_n = 1$, имеем

$$H(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1, t) = f[(1-t)t_1, \ldots, (1-t)t_{n-1}, 1-t] \neq x_0$$
$$(t \neq 0, 1).$$

Так как мы не будем применять деформаций, смещающих точку x_0 (таких, как деформация H), то мы будем называть гомотопными отображениями два отображения из $S_n(x_0)$, связанные непрерывной деформацией, не смещающей фиксированную точку x_0, и будем называть гомотопией то, что, строго говоря, следовало бы называть гомотопией с фиксированной точкой x_0.

По отношению к композиции отображений из $S_n(x_0)$ гомотопии обладают следующим важным свойством: из гомотопий $f \simeq f'$, $g \simeq g'$

следует гомотопия

$$f * g \simeq f' * g'.$$

Действительно, если h — гомотопия отображений f и f', а l — гомотопия отображений g и g', то отображение $k\colon I^n \times I \to \mathscr{T}$, определенное формулами

$$k(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} h(2t_1, t_2, \ldots, t_n, t), & t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ l(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n, t), & t_1 \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

является гомотопией отображений $f * g$ и $f' * g'$, так как

$$k(b, t) = x_0 \quad (b \in \dot{I}^n,\ t \in I),$$

$$k(a, 0) = f * g(a), \quad k(a, 1) = f' * g'(a) \quad (a \in I^n).$$

Это свойство показывает, что можно определить умножение в множестве классов гомотопий отображений из $S_n(x_0)$. Действительно, обозначим через $\{f\}$ класс гомотопий отображения f, тогда за произведение классов $\{f\}$ и $\{g\}$ можно принять

$$\{f\} \cdot \{g\} = \{f * g\}. \tag{6}$$

Обозначим через $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$ множество классов гомотопий отображений из $S_n(x_0)$, снабженное законом композиции, который определен формулой (6). Покажем, что $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$ — группа, единичным элементом которой является класс гомотопий постоянного отображения (5).

Для этого надо проверить, что выполняются следующие три свойства:

1. Умножение в $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$ ассоциативно, т. е. для любых элементов $f, g, j \in S_n(x_0)$ имеет место равенство

$$(\{f\}\{g\})\{j\} = \{f\}(\{g\}\{j\}).$$

В силу определения (6) для доказательства этого свойства нужно проверить выполнение гомотопии

$$(f * g) * j \simeq f * (g * j). \tag{7}$$

2. Существует левая единица: $\{e_n\}\{f\} = \{f\}$. В силу формулы (6) это равносильно выполнению гомотопии

$$e_n * f \simeq f, \tag{8}$$

где e_n — постоянное отображение $I^n \to x_0$.

3. Существует левый обратный элемент, а именно, для любого класса гомотопий $\{f\}$ класс гомотопий отображения $\hat{f}$, где

$$\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n), \tag{9}$$

образует левый обратный класс для класса $\{f\}$. Следовательно, $\{\hat{f}\}\{f\}=e_n$. Доказательство сводится к проверке выполнения гомотопии

$$\hat{f}*f\simeq e_n. \tag{10}$$

Докажем справедливость гомотопий (7), (8), (10) на основе следующего свойства: если φ — непрерывное отображение отрезка $[0,\ 1]$ в себя, при котором $\varphi(0)=0$, а f^φ — отображение, заданное уравнением

$$f^\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)=f[\varphi(t_1),\ t_2,\ \ldots,\ t_n],$$

то

$$f^\varphi\simeq\begin{cases} f, & \text{если } \varphi(1)=1,\\ e_n, & \text{если } \varphi(1)=0.\end{cases}$$

Для доказательства рассмотрим отображение

$$k\colon I^n\times I\to\mathscr{T},$$

определенное формулой

$$k(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ t)=\begin{cases} f[t\varphi(t_1)+(1-t)t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n], & \text{если } \varphi(1)=1,\\ f[t\varphi(t_1),\ t_2,\ \ldots,\ t_n], & \text{если } \varphi(1)=0.\end{cases}$$

Для $t=0$

$$k(t_1,\ \ldots,\ t_n,\ 0)=\begin{cases} f(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n), & \text{если } \varphi(1)=1,\\ x_0, & \text{если } \varphi(1)=0,\end{cases}$$

а для $t=1$

$$k(t_1,\ \ldots,\ t_n,\ 1)=f[\varphi(t_1),\ t_2,\ \ldots,\ t_n]=f^\varphi(t_1,\ \ldots,\ t_n).$$

Для $t_i=0$ или $1\ (i=2,\ \ldots,\ n)$

$$k(t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ \varepsilon,\ t_{i+1},\ \ldots,\ t_n,\ t)=$$
$$=f(t\varphi(t_1)+(1-t)t_1,\ \ldots,\ t_{i-1},\ \varepsilon,\ \ldots)=x_0.$$

Для $t_1=0$ имеем $\varphi(t_1)=0$ и, следовательно, $k=x_0$.

Для $t_1=1$ первый аргумент функции k равен единице в первом случае и нулю во втором. Поэтому в обоих случаях $k=x_0$. Мы доказали таким образом, что отображение k является гомотопией, связывающей отображения f (соответственно e_n) с отображением f^φ. Для доказательства гомотопий (7), (8), (10) достаточно подходящим образом выбирать функцию φ.

1. Для соотношения (7) возьмем

$$\varphi(t)=\begin{cases} 2t, & \text{если } t\leqslant\frac{1}{4},\\ t+\frac{1}{4}, & \text{если } \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{t}{2}+\frac{1}{2}, & \text{если } t\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

и рассмотрим отображение $f=(f_1*f_2)*f_3$. Тогда $f^\varphi=f_1*(f_2*f_3)$ и из $\varphi(1)=1$ следует $f\simeq f^\varphi$.

2. Для соотношения (8) выбираем функцию

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & \text{для } t\leqslant\frac{1}{2},\\ 2t-1 & \text{для } t\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

В этом случае для любого отображения $f\in S_n(x_0)$

$$f^\varphi=e_n*f,$$

и из $\varphi(1)=1$ следует $f^\varphi=e_n*f\simeq f$.

3. Для гомотопии (10) положим

$$\varphi(t)=\begin{cases} 2t, & \text{если } t\leqslant\frac{1}{2},\\ -2t+2, & \text{если } t\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

и рассмотрим функцию $g(t_1, \ldots, t_n)=f(1-t_1, \ldots, t_n)$. В этом случае $f^\varphi=\hat{f}*f$ и из соотношения $\varphi(1)=0$ следует $f^\varphi=\hat{f}*f\simeq e_n$.

Мы доказали, что множество $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$ с операцией $*$ является группой. Эта группа называется *группой гомотопий размерности n* пространства $\mathcal{T}$ *с базисной точкой* x_0.

2. Группы гомотопий стягиваемого пространства

Покажем, что группы гомотопий стягиваемого пространства $\mathcal{T}$ тривиальны, т. е. содержат только единичный элемент. Действительно, любое непрерывное отображение

$$f\colon I^n\longrightarrow\mathcal{T}$$

из множества $S_n(x_0)$ гомотопно постоянному отображению e_n, так как стягивание h пространства $\mathcal{T}$ в точку x_0 есть непрерывное отображение $h\colon \mathcal{T}\times I\longrightarrow\mathcal{T}$, для которого

$$h(x_0,\ t)=x_0\quad (t\in I),$$
$$h(x,\ 0)=x\quad (x\in\mathcal{T}),$$
$$h(x,\ 1)=x_0\quad (x\in\mathcal{T}).$$

Оно определяет непрерывную деформацию k отображения f в e_n при помощи формулы

$$k(x,\ t) = h[f(x),\ t],$$

причем эта деформация k оставляет фиксированной точку x_0.

3. Связь с группами гомологий

Рассмотрим произвольное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Множество $S_n(x_0)$ отображений $f\colon I^n \longrightarrow \mathcal{T}$, переводящих границу куба I^n в точку x_0, образовано сингулярными кубами пространства $\mathcal{T}$ с нулевой границей. Следовательно, отображения $f \in S_n(x_0)$ являются циклами группы кубических сингулярных цепей $Q_n(\mathcal{T})$ пространства $\mathcal{T}$. Отображения f, гомотопные постоянному отображению e_n, являются границами в $Q_n(\mathcal{T})$. Действительно, если $h\colon I^n \times I \longrightarrow \mathcal{T}$ — гомотопия, связывающая отображение f с отображением e_n, т. е. если

$$h(b,\ t) = x_0 \quad (b \in \dot{I}^n,\ t \in I),$$
$$h(a,\ 0) = f(a), \quad h(a,\ 1) = x_0 \quad (a \in I^n),$$

то h можно рассматривать как сингулярный куб размерности $n+1$ пространства $\mathcal{T}$. Границей этого куба будет

$$\partial h = (-1)^{n+1}(f - e_n).$$

Отсюда следует, что f является относительной границей комплекса $\{Q_n(\mathcal{T})\}$, факторизованного по подкомплексу вырожденных цепей, так как e_n является вырожденным сингулярным кубом пространства $\mathcal{T}$.

Покажем, что для любых отображений $f,\ g \in S_n(x_0)$ сингулярные циклы $f * g$ и $f + g$ принадлежат одному классу гомологий. Действительно, рассмотрим отображение φ квадрата $\mathfrak{C}$, описанного точкой $(t_1,\ t_2)$, в треугольник Δ с вершинами $P(0,\ 0)$, $Q(1,\ 0)$, $R\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, который содержится в $\mathfrak{C}$. Это отображение совпадает с тождественным отображением в Δ и отображает треугольники A и B проекцией, параллельной оси t_1, на стороны PR, QR (рис. 18).

Составим композицию отображения φ с проекцией треугольника Δ на сторону PQ. В результате мы получим непрерывное отображение ω квадрата $\mathfrak{C}$ на сторону PQ, отображающее стороны PC, QD на отрезки PM, QM, сторону CD в точку M и оставляющее фиксированными точки стороны PQ. Отображение $h\colon I^n \times I \longrightarrow \mathcal{T}$, заданное формулой

$$h(t_1,\ \ldots,\ t_n,\ t_{n+1}) = (f * g)[\omega(t_1,\ t_2),\ t_3,\ \ldots,\ t_{n+1}],$$

определяет сингулярный куб размерности $n+1$ пространства $\mathscr{T}$, границей которого является цепь

$$\partial h = -(f-\hat{g}) + f * g - e_n. \tag{11}$$

Следовательно,

$$f * g = f - \hat{g} + \partial h + e_n.$$

Применив эту формулу к произведениям $(g * \hat{g}) * g$ и $g * (\hat{g} * g)$, получим

$$(g * \hat{g}) * g = g * \hat{g} - \hat{g} + \partial k + e_n,$$

$$g * (\hat{g} * g) = g - \widehat{\hat{g} * g} + \partial l + e_n.$$

Но отображение $g * \hat{g}$ гомотопно e_n, т. е. является относительной границей вида $\partial t + e_n$, а отображения $(g * \hat{g}) * g$, $g * (\hat{g} * g)$ гомотопны g, следовательно, разность их является относительной

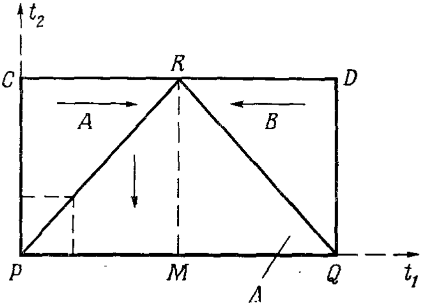

Рис. 18.

границей вида $\partial \alpha + e_n$. Таким образом, два последних равенства показывают, что $g + \hat{g}$ также является относительной границей. Из формулы (11) следует, что $f * g - f - g$ является относительной границей комплекса $Q_n^* = Q_n/D_n$.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что если каждому элементу f из $S_n(x_0)$ поставить в соответствие сингулярный цикл f из группы $Q_n(\mathscr{T})$, то элементам f и f' из одного класса гомотопий соответствуют циклы из одного класса гомологий, а произведению двух классов $\{f\}$ и $\{g\}$ соответствует класс гомологий суммы циклов f и g. Отображение

$$f \longrightarrow f \in Q_n(\mathscr{T}) \tag{12}$$

индуцирует, следовательно, гомоморфизм группы гомотопий $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$ в группу кубических сингулярных гомологий $\mathscr{H}_n(\mathscr{T})$ пространства.

Вообще говоря, этот гомоморфизм не является мономорфизмом. Действительно, отображение $f \in S_n(x_0)$ может быть относительной границей комплекса $\{Q_n, D_n, \partial\}$, не будучи при этом постоянным отображением. Например, пусть $\mathcal{T}$ — евклидова плоскость, из которой мы удалили две точки O и O' (рис. 19). Пусть f — отображение

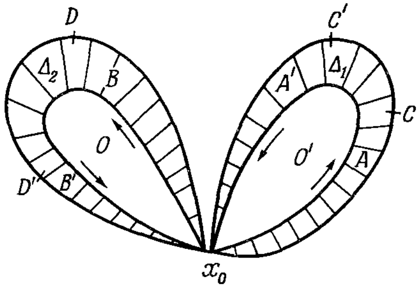

Рис. 19.

отрезка $I = [0, 1]$, переводящее отрезок $[0, 1/4]$ в дугу $x_0AA'x_0$, отрезок $[1/4, 1/2]$ — в дугу $x_0BB'x_0$, отрезок $[1/2, 3/4]$ — в дугу $x_0C'Cx_0$ и, наконец, отрезок $[3/4, 1]$ — в дугу $x_0D'Dx_0$. Отображение f является границей сингулярного квадрата g, задаваемого

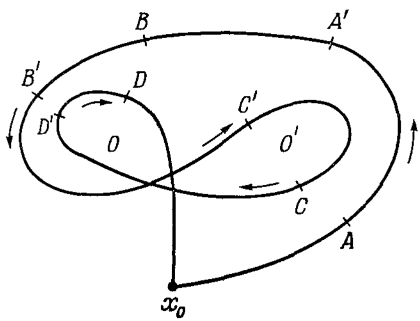

Рис. 20.

отображением вида $g_1 * g_2$, где g_1: $I^2 \to \Delta_1$, g_2: $I^2 \to \Delta_2$. С другой стороны, f определяет элемент $\{f\}$ группы $\pi_1(\mathcal{T}, x_0)$, который не является единичным элементом этой группы.

Действительно, отображение f гомотопно в $S_1(x_0)$ отображению f', переводящему отрезок $[0, 1]$ в дугу $x_0AA'BB'C'CD'Dx_0$ (рис. 20), и невозможно осуществить непрерывную деформацию этой дуги в точку x_0, не проходя через точки O и O', т. е. не выходя из пространства $\mathcal{T}$.

Гомоморфизм, индуцированный отображением (12), вообще говоря, не является эпиморфизмом, так как могут существовать сингулярные циклы в топологическом пространстве $\mathcal{T}$, не гомологичные циклам, состоящим из одного сингулярного куба.

Например, фундаментальный цикл компактной ориентируемой поверхности S рода $p \geqslant 1$ не гомологичен никакому циклу, состоящему из одного сингулярного куба. Действительно, поверхность S получается из плоского многоугольника, имеющего $4p$ сторон: $a_1, b_1, a_1', b_1', \ldots, a_p, b_p, a_p', b_p'$, отождествлением сторон $a_i, a_i'^{-1}$ и $b_i, b_i'^{-1}$, и мы не можем разбить эти стороны на две связные ломаные линии так, чтобы каждая линия содержала по одной стороне из каждой пары (a_i, a_i'), (b_i, b_i'). Между тем можно показать, что $\pi_2(S) \equiv 0$.

4. Гомотопические группы $\pi_i(S^n, x_0)$ $(i < n)$ сферы S^n

Покажем, что гомотопические группы $\pi_i(S^n, x_0)$ сферы S^n тривиальны при размерностях $i < n$. Действительно, мы показали в гл. II, что любое непрерывное отображение симплициального полиэдра размерности $< n$ в сферу S^n гомотопно постоянному отображению. Применив этот результат к сфере S^i $(i < n)$, получим, что

$$\pi_i(S^n, x_0) = \{1\},$$

где через $\{1\}$ обозначена группа, состоящая из одного элемента. Действительно, любое непрерывное отображение

$$f\colon I^i \to S^n,$$

переводящее границу куба I^i в точку x_0 сферы S^n, может быть разложено в произведение непрерывного отображения φ куба I^i в сферу S^i на непрерывное отображение f' сферы S^i в S^n. Это можно обнаружить, заметив, что отображение f постоянно на границе I^i и индуцирует отображение f' факторпространства R^i, полученного из куба I^i отождествлением всех точек границы с некоторой фиксированной точкой в сфере S^n. Но R^i можно отождествить со сферой S^i при помощи гомеоморфизма. Если обозначить через φ каноническое отображение $I^i \to S^i$, то получим $f = f'\varphi$. Так как отображение f' гомотопно постоянному отображению, то отображение f будет гомотопно произведению g отображения φ на постоянное отображение сферы S^i в сферу S^n. В этом случае g также является постоянным отображением и поэтому $f \simeq e_n$. При $i = n$ канонический гомоморфизм φ: $\pi_n(S^n) \to H_n(S^n)$ является эпиморфизмом, так как в качестве фундаментального цикла сферы S^n можно выбрать сингулярный куб $I^n \to S^n$, образом границы которого будет точка. Можно показать, что φ — изоморфизм, т. е. что $\pi_n(S^n) \approx \mathbf{Z}$.

Определение групп $\pi_i(S^n)$, $i > n$, является сложной проблемой, выходящей за рамки настоящей книги.

5. Коммутативность групп $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$, $n \geqslant 2$

Если задано отображение f куба I^n в пространство $\mathcal{T}$, переводящее границу I^n в точку x_0, то существует отображение f', гомотопное f и постоянное за пределами сферы s, лежащей внутри куба I^n. Действительно, пусть s — сфера, лежащая внутри куба I^n;

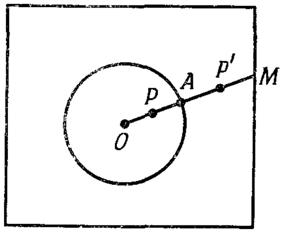

Рис. 21.

обозначим через O центр сферы s. Луч, проходящий через O, пересекает сферу s в точке A и границу куба I^n в точке M (рис. 21). Рассмотрим отображение φ куба I^n в себя, переводящее точки отрезка AM в точку M и отображающее точку P отрезка OA в точку P' так, что

$$\frac{P'O}{P'M} = \frac{PO}{PA}.$$

Отображение φ гомотопно тождественному отображению куба I^n [1]) и сохраняет границу этого куба. Отсюда следует, что отображение $f' = f\varphi$ гомотопно отображению f и принадлежит множеству $S_n(x_0)$. Так как φ переводит точки, лежащие вне сферы s, в границу куба I^n, то f' будет переводить точки, лежащие вне сферы s, в точку x_0 пространства $\mathcal{T}$.

Если задано второе отображение $g \in S_n(x)$, то можно найти отображение g', гомотопное g, которое переводит точки куба I^n, лежащие вне этой сферы s, в точку x_0.

Мы хотим показать, что при $n \geqslant 2$ для любых двух отображений f и $g \in S_n(x_0)$ отображения $f * g$ и $g * f$ гомотопны. Для этого

---

[1]) Эту гомотопию устанавливает семейство отображений

$$\varphi_t \colon P \to (1-t)P + tP'.$$

достаточно проверить гомотопию отображений $f' * g'$ и $g' * f'$. Отображения f' и g' выбраны так, что они постоянны вне сферы s_1 из куба I^n. Пусть сфера s_1 лежит в полукубе $t_1 \leqslant 1/2$ и получается из s преобразованием

$$\alpha_1\colon\ t_1' = \frac{t_1}{2},\ t_2' = t_2,\ \ldots,\ t_n' = t_n, \tag{13}$$

а сфера s_2 лежит в полукубе $t_1 \geqslant 1/2$ и получается из сферы s преобразованием (рис. 22)

$$\alpha_2\colon\ t_1' = \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2},\ t_2' = t_2,\ \ldots,\ t_n' = t_n. \tag{14}$$

Внутри сфер s_1 и s_2 отображение $f' * g'$ определено формулой

$$f' * g' = \begin{cases} f'\alpha_1^{-1} & \text{внутри } s_1, \\ g'\alpha_2^{-1} & \text{внутри } s_2, \end{cases}$$

а $g' * f'$ — формулой

$$g' * f' = \begin{cases} g'\alpha_1^{-1} & \text{внутри } s_1, \\ f'\alpha_2^{-1} & \text{внутри } s_2. \end{cases}$$

Если отобразить куб I^n на сферу S^n так, чтобы граница куба I^n перешла в точку сферы, то отображения $f' * g'$ и $g' * f'$ можно разложить в произведения, состоящие из отображения

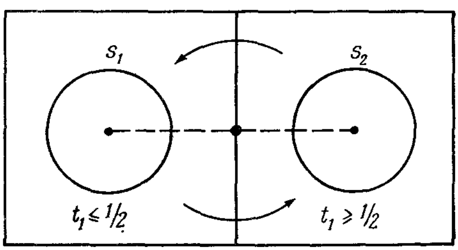

Рис. 22.

$\varphi\colon I^n \to S^n$ и отображения $S^n \to \mathcal{T}$, которое постоянно вне двух сфер s_1' и s_2', лежащих на S^n. Вращение сферы S^n, выбранное надлежащим образом, приводит к наложению сферы s_2 на сферу s_1 или сферы s_1 на сферу s_2. После этого вращения отображения $f' * g'$ и $g' * f'$ переходят одно в другое. Так как вращение является преобразованием, гомотопным тождественному преобразованию, то $f' * g' \simeq g' * f'$. Далее, равенства

$$\{f\}\{g\} = \{f * g\} = \{f' * g'\} = \{g' * f'\} = \{g * f\} = \{g\}\{f\}$$

показывают, что группы $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$ $(n \geqslant 2)$ — абелевы, каким бы ни было топологическое пространство $\mathcal{T}$. Группа $\pi_1(\mathcal{T}, x_0)$, вообще говоря, не коммутативна.

Эта группа называется *фундаментальной группой* пространства $\mathcal{T}$ или *группой Пуанкаре*.

Пространства $\mathcal{T}$ с тривиальными фундаментальными группами называются *односвязными*. Стягиваемые пространства и сферы $S^n (n > 1)$ являются односвязными пространствами, так как мы показали, что для этих пространств группы $\pi_i (i < n)$ тривиальные.

Канонический гомоморфизм φ: $\pi_n(\mathcal{T}) \to H_n(\mathcal{T})$ в случае $n = 1$ является эпиморфизмом, так как любой сингулярный цикл размерности 1 гомологичен сумме циклов вида $f_1 + \ldots + f_p$, где f_i: $I \to \mathcal{T}$, $f_i(0) = f_{i-1}(1)$, $i > 0$, $f_1(0) = f_p(1)$, и каждый из этих циклов гомологичен циклу $f_1 * [f_2 * (\ldots * f_p) \ldots]$. Отсюда следует, что для односвязного пространства $\mathcal{T}$ группа гомологий $H_1(\mathcal{T})$ равна 0.

Компактные поверхности рода $p > 0$ не являются, следовательно, односвязными пространствами.

6. Относительные гомотопические группы

Если задано подмножество $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{T}$ и точка x_0 в $\mathcal{U}$, то тройке $(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и каждому натуральному числу $n > 1$ можно поставить в соответствие группу $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, которая сводится к гомотопической группе $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$ в случае, когда множество $\mathcal{U}$ сводится к точке x_0. К этой группе можно прийти, рассмотрев множество $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ непрерывных отображений

$$f: I^n \to \mathcal{T},$$

переводящих грань $t_n = 0$ куба I^n в $\mathcal{U}$ и остальную часть границы I^n в точку x_0.

Формула (3) определяет умножение и в множестве $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, так как, если f и g — два отображения из этого множества, то $f * g$ также принадлежит множеству $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$.

Для простоты будем отождествлять куб I^{n-1} с гранью $t_n = 0$ куба I^n и будем обозначать через J^{n-1} объединение остальных $2n - 1$ граней куба I^n, образующих вместе с I^{n-1} границу куба I^n. Тогда отображения f из $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ можно охарактеризовать следующими условиями:

$$f: I^n \to \mathcal{T}, \quad f(I^{n-1}) \subset \mathcal{U}, \quad f(J^{n-1}) = \{x_0\}. \tag{15}$$

Гомотопией двух отображений f и g из $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ называется непрерывное отображение h прямого произведения $I^n \times I$ в $\mathcal{T}$, для которого при любом $t \in I$ отображение

$$h_t: (t_1, \ldots, t_n) \to h(t_1, \ldots, t_n, t)$$

принадлежит множеству $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и

$$h_0 = f, \ h_1 = g.$$

Доказательства, проведенные в § 1, можно распространить на элементы множества $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и показать, что произведение двух гомотопических классов $\{f\}$ и $\{g\}$, определенное формулой

$$\{f\}\{g\} = \{f * g\}, \tag{16}$$

не зависит от выбора представителей f, g этих двух классов и что множество $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ этих классов с законом умножения (16) является группой для каждого целого $n > 1$. Группа $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ называется *относительной гомотопической группой пары* $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ *с базисной точкой* x_0.

Поставим в соответствие каждому отображению f из $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ ограничение f' отображения f на грань $I^{n-1}(t_n = 0)$. Тогда $f' \in S_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$. Если отображения $f, g \in S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ гомотопны, т. е. если существует такое непрерывное отображение $h: I^n \times I \to \mathcal{T}$, что

$$h_t \in S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \quad (t \in I); \quad h_0 = f, \ h_1 = g,$$

то отображение

$$k: (t_1, \ldots, t_{n-1}, t) \to h(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0, t)$$

является гомотопией в $S_n(\mathcal{U}, x_0)$ ограничений f' и g' отображений f и g на I^{n-1}. Отсюда следует, что отображение $f \to f'$ множества $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ в $S_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$ индуцирует отображение множества $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ в множество $\pi_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$. Имеет место равенство

$$(f * g)' = f' * g'.$$

Действительно, операция $*$ производится только при помощи преобразования переменной t_1, которая не изменяется при ограничении $f \to f'$. Это означает, что отображение $f \to f'$ индуцирует гомоморфизм группы $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ в группу $\pi_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$. Этот гомоморфизм обозначается через ∂ и называется *граничным гомоморфизмом* в относительной гомотопической группе. Таким образом,

$$\partial\{f\} = \{f'\}, \tag{17}$$

где в левой части записаны классы гомотопий из $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, а в правой — классы гомотопий из $S_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$.

Любое отображение $f: I^n \to \mathcal{U}$ можно рассматривать как отображение $\tilde{f}$ куба I^n в пространство $\mathcal{T}$. Если f и g — два гомотопных отображения в $\mathcal{U}$ с фиксированной точкой x_0, то $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ гомотопны в $\mathcal{T}$ и фиксированная точка остается той же. Следовательно, соответствие

$$f \to \tilde{f}$$

индуцирует отображение i_* группы $\pi_n(\mathcal{U}, x_0)$ в группу $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$, и ясно, что i_* — гомоморфизм. Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом, индуцированным включением* пространства $\mathcal{U}$ в пространство $\mathcal{T}$.

Заметим также, что любой элемент f из множества $S_n(\mathcal{T}, x_0)$ принадлежит и множеству $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, так как условие $f(\dot{I}_n) = \{x_0\}$ влечет за собой соотношения $f(I^{n-1}) \subset \mathcal{U}$, $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$. Поскольку два гомотопных отображения f и g из $S_n(\mathcal{T}, x_0)$ гомотопны и в $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ (это следует из этих же соображений применительно к отображениям $f = h_t$), мы получаем гомоморфизм j_* группы $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$ в группу $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Последовательность групп и гомоморфизмов*

$$\ldots \longrightarrow \pi_{n+1}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\mathcal{U}, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathcal{T}, x_0) \xrightarrow{j_*}$$

$$\xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\mathcal{U}, x_0) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial} \pi_1(\mathcal{U}. x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathcal{T}, x_0) \tag{18}$$

точная.

Доказательство делится на три части.

1. Ядро i_* совпадает с образом ∂. Пусть $f \in S_{n+1}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и f' — ограничение f на грань I^n. Обозначим квадратными скобками классы гомотопий из $S_{n+1}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, круглыми скобками классы гомотопий из $S_n(\mathcal{U}, x_0)$ и фигурными скобками классы гомотопий из $S_n(\mathcal{T}, x_0)$. Тогда $\partial[f] = (f')$, $(i_*\partial)[f] = \{f'\}$. Класс $\{f'\}$ отображения f' тот же, что и у постоянного отображения e_n. Отсюда

$$i_*\partial = 0, \tag{19}$$

где через 0 мы обозначили тривиальный гомеоморфизм группы G в другую группу G', причем эти группы не обязательно абелевы.

Обратно, предположим теперь, что задано отображение $f \in S_n(\mathcal{U}, x_0)$, гомотопное e_n в $S_n(\mathcal{T}, x_0)$. Если h — гомотопия, связывающая f с e_n, то можно рассматривать h как элемент множества $S_{n+1}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и предположить, что ограничение отображения h на I^n совпадает с f. Из предположения $i_*((f)) = 1$ следует, что $\{f\} = \partial\{h\}$ для $h \in S_{n+1}(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$. Вместе с формулой (19) это доказывает точность последовательности (18) по отношению к членам $\pi_n(\mathcal{U}, x_0)$.

2. Ядро j_* совпадает с образом i_*. Пусть f—элемент из $S_n(\mathcal{U}, x_0)$. Как элемент множества $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ f гомотопен постоянному отображению e_n. Для доказательства нужно построить отображение h: $I^n \times I \longrightarrow \mathcal{T}$, при котором

$$h_t \in S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \quad (t \in I),$$

$$h_0 = f, \quad h_1 = e_n.$$

Иначе говоря, h должно быть определено на кубе $I^{n+1} = I^n \times I$, должно отображать грани $t_{n+1} = 0$ и $t_n = 0$ в $\mathcal{U}$, а остальные грани в точку x_0. Можно выбрать в качестве отображения h функцию, заданную формулами

$$h(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n + t), & \text{если } t_n + t \leqslant 1, \\ x_0, & \text{если } t_n + t \geqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(j_* i_*)((f)) = [f] = 1,$$

откуда следует

$$j_* i_* = 0. \tag{20}$$

Пусть теперь f — элемент из $S_n(\mathcal{T}, x_0)$ такой, что $j_*(\{f\}) = 1$. Это означает, что существует отображение h: $I^n \times I \longrightarrow \mathcal{T}$ со свойствами

$$h_t \in S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \quad (t \in I),$$
$$h_0 = f, \quad h_1 = e_n.$$

Рассмотрим отображение k: $I^n \times I \longrightarrow \mathcal{T}$, заданное формулой

$$k(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} h(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n, 2tt_n), & \text{если } t \leqslant \frac{1}{2}, \\ h(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 2t_n(1-t), t_n), & \text{если } t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отображение k_t переводит границу куба I^n при любом t в точку x_0. Кроме того, $k_0 = h_0 = f$, а k_1 является отображением из $S_n(\mathcal{U}, x_0)$. Отсюда следует, что отображение f гомотопно в $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ отображению $g = k_1$ из $S_n(\mathcal{U}, x_0)$, следовательно, $\{f\} = i_*((g))$. Это показывает, что образ i_* содержит ядро гомоморфизма j_*.

3. Ядро ∂ совпадает с образом j_*. Если f — отображение из $S_n(\mathcal{T}, x_0)$, то ограничением отображения f на грань $t_n = 0$ является постоянное отображение e_{n-1}, следовательно, $\partial j_*(\{f\}) = 1$ и, следовательно,

$$\partial j_* = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь отображение $g \in S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ и предположим, что $\partial([g]) = 1$. Это означает, что ограничение g' отображения g на грань $t_n = 0$ гомотопно в $S_n(\mathcal{U}, x_0)$ постоянному отображению e_{n-1}. Следовательно, существует непрерывное отображение h: $I^{n-1} \times I \longrightarrow \mathcal{T}$ такое, что

$$h(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) = g(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0), \quad h(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = x_0,$$
$$h_t \in S_{n-1}(\mathcal{U}, x_0) \quad (t \in I).$$

Рассмотрим тогда отображение k: $I^n \times I \to \mathcal{T}$, определенное формулой

$$k(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} h(t_1, \ldots, t_{n-1}, t(1-2t_n)), & \text{если } t_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \ldots, 2t_n - 1), & \text{если } t_n \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (22)$$

Оба выражения совпадают на кубе $t_n = 1/2$ и определяют вместе непрерывное отображение произведения $I^n \times I$ в пространство $\mathcal{T}$.

Для $t = 0$ получаем отображение $f = k_0$, при котором

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} g(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) & \left(t_n \leqslant \frac{1}{2}\right), \\ g(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \left(t_n \geqslant \frac{1}{2}\right), \end{cases} \quad (23)$$

а для $t = 1$ получаем отображение l: $I^n \to \mathcal{T}$, заданное формулой

$$l(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} h(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1 - 2t_n) & \left(t_n \leqslant \frac{1}{2}\right), \\ g(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \left(t_n \geqslant \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad (24)$$

Для любого t отображение k_t переводит границу куба I^n в точку x_0, за исключением грани $t_n = 0$, образ которой лежит в $\mathcal{U}$. Следовательно, k является гомотопией в $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ отображений f и l, и поэтому

$$f \simeq l \text{ в } S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0).$$

С другой стороны, отображения f и g гомотопны в $S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, так как они связаны гомотопией H: $I^n \times I \to \mathcal{T}$

$$H(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} g(t_1, \ldots, t_{n-1}, (1-t)t_n), & \text{если } t_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \ldots, t_{n-1}, tt_n + t_n - t), & \text{если } t_n \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$g \simeq l \text{ в } S_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0).$$

Значит,

$$[g] = [l].$$

Но отображение l переводит границу куба I^n в точку x_0, т. е. $l \in S_n(\mathcal{T}, x_0)$ и

$$[g] = j_*(\{l\}).$$

Таким образом, ядро отображения ∂ принадлежит образу j_*. Учитывая соотношение (21), получаем, что последовательность (18) точная и по отношению к членам $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$.

В качестве приложения теоремы 1 докажем, что

Относительные гомотопические группы $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ *являются метаабелевыми*[1]) *при размерностях* $n \geqslant 3$.

Действительно, рассмотрим точную последовательность

$$\pi_n(\mathcal{T}, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0) \to \pi_{n-1}(\mathcal{U}, x_0).$$

Если $n > 2$, то группы $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$, $\pi_{n-1}(\mathcal{U}, x_0)$, согласно результату, установленному выше, абелевы. Пусть α и β — два элемента группы $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$. Так как ∂ — гомоморфизм, то

$$\partial(\alpha \cdot \beta) = \partial\alpha \cdot \partial\beta = \partial\beta \cdot \partial\alpha = \partial(\beta \cdot \alpha),$$

откуда

$$\partial(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = 0.$$

Мы видим, что $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ принадлежит ядру ∂. Но ядро ∂ совпадает с образом гомоморфизма j_*, который является абелевой группой; следовательно, подгруппа, порожденная коммутаторами из $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$, абелева. Таким образом, $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ метаабелева.

Можно доказать, что группы $\pi_n(\mathcal{T}, \mathcal{U}, x_0)$ $(n \geqslant 3)$ абелевы.

7. Теорема Гуревича

Мы показали в § 3, что гомотопическая группа $\pi_n(\mathcal{T}, x_0)$ топологического пространства $\mathcal{T}$ допускает канонический гомоморфизм h_n в группу гомологий с целыми коэффициентами $H_n(\mathcal{T})$. Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Гуревича*. Он, вообще говоря, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

В случае $n = 1$ покажем, что h_1 — эпиморфизм, ядром которого является коммутатор фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{T})$.

При $n > 1$ покажем, что группы $\pi_n(\mathcal{T})$ могут быть расширены путем построения групп $\Pi_n(\mathcal{T})$, содержащих группы $\pi_n(\mathcal{T})$ и допускающих эпиморфизмы $k_n\colon \Pi_n(\mathcal{T}) \to H_n(\mathcal{T})$, ограничения которых на $\pi_n(\mathcal{T})$ совпадают с h_n.

Обозначим через L^{n-1} объединение граней

$$t_1 = 0, \quad t_1 = 1 \tag{25}$$

куба I^n.

Пусть $\mathcal{T}$ — связное топологическое пространство и x_0 — его точка. Обозначим через $\Phi_n(\mathcal{T})$ множество непрерывных отображений $f\colon I^n \to \mathcal{T}$, для которых $f(L^{n-1}) = \{x_0\}$. Формула (3) § 1 определяет закон композиции в множестве $\Phi_n(\mathcal{T})$. При этом законе

---

[1]) Группа G называется метаабелевой, если можно найти целое число n такое, что $C^n(G)$ — тривиальная группа, где через $C(G)$ обозначена подгруппа, порожденная коммутаторами $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ группы G.

композиции Φ_n не является группой, так как не удовлетворяется ни одна из групповых аксиом. Поэтому мы будем говорить, что Φ_n — *группоид* с законом композиции $(f, g) \to f * g$.

Будем называть *подгруппоидом* множества $\Phi_n(\mathcal{T})$ любое подмножество этого множества, которое вместе с элементами f и g содержит $\hat{f}$ и их произведение $f * g$. Отображение φ группоида $\Phi_n(\mathcal{T})$ в группу G будет называться *гомоморфизмом*, если выполняется соотношение $\varphi(f * g) = \varphi(f)\varphi(g)$ для любой пары элементов f, $g \in \Phi_n(\mathcal{T})$; φ будет называться эпиморфизмом, если

$$\varphi(\Phi_n(\mathcal{T})) = G.$$

Лемма 1. *Существует подгруппоид $S_n(\mathcal{T})$ группоида $\Phi_n(\mathcal{T})$, допускающий эпиморфизм ε_n: $S_n(\mathcal{T}) \to \pi_n(\mathcal{T})$.*

Действительно, множество $S_n(\mathcal{T}) = S_n(x_0)$, определенное в § 1, является, очевидно, подгруппоидом множества $\Phi_n(\mathcal{T})$. Если каждому элементу $f \in S_n(\mathcal{T})$ поставить в соответствие класс гомотопий в $S_n(\mathcal{T})$, то получим эпиморфизм ε_n: $S_n(\mathcal{T}) \to \pi_n(\mathcal{T})$.

Лемма 2. *Если $n \geqslant 1$, то группы гомологий пары $(I^n, \dot{I}^n)$ определены формулами*

$$H_n(I^n, \dot{I}^n) = \mathbf{Z}, \ H_m(I^n, \dot{I}^n) = 0 \ (m \neq n).$$

Если $n > 1$, то из точной последовательности пары $(I^n, \dot{I}^n)$ (гл. II, § 6) и из соотношений $H_m(I^n) = 0$ $(m \neq 0)$,

$$H_0(I^n) = H_0(\dot{I}^n) = H_{n-1}(\dot{I}^n) = \mathbf{Z}, \ H_m(\dot{I}^n) = 0 \ (m \neq 0, \ n-1)$$

следуют точные последовательности

$$0 \to H_n(I^n, \dot{I}^n) \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{Z} \to 0,$$

$$0 \xrightarrow{j} H_m(I^n, \dot{I}^n) \xrightarrow{\partial_m} 0 \ (m \neq 0, \ n).$$

Из них вытекает, что ∂_n — изоморфизм, а ∂_m — мономорфизм при $m \neq 0$, n. Отсюда получаем соотношения, указанные в лемме 2 для $m \neq 0$. Соотношение $H_0(I^n, \dot{I}^n) = 0$ $(n \geqslant 1)$ следует из того, что любой цикл из $C_0(I^n)$, следовательно, тем более любой относительный цикл пары $(I^n, \dot{I}^n)$, гомологичен цепи вида $m\rho$, где $\rho \in \dot{I}^n$, $m \in \mathbf{Z}$. Формула $H_1(I^1, \dot{I}^1) = \mathbf{Z}$ справедлива, поскольку любой цикл из $C_1(I^1, \dot{I}^1)$ гомологичен циклу вида $m\varphi$, где $m \in \mathbf{Z}$, а φ: $\Delta^1 \to I^1$ — отображение $\varphi(x_0, x_1) = x_1$.

Будем называть относительным фундаментальным циклом куба I^n любую цепь $u \in C_n(I^n)$, для которой ∂u — фундаментальный цикл границы $\dot{I}^n$. Примером такой цепи является цепь α_n^0, заданная формулой (69‴) (гл. II, § 9). Класс таких циклов порождает группу $H_n(I^n, \dot{I}^n)$.

Лемма 3. *Предположим, что $\mathcal{T}$ — полиэдр, ассоциированный с локально конечным симплициальным комплексом K. Пусть f — непрерывное отображение*

$$f\colon I^n \to \mathcal{T},$$

при котором $f(\dot{I}^n)$ принадлежит остову $\mathcal{T}^{n-1}$, образованному объединением симплексов размерности $n-1$ из $\mathcal{T}$.

Пусть u и v — два относительных фундаментальных цикла куба I^n, таких, что $\bar{f}(u)$ и $\bar{f}(v)$ являются сингулярными циклами пространства $\mathcal{T}$. В этом случае циклы $\bar{f}(u)$ и $\bar{f}(v)$ гомологичны.

Доказательство. Так как u и v — относительные фундаментальные циклы куба I^n, то ∂u и ∂v являются гомологичными циклами пространства $\dot{I}^n$. Это значит, что существует цепь $w \in C_n(\dot{I}^n)$, для которой $\partial u - \partial v = \partial w$. Тогда $u - v - w$ есть цикл из $C_n(I^n)$. Но $H_n(I^n) = 0$, так как пространство I^n стягиваемо. Поэтому цепь $u - v - w$ есть сингулярная граница пространства I^n. Получаем соотношение

$$u - v - w = \partial t, \quad t \in C_{n+1}(I^n),$$

или

$$u - v = w + \partial t \quad (w \in C_n(\dot{I}^n),\ t \in C_{n+1}(I^n)).$$

Применив гомоморфизм $\bar{f}\colon C_n(I^n) \to C_n(\mathcal{T})$, получаем

$$\bar{f}(u) - \bar{f}(v) = \bar{f}(w) + \partial\bar{f}(t). \tag{26}$$

Так как $\bar{f}(u)$, $\bar{f}(v)$, $\partial\bar{f}(t)$ — циклы, то $\bar{f}(w)$ также будет циклом пространства $\mathcal{T}$. Покажем, что этот цикл является границей. Действительно, цикл $\gamma = \bar{f}(w)$ является сингулярным циклом остова $\mathcal{T}^{n-1}$, образованного объединением симплексов размерности $n-1$ полиэдра $\mathcal{T}$. Поскольку группа гомологий $H_n(\mathcal{T}^{n-1})$ остова $\mathcal{T}^{n-1}$ нулевая, γ является границей и из формул (26) вытекает гомология $\bar{f}(u) \simeq \bar{f}(v)$.

