К. ЯКОБИ

ЛЕКЦИИ ПО ДИНАМИКЕ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
О. А. ПОЛОСУХИНОЙ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. Н. С. КОШЛЯКОВА

Цена 6 р., пер. 1 р.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1936 МОСКВА

C. G. J. JACOBI'S

VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK

HERAUSGEGEBEN VON A. CLEBSCH

Zweite, revidirte Ausgabe

BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON G. REIMER
1884

КАРЛ ГУСТАВ ЯКОБ ЯКОБИ.

Период конца 18-го столетия и первой половины 19-го века является одним из самых блестящих и плодотворных периодов в истории математики. К этому периоду относятся работы таких гениальных математиков, как Лагранж, Гаусс, Абель, Галуа. Вокруг упомянутых корифеев математической мысли группируется целая плеяда блестящих математиков, и среди них одно из первых мест бесспорно принадлежит Якоби, с именем которого связан целый ряд крупнейших открытий в области анализа, механики и теории чисел.

Карл Густав Якоб Якоби родился 10 декабря 1804 года в Потсдаме и среднее образование получил в местной гимназии. Об его математической эрудиции в то время можно судить по тому факту, что в старших классах гимназии он, вместо обычной программы, занимался изучением эйлеровского Introductio in analysis infinitorum. Окончив гимназический курс неполных 16-ти лет от роду, Якоби поступил в берлинский университет и там, помимо занятий математикой, уделял много времени изучению философии и древних языков. К окончанию университетского курса Якоби пришлось сделать выбор между математикой и филологией, и он после некоторого колебания решил посвятить себя изучению точных наук. Первые работы Якоби относятся к области высшей алгебры. Вопрос о разложении функций на алгебраические дроби служил темой его докторской диссертации, защищенной им в 1825 году. В следующем году кенигсбергский университет пригласил Якоби к чтению лекций сначала в качестве доцента, а затем и экстраординарного профессора. С кенигсбергским университетом, ординарным профессором которого Якоби стал с 1831 года, связан 17-ти летний период его жизни. Здесь он читал свои выдающиеся лекции, привлекавшие многочисленных слушателей не только со всех сторон Германии, но и из заграницы. По отзывам современников лекции Якоби отличались не только глубиной и оригинальностью содержания, но также и мастерским изложением. Выдающийся научный авторитет Якоби создал целую школу математиков, влияние которой можно проследить до настоящего времени. В Германии его непосредственными учениками были Кирхгофф, Клебш и Гессе; из заграничных ученых особенно следует упомянуть Лиувилля и Эрмита, занимавшихся под руководством Якоби в 40-х годах прошлого столетия. В Кенигсберге Якоби прожил почти безвыездно до 1843 года, но в этом году, почувствовав ухудшение своего здоровья, он по совету врачей провел 6 месяцев в Италии. Возвратившись с юга в Германию, Якоби поселился в Берлине, где и прожил до 1851 года, читая лекции в берлинском университете и состоя членом прусской академии наук. Смерть Якоби последовала 18 февраля 1851 года в результате заболевания оспой.

По размаху и глубине своей научной деятельности Якоби принадлежит к числу тех немногих математиков, которые оставили след своего гения почти во всех областях чистой и прикладной математики. Первые крупные открытия Якоби, сразу создавшие ему славу одного из первых математиков своего времени, относятся к теории эллиптических функций. Занявшись под влиянием Лежандра, с которым он состоял в долголетней переписке, изучением эллиптических интегралов, Якоби почти одновременно с Абелем поставил задачу об обращении этих интегралов и открыл главное свойство эллиптических функций — их двоякую периодичность. Теорию этих функций Якоби изложил в своем знаменитом сочинении „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ (1829 г.), не потерявшем своего значения и до настоящего времени. В этом сочинении Якоби показал какую роль при изучении высших трансцендентных функций играют бесконечные ряды вида $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a\nu^2+2b\nu}$, за которыми потомство закрепило название „функций тэта Якоби“. Кроме теории эллиптических функций, Якоби сделал крупнейшие открытия в области вариационного исчисления, теории чисел, дифференциальных уравнений и в особенности в теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка, где им указаны несколько основных методов интегрирования систем этих уравнений, известных под названием „методов Якоби“. С интегрированием дифференциальных уравнений в частных производных весьма тесно связаны исследования Якоби в механике систем материальных точек. После издания „Mécanique analytique“ Лагранжа эта область механики привлекала много исследователей, среди которых особенно выделяются имена Пуассона и Гамильтона. Со своей стороны Якоби не только посвятил этой области ряд выдающихся исследований но, придавая ей большое значение, прочел в зимнем семестре 1842/43 г. в кенигсбергском университете цикл лекций, записанных Борхардтом и изданных первым изданием в 1866 году Клебшем под названием „Лекции по динамике“. Полный перевод этих лекций Научно-техническое издательство и предлагает вниманию читателя. При переводе была поставлена цель, как можно точнее передать текст, сохранив по мере возможности особенности языка и характер изложения подлинника.

Краткое содержание „Лекций по динамике“ следующее:

Первые 6 лекций Якоби посвящает изложению основных принципов механики: принципу сохранения движения центра тяжести системы, принципу живой силы, принципу площадей и принципу наименьшего действия. С 10-ой лекции Якоби развивает теорию „множителя“ систем обыкновенных дифференциальных уравнений, являющуюся обобщением теории эйлеровского интегрирующего множителя. Якоби показывает каким образом можно в целом ряде случаев построить с помощью „последнего множителя“ всю систему n независимых интегралов. Изложив подробно теорию этого множителя, Якоби затем применяет ее к решению ряда механических задач. С 19-ой лекции Якоби, исходя из вариационного принципа Гамильтона, излагает тот метод интегрирования уравнения с частными производными первого порядка, который известен под названием „метода Якоби-Гамильтона“. В следующих лекциях этот метод применяется к ряду задач, взятых главным образом из области небесной механики. В 26 лекции Якоби излагает теорию эллиптических координат и показывает их приложение к разысканию геодезических линий эллипсоида, к задаче построения карт, к выводу основной теоремы Абеля и проч. Наконец, последние лекции Якоби посвящены изложению его классических методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка.

Несмотря на свою почти столетнюю давность лекции Якоби не потеряли своего значения и до настоящего времени; многое из них уже давно вошло в учебники по анализу и механике. Несомненно, что еще долгие годы эти замечательные лекции будут привлекать к себе читателя, ищущего не легкого изложения предмета, а желающего извлечь пользу из изучения сочинения, в котором богатство и глубина содержания, критическое отношение к разбираемым темам, оригинальность и мастерство в изложении сочетались в одно стройное целое.

Н. Кошляков.

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

ВВЕДЕНИЕ.

Предметом настоящих лекций будет исследование тех преимуществ, которые можно извлечь при интегрировании дифференциальных уравнений движения из особой формы этих уравнений. В „Аналитической механике" можно найти все, что касается задачи составления и преобразования дифференциальных уравнений, но для их интегрирования сделано очень мало. Упомянутая задача едва поставлена; единственно, что можно к этому отнести, есть метод вариации постоянных — метод приближений, который покоится на особенной форме дифференциальных уравнений, встречающихся в механике.

Среди большого количества задач, ставящихся в механике, мы будем рассматривать только те, которые относятся к системе n материальных точек, т. е. n тел, размерами которых можно пренебречь и массу которых предполагают находящейся в центре тяжести. Далее мы будем рассматривать только те задачи, при которых движение зависит только от взаимного расположения точек, а не от их скорости. Благодаря этому исключаются все задачи, при которых принимается в расчет сопротивление.

Сначала мы установим дифференциальные уравнения движения такой системы, а затем укажем приложимые к ней принципы. Этими принципами являются:

1. Принцип сохранения движения центра тяжести.
2. Принцип сохранения живой силы.
3. Принцип сохранения площадей.
4. Принцип наименьшего действия или, лучше сказать, наименьшей затраты силы.

Первые три из этих принципов дают интегралы составленной системы дифференциальных уравнений; последний не дает никакого интеграла, но дает символическую формулу, которая объединяет систему дифференциальных уравнений. Однако этот принцип не менее важен, чем остальные и Лагранж вначале даже вывел из него все свои результаты в механике. Позже, когда он захотел их строго обосновать, он отказался от принципа наименьшего действия и принял за основание своих выводов принцип виртуальных скоростей. *)

Таким образом, принцип наименьшего действия, бывший источником всех новых результатов, был трактован, как недостаточный.

Я присоединил новый принцип механики, который согласуется с принципами сохранения живой силы и сохранения площадей в том отношении, что тоже дает интеграл, но в остальном он совершенно другой природы. Во-первых, он является более общим, чем они, так как он имеет место всякий раз, когда дифференциальные уравнения содержат одни координаты; во-вторых, в то время, как те принципы дают первые интегралы в форме: функция от координат и их производных равна некоторой постоянной, т. е.

*) Сначала в сочинении о либрации луны, премированном Парижской Академией, а затем в „Аналитической механике".

интегралы, из дифференцирования которых проистекают уравнения, обращающиеся при использовании данных дифференциальных уравнений тождественно в нуль, — новый принцип дает последний интеграл в предположении, что предыдущие интегралы известны. Именно, если сделать предположение, что задача механики свелась к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными, то, согласно с этим принципом, можно найти множитель этого уравнения.

Таким образом в тех случаях, когда остальные принципы сводят задачу к дифференциальному уравнению первого порядка, новый принцип решает ее полностью. Сюда принадлежит задача притяжения точки неподвижным центром, причем закон притяжения произволен; далее следует притяжение к двум неподвижным центрам, в предположении, что имеет место притяжение по закону Ньютона, и наконец, вращение вокруг точки тела, не подверженного действию внешних сил. При притяжении к двум неподвижным центрам, кроме применения старых принципов, совершенно необходим еще интеграл, найденный Эйлером особым искусственным приемом; при помощи этого интеграла задача сводится к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными. Но это уравнение крайне сложно и его интегрирование есть одно из величайших мастерских творений Эйлера. При помощи нового принципа множитель этого уравнения получается сам собой.

Особенно надо отметить те классы задач, для которых одновременно имеют место принцип живой силы и принцип наименьшего действия. Гамильтон заметил, что в этом случае задача может быть сведена к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Если найдено одно его полное решение, то получаются тотчас все интегральные уравнения. Функцию, определенную этим дифференциальным уравнением в частных производных, Гамильтон называет характеристической функцией.

Прекрасное соотношение, найденное Гамильтоном, было несколько недоступно и туманно, вследствие того, что он свою характеристическую функцию заставил зависеть еще от второго дифференциального уравнения в частных производных. Присоединение этого условия усложняет ненужным образом все открытие, так как более точное исследование показывает, что второе дифференциальное уравнение в частных производных совершенно излишне.

Мы введем для определенности следующие термины: интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем называть интегралами или интегральными уравнениями, интегралы же уравнений в частных производных — решениями. Далее, для системы дифференциальных уравнений мы будем различать интегралы и интегральные уравнения. Интегралами пусть будут те первые интегралы, которые имеют форму: функция от координат и их производных равна постоянной, и ее производная при использовании данной системы дифференциальных уравнений обращается тождественно в нуль без помощи других интегралов; интегральными уравнениями называются все остальные интегралы. Таким образом принципы живой силы и площадей дают в этом смысле интегралы, а не интегральные уравнения.

Благодаря открытию Гамильтона система интегральных уравнений задач механики получила замечательную форму. Именно, если характеристическую функцию дифференцировать по произвольным постоянным, которые она содержит, то получатся интегральные уравнения данной системы дифференциальных уравнений. Это аналогично теореме Лагранжа, согласно которой дифференциальные уравнения задачи в том случае, когда имеет место принцип наименьшего действия, могут быть представлены как частные производные одной величины. Однако, Гамильтон хотя и установил ту форму интегральных уравнений, о которой идет речь и которую эти уравнения принимают при посредстве характеристической функции, но он ничего не сделал для разыскания этой последней. Этим мы и займемся и с помощью полученных результатов изучим: притяжение к неподвижному центру, притяжение к двум неподвижным центрам и движение точки, не подверженной силе тяжести, по трехосному эллипсоиду (определение этого движения совпадает с нахождением кратчайшей линии на эллипсоиде).

Соотношение, открытое Гамильтоном, дает новые заключения относительно метода вариации постоянных. Этот метод покоится на нижеследующем: интегралы системы дифференциальных уравнений динамики содержат известное число произвольных постоянных, значения которых в каждом отдельном случае определятся через начальные положения и начальные скорости движущихся точек. Если эти последние получают во время движения толчки, то благодаря этому изменяются только значения постоянных, а форма интегральных уравнений остается та же. Например, если планета движется по эллипсу вокруг солнца и получает во время движения толчок, то она будет после этого двигаться по новому эллипсу или, может быть, по гиперболе, во всяком случае по коническому сечению, а форма уравнений остается та же. Если такие толчки происходят не моментально, а продолжаются непрерывно, то явление можно рассматривать так, как будто постоянные изменяются непрерывно и притом таким образом, что эти изменения в точности изображают действие возмущающих сил. Эта теория вариации постоянных представится в течение нашего исследования в новом свете.

Принцип сохранения живой силы охватывает большой класс задач, к которым в частности принадлежит задача трех тел или более общая задача движения n тел, которые взаимно притягиваются.

Чем больше мы проникаем в природу сил, тем больше мы сводим все к взаимным притяжениям и отталкиваниям и тем важнее становится задача определения движения n взаимно притягивающихся тел. Эта задача принадлежит к категории тех задач, к которым приложима наша теория, т. е. которые приводятся к интегрированию уравнения в частных производных, откуда ясна необходимость изучения этих уравнений. Но в течение 30 лет *) занимаются только линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, в то время как для нелинейных не сделано ничего. Для трех переменных задачу решил уже Лагранж; для большего числа переменных Пфафф представил, хотя и имеющую достоинства, но несовершенную работу. По Пфаффу для решения уравнения в частных производных надо сначала проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений; после интегрирования этой последней составляют новую систему дифференциальных уравнений, которая содержит двумя переменными меньше; эту систему снова интегрируют и т. д. и таким образом интегрируют, наконец, уравнение в частных производных. Согласно с этим, Гамильтон, приведя дифференциальное уравнение движения к уравнению в частных производных, свел задачу к более трудной, так как по Пфаффу интегрирование уравнения в частных производных требует интегрирования ряда систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как механическая задача требует интегрирования только одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому большее значение имело здесь обратное приведение, при помощи которого уравнение в частных производных сводится к одной системе дифференциальных уравнений. Первая система Пфаффа совпадает как раз с той, которая получается в механике и можно показать, что остальные системы тогда не нужны. Очень часто приведение одной задачи к дру-

*) Эти лекции были прочитаны зимой 1842/43 г. (*Прим. Клебша*).

гой может быть произведено в обратном порядке, как это имеет место в рассматриваемом случае. В таких приведениях важно соотношение, которое устанавливается между двумя задачами. Соотношение, о котором здесь идет речь, указывает, что всякое достижение в теории уравнений в частных производных ведет за собой также и достижение в механике.

Более глубокое изучение дифференциальных уравнений механики показывает, что число интегрирований всегда может быть сведено к половине первоначального их числа, в то время как вторая половина заменяется квадратурами. Существует замечательная теорема, которая показывает, что между интегралами имеет место качественное различие. Именно, в то время как некоторые интегралы имеют значение только как квадратуры, существуют другие, которые содержат в себе все остальные.

Эта теорема формулируется следующим образом: „Если, кроме интеграла, данного принципом живой силы, известны еще два интеграла уравнений динамики, то из этих двух можно получить третий“. Примером тому служат так называемые теоремы площадей относительно трех координатных плоскостей; если две из них имеют место, то третья выводится из них.

Если по приведенной общей теореме из двух интегралов найден третий, то из этого последнего и одного из прежних находится четвертый и т. д., пока не вернемся к одному из данных. Существуют интегралы, которые при этой операции исчерпывают всю систему интегральных уравнений, в то время как для других цикл замыкается раньше. Смысл этой основной теоремы, известной уже в течение 30 лет, был в сущности скрыт. Она была открыта Пуассоном и была также известна Лагранжу, который пользовался ею как вспомогательной теоремой во второй части „Аналитической механики“, появившейся только после его смерти.*) Но этой теореме придавалось всегда совершенно иное значение; она должна была только показывать, что в некотором разложении известные члены не зависят от времени, и увидеть в ней ее теперешнее значение было не так легко. В этой теореме заложен в то же время фундамент для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

---

*) Méc. anal. sect. VII, 60. 61 (Band II, стр. 70 и след., изд. 3-е).

ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ИХ СИМВОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА. СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ.

Рассмотрим сначала свободную систему материальных точек; мы называем ее системой, так как предполагаем, что точки подвержены действию внешних сил не независимо друг от друга, когда каждая точка рассматривается самостоятельно, а что они воздействуют друг на друга так, что нельзя рассматривать одну отдельно от других. Предположим, что эта система будет свободной, т. е. такой, в которой точки подчиняются действию сил без сопротивления. Пусть какая-нибудь точка системы имеет массу m, прямоугольные ее координаты в момент времени t пусть будут x, y, z, а составляющие силы, на нее действующей, — X, Y, Z; тогда, как известно, существуют следующие уравнения движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

и подобные же уравнения имеют место для всех точек системы. Величины X, Y, Z зависят от координат всех n точек и могут также содержать их производные по времени t, что в частности всегда имеет место в том случае, когда в расчет принимается сопротивление.

Вышеприведенные дифференциальные уравнения движения могут быть представлены в чрезвычайно выгодной символической форме, для чего каждое из них, после приведения правой части к нулю, умножается на произвольный множитель и полученные произведения складываются. Получается таким образом уравнение:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\lambda+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\mu+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\nu+\text{ и т. д.}=0.$$

Если теперь потребовать, чтобы это уравнение имело место для всех значений величин $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, то оно будет заменять собою всю вышеприведенную систему дифференциальных уравнений. Для наглядности мы заменим множители $\lambda, \mu, \nu\ldots$ через $\delta x, \delta y, \delta z$, где x, y, z надо рассматривать просто как значки. Наше символическое уравнение тогда будет

$$\sum\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}=0,$$

где сумма относится ко всем точкам системы. Таким образом это уравнение должно иметь место для всех значений $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ Символические обозначения в нем имеют очень важное значение: именно, часто случается, что символ рассматривают, как величину и над ним производят выкладки и операции так, как это вообще делают с величинами; позже мы будем иметь пример этого рода.

Особого рассмотрения требует случай, когда принимаются во внимание только притяжения к неподвижным центрам или взаимные притяжения точек. В этом случае составляющие X, Y, Z, ... могут быть представлены как частные производные одной и той же величины. Лагранж сделал важное замечание, что если неподвижную точку соединить с подвижной, то косинусы углов, которые эта линия образует с тремя координатными осями, будут частными производными одной и той же величины — расстояния между обеими точками. Пусть неподвижная точка имеет координаты a, b, c, подвижная — координаты x, y, z; радиус вектор, соединяющий обе точки, пусть будет r. Проведем через неподвижную точку (a, b, c) три прямые, параллельные координатным осям, притом направленные в их положительные стороны; углы, которые радиус вектор образует с этими прямыми пусть будут α, β, γ. Тогда имеем следующие уравнения:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos\beta; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} = \cos\gamma. \text{*)}$$

Если теперь R есть сила, с которой точка (x, y, z) притягивается точкой (a, b, c), то составляющие, действующие на точку (x, y, z) в положительном направлении координат, будут:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z}$$

или, если мы положим

$$\int R\,dr = P,$$

эти составляющие будут:

$$-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Таким образом, составляющие являются частными производными одной и той же величины $-P$. Это же имеет место при взаимном притяжении двух точек p и p_1. Пусть их координаты будут x, y, z и x_1, y_1, z_1, их взаимное расстояние пусть будет r, так что

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2,$$

R пусть будет сила притяжения между p и p_1; тогда составляющие, действующие на p, будут:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z}$$

и составляющие, действующие на p_1:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z_1}.$$

Они соответственно равны и противоположны по знаку, так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x-x_1}{r},$$

так что

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial r}{\partial x}$$

и также

$$\frac{\partial r}{\partial y_1} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = -\frac{\partial r}{\partial z}.$$

---

*) В последующем всегда для частных производных будет употребляться знак ∂, для полных — знак d.

Если снова ввести

$$P = \int R\,dr,$$

то составляющие, действующие на p, будут

$$-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z},$$

а составляющие, действующие на p_1

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z_1}.$$

Рассмотрим теперь n точек, которые взаимно притягиваются. Их массы пусть будут $m_1, m_2, \ldots m_n$, их координаты $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots, x_n, y_n, z_n$, расстояние от m_1 до m_2 пусть будет обозначено через $r_{1,2}$, интеграл той функции от $r_{1,2}$, которая выражает притяжение, действующее между обеими точками, пусть будет обозначен через $P_{1,2}$, причем произведение масс m_1, m_2 подразумевается входящим как множитель $\left(\text{например, для закона Ньютона } P_{1,2} = -\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}}\right)$. В этом предположении составляющая силы, действующей на точку m_1 в направлении оси x, будет:

$$-\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n})}{\partial x_1}$$

и аналогично для двух других составляющих.

Поэтому имеем для точки m_1:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n})}{\partial x_1},$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n})}{\partial y_1},$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n})}{\partial z_1}.$$

Подобные же уравнения получаются для остальных точек системы: например, для точки m_2 заключенная в скобки величина, производная от которой берется, равна $P_{2,1} + P_{2,3} + \ldots + P_{2,n}$. Но величины P имеют то свойство, что каждая из них зависит от координат только тех двух точек, значки которых у ней проставлены; поэтому при дифференцировании по x_1, y_1 или z_1 уничтожаются производные от $P_{2,3}, P_{2,4}, \ldots, P_{2,n}, P_{3,4}, \ldots, P_{n-1,n}$, и остаются только производные от $P_{1,2}, P_{1,3}, \ldots, P_{1,n}$. Поэтому дифференциальные уравнения, относящиеся к первой точке, останутся совершенно без изменения, если в правой части в скобках к сумме $P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n}$ прибавить еще сумму всех остальных P. Подобное же изменение можно произвести в других уравнениях с величиной, стоящей в скобках, и тогда получатся во всех дифференциальных уравнениях системы производные одной и той же величины:

$$U = -(P_{1,2} + P_{1,3} + \ldots + P_{1,n} + P_{2,3} + \ldots + P_{2,n} + \ldots + P_{n-1,n}).$$

Таким образом, мы имеем для какой-нибудь точки системы уравнения:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Это замечание, что можно во все уравнения ввести одну и ту же величину U, кажется очень простым и однако то, что Эйлер проглядел это обстоятельство, было единственной причиной, помешавшей ему достигнуть общности результатов Лагранжа. Эйлер знал принцип сохранения живой силы только для притяжений к неподвижным центрам. В конце „Nova methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes“ Эйлер в „Appendix de motu projectorum“ удовольствовался очень несовершенными выражениями дифференциальных уравнений для взаимного притяжения. Впервые Даниил Бернулли отметил это в сочинении, представленном им в философский класс берлинской академии *) и, таким образом, придал принципу сохранения живой силы его истинное значение. После этого Лагранж применил это замечание к задачам, поставленным Эйлером в мемуаре „de motu projectorum“, и таким путем пришел к своим главным результатам.

Выражение U названо Гамильтоном *силовой функцией.* Частная производная этого выражения по какой-нибудь координате одной из рассматриваемых n масс дает силу, действующую в направлении этой координаты, силу, с которой эта масса притягивается всеми прочими.