Пользуясь леммой 3, докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Если $\mathcal{T}$ — локально конечный симплициальный полиэдр, то существует подгруппоид $\mathfrak{Z}_n(\mathcal{T})$ группоида $\Phi_n(\mathcal{T})$, содержащий подгруппоид $S_n(\mathcal{T})$ и допускающий эпиморфизм $P_n\colon \mathfrak{Z}_n(\mathcal{T}) \to H_n(\mathcal{T})$.*

Доказательство. Рассмотрим те отображения $f \in \Phi_n(\mathcal{T})$, для которых существует по крайней мере один относительный фундаментальный цикл u_f (зависящий от f) куба I^n, для которого $\overline{f}(u_f)$, $\overline{\overline{f}}(u_f)$ — сингулярные циклы полиэдра $\mathcal{T}$, и такой, что $f(\dot{I}^n) \subset \subset \mathcal{T}^{n-1}$. Лемма 3 показывает, что класс гомологий цикла $\overline{f}(u_f)$ не зависит от u_f. Следовательно, мы имеем вполне определенное отображение

$$P_n: \mathfrak{Z}_n(\mathcal{T}) \to H_n(\mathcal{T}),$$

где через $\mathfrak{Z}_n(\mathcal{T})$ мы обозначили множество отображений $f \in \Phi_n(\mathcal{T})$, обладающих указанными выше свойствами. Легко видеть, что $\mathfrak{Z}_n(\mathcal{T})$ является подгруппоидом множества $\Phi_n(\mathcal{T})$ и что P_n — гомоморфизм. Покажем, что P_n — эпиморфизм.

Если полиэдр $\mathcal{T}$ ассоциирован с локально конечным и упорядоченным симплициальным комплексом K, то из теоремы 16 (гл. II, § 17) и теоремы 19 (гл. I, А, § 18) следует, что группа $H_n(X)$ образована классами гомологий сингулярных циклов вида

$$u = \sum_{i=1}^{m} c_i \sigma_i. \qquad (27)$$

Здесь c_i — целые числа, которые можно положить равными $+1$ или -1, а σ_i — линейные отображения стандартного симплекса Δ^n на n-мерные симплексы s_i (не обязательно различные) полиэдра $\mathcal{T} = |K|$, причем при выбранном отношении порядка в множестве вершин K мы будем иметь $A_{i0} < A_{i1} < \ldots < A_{in}$ для $A_{i\alpha} = \sigma_i(A_\alpha)$.

Поставим в соответствие каждому симплексу $s_i = (A_{i0}, \ldots, A_{in})$ его центр тяжести G_i и затем цепь

$$s_i' = G_i \, \partial s_i.$$

Поскольку $s_i - s_i' = \partial(G_i s_i)$, цикл (27) будет гомологичен циклу

$$u' = \sum_{i=1}^{m} c_i s_i'. \qquad (27')$$

Если $t = (A_{i0}, \ldots, \hat{A}_{i\alpha}, \ldots, A_{in})$ — грань размерности $n-1$ симплекса s_i, то t будет гранью $(A_{j0}, \ldots, \hat{A}_{jp}, \ldots, A_{jn})$ второго симплекса s_j, так как u — цикл. Более того, в цепи $c_i \partial s_i$ и $c_j \partial s_j$ t входит с коэффициентом $+1$ и коэффициентом -1. Поставим в соответствие грани t и симплексу s_i, имеющему t в качестве грани, линейный симплекс полиэдра $|K|$

$$t_i = (G_i, A_{i0}, \ldots, \hat{A}_{i\alpha}, \ldots, A_{in}).$$

Тогда получим новый цикл, гомологичный циклу u,

$$u'' = \sum_{(t,\, i)} c_i'' t_i \qquad (c_i''^2 = 1), \tag{27''}$$

где сумма распространяется на все пары (t, i), для которых t — грань симплекса s_i.

Отождествим каждый симплекс t_i с линейным отображением $\Delta^n \longrightarrow t_i$, сохраняющим порядок вершин Δ^n и t_i, а затем рассмотрим сингулярный куб $\zeta_{(t,\, i)}$ пространства $\mathscr{T}$, заданный формулой

$$\zeta_{(t,\, i)} = t_i \beta_n, \tag{28}$$

где отображение β_n: $I^n \longrightarrow \Delta^n$ задано формулой (69^{IV}), гл. II.

Обозначим через T множество троек (t, i, j), для которых $t = s_i \cap s_j$, $\dim t = n-1$ и $c_i'' = 1$, $c_j'' = -1$. Цепь (27″) может быть записана теперь так:

$$u'' = \sum_{(t,\, i,\, j) \in T} (t_i - t_j). \tag{27'''}$$

Каждой тройке $\tau = (t, i, j) \in T$ поставим в соответствие сингулярный куб q_τ следующим образом.

Во-первых, поставим в соответствие этой тройке путь φ_τ: $I \longrightarrow \mathscr{T}$, определяемый взаимно однозначным отображением φ_τ, причем $\varphi_\tau(0) = x_0$ и $\varphi_\tau(1)$ — вершина x_τ симплекса t. Обозначим через φ_τ' и φ_τ'' произведения пути φ_τ на пути, заданные линейными отображениями $I \longrightarrow x_\tau G_i$, $I \longrightarrow x_\tau G_j$. В этом случае можно положить

$$q_\tau = (\varphi_\tau' * \zeta_{t,\, i}) * (\hat{\zeta}_{t,\, j} * \hat{\varphi}_\tau''), \tag{29}$$

и мы получаем сингулярный куб пространства $\mathscr{T}$, который отображает грани $t_1 = 0$, $t_1 = 1$ в точку x_0. Предположим, что множество T имеет N элементов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$. Присоединим теперь к цепи (27) сингулярный куб f пространства $\mathscr{T}$, заданный формулой

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} q_{\tau_1}(N t_1, t_2, \ldots, t_n), & t_1 \in \left[0, \frac{1}{N}\right], \\ \vdots & \\ q_{\tau_p}\left(\frac{p-1}{N} + \frac{t_1}{N}, t_2, \ldots, t_n\right), & t_1 \in \left[\frac{p-1}{N}, \frac{p}{N}\right], \\ \vdots & \\ q_{\tau_N}\left(\frac{N-1}{N} + \frac{t_1}{N}, t_2, \ldots, t_n\right), & t_1 \in \left[\frac{N-1}{N}, 1\right]. \end{cases} \tag{30}$$

Тогда $f \in \Phi_n(\mathscr{T})$. Для каждого индекса $p \in \{1, \ldots, N\}$ рассмотрим линейные отображения $l_p, \lambda_p, l'_p, \lambda'_p \colon I^n \to I^n$, заданные формулами

$$l_p(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{p-1}{N} + \frac{t_1}{4N},\ t_2, \ldots, t_n\right),$$

$$\lambda_p(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{p-1}{N} + \frac{1+t_1}{4N},\ t_2, \ldots, t_n\right),$$

$$\lambda'_p(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{p-1}{N} + \frac{2+t_1}{4N},\ t_2, \ldots, t_n\right),$$

$$l'_p(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{p-1}{N} + \frac{3+t_1}{4N},\ t_2, \ldots, t_n\right).$$

При этих отображениях образами куба I^n являются параллелепипеды, покрывающие куб I^n и не имеющие общих внутренних точек. Для этих отображений справедливы соотношения

$$f \circ l_p = \varphi'_{\tau_p}, \quad f \circ \lambda_p = \zeta_{(t,\, i)}, \quad q \circ \lambda'_p = \hat{\zeta}_{(t,\, j)}, \quad q \circ l'_p = \hat{\varphi}''_{\tau_p}, \tag{31}$$

где $\tau_p = (t, i, j)$. Если обозначить через ε преобразование куба I^n в себя, заданное формулой

$$\varepsilon(t_1, \ldots, t_n) = (1 - t_1, \ldots, t_n),$$

то получим формулы

$$\varepsilon_n l_p = l'_{N-p}\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n\lambda_p = \lambda'_{N-p}\varepsilon_n. \tag{32}$$

Рассмотрим цепь $\alpha_n^0 \in C_n(I^n)$, заданную формулами (69‴) (гл. II, § 9). Индукцией по n убеждаемся, что

$$\bar{\varepsilon}_n(\alpha_n^0) = -\alpha_n^0. \tag{33}$$

Действительно, для $n = 1$ имеем $\alpha_1^0 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] - \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ и $\bar{\varepsilon}_1(\alpha_1^0) = \left[\frac{1}{2}, 0\right] - \left[\frac{1}{2}, 1\right] = -\alpha_1^0$. Если соотношение (33) справедливо для $n-1$, то из формул (69‴) (гл. II) следует

$$\bar{\varepsilon}(\alpha_n^0) = O_n\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\varepsilon}_n\bar{\tau}_i^0 - \bar{\varepsilon}_n\bar{\tau}_i^1)(\alpha_{n-1}^0)\right] =$$

$$= O_n\left[-(\bar{\tau}_i^1 - \bar{\tau}_i^0)(\alpha_{n-1}^0) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0\bar{\varepsilon}_{n-1} - \bar{\tau}_i^1\bar{\varepsilon}_{n-1})(\alpha_{n-1}^0)\right] =$$

$$= -O_n\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\bar{\tau}_i^0 - \bar{\tau}_i^1)(\alpha_{n-1}^0)\right] = -\alpha_n^0.$$

Рассмотрим относительный фундаментальный цикл γ куба I^n, заданный формулой

$$\gamma = \sum_{p=1}^{N}[\bar{l}_p(\alpha_n^0) + \bar{l}'_p(\alpha_n^0) + \bar{\lambda}_p(\alpha_n^0) + \bar{\lambda}'_p(\alpha_n^0)]. \tag{34}$$

Цикл γ соответствует разложению на симплексы каждого из параллелепипедов $l_p(I^n)$, $\lambda_p(I^n)$, $\lambda'_p(I^n)$, $l'_p(I^n)$, аналогичному разложению в цепи α_n^0 куба I^n.

В силу формул (32), (33)

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}_n \overline{l}_p(\alpha_n^0) &= \overline{l'_p \varepsilon_n}(\alpha_n^0) = -\overline{l}'_p(\alpha_n^0),\\
\overline{\varepsilon}_n \overline{l}'_n(\alpha_n^0) &= -\overline{l}_p(\alpha_n^0),\\
\overline{\varepsilon}_n \overline{\lambda}_p(\alpha_n^0) &= -\overline{\lambda}'_p(\alpha_n^0),\\
\overline{\varepsilon}_n \lambda'_p(\alpha_n^0) &= -\overline{\lambda}_p(\alpha_n^0)
\end{aligned} \tag{35}$$

и, следовательно,

$$\overline{\varepsilon}_n(\gamma) = -\gamma. \tag{36}$$

Вычислим сингулярную цепь $\overline{q}(\gamma) \in C_n(\mathscr{T})$. Пользуясь формулами (31), (34), получаем

$$\overline{q}(\gamma) = \sum_{p=1}^{N} [\overline{\varphi}'_{\tau_p}(\alpha_n^0) + \overline{\hat{\varphi}}''_{\tau_p}(\alpha_n^0) + \overline{\zeta}_{(t,\,i)}(\alpha_n^0) + \overline{\hat{\zeta}}_{(t,\,j)}(\alpha_n^0)], \qquad \tau_p = (t,\ i,\ j).$$

Учитывая, что $\hat{\varphi} = \varphi\varepsilon$ для любого отображения $\varphi\colon I^n \to Y$, и пользуясь соотношением (33), можем записать

$$\overline{q}(\gamma) = \sum_{p=1}^{N} [\overline{\varphi}'_{\tau_p}(\alpha_n^0) - \overline{\varphi}''_{\tau_p}(\alpha_n^0) + \overline{\zeta}_{(t,\,i)}(\alpha_n^0) - \overline{\zeta}_{(t,\,j)}(\alpha_n^0)].$$

С помощью формул (28), (69′), (27‴) получаем

$$\begin{aligned}
\overline{q}(\gamma) &= \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \sum_{p=1}^{N} [\varphi'_{\tau_p} - \varphi''_{\tau_p} + \overline{\theta}_n^{\mathscr{T}} \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}}(t_i - t_j)] = \\
&= \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \Big[\sum_{p=1}^{N} (\varphi'_{\tau_p} - \varphi_{\tau_p})\Big] + \overline{\theta}_n^{\mathscr{T}} \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} u''.
\end{aligned} \tag{37}$$

Из рассуждений, проведенных в § 9 гл. II, следует, что $\overline{\theta}_n^X \overline{\eta}_n^X u''$ — сингулярный цикл, гомологичный u'' и, следовательно, гомологичный u.

Граница цепи $\lambda = \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \Big[\sum\limits_{p=1}^{N} (\varphi'_{\tau_p} - \varphi''_{\tau_p})\Big]$ вычисляется по формуле (62) гл. II

$$\begin{aligned}
\partial\lambda &= \partial\overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \Big[\sum_{p=1}^{N} (\varphi'_{\tau_p} - \varphi''_{\tau_p})\Big] = \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \Big[\sum_{p=1}^{N} (\partial'\varphi'_{\tau_p} - \partial'\varphi''_{\tau_p})\Big] = \\
&= \overline{\eta}_n^{\mathscr{T}} \Big[\sum_{\tau_p = (t,\,i,\,j) \in T} (G_i - G_j)\Big].
\end{aligned}$$

Здесь G_i — постоянное отображение $I^{n-1} \to G_i$. Применяя формулу (69′) гл. II, получаем

$$\partial\lambda = \sum_{\tau_p=(t, i, j)\in T} [\overline{G}_i(\alpha^0_{n-1}) - \overline{G}_j(\alpha^0_{n-1})] = 0,$$

так как цепь α^0_{n-1} содержит четное число слагаемых, причем половина слагаемых входит с коэффициентом $+1$, а вторая половина с коэффициентом -1 и образы этих членов при $\overline{G}_i$ совпадают с постоянным отображением $\Delta^{n-1} \to G_i$. Отсюда следует, что λ — сингулярный цикл пространства $\mathscr{T}$. Но пути φ'_{τ_p}, φ''_{τ_p} построены так, что пространство, состоящее из точек этих путей, может быть стянуто в точку x_0, и, следовательно, λ — граница. Мы видим, что цепь $\overline{q}(\gamma)$ является циклом, гомологичным цепи u, заданной формулой (27).

Остается показать, что $\overline{q} \in \mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$, т. е. что $\partial\overline{q}(\gamma) = \partial\overline{\hat{q}}(\gamma) = 0$ и $q(\dot{I}^n) \subset \mathscr{T}^{n-1}$. Мы видим, что $\overline{q}(\gamma)$ — цикл. Из соотношения $\hat{q} = q\varepsilon$ и из формулы (36) следует, что $\overline{\hat{q}}(\gamma) = \overline{q\varepsilon}(\gamma) = \overline{q}(\overline{\varepsilon}(\gamma)) = -\overline{q}(\gamma)$. Поэтому и $\overline{\hat{q}}(\gamma)$ — цикл. Соотношение $q(\dot{I}^n) \subset \mathscr{T}^{n-1}$ вытекает из построения отображения q, если выбрать такую триангуляцию пространства $\mathscr{T}$, чтобы пути φ'_{τ_p}, φ''_{τ_p} принадлежали остову размерности 1, что, очевидно, возможно.

Множество $\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ содержит подгруппоид $S_n(\mathscr{T})$, так как для любого $f \in S_n(\mathscr{T})$ и для относительного фундаментального цикла α^0_n куба I^n имеем $\overline{f}(\partial\alpha^0_n) = \overline{\hat{f}}(\partial\alpha^0_n) = 0$.

Таким образом, лемма 4 доказана.

В множестве $\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ можно рассмотреть инволютивное отображение $\mathcal{J}$, ставящее в соответствие каждому элементу $f \in \mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ элемент $\mathcal{J}(f) = \hat{f}$, который также принадлежит множеству $\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$.

Пусть $\mathfrak{Z}'_n(\mathscr{T})$ — свободная группа, порожденная множеством $\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ (§ 4, гл. I, A). В группе $\mathfrak{Z}'_n(\mathscr{T})$ рассмотрим нормальный делитель $R_n(\mathscr{T})$, порожденный элементами вида $f * \hat{f}$, $(f * g)^{-1} fg$. Обозначим через $Z^*_n(\mathscr{T})$ факторгруппу группы $\mathfrak{Z}'_n(\mathscr{T})$ по $R_n(\mathscr{T})$, а через $\dot{f}$ класс элемента $f \in \mathfrak{Z}'_n(\mathscr{T})$ в $Z^*_n(\mathscr{T})$. Для элементов $\dot{f}$, $\dot{g} \in Z^*_n(x)$ будем иметь

$$\dot{f}^{-1} = \dot{\hat{f}}, \quad \dot{f}\dot{g} = \dot{\widehat{f * g}}.$$

Пусть $T_n(\mathscr{T}) = R_n(\mathscr{T}) \cap S'_n(\mathscr{T})$, где $S'_n(\mathscr{T})$ — свободная группа, порожденная множеством $S_n(\mathscr{T})$. Легко видеть, что если для двух элементов f, $g \in S'_n(\mathscr{T})$ имеем $\dot{f} = \dot{g}$, то f и g принадлежат одному и тому же классу по $\mathrm{mod}\, T_n(\mathscr{T})$. Отсюда следует, что факторгруппа $S'_n(\mathscr{T})/T_n(\mathscr{T}) = S^*_n(\mathscr{T})$ изоморфна каноническому образу группы $S_n(\mathscr{T})$ в группе $Z^*_n(\mathscr{T})$.

Обозначим через $\Phi_n^*(\mathscr{T})$ группу, которая получается тем же путем, но с заменой $\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ на $\Phi_n(\mathscr{T})$.

Введем в группе $Z_n^*(\mathscr{T})$ два отношения эквивалентности, которые будем называть соответственно гомотопией и гомологией. Будем говорить, что два элемента $\dot{f}$, $\dot{g} \in Z_n^*(\mathscr{T})$ гомотопны, и будем писать $\dot{f} \approx \dot{g}$, если для каждого $f' \in \dot{f}$ существуют $g' \in \dot{g}$ и такая непрерывная деформация h_t элемента f' в g' $(h_0 = f',\ h_1 = g')$, что

$$h_t(a) = f'(a) \quad (a \in \dot{I}^n,\ t \in I). \tag{38}$$

Отсюда следует, что если элементы $\dot{f}$, $\dot{g}$ гомотопны, то существуют отображения $f' \in \dot{f}$ и $g' \in \dot{g}$, имеющие одинаковые значения на границе $\dot{I}^n$ куба I^n и преобразующие относительный цикл γ в два гомологичных сингулярных цикла пространства $\mathscr{T}$.

Отсюда следует также, что элемент $\dot{f} \in Z_n^*(\mathscr{T})$ гомотопен элементу из $S_n^*(\mathscr{T})$ только тогда, когда существует элемент $f' \in \dot{f}$, который принадлежит группоиду $S_n(\mathscr{T})$, а два элемента $\dot{f}$ и $\dot{g}$ из $S_n^*(\mathscr{T})$ гомотопны только тогда, когда f и g гомотопны в смысле § 1.

Можно легко проверить, что из гомотопий $\dot{f} \approx \dot{f}'$ и $\dot{g} \approx \dot{g}'$ вытекает гомотопия $\dot{f}\dot{g} \approx \dot{f}'\dot{g}'$ и, следовательно, в множестве $\Pi_n(\mathscr{T})$ гомотопических классов из $Z_n^*(\mathscr{T})$ можно ввести умножение, положив для двух классов $\{\dot{f}\}$, $\{\dot{g}\} \in \Pi_n(\mathscr{T})$

$$\{\dot{f}\}\,\{\dot{g}\} = \{\dot{\widehat{f * g}}\}. \tag{39}$$

Каноническое отображение

$$\rho\colon Z_n^*(\mathscr{T}) \to \Pi_n(\mathscr{T}), \quad \rho(\dot{f}) = \{\dot{f}\},$$

является гомоморфизмом групп.

Из рассуждений, проведенных выше относительно отношения гомотопии, следует, что образом группы $S_n^*(\mathscr{T})$ при отображении ρ является группа гомотопий $\pi_n(\mathscr{T})$, и, следовательно, получаем гомоморфизм, точнее мономорфизм, включения

$$j\colon \pi_n(\mathscr{T}) \to \Pi_n(\mathscr{T}). \tag{40}$$

Если для двух элементов f, $g \in \mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$ имеем $\{\dot{f}\} = \{\dot{g}\}$, то циклы $\bar{f}(\gamma)$, $\bar{g}(\delta)$, соответствующие фундаментальным циклам γ, $\delta \in C_n(I^n)$, гомологичны в пространстве $\mathscr{T}$. Аналогично если $\{\dot{f}\}$, $\{\dot{g}\}$ — произвольные элементы из $\Pi_n(\mathscr{T})$, то между циклами $\bar{f}(\gamma)$, $\bar{g}(\delta)$,

$\overline{f*g}(\overline{\theta}_0(\gamma)+\overline{\theta}_\lambda\,\delta))$ имеется соотношение

$$\overline{f*g}\,[\overline{\theta}_0(\gamma)+\overline{\theta}_1(\delta)]=\overline{f}(\gamma)+\overline{g}(\delta),$$

где отображения θ_ε: $I^n \longrightarrow I^n$ $(\varepsilon=0,\ 1)$ заданы формулой

$$\theta_\varepsilon(t_1, t_2, \ldots, t_n)=\left(\frac{\varepsilon+t_1}{2},\ t_2,\ \ldots,\ t_n\right).$$

Отсюда следует, что отображение $f \longrightarrow \overline{f}(\gamma)$ определяет однозначное отображение φ группы $\Pi_n(\mathscr{T})$ в группу $H_n(\mathscr{T})$, причем $\varphi\{\dot{f}\}$ — класс гомологий цикла $\overline{f}(\gamma)$. Отображение φ является гомоморфизмом группы $\Pi_n(\mathscr{T})$ в группу $H_n(\mathscr{T})$. Лемма 3 показывает, что φ — эпиморфизм.

Если f и g — произвольные элементы группоида $\Phi_n(\mathscr{T})$, то $f\circ g=(f*g)*(\hat{f}*\hat{g})\in \mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$. Действительно, для любого относительного фундаментального цикла $\gamma \in C_n(I^n)$, выбранного надлежащим образом, имеем $\overline{f\circ g}(\gamma)=0$, и поэтому $\partial\overline{f\circ g}(\gamma)=0$. Отсюда следует, что группа $\Gamma_n(\mathscr{T})$ коммутаторов группы $\Phi_n^*(\mathscr{T})$ лежит в группе $Z_n^*(\mathscr{T})$. Более того, из предыдущего соотношения следует, что $\Gamma_n^*(\mathscr{T})=\rho(\Gamma_n(\mathscr{T}))$ лежит в ядре эпиморфизма φ: $\Pi_n(\mathscr{T})\longrightarrow$ $\longrightarrow H_n(\mathscr{T})$.

Будем говорить, что элемент $\{\dot{f}\}\in\Pi_n(\mathscr{T})$ гомологичен нулю, если существует относительный фундаментальный цикл $\gamma\in C_n(I^n)$, для которого $\overline{f}(\gamma)=0$. Два элемента $\dot{f}$, $\dot{g}\in Z_n^*(\mathscr{T})$ считаются гомологичными, если гомологичен нулю элемент $\{\widehat{\dot{f}*\hat{g}}\}$. Элементы из $\Pi(\mathscr{T})$, гомологичные нулю, образуют нормальный делитель $D_n(\mathscr{T})$ группы $\Pi_n(\mathscr{T})$. Действительно, если $\overline{f}(\gamma)=0$, то для любого отображения a: $I^n\longrightarrow\mathscr{T}$ и для любого относительного фундаментального цикла $\alpha\in C_n(I^n)$

$$\overline{(a*f)*\hat{a}}\,[\overline{\theta}_0^2(\alpha)+\overline{\theta}_0\overline{\theta}_1(\gamma)+\overline{\theta}_1\overline{\varepsilon}(\alpha)]=\overline{f}(\gamma)=0.$$

Ясно, что ядро гомоморфизма φ содержит и нормальный делитель $D_n(\mathscr{T})$ и что $D_n(\mathscr{T})$ содержит подгруппу $\Gamma_n^*(\mathscr{T})$.

Предположим, что для односвязного пространства $\mathscr{T}$

$$\pi_1(\mathscr{T})=\pi_2(\mathscr{T})=\ldots=\pi_{n-1}(\mathscr{T})=0 \quad (n>1). \tag{41}$$

Докажем, что в этом случае ограничение гомоморфизма φ: $\Pi_n(\mathscr{T})\longrightarrow$ $\longrightarrow H_n(\mathscr{T})$ на подгруппу $\pi_n(\mathscr{T})$ является изоморфизмом.

Покажем, во-первых, что $\varphi(\pi_n(\mathscr{T}))=H_n(\mathscr{T})$. Действительно, пусть ζ — класс гомологий из $H_n(\mathscr{T})$. Из предыдущих рассуждений следует, что ζ содержит цикл $\overline{f}(\gamma)$, где $f\in\mathfrak{Z}_n(\mathscr{T})$, а γ — относительный фундаментальный цикл куба I^n вида (34), т. е. цикл, состоящий из линейных симплексов, причем одна грань σ размерности $n-1$ каждого симплекса содержится в $\dot{I}^n$. Пусть O — центр куба I^n. Построим непрерывное отображение $g \in \mathfrak{Z}_n(\mathcal{T})$, при котором $g(O) = x_0$, $\bar{g}(\gamma) = 0$, т. е. $\{g\} \in D_n(\mathcal{T})$ и $g | \dot{I}^n = f | \dot{I}^n$. Для этого обозначим через K^i объединение граней размерности i симплексов цепи γ, содержащихся в $\dot{I}^n$. Построим отображения $g | OK^i$ индукцией по i. Для $i = 0$, если $A \in K^0$, выберем путь φ, соединяющий в $\mathcal{T}$ точки x_0 и $f(A)$, и положим

$$g[O + t(A' - O)] = \varphi(t)$$

для всех точек A', для которых $f(A') = f(A)$.

Предположим, что мы построили $g | OK^{i-1}$ таким образом, что для $\tau \subset K^{i-1}$ выполнено $g | \tau = f | \tau$, а для $\tau_1, \tau_2 \subset K^{i-1}$ из $\bar{f}(\tau_1) = -\bar{f}(\tau_2)$ следует $\bar{g}(O\tau_1) = -\bar{g}(O\tau_2)$. Тогда для грани $\sigma \subset K^i$ определим $g | O\sigma$ по формулам

$$g_1 | O\,\partial\sigma = g | O\,\partial\sigma, \quad g_1 | \sigma = f | \sigma,$$

продолжая отображение g_1, определенное на границе $O\sigma$, на внутренность $O\sigma$. Это возможно, так как $\partial(O\sigma)$ можно рассматривать как сферу S^i.

Лемма 6. *Если $\pi_i(\mathcal{T}) = 0$, то любое отображение $g_1: S^i \to \mathcal{T}$ может быть продолжено на внутренность сферы S^i.*

Действительно, из предположения $\pi_i(\mathcal{T}) = 0$ следует, что g_1 допускает деформацию h_t в постоянное отображение $e_i: S^i \to \{x_0\}$ ($h_0 = e_i$, $h_1 = g_1$). Таким образом, если для некоторой внутренней точки y сферы S^i положить

$$G(y) = h\left(\frac{y}{\|y\|}, \|y\|\right) \quad (y \neq 0), \quad G(0) = x_0,$$

то для $y \in S^i$, т. е. для $\|y\| = 1$, будем иметь

$$G(y) = h(y, 1) = g_1(y).$$

Для другого симплекса $\sigma \subset K^i$, удовлетворяющего условию $\bar{f}(\sigma') = \bar{f}(\sigma)$, продолжим g_1 на $O\sigma'$ так, чтобы $\bar{g}_1(O\sigma') = g_1(O\sigma)$. Это сводится к тому, что в качестве отображения $g_1 | O\sigma$ мы берем произведение отображения $g_1 | O\sigma$ на линейное отображение $\sigma' \to \sigma$.

Из этих рассуждений и из формул (41) следует, что продолжение отображения g_1 может быть осуществлено до размерности $n-1$, и, значит, g_1 может быть построено при заданных условиях на всей границе $\dot{I}^n = K^{n-1}$.

Так как $\bar{g}(O\,\partial\gamma) = 0$, а следовательно, $\{g\} \in D_n(\mathcal{T})$, то $\varphi\{\dot{f}\} = \varphi(\widehat{\dot{f}\hat{g}})$. Для вычисления $\varphi\{\dot{f}\dot{g}\} \in H_n(\mathcal{T})$ отождествим границу $\dot{I}^n$ куба I^n с экватором S^{n-1} сферы S^n и перенесем цепи γ и $O\,\partial\gamma$ на полусферы S^n_+ и S^n_- при помощи гомеоморфизмов $h_+: I^n \to S^n_+$ и $h_-: I^n \to S^n_-$, удовлетворяющих условию $\bar{h}_+(\partial\gamma) = -\bar{h}_-(\partial\gamma)$.

В этом случае отображения fh_+^{-1} и gh_-^{-1} определяют непрерывное отображение $F\colon S^n \to \mathscr{T}$. Мы получаем

$$\bar{F}(\xi) = \bar{f}(\gamma),$$

где $\xi = h_+(\gamma) + h_-(O\,\partial\gamma)$ — фундаментальный цикл сферы S^n. Отсюда следует, что класс гомологий ζ цикла $\bar{f}(\gamma)$ принадлежит группе $\varphi(\pi_n(\mathscr{T}))$, так как он является образом при гомоморфизме Гуревича.

Докажем теперь, что ядро φ не содержит элементов из $\pi_n(\mathscr{T})$, отличных от единичного.

Предположим, что для некоторого относительного фундаментального цикла ξ куба I^n и для отображения $f\colon I^n \to \mathscr{T}$, $f(\dot{I}^n) = \{x_0\}$, цикл $\bar{f}(\xi)$ является границей в $\mathscr{T}$. Пусть

$$\bar{f}(\xi) = \partial u, \quad u \in C_{n+1}(\mathscr{T}).$$

Обозначим через K^i объединение граней размерности i симплексов ξ. Заменяя f отображением вида $f*(a*\hat{a})$ и уподобляя $a*\hat{a}$ отображению сферы $S^n \to \mathscr{T}$ и затем отображению f' из $S_n(\mathscr{T})$, гомотопному нулю, можно считать, что все грани симплексов из u являются образами при $\bar{f}$ симплексов цепи ξ. Можно, как и выше, построить индукцией по i отображение $h\colon I^n \times I \to \mathscr{T}$, при котором $h\,|\,(I^n \times \{0\}) = f$, $h\,|\,(K^i \times \{1\}) = \{x_0\}$ и $h(x, t) = x_0$ для любого $x \in \dot{I}^n$ и любого $t \in I$. Это можно сделать для всех индексов $i < n$. Таким образом, отображение f гомотопно в $S_n(\mathscr{T})$ отображению g, для которого $g(K^{n-1}) = \{x_0\}$. Для отображения g при любом симплексе σ цепи ξ имеем $f_0 = (g\,|\,\sigma)\,\beta_n \in S_n(\mathscr{T})$, и, так как группа $\pi_n(\mathscr{T})$ коммутативна при $n > 1$, $\{\dot{g}\} \in \pi_n(\mathscr{T})$ равно произведению элементов $\{\dot{f}_\sigma\}$.

С другой стороны, элементы $\{\dot{f}_\sigma\}$ группируются по $n+2$, если рассмотреть совокупности граней различных симплексов τ из цепи u. Произведение элементов из такой совокупности гомотопно в $S_n(\mathscr{T})$ сфере $\partial\tau$, которая может быть деформирована в точку симплекса τ. Отсюда следует, что произведение элементов $\{\dot{f}_\sigma\}$ $(\sigma \in \xi)$, т. е. в конечном итоге $\{\dot{f}\}$, совпадает с единичным элементом группы $\pi_n(\mathscr{T})$. Следовательно, при выполнении условия (41) гомоморфизм Гуревича является изоморфизмом.

Мы показали выше, что гомоморфизм Гуревича

$$h_1\colon \Pi_1(\mathscr{T}) = \pi_1(\mathscr{T}) \to H_1(\mathscr{T})$$

вообще является эпиморфизмом. Если $\pi_1(\mathscr{T}) = 0$, то $H_1(\mathscr{T}) = 0$. С другой стороны, применяя результат, установленный выше относительно гомоморфизма Гуревича, к случаям $i = 2, 3, \ldots, n-1$, находим, что при выполнении соотношений (41) группы $H_i(\mathscr{T})$

изоморфны группам $\pi_i(\mathscr{T})$ $(i<n)$, т. е. равны нулю. Итак, получаем следующую теорему.

Теорема Гуревича. *Из соотношений*

$$\pi_1(\mathscr{T})=\pi_2(\mathscr{T})=\ldots=\pi_{n-1}(\mathscr{T}),\quad n>1,$$

следует

$$H_1(\mathscr{T})=H_2(\mathscr{T})=\ldots=H_{n-1}(\mathscr{T})=0,\ H_n(\mathscr{T})\approx\pi_n(\mathscr{T}).$$

При $n=1$ группа $\pi_1(\mathscr{T})$ совпадает с $\Pi_1(\mathscr{T})$. Если для элемента $f\in S_1(\mathscr{T})=\Phi_1(\mathscr{T})=\dot{\Sigma}_1(\mathscr{T})$ имеем $\varphi\{f\}=0$, т. е. если $f(I)$ — граница ∂u цепи $u\in C_2(\mathscr{T})$, то с каждым симплексом σ_i цепи u можно ассоциировать отображение $f_i\in S_1(\mathscr{T})$ вида $a_i*(\partial\sigma_i)*\hat{a}_i$, где a_i — путь, соединяющий x_0 с вершиной x_i симплекса σ_i, а $\partial\sigma_i$ — отображение I на границу $\partial\sigma_i$, при котором $(\partial\sigma_i)(0)=(\partial\sigma_i)(1)=x_i$. Тогда $f*\hat{f}_1*\ldots*\hat{f}_p\in\Gamma_1^*(\mathscr{T})$. С другой стороны, каждое отображение f_i гомотопно e_1 в $S_1(\mathscr{T})$, следовательно, $\{\dot{\hat{f}}_1\}\ldots\{\dot{\hat{f}}_p\}=1$ и, следовательно, $f\in\Gamma_1^*(\mathscr{T})$. Получаем следующую теорему.

Теорема. *Ядро эпиморфизма*

$$h_1\colon\pi_1(\mathscr{T})\to H_1(\mathscr{T})$$

совпадает с группой коммутаторов группы $\pi_1(\mathscr{T})$.

B. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Расслоенные пространства в смысле Серра

Расслоенным пространством в смысле Серра называется тройка $(\mathscr{B}, p, \mathscr{T})$, состоящая из топологических пространств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{T}$ и непрерывного отображения p пространства $\mathscr{B}$ на топологическое пространство $\mathscr{T}$ $(p(\mathscr{B})=\mathscr{T})$, при котором выполняется *свойство подъема гомотопии*: для любого непрерывного отображения f конечного полиэдра $\mathscr{S}$ в пространство $\mathscr{B}$ и любой гомотопии $h\colon\mathscr{S}\times I\to\mathscr{T}$ отображения $pf\colon\mathscr{S}\to\mathscr{T}$ существует гомотопия $k\colon\mathscr{S}\times I\to\mathscr{B}$ такая, что

$$p(k(x,t))=h(x,t)\quad(x\in\mathscr{S},\ t\in I),\tag{1}$$

$$k(x,0)=f(x)\quad(x\in\mathscr{S}).\tag{2}$$

$\mathscr{T}$ называется *базой* расслоенного пространства, $\mathscr{B}$ — *полным пространством*, p — *проекцией*. Множество $p^{-1}(x_0)$ $(x_0\in\mathscr{T})$ называется *слоем* в точке x_0. Таким образом, полное пространство является объединением слоев $F_x=p^{-1}(x)$, $x\in\mathscr{T}$.

Мы будем рассматривать здесь только расслоенные пространства с линейно связной базой $\mathcal{T}$. Для примера рассмотрим расслоенное пространство Серра. Пусть x_0 — точка линейно связного топологического пространства $\mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$ множество непрерывных отображений $\mathcal{S}\colon I \to \mathcal{T}$, для которых $\varphi(0) = x_0$. Множество $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$ называется *пространством путей* пространства $\mathcal{T}$ *с началом в* x_0. Пространство $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$ снабжается топологией, называемой *компактно-открытой*. Эта топология определяется при помощи такой подбазы открытых множеств: каждое множество этой подбазы сопоставлено некоторой паре (K, D), где K — замкнутое (следовательно, компактное) подмножество из I, а D — открытое множество из $\mathcal{T}$. Паре (K, D) ставится в соответствие подмножество $\mathcal{B}(K, D)$ тех путей $\varphi\colon I \to \mathcal{T}$. $\varphi(0) = x_0$, для которых

$$\varphi(K) \subset D.$$

Открытыми множествами компактно-открытой топологии являются произвольные объединения конечных пересечений множеств вида $\mathcal{B}(K, D)$.

Проекция $p\colon \mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0} \to \mathcal{T}$ определяется формулой

$$p(\varphi) = \varphi(1), \tag{3}$$

т. е. отображение p ставит в соответствие каждому пути $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$ его конец $\varphi(1)$.

Покажем, что формула (3) определяет непрерывное отображение. Рассмотрим открытое множество U в пространстве $\mathcal{T}$ и множество $p^{-1}(U)$ путей $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$, для которых $\varphi(1) \in U$. Тогда

$$p^{-1}(U) = \mathcal{B}(\{1\}, U).$$

Это показывает, что $p^{-1}(U)$ — открытое множество в $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$ и, следовательно, p — непрерывное отображение.

Теорема 1. *Тройка* $(B_{\mathcal{T},\,x_0}, p, \mathcal{T})$ *является расслоенным пространством в смысле Серра.*

Доказательство. Определим гомотопию k формулой

$$k(a, t)(\tau) = \begin{cases} f(a)((t+1)\tau), & \text{если } (t+1)\tau \leqslant 1, \\ h_a((t+1)\tau - 1), & \text{если } (t+1)\tau \geqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

где a — произвольная точка из конечного полиэдра $\mathcal{S}$, $f(a)$ — образ a при отображении $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{B}_{\mathcal{T},\,x_0}$, h_a — путь из $\mathcal{T}$, заданный равенством

$$h_a(\tau) = h(a, \tau),$$

а t и τ — числа из интервала $[0, 1]$.

Если для некоторого пути $\varphi: I \to \mathcal{T}$ условимся обозначать

$$\varphi_t(\tau) = \varphi(t\tau), \tag{5}$$

то гомотопия $k: \mathcal{S} \times I \to \mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$ может быть выражена формулой

$$k(a, t) = (f(a) * h_a)_{\frac{t+1}{2}}. \tag{6}$$

Заметим, что формула (5) задает фактически путь, соединяющий точку $\varphi(0)$ с точкой $\varphi(t)$, причем движение происходит в том же направлении, что и по пути φ, но «с меньшей скоростью».

Если в формуле (4) положить $t=0$, то получим

$$k(a, 0)(\tau) = f(a)(\tau),$$

т. е.

$$k(a, 0) = f(a).$$

Положив теперь $\tau = 1$ в той же формуле (4), получим

$$k(a, t)(1) = h_a(t) = h(a, t),$$

откуда

$$p(k(a, t)) = h(a, t).$$

Отсюда следует, что отображение k удовлетворяет условиям (1), (2). Остается показать, что это отображение непрерывно. Это свойство является следствием следующей теоремы.

Теорема Бурбаки. *Пусть F — отображение топологического пространства $\mathcal{U}$ в пространство путей $\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$. Для того чтобы отображение $F: \mathcal{U} \to \mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы отображение $G: \mathcal{U} \times I \to \mathcal{T}$, заданное формулой*

$$G(u, t) = F(u)(t) \quad (u \in U, \ t \in I),$$

было непрерывным.

1. Необходимость. Предположим, что отображение $F: \mathcal{U} \to \mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$ непрерывно. В этом случае для любого множества $\mathcal{B}(K, D) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$ множество $F^{-1}(\mathcal{B}(K, D))$ открыто в $\mathcal{U}$.

Пусть D — произвольное открытое множество пространства $\mathcal{T}$, $(u_0, t_0) \in \mathcal{U} \times I$, причем $G(u_0, t_0) = F(u_0)(t_0) \in D$. Пусть также $F(u_0)$ — элемент из $\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$, т. е. непрерывное отображение $I \to \mathcal{T}$. Тогда существует замкнутая окрестность K_{t_0} точки t_0 такая, что

$$F(u_0)(K_{t_0}) \subset D.$$

Это значит, что $F(u_0)$ принадлежит открытому множеству $\mathcal{B}(K_{t_0}, D)$ пространства $\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$. Для любого φ из $\mathcal{B}(K_{t_0}, D)$ и для любого $t \in K_{t_0}$ имеем $\varphi(t) \in D$. Отсюда следует, что множество $G^{-1}(D)$ содержит вместе с точкой (u_0, t_0) все точки некоторого открытого множества $F^{-1}(\mathscr{B}(K_{t_0}, D)) \times K_{t_0}$ из прямого произведения $\mathscr{U} \times I$. Поэтому $G^{-1}(D)$ — открытое множество для любого открытого множества D из $\mathscr{T}$ и, следовательно, G — непрерывное отображение.

2. Достаточность. Предположим, что отображение G непрерывное. Тогда для любого открытого множества D из $\mathscr{T}$ множество $G^{-1}(D)$ является открытым множеством из $\mathscr{U} \times I$.

Рассмотрим произвольное множество $B = \mathscr{B}(K, D)$ из подбазы компактно-открытой топологии пространства $\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$. Достаточно показать, что множество $F^{-1}(B)$ открыто в $\mathscr{U}$. Пусть u_0 — точка из $\mathscr{U}$, для которой $\varphi_0 = F(u_0) \in B$. Тогда для любого t из компактного множества $K \subset I$ множество D содержит $\varphi_0(t)$. Множество $G^{-1}(D)$ содержит в этом случае подмножество $\{u_0\} \times K$ из $\mathscr{U} \times I$, состоящее из точек (u_0, t), где $t \in K$, так как $H(u_0, t) = \varphi(t) \in D$ для $t \in K$. Но $G^{-1}(D)$ открыто в $\mathscr{U} \times I$. Отсюда следует, что множество $\{u_0\} \times K$ может быть покрыто множествами $U_\alpha \times I_\alpha \subset G^{-1}(D)$, где U_α — открытые множества в $\mathscr{U}$, а I_α — открытые множества в I. Множества I_α покрывают тогда компактное множество K и можно выбрать конечное покрытие $I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2} \cup \ldots \cup I_{\alpha_p}$ множества K такое, что $\bigcup_{i=1}^{p} (U_{\alpha_i} \times I_{\alpha_i}) \subset G^{-1}(D)$. Если положить $U = \bigcap_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$, то $u_0 \in U$ и

$$U \times K \subset G^{-1}(D).$$

Это означает, что для любой точки u из окрестности U точки u_0 и для любого t из K

$$F(a)(t) = G(u, t) \in D.$$

Поэтому $F(u)$ — точка множества B. Следовательно, множество $F^{-1}(B)$ содержит вместе с точкой u_0 все точки некоторой окрестности U этой точки в $\mathscr{U}$, т. е. $F^{-1}(B)$ — открытое множество в $\mathscr{U}$. Значит, F является непрерывным отображением. Теорема Бурбаки доказана.

Возвратимся теперь к отображению $k\colon \mathscr{S} \times I \to \mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$, заданному формулой (4). Положим $\mathscr{U} = \mathscr{S} \times I$ и $F = k$. В этом случае функция $G\colon \mathscr{U} \times I \to \mathscr{T}$, упомянутая в формулировке теоремы Бурбаки, будет такой:

$$G(u, \tau) = G((a, t), \tau) = \begin{cases} f(a)((t+1)\tau), & \text{если } (t+1)\tau \leqslant 1, \\ h(a, (t+1)\tau - 1), & \text{если } (t+1)\tau \geqslant 1. \end{cases}$$

Непрерывность отображения k станет очевидной, если показать, что отображение $G\colon \mathscr{S} \times I \times I \to \mathscr{T}$ непрерывно. Соотношения

$$(t+1)\tau \leqslant 1,$$
$$(t+1)\tau \geqslant 1$$

определяют два замкнутых множества A и B из $I \times I$, которые покрывают квадрат $I \times I$. Так как обе формулы в определении функции G совпадают на пересечении этих двух множеств, то достаточно проверить, что отображение G непрерывно на каждом из множеств A и B.