Для притяжения по закону Ньютона силовая функция будет

$$U = \sum \frac{m_i m_{i_1}}{r_{i, i_1}}$$

и таким образом, в случае трех тел

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}}.$$

В теории приведения дифференциальных уравнений движения к одному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка всегда имеют дело с силовой функцией, поэтому введение ее имеет чрезвычайно большую важность. Предварительно мы сможем очень хорошо ее использовать для сокращенного изображения уравнений.

Интересно выяснить, — на сколько можно расширить границы рассматриваемых механических задач, не отказываясь от введения силовой функции.

При взаимном притяжении точек нет необходимости предполагать, что закон, по которому две точки взаимно притягиваются, будет один и тот же для любых двух точек системы; напротив, можно делать в этом отношении любое допущение, предполагая только, что притяжение зависит исключительно от расстояния и что какая-нибудь масса m_i притягивается другою массою m_{i_1} с той же самой силой, с какой m_{i_1} притягивается m_i. Отмеченное обобщение не бесполезно; так, например, Бессель высказал сомнение в том, что в мировой системе между любыми двумя телами имеет место один и тот же закон притяжения. Он высказал гипотезу, в которой вопрос рассматривался не с той точки зрения, что в законе меняется функция расстояния, а с той, что тело солнечной системы, например, само солнце, притягивает Сатурна другой массой, чем Урана. Эта гипотеза не помешает введению силовой функции. Но кроме взаимных притяжений масс могут также присоединиться притяжения к неподвижным центрам. Можно даже предположить, что, конечно, является только математической фикцией, что каждый из неподвижных

*) Mém. de l'acad. de Berlin, 1748.

центров действует не на все массы, а только на одну или на некоторое определенное число их. Например, если масса m_1 притягивается неподвижным центром, масса которого k и координаты которого a, b, c, то к силовой функции, если имеет место закон Ньютона, присоединится еще член:

$$\frac{km_1}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}};$$

подобные же члены получатся и от остальных масс, если неподвижный центр k действует также и на них. Наконец, могут присоединяться еще постоянные параллельные силы, которые тоже могут действовать не на все массы. Если, например, на точку m_1 действует постоянная сила (как, например, сила тяжести), составляющие которой по направлению координатных осей обозначим через А, В, Г, то к силовой функции U присоединится член:

$$\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma z_1;$$

подобные же члены присоединятся и от других масс системы, если на них действуют постоянные силы А, В, Г или иные. В случае неподвижных центров надо еще заметить, что когда они действуют на все входящие в задачу массы, что, конечно, всегда имеет место в природе, то тогда их можно рассматривать как подвижные массы. Благодаря этому, правда, войдут в силовую функцию лишние члены, именно те, которые выражают взаимное притяжение неподвижных центров, но эти члены являются постоянными и при дифференцировании выпадают.

Символическая форма, к которой мы привели дифференциальные уравнения движения, была:

$$\sum\left\{\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-X_i\right)\delta x_i+\left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-Y_i\right)\delta y_i+\left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-Z_i\right)\delta z_i\right\}=0;$$

это уравнение мы перепишем лучше так:

$$\sum m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\}=\sum\{X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\}. \quad (1)$$

В случае, когда можно ввести силовую функцию, имеем:

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\qquad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},\qquad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Поэтому

$$\sum m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\}=\sum\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta Z_i\right\}.$$

В этом уравнении, как и в предыдущем, надо рассматривать $\delta x_i, \ldots$ как произвольные множители, могущие принимать всевозможные значения, а $x_i, \ldots$ как их значки. Но, если на одно мгновение рассматривать δx_i, δy_i, δz_i как бесконечно малые приращения x_i, y_i, z_i, то по правилам дифференциального исчисления правая часть последнего уравнения будет:

$$\sum\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right\}=\delta U. \quad (\mathrm{A})$$

следовательно, имеем:

$$\sum m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\}=\delta U. \quad (2)$$

Здесь предварительно надо рассматривать δU только как сокращенное обозначение для суммы (А), которое совпадает с ней только в том случае, если δ рассматривать как бесконечно малые приращения. Хотя это обозначение только тогда имеет смысл, когда существует силовая функция, но его с успехом применяют в иных случаях даже и к более общему уравнению (1), чтобы сделать выкладки более удобными. Однако, так поступать можно только с условием, что в разложении δU частная производная $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ будет заменена через X_i. Таким образом, как правило, приходят к верным результатам, когда имеют дело с линейными подстановками. Этот смелый путь проложил Лагранж в своих туринских мемуарах, правда не обосновав его должным образом.

Обозначение δU также очень полезно, когда вместо координат x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n$ вводятся новые $3n$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$. Тогда нужно только подставить эти новые переменные в U и раскрыть по правилам дифференциального исчисления:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_{3n}}\delta q_{3n};$$

в то же время надо подставить вместо δx_i:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}}\delta q_{3n} = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Справедливость этого утверждения можно доказать следующим образом.

$3n$ дифференциальных уравнений движения имеют вид:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где i принимает все значения от 1 до n включительно. Представим себе, что эти $3n$ уравнений помножены соответственно на $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$ и сложены; тогда получится:

$$\sum_i m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right\} = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Если вместо q_k подставлять один за другим все q, то таких уравнений получится $3n$. Эти $3n$ уравнений вполне заменяют первоначальную систему уравнений, так что одна из этих систем всегда может быть поставлена вместо другой. Если мы умножим последнюю систему на произвольные множители $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s, \ldots \delta q_{3n}$ и сложим, то получим новое символическое уравнение, которое вполне заменяет последнюю систему дифференциальных уравнений, а потому также и прежнюю систему. Это символическое уравнение будет:

$$\sum_s\sum_i m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s = \sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s,$$

или, если суммирование в левой части этого уравнения произвести в обратном порядке

$$\sum_i m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\sum_s\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{d^2y_i}{dt^2}\sum\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{d^2z_i}{dt^2}\sum\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s\right\} = \sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Это уравнение — то же самое, в которое переходит (2), если вместо δU подставить $\sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$, а вместо $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ соответственно:

$$\sum_s\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s, \quad \sum_s\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s, \quad \sum_s\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Таким образом, доказано выше данное правило для подстановки новых переменных. В преобразованном уравнении снова надо рассматривать δq_s как независимые друг от друга величины, и тогда преобразованное символическое уравнение распадается на только что данную систему $3n$ уравнений.

Но не в этих удобствах для вычисления заключается важность наших символических уравнений (1) и (2). Истинное значение этого изображения состоит главным образом в том, что оно может быть сохранено также тогда, когда система уже больше не свободна, а имеются условные уравнения. выражающие связи между точками. Но тогда вариации нельзя больше рассматривать как совершенно произвольные, но как виртуальные вариации, т. е. такие, которые совместны с условиями. Если мы, например, предположим, что существуют три условные уравнения:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

то между вариациями существуют соотношения, которые их делают виртуальными и которые определяются следующими уравнениями:

$$\delta f = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \delta\psi = 0$$

или в развернутом виде:

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

Каждое условное уравнение дает, таким образом, линейное соотношение между $3n$ вариациями $\ldots \delta x_i, \delta y_i, \delta z_i \ldots$. Если имеются m условных уравнений, следовательно, также m соотношений между вариациями, то можно все вариации выразить через $3n - m$ из них и получить через их подстановку наше символическое уравнение свободным от m вариаций. Однако. это исключение m вариаций крайне сложно. Лагранж, введя систему множителей, нашел средство избежать эту трудность.

Вышеприведенное распространение нашего символического уравнения на систему, ограниченную условиями, само собой разумеется не доказано, но приведено только как историческое утверждение. Отметить это обстоятельство является, как кажется, необходимым, так как хотя Лаплас в Небесной механике это распространение и не доказал, а рассматривал также как историческое, подобно тому, как это сделано и здесь, тем не менее все же это считали за доказательство. Пуансо написал статью *) против этого мнения и говорит в ней очень справедливо, что математиков часто вводит в заблуждение очень длинный путь, пройденный ими, но иногда также и очень короткий. Длинный путь вводит их в заблуждение, когда они после долгих выкладок приходят наконец к тождеству и принимают его за теорему. Пример противоположного дает наш случай.

Доказывать это распространение ни в коей мере не является нашей задачей, скорей мы хотим его рассматривать как принцип, доказывать который не нужно. Таков взгляд многих математиков, в частности Гаусса. **)

---

*) Liouvilles Journal, vol. 3, p. 244.

**) Вероятно *Гаусс* сообщал об этом *Якоби* устно; ничего написанного *Гауссом* по этому поводу не найдено; так по крайней мере любезно сообщает г-н профессор *Шеринг*. (*Прим. Клебша*.)

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ.

Мы переходим теперь к доказательству общих принципов, которые имеют место для вышерассмотренных механических задач. Первый из них (ср. первую лекцию) есть принцип сохранения движения центра тяжести.

Возьмем сначала простейший случай, когда существует силовая функция; тогда мы имеем:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right\} = \delta U.$$

Предположим, что как U, так и условные уравнения зависят только от разностей координат, так что они не изменяются, если все x возрастают на одну и ту же величину, равно как если это происходит со всеми y или со всеми z. Тогда предположение:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n = \lambda$$
$$\delta y_1 = \delta y_2 = \ldots = \delta y_n = \mu$$
$$\delta z_1 = \delta z_2 = \ldots = \delta z_n = \nu$$

согласуется с условными уравнениями. При этом предположении мы получаем:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \lambda + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \mu + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \nu \right\} = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \lambda + \sum \frac{\partial U}{\partial y_i} \mu + \sum \frac{\partial U}{\partial z_i} \nu. \quad (1)$$

Но правая часть равна нулю. В самом деле, так как по нашему предположению U зависит только от разностей координат, то можно, положив

$$x_1 - x_n = \xi_1, \quad x_2 - x_n = \xi_2, \ldots x_{n-1} - x_n = \xi_{n-1},$$

представить величину U, поскольку она зависит от координат x, в форме:

$$U = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}},$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}},$$

так что:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

и точно так же

$$\sum \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \quad \sum \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0.$$

Поэтому наше уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu \right\} = 0.$$

И так как это уравнение должно иметь место для всех значений λ, μ, ν, то

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = 0, \quad \sum m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = 0, \quad \sum m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0.$$

Если мы теперь положим

$$\sum m_i = M, \quad \sum m_i x_i = MA, \quad \sum m_i y_i = MB, \quad \sum m_i z_i = MC,$$

так что A, B, C будут, как известно, координатами центра тяжести системы, то можно вместо предыдущих уравнений написать следующие:

$$\frac{d^2A}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2B}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2C}{dt^2} = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения после интегрирования дают:

$$A = \alpha^{(0)} + \alpha' t, \quad B = \beta^{(0)} + \beta' t, \quad C = \gamma^{(0)} + \gamma' t, \tag{3}$$

т. е. центр тяжести двигается по прямой линии, уравнение которой в текущих координатах A, B, C имеет вид

$$\frac{A-\alpha^{(0)}}{\alpha'} = \frac{B-\beta^{(0)}}{\beta'} = \frac{C-\gamma^{(0)}}{\gamma'},$$

и двигается по ней с постоянной скоростью

$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

В общем случае, когда силовая функция не существует, вместо уравнения (1) имеется следующее:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu \right\} = \sum X_i\lambda + \sum Y_i\mu + \sum Z_i\nu,$$

и так как оно имеет место для всех значений λ, μ, ν, то

$$\sum m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum X_i, \quad \sum m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \sum Y_i, \quad \sum m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \sum Z_i$$

или, если ввести координаты центра тяжести, то

$$M\frac{d^2A}{dt^2} = \sum X_i, \quad M\frac{d^2B}{dt^2} = \sum Y_i, \quad M\frac{d^2C}{dt^2} = \sum Z_i, \tag{4}$$

т. е. центр тяжести двигается так, как будто все действующие в системе силы перенесены параллельно самим себе в центр тяжести и как будто в то же время в центре тяжести сосредоточены все массы.

Если таким образом параллельно перенесенные силы будут в своем новом положении в равновесии, т. е., если

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0,$$

то на центр тяжести не действуют никакие ускоряющие силы. Это имеет место, если в системе действуют только взаимные притяжения, так как тогда действие и противодействие, будучи перенесены в одну и ту же точку приложения, взаимно уничтожаются (этот случай уже рассмотрен выше, так как тогда всегда существует силовая функция); но это не имеет места, коль скоро в задачу входят неподвижные центры.

Все вышесказанное имеет место конечно только тогда, когда условные уравнения зависят только от разностей координат x, y и z. Подобный случай дает веревочный многоугольник, если пренебречь толщиной веревки. Для того, чтобы в этом случае силовая функция также зависела только от разностей координат, мы должны предположить, что концы веревки не закреплены, так как иначе эти точки будут входить в задачу как неподвижные центры. Для совершенно свободной системы уравнения (4) годятся, конечно, при всех обстоятельствах. Если существует силовая функция, зависящая не только от разностей координат, что бывает, когда имеются неподвижные центры или постоянные силы, то в таком случае имеют место уравнения (4), а не уравнения (2).

В выражении: „Принцип сохранения движения центра тяжести“ слово сохранение выражает то, что уравнения движения центра тяжести сохраняют свой вид, как будто бы не было никаких условных уравнений. Если, например, представить себе, что у веревочного многоугольника соединение точек опущено, то уравнения движения центра тяжести не изменятся, так как они не зависят от условных уравнений. Изменение будет только в том, что суммы $\sum X_i$, $\sum Y_i$, $\sum Z_i$ получат другие значения, поскольку координаты отдельных точек будут другими функциями от времени. Но если, кроме того, эти суммы будут постоянными, что, например, имеет место, когда система подвержена только силе тяжести, то условные уравнения совсем не изменяют движения центра тяжести.

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ЖИВОЙ СИЛЫ.

Гипотеза относительно вариаций, совместная во всех обстоятельствах с условными уравнениями, заключается в том, что для всех значений i

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dt}\,dt, \qquad \delta y_i = \frac{dy_i}{dt}\,dt, \qquad \delta z_i = \frac{dz_i}{dt}\,dt.$$

Если мы введем эти значения вариаций в символическое уравнение (2) второй лекции, которое имеет место в случае существования силовой функции, то δU перейдет в dU, и мы получим после деления на dt:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{dx_i}{dt} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\frac{dz_i}{dt} \right\} = \frac{dU}{dt}.$$

Это уравнение можно непосредственно интегрировать; его интегралом служит выражение:

$$\frac{1}{2}\sum m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = U + h, \tag{1}$$

где h — произвольная постоянная интегрирования. Если мы обозначим элемент пути, проходимый массою m_i за время dt через ds_i, а ее скорость через v_i, то будем иметь:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right) = \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 = v_i^2$$

и предыдущее уравнение примет вид:

$$\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = U + h.$$

Это теорема живой силы. Живой силой точки называется квадрат ее скорости, умноженный на ее массу; живая сила системы равна сумме живых сил отдельных материальных точек. Поэтому можно уравнение (1) словами выразить так: *половина живой силы системы равна силовой функции, увеличенной на некоторую постоянную.*

Принцип сохранения живой силы, как показывает вывод, не зависит от условных уравнений и в этом, главным образом, и состоит его значение. Он имеет место, когда существует силовая функция; расширение случаев, в которых может быть введена эта функция, должно было вести за собой также распространение этого принципа. Поэтому, согласно нашему прежнему замечанию, именно Даниил Бернулли поднял этот принцип до его теперешнего общего значения, в то время как до него этот принцип знали только для притяжений к неподвижным центрам.

Вычитанием двух уравнений (1), имеющих место для двух различных моментов времени, можно исключить постоянную h и получить теорему: „*Если система передвигается с одного места на другое, то полуразность между живой силой системы для начала и для конца равна разности* *между значениями силовой функции для тех же моментов*". Таким образом, изменение живой силы зависит только от начального и конечного значения силовой функции, промежуточные же ее состояния не оказывают на него никакого влияния. Чтобы это сделать более наглядным, предположим, что точка движется по произвольной кривой от данной начальной точки к данной конечной точке; если теперь начальная скорость дана, то и конечная скорость будет одна и та же, какова бы ни была кривая, их соединяющая. Скорость при этом, конечно, должна быть взята по направлению касательной в сторону действительно происходящего движения. При этом в расчет не принимается та часть скорости, которая уничтожается сопротивлением кривой, когда первоначально сообщенный точке толчок действует не по направлению касательной к кривой. Эта независимость от формы пробегаемого пути имеет место также и для системы. Как следствие, отсюда получается теорема: „*Если движение системы таково, что она может вернуться в первоначальное положение, то при возвращении живая сила также будет прежней*"; при этом предполагается, что принцип живой силы вообще имеет место. В названии принципа слово „сохранение" относится как раз к этой независимости от формы проходимого пути или, что то же, от условных уравнений (так как ими определяется форма проходимого пути).

Происхождение выражения „живая сила" объясняется тем значением, которое этот принцип имеет в машиноведении, основой которого он стал со времени Карно. В этой дисциплине установлено, что половина живой силы, т. е. $\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$ равна работе машины или, как выражаются в этих практических вещах, $\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$ есть то, что оплачивается в машине. Дело обстоит так. В машиноведении принимают как принцип, поскольку не берется в расчет трение, что работа требуется только для передвижения массы в направлении действующей на нее силы (притом в сторону обратную ее действию), в то время как движение в направлении, перпендикулярном этому, происходит без работы. Далее предполагают что работа машины измеряется произведением движущей силы на путь который пройден приводимой ею в движение массой.

Горизонтальное передвижение тяжести, таким образом, не рассматривается как работа, и только ее поднятие будет работой, измеряющейся произведением поднятого груза на ту высоту, на которую он поднят. Это та работа, которая оплачивается, например, при забивке свай.

В системе материальных точек каждая из них есть точка приложения действующей на нее силы. В то время как при движении системы эти точки приложения смещаются, действующие на них силы также смещаются. Но смещение точек приложения происходит вообще не в направлении действующих на них сил, а под некоторым к ним углом; поэтому, чтобы получить работу системы, надо силу множить не на пройденный путь, а на проекцию пройденного пути на направление силы.

На точку m_i действуют силы:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}, \qquad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}, \qquad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2},$$

и притом они действуют параллельно координатным осям. Смещение m_i за элемент времени dt есть ds_i, проекции его на координатные оси будут соответственно dx_i, dy_i, dz_i; поэтому работа, затраченная на продвижение точки m_i за элемент времени dt, равна:

$$m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\, dx_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\, dy_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\, dz_i \right\}$$

При движении всей системы работа, произведенная за элемент времени dt, будет:

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2} dx_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} dy_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} dz_i \right\} = \frac{1}{2} d \left(\sum m_i v_i^2\right),$$

откуда получаем для работы за время от t_0 до t_1 выражение:

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum m_i v_i^2{}_{(t=t_1)} - \sum m_i v_i^2{}_{(t=t_0)} \right\}.$$

Таким образом, полуразность начального и конечного значений суммы $\sum m_i v_i^2$ есть мера работы системы. Это есть истинное основание того обстоятельства, что Лейбниц ввел для этой суммы название „живая сила", о происхождении которого было много споров.

В случае, когда силовая функция есть однородная функция и мы имеем дело со свободной системой, можно теореме живых сил, заключающейся в уравнении (1), придать очень интересную форму. Пусть U — однородная функция k-го измерения; тогда, как известно,

$$\sum \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = kU.$$

Если мы имеем дело со свободной системой, то можем положить

$$\delta x_i = x_i \omega, \qquad \delta y_i = y_i \omega, \qquad \delta z_i = z_i \omega,$$

где ω обозначает бесконечно малую величину и тогда, принимая во внимание уравнение, вытекающее из однородности U, получаем:

$$\delta U = kU \cdot \omega.$$

Поэтому наше символическое уравнение [уравнение (2) второй лекции] будет:

$$\sum m_i \left(x_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + z_i \frac{d^2z_i}{dt^2} \right) = kU,$$

где общий множитель ω отброшен. Если мы теперь прибавим сюда уравнение (1), умноженное на 2, то получим:

$$\sum m_i \left\{ x_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + y_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + z_i \frac{d^2z_i}{dt^2} + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} =$$
$$= (k+2)\, U + 2h,$$

или

$$\sum m_i \frac{d}{dt} \left(x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt} + z_i \frac{dz_i}{dt} \right) = (k+2)\, U + 2h,$$

или еще:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \frac{d^2}{dt^2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = (k+2)\, U + 2h,$$

или, если мы положим:

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2$$

и умножим на 2:

$$\frac{d^2 \left(\sum m_i r_i^2\right)}{dt^2} = (2k+4)\, U + 4h. \qquad (2)$$

Выражение $\sum m_i r_i^2$ может быть замечательным образом преобразовано, именно так, что будут входить уже не расстояния всех точек от начала координат, но расстояния точек друг от друга и расстояние центра тяжести от начала координат. Преобразования такого рода являются излюбленными формулами Лагранжа. То, о котором идет речь, получается следующим образом.

Легко видеть, что

$$\left(\sum m_i\right)\left(\sum m_i x_i^2\right)-\left(\sum m_i x_i\right)^2=\sum m_i m_{i'}\,(x_i^2+x_{i'}^2-2x_i x_{i'}),$$

где сумма с правой стороны распространяется только на различные значения i и i', причем каждая их комбинация принимается в расчет только один раз. Подобные же уравнения имеются для y и z; сложив эти три уравнения получим:

$$\left(\sum m_i\right)\left(\sum m_i\,(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\right)-\left(\sum m_i x_i\right)^2-\left(\sum m_i y_i\right)^2-\left(\sum m_i z_i\right)^2=$$
$$=\sum m_i m_{i'}\{(x_i-x_{i'})^2+(y_i-y_{i'})^2+(z_i-z_{i'})^2\}$$

Введем теперь, как это делали раньше, координаты центра тяжести и положим:

$$\sum m_i=M,\quad \sum m_i x_i=MA,\quad \sum m_i y_i=MB,\quad \sum m_i z_i=MC,$$

далее обозначим расстояние точек m_i, $m_{i'}$ друг от друга через $r_{i,i'}$; тогда

$$M\sum m_i r_i^2-M^2(A^2+B^2+C^2)=\sum m_i m_{i'}\,r^2_{i,i'}. \tag{3}$$

В это равенство надо подставить, как и раньше:

$$A=\alpha^{(0)}+\alpha' t,\quad B=\beta^{(0)}+\beta' t,\quad C=\gamma^{(0)}+\gamma' t.$$

После этой подстановки и двукратного дифференцирования по времени получим:

$$\frac{d^2\left(\sum m_i r_i^2\right)}{dt^2}=2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+\frac{d^2\left(\sum m_i m_{i'} r^2_{i,i'}\right)}{M\,dt^2}$$

и внося это в уравнение (2), найдем, что

$$\frac{d^2\left(\sum m_i m_{i'} r^2_{i,i'}\right)}{M\,dt^2}=(2k+4)\,U+4h-2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2).$$

Наконец, если положить

$$4h-2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)=4h',$$

то

$$\frac{d^2\left(\sum m_i m_{i'} r^2_{i,i'}\right)}{M\,dt^2}=(2k+4)\,U+4h'. \tag{4}$$

В уравнении (3) величины r_i обозначают радиусы векторы материальных точек системы, отсчитанные от начала координат, $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ есть радиус вектор центра тяжести, отсчитанный оттуда же; эти величины поэтому меняются, коль скоро переносится начало координат. Величины $r_{i,i'}$, напротив, независимы от выбора начала координат, так как они обозначают расстояния двух точек системы друг от друга. Возьмем центр тяжести за начало координат; тогда $A^2+B^2+C^2=0$; в то же время обозначим радиусы векторы, отсчитанные от центра тяжести, через ρ_i; тогда уравнение (3) перейдет в

$$M\sum m_i \rho_i^2=\sum m_i m_{i'} r^2_{i,i'} \tag{5}$$

Если из этого уравнения и из уравнения (3) исключить

$$\sum m_i m_{i'} r^2_{i,i'},$$

то получим:

$$\sum m_i r_i^2 = \sum m_i \rho_i^2 + M(A^2 + B^2 + C^2), \qquad (6)$$

т. е. сумма $\sum m_i r_i^2$, взятая для какой-нибудь точки (если эта точка рассматривается как начало координат), равна такой же сумме для центра тяжести, сложенной с суммой масс всех материальных точек, умноженной на квадрат расстояния взятой точки от центра тяжести. Отсюда видим, что $\sum m_i r_i^2$ будет минимумом для центра тяжести и что эта величина растет пропорционально квадрату расстояния от центра тяжести; поэтому $\sum m_i r_i^2$ принимает постоянное значение для всех точек, лежащих на поверхности шара, имеющего своим центром центр тяжести. Подобная же теорема имеет место для плоскости, где геометрическим местом точек, для которых $\sum m_i r_i^2$ остается постоянной, является круг.