Для каждого из этих множеств функция $\varphi\colon I \times I \to I$

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} (t+1)\tau, & \text{если } (t, \tau) \in A, \\ (t+1)\tau - 1, & \text{если } (t, \tau) \in B, \end{cases}$$

непрерывна. Теперь достаточно проверить непрерывность следующих отображений произведения $\mathscr{S} \times 1$ в пространство $\mathscr{T}$:

$$(a, t) \to f(a)(t),$$
$$(a, t) \to h(a, t).$$

Первое из этих отображений непрерывно в силу непрерывности отображения $f\colon \mathscr{S} \to \mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$ и теоремы Бурбаки. Второе непрерывно по предположению. Следовательно, отображение k непрерывно и $(\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}, p, \mathscr{T})$ — расслоение в смысле Серра. Заметим, что в этом доказательстве мы не пользовались тем, что пространство $\mathscr{S}$ имеет структуру симплициального комплекса. Следовательно, в пространстве $(\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}, p, \mathscr{T})$ выполняется свойство подъема гомотопии для любого непрерывного отображения f в $\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$ и любой непрерывной деформации отображения pf.

Теорема 2. *Пространство $\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$ стягиваемое.*

Доказательство. Мы получим отображение h произведения $\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0} \times I$ в пространство $\mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$, если каждому пути $\varphi \in \mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0}$ и каждому числу $t \in I$ поставим в соответствие путь φ_t, заданный формулой (5). Отображение $h\colon (\varphi, t) \to h(\varphi, t) = \varphi_t$ непрерывно, так как если в формулировке теоремы Бурбаки предположить, что $\mathscr{U} = \mathscr{B}_{\mathscr{T}, x_0} \times I$ и $F = h$, то функция $G\colon \mathscr{U} \times I \to \mathscr{T}$ будет следующей:

$$G((\varphi, t), \tau) = G(u, \tau) = F(u)(\tau) = h(\varphi, t)(\tau) = \varphi_t(\tau) = \varphi(t\tau).$$

Если положить $t' = \omega(t, \tau) = t\tau$, то отображение $(t, \tau) \to \varphi(t, \tau)$ будет непрерывным, так как оно является произведением двух непрерывных отображений

$$(t, \tau) \to \omega(t, \tau); \quad t' \to \varphi(t').$$

Отсюда следует, что отображение $G\colon (\varphi, (t, \tau)) \to \varphi(t\tau)$ также непрерывно. Действительно, в силу теоремы Бурбаки отображение

$$(\varphi, t') \to \varphi(t')$$

непрерывно и G равно произведению двух непрерывных отображений

$$(\varphi, (t, \tau)) \longrightarrow (\varphi, \omega(t, \tau)), \quad (\varphi, t') \longrightarrow \varphi(t').$$

Поэтому непрерывное отображение h представляет собой деформацию отображения h_0 (которое ставит в соответствие каждому пути φ постоянный путь $\varphi\colon I \longrightarrow x_0$) в тождественное отображение $h_1\colon \varphi \longrightarrow \varphi_1 = \varphi$. Следовательно, $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\, x_0}$ — стягиваемое пространство.

2. Точная последовательность гомотопий расслоенного пространства

Значение свойства подъема гомотопии, указанного в определении расслоенных пространств, состоит кроме прочего в том, что это свойство позволяет построить точную последовательность гомотопий расслоенного пространства. Пусть $(\mathscr{B}, p, \mathscr{T})$ — расслоенное пространство Серра, x_0 — точка из $\mathscr{T}$ и $F_0 = p^{-1}(x_0)$ — слой в x_0 пространства $\mathscr{B}$. Выберем точку $y_0 \in F_0$. Любое непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow \mathscr{B}$ определяет непрерывное отображение $pf\colon X \longrightarrow \mathscr{T}$. Если X — куб I^n и f — элемент из $S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$, то pf будет элементом из $S_n(\mathscr{T}, x_0)$, так как $(pf)(\dot{I}^n) = p(y_0) = x_0$. Легко проверить, что $p(f * g) = (pf) * (pg)$. Отсюда следует, что отображение $f \longrightarrow pf$ индуцирует гомоморфизм P относительной гомотопической группы $\pi_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ в группу $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$. Мы хотим показать, что P — изоморфизм при $n \geqslant 2$.

1. P — мономорфизм. Предположим, что для некоторого элемента $f \in S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ имеем $P(\{f\}) = \{pf\} = 0$. В этом случае существует гомотопия h отображения pf в непрерывное отображение, т. е.

$$h(a, 0) = pf(a), \quad h(a, 1) = x_0 \quad (a \in I^n),$$

$$h(b, t) = x_0 \quad (b \in \dot{I}^n, \ t \in I).$$

Отображение $f\colon I^n \longrightarrow \mathscr{B}$ постоянно на J^{n-1}. Поэтому его можно разложить в произведение канонического отображения φ куба I^n на факторпространство A^n, которое получается отождествлением J^{n-1} с некоторой точкой q, на непрерывное отображение $\bar{f}\colon A^n \longrightarrow \mathscr{B}$. Но факторпространство A^n гомеоморфно I^n, т. е. гомеоморфно некоторому полиэдру. Непрерывное отображение $h\colon I^n \times I \longrightarrow \mathscr{T}$ также может быть разложено в произведение двух непрерывных отображений: $\psi\colon I^n \times I \longrightarrow B^{n+1}$ и $\bar{h}\colon B^{n+1} \longrightarrow \mathscr{T}$, где B^{n+1} — пространство, полученное из $I^n \times I$ отождествлением $J^{n-1} \times I$ с некоторой точкой r; отображение ψ является каноническим отображением факторпространства, а отображение $\bar{h}$ определено формулой

$$\bar{h}(\psi(a, t)) = h(a, t).$$

Посредством отождествления, при котором $\psi(a, 0) = (\varphi(a), 0)$, можно записать $B^{n+1} = A^n \times I$.

Свойство подъема гомотопии применим к отображениям

$$\bar{f}\colon A^n \to \mathscr{B},\ \bar{h}\colon A^n \times I \to \mathscr{T}.$$

Тогда $h(a', 0) = (p\bar{h})(a')\ (a' \in A^n)$. Действительно, если $a' = \varphi(a)$, то $(a', 0) = \psi(a, 0)$ и

$$\bar{h}(a', 0) = h(a, 0) = (pf)(a) = p(f(a)) = p(\bar{f}(a')).$$

При помощи поднятия получаем гомотопию

$$\bar{k}\colon A^n \times I \to \mathscr{B},$$

обладающую следующими свойствами:

$$\bar{k}(a', 0) = \bar{f}(a')\ (a' \in A^n),$$
$$p(k(a', t)) = h(a', t)\ (a' \in A^n,\ t \in I).$$

Равенство $k(a, t) = \bar{k}(\psi(at))\ (a \in I^n)$ определяет непрерывное отображение

$$k\colon I^n \times I \to \mathscr{B},$$

для которого

$$k(a, 0) = \bar{k}(\psi(a, 0)) = \bar{f}(\varphi(a)) = f(a),$$
$$k(J^{n-1} \times I) = \bar{k}(\psi(J^{n-1} \times I)) = y_0,$$
$$p(k(a, t)) = p(\bar{k}(\psi(a, t))) = \bar{h}(\varphi(a), t) = h(a, t).$$

Отсюда следует, что отображение k является непрерывной деформацией в $S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ отображения $f\colon I^n \to \mathscr{B}$ в отображение $g\colon I^n \to \mathscr{B}$

$$g(a) = k(a, 1),\ g(J^{n-1}) = \bar{f}(q) = y_0,$$

образ которого принадлежит слою F_0, так как $h(a, 1) = x_0$ для $a \in I^n$.

Рассмотрим непрерывную деформацию в $S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ отображения g, заданную формулой

$$l(t_1, \ldots, t_n, t) = g(t, \ldots, (1-t)t_n + t).$$

Так как образ отображения g находится в F_0, то l является гомотопией в $S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$. Для $t = 0$ имеем $l(t_1, \ldots, t_n, 0) = g(t_1, \ldots, t_n)$, а для $t = 1$ $l(t_1, \ldots, t_n, 1) = g(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = y_0$, поскольку точки $(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1)$ лежат в J^{n-1}.

Отсюда следует, что отображение g принадлежит классу гомотопий $0 \in \pi_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$, и отображение f будет обладать тем же свойством. Следовательно, P — мономорфизм.

2. P — эпиморфизм. Пусть g — элемент множества $S_n(\mathscr{T}, x_0)$, т. е. отображение $g\colon I^n \to \mathscr{T}$, для которого $g(\dot{I}^n) = \{x_0\}$. Отобра-

жение g можно рассматривать как гомотопию постоянного отображения $I_1^{n-1} \to x_0$, где I_1^{n-1} — грань $t_n = 1$ куба I^n, так как $I^n = I_1^{n-1} \times I$ и $g(I_1^{n-1}) = \{x_0\}$. Применяя свойство подъема гомотопии к постоянному отображению $f\colon I_1^{n-1} \to y_0$ и к отображению g, получаем отображение

$$k\colon I_1^{n-1} \times I = I^n \to \mathscr{B},$$

обладающее свойствами

$$k(I_1^{n-1}) = \{y_0\};\quad p(k(\tau)) = g(\tau) \qquad (\tau \in I^n).$$

Отсюда следует, в частности, что $p(k(\dot{I}^n)) = \{x_0\}$, и потому $k(\dot{I}^n) \subset F_0$.

Таким образом, непрерывное отображение $k\colon I^n \to \mathscr{B}$ переводит границу куба I^n в F_0 и грань $t_n = 1$ в точку x_0. Существует непрерывная деформация куба I^n

$$h\colon I^n \times I \to I^n_-,$$

такая, что $h(\tau, 0) = \tau\ (\tau \in I^n)$, и такая, что, обозначив $\varphi(\tau) = h(\tau, 1)$, получим

$$\varphi(\dot{I}^n - I_1^{n-1}) = I^{n-1},\quad \varphi(I_1^{n-1}) = J^{n-1}.$$

В этом случае отображение $k\varphi = \tilde{g}$ принадлежит $S_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ и отображение $p\tilde{g} = pk\varphi = g\varphi$ гомотопно g. Отсюда вытекает, что $P([\tilde{g}]) = \{g\}$. Это равенство указывает на то, что P — мономорфизм Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Отображения* $P\colon \pi_n(\mathscr{B}, F_0, y_0) \to \pi_n(\mathscr{T}, x_0)$, *определенные для* $n \geqslant 2$, *изоморфны.*

Рассмотрим точную последовательность гомотопии пары $(\mathscr{B}, \mathscr{T})$ с базисной точкой y_0

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathscr{B}, y_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathscr{B}, F_0, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F_0, y_0) \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_2(\mathscr{B}, F_0, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathscr{B}, y_0).$$

Если в этой последовательности заменить группы $\pi_n(\mathscr{B}, F_0, y_0)$ $(n \geqslant 2)$ группами $\pi_n(\mathscr{T}, x_0)$, а гомоморфизмы j_* и ∂ соответственно гомоморфизмами $p_* = Pj_*$ и $\Delta = \partial P^{-1}$, то получим новую точную последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} \pi_n(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathscr{B}, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathscr{T}, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F_0, y_0) \to \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{p_*} \pi_2(\mathscr{T}, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathscr{B}, y_0).$$

Эту последовательность можно дополнить еще одним гомоморфизмом и еще одной группой

$$\pi_1(\mathscr{B}, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathscr{T}, x_0),$$

в результате чего мы получим также точную последовательность.

Действительно, поставим в соответствие каждому пути $f\colon I \to \mathscr{B}$, замкнутому в y_0 (т. е. $f(0) = f(1) = y_0$), путь $g = pf\colon I \to \mathscr{T}$, замкнутый в x_0 (т. е. $g(0) = g(1) = x_0$). Если пути f и f' гомотопны в $S_1(\mathscr{B}, y_0)$, то пути pf и pf' будут гомотопными в $S_1(\mathscr{T}, x_0)$. Отсюда следует, что отображение $f \to pf$ индуцирует отображение

$$p_*\colon \pi_1(\mathscr{B}, y_0) \to \pi_1(\mathscr{T}, x_0),$$

которое является гомоморфизмом, так как $p(f_1 * f_2) = (pf_1) * (pf_2)$ для двух путей $f_1, f_2 \in S_1(\mathscr{B}, y_0)$.

Если образ f лежит в F_0, то $\{pf\} = 1$. Следовательно, ядро p_* содержит образ гомоморфизма

$$i_*\colon \pi_1(F_0, y_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, y_0).$$

Обратно, рассмотрим элемент $f \in S_1(\mathscr{B}, y_0)$, для которого $\{pf\} = 1$. Существует гомотопия

$$h\colon I \times I \to \mathscr{T}, \quad h(0, t) = h(1, t) = x_0,$$
$$h(s, 0) = (pf)(s), \quad h(s, 1) = x_0 \quad (s, t \in I).$$

Если отождествить точки 0 и 1 из I, в которых h постоянна, то получим отображение произведения $S^1 \times I$ в $\mathscr{T}$. Можно поднять гомотопию h и тогда получим гомотопию k, обладающую следующими свойствами:

$$k\colon S^1 \times I \to \mathscr{B}, \quad k(0, t) = k(1, t) = y_0, \quad k(s, 0) = f(s),$$
$$p(k(s, t)) = h(s, t).$$

Из последнего свойства вытекает, что $p(k(s, 1)) = h(s, 1) = x_0$ и $k(s, 1) \in F_0$. Итак, отображение $k_1\colon S^1 \to \mathscr{B}$, заданное уравнением

$$k_1(s) = k(s, 1),$$

определяет элемент группы $\pi_1(F_0, y_0)$, гомотопный пути f. Следовательно,

$$\{f\} = \{k_1\} = i_*\{k_1\},$$

и мы показали, что ядро гомоморфизма p_* совпадает с образом гомоморфизма i_*. Таким образом, доказана

Теорема 4. *С каждым расслоенным пространством $(\mathscr{B}, p, \mathscr{T})$ можно ассоциировать точную последовательность гомотопических групп*

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} \pi_n(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathscr{B}, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathscr{T}, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\Delta} \pi_1(F_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathscr{B}, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathscr{T}, x_0),$$

где

$$x_0 = p(y_0), \quad F_0 = p^{-1}(x_0).$$

Для иллюстрации рассмотрим расслоенное пространство Серра $(\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}, p, \mathscr{T})$. Слоем F_0 в точке x_0 этого пространства является множество $\Omega_{\mathscr{T},\,x_0}$ путей из $\mathscr{T}$, замкнутых в x_0, т. е. множество отображений

$$\varphi\colon I \to \mathscr{T}, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = x_0.$$

Так как пространство $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}$ — стягиваемое, то

$$\pi_n(\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}) = 0 \qquad (n \geqslant 0)$$

и точная последовательность гомотопии расслоенного пространства $(\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}, p, \mathscr{T})$ приводит к точным последовательностям вида

$$0 \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathscr{T}, x_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(\Omega_{\mathscr{T},\,x_0}, y_0) \xrightarrow{i_*} 0 \qquad (n \geqslant 1).$$

Из них следует, что гомоморфизмы Δ для всех $n \geqslant 1$ являются изоморфизмами. Получаем теорему.

Теорема 5. *Для любого линейно связного топологического пространства* $\mathscr{T}$

$$\pi_n(\mathscr{T}, x_0) \approx \pi_{n-1}(\Omega_{\mathscr{T},\,x_0}, y_0) \qquad (n \geqslant 1),$$

где y_0, *например, постоянный путь* $I \to x_0$.

Пусть x_1 — точка из $\mathscr{T}$, отличная от x_0; пространства $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}$ и $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_1}$ гомеоморфны, так как точки x_0 и x_1 могут быть соединены путем φ из $\mathscr{T}$ $(\varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x_1)$. Действительно, если f — элемент из $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_0}$, то $\hat{\varphi} f$ — элемент из $\mathscr{B}_{\mathscr{T},\,x_1}$ и соответствие $f \to \hat{\varphi} f$ — гомеоморфизм. Отсюда следует, что

$$\pi_n(\Omega_{\mathscr{T},\,x_0}, y_0) \approx \pi_n(\Omega_{\mathscr{T},\,x_1}, y_1) \qquad (y_1 \in \Omega_{\mathscr{T},\,x_1}).$$

Из теоремы 5 для любой пары точек x_0 и x_1, которые могут быть соединены путем в $\mathscr{T}$, следует изоморфизм

$$\pi_n(\mathscr{T}, x_0) \approx \pi_n(\mathscr{T}, x_1).$$

Так как пространство $\mathscr{T}$ линейно связное, то гомотопические группы $\pi_n(\mathscr{T}, x)$ остаются изоморфными некоторой абстрактной группе $\pi_n(\mathscr{T})$, когда x пробегает пространство $\mathscr{T}$.

3. Связности в расслоенных пространствах

Начнем с некоторых обозначений и определений. Пусть задано топологическое пространство $\mathscr{U}$. Будем называть *путем* в $\mathscr{U}$ любое непрерывное отображение f отрезка $I = [0, 1]$ в $\mathscr{U}$. Пространство путей топологического пространства $\mathcal{U}$, рассматриваемое вместе с компактно-открытой топологией, будет обозначаться $\mathcal{U}^I$.

Если f — путь в $\mathcal{U}$ и $t \in I$, то через f_t будем обозначать путь, заданный формулой

$$f_t(\tau) = f(t\tau) \qquad (\tau \in I).$$

Рассмотрим теперь непрерывное отображение p топологического пространства $\mathcal{B}$ на топологическое пространство $\mathcal{T}$. Обозначим через $\Gamma(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$ подпространство прямого произведения $\mathcal{T}^I \times \mathcal{B}$, образованное парами $(f\colon I \to \mathcal{T};\ y \in B)$, для которых $f(0) = p(y)$. Будем называть *связностью* тройки $(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$ любую функцию

$$C\colon \Gamma(\mathcal{B}, p, \mathcal{T}) \to \mathcal{B}^I,$$

обладающую следующими свойствами.

C1. C — непрерывное отображение топологического пространства $\Gamma(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$ с топологией, индуцированной прямым произведением $\mathcal{T}^I \times \mathcal{B}$, в топологическое пространство $\mathcal{B}^I$.

C2. Для любой пары $(f, y) \in \Gamma(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$ значение $\tilde{f} = C(f, y)$ есть путь из $\mathcal{B}$ с началом в y: $\tilde{f}(0) = y$.

C3. Путь $\tilde{f} = C(f, y)$ является подъемом пути f, т. е.

$$p\tilde{f} = f.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Любая тройка $(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$, допускающая связность C, является расслоенным пространством в смысле Серра.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — топологическое пространство, $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{B}$ — непрерывное отображение и H — гомотопия отображения

$$pF\colon \mathcal{U} \to \mathcal{T}.$$

Пользуясь связностью C, поднимем гомотопию H в пространство $\mathcal{B}$. Для точки $u \in \mathcal{U}$ обозначим через H_u путь из $\mathcal{T}$, определенный равенством

$$H_u(t) = H(u, t),$$

и рассмотрим отображение $K\colon \mathcal{U} \times I \to \mathcal{B}$, заданное формулой

$$K(u, t) = C(H_u, F(u))(t).$$

Из свойства C2 связности C следует

$$K(u, 0) = F(u),$$

а по свойству C3 получаем

$$p(K(u, t)) = H_u(t) = H(u, t).$$

Если мы покажем, что отображение K непрерывно, то это будет означать, что мы осуществили подъем гомотопии H.

В соответствии с теоремой Бурбаки достаточно проверить непрерывность отображения G: $\mathcal{U} \to \mathcal{B}^I$, заданного формулой

$$G(u) = C(H_u, F(u)).$$

Но из той же теоремы Бурбаки и из непрерывности отображения H следует, что $u \to H_u$ является непрерывным отображением; $u \to F(u)$ непрерывно по предположению, а C — непрерывная функция двух своих аргументов. Отсюда следует, что G — непрерывное отображение и теорема доказана.

Можно ввести связность $\mathcal{C}$ в расслоенном пространстве Серра $(\mathcal{B}, p, \mathcal{T})$. Действительно, рассмотрим путь f: $I \to \mathcal{T}$ из $\mathcal{T}$ и элемент φ из $\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$, проекция $p(\varphi)$ которого лежит в $f(0)$. Тогда φ представляет собой путь φ: $I \to \mathcal{T}$, причем $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = f(0)$, а следовательно, можно рассмотреть путь $\varphi * f$. Определим связность $\mathcal{C}$, положив

$$(\mathcal{C}(f, \varphi))(t) = (\varphi * f)_{(t+1)/2}, \tag{7}$$

т. е. использовав формулу (6) для частного случая, когда $\mathcal{S}$ состоит из одной точки. Тогда будем иметь

$$(\mathcal{C}(f, \varphi))(0) = \varphi,$$
$$p[(\mathcal{C}(f, \varphi))(t)] = (\varphi * f)_{(t+1)/2}(1) = f(t).$$

Чтобы проверить, что отображение $\mathcal{C}$: $\Gamma(\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}, p, \mathcal{T}) \to \mathcal{B}^I$ непрерывно, достаточно доказать непрерывность отображения $\Gamma(\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}, p, \mathcal{T}) \times I \to \mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$, заданного формулой

$$(f, \varphi, t) \to (\mathcal{C}(f, \varphi))(t) = (\varphi * f)_{(t+1)/2}.$$

Но $\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}$ — подпространство пространства $\mathcal{T}^I$, и непрерывность последнего отображения сводится к непрерывности отображения

$$G\colon\ \Gamma(\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}, p, \mathcal{T}) \times I^2 \to \mathcal{T},$$

где

$$G(f, \varphi, t_1, t_2) = (\varphi * f)\left(\frac{t_1+1}{2} t_2\right) = \begin{cases} \varphi, & \text{если } \omega \leqslant 1, \\ f(\omega - 1), & \text{если } \omega \geqslant 1, \end{cases}$$

и $\omega = (t_1 + 1) t_2$. Докажем непрерывность этого отображения отдельно для каждого из множеств

$$A = \Gamma(\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}, p, \mathcal{T}) \times \{(t_1, t_2);\ \omega \leqslant 1\},$$
$$B = \Gamma(\mathcal{B}_{\mathcal{T}, x_0}, p, \mathcal{T}) \times \{(t_1, t_2);\ \omega \geqslant 1\}.$$

В силу теоремы Бурбаки для каждого из этих множеств G непрерывно зависит от φ и ω и соответственно от f и ω. Так как произведение непрерывных функций непрерывно, то функция G непрерывна по переменным f, φ, t_1 и t_2. Таким образом, мы показали, что функция $\mathscr{C}$ удовлетворяет условиям C1, C2, C3, приведенным в определении связности.

4. Главные расслоенные пространства

Рассмотрим теперь несколько методов построения расслоенных пространств со связностью при заданной базе X. А именно, мы сопоставим топологическому пространству X и точке $x_0 \in X$ определенные *главные расслоения*, т. е. расслоения, слоями которых являются топологические группы[1]). Значение этих расслоений состоит в том, что для пространств X достаточно общего вида они позволяют построить богатые классы главных расслоенных пространств с базой X.

Обозначим через $M = M_{X, x_0}$ множество конечных последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ точек из X с началом в точке x_0 и определим проекцию $p\colon M \to X$ формулой

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_n.$$

Для определения топологии в множестве M рассмотрим непрерывное отображение φ пространства X в числовое пространство $\mathbf{R}^p$ [2]). При помощи этого отображения определим в множестве M псевдорасстояние, т. е. функцию $\delta_\varphi\colon M \times M \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую аксиомам расстояния метрического пространства

$$\delta_\varphi(\xi, \xi') \geqslant 0,$$
$$\delta_\varphi(\xi, \xi) = 0,$$
$$\delta_\varphi(\xi, \xi') + \delta_\varphi(\xi', \xi'') \geqslant \delta_\varphi(\xi, \xi'').$$

Для этой функции может иметь место равенство $\delta_\varphi(\xi, \xi') = 0$ при $\xi \neq \xi'$.

А именно, пусть $\xi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi' = (x_0, x_1', \ldots, x_m')$. Рассмотрим точки $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, ..., $y_n = \varphi(x_n)$, $y_1' = \varphi(x_1')$, ..., $y_m' = \varphi(x_m')$ из $\mathbf{R}^p$ и линейную сингулярную цепь из $\mathbf{R}^p$

$$\gamma = (y_0, y_1) + (y_1, y_2) + \ldots + (y_{n-1}, y_n) + (y_m', y_{m-1}') + \ldots + (y_2', y_1') + (y_1', y_0).$$

Для каждой линейной сингулярной цепи α размерности 2 пространства $\mathbf{R}^p$ обозначим через $\|\alpha\|$ сумму площадей треугольников,

---

1) См. по этому поводу: Milnor J., Construction of universal bundles, Annals of Mathematics, 1956; Teleman K., Géneralisation du groupe fondamental, Annales de l'École Normale Supérieure, 1960.

2) Такое отображение вполне определено системой p вещественных непрерывных функций $\varphi_i\colon X \to \mathbf{R}$, а именно функциями, дающими координаты точек $\varphi(x)$, $x \in X$.

которые ее образуют, а через $l(\partial\alpha - \gamma)$ — сумму длин отрезков, которые образуют[1]) цепь $\partial\alpha - \gamma$, и положим

$$\delta_\varphi(\xi, \xi') = \inf_\alpha \{\|\alpha\| + l(\partial\alpha - \gamma)\}. \tag{7'}$$

Предоставим читателю проверить, что функция δ_φ, определенная таким образом, удовлетворяет аксиомам псевдорасстояния, и ограничимся замечанием, что одновременно могут иметь место соотношения $\xi \neq \xi'$ и $\delta_\varphi(\xi, \xi') = 0$. Например, это будет иметь место, если $y_n = y'_m$ и все точки y_i, y'_j коллинеарны.

При помощи отображения δ_φ можно ввести топологию T_φ в множестве M, определив открытые множества как произвольные объединения конечных пересечений псевдосфер, т. е. множеств вида

$$S_{\varphi, \xi^0, \varepsilon} = \{\xi \in M;\ \delta_\varphi(\xi, \xi^0) < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

и множеств вида $p^{-1}(U)$, где U — произвольное открытое множество в X.

Рассмотрим семейство Φ непрерывных отображений φ пространства X в числовые пространства $\mathbf{R}^{p(\varphi)}$, размерности которых $p = p(\varphi)$ зависят от φ, и будем обозначать через T_Φ топологию, допускающую в качестве подбазы семейство всех псевдосфер $S_{\varphi, \xi^0, \varepsilon}$, где $\varphi \in \Phi$, $\xi^0 \in M$, $\varepsilon > 0$, и множеств $p^{-1}(U)$, где U открыты в X.

Если Φ сводится к единственному отображению φ, то очевидно, $T_\Phi = T_\varphi$. Обозначим через T топологию T_Φ, для которой Φ есть семейство всех непрерывных отображений φ: $X \to \mathbf{R}^{p(\varphi)}$.

Предположим теперь, что семейство отображений Φ было фиксированным, и обозначим через M^Φ топологическое пространство (M, T_Φ).

Отображение p: $M \to X$, определенное выше, непрерывно, так как для произвольного открытого множества U из пространства X, $p^{-1}(U)$ открыто в пространстве M по самому определению топологии T_Φ.

Мы хотим показать теперь, что тройка (M, p, X) допускает связности. Для построения связностей в этой тройке рассмотрим непрерывную функцию α: $X^I \to (0, 1]$, определенную на пространстве X^I путей пространства X, снабженном компактно-открытой топологией. Для некоторого пути $f \in X^I$ и последовательности $\xi = (x_0, \ldots, x_n) \in M$, удовлетворяющей условию $p(\xi) = x_n = f(0)$, определим связность C_α формулой

$$C_\alpha(f, \xi)(t) = (x_0, \ldots, x_n, f(\alpha), \ldots, f(p_t\alpha), f(t)), \tag{7''}$$

---

[1]) Предположим, что мы записали эту цепь в виде $c_1\sigma_1 + \ldots + c_r\sigma_r$, где $c_i \neq 0$ и $\sigma_i \neq \sigma_j$ $(i \neq j)$, тогда каждый отрезок σ_i при вычислении длины $l(\partial\alpha - \gamma)$ берется $|c_i|$ раз.

где $\alpha=\alpha(f)$, а p_t — целое число, для которого

$$p_t\alpha<t, \qquad (p_t+1)\alpha\geqslant t.$$

Легко видеть, что отображение $C_\alpha(f, \xi)$: $t\to C_\alpha(f, \xi)(t)$, определенное на интервале I со значениями в пространстве M^Φ, непрерывно, т. е. определяет путь в пространстве M. Очевидно, имеем $p\circ C_\alpha(f, \xi)=f$. Чтобы доказать, что функция C_α: $(f, \xi)\to C_\alpha(f, \xi)$ является связностью в тройке (M^Φ, p, X), остается показать, что она непрерывна, или, если опираться на теорему Бурбаки, непрерывно отображение

$$(f, \xi, t)\to C_\alpha(f, \xi)(t)$$

со значениями в M^Φ. Но для отображения $\varphi\in\Phi$ последовательность точек из $\mathbf{R}^{p(\varphi)}$

$$\eta(\xi, f, t)=(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_n), \varphi(f(\alpha)), \ldots, \varphi(f(p_t\alpha)), \varphi(f(t)))$$

имеет конечное число членов, изменяющееся самое большее на единицу, когда f и t претерпевают достаточно малые изменения. Кроме того, имеет место формула

$$\delta_\varphi(\eta, \eta')\leqslant\delta_\varphi(\xi, \xi')+\varepsilon+d(\varphi(f(t)), \varphi(f'(t'))),$$

где $\eta=\eta(\xi, f, t)$, $\eta'=\eta(\xi', f', t')$, а ε — сумма площадей треугольников линейной сингулярной цепи из $\mathbf{R}^{p(\varphi)}$, допускающей в качестве границы цикл

$$(\varphi(f(0)), \varphi(f(\alpha)))+(\varphi(f(\alpha)), \varphi(f(2\alpha)))+\ldots+(\varphi(f(p_t\alpha)), \varphi(f(t)))+$$
$$+(\varphi(f(t)), \varphi(f'(t')))+\ldots+(\varphi(f'(\alpha')), \varphi(f'(0)))+\delta.$$

Здесь δ — линейная цепь, соединяющая точки $\varphi(f(0))$, $\varphi(f'(0))$ и имеющая длину, не превосходящую $\delta_\varphi(\xi, \xi')$, а $\alpha=\alpha(f)$, $\alpha'=\alpha(f')$.

Отсюда вытекает непрерывность отображения

$$(f, \xi, t)\to C_\alpha(f, \xi)(t).$$

Следовательно, для любого непрерывного отображения α: $X^I\to(0, 1]$ формула (7″) определяет связность C_α в тройке (M^Φ, p, X). В частности, в качестве α можно взять постоянные функции вида

$$X^I\to\left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Выбор функции α, играющей важную роль в приложениях, можно осуществить способом, указанным Милнором (Милнор Дж., Теория Морса, изд-во «Мир», М., 1965). Пусть в пространстве X определено непрерывное псевдорасстояние δ: $X\times X\to\mathbf{R}$. Пусть ε — фиксированное положительное число. Для каждого пути f: $I\to X$

рассмотрим числовую функцию

$$F_f(\alpha)=(\alpha-1)\varepsilon+\max_{|t-t'|\leqslant\alpha}\{\delta(f(t), f(t'))\}.$$

Она удовлетворяет условиям $F_f(0)=-\varepsilon<0$, $F_f(1)\geqslant 0$ и является строго возрастающей функцией, непрерывной по α. Действительно, для $|\alpha-\alpha'|<\eta$ имеем

$$|F_f(\alpha)-F_f(\alpha')|\leqslant\varepsilon\eta+\max_{|t-t'|\leqslant\eta}\{\delta(f(t), f(t'))\}.$$

Так как отображение $(t, t')\to\delta(f(t), f(t'))$ равномерно непрерывно, то, выбирая η достаточно малым, можно добиться, чтобы последний член стал сколь угодно малым. Отсюда следует, что существует единственное значение $\alpha=\alpha(f)$, заключенное в интервале $(0, 1]$, для которого $F_f(\alpha)=0$. Чтобы показать, что α — непрерывная функция от f, заметим, что отображение $G\colon X^I\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, заданное формулой $G(f, \alpha)=F_f(\alpha)$, непрерывно и для фиксированного f отображение $G(f, \alpha)$ — гомеоморфизм. Отсюда следует, что и отображение

$$H\colon (f, \alpha)\to(f, G(f, \alpha))$$

произведения $X^I\times\mathbf{R}$ в себя есть гомеоморфизм, поскольку оно, как легко проверить, взаимно однозначное, непрерывное и открытое[1]. Следовательно, обратное к отображению H отображение K непрерывно, и из формулы

$$(f, \alpha)=K(f, G(f, \alpha))$$

находим, что $\alpha(f)=K(f, 0)$ — непрерывная функция от f.

Построенная выше функция $\alpha(f)$ зависит от числа ε и от псевдорасстояния δ. Поэтому мы будем обозначать ее $\alpha_{\varepsilon,\delta}$ и называть *функцией Милнора*, присоединенной к ε и к псевдорасстоянию δ.

Можно определить непрерывные псевдорасстояния δ на пространстве X, если рассмотреть непрерывные отображения φ пространства X в метрические пространства или даже в пространства, снабженные псевдорасстоянием d, и положить $\delta(x_1, x_2)=d(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$.

Функция Милнора обладает следующим важным свойством: для любых $t, t'\in I$ при $|t-t'|\leqslant\alpha(f)$ имеем $\delta(f(t), f(t'))\leqslant(1-\alpha(f))\varepsilon<\varepsilon$. Это следует из формулы $F_f(\alpha(f))=0=\max\limits_{|t-t'|\leqslant\alpha}\{\delta(f(t), f(t'))\}-(1-\alpha)$.

Возвращаясь к расслоению (M^Φ, p, X), заметим, что слоем в точке x_0 этого расслоения является множество F_{x_0} строк различной длины $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, в которых $x_n=x_0$. В этом множестве можно определить ассоциативный закон композиции, положив

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0)(x_0, x_1', \ldots, x_{m-1}', x_0)=$$
$$=(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1', \ldots, x_{m-1}', x_0).$$

[1]) То есть переводит открытые множества в открытые.

По отношению к этому закону композиции существует двусторонний единичный элемент $\varepsilon = (x_0)$. Более общо, можно определить отображение

$$A\colon F_{x_0} \times M^\Phi \to M^\Phi,$$

положив

$$A((x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0), (x_0, x'_1, \ldots, x'_m)) = \\ = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x'_1, \ldots, x'_m).$$

В слое F_{x_0} можно ввести псевдорасстояния $\delta\varphi$, которые получаются, если воспользоваться формулой (7') только для тех последовательностей ξ и ξ', для которых $y_n = y'_m = x_0$. Псевдорасстояния $\delta\varphi$ определяют в F_{x_0} топологию, индуцированную M^Φ, и можно проверить, что A является непрерывным отображением, когда F_{x_0} и M снабжены указанными топологиями.

Композиция, определенная в множестве F_{x_0}, не определяет в F_{x_0} групповой структуры, так как ни для какого элемента, отличного от ε, не существует обратного элемента. Однако слой F_{x_0} является топологической полугруппой с единичным элементом, так как умножение непрерывно относительно топологии F_{x_0}, индуцированной топологией M^Φ. Полугруппа F_{x_0} превращается в группу, если ввести в ней отображение обращения

$$i\colon (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0) \to (x_0, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$$

и отношение эквивалентности

$$\xi \cdot i(\xi) \sim \varepsilon.$$

Это сводится к факторизации полугруппы F_{x_0} по двустороннему идеалу, порожденному элементами $\xi \cdot i(\xi)$, т. е. к введению в множестве F_{x_0} отношения эквивалентности, заданного формулой

$$\xi_1\xi_2 \sim \xi_1\xi i(\xi)\xi_2,$$

для произвольных элементов ξ_1, ξ_2 из F_{x_0}.

Обозначим через $G_{x_0} = G$ соответствующее фактормножество и через $[\xi] = [x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0]$ класс элемента $\xi = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0)$. В группе G закон умножения задан формулой

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0][x_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, x_0] = \\ = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, x_0],$$

единичный элемент $[\varepsilon]$ есть $[x_0]$, и элемент, обратный элементу $[\xi] = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0]$, определен формулой $[\xi]^{-1} = [x_0, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$. Если ввести в G фактортопологию топологического пространства F_{x_0}, то G станет топологической группой. Это следует из того, что каноническое отображение $\omega\colon F_{x_0} \to G$, $\omega(\xi) = [\xi]$ является открытым отображением. Действительно, пусть D — открытое множество в F_{x_0}.

Нужно показать, что $\omega(D)$ является открытым множеством в фактор-пространстве, т. е. что $\omega^{-1}(\omega(D))$ — открытое множество. Но $\omega^{-1}(\omega(D))$ — множество элементов из G, эквивалентных элементам из D. Пусть $\xi=(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0)\in D$ и $\xi'\sim\xi$. Нужно показать, что точка ξ' — внутренняя для множества $D'=\omega^{-1}(\omega(D))$. Так как точка ξ — внутренняя для D, то она принадлежит множеству вида $p^{-1}(U)$ (U — открытое в X) или некоторой сфере $S_{\varphi, \xi, \varepsilon}$, содержащейся в D. Если $\xi\in p^{-1}(U)\subset D$, то $\xi'\in p^{-1}(U)\subset D\subset\omega^{-1}(\omega(D))$ и поэтому точка ξ' является внутренней для множества D'. Если $\xi\in S_{\varphi, \xi, \varepsilon}\subset D$, то $\xi'\in S_{\varphi, \xi', \varepsilon}\subset D'$, так как $S_{\varphi, \xi, \varepsilon}=S_{\varphi, \xi', \varepsilon}$. Действительно, псевдорасстояния δ'_φ удовлетворяют следующим важным соотношениям:

$$\delta'_\varphi(\xi_1, \xi_2)=\delta'_\varphi(\xi'_1, \xi'_2),$$

если $\xi_1\sim\xi'_1$, $\xi_2\sim\xi'_2$. Они имеют место, так как любой элемент вида $\xi i(\xi)$ является границей линейной сингулярной цепи, образованной вырожденными треугольниками.

Покажем, что отображение, определяемое законом групповой композиции μ: $G\times G\to G$, непрерывно. Пусть Δ — открытое множество в G. Тогда

$$\mu^{-1}(\Delta)=(\omega\times\omega)(m^{-1}(\omega^{-1}(\Delta))),$$

где m: $F_{x_0}\times F_{x_0}\to F_{x_0}$ — непрерывное отображение, определенное законом композиции, введенным в F_{x_0}, а $\omega\times\omega$ — отображение $F_{x_0}\times F_{x_0}\to G\times G$, заданное формулой

$$(\omega\times\omega)(\xi, \xi')=(\omega(\xi), \omega(\xi'))=([\xi], [\xi']).$$

Это отображение оказывается открытым; из предыдущей формулы, с учетом того, что отображения ω и m непрерывны, следует, что $\mu^{-1}(\Delta)$ — открытое множество, следовательно, μ — непрерывное отображение. Таким же способом можно показать, что отображение обращения в группе G

$$[\xi]\to[i(\xi)]=[\xi]^{-1}$$

непрерывно и, следовательно, G является топологической группой. Будем обозначать эту группу через G^Φ.

Введем теперь отношение эквивалентности в множестве M, полагая $\xi\sim\xi'$ всякий раз, когда в строках $\xi=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\xi'=(x_0, x'_1, \ldots, x'_m)$ имеем $x_n=x'_m$, а, следовательно, $p(\xi)=p(\xi')$ и

$$\xi i(\xi')=(x_0, x_1, \ldots, x_n, x'_{m-1}, \ldots, x'_1, x_0)\sim\varepsilon.$$

Обозначим через $\widetilde{M}^\Phi$ топологическое факторпространство, определенное этим отношением эквивалентности в пространстве M^Φ, и через $[\xi]\in\widetilde{M}^\Phi$ — класс элемента $\xi\in M^\Phi$.

Можно проверить, что каноническое отображение

$$\rho\colon M^{\Phi} \to \widetilde{M}^{\Phi}$$

открытое, а отображение

$$A\colon G^{\Phi} \times \widetilde{M}^{\Phi} \to \widetilde{M}^{\Phi},$$

заданное формулой

$$A([x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0], [x_0, x_1', \ldots, x_m']) = \\ = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1', \ldots, x_m'],$$

непрерывно.

Отображение A обладает также следующим свойством ассоциативности:

$$A(\lambda, A(\lambda' [\xi])) = A(\lambda\lambda', [\xi]),$$

где $\lambda, \lambda' \in G$, $[\xi] \in \widetilde{M}^{\Phi}$, а $\lambda\lambda' = A(\lambda, \lambda') = \mu(\lambda, \lambda')$ — произведение элементов λ, λ' в группе G. Имеем также

$$A([\varepsilon], [\xi]) = [\xi].$$

Последние два свойства можно сформулировать следующим образом: непрерывное отображение A определяет представление топологической группы G^{Φ} в топологическом пространстве M^{Φ}. Обозначим для простоты $A(\lambda, [\xi]) = \lambda[\xi]$. Тогда

$$\lambda(\lambda' [\xi]) = \lambda\lambda' [\xi], \quad [\varepsilon][\xi] = [\xi].$$

Положив здесь $\lambda' = \lambda^{-1}$, получим

$$\lambda(\lambda^{-1}[\xi]) = [\varepsilon][\xi] = [\xi].$$

Последняя формула допускает интерпретацию. Если обозначить через T_λ преобразование пространства M^{Φ} в себя, заданное формулой

$$T_\lambda[\xi] = \lambda[\xi],$$

то $T_{\lambda^{-1}}$ будет преобразованием, обратным преобразованию T_λ. Отсюда следует, что все преобразования T_λ сюръективны[1]) и взаимно однозначны; T_λ и $T_{\lambda^{-1}}$ непрерывны, так как A является непрерывным отображением. Следовательно, преобразования T_λ являются гомеоморфизмами топологического пространства $\widetilde{M}^{\Phi}$ на себя и образуют непрерывную группу преобразований, изоморфную группе G^{Φ}. Действительно, $T_{\lambda\lambda'} = T_\lambda \circ T_{\lambda'}$. Кроме того, при $\lambda \neq [\varepsilon]$ преобразование T_λ не совпадает с тождественным преобразованием.

Укажем еще одно важное свойство отображения A. Отображение A определяет *свободное* представление группы G^{Φ} в про-

---

[1]) То есть $T_\lambda(M^{\Phi}) = M^{\Phi}$. — *Прим. ред.*

странстве $\widetilde{M}^{\Phi}$. Это означает, что для $\lambda \neq [\varepsilon]$ имеем $T_{\lambda}[\xi] \neq [\xi]$ для любой точки $[\xi] \in \widetilde{M}^{\Phi}$. Действительно, соотношение

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1', \ldots, x_m'] = [x_0, x_1', \ldots, x_m']$$

эквивалентно соотношению

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1', \ldots, x_m', \quad x_{m-1}', \ldots, x_1', x_0) \sim \varepsilon.$$

Сокращая на $(x_0, x_1', \ldots, x_m', x_{m-1}', \ldots, x_1', x_0) \sim \varepsilon$, получаем $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0) \sim \varepsilon$, и таким образом $[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0] = [\varepsilon]$.