Формулу (6) мы можем доказать также непосредственно. В самом деле, перенесем нашу прежнюю, совершенно произвольную систему координат параллельно самой себе, так чтобы новое начало координат лежало в центре тяжести, и обозначим в новой координатной системе координаты наших n материальных точек через ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ... , ξ_n, η_n, ζ_n; тогда мы имеем для всякого i:

$$x_i = \xi_i + A, \quad y_i = \eta_i + B, \quad z_i = \zeta_i + C,$$

где A, B, C, как координаты центра тяжести, определяются уравнениями:

$$\sum m_i = M, \quad \sum m_i x_i = MA, \quad \sum m_i y_i = MB, \quad \sum m_i z_i = MC.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum m_i r_i^2 &= \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 + \sum m_i z_i^2 = \\ &= \sum m_i \xi_i^2 + 2A \sum m_i \xi_i + A^2 \sum m_i + \\ &+ \sum m_i \eta_i^2 + 2B \sum m_i \eta_i + B^2 \sum m_i + \\ &+ \sum m_i \zeta_i^2 + 2C \sum m_i \zeta_i + C^2 \sum m_i.\end{aligned}$$

Но

$$MA = \sum m_i x_i = \sum m_i \xi_i + \sum m_i A = \sum m_i \xi_i + MA,$$

поэтому

$$\sum m_i \xi_i = 0$$

и также

$$\sum m_i \eta_i = 0, \quad \sum m_i \zeta_i = 0.$$

Отсюда мы получаем

$$\sum m_i r_i^2 = \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) + M(A^2 + B^2 + C^2),$$

что совпадает с формулой (6).

Подобная же формула получится для дифференциалов. В самом деле из наших предыдущих формул следуют дифференциальные формулы:

$$dx_i = d\xi_i + dA, \quad dy_i = d\eta_i + dB, \quad dz_i = d\zeta_i + dC,$$

$$\sum m_i d\xi_i = 0, \quad \sum m_i d\eta_i = 0, \quad \sum m_i d\zeta_i = 0$$

и отсюда мы получим

$$\sum m_i (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2) = \sum m_i (d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2) + M (dA^2 + dB^2 + dC^2)$$

или, если мы разделим на dt^2,

$$\sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} =$$

$$= \sum m \left\{\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\} + M \left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\}, \tag{7}$$

т. е. абсолютная живая сила системы равна относительной живой силе этой системы по отношению к центру тяжести (или, как говорят, вокруг центра тяжести), сложенной с абсолютной живой силой центра тяжести. Поэтому абсолютная живая сила системы всегда больше, чем ее относительная живая сила вокруг центра тяжести.

Относительную живую силу вокруг центра тяжести можно ввести в теорему живых сил. Эта теорема выражалась уравнением:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = U + h.$$

Если левую часть этого уравнения преобразовать при помощи уравнения (7), то получим:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left\{\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\} =$$

$$= U + h - \frac{1}{2} M \left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\},$$

но

$$h - \frac{1}{2} M \left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\} = h - \frac{1}{2} M (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2),$$

а это выражение мы обозначили ранее через h'.

Поэтому

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left\{\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\} = U + h'. \tag{8}$$

Таким образом, теорема живых сил имеет место как для абсолютной, так и для относительной живой силы вокруг центра тяжести; меняется при этом только постоянная h в h'. Кроме того не надо забывать, что здесь предполагается возможность применения принципа сохранения движения центра тяжести, так как на этом предположении покоится подстановка

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

вместо

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2.$$

Заметим, между прочим, что результат (8) можно предвидеть. В самом деле, когда имеет место принцип сохранения движения центра тяжести, тогда U

и условные уравнения зависят только от разностей координат; таким образом эти выражения остаются без изменения, если подставить ξ_i, η_i, ζ_i вместо

$$x_i,\ y_i,\ z_i,$$

где

$$x_i = \xi_i + A, \quad y_i = \eta_i + B, \quad z_i = \zeta_i + C.$$

Далее, мы имеем

$$\frac{d^2A}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2B}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2C}{dt^2} = 0,$$

поэтому

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2\xi_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2\eta_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}.$$

Таким образом символическое уравнение:

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\delta z_i\right) = \delta U,$$

и условные уравнения имеют место и тогда, когда вместо x_i, y_i, z_i подставлены величины ξ_i, η_i, ζ_i, т. е. эти уравнения годятся как для абсолютного, так и для относительного движения вокруг центра тяжести. То же должно быть с вытекающим отсюда следствием, — с теоремой живой силы, причем постоянная интегрирования может, конечно, меняться, что и на самом деле имеет место.

Из вышеприведенного рассуждения видно, что в случае, когда применим принцип сохранения движения центра тяжести, необходимо определить только относительное движение системы вокруг центра тяжести. После этого надо найти движение центра тяжести, и простым сложением этих двух движений получится абсолютное движение системы.

Солнечная система дает пример задач такой категории. Но мы знаем только ее относительное движение. У нас отсутствуют данные для определения движения центра тяжести, так как для этого должны были бы существовать настоящие неподвижные звезды, что очень сомнительно, и эти звезды должны были бы находиться от нас так близко, что их параллакс по отношению к линии длиною 40 миллионов миль (большая ось земной орбиты) до известной степени мог бы быть принят в расчет. Аргеландер в новейшее время пытался по идее, данной старшим Гершелем, определить отношения $\alpha' : \beta' : \gamma'$ [смотри уравнение (3) третьей лекции], т. е. направление движения центра тяжести, но это определение покоится на допущениях.

Возвращаемся теперь снова к уравнению (4), которое, в случае когда U есть однородная функция k-ого порядка, содержит принцип сохранения живой силы в интересной форме:

$$\frac{d^2\left(\sum m_i m_{i'} r_{i,i'}^2\right)}{M dt^2} = (2k + 4)\,U + 4h'.$$

Вместо этого, принимая во внимание уравнение (5), можно написать

$$\frac{d^2\left(\sum m_i \rho_i^2\right)}{dt^2} = (2k + 4)\,U + 4h',$$

где ρ_i — векторы, выходящие из центра тяжести. Для солнечной системы $k = -1$; так что имеем

$$\frac{d^2\left(\sum m_i \rho_i^2\right)}{dt^2} = 2U + 4h',$$

где

$$U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{i,i'}}.$$

Относительно этого уравнения можно привести много рассуждений. Если бы притяжение было обратно пропорционально не квадрату расстояния, но его кубу, то предыдущее уравнение можно было бы интегрировать. Действительно, в этом случае было бы $k = -2$, $2k + 4 = 0$, так что, если для сокращения обозначить $\sum m_i \rho_i^2$ через R, то

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4h'.$$

Но тогда солнечная система распалась бы, так как двукратное интегрирование дает

$$R = 2h't^2 + h''t + h''',$$

и с возрастанием времени R возрастал бы бесконечно. А так как $R = \sum m_i \rho_i^2$, то по крайней мере одно тело солнечной системы должно было бы удаляться на бесконечное расстояние от ее центра тяжести.

Подобные же рассуждения показывают, что для действительного случая солнечной системы, т. е. для притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, постоянная h' должна быть отрицательна, если солнечная система должна быть устойчивой. В самом деле, поскольку в солнечной системе действуют только притягивающие силы, силовая функция U по самой своей природе должна быть положительной величиной. Хотя Бессель сделал гипотезу, что солнце обладает по отношению к кометам отталкивающей силой, и таким образом объяснил то явление, что хвосты всех комет отклоняются от солнца, однако в этом еще вовсе нет уверенности и пока при общих рассмотрениях нужно отказаться от этой отталкивающей силы. Поэтому U наверное будет положительной величиной. Предположив это, мы получим, интегрируя уравнение

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2U + 4h'$$

в границах от 0 до t,

$$\frac{dR}{dt} - R_0' = \int_0^t (2U + 4h')\, dt$$

или, если α обозначает наименьшее значение U между границами 0 и t,

$$\frac{dR}{dt} - R_0' > (2\alpha + 4h')\, t,$$

где R_0' есть значение $\frac{dR}{dt}$ при $t = 0$. Второе интегрирование этого уравнения в границах от 0 до t дает, если R_0 есть значение R при $t = 0$,

$$R - R_0 - R_0't > (\alpha + 2h')\, t^2$$

или

$$R > R_0 + R_0't + (\alpha + 2h')\, t^2.$$

Здесь α наверное положительная величина, так как U по своей природе положительна. Если бы теперь $2h'$ было положительным, $\alpha + 2h'$ тоже было бы положительным и, таким образом, R при возрастании t возрастало бы бесконечно, т. е. солнечная система не была бы устойчива; итак, $2h'$ должно быть отрицательным. Но его числовое значение не должно превышать наибольшего значения, которое принимает U между 0 и t, так как иначе все элементы интеграла $2\int\limits_0^t (U+2h')\,dt$ были бы отрицательны; поэтому можно было бы положить

$$\frac{dR}{dt}-R_0'<-2\beta t,$$

где β есть положительная величина, именно наименьшее численное значение, которое принимает $U+2h'$ между 0 и t. Далее, интегрирование дает

$$R<R_0+R_0't-\beta t^2,$$

т. е. R приближалось бы при возрастании t к отрицательной бесконечности, что невозможно, так как R обозначает сумму квадратов. Все эти рассуждения можно обобщить в одно утверждение, что в границах интегрирования $U+2h'$, если предположить устойчивость солнечной системы, не может принимать только положительные или только отрицательные значения. $U+2h'$ должно, таким образом, все время колебаться от положительных значений к отрицательным, туда и обратно, т. е. U должно все время колебаться вокруг $-2h'$. Но эти колебания U должны быть заключены в определенных конечных границах; в самом деле предположим, что к некоторому времени U делается бесконечно большим; это может случиться только вследствие того, что два тела подходят бесконечно близко друг к другу в виду равенства $U=\sum\frac{m_i m_{i'}}{r_{i,i'}}$. Так как тогда их взаимное притяжение сделается бесконечно большим, то они никогда больше не смогут разъединиться; таким образом, с этого времени остается некоторое определенное $r_{i,i'}=0$, вместе с этим $U=\infty$; далее, если мы распространим интегрирование на промежуток, заключающий рассматриваемое время, то $\int\int(U+2h')\,dt^2$, а вместе с ним и R, будут принимать бесконечно большие значения, каково бы ни было h'. Таким образом другие тела солнечной системы должны были бы удалиться в бесконечность, а вместе с этим должно было бы нарушиться равновесие. Итак, U должно колебаться вокруг $-2h'$ и эти колебания заключены между определенными конечными границами. Пример такого поведения дают периодические функции с постоянным членом, равным $-2h'$. Это подтверждается формулами эллиптического движения. В них $U=\frac{1}{r}$, $-2h'=\frac{1}{a}$ (отбрасывая постоянный множитель, общий у этих двух величин), так что r должно колебаться около a, что происходит на самом деле; далее, разложение $\frac{1}{r}$ по средней аномалии должно содержать постоянный член $\frac{1}{a}$, и это также на самом деле имеет место. При взаимном притяжении двух тел отрицательные значения h' дают эллиптическое движение, $h'=0$ соответствует параболическому и положительные значения h' дают гиперболическое движение, что также согласно с нашими результатами.

Теорему, что U колеблется около $-2h'$ или $U+2h'$ около нуля, можно выразить еще так, что $2U+2h'$ колеблется около U; но согласно уравнению (8) $2U+2h'$ есть живая сила (вокруг центра тяжести); таким образом, значение живой силы колеблется вокруг значения силовой функции. Если в системе все расстояния очень велики, то силовая функция очень мала, то же будет по теореме живой силы с этой последней. Вместе с этим будут также очень малы скорости, или чем больше растут расстояния, тем меньше становятся скорости; на этом основывается устойчивость.

В этих рассуждениях и им подобных лежит зерно знаменитых исследований Лапласа, Лагранжа и Пуассона относительно устойчивости мировой системы. Именно, существует теорема: если предположить элементы орбиты какой-нибудь планеты переменными и разложить большую ось по времени, то оно войдет только как аргумент периодических функций, никаких членов пропорциональных времени не появится. Эту теорему доказал сначала Лаплас только для малых эксцентриситетов и для первой степени массы. Лагранж распространил ее *) одним росчерком пера на любые эксцентриситеты. Наконец, Пуассон доказал, **) что она применима также тогда, когда принимается в расчет вторая степень массы; эта работа одна из прекраснейших его работ. Если принять в расчет также третью степень массы, то время войдет уже вне периодических функций, но все еще будет на них умножаться; если еще принимается в расчет и четвертая степень, то время войдет уже не умноженным на периодические функции. Таким образом, для третьей степени результат дал бы все еще колебания вокруг некоторого среднего значения, но для $t = \infty$ бесконечно большие, а при принятии в расчет четвертой степени подобных колебаний вообще больше не имеется. Подобный же результат получаем при малых колебаниях; при принятии в расчет высших степеней отклонений приходим к выводу, что малые импульсы с возрастанием t приводят к все бóльшим колебаниям.

Но все эти результаты, строго говоря, ничего не доказывают. Действительно, когда пренебрегают высшими степенями отклонений, то предполагают, что время малó и отсюда нельзя выводить заключений для больших значений t. Поэтому не следовало бы удивляться даже тогда, если бы уже для первой и второй степени массы время входило бы вне периодических функций; в самом деле, право разлагать и отбрасывать высшие степени массы основано только на предположении, что t не превосходит известной границы. Таким образом мы двигаемся в некотором круге.

Наглядный пример этого дает маятник. Положение, когда тяжелая точка находится вертикально над точкой привеса, дает неустойчивое равновесие маятника. Мы получаем здесь время вне синуса и косинуса и заключаем отсюда по праву, что бесконечно малый импульс дает конечное движение; но было бы очень ошибочно из того обстоятельства, что время входит вне периодических функций, заключать, что движение маятника не периодично, так как в этом случае тяжелая точка вращается периодически вокруг своей точки привеса. Также ошибочно было бы из того результата, который получится при принятии в расчет высших степеней массы в солнечной системе, заключить, что она не устойчива.

---

*) Mém. de l'Institut, 1808.

**) Journal de l'école polytechnique, cah. 15.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ.

Мы нашли принцип сохранения движения центра тяжести в предположении, что силовая функция U и условные уравнения остаются неизменными, если все координаты x изменить на одну и ту же величину, все координаты y — на вторую, все координаты z — на третью. Эти изменения координат сводятся к тому, что переносится их начало, а координатные оси остаются параллельными.

Мы сделаем теперь другое предположение: условные уравнения не должны изменяться, если, при неподвижной оси x, оси y и z поворачиваются в их плоскости на любой угол. Если положить

$$y = r\cos v, \quad z = r\sin v,$$

то это равносильно увеличению угла v на произвольный угол δv. Если мы обозначим угол v для различных точек системы соответственно через $v_1, v_2, \ldots, v_i \ldots$, то U и условные уравнения должны оставаться без изменения, когда все v изменяются на один и тот же угол δv, т. е. они должны зависеть только от разностей $v_i - v_{i'}$. Сюда принадлежит совершенно свободная система и, вообще, всякий случай, где входят только расстояния между попарно взятыми материальными точками системы. Вводя r и v, получим для такого расстояния следующее выражение:

$$r_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (r_1\cos v_1 - r_2\cos v_2)^2 + (r_1\sin v_1 - r_2\sin v_2)^2 =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(v_1 - v_2);$$

оно зависит только от разности $v_1 - v_2$. Также сюда принадлежит случай, когда точки системы принуждены двигаться по поверхности вращения, ось которой есть ось x; в этом случае v совсем не входят в условные уравнения. Далее надо заметить, что если в задачу должны входить неподвижные точки, то они обязательно лежат на оси x.

При таком предположении относительно U и условных уравнений, можно все v_i одновременно увеличить на δv; тогда x_i останутся без изменения, а y_i и z_i варьируются, так как

$$y_i = r_i\cos v_i, \quad z_i = r_i\sin v_i.$$

Таким образом, получаем

$$\delta x_i = 0, \quad \delta y_i = -r_i\sin v_i\delta v = -z_i\delta v, \quad \delta z_i = r_i\cos v_i\delta v = y_i\delta v,$$

как виртуальные вариации координат для нашей задачи. Внесение этих значений в символическое уравнение (2) второй лекции приводит к уравнению:

$$\delta v\sum m_i\left\{-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right\} = \delta U;$$

для данных отклонений U остается неизменным, так что $\delta U=0$ и мы имеем

$$\sum m_i\left\{y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right\}=0. \qquad (1)$$

Заметим сразу же, что это уравнение в более общем случае, когда вместо δU в правой части стоит выражение $\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$, также имеет место, если только

$$\sum(Y_iz_i-Z_iy_i)=0. \qquad (2)$$

Если это выражение не равно нулю, то оно войдет в правую часть уравнения (1) на место нуля. Итак, будем предполагать, что или существует силовая функция U с указанными свойствами, или в общем случае, когда она не существует, выполняется условие (2), тогда имеет место уравнение (1) в вышеприведенной форме. Левая часть этого уравнения интегрируема, и после интегрирования мы получаем:

$$\sum m_i\left\{y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right\}=\alpha, \qquad (3)$$

где α обозначает постоянную интегрирования. Если снова ввести полярные координаты r_i и v_i, то (3) примет форму:

$$\sum m_ir_i^2\frac{dv_i}{dt}=\alpha. \qquad (4)$$

В этом уравнении содержится принцип сохранения площадей. Именно r^2dv, как известно, равняется удвоенному элементу площади в полярных координатах; таким образом, проинтегрировав еще раз уравнение (4) от 0 до t, получим теорему: *если каждую из площадей, описываемых в плоскости YOZ проекциями радиусов-векторов на эту плоскость, умножить на массу соответствующей материальной точки, то сумма таких произведений пропорциональна времени.* Это и есть знаменитый принцип сохранения площадей. Как сказано, он имеет место, если U и условные уравнения не изменяются при вращении осей y и z в их плоскости вокруг оси x. Эта гипотеза для условных уравнений может быть аналитически выражена так, что для каждого условного уравнения $f=0$ тождественно выполняется уравнение

$$\sum\left(z_i\frac{\partial f}{\partial y_i}-y_i\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)=0.$$

То обстоятельство, что при только-что употребленном преобразовании $ydz-zdy=r^2dv$ входит только дифференциал величины v, является во многих случаях очень важным обстоятельством. Между прочим, из этого преобразования вытекает, что выражение $ydz-zdy$, будучи помножено на однородную функцию — 2-го порядка от y и z, будет полным дифференциалом, так как оно представится как произведение dv на функцию только от v.

В случае, когда U и условные уравнения остаются без изменения также при повороте осей x и z вокруг оси y и осей x и y вокруг z, имеются, кроме уравнения (3), еще два подобных, а именно:

$$\sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right)=\beta; \qquad (5)$$

$$\sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right)=\gamma. \qquad (6)$$

Это имеет место, например, для n свободно движущихся в пространстве тел, и потому в этом случае всегда имеются четыре интеграла: три интеграла площадей и один интеграл живой силы.

Чрезвычайно замечательно обстоятельство, на которое мы уже обратили внимание во введении, что из этих интегралов площадей имеют место либо один, либо все три. То обстоятельство, что третья теорема площадей всегда следует из двух других, мы получим как чисто вычислительный результат, как простое следствие некоторого математического тождества. Если имеют место все три интеграла площадей, то можно, не боясь нарушить общности решения, две из постоянных α, β, γ взять равными нулю. В самом деле, эти постоянные определяются в каждой задаче условными уравнениями, но каковы бы ни были эти последние, всегда можно так повернуть координатные оси, что в новой системе координат две из постоянных исчезнут. Действительно, пусть новые координаты будут ξ_i, η_i, ζ_i; тогда общие формулы преобразования координат будут

$$\begin{aligned} \xi_i &= a x_i + b y_i + c z_i, \\ \eta_i &= a' x_i + b' y_i + c' z_i, \\ \zeta_i &= a'' x_i + b'' y_i + c'' z_i. \end{aligned}$$

Постоянные a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' удовлетворяют между прочим следующим девяти уравнениям:

$$\begin{aligned} &b'c'' - b''c' = a, \quad &&c'a'' - c''a' = b, \quad &&a'b'' - a''b' = c, \\ &b''c - bc'' = a', \quad &&c''a - ca'' = b' \quad &&a''b - ab'' = c', \\ &bc' - b'c = a'', \quad &&ca' - c'a = b'', \quad &&ab' - a'b = c''. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти уравнения, имеем:

$$\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt} = a\left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) + b\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) + $$
$$+ c\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right),$$

поэтому

$$\sum m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = a\alpha + b\beta + c\gamma. \tag{7}$$

Отсюда видно, что если интегралы площадей для какой-нибудь системы координат имеют место во всех трех координатных плоскостях, то они имеют место для каждой системы координат. *) Представим новую постоянную

---

*) Рассмотренные интегралы площадей, которые относятся к системе координат с неподвижным началом, нельзя применить к солнечной системе, так как в мировом пространстве нет ни одной неподвижной точки. Но легко убедиться положив

$$x_i = \mathfrak{x} + A; \quad y_i = \mathfrak{y}_i + B; \quad z_i = \mathfrak{z}_i + C,$$

где A, B, C — координаты центра тяжести (третья лекция), что интегралы площадей (3), (5), (6) все же будут иметь место, если вместо x_i, y_i, z_i подставить соответственно $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$, и в то же время α, β, γ изменить на

$$\begin{aligned} &M(\beta^{(0)}\gamma' - \gamma^{(0)}\beta') \\ &M(\gamma^{(0)}\alpha' - \alpha^{(0)}\gamma') \\ &M(\alpha^{(0)}\beta' - \beta^{(0)}\alpha'). \end{aligned}$$

Таким образом эти интегралы площадей годятся также для случая, когда за начало координат принят равномерно и прямолинейно двигающийся центр тяжести.