Рассмотрим отображение P: $\widetilde{M}^{\Phi} \to X$, заданное формулой $P[\xi] = p(\xi)$. Тогда $p = P \circ \rho$, и, следовательно, отображение P — непрерывное и открытое, так как p является непрерывным и открытым отображением.

Если задано представление A группы G в пространстве M, то *орбитами* этого представления называются множества вида $\{\xi\} = \{T_{\lambda}[\xi];\ \lambda \in G\}$, которые получаются, если к точке $[\xi]$ применить все преобразования T_{λ}. Заметим, что орбиты представления A в нашем случае совпадают со слоями тройки $(\widetilde{M}^{\Phi}, P, X)$, т. е. с множествами вида $P^{-1}(x)$, $x \in X$. Действительно, покажем, что для любого $[\xi] \in \widetilde{M}^{\Phi}$

$$\{\xi\} = P^{-1}(P[\xi]).$$

Если $[\xi'] \in \{\xi\}$, то существует $\lambda \in G$ такое, что $T_{\lambda}[\xi] = [\xi']$. В этом случае $P[\xi'] = P[\xi]$, т. е. $[\xi'] \in P^{-1}(P[\xi])$. Обратно, если $[\xi'] \in P^{-1}(P[\xi])$, то $P[\xi'] = P[\xi]$. Следовательно, $[\xi]$ и $[\xi']$ имеют вид

$$[\xi] = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x],$$

$$[\xi'] = [x_0, x_1', \ldots, x_{m-1}', x] \qquad (x = P[\xi] = P[\xi']).$$

Если положить

$$\lambda = [x_0, x_1', \ldots, x_{m-1}', x, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0],$$

то $\lambda \in G$ и $T_{\lambda}[\xi] = [\xi']$, следовательно, $[\xi'] \in \{\xi\}$.

Покажем, что тройка $(\widetilde{M}^{\Phi}, P, X)$ допускает связности. Это свойство немедленно следует из приведенного ниже утверждения.

Предложение 1. *Пусть (B, q, X) — расслоенное пространство, допускающее связность C, а φ: $B \to B'$ и q': $B' \to X$ — непрерывные отображения, причем $q = q' \circ \varphi$.*

Пусть при этом отображение φ сюръективно и открыто. Кроме того, пусть для любого пути g: $I \to X$ и любых элементов $y_1, y_2 \in B$, $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) \in q'^{-1}(g(0))$, выполняется равенство $\varphi \circ C(g, y_1) = \varphi \circ C(g, y_2)$. Тогда тройка (B', q', X) допускает связность, т. е. является расслоением Серра.

Доказательство. Пусть g: $I \to X$ — путь в X и y' — точка из B', для которой $q'(y') = g(0)$. Существует по крайней мере одна точка $y \in B$ такая, что $\varphi(y) = y'$. Положим

$$C'(g, y') = \varphi \circ C(g, y).$$

Путь $C'(g, y'): I \to B'$ не зависит от выбора точки $y \in \varphi^{-1}(y')$. Для доказательства непрерывности отображения C' достаточно доказать непрерывность отображения

$$\psi: (g, y', t) \to C'(g, y')(t) = \varphi(C(g, y)(t)).$$

Рассмотрим произвольное открытое множество U' пространства B'. Нужно показать, что $\varphi^{-1}(U')$ является открытым множеством в подпространстве Γ' произведения $X^I \times B' \times I$, состоящего из троек (g, y', t), для которых $g(0) = q'(y')$. Пусть $(g_0, y_0', t_0) \in \psi^{-1}(U')$, $y_0 \in \varphi^{-1}(y_0')$ и $U = \varphi^{-1}(U')$. В пространстве Γ троек (g, y, t) из $X^I \times B \times I$, где $g(0) = q(y)$, тройки, для которых $C(g, y)(t) \in U$, образуют открытое множество D, так как C является непрерывным отображением. Пусть V, W, T — окрестности точек $g_0 \in X^I$, $y_0 \in B$, $t_0 \in I$ такие, что $V \times W \times T \subset D$. Так как φ — открытое отображение, то $\varphi(W)$ являются окрестностью точки $y_0' = \varphi(y_0)$ и

$$(g_0, y_0', t_0) \in V \times \varphi(W) \times T \subset \varphi^{-1}(U^{-1}).$$

Отсюда следует, что $\psi^{-1}(U')$ — открытое множество.

Чтобы применить предложение 1 к тройкам (M^Φ, p, X) и $(\widetilde{M}^\Phi, P, X)$, к связности C из (M^Φ, p, X) и к отображению $\rho: M^\Phi \to \widetilde{M}^\Phi$, достаточно проверить последнее условие, которое в нашем случае выражается следующим образом: для любого пути $g: I \to X$ и таких элементов $\xi_1, \xi_2 \in M^\Phi$, что $\rho(\xi_1) = \rho(\xi_2)$, т. е. $[\xi_1] = [\xi_2]$, имеет место соотношение

$$\rho \circ C_\alpha(g, \xi_1) = p \circ C_\alpha(g, \xi_2),$$

или, для произвольной точки $t \in I$

$$\rho(C_\alpha(g, \xi_1)(t)) = \rho(C_\alpha(g, \xi_2)(t)). \qquad (7''')$$

Если $\xi_1 = (x_0, x_1', \ldots, x_n')$ и $\xi_2 = (x_0, x_1'', \ldots, x_m'')$, то из $\rho(\xi_1) = \rho(\xi_2)$ следует, что $x_n' = x_m''$ и $(x_0, x_1', \ldots, x_n') \sim (x_0, x_1'', \ldots, x_m'')$. Условие $(7''')$ вытекает в этом случае непосредственно из формулы $(7'')$, определяющей связность C_α.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *С каждым линейно связным топологическим пространством X и с каждым семейством Φ отображений $\varphi: X \to \mathbf{R}^{p(\varphi)}$ можно ассоциировать расслоенное пространство $(\widetilde{M}^\Phi, P, X)$, допускающее связности, в котором слои совпадают с орбитами непрерывной группы преобразований полного пространства $\widetilde{M}^\Phi$.*

Расслоенное пространство, в котором слои совпадают с орбитами непрерывной группы преобразований G полного пространства, называется *главным расслоенным пространством со структурной группой* G.

Рассмотрим второй тип главных расслоенных пространств, связанных с пространством X и точкой $x_0 \in X$. Будем исходить из множества T непрерывных отображений f: $[0, \infty) \to X$ таких, что $f(0) = x_0$ и $f(t)$ — постоянное для достаточно больших $t \in [0, \infty)$. Последнее свойство можно выразить короче, сказав, что любое отображение $f \in T$ постоянно в бесконечности. Для всякого отображения $f \in T$ обозначим через n_f наименьшее целое число n, для которого f постоянно на интервале $[n, \infty)$, и введем обозначение $f(n_f) = f(\infty)$. Если $f, g \in T$ и $f(\infty) = x_0$, обозначим через $f * g$ отображение

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, n_f], \\ g(t - n_f), & t \in [n_f, \infty). \end{cases}$$

Пусть S обозначает подмножество множества T, образованное такими элементами f, для которых $f(n_f) = x_0$. Тогда отображение

$$a: S \times T \to T, \quad a(f, g) = f * g,$$

непрерывно и обладает свойством ассоциативности

$$a(f, a(f', g)) = a(a(f, f'), g).$$

По отношению к закону композиции $(f, f') \to a(f, f') = f * f'$ множество S является полугруппой с единичным элементом

$$\varepsilon: [0, \infty) \to \{x_0\}.$$

Введем в множестве T и в частности в S отношение эквивалентности, называя эквивалентными два отображения $f, g \in T$, если имеет место одно из следующих обстоятельств:

1) f и g имеют различные значения только на интервале вида $[n - 1, n + 1]$ (n — целое число) и на этом интервале выполняются соотношения

$$f(n - \tau) = f(n + \tau), \quad g(n - \tau) = g(n + \tau)$$

для $\tau \in [0, 1]$.

2) f и g связаны формулами вида

$$f(t) = g(t), \ t \in [0, n],$$
$$f([n, n + 1]) = \{f(n)\},$$
$$f(t) = g(t - 1), \ t \in [n + 1, \infty),$$

где n — целое число.

3) Существует конечный ряд $f, l_1, l_2, \ldots, l_p, g$ элементов из T, такой, что два последовательных элемента этого ряда связаны одним из соотношений 1), 2).

Обозначим через $\mathcal{T}$, соответственно через $\mathcal{S}$, фактормножества множеств T и S по этому отношению эквивалентности.

Множество T допускает каноническую проекцию $u\colon T \to X$, заданную формулой

$$u(f) = f(n_f) = f(\infty).$$

Множество S совпадает с множеством $u^{-1}(x_0)$ и, следовательно, является слоем тройки (T, u, X) в точке x_0. Два эквивалентных элемента $f, f' \in T$ имеют одну и ту же проекцию, поэтому существует отображение $v\colon \mathcal{T} \to X$, однозначно определенное формулой

$$v[f] = u(f),$$

в которой через $[f] \in \mathcal{T}$ обозначен класс эквивалентности элемента $f \in T$.

Заметим теперь, что если $f, f' \in S$; $f \sim f'$; $g, g' \in T$, $g \sim g'$, то выполняется соотношение $a(f, g) \sim a(f', g')$. Отсюда следует, что отображение a индуцирует отображение

$$b\colon \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T},$$

определенное формулой

$$b([f], [g]) = [a(f, g)].$$

Это отображение ассоциативно, т. е.

$$b([f], b([f'], [g])) = b(b([f], [f']), [g]).$$

В частности, отображение b определяет закон композиции в множестве $\mathcal{S}$, которое становится группой с единичным элементом $[\varepsilon]$ и следующим законом построения обратного элемента:

$$[f]^{-1} = [\check{f}],$$

где для $f \in T$ полагаем

$$\check{f}(t) = \begin{cases} f(n_f - t), & \text{если} \quad t \in [0, n_f], \\ x_0, & \text{если} \quad t \in [n_f, \infty). \end{cases}$$

Отображение b определяет свободное представление группы $\mathcal{S}$ в множестве $\mathcal{T}$, а $\mathcal{S}$ является слоем в x_0 тройки $(\mathcal{T}, v, X)$. Более того, орбиты представления совпадают со слоями этой тройки. Предоставляем читателю возможность проверить справедливость этого утверждения.

Определим теперь топологию в пространстве $\mathcal{T}$. Для целого положительного числа q можно определить отображение

$$\tau_q\colon T \to M,$$

сопоставляя каждому элементу $f \in T$ последовательность

$$\tau_q(f) = \left(f(0), f\left(\frac{1}{p}\right), f\left(\frac{2}{p}\right), \ldots, f(1), f\left(1 + \frac{1}{p}\right), \ldots, f(n_f)\right),$$

где $p = 2^q$.

Немедленно заключаем, что два эквивалентных элемента из T имеют эквивалентные образы в M. Следовательно, τ_q индуцирует отображение $\theta_q\colon \mathcal{T} \to \tilde{M}$ по формуле

$$\theta_q[f] = [\tau_q(f)].$$

Непосредственно видно, что ограничение отображения θ_q на $\mathcal{S}$ представляет собой гомоморфизм групп

$$h_q\colon \mathcal{S} \to G.$$

При помощи отображений θ_q можно определить семейство псевдорасстояний на множестве $\mathcal{T}$, пользуясь псевдорасстояниями δ_φ, определенными на множестве M. А именно, для любого $q \in \{1, 2, \ldots\}$ и любого отображения $\varphi \in \Phi$ рассмотрим функцию

$$\delta_\varphi^{(q)}\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbf{R},$$

заданную формулой

$$\delta_\varphi^{(q)}(u, v) = \delta_\varphi(\theta_q(u), \theta_q(v)) \qquad (u, v \in \mathcal{T}),$$

и обозначим через $\delta_\varphi'^{(q)}$ ограничение $\delta_\varphi^{(q)}$ на $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, т. е. положим

$$\delta_\varphi'^{q}(u, v) = \delta_\varphi^{(q)}(u, v) \qquad (u, v \in \mathcal{S}).$$

Легко проверить, что функции $\delta_\varphi^{(q)}$, $\delta_\varphi'^{(q)}$ являются псевдорасстояниями. Псевдосферы, соответствующие этим псевдорасстояниям, вместе с множествами вида $v^{-1}(U)$, где U — открытое в X, образуют подбазу некоторой топологии в множествах $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$. Обозначим через $\mathcal{T}^\Phi$, $\mathcal{S}^\Phi$ топологические пространства, которые получаются из $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$, если снабдить их указанными топологиями. $\mathcal{T}$ будет снабжено таким образом наименее тонкой топологией, по отношению к которой отображения θ_q и $v\colon \mathcal{T} \to X$ непрерывны, а $\mathcal{S}^\Phi$ будет снабжено топологией, индуцированной топологией пространства $\mathcal{T}^\Phi$.

Псевдорасстояния $\delta_\varphi^{(q)}$ удовлетворяют неравенству

$$\delta_\varphi^{(q)}(\omega_1 u_1, \omega_2 u_2) \leqslant \delta_\varphi'^{(q)}(\omega_1, \omega_2) + \delta_\varphi^{(q)}(u_1 u_2)$$

$$(\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S};\ u_1, u_2 \in \mathcal{T}),$$

указывающему на то, что действие группы $\mathcal{S}^\Phi$ в пространстве $\mathcal{T}^\Phi$ и умножение в группе $\mathcal{S}^\Phi$ являются непрерывными операциями. Имеем также

$$\delta_\varphi'^{(q)}(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = \delta_\varphi^{(q)}(\omega_1, \omega_2),$$

откуда следует, что переход к обратному элементу в группе $\mathcal{S}^\Phi$ является непрерывной операцией. Это значит, что пространство $\mathcal{S}^\Phi$, снабженное топологией, индуцированной пространством $\mathcal{T}^\Phi$, является топологической группой.

Рассмотрим теперь непрерывное псевдорасстояние σ на пространстве X и символ ε, обозначающий положительное число или бесконечность. Обозначим через $T_{\sigma,\varepsilon}$ множество отображений $f \in T$ таких, что для любого целого положительного числа n и любых $t, t' \in [n-1, n]$ выполнено неравенство

$$\sigma(f(t), f(t')) < \varepsilon.$$

Обозначим через $\mathscr{F}^{\Phi}_{\sigma,\varepsilon} = \mathscr{F}$ подпространство топологического пространства $\mathscr{T}^{\Phi}$, образованное классами $[f]$ элементов $f \in T_{\sigma,\varepsilon}$, а через $\mathscr{L}^{\Phi}_{\sigma,\varepsilon} = \mathscr{L}$ — подгруппу $\mathscr{S}^{\Phi} \cap \mathscr{T}^{\Phi}_{\sigma,\varepsilon}$ топологической группы $\mathscr{S}^{\Phi}$. Представление $\mathscr{S}^{\Phi}$ в $\mathscr{T}^{\Phi}$ индуцирует представление подгруппы $\mathscr{L}$ в пространстве $\mathscr{F}$. Мы хотим показать, что *тройка* $(\mathscr{F}, v, X)$ *является главным расслоенным пространством со структурной группой* $\mathscr{L}$.

Непрерывное отображение $v: \mathscr{F} \to X$ $(v[f] = f(\infty))$ сюръективно, так как для любой точки $x \in X$ можно найти отображение $f \in \overline{T}_{\sigma,\varepsilon}$, для которого $f(\infty) = x$.

Покажем, что тройка $(\mathscr{F}, v, X)$ допускает связность C. Пусть $[f] \in \mathscr{F}$ и путь g: $I \to X$ таков, что $g(0) = f(\infty)$. Нужно определить путь $\overline{g} = C(g, [f])$: $I \to \mathscr{F}$, зависящий непрерывно от пары $(g, [f])$, который удовлетворяет условию

$$v \circ \overline{g} = g.$$

Пусть α — функция Милнора, соответствующая псевдорасстоянию σ и числу ε. Эта функция зависит непрерывно от g и удовлетворяет условию: если $|t' - t''| < \alpha(g)$, то $\sigma(g(t'), g(t'')) < \varepsilon$. Определим функцию $\overline{g}: I \to \mathscr{F}$ формулой

$$\overline{g}(\tau)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, n_f], \\ g(\alpha t - \alpha n_f), & t \in \left[n_f, n_f + \dfrac{\tau}{\alpha}\right] \qquad (\alpha = \alpha(g)), \\ g(\tau), & t \in \left[n_f + \dfrac{\tau}{\alpha}, \infty\right). \end{cases}$$

Из $\overline{g}(\tau)(\infty) = g(\tau)$ вытекает $v(\overline{g}(\tau)) = g(\tau)$, поэтому $v \circ \overline{g} = g$. Отображение $\overline{g}$ непрерывно, так как при любом положительном числе q из $|\tau' - \tau''| < \frac{1}{2^{q+1}}$ следует

$$\delta^{(q)}_{\varphi}(\overline{g}(\tau'), \overline{g}(\tau'')) \leqslant d(\varphi(g(\tau')), \varphi(g(\tau''))),$$

и если множество U открыто в X, то множество

$$\overline{g}^{-1}(v^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$$

открыто в пространстве I.

Остается доказать, что путь $\bar{g}$ является непрерывной функцией пары $(g, [f])$ или, если опираться на теорему Бурбаки, что непрерывно отображение

$$F: (g, [f], \tau) \to \bar{g}(\tau) \in \mathcal{F}.$$

Непрерывность отображения F следует из неравенства

$$\delta_{\varphi}^{(q)}(F(g, [f], \tau),\ F(g', [f'], \tau)) \leqslant$$
$$\leqslant \delta_{\varphi}^{(q)}([f],\ [f']) + d(\varphi(g'(\tau)),\ \varphi(g'(\tau)) + \omega,$$

где ω — нижняя граница линейных цепей в пространстве $R^{p(\varphi)}$, допускающих в качестве границы цикл размерности 1, который получается, если соединить отрезками последовательно образы при отображении φ точек

$$g(0),\ g\left(\frac{\alpha}{p}\right),\ g\left(\frac{2\alpha}{p}\right), \ldots, g\left(\frac{n\alpha}{p}\right),\ g(1),\ g'(1),\ g'\left(\frac{n'\alpha'}{p}\right), \ldots$$
$$\ldots, g'\left(\frac{\alpha'}{p}\right),\ g'(0)\quad (p = 2^q),$$

где $\alpha = \alpha(g)$, $\alpha' = \alpha(g')$, а n и n' — наибольшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{n\alpha}{p} < 1,\quad \frac{n'\alpha'}{p} < 1,$$

а, кроме того, соединить точки $g(0)$, $g'(0)$ ломаной линией, длина которой меньше чем $\delta_{\varphi}^{(q)}([f],\ [f'])$.

Если g — фиксированный путь, а g' — переменный путь в пространстве X^I, снабженном компактно-открытой топологией, то ω является непрерывной вещественной функцией от g', обращающейся в нуль при $g' = g$. Отсюда следует, что ω может принимать сколь угодно малое значение, если потребовать, чтобы путь g' оставался в надлежаще выбранной окрестности g. Последнее неравенство показывает, что конечное число псевдорасстояний $\delta_{\varphi}^{(q)}(F(g, [f], \tau),\quad F(g', [f'], \tau'))$ можно сделать сколь угодно малыми с помощью надлежащей фиксации окрестностей элементов g, $[f]$, τ в пространствах X^I, $\mathcal{F}$, I. Следовательно, C — связность.

Рассуждение, использованное выше, показывает, что слои тройки $(\mathcal{F}, v, X)$ совпадают с траекториями представления группы $\mathcal{L}$ в пространстве $\mathcal{F}$. Таким образом, тройка $(\mathcal{F}, v, X)$ является главным расслоенным пространством со структурной группой $\mathcal{L}$.

Заметим, что пространства $\mathcal{F}_{\sigma, \varepsilon}^{\Phi}$ являются подпространствами пространства $\mathcal{F}^{\Phi}$, совпадающими с ним при $\varepsilon = \infty$. Если $\sigma < \sigma'$ и $\varepsilon < \varepsilon'$, то $\mathcal{F}_{\sigma, \varepsilon}^{\Phi} \subset \mathcal{F}_{\sigma', \varepsilon'}^{\Phi}$. В заключение можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7'. *Если заданы линейно связное топологическое пространство X, точка $x_0 \in X$, семейство Φ отображений*

$\varphi: X \to R^{p(\varphi)}$, *непрерывное псевдорасстояние* σ *на* X *и число* $\varepsilon > 0$, *то можно построить главное расслоенное пространство* $(\mathcal{F}, p, X)$, *в котором* $\mathcal{F}$ *является факторпространством пространства постоянных в бесконечности отображений* $f: [0, \infty) \to X$, *удовлетворяющих условию* $f(0) = x_0$ *и обладающих тем свойством, что диаметры множеств* $f([n, n+1])$, *измеренные при помощи псевдорасстояния* σ, *меньше чем* ε $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Укажем теперь метод, при помощи которого можно получить обширный класс главных расслоенных пространств с базой X и произвольной структурной группой G. Этим методом мы обязаны в основном Эресману. В работах Милнора и автора было показано, что часто встречающиеся в алгебраической топологии и дифференциальной геометрии расслоенные пространства, допускающие связность, получаются этим методом, исходя из главного расслоения $(\mathcal{B}, p, X, \Omega)$, называемого универсальным главным расслоением, присоединенным к пространству X.

Рассмотрим главное расслоение $(\mathcal{B}, p, X, \Omega)$, допускающее связность Γ, *совместную* с представлением группы Ω в пространстве $\mathcal{B}$ в том смысле, что для любых $g: I \to X$, $u \in p^{-1}(g(0))$, $t \in I$ и $\omega \in \Omega$ имеем

$$\omega\Gamma(g, u)(t) = \Gamma(g, \omega u)(t).$$

Это условие выполнено во всех случаях, изученных нами выше.

Пусть G — произвольная топологическая группа, и r — открытый и непрерывный гомоморфизм группы Ω на группу G. Такой гомоморфизм называется *представлением* группы Ω в группе G.

Обозначим через B факторпространство прямого произведения $\mathcal{B} \times G$ по отношению эквивалентности, определенному преобразованиями $T_\omega: \mathcal{B} \times G \to \mathcal{B} \times G$, заданными формулами

$$T_\omega([f], \gamma) = (\omega^{-1}[f], r(\omega^{-1})\gamma),$$

где через $[f]$ мы обозначили элемент из $\mathcal{B}$, а через γ — элемент из G.

Пусть ρ — каноническое отображение $\rho: \mathcal{B} \times G \to B$. Если D — множество из $\mathcal{B} \times G$, то

$$\rho^{-1}(\rho(D)) = \{T_\omega(u);\ u \in D,\ \omega \in \Omega\} = \bigcup_{\omega \in \Omega} T_\omega(D).$$

Отображения $T_\omega: \mathcal{B} \times G \to \mathcal{B} \times G$ являются гомеоморфизмами пространства $\mathcal{B} \times G$ на себя, так как они непрерывны и их обратные отображения $T_\omega^{-1} = T_{\omega^{-1}}$ также непрерывны.

Предыдущая формула показывает, что если D — открытое множество, то и $\rho^{-1}(\rho(D))$ — открытое множество, и из определения фактортопологии следует, что $\rho(D)$ также является открытым множеством. Следовательно, ρ — открытое отображение.

Пространство $\mathscr{B} \times G$ допускает непрерывную проекцию φ на пространство X, заданную формулой

$$\varphi([f], \gamma) = p[f].$$

Для любого $\omega \in \Omega$

$$\varphi(T_\omega([f], \gamma)) = \varphi([f], \gamma),$$

следовательно, можно определить проекцию

$$\pi : B \to X$$

формулой

$$\pi\{[f], \gamma\} = p[f], \quad \{[f], \gamma\} = \{T_\omega([f], \gamma); \ \omega \in \Omega\}.$$

В этом случае

$$\varphi = \pi \circ p.$$

Из этой формулы следует, что отображение π непрерывно, так как φ — непрерывное, а p — каноническое отображения факторпространства.

Мы хотим показать, что тройка (B, π, X) является главным расслоенным пространством. Чтобы показать, что она является расслоенным пространством, достаточно доказать, что она допускает связность.

Известно, что расслоенное пространство $(\mathscr{B}, p, X, \Omega)$ допускает связность Γ. При помощи связности Γ определяем связность Γ' в тройке $(\mathscr{B} \times G, \varphi, X)$ формулой

$$\Gamma'(g, ([f], \gamma))(t) = (\Gamma(g, [f])(t), \gamma),$$

где $g : I \to X$, $[f] \in \mathscr{B}$, $p[f] = g(0)$, $\gamma \in G$, $t \in I$. Если вместо точки $([f], \gamma) \in \mathscr{B} \times G$ рассмотреть эквивалентную ей точку $T_\omega([f], \gamma)$, то, поскольку связность Γ совместима с представлением группы Ω в $\mathscr{B}$, имеем

$$\Gamma'(g, T_\omega([f], \gamma))(t) = (\Gamma(g, \omega^{-1}[f])(t), r(\omega^{-1})\gamma) =$$
$$= (\omega^{-1}(\Gamma(g, [f])(t)), r(\omega^{-1})\gamma) = T_\omega(\Gamma'(g, ([f], \gamma))(t)).$$

Таким образом, связность Γ' и тройки $(\mathscr{B} \times G, \varphi, X)$, (B, π, X) удовлетворяют вместе с отображением ρ условиям, сформулированным в предложении 1.

Это показывает, что тройка (B, π, X) допускает связность Γ^*, заданную формулой

$$\Gamma^*(g, \{[f], \gamma\})(t) = \{\Gamma'(g, ([f], \gamma))(t)\}, \tag{8}$$

где $\{u, \gamma\} \in B$ — класс элемента $(u, \gamma) \in \mathscr{B} \times G$.

Расслоенное пространство $(\mathscr{B} \times G, \varphi, X)$ является главным со структурной группой $\Omega \times G$, и представление α в $\mathscr{B} \times G$ задается формулой

$$\alpha((\omega, \gamma'); ([f], \gamma)) = (\omega^{-1}[f], \gamma\gamma').$$

Взяв ω равным единичному элементу группы Ω, получим представление β группы G в $\mathscr{B} \times G$

$$\beta(\gamma', ([f], \gamma)) = ([f], \gamma\gamma'),$$

переводящее в $\mathscr{B} \times G$ эквивалентные элементы в эквивалентные элементы, так как справедливо соотношение

$$\beta(\gamma', T_\omega([f], \gamma)) = T_\omega(\beta(\gamma', ([f], \gamma))).$$

Отсюда следует, что формула

$$\beta^*(\gamma', \{[f], \gamma\}) = \{[f], \gamma\gamma'\}$$

определяет представление β^* группы G в факторпространстве B.

Если положить

$$S_{\gamma'}\{[f], \gamma\} = \beta^*(\gamma', \{[f], \gamma\}) = \{[f], \gamma\gamma'\},$$

то

$$\pi \circ S_{\gamma'} = \pi.$$

Это значит, что преобразования $S_{\gamma'} : B \longrightarrow B$ оставляют инвариантными все слои тройки (B, π, X). Таким образом, каждая орбита представления β^* принадлежит одному из слоев этой тройки. Покажем, что эти слои содержат по одной орбите, т. е. что (B, π, X) является главным расслоением. Для этого достаточно показать, что для двух элементов $u = \{[f]\ \gamma\}$, $v = \{[g], \delta\}$ из B, лежащих в одном слое, т. е. таких, что $\pi(u) = \pi(v)$, существует элемент $\gamma' \in G$, удовлетворяющий условию $S_{\gamma'}(u) = v$. Но если $\pi(u) = \pi(v)$, то $p[f] = p[g]$. Следовательно, существует элемент $\omega \in \Omega$, такой, что $\omega^{-1}[g] = [f]$ и

$$u = \{[f], \gamma\} = \{T_\omega([g], r(\omega)\gamma)\} = \{[g], r(\omega)\gamma\} =$$
$$= S_\gamma\ \{[g], \delta\} = S_{\gamma'}(v),$$

где $\gamma' = \delta^{-1} r(\omega)\gamma$. Следовательно, слой, который содержит элемент v, совпадает с орбитой, содержащей элемент v, что и требовалось доказать. Итак, мы доказали, что тройка (B, π, X) является главным расслоенным пространством со структурной группой G.

Важный частный случай главных расслоенных пространств получается, если в качестве группы G взять дискретную группу. Алгебраический гомоморфизм $r : \Omega \longrightarrow G$ в этом случае будет всегда открытым. Для того чтобы он был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы ядро гомоморфизма r (т. е. прообраз $r^{-1}(e)$ единичного элемента $e \in G$) было открытым множеством в Ω. Это множество является, следовательно, открытым нормальным делителем группы Ω. Обратно, если N — открытый нормальный делитель группы Ω, то группа $G = \Omega/N$ — дискретная, и канонический гомоморфизм $r : \Omega \longrightarrow G$ является представлением группы Ω на группе G. Главные расслоенные пространства (B, π, X) с дискретными слоями называются *накрывающими пространствами* пространства X, а G называется *группой покрытия*. Среди накрывающих пространств пространства X существует одно максимальное. Оно получается, если в качестве $(\mathscr{B}, p, X, \Omega)$ взять пространство $(\mathscr{T}, v, X, \mathscr{S})$, построенное выше, а в качестве N подгруппу группы Ω, образованную классами отображений $f:[0, \infty) \to X$, постоянных и равных x_0 в бесконечности и гомотопных нулю. Последнее условие понимается в том смысле, что замкнутый путь $\bar{f}$, ассоциированный с отображением f при помощи формулы

$$\bar{f}(t) = f(tn_f),$$

гомотопен постоянному отображению $I \to \{x_0\}$. Группа Ω/N изоморфна в этом случае фундаментальной группе $\pi_1(X)$, а расслоение (B, π, X) называется универсальной накрывающей пространства X. Для дополнений по вопросам накрывающих пространств рекомендуем обратиться к цитированным книгам Г. Зейферта и В. Трельфалля или Л. С. Понтрягина, а также к книге Ху Сы-цзяна, Теория гомотопий, изд-во «Мир», М., 1964.

Рассмотрим, например, случай, когда X является окружностью S^1, определенной в плоскости $\mathbf{R}^2$ уравнением

$$|z| = 1, \qquad z = x^1 + ix^2.$$

Пусть x_0 — точка (1,0) этой окружности. Каждому отображению $f \in T$, $f:[0, \infty) \to S^1$, с началом в x_0 поставим в соответствие вещественное число $\rho(f)$ следующим образом: разделим интервал $[0, n_f]$ на достаточно малые подинтервалы $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_m, n_f]$ так, чтобы при отображении f образ каждого из этих подинтервалов не содержал никакой полуокружности окружности S^1. Положим

$$\rho(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{m} \arg \frac{f(t_{i+1})}{f(t_i)},$$

причем аргументы комплексных чисел $\dfrac{f(t_{i+1})}{f(t_i)}$ выбраны из интервала $(-\pi, \pi)$.

Легко показать, что функция $\rho: T \to \mathbf{R}$ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(T) = \mathbf{R}$, так как для отображения f такого, что $n_f = 1$ и $f(t) = e^{2\pi itx}$, $t \in I$, имеем $\rho(f) = x$.
2. $\rho(f_1 * f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$ $(f_1 \in S, f_2 \in T)$.
3. Если $\rho(f) \in \mathbf{Z}$, то $f \in S$.
4. Функция ρ принимает целочисленные значения на S и постоянна на каждом классе гомотопий из S.
5. Если $f \in S$ и $\rho(f) = 0$ то f гомотопно постоянному пути, и, следовательно, ρ принимает различные значения на различных классах гомотопий.

Эти свойства указывают на то, что ρ индуцирует представление r группы $\mathscr{F}$ на аддитивной группе $G=\mathbf{Z}$ с дискретной топологией. Чтобы выяснить, какое расслоение соответствует этому представлению, рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathscr{T}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{R},$$

заданное формулой

$$\varphi([f], m)=\rho(f)+m.$$

Из свойства 2 следует, что φ индуцирует гомеоморфизм ψ факторпространства $B=P(\mathscr{T}\times\mathbf{Z})$ на вещественную прямую $\mathbf{R}$. Композиция проекции $\pi: B\to S^1$ с гомеоморфизмом $\psi^{-1}:\mathbf{R}\to B$ дает отображение

$$p:\mathbf{R}\to S^1,$$

при котором

$$p(x)=\pi\psi^{-1}(x)=\pi([f], 0)=f(1),$$

где отображение $f:[0, \infty)\to S^1$ таково, что $\rho(f)=x$. В качестве f можно взять отображение, для которого $n_f=1$ и которое при $t\in I$ задано формулой

$$f(t)=e^{2\pi itx}.$$

Тогда

$$p(x)=e^{2\pi ix}. \qquad (8')$$

Таким образом, расслоенное пространство, ассоциированное с представлением r, может быть отождествлено посредством гомеоморфизма ψ с тройкой $(\mathbf{R}, p, S^1)$, где проекция $p:\mathbf{R}\to S^1$ задана формулой (8').

Заметим, что в силу свойств 1—5 r индуцирует изоморфизм на группе классов гомотопий

$$\pi_1(S^1)\approx\mathbf{Z}. \qquad (8'')$$

Следовательно, фундаментальная группа окружности S^1 изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

Если записать точную последовательность гомотопий расслоения $(\mathbf{R}, p, S^1)$ и учесть, что $\mathbf{R}$ — стягиваемое пространство, то получим

$$\pi_i(S^1)=0 \qquad (i>1). \qquad (8''')$$

Докажем теперь следующее предложение.

Предложение. *Для каждого непрерывного отображения $g:\mathbf{R}^n\to S^1$ можно найти непрерывное отображение $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ такое, что $pf=g$.*

Действительно, рассмотрим сферы S_r^{n-1} из $\mathbf{R}^n$, центры которых совпадают с началом координат, а радиусы r целочисленные.

Пусть Δ_r — замкнутый шар с границей S_r^{n-1}. Чтобы найти отображение $f: R^n \longrightarrow R$, построим индукцией по r последовательность отображений

$$f_r: \Delta_r \longrightarrow \mathbf{R}$$

так, чтобы $g \mid \Delta_r = pf_r$ и $f_{r+1} \mid \Delta_r = f_r$. Для $r=0$ положим $f_0(0) = y_0$, где вещественное число y_0 определяется условием $p(y_0) = g(0)$. Предположив, что отображение f_r построено, будем строить отображение f_{r+1}. Рассмотрим отображение

$$h: S_r^{n-1} \times I \longrightarrow S^1,$$

заданное формулой

$$h(s, t) = g\left[\left(1 + \frac{t}{r}\right) s\right] \qquad (s \in S_r^{n-1} \subset \mathbf{R}^n)$$

и являющееся непрерывной деформацией $g \mid S_r^{n-1}: S_r^{n-1} \longrightarrow S^1$.

Поднимая гомотопию h в $\mathbf{R}$, получаем отображение

$$k: S_r^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbf{R}$$

такое, что

$$(pk)(s, t) = h(s, t) = g\left[\left(1 + \frac{t}{r}\right) s\right], \quad k(s, 0) = f_r(s) \ (s \in S_r^{n-1}).$$

Если для точек $x \in \Delta_{r+1} - \Delta_r$ положить

$$f_{r+1}(x) = k\left(\frac{rx}{\|x\|}, \ \|x\| - r\right),$$

получим

$$(pf_{r+1})(x) = g\left[\left(1 + \frac{\|x\| - r}{r}\right) \frac{rx}{\|x\|}\right] = g(x).$$

Обозначив $f_{r+1}(x) = f_r(x)$ для $x \in \Delta_r$, получим отображение, удовлетворяющее требуемым условиям.

После того как построена последовательность отображений $f_1, f_2, \ldots, f_r, \ldots$, определяем отображение $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ формулой $f(x) = f_r(x)$, если $x \in \Delta_r$. Отображение f будет непрерывным и будет удовлетворять условию $pf = g$. Предположение доказано.

Заметим, что в общем случае полное пространство B расслоения (B, π, X) гомеоморфно некоторому факторпространству пространства $\mathscr{B}$. Действительно, можно определить отображение $s: \mathscr{B} \longrightarrow B$

$$s[f] = \{[f], e\},$$

где e — единица группы G. Отображение s непрерывно, так как оно равно произведению непрерывных отображений

$$i_1: [f] \longrightarrow ([f], e) \in \mathscr{B} \times G, \quad \rho: ([f], e) \longrightarrow \{[f], e\}.$$

Рассмотрим два элемента $[f]$, $[g] \in \mathscr{B}$. Соотношение $s[f] = s[g]$ эквивалентно требованию существования элемента $\omega \in \Omega$, для которого $\omega[g]=[f]$ и $r(\omega)=e$, так как из $s[f]=s[g]$ вытекает $p[f]=$ $=p[g]$. Следовательно, для $\omega\in\Omega$ имеем $[f]=\omega[g]$ и

$$s[g]=\{[g],e\}=\{\omega[g],r(\omega)\}=\{[f],r(\omega)\}=\{[f],e\}.$$

С другой стороны, равенство $\{[f],\gamma\}=\{[f],e\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\gamma=e$, и, значит, $r(\omega)=e$. Если обозначить через N ядро представления r, то соотношение $s[f]=s[g]$ эквивалентно условию существования такого $\omega\in N$, что $[f]=\omega[g]$.

Покажем, что отображение s открытое. Для этого достаточно показать, что $\rho^{-1}(s(D))$ — открытое множество в $\mathscr{B}\times G$, если D — открытое множество. Однако

$$D_1=\rho^{-1}(s(D))=\rho^{-1}(\rho(i_1(D))=\{(\omega^{-1}[f],\ r(\omega^{-1}));\ [f]\in D,\ \omega\in\Omega\}.$$

Чтобы показать, что D_1—открытое множество, рассмотрим отображения

$$u\colon \mathscr{B}\times\Omega\longrightarrow\mathscr{B}\times\Omega,\quad v\colon \mathscr{B}\times\Omega\longrightarrow\mathscr{B}\times\Omega,$$
$$w\colon \mathscr{B}\times\Omega\longrightarrow\mathscr{B}\times G,$$

заданные формулами

$$u([f],\omega)=(\omega[f],\omega),\quad v([f],\omega)=(\omega^{-1}[f],\omega),$$
$$w([f],\omega)=([f],r(\omega^{-1})).$$

Отображения u, v, очевидно, непрерывны и взаимно обратны. Поэтому оба являются гомеоморфизмами. Итак, u — открытое отображение; w — также открытое отображение, и, следовательно, отображение $w\circ u$ также является открытым. Из очевидного равенства

$$D_1=(w\circ v)(D\times\Omega)$$

следует тогда, что D_1 — открытое множество. Так как s — непрерывное и открытое отображение, то пространство B гомеоморфно факторпространству пространства $\mathscr{B}$ по отношению эквивалентности $[f]\sim[g]$, устанавливаемому одним из двух эквивалентных условий

$$s[f]=s[g]\quad\text{или}\quad [f]\in N[g],$$

где N — ядро представления $r\colon\Omega\longrightarrow G$.

Используем этот результат в случае, когда группа Ω допускает представление R на ее подгруппу Ω_1. Этому представлению соответствует главное расслоенное пространство $(\mathscr{B}_1, p_1, X, \Omega_1)$. С другой стороны, повторяя рассуждения, проведенные для представлений $r\colon\Omega\longrightarrow G$, с каждым представлением $r_1\colon\Omega_1\longrightarrow G$ можно связать главное расслоенное пространство (B_1, π_1, X, G). Можно также связать главное расслоенное пространство (B, π, X, G) с представлением $r=r_1\circ R\colon\Omega\longrightarrow G$. Полные пространства B_1 и B этих двух расслоенных пространств гомеоморфны одному и тому же факторпространству пространства $\mathscr{B}$ по отношению эквивалентности $[f] \sim [g]$, устанавливаемому равенством $r([f][g]^{-1}) = e$ или $r_1(R([f][g]^{-1})) = e$, где через $[f][g]^{-1}$ обозначен элемент $\omega \in \Omega$, для которого $\omega[g] = [f]$. Более того, пространства B_1 и B отождествляются при помощи гомеоморфизма, перестановочного с представлением группы G соответственно в B_1 и в B.

Обратно, представление $r: \Omega \to G$ индуцирует непрерывный гомоморфизм $r_1: \Omega_1 \to G$, который, вообще говоря, не является открытым. Отсюда следует, что непрерывные гомоморфизмы r_1: $\Omega_1 \to G$, которые продолжаются до представлений $r: \Omega \to G$, приводят к главным расслоенным пространствам с базой X. Предположим, например, что R — ретракция, т. е. что для любого $\omega \in \Omega_1$ имеем $R(\omega) = \omega$; в этом случае гомоморфизм $r_1 \circ R: \Omega \to G$ является непрерывным продолжением гомоморфизма r_1, и если это продолжение является открытым отображением, то гомоморфизм $r_1: \Omega_1 \to G$ определяет главное расслоенное пространство с базой X, ассоциированное с расслоением $(\mathscr{B}_1, \pi_1, X, \Omega_1)$.

Чтобы дать общее представление о всех главных расслоенных пространствах (B, p, X, G) с заданной базой X, важно построить главное расслоенное пространство $(\mathscr{B}, p, X, \Omega)$ так, чтобы расслоенные пространства, присоединенные методом Эресмана к представлениям $\Omega \to G$, образовывали как можно более богатый класс.

Предположим, что задано главное расслоенное пространство (B, p, X, G), допускающее связность C. Пусть $(g_1, \ldots, g_k)$ — конечная последовательность путей в пространстве X, причем

$$g_1(1) = g_2(0),\ g_2(1) = g_3(0),\ \ldots,\ g_i(1) = g_{i+1}(0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ g_{r-1}(1) = g_r(0),\ g_r(1) = g_1(0).$$

Такая последовательность будет называться *циклом путей* с началом в $x_0 = g_1(0)$. Если удовлетворяются все предыдущие соотношения, кроме последнего, будем говорить, что имеем *цепь путей*. Отправляясь от точки $y \in p^{-1}(x_0)$, можно записать последовательность

$$y_1 = C(g_1, y_1)(1),\ y_2 = C(g_2, y_1)(1),\ \ldots,\ y_r = C(g_r, y_{r-1})(1).$$

Введем обозначения

$$y_r = T_{g_1, \ldots, g_r}(y),\quad x_0 = g_1(0),\ \ldots,\ x_r = g_r(1).$$

Получаем преобразование $T_{(g_1, \ldots, g_r)}$ слоя $p^{-1}(x_0)$ в слой $p^{-1}(x_r)$, так как $p(y_r) = g_r(1) = x_r$.

Пусть g — произвольный путь в X, y_0 — произвольная точка в слое $p^{-1}(g(0))$ и $y_1 = \widetilde{C}(g, y_0)(1)$. Будем говорить, что C является связностью, *совместной с представлением группы* G, если

$$C(\hat{g}, y_1) = y_0, \tag{9}$$

где $\hat{g}$ — путь, обратный пути g, т. е.

$$\hat{g}(t) = g(1-t) \quad (t \in I),$$

и если для любой цепи $\gamma=(g_1, \ldots, g_r)$ и любых элементов $u \in G$, $y \in B$, имеет место равенство

$$T_\gamma(u\, y)=uT_\gamma(y). \tag{10}$$

Так как слои являются орбитами представления группы G в B, то для любого цикла путей $(g_1, \ldots, g_r)$ из X и любой точки $y \in p^{-1}(g_1(0))$ существует элемент $u \in G$ такой, что $uy=T(g_1, \ldots, g_r)(y)$. Элемент u вполне определен, так как представление группы G свободное.

Если связность C совместна с представлением группы G и если циклы путей $(g_1, \ldots, g_r)$ и $(g_1' \ldots g_s')$ в X имеют одно и то же начало, то

$$T_{(g_1, \ldots, g_r, g_1', \ldots, g_s')}=T_{(g_1', \ldots, g_s')} \circ T_{(g_1, \ldots, g_r)}. \tag{10'}$$

Обозначим через ψ отображение, ставящее в соответствие каждому циклу $(g_1, \ldots, g_r)$ элемент $u \in G$, для которого

$$uy_0=T_{(g_1, \ldots, g_r)}(y_0),$$

где y_0 — фиксированная точка слоя $p^{-1}(g_1(0))$. В силу формул (10) и (10′) получим

$$\psi(g_1, \ldots, g_r, g_1', \ldots, g_s')\, y_0=T_{(g_1', \ldots, g_s')}(T_{(g_1, \ldots, g_r)}(y_0))=$$
$$=T_{(g_1', \ldots, g_s')}(\psi(g_1, \ldots, g_r)\, y_0)=(\psi(g_1', \ldots, g_s')\, \psi(g_1, \ldots, g_r))\, y_0.$$

Таким образом,

$$\psi(g_1, \ldots, g_r, g_r', \ldots, g_s')=\psi(g_1', \ldots, g_s')\, \psi(g_1, \ldots, g_r).$$

Из условия (9) следует, что для любого цикла $(g_1, \ldots, g_r)$

$$\psi(g_1, \ldots, g_r)^{-1}=\psi(\hat{g}_r, \ldots, \hat{g}_1).$$

Две последние формулы показывают, что можно определить гомоморфизм h группы $\mathscr{S}$, построенной выше, в группу G. Действительно, если f — отображение $[0, \infty) \to X$, постоянное в бесконечности и такое, что $f(0)=f(\infty)=x_0$, то ему можно поставить в соответствие цикл путей γ_f, положив для $t \in I$

$$\begin{aligned} g_1^f(t)&=f(t),\\ g_2^f(t)&=f(t+1),\\ &\vdots\\ g_r^f(t)&=f(t), \quad r=n_f+r-1, \end{aligned}$$

и

$$\gamma_f=(g_1^f, \ldots, g_r^f).$$

Обозначим

$$h(f) = \psi(g_1^f, \ldots, g_r^f) \in G.$$

Предыдущие формулы указывают на то, что элемент $k(t)$ не изменится, если заменить f эквивалентным отображением f'. Следовательно, h индуцирует отображение $k\colon \mathscr{S} \to G$, заданное формулой

$$k[f] = h(f)^{-1},$$

и это отображение является гомоморфизмом групп, так как

$$k([f][f']) = h(f * f')^{-1} = \psi(g_1^f, \ldots, g_r^f, g_1^{f'}, \ldots, g_s^{f'})^{-1} =$$
$$= \psi(g_1^f, \ldots, g_n^f)^{-1} \psi(g_1^{f'}, \ldots, g_s^{f'})^{-1} = k[f] \cdot k[f'].$$

Гомоморфизм h не является, вообще говоря, непрерывным, если считать, что он определен на топологической группе $\mathscr{S}^{\Phi}$, так как топология этой группы недостаточно тонкая.

Заметим все же, что можно определить отображение ρ (вообще говоря, не непрерывное) пространства $\mathscr{T}$ в пространство B. Действительно, зафиксируем две точки $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ и поставим в соответствие, как и раньше, каждому отображению $f \in T$ цепь путей $(g_1^f, \ldots, g_n^f)$, имеющую начало в точке x_0, такую, что

$$g_1^f(0) = x_0,\ g_1^f(1) = g_2^f(0),\ \ldots,\ g_{r-1}^f(1) = g_r^f(0),\ g_r^f(1) = f(\infty),$$

и затем последовательность точек

$$y_1 = C(g_1^f, y_0)(1),\ \ldots,\ y_i = C(g_i^f, y_{i-1})(1),\ \ldots .$$

Положим $\rho[f] = y_r = T(g_1^f, \ldots, g_r^f)(y_0) \in p^{-1}(f(\infty))$.

Если $[f']$ — другой элемент из $\mathscr{T}$ и $f'(\infty) = f(\infty)$, то $\omega = [f' * \check{f}] \in \mathscr{S}$. Обозначив $\gamma = \gamma_{f' * \check{f}}$, получим

$$\rho[f'] = \rho[(f' * \check{f}) * f] =$$
$$= \psi(\gamma)\, T(g_1^f, \ldots, g_r^f)(y_0) = \psi(\gamma)\, \rho[f] = h(\omega)\, \rho[f].$$

Заметим, что $\omega[f] = [f']$. Поэтому последняя формула может быть записана следующим сбразом:

$$\rho(\omega[f]) = k(\omega^{-1})\, \rho[f] = h(\omega)\, \rho[f].$$

Это соотношение показывает, что отображение ρ преобразует слои тройки $(\mathscr{T}, v, X)$ в орбиты представления группы G в пространстве B, т. е. в слои тройки (B, p, X). Из него видно также, что $\rho[f] = \rho[f']$ тогда и только тогда, когда $\psi(\gamma)^{-1}$ является единицей группы G, т. е. когда $h(\omega) = e$.

Следовательно, если пренебречь топологической структурой и условиями непрерывности, то расслоение $(\mathscr{T}, v, X, \mathscr{S})$ играет роль универсального расслоения в том смысле, что главные расслоения с базой X, допускающие связности, совместные с действием структурной группы, ассоциированы с расслоением $(\mathscr{T}, v, X, \mathscr{S})$.

Отображение ρ сюръективно, если ψ — эпиморфизм.

Для того чтобы B можно было отождествить с факторпространством пространства $\mathscr{T}$ по отношению эквивалентности

$$\rho[f] = \rho[f'],$$

нужно, чтобы ρ было открытым и непрерывным отображением для некоторой надлежащим образом выбранной топологии пространства $\mathscr{T}$.

Вообще говоря, невозможно ввести в пространстве $\mathscr{T}$ такую топологию, чтобы отображение ρ было открытым и непрерывным при любом расслоении (B, p, X, G).

Например, пусть задано главное расслоение $(\mathscr{T}^{\Phi}, v, X, \mathscr{S}^{\Phi})$ такое, как построенное выше с той же топологией. Рассмотрим семейство $\Phi = \Phi_0$, состоящее из одного отображения φ_0: $X \to \mathbf{R}^p$, и потребуем, чтобы соответствующее отображение ρ: $\mathscr{T} \to \mathscr{T}^{\Phi_0} = B$ было непрерывным и открытым. Тогда топология пространства $\mathscr{T}$ должна обязательно совпадать с топологией пространства $\mathscr{T}^{\Phi_0}$. Если выбрать другое семейство Φ, то соответствующее отображение ρ: $\mathscr{T}^{\Phi_0} \to \mathscr{T}^{\Phi}$ не будет, вообще говоря, ни непрерывным, ни открытым.

Отсюда следует, что как бы мы ни выбрали топологию в пространстве $\mathscr{T}$, класс главных расслоений, полученных применением метода Эресмана к универсальному расслоению $(\mathscr{T}, v, X, \mathscr{S})$, не охватывает все главные расслоения с базой X. Любая топология пространства $\mathscr{T}$, совместная с отображением расслоения v: $\mathscr{T} \to X$, пригодна только для определенных расслоений (B, p, X, G) и исключает остальные.

Рассмотрим теперь частный случай, в котором топология полного пространства B главного расслоения (B, p, X, G) определена расстоянием d: $B \times B \to \mathbf{R}$, инвариантным относительно действия группы G в B, т. е. таким, что

$$d(uy_1, uy_2) = d(y_1, y_2)$$

для любых $y_1, y_2 \in B$ и $u \in G$. Предположим также, что топология группы G определена метрикой d', удовлетворяющей соотношению

$$d(u_1 y, u_2 y) = d'(u_1, u_2)$$

для любых u_1, $u_2 \in G$ и $y \in B$.

Будем говорить, что B допускает метрику, совместную со связностью C и с представлением группы G. Расслоения $(M^{\Phi}, p, \tilde{X})$, построенные выше, являются примерами таких структур.

Можно теперь определить псевдорасстояние δ в пространстве $\mathscr{T}$, положив

$$\delta([f_1], [f_2]) = d(\rho[f_1], \rho[f_2]).$$

а также псевдорасстояние δ' в группе $\mathscr{S}$:

$$\delta'(\omega_1, \omega_2) = d'(h(\omega_1), h(\omega_2)).$$

Для двух элементов $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{S}$, учитывая, что расстояние d — инвариант группы G, имеем

$$\delta(\omega_1[f_1], \omega_2[f_2]) = d(\rho(\omega_1[f_1]), \rho(\omega_2[f_2])) =$$
$$= d(h(\omega_1)\rho[f_1], h(\omega_2)\rho[f_2]) \leqslant d(h(\omega_1)\rho[f_1], h(\omega_1)\rho[f_2]) +$$
$$+ d(h(\omega_1)\rho[f_2], h(\omega_2)\rho[f_2]) = d(\rho[f_1], \rho[f_2]) + d'(h(\omega_1), h(\omega_2)).$$

Таким образом,

$$\delta(\omega_1[f_1], \omega_2[f_2]) \leqslant \delta'(\omega_1, \omega_2) + \delta([f_1], [f_2]).$$

С другой стороны, если $f_1(\infty) = f_2(\infty) = x_0$, т. е. если $\omega_1' = [f_1] \in \mathscr{S}$ и $\omega_2' = [f_2] \in \mathscr{S}$, то

$$\rho(\omega_1') = h(\omega_1')y_0, \quad \rho(\omega_2') = h(\omega_2')y_0,$$

и поэтому

$$\delta'(\omega_1', \omega_2') = d'(h(\omega_1'), h(\omega_2')) = d(h(\omega_1')y_0, h(\omega_2')y_0) =$$
$$= d(\rho(\omega_1'), \rho(\omega_2')) = \delta(\omega_1', \omega_2').$$

Следовательно, δ' является ограничением на $\mathscr{S}$ псевдорасстояния δ из $\mathscr{T}$.

Предыдущее неравенство приводит к соотношению

$$\delta'(\omega_1\omega_1', \omega_2\omega_2') \leqslant \delta'(\omega_1, \omega_2) + \delta'(\omega_1', \omega_2').$$

Имеем также

$$\delta'(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = d(h(\omega_1^{-1})y_0, h(\omega_2^{-1})y_0) = d(h(\omega_2^{-1}\omega_1)y_0, y_0).$$

Положив $h(\omega_1^{-1})y_0 = y_1$, т. е. $y_0 = h(\omega_1)y_1$, можно записать далее

$$\delta'(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = d(h(\omega_2)y_1, h(\omega_1)y_1) = \delta'(\omega_2, \omega_1) = \delta'(\omega_1, \omega_2).$$

Следовательно,

$$\delta'(\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}) = \delta'(\omega_1, \omega_2).$$

Поэтому, если ввести в множествах $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ топологии, определенные псевдорасстояниями δ и δ', то $\mathscr{S}$ становится топологической группой с непрерывным представлением в пространстве $\mathscr{T}$.

Из непрерывности связности C следует, что можно ввести связность Γ в тройке $(\mathscr{T}, v, X)$, в которой $\mathscr{T}$ имеет топологию $|\delta|$, определенную псевдорасстоянием δ, если для $\tau \in I$, $g: I \to X$ и $[f] \in \mathscr{T}$ $(f(\infty) = g(0))$ положить

$$\Gamma(g, [f])(\tau): t \to \begin{cases} f(t), & t \in [0, n_f], \\ g(t - n_f), & t \in [n_f, n_f + \tau], \\ g(\tau), & t \in [n_f + \tau, \infty). \end{cases}$$

Следовательно, $(\mathcal{T}, v, X)$ будет расслоенным пространством, если в множестве $\mathcal{T}$ ввести топологию $|\delta|$. Легко проверить, что отображение $\rho: \mathcal{T} \to B$ является в этом случае непрерывным и открытым, а (B, π, X) может быть отождествлено с пространством, присоединенным к представлению $h: \mathcal{S} \to G$.

Аналогичные рассуждения можно проводить применительно к главным расслоенным пространствам $(\mathcal{F}, v, X, \mathcal{L})$, где $\mathcal{F}$ — подмножество из $\mathcal{T}$, образованное классами отображений $f \in T_{\sigma, \varepsilon}$, рассмотренных выше. Обратно, пусть в некотором расслоенном пространстве $(\mathcal{F}, v, X, \mathcal{L})$ топологии пространства $\mathcal{T}$ и группы $\mathcal{L}$ определены псевдорасстояниями δ и δ', удовлетворяющими полученным выше соотношениям, и пусть в этом расслоенном пространстве можно ввести связность. Тогда с каждым представлением $r: \mathcal{L} \to G$ ассоциируется, по методу Эресмана, главное расслоенное пространство со структурной группой G.

В качестве примера рассмотрим случай, когда X является компактным римановым многообразием (гл. V). Пусть d — соответствующее расстояние. Известно[1]), что существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любых точек $x, x' \in X$, для которых $d(x, x') < \varepsilon$, существует единственная минимальная дуга геодезической, соединяющая эти точки. Пусть $\mathcal{F}_1$ — подмножество множества $\mathcal{F}$, образованное классами отображений $f: [0, \infty) \to X$, ограничениями которых $f|[n, n+1]$ являются дуги геодезических.

Можно определить отображение

$$a: \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1,$$

сопоставляя каждому классу $[f]$ класс $[f_1]$ пути f_1, образованного минимальными дугами геодезических с концами $f(n)$ и $f(n+1)$. Ограничение на $\mathcal{L}$ отображения a является гомоморфизмом $b: \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{F}_1$. В множествах $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{L}_1$ можно определить расстояния d и d', например, формулой

$$d([f_1], [f_1']) = \inf_s \{\alpha + l\},$$

где α — площадь дифференцируемого симплекса $s: \Delta^2 \to X$, ограничение которого на стороны A_0A_1, A_0A_2 задано равенствами

$$s((1-t)A_0 + tA_1) = f_1(tn_{f_1}),$$
$$s((1-t)A_0 + tA_2) = f_1'(tn_{f_1'}),$$

а l — длина дуги

$$t \to s((1-t)A_1 + tA_2).$$

---

[1]) См., например, Милнор Дж., Теория Морса, изд-во «Мир», М., 1965.

Псевдорасстояния δ и δ', определенные на множествах $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ формулами

$$\delta([f],\ [f']) = d(a[f],\ a[f']),$$

$$\delta'(\omega_1,\ \omega_2) = d'(b(\omega_1),\ b(\omega_2)) = d(a(\omega_1),\ a(\omega_2)),$$

должны удовлетворять указанным выше условиям для того, чтобы соответствующие топологии в множествах $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ превращали тройку $(\mathcal{F},\ v,\ X)$ в главное расслоенное пространство со структурной группой $\mathcal{L}$.

Важные представления группы $\mathcal{L}$ можно получить, составляя композицию представления $b: \mathcal{L} \to \mathcal{L}_1$ и представления $r_1: \mathcal{L}_1 \to G$, которые получаются при рассмотрении инфинитезимальных связностей в главных расслоенных пространствах, структурными группами которых являются группы Ли, т. е. группы, снабженные структурами дифференцируемых многообразий, совместными с групповыми операциями. Для знакомства с инфинитезимальными связностями, отличными от связностей Леви-Чевита, изложенными в гл. V, отсылаем читателя к статье Эресмана или к книгам Чжэня или Лихнеровича [1]).

Ограничимся замечанием, что тройки $(B,\ p,\ X)$, у которых базой X и полным пространством B являются дифференцируемые многообразия и которые допускают инфинитезимальные связности в силу одной теоремы Эресмана (см. цитированную работу), допускают и связности в смысле настоящей книги, т. е. являются расслоенными пространствами в смысле Серра.

Значение этого результата состоит в том, что из него следует для упомянутых троек теорема о подъеме гомотопии, доказанная в более общем смысле Стинродом и использованная Серром в определении расслоенных пространств.

Подробная иллюстрация этих фактов будет приведена в гл. V, где мы будем рассматривать проблему классификации главных расслоенных многообразий со структурной группой $T' = R/Z$.

Подводя итог полученных результатов, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть* $(\mathcal{F},\ p,\ X,\ \mathcal{L})$ — *одно из расслоенных пространств, имеющих в качестве базы топологическое пространство* X, *причем топологии в* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{L}$ *заданы псевдорасстоянием* δ, *удовлетворяющим следующим условиям:*

1. $\delta(\omega_1[f_1],\ \omega_2[f_2]) \leqslant \delta(\omega_1,\ \omega_2) + \delta([f_1],\ [f_2])$,
2. $\delta(\omega_1^{-1},\ \omega_2^{-1}) = \delta(\omega_1,\ \omega_2)$,

[1]) Ehresmann C., Colloque de topologie, Bruxelles, 1950; Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, ИЛ, М., 1961; Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ, М., 1960.

3. $([f], g) \to \delta([f * g], [f'])$ — *непрерывная функция на множестве пар* $([f], g)$, *для которых* $[f * g] \in \mathcal{F}$, *снабженная индуцированной топологией прямого произведения* $\mathcal{F} \times X^I$, *в котором* $\mathcal{F}$ *снабжено указанной выше топологией, а* X^I — *компактно-открытой топологией.*

При этих условиях любое представление $r : \mathcal{L} \to G$ *определяет главное расслоенное пространство с группой* G *и связность в этом пространстве, совместную с представлением группы* G. *Это главное расслоенное пространство может быть найдено методом Эресмана.*

Обратно, любое главное расслоенное пространство (B, π, X, G), *допускающее связность, совместную с представлением группы* G *в* B, *и метрику, инвариантную относительно каждого преобразования этого представления, ассоциировано с представлением* $r : \mathcal{L} \to G$, *в котором в качестве* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{L}$ *можно взять* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{S}$ *с топологией, определенной псевдорасстоянием* δ.

Закончим этот параграф замечанием, касающимся поведения группы $\mathcal{L}$ по отношению к непрерывным отображениям $X \to X'$. Напомним, что топология группы $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$, присоединенной к пространству X, и топология пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ зависят от выбора псевдорасстояний δ' и δ. Для топологической группы $\mathcal{L}(X)$, в которой топология определена расстоянием δ', введем обозначение $\mathcal{L}^{\delta'}(X)$, а для пространства $\mathcal{F}(X)$ с топологией, определенной расстоянием δ, — обозначение $\mathcal{F}^{\delta}(X)$.

Пусть теперь $u : X \to X'$ — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство X'. С каждым отображением $f : [0, \infty) \to X$ ассоциируется отображение $f' = u \circ f : [0, \infty) \to X'$. Если отображение f — постоянное в бесконечности и $f(0) = f(\infty) = x_0$, то f' будет постоянным в бесконечности и $f'(0) = f'(\infty) = x_0' = u(x_0)$. С другой стороны, если $[f] = [g]$, то $[f'] = [g']$. Следовательно, u индуцирует отображение $u'_* : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X')$, которое, как легко проверить, является гомоморфизмом. Кроме того, определено отображение $u_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X')$.

Пусть теперь δ_1 — псевдорасстояние на $\mathcal{F}(X')$ и δ_1' — его ограничение на $\mathcal{L}(X')$.

Рассмотрим псевдорасстояния δ и δ' на $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{L}(X)$, заданные формулами

$$\delta([f], [g]) = \delta_1(u_*[f], u_*[g]), \quad \delta'(\omega_1, \omega_2) = (u'_*(\omega_1)), u'_*(\omega_2)).$$

Легко проверить, что гомоморфизм

$$u'_* : \mathcal{L}^{\delta'}(X) \to \mathcal{L}^{\delta_1'}(X')$$

является представлением. Поэтому, представлению $r' : \mathcal{L}_1^{\delta'}(X') \to G$ будет соответствовать непрерывный и открытый гомоморфизм $r = r' \circ u'_* : \mathcal{L}^{\delta'}(X) \to G$. Тройка (B, π, X), соответствующая расслоению $(\mathcal{F}^{\delta}(X), v, X)$ и представлению r, является расслоением. Это расслоение может быть получено из расслоения (B', π', X), ассоциированного с расслоением $(\mathcal{F}^{\delta_1}(X'), v', X')$ и представлением r' следующим способом, указанным Эресманом. В качестве полного пространства B берем подпространство произведения $B' \times X$, образованное из пар (y', x), для которых

$$(y') = u(x),$$

а проекция π задается формулой

$$\pi(y', x) = x.$$

Предоставляем читателю возможность проверить, что такое описание расслоения (B, π, X) возможно. Отметим, что этот метод является фундаментальным в теории классификации расслоенных пространств. Отсылаем читателя, желающего ознакомиться с более полным изложением, к работе Стинрода, цитированной в начале главы.

Сочетая результаты Стинрода, полученные для случая, когда X является конечным симплициальным полиэдром, а G — компактной группой Ли, с результатами, полученными выше, находим, что любое главное расслоенное пространство с базой X и структурной группой G допускает связности, совместные с действием группы G.

5. Присоединенные расслоенные пространства

Рассмотрим главное расслоенное пространство $(B, \pi, \mathcal{T}, G)$ с базой $\mathcal{T}$ и структурной группой G. Предположим, что G — непрерывная группа *левых сдвигов* в топологическом пространстве F, т. е. задано непрерывное отображение

$$\rho : G \times F \to F,$$

обладающее таким свойством:

$$\rho(g', \rho(g, z)) = \rho(g'g, z) \quad (g \in G, \ z \in F).$$

Для простоты будем пользоваться сокращенным обозначением

$$\rho(g, z) = gz \quad (g \in G, \ z \in F).$$

Мы хотим показать, что с расслоенным пространством $(B, \pi, \mathcal{T}, G)$ и представлением ρ связано расслоенное пространство $(B', \pi', \mathcal{T})$, слои которого гомеоморфны пространству F. Действительно. рассмотрим прямое произведение $B \times F$, в котором действует группа G по формуле

$$g(y, z) = (yg^{-1}, gz), \tag{11}$$

где через

$$y \to yg$$

мы обозначили действие группы G в пространстве B. При помощи формулы (11) группа G устанавливает в произведении $B \times F$ отношение эквивалентности, порождающее факторпространство

$$B' = (B \times F)/G .$$

Отношение эквивалентности

$$(y,\ z) \sim (yg^{-1},\ gz)$$

задано гомеоморфизмами пространства $B \times F$. Поэтому при поэмощи рассуждений, аналогичных проведенным в предыдущем параграфе, можно доказать, что каноническое отображение

$$\varphi : B \times F \longrightarrow B',$$

которое, вообще говоря, является лишь непрерывным, в нашем случае будет и открытым. Как и в предыдущем параграфе, находим, что отображение

$$\pi' : B' \longrightarrow \mathcal{T},$$

заданное формулой

$$\pi'(\varphi(y,\ z)) = \pi(y),$$

непрерывно. (Отображение π' определено, поскольку из $\varphi(y,\ z) = \varphi(y',\ z')$ следует $y' = yg$ $(g \in G)$, и в этом случае y и y' принадлежат одному слою из B. Это значит, что $\pi(y) = \pi(y')$.)

Мы хотим показать, что тройка $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ является расслоенным пространством в смысле Серра. С этой целью построим связность в $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ и применим теорему 6. Связность C' пространства $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ может быть определена формулой, аналогичной формуле (8). Если g — путь в пространстве $\mathcal{T}$ и $y' = \varphi(y,\ z)$ — точка в B', проекция которой совпадает с $g(0)$, т. е.

$$\pi'(y') = \pi(y) = g(0),$$

то путь $C'(g,\ y')$ будет задан формулой

$$(C'(g,\ y'))(t) = \varphi(C(g,\ y)(t)),$$

где C — связность в $(B,\ \pi,\ \mathcal{T},\ G)$, инвариантная относительно группы G в B.

Методом, использованным выше, проверим, что слои пространства $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ гомеоморфны пространству F.

Расслоенное пространство $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ называется *расслоенным пространством, присоединенным к представлению* ρ *группы* G.

Если F — векторное пространство, а G — группа линейных преобразований в F, то $(B',\ \pi',\ \mathcal{T})$ называется *векторным расслоенным пространством с базой* $\mathcal{T}$ *и слоем* F.

6. Тривиальные расслоенные пространства и локально тривиальные расслоенные пространства

Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{Y}$ — два топологических пространства. Прямое произведение $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ будет расслоенным пространством, если определить проекцию $p : \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$ формулой

$$p(x, y) = x.$$

Действительно, любая гомотопия

$$h : \mathcal{S} \times I \to \mathcal{T}$$

может быть поднята в $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$, если положить

$$k(s, t) = (h(s, t), y), \quad s \in \mathcal{S}, \ t \in I.$$

Такое расслоенное пространство называется *тривиальным*. Расслоенное пространство $(B, p, \mathcal{T})$ называется *локально тривиальным*, если любая точка x из $\mathcal{T}$ допускает такую окрестность U, что $p^{-1}(U)$, рассматриваемое как подпространство пространства B, гомеоморфно некоторому прямому произведению вида $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — фиксированное топологическое пространство. В этом случае $\mathcal{Y}$ называется *типовым слоем* пространства $(B, p, \mathcal{T})$.

Топологическое пространство $\mathcal{T}$ называется *локально стягиваемым*, если любая точка из $\mathcal{T}$ принадлежит стягиваемой окрестности. Докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Если расслоенное пространство $(B, p, \mathcal{T})$ допускает связность C и если $\mathcal{T}$ (локально) стягиваемое, то $(B, p, \mathcal{T})$ — (локально) тривиальное.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x из $\mathcal{T}$ и стягиваемую окрестность U точки x. Существует непрерывное отображение $h : U \times I \to U$ такое, что

$$h(x', 0) = x', \qquad x' \in U,$$
$$h(x', 1) = x,$$
$$h(x, t) = x, \qquad t \in I.$$

Каждой точке x' окрестности U можно сопоставить путь $g_{x'}$, началом которого является точка x и концом точка x'

$$g_{x'}(t) = h(x', 1 - t).$$

Рассмотрим отображение

$$\theta : U \times F_x \to p^{-1}(U), \quad F_x = p^{-1}(x),$$

заданное формулой

$$\theta(x', y) = (C(g_{x'}, y))(1).$$

Это отображение непрерывно, так как оно является произведением двух непрерывных отображений

$$(x', y) \to (x', y, 1), \quad (x', y, t) \to (C(g_{x'}, y))(t).$$

Для доказательства непрерывности последнего отображения заметим, что в силу теоремы Бурбаки отображение $x' \to g_{x'}$ непрерывно. Из свойства С3 (см. стр. 296) следует затем, что отображение $(x', y) \to C(g_{x'}, y)$ непрерывно, так как оно является произведением двух непрерывных отображений

$$(x', y) \to (g_{x'}, y), \quad (g, y) \to C(g, y).$$

В силу теоремы Бурбаки из непрерывности отображения

$$(x', y) \to C(g_{x'}, y)$$

следует непрерывность отображения $(x', y, t) \to (C(g_{x'}, y))(t)$.

Отображение θ взаимно однозначно, и его обратное отображение сопоставляет каждой точке $y' \in p^{-1}(U)$ пару (x', y), где $x' = p(y')$, а $y = (C(\hat{g}_{x'}, y'))(1)$. Отображение $y' \to p(y') = x'$ непрерывно, и отображение $y' \to y$ также непрерывно, так как оно получается суперпозицией непрерывных отображений

$$y' \to x' \to g_{x'} \to \hat{g}_{x'},$$

$$(y', g) \to (y', g, 1), \quad (y', g, t) \to (C(g, y'))(t).$$

Мы доказали таким образом, что θ — гомеоморфизм прямого произведения $U \times F_x$ на пространство $p^{-1}(U) \subset B$. Это показывает, что расслоенное пространство $(B, p, \mathcal{T})$ тривиально над окрестностью U, следовательно, оно локально тривиально.

Если пространство $\mathcal{T}$ стягиваемо, то можно положить $U = \mathcal{T}$, откуда следует, что $(B, p, \mathcal{T})$ тривиально.

7. Сечения. Локальные сечения

Сечением в расслоенном пространстве $(B, p, \mathcal{T})$ называется непрерывное отображение

$$s\colon \mathcal{T} \to B$$

такое, что для любой точки $x \in \mathcal{T}$ точка $s(x)$ принадлежит слою над точкой x, иначе говоря,

$$s(x) \in p^{-1}(x).$$

Если $(B, p, \mathcal{T})$ тривиально, то через любую точку полного пространства B проходит сечение. Действительно, если $B = \mathcal{T} \times \mathcal{Y}$ и $p(x, y) = x$, то отображения

$$s_y\colon x \to (x, y)$$

являются сечениями.

Пусть $(B, p, \mathcal{T})$ — *векторное расслоенное пространство*, т. е. пространство, присоединенное к линейному представлению структурной группы G главного расслоенного пространства. Каждый слой такого пространства есть линейное пространство. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке x из $\mathcal{T}$ нулевой вектор слоя в x, является сечением.

Рассмотрим расслоенное пространство $(B, p, \mathcal{T})$ и подпространство U базы $\mathcal{T}$. Подпространство $B_U = p^{-1}(U)$ является полным пространством расслоенного пространства с базой U и проекцией $p_U = p|B_U$. Действительно, любая гомотопия из U может быть поднята до гомотопии k в B, не выходящей из B_U, так как проекция образа отображения k лежит в U. Следовательно, тройка (B_U, p_U, U) удовлетворяет условию подъема гомотопии.

Локальным сечением над U расслоенного пространства $(B, p, \mathcal{T})$ называется любое сечение s расслоенного пространства вида (B_U, p_U, U).

Если $(B, p, \mathcal{T})$ — векторное расслоенное пространство, то локальные сечения над (открытым) множеством U образуют абелеву группу, если положить $(s+s')(x) = s(x) + s'(x)$. Абелевы группы H_U, образованные локальными сечениями над открытыми множествами $U \subset \mathcal{T}$, вместе с гомоморфизмами ограничений образуют проективную систему над $\mathcal{T}$. Пучок, присоединенный к этой системе, называется *пучком ростков локальных сечений* расслоенного пространства $(B, p, \mathcal{T})$.

Группы когомологий пространства $\mathcal{T}$ с коэффициентами в проективной системе локальных сечений являются топологическими инвариантами тройки $(B, p, \mathcal{T})$, снабженной векторной структурой слоев.

ГЛАВА V

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ[1])

1. Определение многообразия

Будем называть *многообразием* топологическое пространство $\mathscr{V}$, у любой точки x которого существует такая замкнутая окрестность U_x, содержащая точку x в качестве внутренней точки, что на U_x определена конечная система непрерывных функций, удовлетворяющих следующему условию: отображение $y \to (f_1(y), \ldots, f_n(y))$, $y \in U_x$, является гомеоморфизмом φ_x подпространства $U_x \subset \mathscr{V}$ на единичный куб I^n числового пространства $\mathbf{R}^n$

$$I^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n;\ 0 \leqslant t_1, \ldots, t_n \leqslant 1\}.$$

В этом случае отображение φ_x устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями f, непрерывными на I^n, и функциями, непрерывными на U_x: $f \to f\varphi_x$.

Отсюда следует, что любая функция, непрерывная внутри окрестности U_x, имеет вид $F(f_1, \ldots, f_n)$, где F — непрерывная функция n вещественных переменных, принимающих значения из куба I^n.

Предположим, что кроме U_x задана замкнутая окрестность U'_x точки x и система функций $g_1, \ldots, g_m$, непрерывных в U'_x и определяющих гомеоморфизм

$$y \to \varphi'_x(y) = (g_1(y), \ldots, g_m(y)),\ y \in U'_x,$$

окрестности U'_x на замкнутый куб I^m числового пространства $\mathbf{R}^m$. В этом случае $m = n$. Действительно, $\varphi_x \varphi'^{-1}_x$ индуцирует гомеоморфизм симплекса Δ^m куба I^m в куб I^n, а I^n — конечный симплициальный полиэдр размерности n. Поэтому из доказательства теоремы инвариантности размерности полиэдров (гл. II, § 20) следует, что $m \leqslant n$. Аналогично можно показать, что $n \leqslant m$ и, следовательно, $m = n$.

Итак, каждой точке x многообразия $\mathscr{V}$ ставится в соответ-

[1]) См. для справок де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956; Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ, М., 1960; Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, ИЛ, М., 1960; Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, изд-во «Мир», М., 1966; Hodge W., Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale, Leipzig, 1958.

ствие натуральное число $n = n(x)$, которое, вообще говоря, зависит от x. Это число называется *размерностью* многообразия в точке x.

Функция $x \to n(x)$ непрерывна. Действительно, если многообразие $\mathscr{V}$ имеет в точке x размерность n и если U_x — окрестность точки x, гомеоморфная кубу I^n, то любая внутренняя точка y множества U_x обладает окрестностью $V_y = U_x$, гомеоморфной кубу I^n, и $\varphi_y = \varphi_x$ есть гомеоморфизм пространства V_y на куб I^n. Отсюда следует, что множество точек x из $\mathscr{V}$, в которых размерность $\mathscr{V}$ равна некоторому фиксированному n, образует открытое множество $D(n)$ в $\mathscr{V}$.

Если точки x и y из $\mathscr{V}$ могут быть соединены путем $f\colon I \to \mathscr{V}$ ($f(0) = x$, $f(1) = y$), то размерности $\mathscr{V}$ в x и y равны. Действительно, составляя композицию отображений $f\colon t \to f(t)$ и $x \to n(x)$, приходим к непрерывной на отрезке I функции с целочисленными значениями. Такая функция постоянна, так как I — связное пространство.

Обычно рассматриваются связные многообразия. Размерность такого многообразия во всех его точках одна и та же и является топологическим инвариантом. Этот инвариант называется *размерностью* многообразия.

Многообразие, определенное таким образом, может не быть отделимым пространством. Например, можно рассмотреть факторпространство, полученное объединением двух плоскостей $\{(x, y)\}$, $\{(u, v)\}$ путем следующего отождествления:

$$(x, y) = (u, v), \text{ если } x = u, \ y = v < 0.$$

Любая точка факторпространства, полученного таким образом, обладает окрестностью, принадлежащей одной из полуплоскостей $y > 0$, $v > 0$, $y = v < 0$, исключение составляют точки, принадлежащие прямым $y = 0$, $v = 0$ плоскостей $\{(x, y)\}$, $\{(u, v)\}$, окрестности которых пересекают соответственно полуплоскости $y > 0$, $v = y < 0$ и $v > 0$, $v = y < 0$. Две точки $(x, 0)$, $(u, 0)$, для которых $u = x$, не могут быть отделены непересекающимися окрестностями.

Мы будем рассматривать только отделимые многообразия. Эти многообразия локально компактны, так как окрестности U_x компактны.

Можно привести примеры многообразий, удовлетворяющих условиям, перечисленным выше, но не являющимся паракомпактными.

Наиболее важные результаты, касающиеся многообразий, получаются для паракомпактных многообразий. Это требование сводится к требованию, чтобы многообразие было счетным в бесконечности (гл. I, B, § 16).

Ниже мы будем понимать под *многообразием размерности n* паракомпактное связное топологическое пространство, в котором каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной кубу размерности n.

Примеры. Числовое пространство R^n, сфера S^n, проективное пространство $\mathcal{P}^n$, любое конечное прямое произведение многообразий, сумма размерностей которых равна n, любое открытое подмножество многообразия размерности n являются многообразиями размерности n.

Для $n=2$ в предыдущих главах мы встречали компактные ориентируемые многообразия, которые мы называли компактными ориентируемыми поверхностями рода p.

Чтобы привести более общий пример, рассмотрим замкнутое связное множество V числового пространства R^N, обладающее следующим свойством: для любой точки x из V существует окрестность U в R^N и N непрерывных функций $F_1, \ldots, F_N$, определенных на кубе $I^n = \{(u_1, \ldots, u_n);\ 0 \leqslant u_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$, таких, что отображение

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \longrightarrow [F_1(u), \ldots, F_N(u)]$$

является гомеоморфизмом куба I^n на $U \cap V$. Говорят, что V — многообразие, *погруженное в пространство* R^N, а $F_1, \ldots, F_N$ — функции, *реализующие это погружение в окрестности точки* x.

2. Дифференцируемые многообразия

Дифференцируемым многообразием называется многообразие $\mathcal{V}$, в котором определена дифференцируемая структура. Чтобы ввести понятие дифференцируемой структуры многообразия, рассмотрим точку x многообразия $\mathcal{V}$ и обозначим через C_x множество пар (U, f), состоящих из окрестности U точки x и функции f, определенной и непрерывной на U. Если (U, f) — пара из C_x, то будем говорить, что f — функция многообразия $\mathcal{V}$, непрерывная в точке x, а U — область определения этой функции.

Дифференцируемой структурой класса C^r на многообразии $\mathcal{V}$ размерности n называется отображение Φ, ставящее в соответствие каждой точке x из $\mathcal{V}$ подмножество Φ_x множества C_x, удовлетворяющее следующим условиям. Для любой точки x из $\mathcal{V}$ в подмножестве Φ_x существует n пар $(U, f_1), \ldots, (U, f_n)$ таких, что

1. точка x содержится внутри U;

2. функции $f_1, \ldots, f_n$ реализуют гомеоморфизм окрестности U на некоторое множество из R^n;

3. если $y \in V \subset U$, то пара $(V, f) \in C_y$ принадлежит Φ_y тогда и только тогда, когда существует такая вещественная функция F класса C^r от n вещественных переменных $y^1, \ldots, y^n$, что $f(x') = F[f_1(x'), \ldots, f_n(x')]$ для любой точки x' из V.

Функции $f_1, \ldots, f_n$ называются *допустимыми координатами* точки x в окрестности U. Эти координаты определены с точностью до преобразования вида

$$g_i = G_i(f_1, \ldots, f_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где G_i — функции класса C^r с отличным от нуля якобианом $\left|\frac{\partial G_i}{\partial f_j}\right|$ в окрестности U, т. е. при значениях переменных f_i, соответствующих текущей точке из U. В соответствии с условием 3 формулы (1) определяют n функций g_i таких, что $(U, g_i) \in \Phi_x$ тогда и только тогда, когда G_i являются функциями класса C^r в U. Если якобиан $\left|\frac{\partial G_i}{\partial f_j}\right|$ не равен нулю в U, то в силу теоремы о неявных функциях получаем формулы вида

$$f_i = F_i(g_1, \ldots, g_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где F_i — функции класса C^r в U. Если $(V, f) \in \Phi_y$, то

$$f = F(f_1, \ldots, f_n) = F(F_1(g), \ldots, F_n(g))$$

на пересечении $V \cap U$. Следовательно, функции $g_1, \ldots, g_n$ удовлетворяют условиям 1—3.

Обратно, если $g_1, \ldots, g_n$ — допустимые координаты в окрестности U, то из формул (1), (2) находим, что в окрестности U выполняются тождества

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial f_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial g_k} = \delta_k^i,$$

откуда следует, что в окрестности U

$$\left|\frac{\partial G_i}{\partial f_j}\right| \neq 0.$$

Многообразие $\mathscr{V}$, снабженное дифференцируемой структурой класса C^r, называется дифференцируемым многообразием класса C^r. *Дифференцируемыми функциями* на таком многообразии будут функции f такие, что $(U, f) \in \Phi_x$ для любого открытого множества U из $\mathscr{V}$ и любой точки x из U.

На практике для определения дифференцируемого многообразия указывают некоторое покрытие многообразия $\mathscr{V}$ и в каждом множестве покрытия задают систему допустимых координат. В этом случае на пересечении каждых двух окрестностей покрытия координаты должны быть связаны преобразованием (1) класса C^r с ненулевым якобианом.

Примеры. Пространства R^n, S^n и $\mathscr{P}^n$ будут дифференцируемыми многообразиями класса C^∞, если снабдить их естественными дифференцируемыми структурами. Эти структуры могут быть определены системами допустимых координат в каждой окрестности открытого покрытия этих многообразий. Так, в R^n можно взять покрытие, состоящее из одного открытого множества R^n, и в качестве допустимых координат — декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Сфера S^n может быть покрыта $2(n+1)$ окрестностями U_i, V_i. Если S^n задана в $\mathbf{R}^{n+1}$ уравнением

$$x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1,$$

то можно рассмотреть множества U_i точек из S^n, для которых $x_i\leqslant 0$, и множества V_i точек из S^n, для которых $x_i\geqslant 0$. В окрестности U_{n+1} или в V_{n+1} $x_1, \ldots, x_n$ являются допустимыми координатами.

В проективном пространстве $\mathcal{P}^n$, которое может быть определено как пространство прямых, проходящих через начало пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, функции $x_1, \ldots, x_{n+1}$ являются однородными координатами. Пространство $\mathcal{P}^n$ может быть покрыто $n+1$ окрестностями V_i, состоящими из точек пространства $\mathcal{P}^n$, для которых $x_i\neq 0$. В окрестности V_i функции $\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}$ являются допустимыми координатами.

Замкнутое подмножество V пространства $\mathbf{R}^n$ может быть снабжено структурой дифференцируемого многообразия, если оно удовлетворяет следующим условиям: для любой точки x из V в $\mathbf{R}^n$ существует окрестность U такая, что точки множества $U\cap V$ характеризуются уравнениями

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_N)=0 \qquad (\alpha=n+1, \ldots, N).$$

Здесь $f_{n+1}, \ldots, f_N$—определенные в U функции класса C^r, для которых ранг матрицы $\left\|\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right\|$ равен $N-n$. Множество V называют тогда *подмногообразием класса* C^r пространства $\mathbf{R}^N$ или *многообразием класса* C^r, *погруженным в пространство* $\mathbf{R}^N$.

В силу теоремы Уитни любое многообразие $\mathcal{V}$ размерности n и класса C^r гомеоморфно подмногообразию $\mathcal{V}'$ того же класса пространства $\mathbf{R}^{2n}$ при гомеоморфизме f, сохраняющем дифференцируемые структуры в следующем смысле: для любой точки x из V тогда и только тогда $g'\in\Phi_{f(x)}$, когда существует $g\in\Phi_x$ такое, что $g=g'f$ в окрестности U точки x.

Для вещественного проективного пространства $\mathcal{P}^n$ существует следующий гомеоморфизм $\mathcal{P}^n$ в $\mathbf{R}^{2n}$: каждой точке x из $\mathcal{P}^n$ с однородными координатами $x_0, \ldots, x_n$, связанными соотношением $x_0^2+\ldots+x_n^2=1$, ставим в соответствие точку из $\mathbf{R}^{2n}$ с координатами

$$X_r=\sum_{s+t=r} x_s x_t \quad (r=1, \ldots, 2n-1),\ X_0=x_0^2,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant r.$$

3. Проективная система, определенная дифференцируемой структурой

Пусть на многообразии $\mathcal{V}$ задана дифференцируемая структура Φ класса C^∞. Каждому открытому множеству U из $\mathcal{V}$ можно поставить в соответствие множество Φ_U функций, дифференцируемых в каждой точке из U. Эти множества образуют алгебру, так как сумма, разность и произведение двух функций, дифференцируемых в U, являются функциями, дифференцируемыми в U. Эта алгебра ассоциативна и коммутативна; единичным элементом в ней является функция, равная 1 на всем множестве U. Если V — открытое множество, содержащее множество U, то ограничение функции из Φ_V на U является функцией из Φ_U. Следовательно, алгебры Φ_U и операторы ограничения $\Phi_V \to \Phi_U$ образуют проективную систему алгебр. Пучок, присоединенный к этой проективной системе, называется *пучком ростков дифференцируемых функций* дифференцируемого многообразия $\mathscr{V}$.

Слой ψ_x в некоторой точке $x \in \mathscr{V}$ этого пучка получается из множества Φ_x отождествлением пар (U, f) и (U', f') из Φ_x, для которых существует такое открытое множество $U'' \subset U \cap U'$, что на нем $f = f'$.