$a\alpha + b\beta + c\gamma$ в другой форме. Обозначим углы, которые ось ξ образует с осями x, y, z, через l, m, n; тогда

$$a = \cos l, \quad b = \cos m, \quad c = \cos n.$$

Если положим еще

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\lambda, \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\mu, \quad \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\nu,$$

то получим:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,(\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu),$$

Но так как $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, то λ, μ, ν можно рассматривать как углы, которые некоторая определенная прямая L образует с осями x, y, z. Обозначим угол, который эта прямая образует с осью ξ, через V; тогда

$$\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu = \cos V$$

и, следовательно,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos V.$$

Таким образом, постоянная интеграла площадей для плоскости η, ζ будет равна радикалу $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, умноженному на косинус угла, который ось ξ образует с прямой L, построенной вышеуказанным образом. То же самое имеет, конечно, место для двух других интегралов площадей в новой системе координат, только вместо угла V надо брать углы V' и V'', которые прямая L образует с осями η и ζ. Пусть теперь ось ξ совпадает с прямой L; тогда $V = 0$, $V' = 90°$, $V'' = 90°$, и потому $\cos V = 1$, $\cos V' = 0$, $\cos V'' = 0$. Отсюда видно, что постоянные интегралов площадей для плоскостей ξ, η и ξ, ζ действительно обращаются в нуль, и в то же время постоянная интеграла площадей для плоскости η, ζ будет равна

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

т. е. равна максимуму, которого она вообще может достигнуть, так как все ее значения заключаются в общей форме

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos V.$$

Лаплас назвал определенную таким образом плоскость η, ζ неизменяемой плоскостью; он думал, что ею можно воспользоваться для выяснения вопроса, происходили ли в солнечной системе толчки в течение тысячелетий, так как эти толчки должны были бы изменить ее положение. Обратно, если два измерения, произведенные в различное время, дают различные положения для этой плоскости, то в течение этого времени должны были произойти толчки. Но это еще наименее важное применение неизменяемой плоскости. Напишем для новых координат снова прежние буквы x, y, z, так что плоскость y, z будет неизменяемой, тогда мы имеем три интеграла площадей:

$$\sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \varepsilon; \quad \sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) = 0;$$

$$\sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right) = 0,$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Для случая двух тел можно дать этим интегралам площадей интересное геометрическое значение.

В этом случае имеем:

$$m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)+m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right)=c,$$

$$m_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)+m_2\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right)=0,$$

$$m_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)+m_2\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right)=0.$$

Исключая m_1 и m_2 из двух последних уравнений, получим:

$$\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right):\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right):\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right).\quad(8)$$

Эта пропорция имеет простое геометрическое значение. В самом деле, представим себе, что к кривой, описанной m_1 проведена касательная в m_1, через эту касательную и через начало координат проведена плоскость E_1 и к этой плоскости в начале координат восставлена нормаль N_1. Пусть косинусы углов, которые эта нормаль образует с координатными осями, будут p_1, q_1, r_1; тогда для точки m_1 имеем уравнения

$$p_1x_1+q_1y_1+r_1z_1=0,$$

$$p_1dx_1+q_1dy_1+r_1dz_1=0,$$

которые можно написать в форме двойной пропорции, именно:

$$p_1:q_1:r_1=(y_1dz_1-z_1dy_1):(z_1dx_1-x_1dz_1):(x_1dy_1-y_1dx_1).$$

Точно так же, сделав аналогичное построение для точки m_2, определив плоскость E_2, соответствующую плоскости E_1, и нормаль N_2, соответствующую нормали N_1, и найдя этим путем косинусы p_2, q_2, r_2, получим:

$$p_2:q_2:r_2=(y_2dz_2-z_2dy_2):(z_2dx_2-x_2dz_2):(x_2dy_2-y_2dx_2).$$

Отсюда вытекает, что уравнения (8) при помощи величин p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 можно написать так:

$$q_1:r_1=q_2:r_2;$$

геометрическое значение этого уравнения найти очень просто. Уравнения прямых N_1 и N_2 имеют вид:

$$\frac{x}{p_1}=\frac{y}{q_1}=\frac{z}{r_1}\quad\text{и}\quad\frac{x}{p_2}=\frac{y}{q_2}=\frac{z}{r_2}$$

и потому уравнения их проекций на плоскость yz будут:

$$\frac{y}{q_1}=\frac{z}{r_1}\quad\text{и}\quad\frac{y}{q_2}=\frac{z}{r_2}.$$

Но, так как $q_1:r_1=q_2:r_2$, то оба эти уравнения тождественны, т. е. N_1 и N_2 имеют одну и ту же проекцию на плоскость yz, т. е. N_1 и N_2 лежат в одной плоскости, перпендикулярной к yz и содержащей ось x, так как N_1 и N_2 проходят через начало координат. Отсюда вытекает для плоскостей E_1 и E_2, что они пересекают плоскость y, z по одной и той же прямой. Таким образом, для свободного движения двух масс m_1 и m_2 имеем следующую теорему:

Предположим, что в m_1 и m_2 проведены касательные к путям обеих точек и через эти касательные и центр тяжести системы (последний служит началом координат) проведены плоскости; тогда эти плоскости пересекут неизменяемую плоскость (плоскость y, z) по одной и той же прямой.

Это геометрическое значение установлено Пуансо. Я дал интересное его применение к задаче трех тел.*)

Так же как из теоремы живой силы была выведена устойчивость мировой системы относительно ее размеров, так и принцип площадей может служить тому, чтобы доказать ее устойчивость относительно формы ее путей. Ранее упомянутый вывод должен был показать, что большие оси эллипсов, по которым двигаются планеты, не могут превзойти известных границ; точно так же из теоремы площадей можно вывести, что эксцентриситеты могут изменяться только между известными границами, а от этого зависят формы путей. Но кроме недостатка ранее упомянутого вывода, именно, что при принятии в расчет высших степеней все же входят вековые члены, т. е. такие, которые содержат время вне периодических функций синуса и косинуса, последний вывод страдает неполнотой, а именно он годится только для небесных тел со сколько-нибудь значительными массами. Действительно, в уравнении, из которого вытекает результат, о котором идет речь, отдельные члены умножаются на массы небесных тел, а потому тела с малыми массами влияют так незначительно на все уравнение, что отсюда нельзя сделать никакого заключения относительно их эксцентриситетов. В самом деле, устойчивость формы пути не имеет места для комет; она не имеет места также и для малых планет, например для Меркурия, которого масса так незначительна, что она до сих пор оценивалась только по догадкам, а первая попытка вывести ее из наблюдений, сделанная Энке, была возможна только из-за чрезвычайной близости кометы, названной его именем, к Меркурию.

Если к взаимным притяжениям материальных точек присоединяются еще притяжения к неподвижным центрам, то принцип площадей перестает иметь место, если только эти центры не лежат на одной прямой. Если возьмем эту прямую за ось x, то теорема площадей будет применима в плоскости y, z, в то время как в двух остальных плоскостях она не имеет места. В самом деле, рассмотрим материальную точку m_i и представим себе плоскость E_i, проведенную через нее параллельно плоскости y, z. Равнодействующая всех притяжений, которые испытывает точка m_i от всех неподвижных центров, расположенных по оси x, будет направлена от этой точки к некоторой определенной точке оси x; поэтому можно разложить эту силу на две, из которых одна проходит через точку m_i параллельно оси x, другая же направлена от точки m_i к точке пересечения плоскости E_i с осью x и поэтому лежит в этой плоскости. Последнюю силу обозначим через Q_i и разложим ее на две составляющие, параллельные осям y и z. Если мы сохраним прежние обозначения, то составляющая, параллельная оси y, равна

$$Q_i \cos v_i,$$

а составляющая, параллельная оси z, равна

$$Q_i \sin v_i.$$

Поэтому в символическом уравнении движения к прежнему δU присоединяется еще выражение

$$\sum Q_i (\cos v_i \delta y_i + \sin v_i \delta z_i).$$

Таким образом мы получим, если под U подразумевать только ту часть силовой функции, которая происходит от взаимного притяжения точек, равенство

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right\} = \delta U + \sum Q_i (\cos v_i \delta y_i + \sin v_i \delta z_i)$$

*) Crelles Journal, Bd. 26, p. 115. Math. Werke, Bd. I., p. 30.

или, если положить, как выше,

$$\delta x_i = 0, \quad \delta y_i = -r_i \sin v_i \delta v = -z_i \delta v, \quad \delta z_i = r_i \cos v_i \delta v = y_i \delta v,$$

благодаря чему исчезнет δU, — равенство

$$\sum m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0,$$

которое после интегрирования дает:

$$\sum m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = a,$$

т. е. принцип сохранения площадей имеет место для плоскости, перпендикулярной к прямой, содержащей все неподвижные центры. Таким образом, в этом случае имеем два интеграла: интеграл живой силы и один интеграл площадей. Если же в задаче имеется несколько неподвижных центров, не лежащих на одной прямой, то не существует больше никакого интеграла площадей и имеется только интеграл принципа живой силы.

Если предположить, кроме того, что центры не неподвижны, но имеют собственное движение, независимое от других материальных точек системы, так что это движение есть данная функция времени, то и принцип живой силы также не применим. Такие случаи в природе встречаются; сюда принадлежит, например, притяжение кометы солнцем и Юпитером, если рассматривать орбиты солнца и Юпитера как данные, а комету как материальную точку, которая не имеет на эти орбиты никакого влияния. Здесь, как сказано, перестает действовать принцип живой силы, так как он покоится существенно на том, что для расстояния r материальной точки (x, y, z) от центра (a, b, c) выполняется дифференциальное уравнение

$$dr = \frac{x-a}{r} dx + \frac{y-b}{r} dy + \frac{z-c}{r} dz.$$

Но это дифференциальное уравнение имеет место в предположении, что a, b, c — постоянные, и оно перестает существовать в нашем случае, а вместе с ним и принцип живой силы. Правда, силы, действующие на отдельные точки, все-таки можно представить как частные производные некоторой функции U, но эта функция содержит теперь явно, кроме координат, еще и время, вследствие чего теперь уже не будет

$$\frac{dU}{dt} = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right),$$

и в правой части прибавится еще частная производная $\frac{\partial U}{\partial t}$, так что

$$\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right) = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Дифференциальное уравнение теоремы живых сил имело вид

$$\sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt} \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right).$$

Это уравнение интегрируемо, если правую часть можно заменить через $\frac{dU}{dt}$.

Но теперь мы должны заменить ее через $\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}$ и поэтому не можем больше интегрировать.

Если в уравнении

$$\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}$$

предположить функцию U разложенной на сумму $U+V$, где V явно содержит время, а U его явно не содержит, то получится

$$\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (9)$$

Это и есть то уравнение, которое получается вместо дифференциального уравнения принципа живой силы, но теперь оно уже не дает никакого интеграла. Точно так же не имеет места теперь и принцип площадей; таким образом нет ни одного принципа, который давал бы интеграл. Однако, я заметил, что существует одна гипотеза относительно движения центров, притом гипотеза очень близкая к только что упомянутому действительному случаю, при принятии которой из комбинации обоих принципов можно получить интеграл. Гипотеза состоит в том, что предполагают центры движущимися по кругам с одинаковой угловой скоростью вокруг одной и той же оси, так что координаты какого-нибудь центра (a, b, c) будут

$$a=\text{const},\quad b=\beta\cos nt,\quad c=\beta\sin nt,$$

где n для всех центров имеет одно и то же значение, а ось x есть общая ось вращения. Это, в самом деле, очень близко согласуется с тем случаем, который мы имеем в природе, так как солнце и Юпитер двигаются по эклиптике вокруг их общего центра тяжести по эллипсам с очень малым эксцентриситетом $\left(\text{приблизительно}=\frac{1}{20}\right)$, и эти эллипсы поэтому можно рассматривать как круги. Их время обращения одинаково велико, и если его положить равным T, то для определения n получится уравнение $nT=2\pi$.

Исследуем теперь, что в этом случае получится из дифференциального уравнения принципа площадей. Если мы, для общности, кроме центров возьмем не одну материальную точку, а целую систему точек, то силовая функция будет состоять из двух комплексов членов. Первый комплекс происходит от взаимного притяжения материальных точек и заключает члены вида

$$\frac{m_i m_{i'}}{\sqrt{(x_i-x_{i'})^2+(y_i-y_{i'})^2+(z_i-z_{i'})^2}}$$

или, если мы снова, как в предыдущем, введем r_i и v_i, вида

$$\frac{m_i m_{i'}}{\sqrt{(x_i-x_{i'})^2+r_i^2+r_{i'}^2-2r_ir_{i'}\cos(v_i-v_{i'})}}.$$

Второй комплекс происходит от притяжения центров и содержит члены вида

$$\frac{m_i\mu}{\sqrt{(x_i-a)^2+(y_i-b)^2+(z_i-c)^2}}$$

или, если мы здесь также введем r_i и v_i и в то же время положим $b=\beta\cos nt$, $c=\beta\sin nt$, вида

$$\frac{m_i\mu}{\sqrt{(x_i-a)^2+r_i^2+\beta^2-2r_i\beta\cos(v_i-nt)}}. \qquad (B)$$

Оба комплекса остаются без изменения, если все v_i увеличить на одну и ту же величину и в то же время увеличить t на n-ую часть этой величины, т. е., если для всякого значения i положить

$$\delta v_i = n\delta t,$$

каковые вариации в нашем случае будут виртуальными. Обозначим первый комплекс членов через U, а второй через V.

В этом случае в общем символическом уравнении

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i \right)$$

войдет $U+V$ вместо U и таким образом правая его часть будет равна

$$\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i \right) + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i \right).$$

Так как t не входит явно в U, то первая сумма равна δU; но в V входит t во всяком случае явно, поэтому, чтобы вторая сумма дала полностью δV, ей нехватает еще члена $\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$, т. е. она равна $\delta V - \frac{\partial V}{\partial t}\delta t$, и мы имеем

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right) = \delta U + \delta V - \frac{\partial V}{\partial t}\delta t.$$

Но данные выше вариации таковы, что для них U и V остаются неизменными, поэтому мы имеем $\delta U = 0$ и $\delta V = 0$. Далее,

$$\delta x_i = 0, \quad \delta y_i = -r_i \sin v_i \delta v_i = -nz_i\delta t, \quad \delta z_i = r_i \cos v_i \delta v_i = ny_i\delta t,$$

так что

$$n \sum m_i \left(y_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{10}$$

Это и есть то уравнение, которое в нашем случае заменяет дифференциальное уравнение принципа площадей; V есть агрегат членов формы (B), где n должно быть одно и то же во всех членах, все же остальные величины могут принимать различные значения при переходе от одного члена к другому. Ранее мы имели уравнение (9)

$$\sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2} \right) = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t}$$

или:

$$\frac{1}{2}\sum m_i \frac{d}{dt}\left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Если из этого уравнения вычесть уравнение (10), то получим

$$\frac{1}{2}\sum m_i \frac{d}{dt}\left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} - \\ - n\sum m_i \left(y_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2y_i}{dt^2} \right) = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

или, интегрируя,

$$\frac{1}{2}\sum m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} - \\ - n\sum m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = U + V + h''. \tag{11}$$

Это и есть принцип, возникший из комбинаций принципа живой силы и принципа площадей; он имеет место, когда центры притяжения двигаются с равномерной скоростью вокруг некоторой оси вращения. К этой категории принадлежит, например, движение на поверхности земли или поблизости к ней, так как земля есть агрегат таких центров притяжения. С этой точки зрения, по настоящему, должна была бы быть рассматриваема задача, если бы разница плотности земли между различными меридианами была бы заметной. При таком предположении и если бы в то же время луна была бы ближе к земле и последняя двигалась бы медленнее, притяжение луны землею было бы, между прочим, также функцией от часового угла. Тогда моменты инерции относительно различных меридианных плоскостей должны были бы быть различны, что выявилось бы из наблюдений.

ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ.

Мы переходим теперь к новому принципу, который уже не дает, подобно прежним, интеграла. Это есть „principe de la moindre action“, неправильно называемый принципом наименьшего действия. Значение его заключается, во-первых, в той форме, которую он придает дифференциальным уравнениям движения, во-вторых, в том, что он дает функцию, которая обращается в минимум, когда удовлетворяются эти дифференциальные уравнения. Хотя такой минимум существует во всех задачах, но, как правило, неизвестно, где его искать. Поэтому, в то время как самое интересное в этом принципе то, что вообще *можно получить* минимум, раньше придавали преувеличенное значение тому, что такой минимум существует. Пример принципа, о котором идет речь, встречается в уже ранее цитированной статье Эйлера „de motu projectorum“.

После того как он доказал этот принцип для случая притяжения к неподвижным центрам, ему не удалось доказать его для взаимных притяжений, для которых ему было неизвестно значение принципа живой силы; поэтому он довольствуется тем, что говорит, что для случая взаимных притяжений выкладки были бы слишком длинны, но принцип наименьшего действия должен и здесь иметь место, так как основные положения здоровой метафизики показали, что силы природы всегда обязательно должны производить наименьшее действие (благодаря, как он думал, присущей телам инертности). Но этого не показывает ни здоровая и никакая вообще метафизика и на самом деле Эйлера побудило к такой фразе только неправильное понимание названия „наименьшее действие“. Мопертюи хотел этим названием выразить, что природа свои действия производит с наименьшей затратой сил и в этом заключается истинное значение названия „principe da la moindre action“.

Почти во всех учебниках, даже и в лучших, как Пуассона, Лагранжа и Лапласа, этот принцип представлен так, что по моему мнению его нельзя понять. Именно, говорится, что интеграл

$$\int \sum m_i v_i ds_i,$$

$\left(\text{где } v_i = \frac{ds_i}{dt} \text{ обозначает скорость точки } m_i\right)$ должен быть минимумом, если интегрирование производится от одного положения системы до другого. При этом, правда, говорится, что теорема применима только в том случае, если имеет место теорема живых сил, но при этом забывают сказать, что при помощи теоремы живых сил необходимо исключить из предыдущего интеграла время и все свести к пространственным элементам. Минимум предыдущего интеграла надо понимать так, что, когда даны начальное и конечное положения системы, из всех возможных путей, ведущих из одного положения в другое, для действительно пробегаемого пути интеграл будет минимумом.

Исключим время из предыдущего интеграла. Так как $v_i = \frac{ds_i}{dt}$, то

$$\int \sum m_i v_i ds_i = \int \frac{\sum m_i ds_i^2}{dt}.$$

Но по теореме живых сил

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = U + h,$$

или

$$\frac{\sum m_i ds_i^2}{dt^2} = 2(U+h)$$

$$\frac{1}{dt} = \sqrt{\frac{2(U+h)}{\sum m_i ds_i^2}}.$$

Если внести это значение $\frac{1}{dt}$, то получится:

$$\int \sum m_i v_i ds_i = \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения дают после интегрирования $3n$ координат задачи, выраженных через время; но из двух таких выражений для координат можно исключить время и получить при желании $3n-1$ координат, выраженных через одну из них, например через x_1. При таком предположении можно вместо $\sum m_i ds_i^2$ подставить $\sum m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2 dx_1^2$, и тогда получится интеграл в форме

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2} dx_1,$$

с которой связано теперь вполне определенное понятие.

Напишем теперь, чтобы не давать ни одной из координат предпочтения, интеграл в прежней форме

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2};$$

тогда мы можем принцип наименьшего действия выразить так:

Если даны два положения системы (т. е., если известны значения, которые принимают для $x_1 = a$ и $x_1 = b$ остальные $3n-1$ координат) и интеграл

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2}$$

распространен на весь путь системы от первого ее положения до второго, то его значение будет для истинного пути минимумом по сравнению со всеми остальными возможными путями, т. е. с такими, которые совместны с условиями системы (если таковые существуют). Таким образом

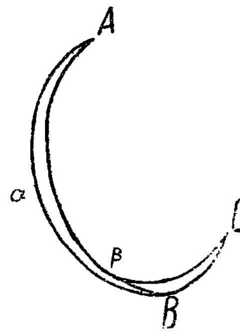
$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2}$$

будет минимумом или

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2} = 0. \qquad (1)$$

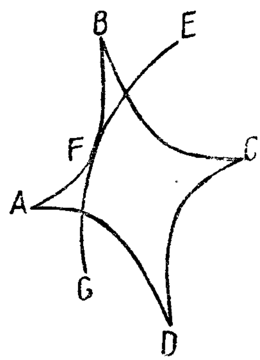
Теперь уже трудно найти метафизическую причину для принципа наименьшего действия, когда он, как это необходимо, выражен в этой истинной форме. Существуют minima совсем другого рода, из которых тоже можно получить дифференциальные уравнения движения и которые в этом отношении обещают много больше.

Принципу наименьшего действия должно быть поставлено еще одно ограничение. Именно, минимум интеграла имеет место не между двумя любыми положениями системы, но только тогда, когда конечное и начальное положения достаточно близки друг к другу. Мы сейчас объясним, какую границу здесь нельзя переходить.



Черт. 1.

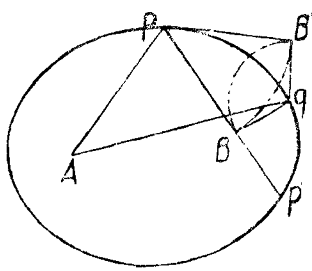
Рассмотрим сначала один особенный случай. Пусть единственная материальная точка двигается по данной поверхности под влиянием начального толчка, и пусть на нее не действуют силы притяжения. В этом случае $U=0$, а сумма $\sum m_i ds_i^2$ превращается в mds^2; таким образом $\int ds$ или s будет минимумом, т. е. материальная точка описывает кратчайшую линию на данной поверхности. Но кратчайшие линии сохраняют свое свойство быть минимумом только между известными границами; например, на шаре, где кратчайшими линиями служат большие круги, это свойство прекращается как только будем рассматривать длину, которая больше чем 180°. Чтобы это увидеть, не надо обращаться к помощи дополнения до 360°, что ничего не доказало бы, так как minima должны иметь место всегда только по отношению к бесконечно близко лежащим линиям; мы убеждаемся в этом иным способом. Пусть B будет полюсом A; продолжим большой круг $A\alpha B$ через B до C и проведем большой круг $A\beta B$ бесконечно близко к $A\alpha B$; тогда $A\alpha BC = A\beta B + BC = A\beta + \beta B + BC$. Далее, пусть β лежит бесконечно близко к B, а βC есть дуга большого круга; тогда $\beta C < \beta B + BC$ и, следовательно, ломаная линия $A\beta + \beta C$ меньше, чем большой круг $A\alpha BC$. Таким образом, на шаре 180° есть граница минимальных свойств. Чтобы эту границу определить в общем случае, я путем более глубоких исследований установил следующую теорему.



Черт. 2.

Если из какой-нибудь точки поверхности провести по всем направлениям кратчайшие линии, то могут встретиться два случая: две бесконечно близкие кратчайшие линии либо проходят все время одна возле другой, не пересекаясь, либо они вновь пересекаются, и тогда последовательность всех точек пересечения образует их огибающую кривую. В первом случае кратчайшие линии никогда не перестают быть кратчайшими, во втором они будут таковыми только до точки касания с огибающей кривой.