Классы эквивалентности, индуцированные этим отношением, называются *ростками дифференцируемых функций* на $\mathscr{V}$.

Слои ψ_x являются алгебрами, так как если заданы две пары (U, f) и (U', f'), то их суммой и произведением по определению можно считать соответственно пары

$$(U \cap U', f + f') \text{ и } (U \cap U', ff'). \tag{3}$$

Их классы эквивалентности называются соответственно суммой и произведением ростков, определенных парами (U, f), (U', f'). Условимся обозначать через f_x росток, определенный парой (U, f) в точке $x \in U$.

Пары (U, f), для которых $f(x) = 0$, определяют подалгебру O_x алгебры ψ_x, обладающую тем свойством, что произведение элемента из O_x на элемент из ψ_x является элементом из O_x и разность двух элементов из O_x также является элементом из O_x. В символической форме это можно записать следующим образом:

$$O_x \psi_x \subset O_x, \quad O_x - O_x \subset O_x.$$

Это означает, что O_x есть идеал алгебры ψ_x. Ростки в точке x линейных комбинаций вида

$$f_1 g_1 + \ldots + f_p g_p,$$

где $(f_i)_x, (g_i)_x \in O_x$, образуют другой идеал алгебры ψ_x, который мы будем обозначать O_x^2. Это идеал, очевидно, включается в идеал O_x.

4. Векторы, касательные к дифференцируемому многообразию

Заметим, что алгебра ψ_x является векторным пространством над полем вещественных чисел, так как определено произведение вещественного числа на росток дифференцируемых функций: если

$(U, f) \in \Phi_x$ и r — вещественное число, то $(U, rf) \in \Phi_x$ и росток, определенный парой (U, rf), не меняется, если заменить пару (U, f) эквивалентной парой. Действительно, если $(U', f') \in \Phi_x$ и $f = f'$ на $U'' \subset U' \cap U$, то $(U', rf') \in \Phi_x$ и $rf = rf'$ на U''.

Идеалы O_x и O_x^2 являются подпространствами векторного пространства ψ_x. Векторное факторпространство O_x/O_x^2 определяется как множество классов $f_x + O_x^2$ $(f_x \in O_x)$, причем сумма двух классов и произведение вещественного числа на класс $f_x + O_x^2$ из O_x/O_x^2 заданы формулами

$$(f_x + O_x^2) + (f'_x + O_x^2) = (f_x + f'_x) + O_x^2,$$
$$r(f_x + O_x^2) = rf_x + O_x^2.$$

Векторное факторпространство $T_x = O_x/O_x^2$ называется *пространством ковариантных векторов, касательных в точке x к дифференцируемому многообразию $\mathscr{V}$.*

Пусть $(f_1, \ldots, f_n)$ — система допустимых координат в окрестности U точки x. Функции $f_1 - f_1(x), \ldots, f_n - f_n(x)$ образуют тогда систему допустимых координат в окрестности точки x и ростки, определенные парами $(U, f_i - f_i(x))$, принадлежат идеалу O_x, так как $(f_i - f_i(x))(x) = 0$. С другой стороны, для любой дифференцируемой в точке x функции f в некоторой окрестности V точки x, содержащейся в U, имеем соотношение вида

$$f = F(f_1, \ldots, f_n),$$

где F — функция класса C^∞ в V. Применив к функции F формулу Тейлора, получим

$$f - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\right)_x (f_i - f_i(x)) +$$
$$+ \sum_{i,\,j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial f_i\, \partial f_j}\right)_x + \varepsilon_{ij}\right](f_i - f_i(x))(f_j - f_j(x)),$$

где ε_{ij} — функции, обращающиеся в нуль в точке x. Отсюда следует, что для любой функции f, дифференцируемой в точке x, разность $f - f(x)$ определяет росток из идеала O_x, а функция $f - f(x) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\right)_x (f_i - f_i(x))$ определяет росток из O_x^2. Таким образом,

$$(f - f(x)) + O_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\right)_x (f_i - f_i(x)) + O_x^2. \tag{4}$$

Предположим, что $f(x) = 0$, $f_i(x) = 0$, и сопоставим каждому классу $f_x + O_x^2$ функцию

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\right)_x f_i. \tag{5}$$

Если f и f' определяют один и тот же класс в факторпространстве O_x/O_x^2, то $\bar{f}=\bar{f}'$. Это значит, что отображение $f\to\bar{f}$ индуцирует гомоморфизм h вещественного векторного пространства $T_x=O_x/O_x^2$ в вещественное векторное пространство, порожденное элементами f_i. Если для некоторой функции f функция $\bar{f}$ равна 0, т. е. $\frac{\partial F}{\partial f_i}=0$, то формула (4) показывает, что f определяет росток из O_x^2 и тогда $f_x+O_x^2=0\in T_x$. Отсюда следует, что h — мономорфизм векторного пространства T_x в векторное пространство, порожденное функциями $f_1, \ldots, f_n$. Гомоморфизм h является эпиморфизмом, так как любой элемент $\alpha_1 f_1+\ldots+\alpha_n f_n$ получается как образ оператора $f\to\bar{f}$, если положить, например, $f=\alpha_1 f_1+\ldots+\alpha_n f_n$. Мы показали таким образом, что пространство T_x векторов, касательных в точке x к дифференцируемому многообразию размерности n, имеет размерность n.

Из предыдущих рассуждений следует также, что если в некоторой окрестности точки x задана система координат $(f_1, \ldots, f_n)$, то любой ковариантный вектор v, касательный в x, определяется n вещественными величинами $a_i=(\partial F/\partial f_i)_x$, где $F(f_1, \ldots, f_n)$ — одна из функций, дифференцируемых в точке x, классом которой по mod O_x^2 является вектор v.

Контравариантным вектором, касательным в x к многообразию $\mathscr{V}$, является линейная вещественная форма φ^* на пространстве ковариантных векторов, касательных в той же точке x:

$$\varphi^*: T_x=O_x/O_x^2\to\mathbf{R}.$$

Если составить композицию формы φ^* с каноническим отображением

$$\rho_x: O_x\to T_x, \tag{6}$$

то получится линейная форма φ на векторном пространстве O_x ростков дифференцируемых функций, равных нулю в точке x. Эта линейная форма может быть распространена на алгебру ψ_x всех ростков дифференцируемых функций в x при помощи формулы

$$\varphi(f)=\varphi(f-f(x)). \tag{7}$$

Если заданы две функции f и g, дифференцируемые в точке x, то будем иметь

$$\varphi(fg)=\varphi(fg-f(x)g(x))=$$
$$=\varphi[f(x)(g-g(x))+g(x)(f-f(x))+(f-f(x))(g-g(x))].$$

Но φ — линейная форма на вещественном векторном пространстве O_x. Следовательно,

$$\varphi(fg)=f(x)\varphi(g-g(x))+g(x)\varphi(f-f(x)), \tag{8}$$

так как $(f-f(x))(g-g(x))$ есть элемент из O_x^2 и образ его при отображении φ будет равен нулю. В силу (7) формула (8) приобретает вид

$$\varphi(fg)=f(x)\,\varphi(g)+g(x)\,\varphi(f). \tag{9}$$

Следовательно, контравариантные векторы, касательные в точке x к многообразию $\mathscr{V}$, определяют в алгебре ψ_x ростков функций, дифференцируемых в x, линейный оператор φ, удовлетворяющий формуле (9) для любой пары ростков f и g. Такой оператор называется дифференцированием в алгебре ψ_x.

Рассмотрим систему допустимых координат $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в окрестности U точки x, таких, что $f_i(x)=0$. Мы показали, что $(f_1)_x+O_x^2, \ldots, (f_n)_x+O_x^2$ образуют базис векторного пространства T_x. Для контравариантного вектора φ, касательного в x к многообразию $\mathscr{V}$, имеем $\varphi(O_x^2)=0$, откуда следует, что этот вектор определяется заданием вещественных чисел $\varphi^i=\varphi(f_i)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Возьмем в многообразии $\mathscr{V}$ путь класса C^1, т. е. непрерывное отображение $g\colon I\to\mathscr{V}$. Такой путь может быть задан в каждой окрестности U, через которую он проходит, при помощи фомулы

$$f_i=g_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — допустимые координаты в данной окрестности U, а $g_i(t)$ — функции от t с непрерывными производными для тех значений t, при которых $g(t)\in U$.

Пусть $t_0\in I$ и x — точка многообразия $\mathscr{V}$, удовлетворяющая равенству $x=g(t_0)$. Если функция f дифференцируема в точке x на многообразии $\mathscr{V}$, то отображение fg является вещественной функцией с непрерывной производной в окрестности точки t_0. Равенство

$$\varphi(f)=\left(\frac{d}{dt}(fg)\right)_{t=t_0}$$

определяет линейную форму на векторном пространстве Φ_x.

Если f равна произведению функций f_1 и f_2, дифференцируемых в точке x, то

$$\varphi(f_1f_2)=\left(\frac{d}{dt}(f_1g\cdot f_2g)\right)_{t=t_0}=(f_1g)_{t=t_0}\left(\frac{d}{dt}(f_2g)\right)_{t=t_0}+$$
$$+(f_2g)_{t=t_0}\left(\frac{d}{dt}(f_1g)\right)_{t=t_0}=f_1(x)\,\varphi(f_2)+f_2(x)\,\varphi(f_1).$$

Если f_1 и f_2 равны нулю в точке x, т. е. если $(f_1f_2)_x\in O_x^2$, из последней формулы следует, что $\varphi(f_1f_2)=0$. Эта формула показывает, что линейная форма φ является контравариантным вектором.

Как мы видели ранее, ковариантный вектор v определяется в некоторой системе координат $f_1, \ldots, f_n$ частными производными $v_i = \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\right)$, вычисленными в точке x ростка функции $f = F(f_1, \ldots, f_n)$, для которой $v = f_x + O_x^2$, а контравариантный вектор φ определен вещественными числами $\varphi(f_i)$.

Рассмотрим в окрестности точки x другую систему допустимых координат $g_1, \ldots, g_n$, связанных с координатами f_i формулой вида (1). Тогда вектор v будет определяться величинами

$$v'_i = \left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_x = \left(\frac{\partial F}{\partial f_j}\right)_x \left(\frac{\partial f_j}{\partial g_i}\right)_x = \left(\frac{\partial f_j}{\partial g_i}\right) v_j, \tag{10}$$

а вектор φ — величинами

$$\varphi'^i = \varphi(g_i) = \varphi(g_i - g_i(x)) =$$

$$= \varphi\left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right)_x (f_j - f_j(x)) + \frac{\partial^2 g_i}{\partial f_j \partial f_k}(f_j - f_j(x))(f_k - f_k(x))\right].$$

Учитывая свойства оператора φ, получаем

$$\varphi'^i = \varphi(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right)_x \varphi(f_j) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j}\right)_x \varphi^j. \tag{11}$$

Компонентами векторов v и φ в системе координат $f_1, \ldots, f_n$ будем называть величины $\partial F/\partial f_i$ и $\varphi(f_i)$. Формулы (10), (11) дают закон преобразования этих компонент при замене системы координат.

5. Расслоенное пространство ковариантных касательных векторов

Мы показали, что с каждой точкой x n-мерного дифференцируемого многообразия $\mathcal{V}$ связано векторное пространство T_x размерности n. Покажем теперь, что можно определить дифференцируемую структуру многообразия класса C^∞ в объединении T векторных пространств T_x, соответствующих всем $x \in \mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{U}$ — локально конечное покрытие многообразия $\mathcal{V}$ открытыми множествами U, каждое из которых снабжено системой допустимых координат $f_1, \ldots, f_n$. Функции $f_1, \ldots, f_n$ являются допустимыми координатами в каждой точке множества U и ковариантный вектор v, касательный в точке $x \in U$, определяется n компонентами $v_1, \ldots, v_n$. Обозначим через p отображение множества $T = \bigcup_{x \in \mathcal{V}} T_x$ на пространство $\mathcal{V}$, заданное формулой

$$p(v) = x \quad \text{для} \quad v \in T_x.$$

Обозначим через T_U множество $p^{-1}(U)$, т. е. множество векторов, касательных к $\mathcal{V}$ в точках множества U. Элемент $v \in T_U$ определен координатами $f_1(p(v)), \ldots, f_n(p(v))$ проекции элемента v на U и компонентами $v_1, \ldots, v_n$. Множество T может быть покрыто множествами вида T_U, где U пробегает покрытие $\mathcal{U}$. Если в каждом множестве T_U ввести в качестве допустимых координат $f_i(p(v))$,

v_i $(i = 1, \ldots, n)$, то на T возникает структура дифференцируемого многообразия. Действительно, функции $f_i p$, v_i определяют взаимно однозначные соответствия между точками множества T_U и точками множества $U \times \mathbf{R}^n$, которое может быть отождествлено с открытым подмножеством T'_U числового пространства $\mathbf{R}^{2n}$. Взаимно однозначное соответствие $T_U \to T'_U$ позволяет перенести в T структуру дифференцируемого многообразия класса C^∞ подмножества $T'_U \subset \mathbf{R}^{2n}$.

Если два множества T_{U_1}, T_{U_2} имеют общую часть, то $T_{U_1} \cap T_{U_2} = T_{U_1 \cap U_2}$. Координаты $f_1, \ldots, f_n$ из U_1 и координаты $g_1, \ldots, g_n$ из U_2 связаны формулой (1), а компоненты v_i вектора v из $T_{U_1 \cap U_2}$ преобразуются по формуле (10). Формулы (1) и (10) показывают, что дифференцируемые структуры из T_{U_1} и T_{U_2} согласуются дифференцируемым образом на пересечении $T_{U_1} \cap T_{U_2}$. Поэтому многообразия T_U образуют покрытие одного и того же дифференцируемого многообразия $\mathcal{T}$ класса C^∞ размерности $2n$.

Покажем, что тройка $(\mathcal{T}, p, \mathcal{V})$ образует расслоенное пространство. Отображение p: $\mathcal{T} \to \mathcal{V}$ непрерывно, так как ограничение p на окрестность T_V выражается функцией

$$v = (f_i(p(v)),\ v_i) \to (f_i(p(v))),$$

определяющей непрерывное отображение $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$ для числовых пространств, с которыми могут быть отождествлены окрестности T_U и U.

Чтобы показать, что тройка $(\mathcal{T}, p, \mathcal{V})$ удовлетворяет условию подъема гомотопии, покажем, что в ней можно определить связность.

6. Определение связности в тройке $(\mathcal{T}, p, \mathcal{V})$

Вернемся к локально конечному покрытию $\mathcal{U}$ многообразия $\mathcal{V}$ множествами, снабженными допустимыми координатами $f_1, \ldots, f_n$. Пусть $\{\varphi_U\}$ — разбиение единицы на многообразии $\mathcal{V}$, соответствующее покрытию $\mathcal{U}$. В соответствии с § 8 можно предположить, что φ_U — функции класса C^∞.

Для каждой пары (U, v), состоящей из множества U и ковариантного вектора v, касательного к многообразию $\mathcal{V}$ в некоторой точке из U, определим вещественное положительное число

$$\| v \|_U = (v_1^2 + \ldots + v_n^2)^{1/2},$$

где v_i — компоненты вектора v в системе координат f_i, определенной в окрестности U. Число $\| v \|_U$ называется *нормой* ковариантного вектора v в U.

Теперь на пространстве $\mathcal{T}$ можно определить вещественную функцию $v \to \| v \|$, положив

$$\| v \| = \Big(\sum_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U(p(v)) \, \| v \|_U^2 \Big)^{1/2}. \tag{12}$$

Отображение $v \to \|v\|$ является вещественной дифференцируемой функцией класса C^∞ на многообразии $\mathscr{T}$. Действительно, рассмотрим точку $v \in \mathscr{T}$ и окрестности U точки $p(v)$.

Так как покрытие $\mathscr{U}$ локально конечно, то можно выбрать $\mathscr{U}$ так, что система $\{U_1, \ldots, U_m\}$ множеств $U_i \in \mathscr{U}$, для которых $U_i \cap U \neq \varnothing$, конечна. Единственными функциями $\varphi_{U'}$, ненулевыми на множестве U, являются функции φ_{U_i}, и, следовательно, в окрестности U

$$\|v\| = \Big(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{U_i}(p(v))\, \|v\|^2_{U_i}\Big)^{1/2}. \tag{13}$$

Обозначим через $g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)}$ допустимые координаты в окрестности U_i $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда

$$\|v\|^2_{U_i} = (v_1^{(i)})^2 + \ldots + (v_n^{(i)})^2,$$

где $v_\alpha^{(i)}$ — компоненты вектора v в координатах $g_\alpha^{(i)}$. Если обозначить через v_α компоненты вектора v в координатах $f_1, \ldots, f_n$, то из формулы (10) следует, что

$$v_\alpha^{(i)} = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial g_\alpha^{(i)}}\right)_{p(v)} v_\beta.$$

Поэтому формула (13) принимает вид

$$\|v\|^2 = \sum g_{(i)}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta, \tag{14}$$

где

$$g_{(i)}^{\alpha\beta} = \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial g_\rho^{(i)}}\right)_{\rho(v)} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial g_\rho^{(i)}}\right)_{\rho(v)}, \tag{15}$$

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{m} g_{(i)}^{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Формулы (14), (15), (16) показывают, что $v \to \|v\|$ — функция, дифференцируемая в каждой точке множества $\mathscr{T}_U$. Так как v — произвольная точка пространства $\mathscr{T}$, то $v \to \|v\|$ — функция, дифференцируемая на многообразии $\mathscr{T}$.

Из определения (12) этой функции следует, что $\|v\| = 0$ только тогда, когда v — нулевой вектор векторного пространства $T_{p(v)}$. Говорят, что формула (14) определяет риманову метрику на многообразии $\mathscr{V}$. Известно, что такая метрика позволяет ввести параллельный перенос ковариантных векторов при помощи формулы

$$\frac{dv_j}{dt} = \left\{ {i \atop jk} \right\} v_i^k \frac{d\varphi_j}{dt}, \tag{17}$$

в которой $\left\{ {i \atop ik} \right\}$ — символы Кристофеля второго рода, составленные при помощи метрики (14) и вычисленные вдоль дифференцируемого пути φ, определенного в некоторой окрестности $U \in \mathcal{U}$ формулами $f_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\varphi_i(t)$—функции класса C^∞.

Формулы (17) определяют функцию связности C', позволяющую поднимать в $\mathcal{T}$ дифференцируемые пути из $\mathcal{V}$. Действительно, если v_0 — вектор пространства $T_{\varphi(0)}$, т. е. $p(v_0) = \varphi(0)$, то формулы (17) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями v_i и заданными начальными значениями $v_i = (v_0)_i$. Интегрируя эту систему вдоль пути φ, получаем путь $\tilde{\varphi}$: $t \to v(t)$ в $\mathcal{T}$, начало которого лежит в v_0 и $p(v(t)) = \varphi(t)$ для любого t. Поэтому $\tilde{\varphi}$ является результатом поднятия пути φ, соответствующим точке v_0.

Рассуждения, аналогичные проведенным в гл. IV, показывают, что можно осуществить подъем в $\mathcal{T}$ гомотопии h из $\mathcal{V}$ при помощи связности C. Мы будем выражать это свойство, говоря, что тройка $(\mathcal{T}, p, \mathcal{V})$ является *дифференцируемым расслоенным многообразием.*

7. Альтернированные тензорные поля

Рассмотрим сечение s в расслоенном пространстве ковариантных касательных векторов $(\mathcal{T}, p, \mathcal{V})$ и окрестность U из $\mathcal{V}$, снабженную допустимыми координатами $f_1, \ldots, f_n$. Такое сечение называется *полем касательных векторов* на $\mathcal{V}$. Путь g: $I \to \mathcal{V}$ класса C^1 определяет в каждой точке $g(t)$ ковариантный вектор $\varphi(t)$. Можно вычислить значение линейной формы $\varphi(t)$ для вектора $v = s(g(t))$. Обозначим

$$p(t) = (\varphi(t))(s(g(t))).$$

Если путь g определен в окрестности U формулами

$$f_i = g_i(t),$$

а вектор $s(x)$ имеет компоненты $v_1(x), \ldots, v_n(x)$, то предыдущая формула записывается подробнее

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(g(t)) \frac{dg_i}{dt}.$$

Так как $p(t)$ — инвариант, то это выражение сохранится при любой системе координат. Будем называть выражение

$$(s, g) = \int_0^1 p(t)\, dt \tag{17'}$$

потоком сечения s вдоль пути g. При помощи формулы (17') можно определить гомоморфизм свободной абелевой группы, порожденной сингулярными кубами размерности 1 класса C^1 многообразия $\mathscr{V}$. Эти кубы порождают подгруппу $Q_1'(\mathscr{V})$ группы $Q_1(\mathscr{V})$ сингулярных кубических цепей пространства $\mathscr{V}$.

Кубические сингулярные цепи, образованные дифференцируемыми отображениями кубов I^q в многообразие $\mathscr{V}$, образуют подкомплекс Q' комплекса $Q=\{Q_q(\mathscr{V}), \partial\}$. Формула (17′) показывает, что поле s векторов, касательных к $\mathscr{V}$, определяет гомоморфизм группы $Q_1'(\mathscr{V})$ в аддитивную группу $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Следовательно, поле s можно интерпретировать как коцепь размерности 1 со значениями в $\mathbf{R}$. Если сечение s определено только над окрестностью U многообразия $\mathscr{V}$, то можно интерпретировать s как коцепь в группе дифференцируемых сингулярных цепей с образами в U.

Эти замечания приводят к проблеме определения коциклов той же природы для всего комплекса Q'. Это значит, что нужно определить на многообразии $\mathscr{V}$ объекты, которые являлись бы обобщением полей ковариантных векторов и ставили в соответствие каждому сингулярному кубу f: $I^q \to \mathscr{V}$ класса C^1 скаляр по формуле, обобщающей формулу (17′). На этом пути мы приходим к альтернированным тензорным полям на многообразии $\mathscr{V}$.

Рассмотрим открытое множество U на многообразии $\mathscr{V}$. Векторные поля, определенные в окрестности U, образуют вещественное векторное пространство, так как локальные сечения над открытым множеством U в вещественном векторном расслоенном пространстве $(\mathscr{T}, p, \mathscr{V})$ образуют вещественное векторное пространство. Обозначим через A_U внешнюю алгебру этого векторного пространства (гл. I, A, § 12). Элементы этой алгебры будут называться *альтернированными тензорными полями* на множестве U. Алгебра A_U образована линейными комбинациями с вещественными коэффициентами выражений

$$\alpha = s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_p, \tag{18}$$

где s_i $(i=1, \ldots, p)$ — векторные поля на U. Если в некоторой допустимой системе координат в окрестности точки x из U поле s_i имеет компоненты $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$, то поле α определено величинами

$$\alpha_{j_1, \ldots, j_p} = \sum \pm v_{r_1}^{(1)} \ldots v_{r_p}^{(p)},$$

где сумма распространена на все перестановки $(r_1, \ldots, r_p)$ индексов $(j_1, \ldots, j_p)$ и каждый член берется либо со знаком «$+$», либо со знаком «$-$» в зависимости от четности или нечетности перестановки. Величины $\alpha_{j_1 \ldots j_p}$ кососимметричны по индексам $j_1, \ldots, j_p$. Тем же свойством обладают компоненты любой линейной комбинации $c_1\alpha^{(1)} + \ldots + c_r\alpha^{(r)}$ выражений вида (18). Следовательно, альтернированные тензорные поля определены в каждой системе координат при помощи множества функций, имеющих p индексов и кососимметричных по этим индексам. Эти функции дифференцируемы в тех точках, в которых допустима рассматриваемая система координат. Мы будем называть их *компонентами* альтернированного тензорного поля.

Пусть α — альтернированное тензорное поле на открытом множестве U. Предположим, что α определено компонентами с p индексами. Если $q\colon I^p \to \mathscr{V}$ — сингулярный куб класса C^1 с образом в множестве U, то можно определить *поток поля α вдоль куба q* по формуле

$$(\alpha, q) = \int\limits_{I^p} \sum_{j_1, \ldots, j_p} \alpha_{j_1 \ldots j_p} \frac{\partial q_{j_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial q_{j_p}}{\partial t_p} dt_1 \ldots dt_p, \tag{19}$$

где q_j — функции от $t_1, \ldots, t_p$, определяющие в системе координат $\{f_1, \ldots, f_n\}$ куб q при помощи формулы

$$f_j = q_j(t_1, \ldots, t_p) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

а $\alpha_{j_1 \ldots j_p}$ — компоненты поля α в той же системе координат.

Интерпретируя отображение $q \to (\alpha, q)$ как коцепь, находим, что кограница этой коцепи ставит в соответствие сингулярному кубу q' размерности $p+1$ число

$$(\delta\alpha, q') = (\alpha, \partial q') = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [(\alpha, q\lambda_0^i) - (\alpha, q\lambda_1^i)].$$

Можно доказать, что последний член этого равенства равен интегралу

$$\int\limits_{I^{p+1}} \sum_{j_1, \ldots, j_p, j_{p+1}} \alpha'_{j_1 \ldots j_{p+1}} \frac{\partial q'_{j_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial q'_{j_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} dt_1 \ldots dt_{p+1},$$

где $\alpha'_{j_1 \ldots j_{p+1}}$ заданы формулами

$$\alpha'_{j_1 \ldots j_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \frac{\partial \alpha_{j_1 \ldots \hat{j}_i \ldots j_{p+1}}}{\partial f_{j_i}}. \tag{20}$$

Величины $\alpha'_{j_1 \ldots j_{p+1}}$ определяют тензорное поле с $p+1$ индексами. Таким образом, имеет место формула

$$(\alpha, \partial q') = (\delta\alpha, q'), \tag{20'}$$

в которой $\delta\alpha$ обозначает поле α', заданное формулой (20). Формула (20') называется *формулой Стокса*.

Оператор $\delta\colon \alpha \to \alpha' = \delta\alpha$, заданный формулой (20), называется *оператором внешнего дифференцирования* внешних тензорных полей. Этот оператор обладает следующими свойствами:

1. Если α — альтернированное тензорное поле с p индексами, то $\delta\alpha$ — альтернированное тензорное поле с $p+1$ индексами.

2. $\delta\delta\alpha = 0$ для любого поля α.

3. Если α определено в множестве U, гомеоморфном $\mathbf{R}^n$, и $\delta\alpha = 0$ на U, то на U существует альтернированное тензорное поле β, для которого $\alpha = \delta\beta$ (теорема Пуанкаре).

8. Теорема де Рама

Обозначим через T_U^p векторное пространство альтернированных тензорных полей порядка p (т. е. имеющих p индексов), определенных на открытом множестве U. Если $p = 0$, то под T_U^0 понимаем векторное пространство функций, дифференцируемых на многообразии $\mathscr{V}$. Если V — открытое множество, содержащее множество U, то можно определить гомоморфизм

$$^p\psi_U^V\colon\ T_V^p \to T_U^p,$$

поставив в соответствие каждому полю $\alpha \in T_V^p$ его ограничение на T_U^p. Векторные пространства T_U^p и гомоморфизмы $^p\psi_U^V$ определяют в этом случае проективную систему Ω^p. Для каждого натурального числа p и каждого открытого множества U оператор внешнего дифференцирования δ определяет гомоморфизм δ_U^p

$$\delta_U^p\colon\ T_U^p \to T_U^{p+1}.$$

Свойства 2, 3 показывают, что для каждого множества U, гомеоморфного $\mathbf{R}^n$, последовательность векторных пространств и гомоморфизмов

$$T_U^0 \xrightarrow{\delta_U^0} T_U^1 \xrightarrow{\delta_U^1} \ldots \to T_U^p \xrightarrow{\delta_U^p} T_U^{p+1} \ldots$$

точная. Вещественное векторное пространство $\mathbf{R}$ размерности 1 можно рассматривать как подпространство пространства T_U^0, если условиться обозначать через R_U множество функций, определенных и постоянных на множестве U. Тогда получим точную последовательность

$$R_U \to T_U^0 \xrightarrow{\delta_U^0} T_U^1 \xrightarrow{\delta_U^1} \ldots \to T_U^p \xrightarrow{\delta_U^p} T_U^{p+1} \to \ldots\ . \qquad (20'')$$

Заметим теперь, что теорема об изоморфизме, установленная в гл. III для групп гомологий топологического пространства $\mathscr{T}$ с коэффициентами в проективных системах некоторой точной последовательности, сохраняет силу, если предположить, что точность последовательности имеет место только для множеств U, образующих базу топологии $\mathscr{T}$. У многообразия существует база из открытых множеств, гомеоморфных $\mathbf{R}^n$, так как многообразие может быть покрыто шарами или открытыми кубами, которые гомеоморфны $\mathbf{R}^n$.

Векторные пространства R_U образуют постоянную проективную систему $\mathbf{R}$ на многообразии $\mathscr{V}$, и группы когомологий многообразия с коэффициентами в $\mathbf{R}$ называются *группами когомологий с вещественными коэффициентами* многообразия $\mathscr{V}$.

Если доказать, что группы когомологий размерности больше нуля проективных систем Ω^p равны нулю или что проективные системы Ω^p тонкие, то из этого будет следовать, что последовательность (20″) является резольвентой системы R, и можно будет применить результаты, полученные в гл. III, § 5. Покажем, что системы Ω^0, Ω^1, ... тонкие. Для этого покажем, что на многообразии $\mathscr{V}$ существует разбиение единицы, подчиненное некоторому локально конечному покрытию окрестностями, снабженными системами допустимых координат, причем это разбиение единицы состоит из функции φ_U класса C^∞. Это сводится к доказательству того, что для двух непересекающихся замкнутых множеств A и B в числовом пространстве $\mathbf{R}^n$ существует функция f класса C^∞ в $\mathbf{R}^n$, равная нулю на B и равная 1 на A. Если это будет доказано, можно использовать метод, приведенный в гл. I, В, § 17, и построить функции φ_U класса C^∞. Пусть $\mathscr{S}$ — локально конечное покрытие пространства $\mathbf{R}^n$ шарами настолько малого радиуса, что ни один из них не пересекает одновременно множество A и множество B. Обозначим через S один из шаров покрытия $\mathscr{S}$, а через c и ρ — центр и радиус этого шара. Введем теперь в $\mathbf{R}^n$ функцию

$$f_S(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(d(c,\,x)-\rho)^2}}, & \text{если } x\in S,\\ 0, & \text{если } x\in \mathbf{R}^n-S.\end{cases}$$

Функция $f_S(x)$ принадлежит классу C^∞, так как все ее производные стремятся к нулю, когда точка x стремится к границе шара S изнутри или извне.

Пусть $\mathscr{S}_1$ — множество шаров из $\mathscr{S}$, пересекающих множество A. Функция F, заданная формулой

$$F(x)=\sum_{S\in\mathscr{S}_1} f_S(x),$$

принадлежит классу C^∞ в $\mathbf{R}^n$, положительна на множестве A, а потому положительна на открытом множестве U, содержащем множество A, и равна нулю вне объединения U' шаров из $\mathscr{S}_1$. Следовательно, эта функция равна нулю на множестве B. Аналогично можно построить функцию G класса C^∞ в $\mathbf{R}^n$, положительную на замкнутом множестве $\mathbf{R}^n-U$ и равную нулю на множестве A. Положив

$$\Phi(x)=\frac{F(x)}{F(x)+G(x)},$$

получим функцию класса C^∞ в $\mathbf{R}^n$, равную 1 на множестве A и равную 0 на множестве B.

Рассуждения, проведенные в гл. III, § 6, показывают, что проективные системы Ω^0, Ω^1, ... тонкие. Поэтому последовательность (20″) является резольвентой постоянной системы $\mathbf{R}$. Применяя результаты гл. III, § 5, получаем следующую теорему:

Теорема де Рама. *Группа когомологий с вещественными коэффициентами размерности p дифференцируемого многообразия C^∞ изоморфна факторгруппе группы замкнутых альтернированных тензорных полей α размерности p (т. е. полей, для которых $\delta\alpha = 0$) по подгруппе точных полей (т. е. полей вида $\delta\beta$).*

9. Присоединение симплициального комплекса

Пусть $\mathscr{V}$ — дифференцируемое многообразие. Мы показали, что на $\mathscr{V}$ можно определить риманову метрику. Известно, что такая метрика определяет на $\mathscr{V}$ семейство *геодезических*, т. е. семейство кратчайших кривых. При этом каждая точка из $\mathscr{V}$ имеет открытую окрестность U, выпуклую в том смысле, что через любые две точки из U проходит единственная дуга геодезической, содержащаяся в U. Окрестности U гомеоморфны $\mathbf{R}^n$ и любое конечное пересечение окрестностей обладает тем же свойством. Таким образом, мы получаем регулярное покрытие $\mathscr{U}$ многообразия $\mathscr{V}$. Из рассуждений, проведенных в гл. II, следует, что группы гомологий пространства $\mathscr{V}$ изоморфны группам гомологий симплициального комплекса, присоединенного к этому регулярному покрытию. Если пространство $\mathscr{V}$ компактно, то можно считать, что покрытие $\mathscr{U}$ конечное и тогда каждая из групп гомологий компактного дифференцируемого многообразия имеет конечную систему образующих.

Аналогичные соображения можно высказать и по поводу групп когомологий.

10. Теорема Пуанкаре

Рассмотрим систему функций $\alpha = \{\alpha_{i_1 \ldots i_p}\}$, определенных в числовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Индексы $i_1, \ldots, i_p$ принимают значения, заключенные между 1 и n, причем $p \leqslant n$. Будем считать, что система $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$ кососимметрична по всем индексам.

Теорема Пуанкаре. *Пусть в $\mathbf{R}^n$ выполняется соотношение*

$$\sum_{s=1}^{p+1} (-1)^s \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_s \ldots i_{p+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0. \tag{21}$$

Тогда существует аналогичная система $\beta=(\beta_{j_1\ldots j_{p-1}})$, *для которой*

$$\alpha_{i_1\ldots i_p}=\sum_{t=1}^{p}(-1)^t\frac{\partial\beta_{i_1\ldots\hat{i}_t\ldots i_p}}{\partial x_{i_t}}. \tag{22}$$

Докажем эту теорему индукцией по n. Если $p=n$, то система α состоит из одной существенной компоненты $\alpha_{12\ldots n}$ и соотношение (21) всегда удовлетворяется. Соотношение (22) в этом случае сводится к одному уравнению

$$\alpha_{12\ldots n}=\sum_{t=1}^{n}(-1)^t\frac{\partial\beta_{1\ldots\hat{t}\ldots n}}{\partial x_t}, \tag{23}$$

допускающему частное решение

$$\beta_{1\ldots\hat{t}\ldots n}=0\ (t>1),\ \beta_{2\ldots n}=-\int\alpha_{12\ldots n}\,dx^1.$$

Следовательно, теорема справедлива для $n=p=1$. Предположим, что теорема справедлива для $n<N$, и рассмотрим систему функций $\alpha=\{\alpha_{i_1\ldots i_p}\}$, определенных в $\mathbf{R}^N$. Обозначим через α' подсистему системы α, образованную функциями $\alpha_{i_1\ldots i_p}$, у которых

$$i_1<N,\ \ldots\ i_p<N.$$

Предположение индукции и соотношения (21), записанные для $i_1, \ldots, i_{p+1}$, меньших N, показывают, что существует система $\beta'=\{\beta_{i_1\ldots i_{p-1}}\}$ функций, определенных в $\mathbf{R}^N$, с индексами i, меньшими чем N, для которой соотношения (22) удовлетворяются для $i_1, \ldots, i_p<N$. Так как функции системы α' дифференцируемы по x_N, то можно считать, что функции β' обладают тем же свойством.

Предположим теперь, что один из индексов $i_1, \ldots, i_p$, например i_p, равен N. Тогда можно записать соотношения (22) следующим образом:

$$\alpha_{i_1\ldots i_{p-1}N}=\sum_{t=1}^{p-1}(-1)^t\frac{\partial\beta_{i_1\ldots\hat{i}_t\ldots i_{p-1}N}}{\partial x_{i_t}}+(-1)^p\frac{\partial\beta_{i_1\ldots i_{p-1}}}{\partial x_N}. \tag{24}$$

Рассмотрим систему функций

$$\gamma_{i_1\ldots i_{p-1}}=\alpha_{i_1\ldots i_{p-1}N}-(-1)^p\frac{\partial\beta_{i_1\ldots i_{p-1}}}{\partial x_N}. \tag{25}$$

Для нее справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{p}(-1)^s\frac{\partial\gamma_{i_1\ldots\hat{i}_s\ldots i_p}}{\partial x_{i_s}}=\sum_{s=1}^{p}(-1)^s\frac{\partial\alpha_{i_1\ldots\hat{i}_s\ldots i_pN}}{\partial x_{i_s}}-$$

$$-(-1)^p\sum_{s=1}^{p}(-1)^s\frac{\partial^2\beta_{i_1\ldots\hat{i}_s\ldots i_p}}{\partial x_{i_s}\partial x_N}. \qquad (26)$$

Из формулы (21) следует, что первая сумма равна

$$-(-1)^{p+1}\frac{\partial\alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_N}=(-1)^p\frac{\partial\alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_N}.$$

Дифференцируя формулу (22) по x_N, находим, что первый член соотношения (26) равен нулю. Применяя вновь предположение индукции, находим, что уравнение (24) допускает в качестве решения функции $\beta_{i_1\ldots i_{p-2}N}$, которые вместе с функциями системы β' будут образовывать систему, удовлетворяющую уравнениям (22).

11. Формула Стокса

Пусть $Q^J=\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ — система n функций с непрерывными частными производными, определенных на кубе $J=J^{p+1}$, который задан в числовом пространстве R^{p+1} неравенствами

$$a_\rho\leqslant t_\rho\leqslant a_\rho+d \qquad (\rho=1, 2, \ldots, p+1). \qquad (27)$$

Пусть задана система $\alpha=\{\alpha_{i_1\ldots i_p}\}$ функций $\alpha_{i_1\ldots i_p}$, кососимметричных по индексам $i_1, \ldots, i_p$ и определенных в некоторой области Ω числового пространства R^n, содержащей образы точек $t\in J^{p+1}$ при отображении Q^J. Можно рассмотреть вещественные функции $F_\rho(t)$, определенные в J^{p+1} уравнениями

$$F_\rho(t)=\alpha_{i_1\ldots\hat{i}_\rho\ldots i_{p+1}}(Q^J(t))\frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1}\ldots\frac{\widehat{\partial Q_{i_\rho}}}{\partial t_\rho}\ldots\frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}}. \qquad (28)$$

Обозначим J_ρ^p куб, образованный точками $(t_1, \ldots, \hat{t}_p, \ldots, t_{p+1})$, где

$$a_\sigma\leqslant t_\sigma\leqslant a_\sigma+d \qquad (\sigma=1, \ldots, \hat{\rho}, \ldots, p+1).$$

При этих обозначениях имеем

$$(\alpha, \partial Q^J)=\sum_{\rho=1}^{p+1}(-1)^\rho\int_{J^p}[F_\rho(t_1, \ldots, t_\rho=0, \ldots, t_{p+1})-$$

$$-F_\rho(t_1, \ldots, t_\rho=1, \ldots, t_{p+1})]\,dt_1\ldots\widehat{dt_\rho}\ldots dt_{p+1}.$$

Применяя к каждому интегралу теорему о среднем значении, получаем

$$(\alpha, \partial Q^J) = d^p \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \Big[F_\rho ({}^\rho t_1, \ldots, {}^\rho t_{\rho-1}, 0, {}^\rho t_{\rho+1}, \ldots, {}^\rho t_{\rho_{p+1}}) - $$
$$ - F_\rho ({}^\rho t_1, \ldots, {}^\rho t_{\rho-1}, 1, {}^\rho t_{\rho+1}, \ldots, {}^\rho t_{p+1}) \Big]$$
$$[({}^\rho t_1, \ldots, {}^\rho t_{\rho-1}, {}^\rho t_{\rho+1}, \ldots, {}^\rho t_{p+1}) \in J_\rho^p].$$

Применив далее к большой скобке формулу Лагранжа для конечного приращения функции, получим соотношение вида

$$(\alpha, \partial Q^J) = d^{p+1} \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial t_\rho} \right)_{\tau_\rho}, \tag{29}$$

где частные производные вычислены в $p+1$ точках τ_p куба J^{p+1}.

Если обозначить через τ произвольную точку куба J^{p+1}, а через δ_1 наибольшее колебание функций $\frac{\partial F_\rho}{\partial t_\rho}$ в этом кубе, получим оценку

$$\left| (\alpha, \partial Q^J) - d^{p+1} \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial t_\rho} \right)_\tau \right| \leqslant d^{p+1} (p+1)\, \delta_1. \tag{30}$$

Для вычисления функций $\frac{\partial F_\rho}{\partial t_\rho}$ заметим, что из формулы (28) следует

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial t_\rho} = \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}}}{\partial Q_{i_\rho}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} +$$
$$+ \sum_{\sigma>\rho} \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\widehat{\partial Q_{i\rho}}}{\partial t_\rho} \ldots \frac{\partial^2 Q_{i_\sigma}}{\partial t_\rho \partial t_\sigma} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} +$$
$$+ \sum_{\sigma>\rho} \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial^2 Q_{i_\sigma}}{\partial t_\rho \partial t_\sigma} \ldots \frac{\widehat{\partial Q_{i\rho}}}{\partial t_\rho} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}}. \tag{30'}$$

Для трех фиксированных индексов i, ρ, σ $(\rho < \sigma)$ коэффициент при второй производной $\partial^2 Q_i / \partial t_\rho \partial t_\sigma$ в сумме, стоящей в правой части соотношения (30′), равен

$$[(-1)^{\rho+(\sigma-2)} + (-1)^{\sigma+(\rho-1)}]\, \alpha_{ij_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots \hat{i}_\sigma \ldots j_{p+1}} \times$$
$$\times \frac{\partial Q_{j_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\widehat{\partial Q_{j_\rho}}}{\partial t_\rho} \ldots \frac{\widehat{\partial Q_{j_\sigma}}}{\partial t_\sigma} \ldots \frac{\partial Q_{j_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} = 0.$$

Поэтому формула (30) может быть переписана следующим образом:

$$\left| (\alpha, \partial Q^J) - d^{p+1} \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}}}{\partial Q_{i_\rho}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant (p+1)\, d^{p+1} \delta_1. \qquad (31)$$

С другой стороны,

$$(\delta\alpha, Q^J) =$$
$$= \int\limits_{J^{p+1}} \left[\sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}}}{\partial Q_{i_\rho}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}} \right] dt_1 \ldots dt_{p+1},$$

и, применяя теорему о среднем, получаем равенство

$$(\delta\alpha, Q^J) = d^{p+1} \sum_{\rho=1}^{p+1} (-1)^\rho \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \hat{i}_\rho \ldots i_{p+1}}}{\partial Q_{i_\rho}} \frac{\partial Q_{i_1}}{\partial t_1} \ldots \frac{\partial Q_{i_{p+1}}}{\partial t_{p+1}}, \qquad (32)$$

где частные производные вычислены в некоторой точке τ_0 куба J^{p+1}. Положив в формуле (31) $\tau = \tau_0$ и сравнив с (32), получим

$$|(\alpha, \partial Q^J) - (\delta\alpha, Q^J)| \leqslant (p+1)\, d^{p+1} \delta_1. \qquad (33)$$

Рассмотрим теперь случай, когда куб J^{p+1} является единичным кубом $I = I^{p+1}$ из $\mathbf{R}^{p+1}$. Разобьем этот куб на n^{p+1} подкубов $J_\lambda^{p+1} = J_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n^{p+1}$) с длинами ребер $1/n$. Воспользуемся свойством аддитивности кратного интеграла. Поскольку в сумме

$$\sum_{\lambda=1}^{n^{p+1}} (\alpha, \partial Q^{J_\lambda})$$

интегралы порядка p, распространенные на грани кубов J_λ^{p+1}, внутренние по отношению к кубу I^{p+1}, попарно уничтожаются, получаем

$$(\delta\alpha, Q^I) = \sum_{\lambda=1}^{n^{p+1}} (\delta\alpha, Q^{J_\lambda}),$$

$$(\alpha, \partial Q^I) = \sum_{\lambda=1}^{n^{p+1}} (\alpha, \partial Q^{J_\lambda}).$$

Применим к каждому кубу J^{p+1} формулу (33). Мы имеем n^{p+1} кубов J^{p+1} и $d = n^{-1}$, поэтому

$$|(\delta\alpha, Q^I) - (\alpha, \partial Q^I)| \leqslant (p+1)\, \delta_n;$$

здесь мы обозначим через δ_n максимум колебаний функций $\partial F_\rho/\partial t_\rho$ в каждом из кубов J_λ^{p+1}. Так как эти функции непрерывны, то для достаточно большого n можно сделать δ_n сколь угодно малым. Мы получаем формулу Стокса в следующем виде:

$$(\delta\alpha,\ Q) = (\alpha,\ \partial Q). \tag{34}$$

Система $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ может быть интерпретирована как сингулярный куб дифференцируемого многообразия $\mathscr{V}$, образ которого лежит в окрестности U, снабженной координатами $f_1, \ldots, f_n$, если рассмотреть отображение

$$t \longrightarrow x = (f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t)), \quad f_i(t) = Q_i(t).$$

Отображения $Q \longrightarrow (\delta\alpha,\ Q)$, $q \longrightarrow (\alpha,\ q)$ могут быть распространены по линейности на сингулярные кубические цепи многообразия $\mathscr{V}$, т. е. на конечные суммы вида

$$C = \sum_i m_i Q_i, \quad c = \sum_j n_j q_j,$$

где Q_i и q_j — сингулярные кубы размерностей $p+1$ и p соответственно. Мы получим два коцикла:

$$C \longrightarrow (\delta\alpha,\ C) = \sum_i m_i (\delta\alpha,\ Q_i),$$

$$c \longrightarrow \ (\alpha,\ \ c) = \sum_j n_j (\alpha,\ q_j).$$

Формула Стокса может быть записана теперь в общем виде:

$$(\delta\alpha, C) = (\alpha,\ c),$$

12. Главные расслоенные многообразия со слоем T^1

Окружность S^1 может быть снабжена структурой топологической абелевой группы, если отождествить S^1 с множеством комплексных чисел z, по модулю равных 1, и в качестве группового закона композиции принять умножение комплексных чисел. Обозначим группу, полученную таким образом, через T^1. Эту группу можно рассматривать как факторгруппу аддитивной группы $\mathbf{R}$ вещественных чисел по подгруппе $\mathbf{Z}$ целых чисел, причем канонический гомоморфизм φ: $\mathbf{R} \longrightarrow T^1$ задается формулой (см. гл. IV, § 4)

$$\varphi(x) = e^{2\pi i x}. \tag{35}$$

Рассмотрим дифференцируемое многообразие X и точку $x_0 \in X$. Пусть $\Omega' \subset \Omega_{X,\,x_0}$ — группоид, состоящий из спрямляемых и замкнутых в x_0 путей пространства X. Будем говорить, что представление ρ: $\Omega' \longrightarrow T^1$ дифференцируемо, если для любой координатной окрестности U, содержащей x_0 и гомеоморфной $\mathbf{R}^n$, существует определенная на U внешняя форма ω_U первой степени, такая, что для любого пути $f \in \Omega'$, образ которого лежит в U

$$\rho(f) = e^{2\pi i \int_f \omega_U}.$$

Пример дифференцируемого представления можно получить, если взять форму ω первой степени, определенную на всем многообразии X, и определить представление ρ формулой

$$\rho(f) = e^{2\pi i \int_f \omega}.$$

Представление такого типа будем называть *тривиальным*.

Пользуясь методом, приведенным в гл. IV, § 4, присоединим к каждому дифференцируемому представлению ρ главное расслоенное пространство (B, π, X, T^1) с базой X и структурной группой T^1. Мы видели, что B является пространством представления без неподвижных точек, орбитами которого являются слои.

Рассмотрим покрытие $\mathcal{U}$ пространства X окрестностями U, гомеоморфными пространству $\mathbf{R}^n$ $(n = \dim X)$, при дифференцируемом гомеоморфизме $\varphi_U\colon \mathbf{R}^n \to U$. Расширяя каждую окрестность U, можно добиться, чтобы она содержала точку x_0 и чтобы $x_0 = \varphi_U(0)$. Сопоставим каждой точке $x \in U$ $(x \neq x_0)$ путь $g_x^U = \varphi_U \circ f_x$, где f_x — путь из $\mathbf{R}^n$, заданный формулой

$$f_x(t) = t\varphi_U^{-1}(x).$$

Обозначим через $\mathcal{B}'$ множество таких путей для всех $x \in U$ и всех $U \in \mathcal{U}$.

Начало каждого пути из $\mathcal{B}'$ лежит в точке x_0, а конец — в некоторой точке окрестности U. Из рассуждений, проведенных в гл. IV, B, § 4, следует, что пространство B может быть построено следующим образом. Нужно взять топологическую сумму Σ пространств $U \times T^1$, когда U пробегает множество $\mathcal{U}$, и ввести в ней такое отношение эквивалентности: пары (x, z) и (x', z'), где $x \in U$, $x' \in V$ и $z, z' \in T^1$, эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$x' = x, \quad z' = \rho(g_x^V * \hat{g}_x^U)z.$$

Пространство B является факторпространством, состоящим из классов, определенных этим отношением эквивалентности в Σ.

Каждое множество $U \times T'$ можно рассматривать как дифференцируемое многообразие с координатами $(x_U^1, \ldots, x_U^n, z)$, где x_U^i — координаты, введенные в окрестности U. Каноническое отображение $\varphi\colon \Sigma \to B$ взаимно однозначно на каждой из компонент $U \times T^1$, и можно перенести в $\varphi(U \times T^1)$ дифференцируемую структуру множеств $U \times T^1$, принимая за координаты точки $y = \varphi(\eta)$ $(\eta \in U \times T^1)$ координаты $(x_U^1, \ldots, x_U^n, z)$ точки η.

Если одна и та же точка $y \in B$ является проекцией двух точек $\eta \in U \times T^1$, $\eta' \in V \times T^1$ и

$$\eta = (x_U^1, \ldots, x_U^n, z), \quad \eta' = (x_V^1, \ldots, x_V^n, z'),$$

то координаты точки y, соответствующие окрестностям $\varphi(U \times T^1)$ и $\varphi(V \times T^1)$, связаны соотношениями

$$x_V^i = f_{UV}^i(x_U^i, \ldots, x_U^n), \quad z' = h_{UV}(x)\, z,$$

где функция $h_{UV}\colon U \cap V \to T^1$ задана формулой

$$h_{UV}(x) = \rho(g_x^V * \hat{g}_x^U).$$

Если функция h_{UV} дифференцируема, то пространство B допускает структуру дифференцируемого многообразия, в котором множества $\varphi(U \times T^1)$ $(U \in \mathcal{U})$ являются координатными окрестностями. Пусть x_1 — фиксированная точка, выбранная в той же связной компоненте множества $U \cap V$, в которой лежит точка x. Обозначим через ω_U, ω_V формы, соответствующие окрестностям U и V, через xx_1 — путь, соединяющий x с x_1 и содержащийся в $U \cap V$, а через x_1x — обратный путь. Тогда из предположения дифференцируемости представления ρ следуют соотношения

$$\begin{aligned} h_{UV}(x) &= \rho(g_x^V * \hat{g}_x^U) = \\ &= \rho(g_x^V * xx_1 * \hat{g}_{x_1}^V)\, \rho(g_{x_1}^V * x_1x * \hat{g}_x^U) = \\ &= \rho(g_x^V * xx_1 * \hat{g}_{x_1}^V)\, \rho(g_{x_1}^V * \hat{g}_{x_1}^U)\, \rho(g_{x_1}^U * x_1x * \hat{g}_x^U) = \\ &= \int\limits_{\varkappa_V} \omega_V \Bigl(\int\limits_{\varkappa_U} \omega_U\Bigr)^{-1} \rho(g_{x_1}^V * \hat{g}_{x_1}^U), \end{aligned}$$

где

$$\varkappa_V = g_x^V * xx_1 * \hat{g}_{x_1}^V, \quad \varkappa_U = g_x^U * xx_1 * \hat{g}_{x_1}^U.$$

Так как пути $\varkappa_V$ и $\varkappa_U$ зависят дифференцируемым образом от точки x, то каждый интеграл является дифференцируемой функцией этих координат.

Таким образом, пространство B действительно допускает дифференцируемую структуру. Заметим также, что проекция $\pi\colon B \to X$ задана в окрестности $\varphi(U \times T^1)$ формулой

$$\pi(x_U^1, \ldots, x_U^n, z) = (x_U^1, \ldots, x_U^n),$$

следовательно, она является дифференцируемым отображением. Мы получили следующую теорему:

Теорема А. *В расслоенном пространстве (B, π, X, T^1), присоединенном к дифференцируемому представлению $\rho\colon \Omega' \to T^1$, полное пространство B допускает дифференцируемую структуру, относительно которой π — дифференцируемое отображение.*

Действие группы T^1 в пространстве B задается в окрестности $\varphi(U \times T^1)$ формулой

$$\alpha[(x_U^1, \ldots, x_U^n, z), \zeta] = (x_U^1, \ldots, x_U^n, \zeta, z) \quad (\zeta \in T^1).$$

Предположим обратное, т. е. что в дифференцируемом многообразии B задано дифференцируемое представление группы T^1 без неподвижных точек так, что факторпространство $X = B/T^1$ допускает структуру дифференцируемого многообразия, по отношению к которой каноническое отображение π: $B \to X$ дифференцируемо.

В пространстве B можно построить риманову метрику, инвариантную относительно действия группы T_1^1, при помощи формулы

$$ds^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{T^1} R(\zeta^{-1})^* (ds_0^2) \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^1 R(e^{-2\pi i x})^* (ds_0^2)\, dx,$$

где через ds_0^2 мы обозначили произвольную риманову метрику пространства B, а через $R(\zeta^{-1})^* ds_0^2$ — метрику, полученную в результате преобразования

$$R(\zeta^{-1}):\ y \to \alpha(y, \zeta^{-1}) \quad (y \in B, \zeta \in T^1).$$

Легко проверить, что для спрямляемого пути f в многообразии X и точки $y_0 \in B$ такой, что $\pi(y_0) = f(0)$, в B существует единственный путь g, имеющий начало в точке y_0 и ортогональный (в смысле инвариантной метрики ds^2) к орбитам, которые он пересекает. Таким образом, мы получаем закон подъема путей из X в B, и можно проверить, что этот подъем определяет в тройке (B, π, X) инфинитезимальную связность. Можно показать, что если для некоторого замкнутого пути $f \in \Omega'$ из X задать два подъема g и g', то для одного и того же элемента $\zeta \in T^1$ получим

$$g(1) = R(\zeta)\, g(0), \quad g'(1) = R(\zeta)\, g(0).$$

Сопоставив пути f элемент

$$\rho(f) = \zeta \in T^1,$$

получим дифференцируемое представление группоида Ω' на группе T^1. Можно показать далее, что для расслоенного пространства (B', π', X), присоединенного к представлениям ρ, существует дифференцируемый гомеоморфизм h: $B \to B'$, который перестановочен с проекциями π и π', т. е.

$$\pi' h = \pi,$$

и перестановочен с преобразованиями группы T^1 в B и B', точнее

$$h \circ R(\zeta) = R'(\zeta) \circ h \qquad (\zeta \in T^1).$$

Два расслоенных пространства (B, π, X) и (B^1, π^1, X), для которых существует такое отображение h, называются *эквивалентными*.

Важной проблемой алгебраической топологии является проблема классификации расслоенных пространств с заданными базой и слоем. Эта классификация проводится присоединением к каждому классу эквивалентности расслоенных пространств системы топологических инвариантов.

В случае когда слоем является группа T^1, мы видели, что расслоения (B, π, X) определяются дифференцируемыми представлениями $\rho\colon \Omega' \longrightarrow T^1$. Выбирая покрытие $\mathcal{U}$ многообразия X координатными окрестностями, гомеоморфными $\mathbf{R}^n$, мы показали, что каждому такому расслоению соответствует система дифференцируемых функций

$$h_{UV}\colon U \cap V \longrightarrow T^1.$$

Легко проверить, что эти функции в каждой точке x, общей трем окрестностям U, V и W, удовлетворяют соотношению

$$h_{UV}(x)\, h_{VW}(x) = h_{UW}(x).$$

Это соотношение показывает, что система отображений h_{UV} образует коцикл размерности 1 в индуктивной системе $\mathcal{D}$ ростков дифференцируемых отображений многообразия X в многообразие T^1. Можно показать, что класс когомологий этого коцикла не зависит от метода построения, который привел к отображениям h_{UV}, и не меняется, если заменить тройку (B, π, X) другой эквивалентной тройкой. Непосредственно убеждаемся также, что этот коцикл дает в индуктивном пределе $H^1(X, \mathcal{D})$ элемент, не зависящий от покрытия $\mathcal{U}$.

Предыдущие рассуждения показывают, что коциклу $\{h_{UV}\}$, построенному для покрытия $\mathcal{U}$ многообразия X, соответствует расслоенное пространство (B, π, X), и класс эквивалентности этого расслоения зависит только от класса когомологий коцикла $\{h_{UV}\}$ в группе $H^1(X, \mathcal{D})$.

Отсюда следует, что множество классов эквивалентности главных расслоений с базой X и группой T^1 находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H^1(X, \mathcal{D})$.

С другой стороны, имеем теорему:

Теорема В. *Группа $H^1(X, \mathcal{D})$ изоморфна группе когомологий с целыми коэффициентами $H^2(X)$.*

В самом деле, предложение, сформулированное в конце § 4 (гл. IV, В), показывает, что, ограничиваясь покрытиями $\mathcal{U}$ многообразия X, образованными окрестностями, гомеоморфными пространству $\mathbf{R}^n$, мы получаем точную последовательность проективных систем

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{D} \longrightarrow 0,$$

где $\mathscr{E}$ — система ростков дифференцируемых функций на X, $\mathscr{Z}$ — постоянная проективная система со значениями в группе $\mathbf{Z}$, а β — отображение, заданное формулой

$$(f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}) \longrightarrow (\beta(f)\colon x \longrightarrow e^{2\pi i f(x)}) \qquad (x \in U).$$

Так как когомологическая последовательность для этой последовательности точная и система $\mathscr{E}$ тонкая, имеет место изоморфизм

$$H^1(X, \mathscr{D}) \approx H^2(X, \mathscr{Z}) = H^2(X).$$

Из сравнения последних двух теорем вытекает следующая теорема.

Теорема С. *Классы эквивалентности главных расслоенных пространств с базой X и группой T^1 образуют множество $\mathscr{E}(X, T^1)$, находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством $H^2(X)$.*

Пусть заданы два коцикла $\{h_{UV}\}$ и $\{h'_{UV}\}$, тогда функции $h''_{UV} = h_{UV}h'_{UV}$ образуют новый коцикл. Если заданные коциклы соответствуют классам эквивалентности ξ, $\xi' \in \mathscr{E}(X, T^1)$, то класс эквивалентности, содержащий расслоение, определенное коциклом $\{h''_{UV}\}$, обозначается $\xi \otimes \xi'$ и называется *тензорным произведением классов ξ и ξ'*. Множество $\mathscr{E}(X, T^1)$, снабженное этой операцией, становится абелевой группой, изоморфной группе $H^2(X)$.

Заметим теперь, что любой целый коцикл пространства X можно считать коциклом с вещественными коэффициентами. Два когомологических целых коцикла находятся в одном классе вещественных когомологий. Следовательно, для любого n имеет место гомоморфизм

$$\varphi^n\colon H^n(X) \longrightarrow H^n(X, \mathbf{R}) \approx \operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbf{R}).$$

Применив теорему де Рама, получим, что существует гомоморфизм группы $H^n(X)$ в группу когомологий внешних форм порядка n. Этот гомоморфизм, вообще говоря, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

В частности, при $n = 2$ каждому классу когомологий из $H^2(X)$ будет соответствовать класс когомологий замкнутых внешних форм порядка 2.

Применяя последнюю теорему, получаем, что существует гомоморфизм группы $\mathscr{E}(X, T^1)$ в аддитивную группу классов когомологий внешних форм порядка 2.

Этот класс может быть получен непосредственно, если исходить из дифференцируемого представления $\rho\colon \Omega' \longrightarrow T^1$, дающего расслоенное пространство (B, π, T) некоторого заданного класса $\xi \in \mathscr{E}(X, T^1)$.

Действительно, для каждой окрестности U, гомеоморфной $\mathbf{R}^n$, имеем по предположению форму ω_U порядка 1, такую, что

$$\rho(f) = e^{2\pi i \int\limits_f \omega_U}$$

для любого пути f, содержащегося в U. Если f является границей дифференцируемой цепи σ размерности 2, то по формуле Стокса получаем

$$\rho(f) = e^{2\pi i \int\limits_\sigma d\omega_U}.$$

Из этой формулы вытекает, что на пересечении двух окрестностей U и V

$$d\omega_U = d\omega_V,$$

так как для любого достаточно малого двумерного дифференцируемого симплекса σ из $U \cap V$

$$\int\limits_\sigma d\omega_U = \int\limits_\sigma d\omega_V.$$

Это означает, что существует внешняя форма ω порядка 2, определенная на всем многообразии X и удовлетворяющая в каждой окрестности U соотношению

$$\omega = d\omega_U.$$

Поэтому $d\omega = 0$, т. е. ω — замкнутая форма. Класс когомологий формы ω и является искомым классом.

Если X — двумерное ориентируемое многообразие, снабженное римановой метрикой, то подпространство B расслоенного пространства, касательного к X, образованное векторами единичной длины, является полным пространством некоторого главного расслоения над X. Действительно, можно отождествить слои подпространства B с окружностями радиуса 1, лежащими в касательных плоскостях, и определить представление ρ группы T^1 в каждом слое, сопоставив элементу $\zeta \in T^1$ вращение на угол $\arg \zeta$. Форма ω, которая соответствует расслоению, определенному представлением ρ, задана связностью Леви-Чевита и равна $\frac{1}{2\pi} K\chi$, где K — гауссова кривизна, а χ — элемент площади на римановом многообразии X. Если X — компактная поверхность рода p, то получаем формулу Гаусса — Бонне

$$\int\limits_X \omega = 2 - 2p,$$

определяющую значение коцикла ω на цикле X.

Другой пример расслоения со структурной группой T^1 можно получить, взяв в комплексном числовом пространстве $\mathbf{C}^n$ сферу S^{2n-1}, заданную уравнением $z^1\bar{z}^1+\ldots+z^n\bar{z}^n=1$, и представление группы T^1 в S^{2n-1}, заданное формулой

$$\alpha[\zeta, (z_1, \ldots, z_n)]=(\zeta z_1, \ldots, \zeta z_n).$$

Тогда S^{2n-1} будет полным пространством B некоторого расслоения, базой которого является комплексное проективное пространство $P(n-1, \mathbf{C})$, т. е. пространство, образованное комплексными прямыми пространства $\mathbf{C}^n$, проходящими через начало.

В случае $n=2$ получаем пространство $P(1, \mathbf{C})$, т. е. комплексную проективную прямую, которая отождествляется с римановой сферой S^2. Над S^2 получаем расслоение, слоем которого является окружность S^1, а полным пространством — сфера S^3.

Из точной последовательности гомотопий этого расслоения

$$\ldots \to \pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to \ldots$$

и из соотношений $\pi_2(S^1)=\pi_3(S^1)=0$ следует изоморфизм

$$\pi_3(S^2) \approx \pi_3(S^3).$$

Из теоремы Гуревича следует, что $\pi_n(S^n) \approx \mathbf{Z}$, и поэтому $\pi_3(S^2) \approx \mathbf{Z}$. Мы получили пример, указывающий, что группы гомотопий некоторого многообразия, вообще говоря, нетривиальны при размерностях, превышающих размерность многообразия.

Предположим, что X — симплициальный полиэдр, и рассмотрим изоморфизм i: $\mathscr{E}(X, T^1) \approx H^2(X)$, указанный в последней теореме. Этот изоморфизм можно описать также следующим образом. Пусть ρ: $\Omega' \to T^1$ — дифференцируемое представление, определяющее расслоение (B, π, X) из класса эквивалентных расслоений $\xi \in \mathscr{E}(X, T^1)$. Если u — коцикл из класса когомологий $i(\xi) \in H^2(X)$, а $\bar{f}(\gamma)$ $(f \in Z_2(X))$ — цикл вида, указанного в гл. IV, A, § 7, то можно определить непрерывное отображение $I \to T^1$, поставив в соответствие каждому $t \in I$ путь $h_t(s)=f(s, t)$ и затем элемент $\rho(h_t) \in T^1$. Отображение $t \to \rho(h_t)$, полученное таким образом, является замкнутым путем λ в T^1, так как $f \in Z_2(X)$, и, следовательно, пути h_0 и h_1 порождаются одними и теми же замкнутыми путями $g_1, \ldots, g_p$ из X, взятыми в двух различных порядках; с другой стороны, ρ является представлением группоида Ω' в абелевой группе. Получаем формулу

$$(i(\xi))(\bar{f}(\gamma))=r(\lambda),$$

где r — отображение, которое в гл. IV, B, § 4, обозначено ρ: $T \to R$ и определено для пространства $X=S^1=T^1$.

Можно предположить, что образы путей h_0 и h_1 содержатся в остове X^1 полиэдра X. Для пространства X^1 имеем $H^2(X^1)=0$. Следовательно, группа $\mathscr{E}(X^1, T^1)$ содержит единственный элемент — класс эквивалентности тривиальных расслоений над X^1. Отсюда следует, в частности, что расслоение (B^1, π_1, X^1), где $B^1 = \pi^{-1}(X^1)$ и $\pi_1 = \pi \mid B_1$, тривиально, т. е. существует дифференцируемый гомеоморфизм

$$w\colon B^1 \to X^1 \times T^1$$

такой, что для $y \in B^1$ выполняется соотношение $w(y) = (\pi(y), s(y))$.

Рассмотрим в X^1 симплекс l размерности 1. Для пути $\tilde{l}$ из B^1 с проекцией l будем обозначать через $p(l)$ отношение $\frac{s(\tilde{l}(1))}{s(\tilde{l}(0))}$. Можно считать, что путь l достаточно мал. Тогда аргумент комплексного числа $p(l)$ будет содержаться в открытом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Положим

$$c(l) = \frac{1}{2\pi} \arg p(\lambda) \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Мы получаем вполне определенную коцепь c размерности 1 пространства X с вещественными коэффициентами.

Можно установить справедливость формулы

$$r(\lambda) - \int\limits_{\bar{f}(\gamma)} \omega = (\delta c)(\bar{f}(\gamma)),$$

из которой вытекает, что коциклы

$$\bar{f}(\gamma) \to r(\lambda), \quad \bar{f}(\gamma) \to \int\limits_{\bar{f}(\gamma)} \omega$$

принадлежат одному и тому же классу двумерных вещественных когомологий многообразия X. Этот результат является фундаментальным результатом, связывающим две важные теории — теорию препятствий и теорию инфинитезимальных связностей. В более общей форме он был установлен А. Вейлем.

Отметим, что класс когомологий коцикла $\bar{f}(\gamma) \to r(\lambda)$ или вещественной формы ω называется целым, соответственно вещественным характеристическим классом эквивалентных расслоений из класса $\xi \in \mathscr{E}(X, T^1)$.

Для дополнений отсылаем читателя к книге Чжэнь Шэн-шэня «Комплексные многообразия» (ИЛ, М., 1961).

13. Доказательство утверждений предыдущего параграфа

Покажем, во-первых, что к дифференцируемым представлениям $\rho\colon \Omega' \to T^1$ применимы рассуждения, проведенные в гл. IV, § 4, и что они приводят к главным расслоениям с базой X и структурной группой T^1. Для этого введем в множестве Λ

спрямляемых цепей $f\colon I \to X$ с началом в точке x_0 псевдорасстояние d следующим образом: для двух элементов f_1 и f_2 рассмотрим семейство сингулярных симплексов $\sigma\colon \Delta^2 \to X$ с конечной площадью поверхности $\|\sigma\|$, для которых

$$\sigma((1-t)A_0+tA_1)=f_1(t),$$
$$\sigma((1-t)A_0+tA_2)=f_2(t).$$

В римановой метрике ds^2 пространства X путь $t \to \sigma((1-t)A_1+tA_2)$ имеет конечную длину l_σ и функция

$$d(f_1, f_2)=\inf_{\sigma}\{\|\sigma\|+l_\sigma\}$$

является псевдорасстоянием в множестве Λ.

Рассмотрим теперь возрастающую последовательность открытых множеств D_i из многообразия X, имеющих компактные замыкания и покрывающих многообразие X, т. е. таких, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i=X$. Для каждого индекса i существует число $\varepsilon_i>0$ такое, что любые две точки x_1, $x_2 \in D_i$ могут быть соединены единственной кратчайшей геодезической дугой длины $\leqslant \varepsilon_i$. Рассмотрим множество T отображений $f\colon [0, \infty) \to X$, постоянных в бесконечности и удовлетворяющих условию $f(0)=x_0$. Обозначим через T' подмножество множества T, состоящее из элементов f, для которых из

$$f([t_{j-1}, t_j]) \subset D_i, \quad t', t'' \in [t_{j-1}, t_j]$$

следует неравенство

$$d(f(t'), f(t''))<\varepsilon_i.$$

Введем в T' псевдорасстояние при помощи отображения

$$R\colon T' \to \Lambda.$$

Оно сопоставляет каждому элементу $f \in T'$ спрямляемый путь $\bar{f}$ из X, который получается, если соединить кратчайшими геодезическими дугами последовательно точки x_0, $f(m)$ $(m=1, 2, \ldots)$.

При помощи отображения $R\colon T' \to \Lambda$ $(R(f)=\bar{f})$ вводим в множестве T' псевдорасстояние δ, положив

$$\delta(f_1, f_2)=d(\bar{f}_1, \bar{f}_2).$$

Из определения отображения R и псевдорасстояния d следует, что δ не меняется, если заменить f_1 и f_2 эквивалентными элементами f_1' и f_2'. Следовательно, δ индуцирует псевдорасстояние в множестве $\mathcal{T}'$ классов $[f]$ элементов $f \in T'$.

Предоставляем читателю проверить, что это псевдорасстояние определяет в пространстве $\mathcal{T}'$ топологию, для которой тройка $(\mathcal{T}', v, X)$ является главным расслоенным пространством с группой

$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}'$, допускающим связность, заданную в гл. IV, § 4,

$$C(g, [f])(\tau)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, n_f], \\ g(\alpha t - \alpha n_f), & t \in \left[n_f, n_f + \dfrac{\tau}{\alpha}\right], \quad \alpha = \alpha(g), \\ g(\tau), & t \in \left[n_f + \dfrac{\tau}{\alpha}, \infty\right), \end{cases}$$

в которой α — функция Милнора, соответствующая риманову расстоянию из X и числу ε_i, где $i = \inf\{j\colon g(I) \subset D_j\}$.

Заметим теперь, что если ρ — дифференцируемое представление группоида Ω' на группе T^1, то отображение $\rho \circ R\colon S' \to T^1$, $S' = S \cap T'$, является гомоморфизмом, постоянным на классах эквивалентности полугруппы S'. Таким образом, $\rho \circ R$ индуцирует групповой гомоморфизм

$$r\colon \mathcal{S}' \to T^1.$$

Этот гомоморфизм является представлением. Действительно, пусть Ω_1' — подмножество множества Ω', состоящее из путей, составленных дугами геодезических. Тогда отображение $R\colon S' \to \Omega_1'$ открыто и непрерывно, если в S' принять топологию, индуцированную топологией, введенной в множестве T'. Гомоморфизм

$$\rho \mid \Omega_1' = \rho_1\colon \Omega_1' \to T^1$$

также является представлением. Это видно немедленно, если применить к показателю в выражении $\rho_1(f)$ $(f \in \Omega_1')$ формулу Стокса. Следовательно, ρ определяет главное расслоенное многообразие (B, π, X, T^1).

Описание пространства B и отображения $B \to X$, приведенное в § 12, вытекает из рассуждений, проведенных в гл. IV, § 4, где мы показали, что B является факторпространством пространства $\mathcal{T} \times T^1$. Пространство B также является факторпространством пространства $\Lambda \times T^1$, и эквивалентность, рассмотренная для пар (x, z), соответствует эквивалентности в $\Lambda \times T^1$.

Пусть теперь (B, π, X, T^1) — главное расслоенное пространство с базой X. Покажем, что коцикл $\{h_{UV}\}$ не зависит от выбора инвариантной метрики ds_0^2.

В координатах (x^i, z) на множествах $\pi^{-1}(U)$ риманова метрика, инвариантная относительно преобразований группы T^1, имеет вид

$$ds_0^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j + \omega_0^2 (d\varphi - \omega_i\, dx^i)^2 \quad (z = e^{2\pi i \varphi}),$$

где функции a_{ij}, ω_0, ω_i не зависят от φ. Компоненты v^i, v^0 контравариантных векторов, ортогональных слоям, связаны формулой

$$v^0 = \omega_i v^i.$$

Отсюда следует, что подъем путей $g\colon I \to X$ осуществляется интегрированием системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^0}{dt} = \omega_i \frac{dg^i}{dt}$$

при начальных значениях, соответствующих точке (x_0^i, φ_0) слоя $\pi^{-1}(g(0))$, где $x_0^i = g^i(0)$. Это уравнение определяет в тройке (B, π, X) инфинитезимальную связность, так как оно дает дифференцируемый закон подъема дифференцируемых путей.

Если путь g замкнутый, то путь $\tilde{g}$, полученный подъемом, будет иметь следующие концы:

$$(x_0^i, \varphi_0), \ \left(x_0^i, \int_0^1 \omega_i \frac{dg^i}{dt} dt = \oint_g \omega_i dx^i\right).$$

Функция ω_0 и пфаффова форма $\omega = d\varphi - \omega_i dx^i$ инвариантны относительно преобразований координат на пересечении двух окрестностей $\pi^{-1}(U)$ и $\pi^{-1}(V)$, так как и метрика ds_0^2, и сами слои инвариантны. Очевидно, инвариантная метрика ds_0^2 не единственная. Другой ее выбор приведет к другой пфаффовой форме, инвариантной на B, $\omega' = d\varphi - \omega_i'$. Разность этих двух форм $\Delta = \omega' - \omega$ будет пфаффовой формой, определенной на базе X.

Представления, ассоциированные с этими двумя связностями, будут иметь вид

$$\rho(g) = e^{2\pi i \oint_g \omega_j dx^j}, \qquad \rho'(g) = e^{2\pi i \oint_g \omega_j' dx^j}.$$

Следовательно,

$$\rho(g') = \rho(g) e^{\oint_g \Delta}.$$

Поэтому функции перехода h_{UV}, h'_{UV}, соответствующие этим двум связностям, связаны формулами

$$h_{UV}(x) = h'_{UV}(x) g_U(x) g_V(x)^{-1},$$

где

$$g_U(x) = \exp\left\{2\pi i \int_{g_x^U} \Delta\right\}.$$

Таким образом, два цикла $\{h_{UV}\}$ и $\{h'_{UV}\}$, соответствующие двум инвариантным метрикам ds_0^2, $ds_0'^2$, определенным в расслоенном пространстве (B, π, X, T), когомологичны.

Аналогичный результат получается, если сохранить метрику ds_0^2, но изменить семейство путей g_x^U для каждой окрестности U, так как это изменение $g_x^U \to g_x'^U$ осуществляется умножением пути g_x^U на замкнутый путь $g_x'^U * \hat{g}_x^U$, а $\rho(g_x'^U * \hat{g}_x^U)$ непрерывно зависит от x.

Пусть $\{U'\}$ — покрытие более тонкое, чем покрытие $\{U\}$, и $\{g_x^{U'}\}$ — соответствующая система путей. Отображение τ: $\{U'\} \to \{U\}$, где $\tau(U') \supset U'$, сопоставляет коциклу $\{h_{UV}\}$ коцикл $\bar{\tau}\{h_{UV}\} = \{h_{U'V'}\}$, где

$$h_{U'V'}(x) = h_{\tau(U')\tau(V')}(x), \quad x \in U' \cap V'.$$

Рассмотрим теперь пути $g_x'^{U'}$, заданные соотношением $g_x'^{U'} = g_x^{\tau(U')}$, где $x \in U'$. Это семейство путей и определяет коцикл $\{h_{U'V'}\}$ относительно покрытия $\{U'\}$. С другой стороны, семейство путей $\{g_x^{U'}\}$, $\{g_x'^{U'}\}$ определяет когомологичные коциклы. Следовательно, переходя к индуктивному пределу, находим, что расслоение (B, π, X, T^1) определяет класс когомологий, определенный в группе $H^1(X, \mathscr{D})$. Так как эта группа изоморфна группе $H^2(X, \mathbf{Z})$, то получаем отображение

$$\mathrm{ch}\colon \mathscr{E}(X, T^1) \to H^2(X, \mathbf{Z}).$$

Это отображение ставит в соответствие каждому классу расслоенных пространств ξ с базой X класс целых когомологий $\mathrm{ch}(\xi)$ размерности 2. Этот класс называется характеристическим классом расслоений из класса ξ.

Из § 12 следует, что для расслоения $(B, \pi, X, T^1) \in \xi$ и покрытия $\{U\}$ класс $\mathrm{ch}(\xi)$ представлен коциклом $\{h_{UVW}\}$, заданным формулой

$$2\pi i h_{UVW}(x) = \ln h_{VW}(x) - \ln h_{UW}(x) + \ln h_{UV}(x),$$

где $x \in U \cap V \cap W$, причем предполагается, что для каждой пары (U, V) как-то определена функция $\ln h_{UV}$. Это не является ограничением, если предположить, что множества $U \cap V$ достаточно малы для того, чтобы

$$T^1 \neq h_{UV}(U \cap V).$$

Пусть покрытие $\{U\}$ выбрано так, чтобы пересечения $U \cap V$ были связными и односвязными, а пересечения $U \cap V \cap W$ — связными.

Так как $\{h_{UV}\}$ — коцикл, то $h_{UW} = h_{UV} h_{VW}$ и логарифмы определены с точностью до слагаемых, кратных $2\pi i$, и для каждой тройки (U, V, W) получаем, что h_{UVW} — целое число, не зависящее от $x \in U \cap V \cap W$. Целые числа h_{UVW} образуют двумерный коцикл, так как для четырех множеств U_0, U_1, U_2, U_3 имеем

$$h_{U_1U_2U_3} - h_{U_0U_2U_3} + h_{U_0U_1U_3} - h_{U_0U_1U_2} = 0.$$

В силу теоремы де Рама этому коциклу с вещественными значениями на многообразии X соответствует когомологический класс внешних форм второго порядка. Чтобы найти этот класс, рассмотрим изоморфизмы, указанные в гл. III, § 5, для случая, когда $\mathscr{F}$ является постоянной проективной системой со значениями в $\mathbf{R}$, а Q_i — проективные системы, образованные на многообразии X внешними формами порядка $i=0, 1, 2$. В обозначениях § 5 гл. III имеем $\mathcal{F}=\mathcal{N}(\rho_0)$. Элементу $\xi \in H^2(X, \mathbf{R})$ соответствует класс $\delta_1^{-1}(\xi) \in H^1(X, N(\rho_1))$, который определяется из точной последовательности (41), если положить $q=1$. $N(\rho_1)$ состоит из ростков замкнутых пфаффовых форм многообразия X. Коциклом из класса $\delta_1^{-1}(\xi)$ является семейство $\{\omega_{UV}\}$ точных пфаффовых форм $\omega_{UV}=df_{UV}$, где функции f_{UV} определены на пересечениях $U \cap V$ и обладают тем свойством, что кограница коцепи $\{f_{UV}\}$ когомологична коциклу $\{h_{UV}\}$ в $C^2(\{U, \mathbf{R}\})$. Такой коцикл получается, если в каждом пересечении $U \cap V$ положить

$$\omega_{UV} = -\frac{1}{2\pi i} d \ln h_{UV}.$$

Искомым классом когомологий будет класс η из $H^0(X, N(\rho_2))$, образ которого при изоморфизме δ_0 (см. последовательность (41) при $q=1$) равен $\delta_1^{-1}(\xi)$. Следовательно, $\eta=\delta_0^{-1}\delta_1^{-1}(\xi)$. Таким образом, η является классом когомологий некоторой внешней формы α второго порядка, определенной на многообразии X, причем если $\{\beta_U\}$ — коцепь из $C^1(\{U\}, Q_1\})$, для которой $d\beta_U=\alpha$ в каждой окрестности U, то кограница этой коцепи когомологична в $C^2(\{U, N(\rho_1)\})$ коцепи $\{\omega_{UV}\}$. Следовательно, в $U \cap V$ должна выполняться формула

$$\frac{1}{2\pi i} d \ln h_{UV} = \beta_V - \beta_U + \gamma_V - \gamma_U,$$

где $\{\gamma_U\}$ — коцепь из $C^1(\{U, N(\rho_1)\})$, т. е. коцепь, образованная замкнутыми пфаффовыми формами γ_U.

Для определения формы α, обладающей указанными свойствами, рассмотрим пфаффову форму $d\varphi - \omega_i\, dx^i$, входящую в выражение одной из инвариантных метрик ds_0^2 многообразия B. Можно записать ограничение этой формы на окрестность $\pi^{-1}(U)$ в виде

$$d\varphi - \beta_U,$$

где $\beta_U = \overset{U}{\omega_i}\, dx_U^i$ — пфаффова форма, определенная на множестве U.

Внешняя производная $\tilde{\alpha}$ этой формы не зависит от φ, и на $\pi^{-1}(U)$

$$\tilde{\alpha} = -d\beta_U,$$

т. е. $\tilde{\alpha}$ получается из внешней формы α, определенной на X, в каждой окрестности U при помощи формулы

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{U}{\omega_i}}{\partial x_U^j} - \frac{\partial \overset{U}{\omega_j}}{\partial x_U^i}\right) dx^i \wedge dx^j = -d\beta_U.$$

Это записывается равенством $\tilde{\alpha}=\pi^*(\alpha)$.

Заметим, что разность $\beta_V-\beta_U$ является пфаффовой формой, замкнутой на пересечении $U \cap V$, так как внешняя производная ее равна нулю: $d(\beta_V-\beta_U)=\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}=0$.

Оценим теперь интеграл

$$I_l = \frac{1}{2\pi i} \int_l d \ln h_{UV},$$

где l — спрямляемый путь из $U \cap V$ с концами $a_0 = l(0)$, $a_1 = l(1)$. В обозначениях, принятых в § 12, имеем

$$\begin{aligned}
\exp(2\pi i I_l) &= h_{UV}(a_1)\, h_{UV}(a_0)^{-1} = \rho(g_{a_1}^V * \hat{g}_1^U)\, \rho(g_{a_0}^V * \hat{g}_{a_0}^U)^{-1} = \\
&= \rho((g_{a_1}^V * \hat{g}_{a_1}^U) * (g_{a_0}^U * \hat{g}_{a_0}^V)) = \\
&= \rho(g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V) \cdot \rho(g_{a_0}^V * l * \hat{g}_{a_1}^U) \cdot \rho(g_{a_0}^U * \hat{g}_{a_0}^V) = \\
&= \rho(g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V) \cdot \rho(g_{a_0}^V * l * \hat{g}_{a_1}^U * g_{a_0}^U * \hat{g}_{a_0}^V) = \\
&= \rho(g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V) \cdot \rho(l * \hat{g}_{a_1}^U * g_{a_0}^U) = \\
&= \rho(g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V) \cdot \rho(g_{a_0}^U * l * \hat{g}_{a_1}^U) = \\
&= \rho(g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V) \cdot \rho(g_{a_1}^U * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^U)^{-1}.
\end{aligned}$$

Введем функции

$$\gamma_V(x) = \exp\left\{2\pi i \int_{g_x^V} \beta_U\right\}.$$

Имеем

$$\exp 2\pi i I_l = \exp 2\pi i \left\{ \int_{g_{a_1}^V * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^V} \beta_V - \int_{g_{a_1}^U * \hat{l} * \hat{g}_{a_0}^U} \beta_U \right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} d \ln h_{UV} = d\gamma_V - d\gamma_U + \beta_U - \beta_V$$

и формы α и $-\beta_U$ удовлетворяют заданным условиям. В частности, отсюда следует, что форма α принадлежит искомому классу. Она называется формой кривизны инфинитезимальной связности, определенной уравнением

$$\frac{dx^0}{dt} = \omega_i \frac{dx^i}{dt}.$$

Мы показали, таким образом, что образ характеристического класса расслоенного пространства (B, π, X, T^1) при изоморфизме де Рама содержит формы кривизны инфинитезимальных связностей, которые могут быть введены в этом пространстве при помощи инвариантных метрик.

Если характеристический класс расслоения (B, π, X, T^1) для покрытия $\{U\}$, выбранного надлежащим образом, равен нулю, то коцикл $\{h_{UVW}\}$ является кограницей, т. е. существует такая коцепь $\{a_{UV}\}$ с целыми постоянными коэффициентами a_{UV}, что

$$h_{UVW} = a_{VW} - a_{UW} + a_{UV}.$$

В этом случае $\{\ln h_{UV} - 2\pi i a_{UV}\}$ является коциклом. Компоненты коцикла $\ln h_{UV} - 2\pi i a_{UV}$ можно рассматривать как другое определение функций $\ln h_{UV}$. Следовательно, если характеристический класс рассматриваемого расслоения равен нулю, то существует такое определение функций $\ln h_{UV}$, при котором они становятся компонентами некоторого коцикла. Этот коцикл относится к проективной системе $\mathscr{D}$, элементами которой являются дифференцируемые функции. Так как эта система тонкая, то коцикл $\{\ln h_{UV}\}$ является кограницей, и существует коцепь $\{a_U\} \in C^1(\{U\}, \mathscr{D})$ такая, что в любой точке $x \in U \cap V$

$$\frac{1}{2\pi i} \ln h_{UV} = a_V - a_U.$$

В этом случае

$$h_{UV} = \exp\{2\pi i (a_V - a_U)\},$$

откуда следует, что расслоенное пространство (B, π, X, T^1) тривиально, т. е. эквивалентно расслоению (B', π', X), в котором $B' = X \times T^1$ и π' — проекция B' на первый множитель. Действительно, отождествим B с факторпространством суммы $\bigcup_U U \times T^1$ по отношению эквивалентности (см. § 12)

$$(x, u) \sim (y, v) \quad (u, v \in T^1),$$

определенному соотношениями

$$x = y \in U \cap V, \quad v = h_{UV} u.$$

В каждой окрестности осуществим преобразование координат

$$x'^i = x^i, \quad u' = u e^{-2\pi i a_U}.$$

Тогда записанное выше отношение эквивалентности можно переписать следующим образом:

$$(x', u') \sim (y', v') \text{ равносильно } x' = y', \ u' = v'.$$

Таким образом, B получается из объединения пространств $U \times T^1$ отождествлением пар (x, u), (y, v), для которых $x = y$, $u = v$. Поэтому мы можем определить в целом отображение $\psi: B \to X \times T^1$, заданное в каждой окрестности $\pi^{-1}(U)$ формулой $\psi[x', z'] = (x, z) \in X \times T^1$. Отображение ψ является гомеоморфизмом, перестановочным с проекциями расслоений (B, π, X, T^{-1}), $(X \times T^1, p_1, X, T^1)$ и с действиями группы T^1 в этих расслоениях.