Первое имеет место, как это само собой разумеется, для всех развертывающихся поверхностей, так как на плоскости прямые, проходящие через одну точку, никогда вновь не пересекаются; далее, как я нашел, это имеет место для всех вогнуто-выпуклых поверхностей, т. е. для таких, у которых два взаимно перпендикулярные нормальные сечения имеют радиусы кривизны, направленные в противоположные стороны, например для однополостного гиперболоида и для гиперболического параболоида. Из этого, впрочем, не следует, что не могут существовать вогнуто-вогнутые поверхности, которые принадлежали бы к этой категории, по крайней мере невозможность такого случая не доказана. Пример второго рода дает эллипсоид вращения. Возьмем его мало отличающимся от шара; тогда кратчайшие линии, которые проходят через любую точку поверхности, хотя и не будут, как на шаре, пересекаться все в полюсе, но будут в окрестности полюса иметь маленькую огибающую кривую. При поверхностном рассмотрении это обстоятельство кажется парадоксальным: действительно, огибающая кривая вообще имеет то свойство, что система кривых, которые она огибает, не может входить во внутреннюю ее область. Поэтому должна была бы существовать часть поверхности, обладающая свойством, что в любую точку внутри ее нельзя провести из данной точки кратчайшую линию, что невозможно. Но парадокс этот выясняется при более точном исследовании огибающей кривой, как видно из прилагаемого чертежа, на котором $ABCD$ изображает огибающую кривую, которая приблизительно имеет вид эволюты эллипса, а EFG — кратчайшую линию. Она выходит из E, входит в часть поверхности, ограниченную огибающей, касается ее в точке F и перестает с этого места быть кратчайшей линией. Это свойство кратчайших линий, что они перестают быть таковыми после соприкосновения с общей их огибающей, найдено, как сказано, путем глубоких исследований; но после того как оно найдено, его легко увидеть, потому что, когда две бесконечно близкие кратчайшие линии пересекаются, в их точке пересечения обращается в нуль не только первая, но и вторая вариация, и разность сводится, таким образом, к бесконечно малым величинам 3-го порядка, т. е. не будет никакого минимума.



Черт. 3.

Мы возвращаемся теперь снова к общим рассмотрениям минимума для принципа наименьшего действия. Произвольные постоянные, которые получаются после интегрирования дифференциальных уравнений движения, определятся всего проще через начальные положения и начальные скорости движения; через эти начальные данные определятся все постоянные интегрирования, так что не может быть никакой многозначности. Но при принципе наименьшего действия предполагаются заданными не начальные положения и начальные скорости, а начальные и конечные положения системы. Поэтому, чтобы найти истинное движение, надо решить уравнения, определяющие начальные скорости из конечных положений. Эти уравнения не обязательно будут линейными, вследствие чего можно получить несколько систем значений начальных скоростей, и им соответствует тогда несколько движений системы из данных начальных положений в данные конечные положения, и все эти движения дают minima относительно бесконечно близких к ним движений. Если теперь интервал начальных и конечных положений изменять непрерывно, начиная от нуля, то различные системы значений, которые получаются при решении уравнений для начальных скоростей, также будут изменяться. Когда при таком изменении систем значений наступит случай, что две системы значений равны друг другу, то это и будет границей, за которой нет больше минимума.

Эту теорему, которая, кстати сказать, не имеет никакого значения для механики в узком смысле, я опубликовал в журнале Крелля, *) но только как заметку без доказательства. Как пример к ней, рассмотрим движение планет вокруг солнца. Даны: фокус A эллипса, как местоположение солнца, большая ось эллипса и кроме того два положения p и q планеты. Обозначим второй, пока неизвестный, фокус через B; тогда через данные отрезки определятся расстояния точки B от обоих положений планеты p и q, а именно, эти расстояния равны $a - Ap$ и $a - Aq$, благодаря известному свойству эллипса. Но это дает для B два положения B и B', одно выше, другое

*) Bd. 17, p. 68 и след

ниже линии, соединяющей p и q. Таким образом, получаются два эллипса, а вместе с тем также два движения планеты, которые возможны при заданных отрезках. Чтобы оба решения совпали, точки B и B' должны лежать на линии, соединяющей p и q, т. е. p, B и q должны лежать на одной прямой, а тогда q совпадает с p'. Таким образом, p' обозначает границу, за которую нельзя распространять интеграл, имеющий начало в p, так чтобы он не переставал быть минимумом.

Мы возвращаемся теперь к собственно механическому значению принципа наименьшего действия. Оно состоит в том, что в уравнении (1) этой лекции заключаются основные уравнения динамики в том случае, когда имеет место принцип живой силы. В самом деле, уравнение (1) было:

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i ds_i^2} = 0.$$

Здесь после исключения времени все координаты можно выразить как функции одной из них, например x_1, и поэтому можно написать:

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i \left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2} \, dx_1 = 0$$

или

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dx_1}\right)^2\right\}} \cdot dx_1 = 0.$$

Если положим теперь

$$\frac{dx_i}{dx_1} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dx_1} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dx_1} = z_i',$$

то

$$\delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \, dx_1 = 0.$$

Введя обозначения

$$2(U+h) = A, \quad \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = B, \quad \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = P,$$

имеем наконец

$$\delta \int P dx_1 = 0,$$

откуда получается правило: подставляем в $\int P dx_1$ вместо x_i, y_i, z_i соответственно $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$, где δx_i, δy_i, δz_i обозначают произвольные функции, умноженные на бесконечно малый множитель α и не обращающиеся в бесконечность внутри границ интегрирования, разлагаем по степеням α и тогда полагаем член, умноженный на первую степень α, равным нулю. При этом надо заметить, что, во-первых, так как границы интегрирования даны, то от них не будет никаких вариаций, во-вторых, что по той же причине все вариации на границах должны исчезать и, наконец, что δx_1 вообще есть нуль, так как x_1 есть независимая переменная. Поэтому по правилам вариационного исчисления получаем:

$$\delta \int P dx_1 = \int \delta P dx_1 = \int \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial P}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial P}{\partial z_i}\delta z_i + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial P}{\partial x_i'}\delta x_i' + \frac{\partial P}{\partial y_i'}\delta y_i' + \frac{\partial P}{\partial z_i'}\delta z_i'\right) dx_1 .$$

Но

$$\int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\,\delta x_i' dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\,\frac{d\delta x_i}{dx_1}\,dx_1 = \frac{\partial P}{\partial x_i'}\,\delta x_i - \int \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1}\,\delta x_i dx_1$$

или, так как δx_i исчезает на границах интегрирования,

$$\int \frac{\partial P}{\partial x_i'}\,\delta x_i' dx_1 = -\int \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1}\,\delta x_i dx_1.$$

Подобные же уравнения получатся для y_i и z_i; пользуясь ими, получим:

$$\delta \int P dx_1 = \int \sum \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial y_i'}}{dx_1} \right) \delta y_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial z_i'}}{dx_1} \right) \delta z_i \right] dx_1.$$

Но

$$P = \sqrt{A}\,\sqrt{B}, \quad A = 2(U+h), \quad B = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\partial A}{\partial x_i} = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{\partial B}{\partial x_i'} = \sqrt{\frac{A}{B}}\,m_i x_i':$$

следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d\left(m_i \sqrt{\dfrac{A}{B}}\,\dfrac{dx_i}{dx_1}\right)}{dx_1}.$$

Если теперь положим (см. стр. 40)

$$\sqrt{\frac{B}{A}}\,dx_1 = dt, \tag{2}$$

то получим

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial x_i'}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)$$

и подобные же уравнения для y_i и z_i. Введя эти выражения, найдем:

$$\delta \int P dx_1 = \int \sqrt{\frac{B}{A}} \sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) \delta x_i + \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right) \delta y_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right) \delta z_i \right\} dx_1.$$

Но так как по нашему принципу эта вариация должна исчезнуть, то имеем:

$$0=\sum\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i+\left(\frac{\partial U}{\partial y_i}-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i+\left(\frac{\partial U}{\partial z_i}-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right\}$$

или

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right)= \tag{3}$$

$$=\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)=\delta U,$$

а это есть прежнее символическое уравнение.

Уравнение (2) есть не что иное, как теорема живых сил: действительно, при помощи квадратуры получаем

$$Bdx_1^2=Adt^2$$

или

$$\sum m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}=2(U+h).$$

Это можно было предвидеть, так как мы исключили время из интеграла принципа наименьшего действия при помощи теоремы живых сил.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ. МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА.

Кроме того недостатка, что при обычном способе выражения принципа наименьшего действия теорема живых сил не вводится в интеграл, выражающий этот принцип, плохо еще то, что обычно говорят: интеграл должен быть наибольшим или наименьшим; между тем надо сказать: его первая вариация должна обращаться в нуль. Смешение этих никоим образом не тождественных требований так вошло в обычай, что его едва можно поставить в упрек авторам. На этой почве между Лагранжем и Пуассоном произошло замечательное quiproquo, которое относится к кратчайшей линии. Лагранж говорит совершенно справедливо, что в этом случае интеграл никогда не может сделаться максимумом, потому что как ни длинна будет кривая, соединяющая две точки на данной поверхности, всегда можно найти еще более длинную, а отсюда он заключает, что интеграл *всегда* должен быть минимумом. Напротив, Пуассон, который знал, что интеграл в известных случаях, в частности для замкнутой поверхности, за известными границами перестает быть минимумом, заключил отсюда, что в этих случаях интеграл должен быть максимумом. Оба заключения неправильны; в случае кратчайших линий интеграл во всяком случае никогда не будет максимумом, а будет либо минимумом, либо ни тем, ни другим, — ни максимумом, ни минимумом.

Исключение времени из интеграла, рассматриваемого при получении принципа наименьшего действия, должно производиться обязательно при помощи принципа живой силы, а не при помощи принципа площадей или какого-либо другого интегрального уравнения задачи; только таким путем можно притти к принципу наименьшего действия. Лагранж в одном месте говорит, что он в туринском мемуаре вывел дифференциальные уравнения движения из принципа наименьшего действия в соединении с принципом живых сил. Такой способ выражения после выше сделанных замечаний недопустим. Лагранж применил только что открытое им вариационное исчисление к использованному уже Эйлером принципу наименьшего действия, но употребил при этом принцип живых сил в расширенном виде, приданном ему Даниилом Бернулли и таким образом пришел к общему символическому уравнению динамики, из которого мы исходили и которое мы здесь еще раз напишем; оно было

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\delta z_i \right\} = \sum (X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i), \quad (1)$$

где в правой части надо поставить δU, когда имеет место принцип живых сил. Если отвлечься от того, что δU в принятом в вариационном исчисления смысле только тогда может быть поставлена в правой части уравнении, когда величины X_i, Y_i, Z_i являются частными производными одной и той же функции U, и рассматривать δU просто как символическое сокращенное обозначение, то равенство

$$\sum m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \delta U \tag{2}$$

будет служить также и для того случая, когда теорема живых сил не имеет места. Это уравнение, как было уже раньше упомянуто, справедливо также и тогда, когда имеются условные уравнения, но тогда вариации не будут больше независимы друг от друга. Если имеются m условных уравнений

$$f = 0,\ \varphi = 0, \ldots, \tag{3}$$

то между вариациями тоже существуют m условных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i \right) = 0, \\ &\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\delta z_i \right) = 0 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

и т. д.

При помощи этих m уравнений можно исключить из уравнения (1) m из $3n$ вариаций δx_i, δy_i, $\delta z_i, \ldots$, и если после этого оставшиеся вариации положить независимыми друг от друга, то символическое уравнение (1) распадется на дифференциальные уравнения движения. Но это исключение было бы очень затруднительно и имеет, кроме того, некоторые неприятные стороны; действительно, во-первых, пришлось бы некоторые координаты предпочесть другим, и поэтому получились бы несимметричные формулы, а, во-вторых, для различного числа условных уравнений получалась бы различная форма результатов исключения, вследствие чего общность исследования была бы сильно затруднена. Все эти трудности поборол Лагранж введением множителей (метод, который уже Эйлер часто употреблял в задачах „de maximis et minimis"). Так как в уравнениях (1) и (4) вариации δx_i, δy_i, $\delta z_i \ldots$ входят линейно, то исключение m из них можно произвести следующим образом. Умножаем уравнения (4) соответственно на множители λ, $\mu \ldots$ и складываем их с (1), полученное уравнение назовем (L). Определяем теперь множители λ, $\mu \ldots$ так, чтобы в уравнении (L) m из выражений, умноженных на вариации δx_i, δy_i, $\delta z_i \ldots$, тождественно обращались в нуль, тогда, приравняв нулю выражения, умноженные на остальные $3n-m$ вариаций, получим дифференциальные уравнения задачи. Таким образом видим, что в уравнении (L) все $3n$ выражений, умноженных на δx_i, δy_i, $\delta z_i \ldots$, надо положить равными нулю и тогда рассматривать эти уравнения так, что m из них определяют множители λ, $\mu \ldots$, а остальные, в которые надо подставить найденные таким образом множители, дают дифференциальные уравнения задачи. Другими словами, из $3n$ уравнений, на которые распадается уравнение (L), если все вариации рассматривать как независимые, надо исключить m множителей λ, $\mu \ldots$ и тогда получатся $3n-m$ дифференциальных уравнений задачи. Но вместо того, чтобы производить это исключение, лучше оставить неизвестные множители в $3n$ уравнениях и исследовать дальше эти последние, они будут тогда иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \ldots, \\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \ldots, \\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= Z_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \ldots, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

где для всех n значений i везде входят одни и те же множители λ, $\mu\ldots$ Это и есть та формула, которую Лагранж дал уравнениям движения системы, связанной любыми условиями.

Величины, прибавленные к силам X_i, Y_i, Z_i, выражают действие системы, т. е. изменение, которое приложенные силы претерпевают благодаря связям материальных точек. К этому же результату приходят в статике, когда доказывают, что в том случае, когда в n точках системы приложены силы

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\ldots,\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y_i}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}+\ldots,\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z_i}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}+\ldots,$$

параллельные координатным осям, то эти силы уничтожаются связями системы, откуда вытекает, что уничтожаемые связями системы силы не определены, но содержат неопределенные величины λ, $\mu\ldots$ Поэтому введение множителей λ, $\mu\ldots$ не есть просто искусственный прием вычисления,— на самом деле эти величины имеют в статике вполне определенное значение. От только что приведенной теоремы статики можно теперь перейти к уравнениям (5) движения, притом основывая переход от статики к механике на следующем рассуждении.

Благодаря связи системы, материальные точки не могут следовать сообщенным им импульсам. Чтобы получить истинное движение, надо присоединить такие силы, комплекс которых уничтожался бы связью системы и после присоединения которых систему можно было бы рассматривать так, как будто точки следуют приложенным к ним силам без сопротивления: другими словами, после присоединения сил, уничтожающихся связью системы, можно рассматривать систему как свободную. Это можно установить как принцип, и из него сами собою получатся уравнения (5).

Именно этот принцип, давший нам благодаря присутствию связей системы изменение сил, вызывающих ускорение, служит также и для того, чтобы найти изменение мгновенных сил благодаря связям системы. Формулы, которые тут надо применить, совершенно те же самые. Если на точку m_i действуют мгновенные импульсы a_i, b_i, c_i, то, принимая во внимание связь системы, получим следующие измененные импульсы:

$$\left\{\begin{aligned} &a_i+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\ldots,\\ &b_i+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial y_i}+\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}+\ldots,\\ &c_i+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial z_i}+\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}+\ldots,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

где величины λ_1, $\mu_1,\ldots$ снова остаются одними и теми же для всех точек системы.

Если мы хотим определить величины λ, $\mu,\ldots$ и λ_1, $\mu_1,\ldots$, то надо дифференцировать уравнения $f=0$, $\varphi=0,\ldots$ Для определения величин λ, $\mu,\ldots$ надо продифференцировать два раза и затем подставить вторые производные координат из уравнений (5); для определения же величин λ_1, $\mu_1,\ldots$ нужно дифференцировать только один раз, так как мгновенные импульсы пропорциональны скоростям, т. е. первым производным. Разложим на самом деле уравнения для определения λ_1, $\mu_1,\ldots$, предполагая, что мгновенные импульсы a_1, b_1, c_1 действуют в начале движения и что система в этот момент находится в полном покое. При таких обстоятельствах мы можем для начала движения совсем не принимать во внимание сил, вызывающих ускорение, так как эти силы могут дать только бесконечно-малые скорости, поэтому мы должны для определения $\lambda_1, \mu_1 \ldots$ составить дифференциальные уравнения

$$\sum\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right\}=0$$

$$\sum\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right\}=0$$

и т. д.,

и подставить в них вместо $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ величины (6), разделив их предварительно на m_i. Это дает следующий результат: полагаем

$$A=\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}a_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}b_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}c_i\right),$$

$$B=\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}a_i+\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}b_i+\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}c_i\right),$$

. . . .

$$(f,\ f)=\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y_i}+\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_i}\right),$$

$$(f,\ \varphi)=\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}+\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\right),$$

. . . .

тогда для определения $\lambda_1, \mu_1, \ldots$ имеем уравнения:

$$\left\{\begin{aligned}0&=A+(f,\ f)\lambda_1+(f,\ \varphi)\mu_1+(f,\ \psi)\nu_1+\ldots,\\0&=B+(\varphi,\ f)\lambda_1+(\varphi,\ \varphi)\mu_1+(\varphi,\ \psi)\nu_1+\ldots,\\0&=C+(\psi,\ f)\lambda_1+(\psi,\ \varphi)\mu_1+(\psi,\ \psi)\nu_1+\ldots,\end{aligned}\right.\qquad(7)$$

и т. д.

Той же формы будут уравнения для определения $\lambda, \mu, \ldots$, только тут $A, B, C \ldots$ принимают другие значения.

Возвращаемся теперь к дифференциальным уравнениям (5). Если мы их помножим соответственно на δx_i, δy_i, δz_i и сложим все $3n$ произведения, то получим снова символическое уравнение, которое мы обозначили выше через (L), именно:

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right)=\delta U+\lambda\delta f+\mu\delta\varphi+\ldots,\qquad(8)$$

это уравнение равнозначно системе (5).

Чтобы рассмотреть всю совокупность задач, которые содержатся в уравнениях (5), мы должны принять во внимание тот случай, когда в условия входит явно время; тогда тоже имеют место уравнения (5). Чтобы получить представление о том, как время может входить в условия, предположим, например, что материальные точки связаны с подвижными центрами, движение которых дано; связь эта такова, что центры действуют на материальные точки не вызывая реакции. Но для этого предположения необходимо дать подвижным центрам массы, которые по сравнению с массами материальных точек бесконечно велики. В этом случае без дальнейших рассуждений берем для материальных точек уравнения (5); подвижные же центры сохраняют без изменения данные им движения. В самом деле, пусть M будет масса одного центра, принимаемая за бесконечно большую, p — одна из его координат;

тогда сила, действующая в направлении координаты p, пропорциональна M: если мы назовем ее MP, то имеем, принимая во внимание связи системы,

$$M\frac{d^2p}{dt^2} = MP + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \ldots$$

После деления на бесконечно большую массу M получим

$$\frac{d^2p}{dt^2} = P,$$

все же остальные члены выпадут. То же получим для прочих координат, т. е. центры следуют данным им движениям, не обращая внимания на связи. Значения λ, $\mu, \ldots$ и λ_1, $\mu_1, \ldots$ будут, здесь конечно, другие, чем раньше, так как при дифференцировании присоединяются еще частные производные по t. Например, к A (уравнения (7)) присоединяется член $\frac{\partial f}{\partial t}$, к B также $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и т. д.

Однако, время может входить в условия совершенно иначе, например, когда связь двух точек ослабляется или расширяется, хотя бы при возрастании температуры; но все условия такого рода можно свести к подвижным центрам, если только взять как основное положение, что две связи, которые приводят к одним и тем же уравнениям, могут заменять одна другую.

Время, кроме того, может еще очень затруднить дело, если, например, с течением его меняются массы. Но до сих пор не было необходимости делать это предположение для мировой системы, так как наблюдения, необходимые чтобы решить имеет ли оно место, еще недостаточно точны.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

ИНТЕГРАЛ ГАМИЛЬТОНА И ВТОРАЯ ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ.

Вместо принципа наименьшего действия можно подставить другой принцип, который также состоит в том, что первая вариация некоторого интеграла обращается в нуль и из которого можно получить дифференциальные уравнения движения еще более просто, чем из принципа наименьшего действия. Этот принцип раньше оставался незамеченным, вероятно потому, что здесь вместе с исчезновением вариации вообще не получается минимум, как это имеет место для принципа наименьшего действия. Гамильтон был первым, исходившим из этого принципа. Мы воспользуемся им для того, чтобы представить уравнения движения в той форме, которую им дал Лагранж в аналитической механике. Пусть, прежде всего, силы X_i, Y_i, Z_i будут частными производными функции U; далее пусть T будет половина живой силы, т. е.

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\};$$

тогда новый принцип содержится в уравнении

$$\delta\int(T+U)\,dt=0. \tag{1}$$

Этот принцип по сравнению с принципом наименьшего действия постольку более общий, поскольку здесь U может содержать явно также и t, что в первом принципе исключается, так как из него время должно быть исключено при помощи теоремы живой силы, которая может иметь место только в том случае, если U не содержит явно времени.

Воспользуемся уравнением (1), чтобы показать возможность приведения дифференциальных уравнений движения к одному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Как показал Гамильтон, вариацию (1) можно разложить, с помощью интегрирования по частям, на две части так, что одна из них стоит вне, а другая под знаком интеграла и каждая сама по себе должна исчезать. Таким образом, выражение, стоящее под знаком интеграла, будучи приравнено нулю, дает дифференциальные уравнения задачи, а выражение вне знака интеграла дает их интегральные уравнения.

Новый принцип, выраженный полностью, формулируется так:

Если даны положения системы в данный начальный момент t_0 и в данный конечный момент t_1, то для определения действительно происходящего движения служит уравнение

$$\delta\int(T+U)\,dt=0. \tag{1}$$

Здесь интеграл берется от t_0 до t_1, U есть силовая функция и может также содержать явно время, а T есть половина живой силы, так что имеем:

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2),$$

$$x_i'=\frac{dx_i}{dt};\quad y_i'=\frac{dy_i}{dt};\quad z_i'=\frac{dz_i}{dt}.$$

Если выполнить указанную в этом принципе вариацию, придав, по правилам вариационного исчисления, координатам вариации δx_i, δy_i, δz_i и оставив неизменной независимую переменную t, то получим

$$\delta\int Tdt=\int\delta Tdt=\int\sum m_i(x_i'\,\delta x_i'+y_i'\,\delta y_i'+z_i'\,\delta z_i')dt.$$

Подставляя вместо $\delta x_i'$, $\delta y_i'$, $\delta z_i'$ выражения

$$\frac{d\delta x_i}{dt},\quad \frac{d\delta y_i}{dt},\quad \frac{d\delta z_i}{dt}$$

и интегрируя по частям, найдем:

$$\delta\int Tdt=\int\sum m_i\left(x_i'\,\frac{d\delta x_i}{dt}+y_i'\,\frac{d\delta y_i}{dt}+z_i'\,\frac{d\delta z_i}{dt}\right)dt=$$

$$=\sum m_i(x_i'\,\delta x_i+y_i'\,\delta y_i+z_i'\,\delta z_i)-\int\sum m_i(x_i''\,\delta x_i+y_i''\,\delta y_i+z_i''\,\delta z_i)\,dt.$$

где x_i'', y_i'', z_i'' — вторые производные от x_i, y_i, z_i, взятые по t. Но так как начальные и конечные положения даны, то δx_i, δy_i, δz_i уничтожаются на границах интегрирования и члены, стоящие вне знака интеграла, обращаются в нуль, так что

$$\delta\int Tdt=-\int\left\{\sum m_i(x_i''\,\delta x_i+y_i''\delta y_i+z_i''\,\delta z_i)\right\}dt;$$

таким образом имеем

$$\delta\int(T+U)\,dt=-\int\left\{\sum m_i(x_i''\,\delta x_i+y_i''\delta y_i+z_i''\delta z_i)-\delta U\right\}dt,\qquad(2)$$

где

$$\delta U=\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\,\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\,\delta z_i\right).$$

Из уравнения (2) на самом деле следует данное ранее во второй лекции (стр. 13) символическое основное уравнение (2) динамики.