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

Предложение. *Расслоенные пространства (B, π, X, T^1), характеристический класс которых равен нулю, тривиальны и, следовательно, принадлежат одному классу эквивалентности.*

Аналогично можно показать, что два расслоения (B, π, X, T^1), (B', π', X, T^1) эквивалентны, если они имеют один и тот же характеристический класс. Следовательно, классы расслоения

(B, π, X, T^1) находятся во взаимно однозначном соответствии с группой $H^2(X, \mathbf{Z})$. Мы видели, что это соответствие является изоморфизмом для определенной групповой структуры в множестве $\mathscr{E}(X, T^1)$ классов рассматриваемых расслоений. Говорят, что группа $H^2(X, \mathbf{Z})$ является представителем множества $\mathscr{E}(X, T^1)$.

В расслоенном пространстве (B, π, X, T^1), допускающем интегрируемую инфинитезимальную связность, т. е. связность с нулевой формой кривизны, расслоение может не быть тривиальным, если канонический гомоморфизм

$$H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{R})$$

допускает нетривиальное ядро, т. е. если группа $H^2(X, \mathbf{Z})$ содержит ненулевые периодические элементы. Расслоения, для которых эти элементы являются характеристическими классами, будут пространствами, ассоциированными (см. гл. IV, § 5) с универсальным покрытием многообразия X и представлениями фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в группе T^1. Действительно, если некоторое расслоение (B, π, X, T^1) допускает интегрируемую связность, то из формулы Стокса следует, что $h_{UV}(x) = 1$ всякий раз, когда пути $\overset{U}{g_x}$, $\overset{V}{g_x}$ гомотопны, т. е. функции h_{UV} постоянны на связных компонентах пересечения $U \cap V$. Обозначив через G подгруппу группы T^1, порожденную константами h_{UV}, получим представление группы $\pi_1(X)$ на группе G. Это представление определяет расслоенное пространство, ассоциированное с универсальной накрывающей, структурная группа которого дискретна и изоморфна $\pi_1(X)$. Включение $G \subset T^1$ присоединяет к этому пространству покрытия расслоенное пространство (B', π', X, T^1). Построение этого расслоенного пространства, указанное в гл. IV, § 4, показывает, что (B', π', X, T^1) можно отождествить с рассматриваемым пространством (B, π, X, T^1).

Для примера рассмотрим случай, когда X является вещественной проективной плоскостью P^2. В этом случае $H^2(P^2) \approx \mathbf{Z}_2$, следовательно, существуют два класса главных расслоений с базой X и группой T^1, допускающих интегрируемые связности: характеристический класс первого расслоения нулевой, т. е. это класс тривиальных расслоений, а характеристический класс второго расслоения равен ненулевому элементу группы $H^2(P^2)$. Расслоенное пространство (B, π, P^2, T^1) этого класса может быть получено, если принять в качестве B сферу S^3 и в качестве π композицию отображений

$$S^3 \xrightarrow{p} S^2 \xrightarrow{u} P^2,$$

где (S^3, S^2, p, T) — расслоение Хопфа, а (S^2, u, P^2) — универсальное расслоение пространства P^2, так как u — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in S^2$ пару $(x, x') \in P^2$ диаметрально противоположных точек из S^2.

Вследствие того что для компактной ориентируемой поверхности X группа $H^2(X, \mathbf{Z})$ не имеет ненулевых периодических элементов, расслоения (B, π, X, T^1), допускающие интегрируемые связности с нулевой формой кривизны, тривиальны.

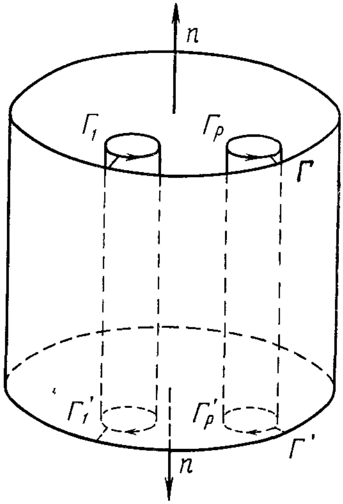

Рис. 23.

В заключение укажем одно доказательство формулы Гаусса — Бонне для компактных ориентируемых поверхностей. Если X — компактная ориентируемая поверхность рода p, то можно считать, что X погружена в числовое пространство $\mathbf{R}^3$ и имеет вид, указанный на рис. 23, т. е. является границей отрезка цилиндра C между двумя параллельными основаниями, причем из цилиндра C удалены p внутренних цилиндров $C_1, \ldots, C_p$. Можно скруглить поверхности вдоль окружностей двух оснований так, чтобы получить поверхность в $\mathbf{R}^3$ с непрерывной касательной плоскостью, такую, что кривые $\Gamma_1, \Gamma_1', \ldots, \Gamma_p, \Gamma_p'$, указанные на рис. 23, вместе с боковыми поверхностями цилиндров не изменятся.

Метрика пространства $\mathbf{R}^3$ индуцирует риманову метрику на поверхности X с нулевой формой кривизны Ω на боковых участках поверхности X.

Пусть Ω — форма кривизны метрики, полученной таким образом на X. Применяя формулу Стокса к основаниям, на которых сделаны разрезы, указанные на рис. 23, с целью получения односвязных областей, получаем

$$2\pi \int\limits_X \Omega = \delta_\Gamma - \sum_{i=1}^{p} \delta_{\Gamma_i} + \delta_{\Gamma'} - \sum_{i=1}^{p} \delta_{\Gamma_i'}.$$

Здесь через δ_Γ обозначена сумма вариаций угла, образованного вектором $\mathbf{v}$, касательным к X в точке $q \in \Gamma$, с фиксированным направлением в плоскости кривой Γ, когда этот вектор переносится вдоль пути Γ в положительном направлении, если смотреть с вершины нормали $\mathbf{n}$. Так как кривые Γ, Γ', Γ_i, Γ_i' являются геодезическими, то каждый из углов δ_Γ, $\delta_{\Gamma'}$, δ_{Γ_i}, $\delta_{\Gamma_i'}$ равен 2π.

Действительно, можно выбрать вектор $\mathbf{v}$ касательным к Γ, и тогда подъем пути Γ получается, если рассмотреть поле единичных векторов, касательных к Γ и одинаково направленных. В любом случае угол, образованный касательным вектором в q к пути Γ с некоторым направлением, лежащим в той же плоскости, что и Γ, возрастает от 0 до 2π. Поэтому

$$2\pi \int_X \Omega = (2-2p)\, 2\pi.$$

Мы получили формулу Гаусса — Бонне для метрики, индуцированной пространством $\mathbf{R}^3$ на X. Но значение интеграла $\int_X \Omega$ сохраняется при изменении метрики поверхности X, так как класс когомологий формы Ω не зависит от метрики. Следовательно, предыдущая формула сохраняется при любой метрике поверхности X.

Замечания. 1. Если в окрестности U поверхности X выбрать локальную систему координат, в которой заданная метрика поверхности была бы конформно-евклидовой:

$$ds^2 = E\,(du^2 + dv^2),$$

то параллельный перенос вдоль некоторого пути $u = u(t)$, $v = v(t)$ будет задаваться интегралом дифференциального уравнения

$$2\pi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln E}{\partial v}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \ln E}{\partial u}\frac{dv}{dt}\right),$$

в котором φ — угол, образованный вектором переноса с вектором, касательным к кривым $v = \mathrm{const}$. Отсюда получаем следующее выражение для формы кривизны:

$$2\pi\Omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \ln E \; du \wedge dv.$$

Учитывая, что элемент площади ω поверхности равен $\omega = E\, du \wedge dv$, получаем, что $2\pi\Omega = K\omega$, где

$$K = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \ln E$$

— гауссова кривизна поверхности X.

2. Из формул Гаусса — Бонне следует, что в случае $p \neq 1$ расслоенное пространство касательных векторов не допускает интегрируемых связностей, т. е. не является тривиальным. Отсюда следует также, что это расслоенное пространство не допускает сечений, так как это сечение s: $X \to B$ привело бы к расслоению, изоморфному с тривиальным расслоением $(x, z) \to zs(x) \in B$.

ГЛАВА VI

ПРИЛОЖЕНИЯ. КЛЕТОЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ[1])

1. Определения. Примеры

Рассмотрим теперь некоторые обобщения симплициальных полиэдров. С одной стороны, эти обобщения приводят к топологическим пространствам, более общим, чем симплициальные полиэдры, и обладающим в то же время структурой, позволяющей определить в явном виде алгебраические инварианты, введенные в этой книге. С другой стороны, они дают прямой метод вычисления этих инвариантов и для симплициальных полиэдров. Дело в том, что вычисление групп гомологий симплициального полиэдра представляет трудность, когда этот полиэдр образован большим числом симплексов, и в то же время существуют топологические пространства, структура которых может быть легко описана (как, например, компактные поверхности или проективные пространства), но которые, однако, не гомеоморфны симплициальным полиэдрам с достаточно простой алгебраической структурой.

Пространства, которые мы введем в этом разделе, являются отделимыми топологическими пространствами, которые помимо топологической структуры наделены дополнительной структурой, называемой клеточным разбиением. Эти пространства называются клеточными комплексами.

Будем называть *клеткой* размерности n любое топологическое пространство, гомеоморфное внутренности единичного куба размерности n, т. е. подпространству n-мерного числового пространства, заданному неравенствами $0 < x_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Клеточным комплексом* называется отделимое пространство X, являющееся объединением непересекающихся клеток, причем выполнены следующие условия.

1. Для каждой клетки σ размерности n пространства X задано непрерывное отображение f куба I^n в пространство X. При этом ограничение f' отображения f на внутренность $\operatorname{Int} I^n$ куба I^n

---

[1]) См. для справок: Whitehead J. H. C., Combinatorial Homotopy, Bull. of the Amer. Math. Soc., 1959; Whitehead G., Homotopy Theory, 1953; Popescu N., Burghele a D., Asupra omologiei şi homotopiei CW-complexelor, Studii şi cercet. mat., 1962.

взаимно однозначно и образ $f(I^n)$ совпадает с замыканием $\bar{\sigma}$ в X клетки σ. В этом случае f' является гомеоморфизмом локально компактного пространства $\operatorname{Int} I^n$ с подпространством σ отделимого пространства X.

Отображение f называется *характеристическим отображением клетки* σ.

2. Множество $f(\dot{I}^n)$ включено в объединение X^{n-1} клеток размерности $n-1$ пространства X. Это объединение называется *остовом размерности* $n-1$ клеточного комплекса X.

Примеры. Любой симплициальный полиэдр $\mathcal{S}$ является клеточным комплексом, так как для любого симплекса s из $\mathcal{S}$ можно найти гомеоморфизм $f\colon I^n \to \bar{s}$, где n — размерность симплекса s.

Любое топологическое пространство X можно рассматривать как клеточный комплекс, принимая X за объединение его точек, которые являются клетками размерности 0. Этот пример показывает, однако, что понятие клеточного комплекса слишком обширное. Поэтому мы будем рассматривать более узкий класс клеточных комплексов, введенный Уайтхедом.

Подпространство Y клеточного комплекса X называется подкомплексом комплекса X, если Y является объединением клеток из X, которое вместе с клеткой σ содержит и ее замыкание $\bar{\sigma}$. Например, для любого клеточного комплекса X и любого натурального числа n остов X^n является подкомплексом комплекса X. Любое объединение и любое пересечение подкомплексов комплекса X являются подкомплексами комплекса X.

Пусть A — произвольное подмножество клеточного комплекса X. Обозначим через $X(A)$ пересечение всех подкомплексов комплекса X, содержащих множество A.

Каждая точка $x \in X$ является внутренней для некоторой определенной клетки σ_x из X и

$$X(x) = X(\sigma_x) = X(\bar{\sigma}_x).$$

CW-комплексом называется клеточный комплекс, удовлетворяющий условиям:

(C) Для любой точки $x \in X$ подкомплекс $X(x) = X(\sigma_x)$ *конечный*, т. е. имеет конечное число клеток.

(W) Если пересечение $F \cap \bar{\sigma}$ некоторого множества F из X с $\bar{\sigma}$ замкнуто в $\bar{\sigma}$ (а следовательно, и в X) для любой клетки σ из X, то F является замкнутым подмножеством в X.

Конечный клеточный комплекс удовлетворяет, очевидно, условию (C) и также условию (W). Действительно, если $X = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots$ $\ldots \cup \sigma_p$, а F — подмножество из X, то $F = (F \cap \bar{\sigma}_1) \cup (F \cap \bar{\sigma}_2) \cup \ldots$ $\ldots \cup (F \cap \bar{\sigma}_p)$. Поэтому, если все $F \cap \bar{\sigma}_i$ — замкнутые множества в X, то F также будет замкнуто в X.

Вообще клеточный комплекс X, в котором каждая точка x является внутренней для некоторого конечного подкомплекса $Y(x)$, есть CW-комплекс. Действительно, условие (C) выполняется, так как $X(x) \subset Y(x)$. Предположим, что для некоторого множества F из X множество $F \cap \bar{\sigma}$ замкнуто при любом выборе клетки σ из X. В этом случае для любой точки $x \in X$ $F \cap Y(x)$ — замкнутое множество в X. Предположим, что x не принадлежит множеству F. Тогда множество $U_x = Y(x) - (Y(x) \cap F)$ не пересекается с множеством F и для U_x точка x является внутренней. Поэтому окрестность U_x точки x не пересекается с F. Отсюда следует, что

$$X - F = \bigcup_{x \in X - F} U_x$$

— открытое множество, и, значит, множество F замкнуто.

В гл. II мы показали, что существует непрерывное отображение f куба I^n на сферу S^n, постоянное на границе $\dot{I}^n$ и взаимно однозначное внутри куба I^n. Отсюда следует, что S^n можно рассматривать как клеточный комплекс, состоящий из двух клеток: $\sigma^n = f(\operatorname{Int} I^n)$ — размерности n и $\sigma^0 = f(\dot{I}^n)$ — размерности 0.

Проективное пространство $\mathcal{P}^n$ также гомеоморфно конечному CW-комплексу. Действительно, если в $\mathcal{P}^n$ введены однородные координаты $x_1, \ldots, x_{n+1}$, то системы уравнений

$$\begin{aligned}
&P^{n-1}\colon\ x_{n+1} = 0,\\
&P^{n-2}\colon\ x_n = x_{n+1} = 0,\\
&\vdots\\
&P^{n-k}\colon\ x_{n-k+2} = x_{n-k+3} = \ldots = x_{n+1} = 0,\\
&\vdots\\
&P^0\ \colon\ x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0
\end{aligned}$$

определяют такие проективные подпространства пространства $\mathcal{P}^n$, что

$$\sigma^n = P^n - P^{n-1},\ \sigma^{n-1} = P^{n-1} - P^{n-2},\ \ldots,\ \sigma^1 = P^1 - P^0,\ \sigma^0 = P^0$$

являются клетками размерности $n, n-1, \ldots, 0$ и

$$P^n = \sigma^n \cup \sigma^{n-1} \cup \ldots \cup \sigma^0.$$

Аналогично для каждой клетки $\sigma^i = P^i - P^{i-1}$ существует непрерывное отображение

$$f\colon I^i \to \bar{\sigma}^i = P^i = \sigma^i + P^{i-1},$$

индуцирующее гомоморфизм $f'\colon \operatorname{Int} I^i \to \sigma^i$ и переводящее пары точек из $\dot{I}^i$ в точки P^{i-1}.

Компактная ориентируемая поверхность S рода p является CW-комплексом, состоящим из одной клетки размерности 2, из $2p$ клеток размерности 1 и из одной клетки размерности 0.

2. Свойства CW-комплексов

Отметим теперь некоторые важные свойства CW-комплексов, которые будут использованы в исследовании групп гомологий этих пространств.

Теорема 1. *Если подмножество A CW-комплекса X замкнуто, то отображение f топологического пространства A в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения отображения f на замыкания клеток комплекса X.*

Условие необходимо, так как если B — замкнутое множество в Y и f непрерывно, то $f^{-1}(B)$ замкнуто в X и тогда $f^{-1}(B) \cap \bar{\sigma} = (f \mid \bar{\sigma})^{-1}(B)$ также замкнуто в X.

Обратно, если отображения $(f \mid \bar{\sigma})^{-1}$ непрерывны, то множества $(f \mid \bar{\sigma})^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap \bar{\sigma}$ замкнуты в X и, следовательно, $f^{-1}(B)$ замкнуто, т. е. f непрерывно.

Теорема 2. *Если C — компактное подмножество CW-комплекса X, то комплекс $X(C)$ конечный.*

Доказательство. Если C пересекает конечное число клеток $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ из X, то

$$X(C) = X(\sigma_1) \cup X(\sigma_2) \cup \ldots \cup X(\sigma_p),$$

и так как каждый из комплексов $X(\sigma_i)$ конечен, то $X(C)$ — конечный комплекс.

Предположим, что компактное множество C пересекает бесконечное число клеток σ_α. Выберем для каждого индекса α точку x_α из $C \cap \sigma_\alpha$. Обозначим через A множество точек x_α и рассмотрим произвольное подмножество A' множества A. Для каждой клетки σ из X

$$A' \cap \bar{\sigma} \subset A' \cap X(\sigma).$$

Так как $X(\sigma)$ содержит конечное число клеток из X и тем более конечное число клеток σ_α, то A' имеет с замыканием $\bar{\sigma}$ любой клетки только конечное число общих точек. Следовательно, множество $A' \cap \bar{\sigma}$ замкнуто при любой клетке σ. Из условия (W) тогда следует, что множество A' замкнуто в X. Однако $A' = A' \cap C$ и поэтому A' замкнуто в C. Отсюда видно, что C индуцирует в подмножестве A дискретную топологию и что A является замкнутым подмножеством. Таким образом, A компактно в C. Но дискретное топологическое пространство A не может быть компактным, если оно имеет бесконечное число точек. Это значит что C может пересекать только конечное число клеток из X, Теорема 3. *Для любой клетки σ из CW-комплекса X существует множество D, открытое в $\bar{\sigma}$, которое допускает в качестве деформационного ретракта множество $\bar{\sigma}-\sigma$.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическое отображение f клетки σ

$$f\colon I^n \to \bar{\sigma}.$$

Обозначим через I_0^n куб, который имеет общий центр с кубом I^n и содержится в I^n. Множество $L^n = I^n - I_0^n$ открыто в I^n и допускает в качестве деформационного ретракта границу $\dot{I}^n$ куба I^n. Пусть

$$\Phi\colon L^n \times I \to L^n$$

— ретракция L^n на $\dot{I}^n$, т. е. такое непрерывное отображение, что

$$\Phi(x,\ 0) = x, \quad \Phi(x,\ 1) \in \dot{I}^n\ (x \in L^n),$$

$$\Phi(x,\ t) = x \quad (x \in \dot{I}^n,\ t \in I).$$

Обозначим через O центр кубов I^n, I_0^n. В качестве Φ можно выбрать отображение, ставящее в соответствие точке M из L^n и точке t из I точку M', лежащую на луче OM и определенную соотношением

$$(1-t)\frac{OM'}{M'P} = \frac{OM}{MP},$$

где P — пересечение луча OM с $\dot{I}^n$.

Имеем

$$f(L^n) = f(I^n) - f(I_0^n) = \bar{\sigma} - f(I_0^n).$$

Так как f — гомеоморфизм внутрь куба I^n и так как куб I_0^n замкнут в I^n, то множество $f(I_0^n)$ замкнуто в $\bar{\sigma}$. Поэтому множество $f(L^n) = D$ будет открытым в $\bar{\sigma}$. Непрерывное отображение

$$\psi\colon D \times I \to D,$$

заданное формулой

$$\psi(y,\ t) = \begin{cases} \Phi(f^{-1}(y),\ t), & \text{если } y \in \sigma \cap D, \\ y, & \text{если } y \in \dot{\sigma} = \bar{\sigma} - \sigma; \end{cases}$$

является ретракцией множества D на границу $\dot{\sigma}$ клетки σ.

3. Три леммы, связанные с сингулярной гомологией

Лемма 1. *Предположим, что топологическое пространство X является суммой двух непересекающихся пространств X_1 и X_2 и A_1, A_2 — некоторые подмножества пространств X_1 и X_2*

соответственно. Тогда для любого натурального числа q группа сингулярных относительных гомологий $H_q(X, A_1 \cup A_2)$ изоморфна прямой сумме групп $H_q(X_1, A_1)$, $H_q(X_2, A_2)$.

Доказательство. Подмножества X_1, X_2 множества X одновременно и замкнуты, и открыты. Следовательно, X_1 и X_2 образуют открытое покрытие $\mathscr{X}$ пространства X. Из теоремы 9 (гл. II, § 11) следует, что включения

$$\rho\colon C_q(X, \mathscr{X}) \to C_q(X)$$

индуцируют изоморфизмы между группами гомологий

$$\rho_*\colon H_q(X, \mathscr{X}) \to H_q(X).$$

Покрытие $\mathscr{X} = \{X_1, X_2\}$ индуцирует покрытие $\mathscr{A} = \{A_1, A_2\}$ подпространства $A = A_1 \cup A_2$ пространства X, а гомоморфизмы ρ индуцируют изоморфизмы

$$\rho'_*\colon H_q(A, \mathscr{A}) \to H_q(A).$$

Включения ρ индуцируют также гомоморфизмы

$$\rho''_*\colon H_q(X, A, \mathscr{X}) \to H_q(X, A)$$

группы гомологий $H_q(X, A, \mathscr{X})$ факторкомплекса комплекса $C(X, \mathscr{X})$ по подкомплексу $C(A, \mathscr{A})$. Из коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd}
H_q(A, \mathscr{A}) \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "\rho'_*"] & H_q(X, \mathscr{X}) \arrow[r, "j'_*"] \arrow[d, "\rho_*"] & H_q(X, A, \mathscr{X}) \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\rho''_*"] & H_{q-1}(A, \mathscr{A}) \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "\rho'_*"] & H_{q-1}(X, \mathscr{X}) \arrow[d, "\rho_*"] \\
H_q(A) \arrow[r, "i_*"] & H_q(X) \arrow[r, "j_*"] & H_q(X, A) \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & H_{q-1}(X)
\end{tikzcd}$$

следует, что гомоморфизмы ρ''_* являются изоморфизмами. Действительно, образом ядра гомоморфизма $\partial\rho''_*$ при $\rho'_*\partial' = \partial\rho''_*$ является 0. Так как ядро ρ'_* тривиально, то ядро $\partial\rho''_*$ совпадает с ядром ∂', т. е. с образом j'_*. В частности, если для некоторого элемента $\alpha' \in H_q(X, A, \mathscr{X})$ имеем $\rho''_*(\alpha') = 0$, то $\alpha' = j'_*(\beta')$ для некоторого $\beta' \in H_q(X, \mathscr{X})$ и

$$j_*\rho_*(\beta') = \rho''_* j'_*(\beta') = \rho''_*(\alpha') = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho_*(\beta') = i_*(\gamma)$ для $\gamma \in H_q(A)$. Так как ρ'_* — изоморфизм, то $\gamma = \rho'_*(\gamma')$ для некоторого $\gamma' \in H_q(A, \mathscr{A})$ и, следовательно,

$$\rho_* i'_*(\gamma') = i_*\rho'_*(\gamma') = i_*(\gamma) = \rho_*(\beta').$$

Поскольку ρ_* — изоморфизм, то $i'_*(\gamma') = \beta'$ и, следовательно, $\alpha' = j'_* i'_*(\gamma') = 0$. Отсюда вытекает, что ядро гомоморфизма ρ''_* тривиально.

Покажем, что ρ''_* — эпиморфизм. Пусть α — произвольный элемент из $H_q(X, A)$. Тогда $\partial\alpha = \rho'_*(\gamma')$, $\gamma' \in H_{q-1}(A, \mathscr{A})$, так как

ρ'_* — изоморфизм. Далее,

$$\rho_* i'_* (\gamma') = i_* \rho'_* (\gamma') = i_* \partial (\alpha) = 0$$

и, так как ρ_* — изоморфизм, $i'_* (\gamma') = 0$. Следовательно, γ' имеет вид $\gamma' = \partial' (\beta')$, где $\beta' \in H_q (X, A, \mathscr{X})$.

Поэтому

$$\partial \rho''_* (\beta') = \rho'_* \partial' (\beta') = \rho'_* (\gamma') = \partial \alpha.$$

Отсюда видно, что $\partial (\alpha - \rho''_* (\beta')) = 0$ и $\alpha - \rho''_* (\beta') \in j_* (H_q (X))$. Пусть λ — такой элемент из $H_q (X)$, что $j_* (\lambda) = \alpha - \rho''_* (\beta')$, а λ' — такой элемент из $H_q (X, \mathscr{X})$, что $\rho_* (\lambda') = \lambda$. Тогда

$$\alpha = \rho''_* (\beta') + j_* \rho_* (\lambda') = \rho''_* (\beta') + \rho''_* j'_* (\lambda') = \rho''_* (\beta' + j'_* (\lambda')).$$

Это равенство показывает, что ρ'_* — эпиморфизм.

Мы доказали, таким образом, что группы $H_q (X, A)$ и $H_q (X, A, \mathscr{X})$ изоморфны для каждой размерности q. Но, поскольку множества X_1 и X_2 покрытия $\mathscr{X}$ не пересекаются, группа $H_q (X, A, \mathscr{X})$ изоморфна прямой сумме групп $H_q (X_1, A_1)$ и $H_q (X_2, A_2)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Рассмотрим топологическое пространство X и четыре его подмножества X_1, X_2, A_1 и A_2, первые два из которых замкнуты, а последние открыты, такие, что*

$$X = X_1 \cup X_2, \quad A_1 \subset X_1, \quad A_2 \subset X_2, \quad X_1 \cap X_2 = A_1 \cap A_2. \tag{1}$$

Тогда группа $H_q (X, A)$, где $A = A_1 \cup A_2$, изоморфна прямой сумме групп $H_q (X_1, A_1)$ и $H_q (X_2, A_2)$.

Доказательство. Из условий (1) следует, что множество $Y = X_1 \cap X_2 = A_1 \cap A_2$ одновременно замкнуто и открыто. Это значит, что множества $X_1 - Y$ и $X_2 - Y$ замкнуты и не пересекаются. Следовательно, можно применить лемму 1. Положив $A = A_1 \cup A_2$, получим

$$H_q (X - Y, A - Y) = H_q (X_1 - Y, A_1 - Y) + H_q (X_2 - Y, A_2 - Y).$$

Так как множество Y замкнуто, $\overline{Y} = Y = A_1 \cap A_2$. Поэтому можно применить теорему о вырезании пар (X_1, A_1) и (X_2, A_2), и мы получаем изоморфизмы

$$H_q (X_i - Y, A_i - Y) \approx H_q (X_i, A_i) \quad (i = 1, 2).$$

Лемма 2 доказана. Она может быть обобщена.

Лемма 3. *Пусть в топологическом пространстве X заданы p замкнутых множеств X_i таких, что $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$, и p открытых множеств $A_i \subset X_i$ таких, что $(X_i \cap X_j) = (A_i \cap A_j)$ $(i \neq j)$.*

Тогда группа $H_q(X, \bigcup_{i=1}^{p} A_i)$ *изоморфна прямой сумме групп* $H_q(X_i, A_i)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$.

Действительно, положим $X_2' = \bigcup_{i=2}^{p} X_i$, $A_2' = \bigcup_{i=2}^{p} A_i$.

Тогда $A_2' \subset X_2'$, причем X_2' открыто в X, а A_2' замкнуто в X и

$$X_1 \cap X_2' = X_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{p} X_i) = \bigcup_{i=2}^{p} (X_1 \cap X_i) = \bigcup_{i=2}^{p} (A_1 \cap A_i) =$$

$$= A_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{p} A_i) = A_1 \cap A_2'.$$

Применяя лемму 2, получаем

$$H_q(X, A) = H_q(X_1, A_1) + H_q(X_2', A_2').$$

Повторяя те же рассуждения для пространства X_2' и подмножеств X_i и A_i $(i \geqslant 2)$, получаем разложение группы $H_q(X, A)$ $(A = A_1 \cup \ldots \cup A_p)$ в прямую сумму

$$H_q(X, A) = H_q(X_1, A_1) + \ldots + H_q(X_p, A_p).$$

4. Группы гомологий *CW*-комплексов

Теорема 4. *Характеристическое отображение* $f\colon I^n \to \bar{\sigma}$ *клетки* σ *из* CW-*комплекса* X *индуцирует изоморфизмы*

$$f_*\colon H_q(I^n, \dot{I}^n) \to H_q(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}) \quad (\dot{\sigma} = \bar{\sigma} - \sigma). \tag{1}$$

Доказательство. Отображение f индуцирует гомоморфизм

$$\bar{f}\colon C_q(I^n) \to C_q(\bar{\sigma}),$$

и из соотношений $f(\dot{I}^n) = \bar{\sigma} - \sigma = \dot{\sigma}$, $f(L^n) = D$ следует

$$\bar{f}[C_q(\dot{I}^n)] \subset C_q(\dot{\sigma}),\ \bar{f}[C_q(L^n)] \subset C_q(D),\ \bar{f}[C_q(L^n - \dot{I}^n)] \subset C_q(D - \dot{\sigma}).$$

Последние формулы показывают, что гомоморфизм $\bar{f}$ индуцирует гомоморфизмы

$$f_*\colon H_q(I^n, \dot{I}^n) \to H_q(\bar{\sigma}, \dot{\sigma}),$$

$$f_{1*}\colon H_q(I^n, L^n) \to H_q(\bar{\sigma}, D),$$

$$f_{2*}\colon H_q(I^n, L^n - \dot{I}^n) \to H_q(\bar{\sigma}, D - \dot{\sigma}).$$

Аналогично включения

$$i_1\colon \dot{I}^n \to L^n;\ i_2\colon L^n - \dot{I}^n \to L^n;$$

$$j_1\colon \dot{\sigma} \to D;\ j_2\colon D - \dot{\sigma} \to D$$

вместе с тождественными отображениями $i\colon I^n \to I^n$, $j\colon \bar\sigma \to \bar\sigma$ индуцируют гомоморфизмы

$$i_{1*}\colon H_q(I^n, \dot I^n) \to H_q(I^n, L^n);$$

$$i_{2*}\colon H_q(I^n, L^n - \dot I^n) \to H_q(I^n, L^n);$$

$$j_{1*}\colon H_q(\bar\sigma, \dot\sigma) \to H_q(\bar\sigma, D);$$

$$j_{2*}\colon H_q(\bar\sigma, D - \dot\sigma) \to H_q(\bar\sigma, D).$$

Можно составить коммутативную диаграмму[1])

$$\begin{array}{ccccc} H_q(I^n, \dot I^n) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_q(I^n, L^n) & \xleftarrow{i_{2*}} & H_q(I^n, L^n - \dot I^n), \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_{1*}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{2*}} \\ H_q(\bar\sigma, \dot\sigma) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_q(\bar\sigma, D) & \xleftarrow{j_{2*}} & H_q(\bar\sigma, D - \dot\sigma). \end{array}$$

Так как $\dot I^n$ и $\dot\sigma$ являются деформационными ретрактами соответственно пространств L^n и D, то i_1, j_1 — изоморфизмы. Гомоморфизмы i_{2*}, j_{2*} также являются изоморфизмами в силу теоремы о вырезании. Отображение f_{2*} — изоморфизм, так как f индуцирует гомеоморфизмы $I^n \approx \bar\sigma$, $L^n - \dot I^n \approx D - \dot\sigma$. Отсюда следует, что отображения $f_{1*} = j_{2*} f_{2*} i_{2*}^{-1}$ и $f = j_{1*}^{-1} f_{1*} i_{1*}$ также являются изоморфизмами, и теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что

$$H_q(\sigma, \dot\sigma) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{если } q = \dim\sigma, \\ 0, & \text{если } q \neq \dim\sigma. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 5. *Если X есть CW-комплекс, то при любых натуральных n и q ($n \neq q$) группа $H_q(X^n, X^{n-1})$ тривиальна. Группа $H_n(X^n, X^{n-1})$ изоморфна свободной абелевой группе, порожденной множествами клеток размерности n из X.*

Доказательство. Предположим, что X содержит конечное число клеток $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ размерности n. Тогда

$$X^n = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_p \cup X^{n-1}.$$

Выберем в каждой клетке σ_i открытое множество D_i, допускающее в качестве деформационного ретракта $\dot\sigma_i = \bar\sigma_i - \sigma_i$. Тогда деформационным ретрактом множества $\left(\bigcup_{i=1}^{p} D_i\right) \cup X^{n-1}$ будет остов X^{n-1}, и мы получаем изоморфизм

$$H_q(X^n, X^{n-1}) \approx H_q(X^n, D \cup X^{n-1}),$$

[1]) Коммутативность диаграммы означает, что $j_{1*} f_* = f_{1*} i_{1*}$, $j_{2*} f_{2*} = f_{1*} i_{2*}$.

где $D = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_i$. Положим

$$X_i = \bar{\sigma}_i \cup X^{n-1},\quad A_i = D_i \cup X^{n-1}.$$

Множества X_i будут замкнутыми в X, а A_i — открытыми в X и $A_i \subset X_i$. Так как две различные клетки σ_i, σ_j не могут иметь общих точек, то для $i \neq j$

$$X_i \cap X_j = (\dot{\sigma}_i \cap \dot{\sigma}_j) \cup X^{n-1} = X^{n-1} = A_i \cap A_j.$$

Применяя лемму 3 (§ 3), находим

$$H_q(X^n, X^{n-1}) \approx \sum_{i=1}^{p} H_q(\bar{\sigma}_i \cup X^{n-1}, D_i \cup X^{n-1}).$$

Из теоремы о вырезании следует, однако, что

$$H_q(\bar{\sigma}_i \cup X^{n-1}, D_i \cup X^{n-1}) \approx H_q(\bar{\sigma}_i, D_i) \approx H_q(\bar{\sigma}_i, \dot{\sigma}_i).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2), получаем изоморфизм, указанный в теореме 5, для случая конечного числа клеток размерности n.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть c — сингулярный цикл пары (X^n, X^{n-1}).

Тогда

$$c = \sum_{i=1}^{r} m_i \varphi_i + C_q(X^{n-1}) \qquad (m_i \in \mathbf{Z}),$$

где φ_i — сингулярные кубы из X^n такие, что

$$\partial c = \sum_{i=1}^{r} m_i\, \partial\varphi_i + C_{q-1}(X^{n-1}) \subset C_{q-1}(X^{n-1}).$$

Поскольку образы непрерывных отображений

$$\varphi_i\colon I^n \longrightarrow X^n$$

компактны, они пересекают конечное число клеток, образующих вместе с их замыканиями конечный подкомплекс X_0 комплекса X. Поэтому

$$c \in Z_q(X_0^n, X_0^{n-1}). \tag{3}$$

Пусть $q \neq n$. Тогда в силу результата, установленного выше, примененного к конечному комплексу X_0, получим $H_q(X_0^n, X_0^{n-1}) = 0$. Следовательно, c — граница цепи из $C_{q+1}(X_0^n, X_0^{n-1})$, а потому и цепи из $C_{q+1}(X_0^n, X_0^{n+1})$. Таким образом,

$$H_q(X^n, X^{n-1}) = 0 \ (q \neq n).$$

Предположим теперь, что $q=n$. Тогда из формул (2), (3) следует, что относительный цикл c имеет вид

$$c=\sum_{i=1}^{r} m_i f_i + C_q(X^{n-1}), \tag{4}$$

где f_i — характеристические отображения клеток из X_0.

Характеристические отображения клеток из X примем за элементы базы свободной группы Γ, порожденной клетками из X. Тогда формула (4) показывает, что можно определить эпиморфизм группы Γ на группу $C_q(X^n, X^{n-1})$ по формуле

$$\sum_{i=1}^{r} m_i f_i \to \sum_{i=1}^{r} m_i f_i + C_q(X^{n-1}).$$

Этот эпиморфизм является изоморфизмом, так как $\sum_{i=1}^{r} m_i f_i$ — цепь размерности n из $C_n(X^n)$, которая не может быть границей цепи размерности $n+1$ из $C_{n+1}(X^n)$. Действительно, рассмотрим равенство

$$\sum_{i=1}^{r} m_i f_i = \partial \sum_{i=1}^{r} n_i g_i, \qquad g_i \in C_{n+1}(X^n),$$

в применении к конечному подкомплексу X_0 комплекса X, содержащему образы отображений g_i. В силу частного случая теоремы 5, рассмотренного выше, мы получим $m_i=0$. Таким образом, теорема 5 доказана для случая произвольного *CW*-комплекса.

Теорема 6. *Если $p>q$, то включение $X^p \to X$ индуцирует изоморфизм*

$$H_q(X^p) \to H_q(X) \quad (p>q). \tag{5}$$

Доказательство. Из точной последовательности пары (X^{p+1}, X^p) для $q<p$ в силу теоремы 5 находим последовательность

$$0 \to H_q(X^p) \xrightarrow{\alpha_p} H_q(X^{p+1}) \to 0, \tag{6}$$

из которой вытекает, что α_p — изоморфизм.

Рассмотрим цикл $c \in C_q(X^p)$ $(q<p)$ и предположим, что он является границей в $C_q(X)$, т. е. $c=\partial a$ для некоторого $a \in C_{q+1}(X)$.

Пусть X_0 — конечный подкомплекс комплекса X, содержащий цепь a, а r — наибольшая размерность клеток подкомплекса X_0. Тогда

$$a \in C_{q+1}(X_0^r) \subset C_{q+1}(X^r).$$

При $r \leqslant p$ цикл c — граница в $C_q(X^p)$. Предположим, что $r>p$. Из изоморфизмов α_i $(i=p, p+1, \ldots, r-1)$, задаваемых точными последовательностями (6), следует

$$\alpha_{r-1}\alpha_{r-2} \ldots \alpha_p (c + B_q (X^p)) = 0,$$

откуда $c + B_q (X^p) = 0$. Поэтому c — граница и в $C_q (X^p)$. Мы показали, таким образом, что включение $X^p \to X$ индуцирует мономорфизм

$$H_q (X^p) \to H_q (X) \quad (q < p). \tag{7}$$

Пусть g — цикл из $C_q (X)$, X_0 — конечный подкомплекс комплекса X, содержащий цепь g, и r — число, введенное выше. Если $r \leqslant p$, то g — цикл из $C_q (X^p)$ и, следовательно, образ гомоморфизма (7) содержит класс гомологий цикла g. Если $r > p$, то имеет место изоморфизм

$$H_q (X^p) \to H_q (X^r),$$

показывающий, что и в этом случае класс гомологий цикла g лежит в образе гомоморфизма (7). Таким образом, мономорфизм (7) одновременно является и эпиморфизмом. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Включение $X^p \to X$ индуцирует эпиморфизм*

$$H_p (X^p) \to H_p (X). \tag{8}$$

Действительно, из точной последовательности пары (X^{p+1}, X^p) и из соотношения $H_p (X^{p+1}, X^p) = 0$ вытекает точная последовательность

$$H_p (X^p) \xrightarrow{\beta_p} H_p (X^{p+1}) \to 0,$$

откуда следует, что β_p — эпиморфизм.

Повторяя последнюю часть доказательства теоремы 6, устанавливаем справедливость теоремы 7.

Теорема 8. *Гомоморфизм включения*

$$j\colon H_p (X^p) \to H_p (X^p, X^{p-1}) \tag{9}$$

является мономорфизмом для каждой размерности p.

Действительно, из точной последовательности пары (X^p, X^{p-1}) получаем точную последовательность

$$H_p (X^{p-1}) \to H_p (X^p) \to H_p (X^p, X^{p-1}). \tag{10}$$

С другой стороны, имеем точные последовательности

$$0 \to H_q (X^i) \to H_q (X^{i+1}) \to 0 \quad (q > i + 1),$$

из которых вытекают изоморфизмы

$$H_q (X^{q-1}) \approx H_q (X^{q-2}) \approx \ldots \approx H_q (X^0) = 0. \tag{11}$$

Из точной последовательности (10) следует, что отображение (9) — мономорфизм.

Теорема 9. *Обозначим через* δ *гомоморфизм* $\delta = j\partial$, *где* j — *мономорфизм* (9), *а* ∂ — *граничный гомоморфизм пары* (X^p, X^{p-1}), *т. е.* ∂: $H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1})$. *Тогда последовательность*

$$H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \tag{12}$$

точная.

Действительно, последовательность

$$H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(X^{p-1}) \xrightarrow{j'} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

точная во втором члене, а j' — мономорфизм. Положив $\delta = j'\partial$, убеждаемся, что ядро гомоморфизма δ совпадает с ядром гомоморфизма ∂, т. е. с образом мономорфизма j. Это значит, что последовательность (12) точная.

Теорема 10. *В диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \arrow[d, "\partial"] \arrow[dr, "\delta"] & \\
H_p(X^p) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, "i"] & H_p(X^p, X^{p-1}) \\
H_p(X) & H_p(X^{p+1}). \arrow[l, "i''"']
\end{tikzcd}$$

образ гомоморфизма δ *совпадает с образом при мономорфизме* j *ядра изоморфизма* i.

Доказательство. Мы знаем, что образ гомоморфизма ∂ совпадает с ядром изоморфизма i'. Так как i'' — изоморфизм (теорема 6), то ядро изоморфизма i' совпадает с ядром изоморфизма $i = i''i'$. Следовательно, образ гомоморфизма ∂ совпадает с ядром изоморфизма i. Применив к этим подгруппам гомоморфизм j и приняв во внимание, что $\delta = j\partial$, получим теорему 10.

Теорема 11. *Группы* $H_p(X^p, X^{p-1})$ *и гомоморфизмы* δ: $H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ *образуют цепной комплекс, группы гомологий которого изоморфны группам гомологий CW-комплекса* X.

Доказательство. Из точной последовательности пары (X^p, X^{p-1}) вытекает, что последовательность

$$H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \xrightarrow{\partial} H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial'}$$
$$\xrightarrow{\partial'} H_{p-1}(X^{p-1}) \xrightarrow{j'} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

является точной в третьем члене. Поэтому $\partial' j = 0$ и, следовательно, $\delta'\delta = j'\partial' j \partial = 0$. Отсюда получаем, что группы $G_p = H_p(X^p, X^{p-1})$ и гомоморфизмы δ образуют цепной комплекс G.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[dr, "\delta"] & & \\
H_p(X^p) \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "i"'] & & H_p(X^p, X^{p-1}) \arrow[dl, "\partial'"'] \arrow[dr, "\delta'"] & \\
H_p(X) & H_{p-1}(X^{p-1}) \arrow[rr, "j'"] & & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})
\end{tikzcd}$$

В силу теоремы 7 имеет место изоморфизм

$$H_p(X) \approx H_p(X^p)/(\text{ядро } i). \tag{13}$$

Из теоремы 11, поскольку j и j' — мономорфизмы, мы получаем

$$H_p(X^p) \approx j(H_p(X^p)) = \text{ядро } \partial' = \text{ядро } \delta',$$

$$(\text{ядро } i) \approx j(\text{ядро } i) = (\text{образ } \delta).$$

Формула (13) означает теперь

$$H_p(X) \approx \frac{\text{ядро } \delta'}{\text{образ } \delta} = H_p(G) \tag{14}$$

Теорема 11 доказана.

ОГЛАВЛЕНИЕ