Содержащийся в уравнении (1) принцип очень полезен при преобразовании координат. Уравнение это имеет место для всякой системы координат; поэтому в новой системе надо так же варьировать по новым координатам, как раньше по старым, и вся подстановка, которая должна быть произведена, ограничивается обоими выражениями T и U.

Применим это сначала к полярным координатам: формулы преобразования в этом случае имеем такие:

$$x_i=r_i\cos\varphi_i,$$
$$y_i=r_i\sin\varphi_i\,\cos\psi_i,$$
$$z_i=r_i\sin\varphi_i\,\sin\psi_i.$$

Отсюда следует после дифференцирования:

$$dx_i=\cos\varphi_i\,dr_i-r_i\sin\varphi_i\,d\varphi_i,$$
$$dy_i=\sin\varphi_i\,\cos\psi_i\,dr_i+r_i\cos\varphi_i\,\cos\psi_i\,d\varphi_i-r_i\sin\varphi_i\,\sin\psi_i\,d\psi_i,$$
$$dz_i=\sin\varphi_i\,\sin\psi_i\,dr_i+r_i\cos\varphi_i\,\sin\psi_i\,d\varphi_i+r_i\sin\varphi_i\,\cos\psi_i\,d\psi_i;$$

поэтому

$$dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2 = dr_i^2 + r_i^2\, d\varphi_i^2 + r_i^2 \sin^2\varphi_i\, d\psi_i^2,$$

или

$$x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 = r_i'^2 + r_i^2 \varphi_i'^2 + r_i^2 \sin^2\varphi_i\, \psi_i'^2,$$

где

$$r_i' = \frac{dr_i}{dt}; \quad \varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{dt}; \quad \psi_i' = \frac{d\psi_i}{dt}.$$

Таким образом тотчас получаем:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{1}{2}\sum m_i\,(r_i'^2 + r_i^2\varphi_i'^2 + r_i^2\sin^2\varphi_i\psi_i'^2). \qquad (3)$$

При этом предположении и допущении, что U также выражено через новые координаты, мы найдем уравнение, следующее из $\delta\int (T+U)\, dt = 0$ по общим правилам вариационного исчисления.

Пусть P есть функция нескольких переменных... p... и их первых производных... p'..., причем предполагается, что все p зависят от одной независимой переменной t, и пусть первая вариация от $\int Pdt$ исчезает, т. е.

$$\delta\int Pdt = 0,$$

где интеграл надо брать от t_0 до t_1 и где значения p, соответствующие этим значениям t, заданы; тогда путем выкладок, таких же, как и в шестой лекции (стр. 43 и след.), придем к уравнению:

$$0 = \sum\left[\frac{d\,\dfrac{\partial P}{\partial p'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial p}\right]\delta p. \qquad (4)$$

В нашем случае вместо величин p стоят r_i, φ_i, ψ_i, а $P = T + U$; далее, U не содержит производных r_i', φ_i', ψ_i'; поэтому получаем:

$$0 = \sum\left[\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial r_i'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{\partial U}{\partial r_i}\right]\delta r_i + \sum\left[\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial \varphi_i'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right]\delta\varphi_i +$$
$$+ \sum\left[\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial \psi_i'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i}\right]\delta\psi_i.$$

Но, на основании уравнения (3),

$$\frac{\partial T}{\partial r_i'} = m_i r_i'; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_i'} = m_i r_i^2 \varphi_i'; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi_i'} = m_i r_i^2 \sin^2\varphi_i \psi_i';$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_i} = m_i(r_i\varphi_i'^2 + r_i\sin^2\varphi_i\psi_i'^2); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2}\, m_i r_i^2 \sin 2\varphi_i \psi_i'^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = 0;$$

таким образом имеем:

$$0 = \sum\left\{m_i\left(\frac{dr_i'}{dt} - r_i\varphi_i'^2 - r_i\sin^2\varphi_i\psi_i'^2\right) - \frac{\partial U}{\partial r_i}\right\}\delta r_i +$$
$$+ \sum\left\{m_i\left(\frac{d\,(r_i^2\varphi_i')}{dt} - \frac{1}{2}\, r_i^2 \sin 2\varphi_i\psi_i'^2\right) - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right\}\delta\varphi_i +$$
$$+ \sum\left\{m_i\frac{d\,(r_i^2\sin^2\varphi_i\psi_i')}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i}\right\}\delta\psi_i,$$

или

$$\sum m_i \left\{\left(\frac{d^2r_i}{dt^2} - r_i\varphi_i'^2 - r_i \sin^2\varphi_i\psi_i'^2\right)\delta r_i + \left(\frac{d(r_i^2\varphi_i')}{dt} - \frac{1}{2} r_i^2 \sin 2\varphi_i\psi_i'^2\right)\delta\varphi_i + \right.$$
$$\left. + \frac{d(r_i^2\sin^2\varphi_i\psi_i')}{dt}\,\delta\psi_i\right\} = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial r_i}\delta r_i + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial U}{\partial \psi_i}\delta\psi_i\right) = \delta U.$$

Если имеются еще условные уравнения $f = 0$, $\omega = 0 \ldots$, то в правой части этого уравнения к δU присоединяется еще сумма $\lambda\,\delta f + \mu\,\delta\omega + \ldots$ и, таким образом, в этом случае получится:

$$\sum m_i \left\{\left(\frac{d^2r_i}{dt^2} - r_i\varphi_i'^2 - r_i \sin^2\varphi_i\psi_i'^2\right)\delta r_i + \left(\frac{d(r_i^2\varphi_i')}{dt} - \frac{1}{2} r_i^2 \sin 2\varphi_i\psi_i'^2\right)\delta\varphi_i + \right.$$
$$\left. + \frac{d(r_i^2\sin^2\varphi_i\psi_i')}{dt}\,\delta\psi_i\right\} = \delta U + \lambda\,\delta f + \mu\,\delta\omega + \ldots. \tag{5}$$

Это уравнение распадается на $3n$ уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
m_i\left\{\frac{d^2r_i}{dt^2} - r_i\varphi_i'^2 - r_i\sin^2\varphi_i\psi_i'^2\right\} &= \frac{\partial U}{\partial r_i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial r_i} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial r_i} + \ldots,\\
m_i\left\{\frac{d(r_i^2\varphi_i')}{dt} - \frac{1}{2} r_i^2\sin 2\varphi_i\psi_i'^2\right\} &= \frac{\partial U}{\partial\varphi_i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi_i} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial\varphi_i} + \ldots,\\
m_i\frac{d(r_i^2\sin^2\varphi_i\psi_i')}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial\psi_i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\psi_i} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial\psi_i} + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Особенную важность имеет преобразование первоначальных координат в новые, которые выбраны так, что когда все через них выражено, то условные уравнения выполняются сами собой. Именно, если имеется m условных уравнений, то можно все $3n$ координат выразить через $3n-m$ из них или через $3n-m$ функций от них. В большинстве случаев очень важно ввести не самые координаты, но новые величины так, чтобы избежать иррациональностей. Например, при движении точки по эллипсоиду наибольшую важность имеют формулы:

$$x = a\cos\eta;\quad y = b\sin\eta\cos\zeta;\quad z = c\sin\eta\sin\zeta.$$

Обозначим новые $3n - m = k$ величин через $q_1, q_2, \ldots q_k$; эти величины должны быть таковы, что если через них выразить $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ и подставить эти выражения в m условных уравнений $f = 0$, $\omega = 0, \ldots$, то левые части этих уравнений обратятся тождественно в нуль, т. е. должны иметь место тождества:

$$f(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0;\quad \omega(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0, \ldots, \tag{7}$$

причем q не связаны никаким уравнением. Благодаря этому дифференциальные уравнения движения значительно упростятся. Именно, общее символическое основное уравнение динамики для любой системы координат при существовании условных уравнений будет

$$\sum\left[\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_s'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right]\delta q_s = \delta U + \lambda\,\delta f + \mu\,\delta\omega + \ldots,$$

где знак суммы распространяется на все q. Но для наших величин q уравнения (7) имеют место тождественно; поэтому после введения этих величин будем иметь $\delta f=0$, $\delta\omega=0$ и т. д., и предыдущее уравнение приводится к уравнению

$$\sum\left[\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_s'}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_s}\right]\delta q_s=\delta U,$$

которое разлагается на k дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_s'}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}. \tag{8}$$

Это та форма, в которой Лагранж представил дифференциальные уравнения движения уже в старом издании Аналитической механики.

Если представим себе все координаты выраженными через величины q, то получим после дифференцирования:

$$x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}q_k',$$

$$y_i'=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}q_k',$$

$$z_i'=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q_2'+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}q_k'.$$

Если подставим эти значения в $T=\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$, то получим выражение, которое представляет из себя однородную функцию второй степени относительно величин q_1', q_2', ... q_k', коэффициенты которой известные функции от q_1, q_2, ... q_k. Если мы положим

$$\frac{\partial T}{\partial q_s'}=p_s,$$

то уравнение (8) можем написать еще так:

$$\frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}. \tag{9}$$

Это, правда, еще не окончательная форма уравнений движения, так как она требует еще дальнейших преобразований; но раньше чем этим заняться, распространим предыдущее рассуждение на тот случай, когда не существует силовой функции, а на месте δU в первоначальном символическом уравнении стоит $\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$. Когда всё выражено в величинах q, то $\delta U=\sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$. Если это сравнить с только-что упомянутым выражением $\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$ и вспомнить о правиле, данном во второй лекции (стр. 14), по которому при преобразовании координат надо подставить вместо δx_i, δy_i, δz_i соответственно $\sum_s\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s$; $\sum_s\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s$; $\sum_s\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s$, то легко видеть, что вместо $\sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$ войдет выражение

$$\sum_i\sum_s\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s$$

и, таким образом, вместо $\frac{\partial U}{\partial q_s}$ будет стоять выражение:

$$Q_s = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right). \tag{10}$$

Посредством этого преобразования уравнение (8) заменится следующим:

$$\frac{d \frac{\partial T}{\partial q_s'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \tag{11}$$

Если будем подставлять сюда вместо s значения от 1 до k, то получим для рассматриваемого случая уравнения движения, выраженные в величинах q.

Мы хотим убедиться в справедливости уравнения (11) еще другим путем и для этого будем исходить из уравнений (5), данных в предыдущей лекции (стр. 47):

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \ldots$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial y_i} + \ldots$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial z_i} + \ldots$$

Умножаем эти уравнения на $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_s}$ и суммируем по i: тогда получим множителем при λ выражение:

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial f(q_1, q_2, \ldots q_k)}{\partial q_s}.$$

Но выражение в правой части исчезает на основании уравнений (7), и то же будет с коэффициентом при $\mu \ldots$; поэтому получаем, принимая во внимание уравнение (10):

$$\sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right\} = Q_s. \tag{12}$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (11), мы должны показать, что его левая часть тождественна с левой частью уравнения (12). Это будет показано таким образом. Мы имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2);$$

поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'} \right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_s} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_s} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_s} \right).$$

Но мы имеем еще дифференциальные уравнения:

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k'$$

$$y_i' = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q_k'$$

$$z_i' = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q_k'.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}; \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}; \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s}.$$

Далее имеем:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_k} q_k' = \frac{d \dfrac{\partial x_i}{\partial q_s}}{dt}$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_k} q_k' = \frac{d \dfrac{\partial y_i}{\partial q_s}}{dt}$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_k} q_k' = \frac{d \dfrac{\partial z_i}{\partial q_s}}{dt}.$$

Подстановка этих значений в $\dfrac{\partial T}{\partial q_s'}$ и в $\dfrac{\partial T}{\partial q_s}$ дает

$$\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{d \dfrac{\partial x_i}{\partial q_s}}{dt} + y_i' \frac{d \dfrac{\partial y_i}{\partial q_s}}{dt} + z_i' \frac{d \dfrac{\partial z_i}{\partial q_s}}{dt} \right);$$

поэтому

$$\frac{d \dfrac{\partial T}{\partial q_s'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(\frac{dx_i'}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy_i'}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz_i'}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) =$$

$$= \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

а отсюда следует тождественность уравнений (11) и (12) и вместе с тем правильность первого из них.

Итак, если силовой функции нет, то уравнения движения будут вида (11); если она есть, то уравнения будут иметь вид (8) или, что то же, вид (9), а именно:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_s}; \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}.$$

Благодаря форме этих уравнений получаем непосредственно следующий замечательный результат: *Если можно выбрать новые переменные так, что одна из них q_s не входит в силовую функцию и что в T не входит сама переменная q_s, а входит только ее производная q_s', то из этого обстоятельства каждый раз получится интеграл данной системы дифференциальных уравнений, именно* $p_s = \text{const}$ *или, что то же,* $\dfrac{\partial T}{\partial q_s'} = \text{const}$.

Действительно, при сделанном предположении $\dfrac{\partial (T + U)}{\partial q_s} = 0$; поэтому имеем

$\frac{dp_s}{dt} = 0$, откуда $p_s = \text{const}$. Этот случай имеет место например при притяжении точки *одним* неподвижным центром. Если этот центр находится в начале координат, то имеем в полярных координатах [см. уравнение (3)]:

$$U = \frac{\alpha}{r}; \quad T = \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2 \sin^2 \varphi \, \psi'^2),$$

и таким образом ψ не входит в U, а в T входит не само ψ, а его производная ψ'; поэтому имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = mr^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = \text{const},$$

или, внося множитель m в постоянную,

$$r^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = \text{const},$$

что можно было бы вывести и из третьего уравнения (6). Это есть принцип площадей относительно плоскости y, z. В самом деле, так как

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi \cos \psi; \quad z = r \sin \varphi \sin \psi,$$

то

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z}{y}; \quad \frac{1}{\cos^2 \psi} \psi' = \frac{yz' - zy'}{y^2},$$

или, после умножения на $y^2 = r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$:

$$r^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt};$$

поэтому получим:

$$r^2 \sin^2 \varphi \cdot \psi' = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = \text{const},$$

т. е. принцип площадей для плоскости y, z.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ.

Важнейший шаг вперед в преобразовании дифференциальных уравнений движения, после появления первого издания Аналитической механики, сделал Пуассон в статье о методе вариации постоянных, которая помещена в 15-й тетради Политехнического журнала. Здесь Пуассон вводит вместо величин q' величины $p = \frac{\partial T}{\partial q'}$; как уже выше отмечено, T есть однородная функция второй степени от величин q', коэффициенты которой зависят от q и потому p будут линейными функциями величин q'. Таким образом для определения p имеются k уравнений вида $p_i = \omega_i$, где ω_i линейна относительно q_1', q_2', ... q_k'. Если эти k линейных уравнений решать относительно величин q', то получатся уравнения вида $q_i' = K_i$, где K_i есть линейное выражение относительно p, коэффициенты которого зависят от q. Эти значения q_i' мы подставляем в уравнение (9) предыдущей лекции, т. е. в уравнение

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

где $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ содержит только величины q, в то время как $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ будет, кроме того, функцией величин q' и при том однородной функцией второй степени относительно этих величин. Если мы положим теперь $q_i' = K_i$, то $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ будет однородной функцией второй степени от величин p_i. Таким образом предыдущее уравнение примет форму:

$$\frac{dp_i}{dt} = P_i,$$

где P_i выражается через p и q и будет второй степени относительно p. Эти уравнения, будучи скомбинированы с уравнениями $q_i' = \frac{dq_i}{dt} = K_i$, дают:

$$\frac{dq_i}{dt} = K_i; \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i. \tag{1}$$

Это та форма, к которой Пуассон приводит уравнения движения; здесь K_i и P_i не содержат никаких других переменных величин кроме p и q. Эта система $2k$ уравнений обладает замечательными свойствами, именно

$$\frac{\partial K_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial K_{i'}}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial K_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial P_{i'}}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial P_{i'}}{\partial q_i}, \tag{2}$$

причем первая группа дается Пуассоном в вышеприведенном месте в точно таком же виде, в то время как остальные непосредственно вытекают из его результатов.

Уравнения (2) показывают, что величины K_i и P_i следует рассматривать как частные производные *одной и той же* функции по величинам p_i и $-q_i$.

Этого замечания, непосредственно вытекающего из уравнений (2), Пуассон не делает и тем более он не разыскивает этой функции. Определил ее впервые Гамильтон, и благодаря введению его характеристической функции всё преобразование чрезвычайно упрощается. К этому преобразованию приходим почти само собой, если хотим из второй лагранжевой формы дифференциальных уравнений, данной в предыдущей лекции, вывести теорему живой силы, что сделать не совсем просто. Теорема живой силы, если принять во внимание также тот случай, когда силовая функция U содержит явно время, имеет вид:

$$T = U - \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt + \text{const}$$

или, после дифференцирования,

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

(стр 35).

Чтобы вывести этот результат из второй лагранжевой формы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i}; \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$$

[содержащейся в уравнении (9) восьмой лекции], рассуждаем следующим образом. Так как T есть однородная функция второй степени от величин q', то, как известно, имеем

$$2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \ldots + q_k' \frac{\partial T}{\partial q_k'} = \sum q_i' p_i$$

или

$$T = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T,$$

а отсюда получаем, взяв полный дифференциал,

$$dT = \sum q_i' d\frac{\partial T}{\partial q_i'} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i$$

или, так как вторая и третья суммы взаимно уничтожаются,

$$dT = \sum q_i' d\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i = \sum q_i' dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i; \tag{3}$$

это равенство есть тождество. Подставим здесь вместо $d\frac{\partial T}{\partial q_i'} = dp_i$ его значение из уравнения (9) предыдущей лекции и разделим на dt; тогда получим:

$$\frac{dT}{dt} = \sum \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} q_i' - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i' = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Таким образом имеем:

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Тождество (3) легко приводит к характеристической функции Гамильтона. Именно, при составлении частных производных $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i$, входящих в правую часть уравнения (3) (последние величины входят только под знаком дифференциала), T рассматривается как функция от величин q и q'. Если мы теперь введем, при помощи уже выше упомянутых линейных уравнений $q_i' = K_i$, величины p_i вместо q_i', то T превратится в функцию величин p и q; производные от T по p_i и q_i, образованные при такой гипотезе, мы обозначим для отличия через $\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)$ и $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$; тогда

$$dT = \sum\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) dp_i + \sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i$$

и следовательно, на основании уравнения (3),

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) dp_i + \sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i = \sum q_i' dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i.$$

Так как это равенство должно быть тождеством, то из него следует, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q_i', \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{5}$$

Уравнение (4) показывает, что между величинами p и q' имеет место некоторая взаимность; действительно, сопоставляя с ранее полученным уравнением $\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i$, найдем

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q_i',$$

т. е. соотношение, подобное тому, которое имеется в теории поверхностей второго порядка. Если мы подставим найденное значение $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ из уравнения (5) в уравнение (9) предыдущей лекции, то получим

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Но, так как U совсем не содержит p и q', то

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right),$$

так что

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i}\right).$$

Далее, так как U не содержит p, то уравнение (4) можно также написать в виде:

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial p_i}\right).$$

Таким образом, если положить

$$T - U = H, \tag{6}$$

то получится:

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right); \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right), \tag{7}$$

откуда видно, что $H = T - U$ есть характеристическая функция. Из этих уравнений сама собою получается теорема живой силы, так как из обоих уравнений (7) следует, что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{dp_i}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{dq_i}{dt} = 0,$$

и если мы просуммируем это выражение по всем i, то получим

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

т. е. теорему живой силы.

Так как само собой разумеется, что в уравнениях (7) величины p и q надо рассматривать как переменные, то можно отбросить скобки у производных, и тогда получим:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad H = T - U. \tag{8}$$

В более общем случае, когда не существует силовой функции, на месте $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ стоит выражение

$$Q_i = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_i} + Y\frac{\partial y}{\partial q_i} + Z\frac{\partial z}{\partial q_i}\right),$$

где сумма распространяется на все x, y, z и таким образом вместо уравнений (8) получатся следующие:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i. \tag{9}$$

Если условных уравнений нет, то величины q совпадают с координатами; первое из уравнений (8) становится тождеством, второе переходит в систему

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

которая представляет из себя первоначальную форму уравнений движения.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИНЦИП ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВСКИХ МНОЖИТЕЛЕЙ НА СЛУЧАЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ. СОСТАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ В ЭТОМ СЛУЧАЕ.

Принцип последнего множителя позволяет во всех случаях, когда система дифференциальных уравнений движения приведена к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными, проинтегрировать это последнее путем задания его множителя. При этом предполагается, что действующие силы X_i, Y_i, Z_i зависят только от координат и от времени.

Если мы в первоначальной системе дифференциальных уравнений движения введем производные $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ как новые переменные x_i', y_i', z_i', то она примет следующий вид:

$$m_i\frac{dx_i'}{dt}=X_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+\ldots;\quad \frac{dx_i}{dt}=x_i'$$

$$m_i\frac{dy_i'}{dt}=Y_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial y_i}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial y_i}+\ldots;\quad \frac{dy_i}{dt}=y_i'$$

$$m_i\frac{dz_i'}{dt}=Z_i+\lambda\frac{\partial f}{\partial z_i}+\mu\frac{\partial\omega}{\partial z_i}+\ldots;\quad \frac{dz_i}{dt}=z_i'.$$

Здесь $6n$ дифференциальных уравнений; но между входящими в них $6n$ переменными x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' ..., зависящими от t, имеют место уже $2m$ соотношения, именно:

$$f=0,\quad \omega=0,\ \ldots$$

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial f}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial f}{\partial z_i}z_i'\right)=0;\quad \sum\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial\omega}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial\omega}{\partial z_i}z_i'\right)=0.$$

Если в f, ω, ... входит явно t, то к левым частям последних m уравнений надо присоединить соответственно члены $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega}{\partial t}$, ... Таким образом, надо найти еще $6n-2m$ интегральных уравнений.

Предположим сначала, что t не входит явно ни в X_i, Y_i, Z_i, ни в f, ω, ...; тогда можно при помощи одного из $6n$ уравнений, хотя бы при помощи уравнения $\frac{dx_1}{dt}=x_1'$ или $dt=\frac{dx_1}{x_1'}$, исключить из остальных уравнений время и тогда получить систему $6n-1$ дифференциальных уравнений, для полного интегрирования которой надо найти $6n-2m-1$ интегралов. Предположим, что это интегрирование произведено; тогда можно $6n$

величин x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' ... выразить через одну из них, например через x_1. Если представить себе, таким образом, что x_1' выражено как функция от x_1, то уравнение $dt = \frac{dx_1}{x_1'}$ дает после интегрирования:

$$t + \text{const} = \int \frac{dx_1}{x_1'}.$$

Таким образом, если время не входит явно, то последнее интегрирование сводится к простой квадратуре, и тогда время всегда складывается с произвольной постоянной; это имеет место например при эллиптическом движении планет. Но если мы предположим, что система из $6n - 1$ дифференциальных уравнений, полученных после исключения времени, проинтегрирована не полностью, нехватает еще одного интегрирования, так что найдено не $6n - 2m - 1$ интегралов, а $6n - 2m - 2$, то нельзя все переменные выразить через одну из них, например через x_1, но можно выразить через две, например через x_1 и y_1. В этом случае остается еще проинтегрировать дифференциальное уравнение, связывающее x_1 и y_1: именно, если из $\frac{dy}{dt} = y_1'$ исключить дифференциал времени при помощи соотношения $dt = \frac{dx_1}{x_1'}$, то получится

$$dx_1 : dy_1 = x_1' : y_1',$$

где x_1' и y_1' являются по нашему предположению функциями от x_1 и y_1. Установленный мною принцип дает множитель этого дифференциального уравнения. Проинтегрировав его при помощи этого множителя, найдем, как уже замечено выше, время посредством простой квадратуры. Таким образом, если время не входит явно, то надо произвести только $6n - 2m - 2$ интегрирования, чтобы два последние интегрирования получились уже без всякого затруднения.

Но если время входит явно, т. е. не только под знаком дифференциала, то его нельзя исключить из дифференциальных уравнений. Однако, если тогда произвести $6n - 2m - 1$ интегрирований, благодаря чему все сведётся к интегрированию дифференциального уравнения вида

$$dx_1 - x_1' dt = 0,$$

где x_1' есть функция от x_1 и t, то последний интеграл получится снова из принципа последнего множителя.

Теперь, когда мы видим, что дает принцип, о котором идет речь, мы приступаем к выводу его.

После того как Эйлер увидел на многочисленных примерах, что дифференциальные уравнения первого порядка с двумя переменными можно сделать при помощи множителей полными дифференциалами и таким образом проинтегрировать, прошел еще большой промежуток времени, прежде чем он пришел к убеждению, что это есть общее свойство этих дифференциальных уравнений. Это произошло потому, что он был далек от мысли решить интегральное уравнение относительно произвольной постоянной. Будь эта мысль ему ближе, он также не отчаялся бы в возможности сводить линейные дифференциальные уравнения с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям — задача, которую он считал труднее, чем задача проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными, которая еще и сейчас не решена, в то время как приведение линейного дифференциального уравнения с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению считается элементарной задачей. Эйлер также никогда не распространял теории множителей на систему дифференциальных уравнений, хотя этот случай трактуется также просто, если предположить интегральные уравнения решенными относительно произвольных постоянных.

Возьмем дифференциальное уравнение с двумя переменными x и y, и пусть оно дано в виде пропорции

$$dx:dy=X:Y,$$

которая тождественна с уравнением

$$Xdy-Ydx=0.$$

Предположим, что интеграл дан в форме $F=\text{const}$; дифференцируя это равенство, получим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial x}dx=0,$$

левая часть которого может отличаться от левой части предыдущего дифференциального уравнения только множителем M. Таким образом имеем

$$MX=\frac{\partial F}{\partial y}; \quad -MY=\frac{\partial F}{\partial x},$$

откуда получается для определения M уравнение

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MY)}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Распространим теорию этого множителя M на систему двух совместных дифференциальных уравнений с тремя переменными. Пусть она дана в форме

$$dx:dy:dz=X:Y:Z, \tag{2}$$

и пусть интегральные уравнения, решенные относительно произвольных постоянных, будут

$$f=\alpha, \quad \varphi=\beta; \tag{3}$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0,$$

а отсюда получится:

$$dx:dy:dz=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right):\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Положим

$$A=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad B=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad C=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

тогда

$$dx:dy:dz=A:B:C,$$

что́ после сравнения с данной системой (2) ведет к пропорции:

$$A:B:C=X:Y:Z.$$

Таким образом существует множитель M, обладающий тем свойством, что

$$A=MX; \quad B=MY; \quad C=MZ.$$

Но величины A, B, C удовлетворяют тождественно равенству

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0;$$

поэтому имеем для M уравнение

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x}+\frac{\partial (MY)}{\partial y}+\frac{\partial (MZ)}{\partial z}=0,$$

или

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}M=0. \tag{4}$$

Так как $f=\alpha$ и $\varphi=\beta$ являются интегралами данной системы (2), то df и $d\varphi$ должны при посредстве этой системы тождественно обращаться в нуль, без обращения к помощи интегральных уравнений. Но мы имеем

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz;\quad d\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz,$$

откуда, принимая во внимание систему (2), получим уравнения

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0;\quad X\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial \varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0, \tag{5}$$

которые могут быть рассматриваемы как уравнения, определяющие интегралы системы (2).

Пользуясь этим, можно показать, что всякая функция от f и φ, приравненная постоянной величине, также есть интеграл системы (2). В самом деле, пусть $\tilde{\omega}$ есть какая-нибудь функция от f и φ; умножив уравнения (5) соответственно на $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial f}$ и $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi}$ и сложив их, получим

$$X\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+Y\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+Z\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0,$$

или

$$X\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}+Y\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}+Z\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}=0, \tag{6}$$

т. е. $\tilde{\omega}$ есть интеграл уравнений (2). Обратно, всякий интеграл уравнений (2) будет обязательно функцией от f и φ. В самом деле, предположим, что существует интеграл $\tilde{\omega}=\gamma$, который не будет функцией от f и φ; тогда для $\tilde{\omega}$ имеет место уравнение (6). Пусть теперь ω будет произвольная функция от f, φ и $\tilde{\omega}$. Умножим уравнения (5) и (6) соответственно на $\frac{\partial \omega}{\partial f}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial \tilde{\omega}}$ и сложим; тогда получим:

$$X\frac{\partial \omega}{\partial x}+Y\frac{\partial \omega}{\partial y}+Z\frac{\partial \omega}{\partial z}=0.$$

Следовательно ω также будет интегралом уравнений (2). Но ω есть совершенно произвольная функция от величин f, φ, $\tilde{\omega}$, а эти последние независимы друг от друга. Поэтому можно было бы ввести f, φ, $\tilde{\omega}$, как новые переменные вместо первоначальных переменных x, y, z, и эти первоначальные переменные выразить через f, φ, $\tilde{\omega}$. На основании этого можно всякую функцию от x, y, z представить как функцию от f, φ, $\tilde{\omega}$, а произвольная функция от f, φ, $\tilde{\omega}$ равнозначна с произвольной функцией от x, y, z. Таким образом вместо ω можно подставить любую функцию от x, y, z, т. е. всякая функция от x, y, z, приравненная постоянной величине, есть интеграл системы (2), что невозможно. Следовательно могут существовать только два независимых друг от друга интеграла системы (2), а всякий третий есть функция двух, друг от друга независимых, f и φ.

Этим результатом можно воспользоваться для того, чтобы из *одного* значения множителя M получить все остальные. Пусть N будет вторым значением этого множителя; тогда имеем:

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}M=0;$$

$$X\frac{\partial N}{\partial x}+Y\frac{\partial N}{\partial y}+Z\frac{\partial N}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}N=0.$$

Если умножить второе из этих уравнений на M, первое на N и результаты вычесть один из другого, то получится:

$$0=X\left\{M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x}\right\}+Y\left\{M\frac{\partial N}{\partial y}-N\frac{\partial M}{\partial y}\right\}+Z\left\{M\frac{\partial N}{\partial z}-N\frac{\partial M}{\partial z}\right\}$$

или после деления на M^2:

$$0=X\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x}+Y\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial y}+Z\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial z}.$$

Таким образом $\frac{N}{M}=\text{const}$ есть интеграл системы (2) и вместе с этим $\frac{N}{M}$ есть функция от f и φ, или

$$N=MF(f, \varphi), \tag{7}$$

т. е., *если M есть одно значение множителя, то все прочие значения содержатся в форме $MF(f, \varphi)$*. Но по предположению $f=\alpha$ и $\varphi=\beta$ являются интегралами системы (2) и следовательно $F(f, \varphi)=\text{const}$. Таким образом, если воспользоваться интегральными уравнениями, то различные значения множителя M будут отличаться друг от друга только постоянным множителем.

Посмотрим теперь, какие выгоды представляет знание одного значения M. При помощи его находят не самый интеграл, как это имеет место для одного дифференциального уравнения с двумя переменными, но, пользуясь уравнениями $A=MX$, $B=MY$, $C=MZ$, находят значения величин

$$A=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad B=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad C=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Выгоду отсюда можно извлечь только тогда, когда один интеграл, например φ, уже известен, а второй f ищется. Вводим вместо одной переменной, например вместо z, выражение φ, так что z представится как функция φ, x и y; согласно с этим предположим искомый интеграл f выраженным через x, y, φ и образованные при такой гипотезе частные производные обозначим через $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$; тогда имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

и для величин A, B, C получаем выражения:

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad B=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad C=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Из этих последних вытекает, что когда известны интеграл $\varphi=\beta$ и одно значение множителя M, то можно определить f. Действительно, представим себе f выраженным через x, y и $\varphi=\beta$; тогда

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)d\varphi,$$

или, так как $d\varphi=0$,

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy.$$

Но из вышеполученных уравнений для A и B имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{A}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}};\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\frac{B}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

так что

$$df=\frac{A\,dy-B\,dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

и так как теперь

$$A=MX;\quad B=MY,$$

то

$$df=\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy-Y\,dx). \tag{8}$$

Отсюда получается, как второй интеграл системы (2), выражение:

$$\int\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy-Y\,dx)=f=\alpha.$$

Здесь надо предполагать X и Y, которые даны как функции от x, y и z, выраженными через x, y и $\varphi=\beta$. При таком предположении $\dfrac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$ будет интегрирующим множителем дифференциального уравнения $X\,dy-Y\,dx=0$, как это мы видим из уравнения (8). Итак мы имеем следующую теорему:

Если дана система дифференциальных уравнений

$$dx:dy:dz=X:Y:Z$$

и известны, во-первых, один ее интеграл, $\varphi=\beta$, во-вторых, одно значение множителя M этой системы, удовлетворяющее уравнению в частных производных

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}M=0,$$

то выражение

$$\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

будет интегрирующим множителем дифференциального уравнения

$$X\,dy-Y\,dx=0,$$

в предположении, что как из данного множителя, так и из X и Y, исключена переменная z при посредстве уже найденного интеграла $\varphi = \beta$.

Эту теорему можно было бы счесть бесполезной; действительно, в то время как для нахождения второго интеграла f требуется решить уравнение в частных производных

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

для того, чтобы определить M и из него найти второй интеграл f, надо решить гораздо более сложное дифференциальное уравнение:

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)M=0. \qquad (4)$$

Таким образом кажется, что более легкая задача приведена к более сложной; однако здесь имеет место одно своеобразное обстоятельство. Дифференциальное уравнение в частных производных, которое определяет f, т. е. уравнение

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

допускает решение $f = \text{const}$, но это очевидное решение не дает интеграла данной системы и потому должно быть исключено. Такое исключение решения для множителя M не является необходимым и если например M, положенное равным постоянной величине, дает решение уравнения (4), то это значение M можно употребить как множитель так же хорошо, как и всякое другое значение. Случай, когда можно положить $M = \text{const}$, имеет место, когда

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0,$$

так как тогда уравнение (4) приводится к уравнению

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}=0,$$

так что можно положить $M = \text{const}$ равным например единице, и тогда получится теорема:

Если в системе дифференциальных уравнений

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

X, Y, Z представляют функции от *x, y, z, удовлетворяющие условию*

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0;$$

если, далее, известен один интеграл $\varphi = \beta$ данной системы и из этого уравнения z выражен через x, y, β и найденное значение подставлено в *X, Y, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, то*

$$\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}(X\,dy - Y\,dx) = df$$

будет полным дифференциалом и, таким образом, второй интеграл $f = \alpha$ данной системы найдется простой квадратурой.

Надо упомянуть еще второй общий случай, который заключает в себе только-что указанный и в котором M также может быть определено. Именно, если в уравнение (4), имеющее место для M, после того как это уравнение делением на MX приведено к форме

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{Y}{X}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{Z}{X}\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

ввести значения

$$\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx};\quad \frac{Z}{X}=\frac{dz}{dx},$$

следующие из данной системы (2), то получится

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx}+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

или наконец

$$\frac{d\lg M}{dx}+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0. \tag{11}$$

Если теперь $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ есть полная производная, взятая по x, т. е. вида $\frac{d\xi}{dx}$, то мы имеем:

$$\frac{d\lg M}{dx}+\frac{d\xi}{dx}=0;\quad M=Ce^{-\xi}.$$

Отсюда получается теорема:

Пусть дана система

$$dx:dy:dz=X:Y:Z;$$

пусть далее выражение

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

равно $\frac{d\xi}{dx}$, *т. е. равно какой-нибудь полной производной по* x; *наконец, пусть* $\varphi=\beta$ *есть известный интеграл системы; тогда выражение*

$$\frac{e^{-\xi}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy-Y\,dx)$$

есть полный дифференциал, в предположении, что здесь всё выражено в x *и* y *при посредстве интеграла* $\varphi=\beta$. Этот результат можно выразить конечно еще и так, что обе переменные дифференциального выражения, для которого дается интегрирующий множитель, будут не x и y, а x и z или y и z.

Мы дадим примеры этих теорем. Пусть сначала надо проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, именно

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=u.$$

Если ввести новую переменную $z=\frac{dy}{dx}$, то получим два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=z; \quad \frac{dz}{dx}=u.$$

Таким образом

$$dx:dy:dz=1:z:u$$

и потому, согласно прежним обозначениям,

$$X=1; \quad Y=z; \quad Z=u.$$

Чтобы можно было применить первую из выведенных теорем, должно быть

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0;$$

но в рассматриваемом случае $\frac{\partial X}{\partial x}=0$, $\frac{\partial Y}{\partial y}=0$, $\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}$, так что имеет место условие

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

т. е. в u не должно входить z или, что то же, $\frac{dy}{dx}$. Сделав это допущение, получаем теорему:

Предположим, что дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\ y),$$

где f не содержит $\frac{dy}{dx}$ и известен один его первый интеграл

$$\varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=\alpha,$$

который, будучи решен относительно $\frac{dy}{dx}$, дает

$$\frac{dy}{dx}=\psi(x,\ y,\ \alpha)$$

или

$$dy-\psi(x,\ y,\ \alpha)\,dx=0;$$

тогда выражение

$$\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dfrac{dy}{dx}}},$$

представленное как функция от x, y и α, будет интегрирующим множителем этого дифференциального уравнения.

Пример на вторую теорему дает вариационное исчисление. Простейшая его задача есть та, в которой интеграл

$$\int\psi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)dx$$

должен быть *максимумом* или *минимумом*. Эта задача приводит к дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial y'}}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad y'=\frac{dy}{dx}.$$

Первое из них, представленное в развернутом виде, дает

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial y};$$

таким образом

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}=u$$

или, если для краткости положить

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'=\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx},$$

то

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{v}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}=u.$$

Но кроме того

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

поэтому

$$dx:dy:dy'=1:y':u.$$

Здесь y' стоит на месте переменной, выше обозначенной через z, и таким образом

$$X=1;\quad Y=y';\quad Z=u.$$

Чтобы можно было применить вторую теорему, выражение

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

должно быть полной производной по x. В рассматриваемом случае оно равно

$$\frac{\partial u}{\partial y'},$$

и следовательно, спрашивается, может ли $\frac{\partial u}{\partial y'}$ быть представлена как полная производная по x. Имеем

$$u=\frac{v}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}},$$

так что

$$\frac{\partial u}{\partial y'}=\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{\partial v}{\partial y'}-\frac{\partial^3\psi}{\partial y'^3}v}{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\right)^2};$$

должен быть *максимумом* или *минимумом*. Эта задача приводит к дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial y'}}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad y'=\frac{dy}{dx}.$$

Первое из них, представленное в развернутом виде, дает

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial y};$$

таким образом

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}=u$$

или, если для краткости положить

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'}y'=\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx},$$

то

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{v}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}=u.$$

Но кроме того

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

поэтому

$$dx:dy:dy'=1:y':u.$$

Здесь y' стоит на месте переменной, выше обозначенной через z, и таким образом

$$X=1; \quad Y=y'; \quad Z=u.$$

Чтобы можно было применить вторую теорему, выражение

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

должно быть полной производной по x. В рассматриваемом случае оно равно

$$\frac{\partial u}{\partial y'},$$

и следовательно, спрашивается, может ли $\frac{\partial u}{\partial y'}$ быть представлена как полная производная по x. Имеем

$$u=\frac{v}{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}},$$

так что

$$\frac{\partial u}{\partial y'}=\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\frac{\partial v}{\partial y'}-\frac{\partial^3\psi}{\partial y'^3}v}{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}\right)^2};$$

это выражение

$$\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dfrac{dy}{dx}}}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2},$$

представленное как функция от x, y и α, есть интегрирующий множитель этого дифференциального уравнения.

К этой категории задач максимума или минимума принадлежит например определение кратчайшей линии на данной поверхности. Эта задача приводит к дифференциальному уравнению второго порядка; если известен один интеграл этого уравнения, то можно определить множитель того дифференциального уравнения первого порядка, которое остается еще проинтегрировать.

Всё, что было сказано до сих пор о простейшем случае вариационного исчисления, можно распространить на самый общий случай, в котором под знаком интеграла стоит функция, содержащая произвольно большое число переменных y, z, u ..., зависящих от одной переменной x, и сверх того еще производные до какого угодно высокого порядка от этих переменных. Когда такая задача сведена к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными, то последнее интегрирование также может быть выполнено. Но, чтобы получить этот результат, необходимо привести некоторые теоремы относительно выражений, которые встречаются при решении линейных уравнений и которые названы Лапласом результантами, Гауссом — определителями и Коши — альтернативными функциями.

ОДИННАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ОБЗОР ТЕХ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ, КОТОРЫМИ ПОЛЬЗУЮТСЯ В ТЕОРИИ ПОСЛЕДНЕГО МНОЖИТЕЛЯ.

Положим

$$\begin{array}{rl} P = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_1)\,\ldots\,(a_s - a_1)\,\ldots\,(a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2)\,\ldots\,(a_s - a_2)\,\ldots\,(a_n - a_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a_n - a_{n-1}); \end{array}$$

тогда произведение P, таким образом определенное, обладает тем свойством, что оно при любой перестановке величин $a_1, a_2, \ldots a_n$, или, что то же, значков $1, 2 \ldots n$, меняет только свой знак, но не свое абсолютное значение. Об этих перестановках должно быть сказано здесь только следующее:

Обозначим значки $1, 2, \ldots n$, после того как их порядок изменен совершенно произвольным образом, через $i_1, i_2, \ldots i_n$ и перестановку, при помощи которой

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots s,\ \ldots n$$

переходят в

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots i_s,\ \ldots i_n,$$

обозначим через J. Какова бы ни была перестановка J, всегда можно значки $1, 2, \ldots n$ разделить на группы, обладающие тем свойством, что при перестановке J значки, принадлежащие одной группе, либо переходят друг в друга, либо все переходят в другую группу, так что во всяком случае значки, принадлежащие одной группе, остаются друг при друге. В отношении этих групп снова можно классифицировать перестановки, так что для некоторых из них все группы переходят в самих себя, для других некоторая группа значков переходит в другую и т. д. Этот, еще никоим образом не исчерпанный, материал является одним из важнейших в алгебре; во всех случаях, когда до сих пор возможно было решение уравнений, надо в нем искать обоснование.

Наиважнейшая из этих классификаций перестановок есть та, которая делит перестановки на положительные и отрицательные; первые оставляют P без изменения, а вторые превращают P в $-P$. Ко второму классу принадлежит например простейший случай, в котором только два значка i и i' перемещаются между собой. Это сразу видно, если представить P в форме

$$P = \pm (a_i - a_{i'})\,\Pi\,(a_i - a_k)\,\Pi\,(a_{i'} - a_k)\,\Pi\,(a_k - a_{k'}),$$

где k изображает все значки, отличные от i и i', а k, k' — все комбинации значков, отличных от i и i' и взятых по два, причем перестановка двух значков, входящих в одну и ту же разность, исключается. Чтобы определить, будет ли перестановка

$$\left.\begin{matrix} 1, \ 2, \ 3, \ldots n \\ i_1, \ i_2, \ i_3, \ldots i_n \end{matrix}\right\} \qquad (J)$$

положительна или отрицательна, надо сравнивать по очереди каждое i со следующими числами. Если μ есть число тех случаев, когда большее i стоит перед следующим меньшим, то (J) будет положительной или отрицательной перестановкой смотря по тому, будет ли μ четным или нечетным; или проще: (J) положительна или отрицательна в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок по два элемента из $1, 2, 3, \ldots n$ получится $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$.

Чтобы от предыдущего перейти к определителям, рассмотрим n^2 величин

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots p_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots p_n. \end{matrix}$$

Образуем произведение

$$a_1 b_2 c_3, \ldots p_n;$$

переставим в нем значки всеми возможными способами, придадим каждому получающемуся произведению знак плюс или минус смотря по тому, положительна или отрицательна перестановка, и просуммируем все эти произведения с принадлежащими им знаками. Получающееся таким образом выражение

$$R = \sum \pm a_1 b_2 c_3, \ldots p_n,$$

где двойной знак имеет указанное значение, есть определитель n^2 величин $a_1 \ldots p_n$, и эти n^2 величин называются элементами определителя R. Можно представить себе R образовавшимся из разложения P таким образом, что к каждому члену присоединяется, как множитель в нулевой степени, то a, которое в него не входит, и затем для всякого значения значка i вместо степеней $a_i^{\,0}, a_i^{\,1}, a_i^{\,2}, \ldots a_i^{\,n-1}$ ставится соответственно $a_i, b_i, c_i \ldots p_i$. Определитель R имеет следующие основные свойства:

1. При перестановке двух значков i и k или двух букв, например a и b, одной на место другой определитель R переходит в $-R$. Отсюда следует, что когда два ряда величин совпадают друг с другом, т. е. когда

$$a_i = a_k, \ b_i = b_k, \ \ldots \ p_i = p_k,$$

или

$$g_1 = h_1, \ g_2 = h_2, \ldots g_n = h_n,$$

определитель R обращается в нуль.

2. Определитель R однороден и линеен по отношению ко всем величинам, стоящим в одном ряду, т. е. как по отношению к величинам

$$a_i, \ b_i, \ \ldots \ p_i,$$

так и по отношению к величинам

$$g_1, \ g_2, \ \ldots \ g_n.$$

Поэтому имеем:

$$R = \frac{\partial R}{\partial a_i} a_i + \frac{\partial R}{\partial b_i} b_i + \ldots + \frac{\partial R}{\partial p_i} p_i,$$

$$R = \frac{\partial R}{\partial g_1} g_1 + \frac{\partial R}{\partial g_2} g_2 + \ldots + \frac{\partial R}{\partial g_n} g_n.$$

Положим

$$\frac{\partial R}{\partial a_i}=A_i,\ \frac{\partial R}{\partial b_i}=B_i,\ \ldots\ \frac{\partial R}{\partial p_i}=P_i;$$

тогда

$$R=A_ia_i+B_ib_i+C_ic_i+\ldots+P_ip_i$$

и так же

$$R=A_ka_k+B_kb_k+C_kc_k+\ldots+P_kp_k.$$

Но при перестановке значков i и k определитель R переходит в $-R$, так что, как отсюда ясно, A_i переходит в $-A_k$, B_i в $-B_k$ и т. д.; вместе с этим тот член A_i, который умножен на b_k, переходит в тот член $-A_k$, который умножен на b_i, т. е. в определителе R члены a_ib_k и a_kb_i имеют множители обратные по знаку, или

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial b_k}=-\frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_i}.$$

Точно так же имеем для трех значков i, k, l:

$$\frac{\partial^3 R}{\partial a_i\partial b_k\partial c_l}=\frac{\partial^3 R}{\partial a_k\partial b_l\partial c_i}=\frac{\partial^3 R}{\partial a_l\partial b_i\partial c_k}=-\frac{\partial^3 R}{\partial a_l\partial b_k\partial c_i}=-\frac{\partial^3 R}{\partial a_k\partial b_i\partial c_l}=-\frac{\partial^3 R}{\partial a_i\partial b_l\partial c_k};$$

отсюда получаются следующие выражения для R:

$$R=\sum\sum(a_ib_k-a_kb_i)\frac{\partial^2 R}{\partial a_i\partial b_k};$$

$$R=\sum\sum\sum\left\{a_i(b_kc_l-b_lc_k)+a_k(b_lc_i-b_ic_l)+a_l(b_ic_k-b_kc_i)\right\}\frac{\partial^3 R}{\partial a_i\partial b_k\partial c_l}.$$

Здесь суммирование распространяется на все отличные друг от друга комбинации значков 1, 2, ... n, по два и по три.

Это выражение определителя через произведение определителей низшего порядка было помещено впервые в Парижских мемуарах от 1772 г. в одной из статей Лапласа относительно мировой системы. Лаплас и Крамер в Женеве были вообще первыми, исследовавшими должным образом свойства определителей.

3. Вышеприведенное уравнение

$$R=g_1\frac{\partial R}{\partial g_1}+g_2\frac{\partial R}{\partial g_2}+\ldots+g_n\frac{\partial R}{\partial g_n}$$

дает, если написать a вместо g,

$$R=a_1\frac{\partial R}{\partial a_1}+a_2\frac{\partial R}{\partial a_2}+\ldots+a_n\frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

К этому уравнению присоединяются еще $n-1$ других уравнений, которые доказываются на основании того обстоятельства, что R должно тождественно обращаться в нуль, если два ряда величин положить равными друг другу. Эти уравнения будут:

$$0=b_1\frac{\partial R}{\partial a_1}+b_2\frac{\partial R}{\partial a_2}+\ldots+b_n\frac{\partial R}{\partial a_n};$$

$$0=c_1\frac{\partial R}{\partial a_1}+c_2\frac{\partial R}{\partial a_2}+\ldots+c_n\frac{\partial R}{\partial a_n};$$

. . . .

$$0=p_1\frac{\partial R}{\partial a_1}+p_2\frac{\partial R}{\partial a_2}+\ldots+p_n\frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

На этих формулах основывается решение линейных уравнений. В самом деле, если имеем систему

$$\begin{aligned}
&a_1x_1+b_1x_2+\ldots+p_1x_n=y_1;\\
&a_2x_1+b_2x_2+\ldots+p_2x_n=y_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1+b_nx_2+\ldots+p_nx_n=y_n
\end{aligned}$$

и умножим эти уравнения соответственно на $\frac{\partial R}{\partial a_1}$, $\frac{\partial R}{\partial a_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial R}{\partial a_n}$, на $\frac{\partial R}{\partial b_1}$, $\frac{\partial R}{\partial b_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial R}{\partial b_n}$ и т. д., где R имеет данное выше значение

$$R=\sum\pm a_1b_2\ldots p_n,$$

то получим:

$$\begin{aligned}
Rx_1&=\frac{\partial R}{\partial a_1}y_1+\frac{\partial R}{\partial a_2}y_2+\ldots+\frac{\partial R}{\partial a_n}y_n;\\
Rx_2&=\frac{\partial R}{\partial b_1}y_1+\frac{\partial R}{\partial b_2}y_2+\ldots+\frac{\partial R}{\partial b_n}y_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Rx_n&=\frac{\partial R}{\partial p_1}y_1+\frac{\partial R}{\partial p_2}y_2+\ldots+\frac{\partial R}{\partial p_n}y_n.
\end{aligned}$$

4. При помощи этих формул доказывается одна замечательная теорема относительно вариации определителя R. Обозначим вариации величин a_i, b_i, $\ldots p_i$ через δa_i, δb_i, $\ldots$ δp_i и образуем следующие n систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
1)\quad &a_1x_1'+b_1x_2'+\ldots+p_1x_n'=\delta a_1\\
&a_2x_1'+b_2x_2'+\ldots+p_2x_n'=\delta a_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1'+b_nx_2'+\ldots+p_nx_n'=\delta a_n;\\
2)\quad &a_1x_1''+b_1x_2''+\ldots+p_1x_n''=\delta b_1\\
&a_2x_1''+b_2x_2''+\ldots+p_2x_n''=\delta b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1''+b_nx_2''+\ldots+p_nx_n''=\delta b_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n)\quad &a_1x_1^{(n)}+b_1x_2^{(n)}+\ldots+p_1x_n^{(n)}=\delta p_1\\
&a_2x_1^{(n)}+b_2x_2^{(n)}+\ldots+p_2x_n^{(n)}=\delta p_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_nx_1^{(n)}+b_nx_2^{(n)}+\ldots+p_nx_n^{(n)}=\delta p_n.
\end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\delta R=\sum_i\left\{\frac{\partial R}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial R}{\partial b_i}\delta b_i+\ldots+\frac{\partial R}{\partial p_i}\delta p_i\right\}.$$

Но, на основании вышеполученных формул для решения уравнений, имеем

$$Rx_1'=\frac{\partial R}{\partial a_1}\delta a_1+\frac{\partial R}{\partial a_2}\delta a_2+\ldots+\frac{\partial R}{\partial a_n}\delta a_n=\sum_i\frac{\partial R}{\partial a_i}\delta a_i$$

и так же

$$Rx_2'' = \sum_i \frac{\partial R}{\partial b_i} \delta b_i, \ Rx_3''' = \sum_i \frac{\partial R}{\partial c_i} \delta c_i, \ \ldots \ Rx_n^{(n)} = \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i} \delta p_i,$$

так что

$$\delta R = R \left\{ x_1' + x_2'' + x_3''' + \ldots + x_n^{(n)} \right\},$$

или

$$\delta \lg R = x_1' + x_2'' + x_3''' + \ldots + x_n^{(n)}.$$

ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

МНОЖИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ.

Мы дадим сейчас приложение полученной теоремы относительно вариации определителя к системе дифференциальных уравнений.

Пусть дана следующая система:

$$\frac{dx_1}{dx}=X_1,\quad \frac{dx_2}{dx}=X_2,\ \ldots \frac{dx_i}{dx}=X_i,\ \ldots \frac{dx_n}{dx}=X_n \tag{1}$$

и пусть эта система, в которой $X_1, X_2, \ldots X_n$ могут быть произвольными функциями от $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, интегрируется при помощи системы уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1&=f_1(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n)\\
x_2&=f_2(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n&=f_n(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n).
\end{aligned}$$

Если эти значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ подставим в $X_1, X_2, \ldots X_n$ и определим производные $\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$ так же, как функции от x и n произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, то при этих значениях система (1) будет выполняться тождественно, т. е. уравнения (1) имеют место для всех значений переменной x и произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; поэтому их можно дифференцировать по каждой из этих n постоянных. Каждое из уравнений (1) образует таким образом n уравнений, всего n систем по n уравнений в каждой системе, т. е. n^2 уравнений, которые все имеют вид:

$$\frac{d\,\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}}{dx}=\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial X_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_k}+\ldots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_k}.$$

Система, следующая из первого уравнения $\frac{dx_1}{dx}=X_1$, будет:

$$1)\quad \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}}{dx},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_2}}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_n}}{dx}.$$

Системы, следующие из остальных уравнений (1), будут:

$$2)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}}{dx},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}}{dx}$$

и т. д.

Наконец

$$n)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}}{dx},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\frac{d\,\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}}{dx}.$$

Если сравним эти системы с теми, которые были установлены в п. 4 предыдущей лекции при рассмотрении теоремы о вариации определителя, то найдем, что те системы переходят в эти при следующих предположениях:

$$a_1=\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1},\ b_1=\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1},\ \ldots\ p_1=\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1};$$

$$a_2=\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2};\ b_2=\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2},\ \ldots\ p_2=\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n},\ b_n=\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n},\ \ldots\ p_n=\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n},$$

$$R=\sum\pm a_1 b_2\ldots p_n=\sum\pm\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n};$$

$$x_1'=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\ x_2'=\frac{\partial X_1}{\partial x_2},\ \ldots\ x_n'=\frac{\partial X_1}{\partial x_n};$$

$$x_1''=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\ x_2''=\frac{\partial X_2}{\partial x_2},\ \ldots\ x_n''=\frac{\partial X_2}{\partial x_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^{(n)}=\frac{\partial X_n}{\partial x_1},\ x_2^{(n)}=\frac{\partial X_n}{\partial x_2},\ \ldots x_n^{(n)}=\frac{\partial X_n}{\partial x_n},$$

$$\delta=\frac{d}{dx}.$$

Поэтому полную производную по x от $\lg R$ можно представить в следующей замечательной форме:

$$\frac{d\lg R}{dx}=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}, \tag{2}$$

где

$$R = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Таким образом, по выполнении интегрирования системы (1), найдем R из уравнения (2) посредством квадратуры по x. Но существуют случаи, в которых определитель R может быть дан до производства каких-либо интегрирований, именно когда сумма $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ может быть преобразована с помощью системы (1) в полную производную по x или, что представляет еще более простой случай, когда X_1 не содержит x_1, X_2 не содержит x_2, ..., X_n не содержит x_n. Тогда $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$; поэтому

$$\frac{d \lg R}{dx} = 0, \quad R = \text{const}.$$

Содержащаяся в уравнении (2) теорема была установлена впервые Лиувиллем и притом в этой же форме (Liouville Journal, t. III, p. 348); в другой форме, в которой произвольные постоянные α заменены независимыми переменными x, а эти последние заменены функциями f от переменных x, эта теорема встречается в одной из моих статей (Crelle Journal, Bd. 22, p. 336). Лиувилль не извлек из этой теоремы той пользы, которую она доставляет для интегрирования. Раньше чем перейти к этому приложению, придадим полученному результату несколько более общую форму, произведя в нем некоторое изменение, которое хотя и не кажется очень существенным, но без которого, тем не менее, применение этого результата было бы гораздо более ограниченным.

Напишем систему (1) в форме пропорций:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = 1 : X_1 : X_2 : \ldots : X_n;$$

умножая правую часть на произвольную величину X и заменяя в то же время X_1, X_2, ... X_n соответственно частными $\frac{X_1}{X}$, $\frac{X_2}{X}$, ... $\frac{X_n}{X}$, мы можем придать ей ранее рассмотренный вид:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n. \tag{3}$$

При таком изменении уравнение (2) переходит в следующее:

$$\frac{d \lg R}{dx} = \frac{\partial \left(\frac{X_1}{X}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{X_2}{X}\right)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \left(\frac{X_n}{X}\right)}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) - \frac{1}{X^2}\left(X_1 \frac{\partial X}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial X}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial X}{\partial x_n}\right).$$

Член, вычитающийся в правой части, может быть при помощи уравнений

$$\frac{X_1}{X} = \frac{dx_1}{dx}; \qquad \frac{X_2}{X} = \frac{dx_2}{dx}; \quad \ldots \quad \frac{X_n}{X} = \frac{dx_n}{dx},$$

приведен к форме:

$$-\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial X}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_n}\right)$$

или

$$-\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx}-\frac{\partial X}{\partial x}\right).$$

Если это последнее выражение подставить в формулу для $\frac{d\lg R}{dx}$, то получится

$$\frac{d\lg R}{dx}=\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)-\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

или

$$\frac{d\lg(XR)}{dx}=\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right). \tag{4}$$

Мы можем, таким образом, определить R до всех интегрирований, если величина $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$ при помощи данной системы (3) может быть преобразована в полную производную по x или если $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$.

В последнем случае имеем

$$XR=\text{const.},$$

так что

$$R=\frac{\text{const.}}{X},$$

где, как прежде,

$$R=\sum\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}.$$

Предположим теперь, что система (3) в самом деле обладает тем свойством, что R может быть определено до всех интегрирований, и предположим, что $n-1$ интегралов уже найдено, а n-го еще недостает; тогда можно $n-1$ интегральных уравнений представить в форме

$$\begin{aligned}
x_2&=\varphi_2(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n)\\
x_3&=\varphi_3(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n&=\varphi_n(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n),
\end{aligned}$$

после чего остается еще проинтегрировать уравнение

$$X\,dx_1-X_1dx=0,$$

интеграл которого можно представить в виде

$$x_1=\varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Из сравнения с вышеприведенной полной системой интегралов дифференциальных уравнений (1) следует, кроме того, что функция, обозначенная теперь через φ_1, есть та, которая была обозначена выше через f_1, и что функции $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ переходят соответственно в $f_2, f_3, \ldots f_n$, если вместо x_1 подставлено его значение φ_1.

Если производные величин $x_2, x_3, \ldots x_n$, поскольку мы их рассматриваем как функции от $x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, заключим в скобки для отличия от до сих пор рассматриваемых производных, то получим

$$\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}\right)+\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_k},$$

где i и k могут принимать все значения от 2 до n включительно. Для $k=1$ имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1};$$

это уравнение тоже можно включить в общую формулу, если принять во внимание, что

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)=\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right)=\ldots=\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)=0. \tag{5}$$

Отсюда вытекает формула

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right)+\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k},$$

где i изменяется от $i=2$ до $i=n$ и k — от $k=1$ до $k=n$. Поэтому

$$R=\sum\pm\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\left\{\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)+\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right\}\left\{\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}\right\}\ldots\left\{\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right)+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\right\},$$

т. е. R будет определителем, составленным из величин

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)+\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)+\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right)+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right)+\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right)+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}.
\end{array}$$

Обозначим через R_1 и R_2 определители, которые получатся из R, если мы в нем заменим n величин, стоящих во втором вертикальном столбце, для R_1 только их первыми членами, а для R_2 — их вторыми членами, так что R, как линейная однородная функция тех n величин, будет равняться сумме R_1 и R_2. Но R_2 имеет общий множитель $\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)$, и если мы его вынесем, то величины, стоящие в первом и во втором вертикальных рядах, совпадут, т. е. R_2, на основании п. 1 предыдущей лекции, окажется равным нулю, а R — равным R_1; таким образом определитель R остается без изменения, если величины второго вертикального ряда заменить их первыми членами. То же самое имеет место и для величин третьего, четвертого, ...n-го вертикальных рядов, и таким образом R оказывается равным определителю из величин

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right), & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right), & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right), & \ldots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right).
\end{array}$$

Если теперь представить этот определитель как линейную функцию величин первого горизонтального ряда и принять во внимание, что, на основании (5), все эти величины, за исключением $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$, исчезают, то R получается как произведение $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ на $\frac{\partial R}{\partial \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}}$, т. е. как произведение $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ на определитель

$$Q = \sum \pm \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right), \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right), \tag{6}$$

элементы которого те же самые, что и те, которые получатся из последней таблицы, если в ней отбросить первый горизонтальный ряд и первый вертикальный ряд. Таким образом имеем окончательно:

$$R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} Q. \tag{7}$$

Это уравнение имеет величайшую важность. Именно, так как по нашему предположению R из данной системы (3) можно найти a priori, без всяких интегрирований, и так как, далее, Q при посредстве $n-1$ уже произведенного интегрирования известно, то уравнение (7), как это мы тотчас увидим, дает возможность выполнить еще недостающее n-ое интегрирование, так как оно определяет интегрирующий множитель для дифференциального уравнения

$$X\,dx_1 - X_1 dx = 0,$$

в котором X и X_1 представлены как функции от x и x_1. Пусть полный интеграл этого уравнения будет

$$F(x, x_1) = \alpha_1. \tag{8}$$

Отсюда получаем, решая относительно x_1, то же самое выражение, которое мы раньше обозначили через

$$x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Подстановка этого выражения вместо x_1 превращает (8) в тождество; поэтому получаем дифференцированием по α_1

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = 1.$$

Отсюда, принимая во внимание, что, на основании равенства (7),

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \frac{R}{Q},$$

имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{Q}{R}.$$

Обозначим через N интегрирующий множитель выражения $X\,dx_1 - X_1 dx$; тогда

$$NX = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad -NX_1 = \frac{\partial F}{\partial x},$$

так что из первого из этих уравнений следует, что

$$N=\frac{1}{X}\,\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{Q}{XR}\,; \tag{9}$$

таким образом $N=\frac{Q}{RX}$ есть интегрирующий множитель уравнения $X\,dx_1-X_1 dx=0$. Итак, имеем теорему:

Если в системе дифференциальных уравнений

$$dx:dx_1:dx_2:\ldots:dx_n=X:X_1:X_2:\ldots:X_n$$

выражение

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

есть полная производная по x; если известны $n-1$ интеграл данной системы и из этих интегралов можно определить переменные $x_2, x_3,\ldots x_n$, как функции от x, x_1 и $n-1$ произвольных постоянных интегрирования. в виде

$$x_2=\varphi_2(x, x_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n);$$

$$x_3=\varphi_3(x, x_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n);\ldots x_n=\varphi_n(x, x_1, \alpha_2\ldots\alpha_n)$$

и если поэтому остается только проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$X\,dx_1-X_1dx=0,$$

то выражение

$$N=\frac{Q}{XR}$$

есть интегрирующий множитель этого дифференциального уравнения, где

$$XR=e^{\int\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)dx}$$

и

$$Q=\sum\pm\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\,\frac{\partial x_3}{\partial\alpha_3}\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}\,.$$

Если $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$, то $XR=\mathrm{const}$, и в этом случае сам определитель Q есть интегрирующий множитель дифференциального уравнения $X\,dx_1-X_1dx=0$.

Если уравнение (4) этой лекции сопоставить с уравнением (11) десятой лекции, то оказывается, что то дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $-\lg XR$, будет для $n+1$ переменных совпадать с тем уравнением, которое мы тогда (для системы двух дифференциальных уравнений с тремя переменными) получили для $\lg M$. Поэтому можно положить

$$\lg M=-\lg XR$$

или

$$M=\frac{1}{XR}\,,$$

и, при предположениях только-что изложенной теоремы, MQ будет интегрирующим множителем последнего дифференциального уравнения $X\,dx_1-X_1dx=0$, где M определяется из уравнения

$$X\,\frac{d\lg M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0.$$

Рассмотренный перед этим определитель Q можно образовать различными способами. Простейшее представление есть в форме произведения. Именно, как только мы исключим посредством x_1 из переменных $x_2, x_3, \ldots x_n$ постоянную α_1 и после этого представим определитель R как произведение $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ на определитель Q, порядок которого на единицу ниже, чем порядок R, то мы сможем снова исключить посредством x_2 из переменных $x_3, x_4, \ldots x_n$ постоянную α_2 и представить тогда Q как произведение $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}$ на определитель $P = \sum \pm \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \frac{\partial x_4}{\partial \alpha_4} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}$. Таким же образом можно продолжать дальше: исключаем посредством x_3 постоянную α_3 из $x_4, x_5, \ldots x_n$, посредством x_4 — постоянную α_4 из $x_5, x_6, \ldots x_n$ и т. д. Таким образом получаем следующее представление интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= F_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ x_2 &= F_2(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ x_3 &= F_3(x, x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ x_4 &= F_4(x, x_1, x_2, x_3, \alpha_4 \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= F_n(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \alpha_n); \end{aligned}\right\} \tag{F}$$

отсюда

$$R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}, \tag{10}$$

где вместо величин x_1 до x_n надо подставить выражения F_1 до F_n. Для этого же способа изображения интегральных уравнений имеем:

$$Q = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}. \tag{11}$$

Преобразование, которым мы здесь воспользовались, состоит таким образом в следующем:

Если n величин $x_1, x_2, \ldots x_n$ даны как функции n других величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, так что

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \\ x_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \end{aligned}$$

и если представим путем последовательного исключения величины $x_1, x_2, \ldots x_n$ следующим образом

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ x_2 &= F_2(x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ x_3 &= F_3(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, \alpha_n), \end{aligned}$$

то будем иметь.

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n};$$

если при этом производные от величин x, представленных первым способом, изобразим без скобок, а вторым способом — со скобками, то получим:

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right).$$

Форма (F) для интегральных уравнений есть та, которую они принимают сами собой в случае одного дифференциального уравнения высшего порядка при последовательном интегрировании. Последовательное интегрирование уравнения

$$y^{(n+1)} = f\,(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\ \dots\ y'',\ y',\ y,\ x)$$

дает

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= f_1\ (\alpha_n,\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\ \dots\ y'',\ y',\ y,\ x) \\
y^{(n-1)} &= f_2\ (\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ y^{(n-2)},\ \dots\ y'',\ y',\ y,\ x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y'' &= f_{n-1}\,(\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \dots\ \alpha_2,\ y',\ y,\ x) \\
y' &= f_n\,(\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \dots\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ y,\ x).
\end{aligned}$$

Если теперь данное уравнение $y^{(n+1)} = f$ принадлежит к категории тех, для которых множитель M может быть определен a priori, то для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f_n$$

интегрирующий множитель будет

$$MQ,$$

где

$$Q = \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_n} \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \dots \frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} \frac{\partial y'}{\partial \alpha_1}.$$

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОСТАВЛЕНИЮ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ МНОЖИТЕЛЯ.

Определители, имеющие форму

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

названы мною функциональными определителями; Коши, который дал в Comptes rendus Парижской академии некоторые теоремы относительно этих определителей, назвал их „fonctions différentielles alternées". Эти функциональные определители образуются из n^2 частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ от n функций $f_1, f_2, \ldots f_n$, каждая из которых зависит от n величин $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Я опубликовал в 22-й тетради журнала Крелля статью относительно функциональных определителей, в которой установил, что между функциональными определителями в задачах со многими переменными и производными в задачах с одной переменной существует определенная аналогия. Эта аналогия выражается в доказанных там следующих теоремах:

1. Если f есть функция от φ, а φ есть функция от x, то $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$. Этому соответствует в случае n переменных теорема:

Если $f_1, f_2, \ldots f_n$ — функции от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, а эти последние — функции от $x_1, x_2, \ldots x_n$, то

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\right)\left(\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right).$$

2. Это может быть выражено в другой форме так: Если f и φ функции от x, то

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Аналогичная теорема для случая n переменных будет: *Если $f_1, f_2, \ldots f_n$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ — функции от $x_1, x_2, \ldots x_n$, то*

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} = \frac{\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}};$$

поэтому, если положить $f_1 = x_1, f_2 = x_2, \ldots f_n = x_n$, то

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}}.$$

3. Из уравнения $\Pi(x, y) = 0$ получается:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial x}}{\frac{\partial \Pi}{\partial y}}.$$

К этому имеем следующую аналогию: *Из n уравнений с $2n$ переменными*

$$\Pi_1(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$\Pi_2(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi_n(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

получается:

$$(-1)^n \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{\sum \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial y_n}}.$$

4. Чтобы уравнение $F(x) = 0$ имело два равных корня, необходимо, чтобы и $F'(x) = 0$. К этому имеет место следующая аналогия: *Чтобы уравнения*

$$F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0;\ F_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0;\ \ldots F_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

имели две друг с другом совпадающие системы корней, должно быть одновременно

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0.$$

5. Если для всех значений x производная $\frac{\partial F}{\partial x}$ равна нулю, то отсюда следует, что $F = \text{const}$. К этому имеем аналогию: *Если для всех значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ имеет место равенство*

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0,$$

то n функций $F_1, F_2, \ldots F_n$ должны быть связаны уравнением $\Pi(F_1, F_2, \ldots F_n) = 0$, в которое переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ явно не входят. В самом деле, в случае $n = 1$ это дает $\Pi(F) = 0$, следовательно $F = \text{const}$, как это и должно быть.

К этим примерам упомянутой аналогии можно присоединить многие другие, которые можно найти частью в указанной статье, частью в статье „De binis quibuslibet functionibus homogeneis etc.“, появившейся в 12-ом томе Журнала Крелля.

Исходя из рассмотрения функциональных определителей, мы достигаем того, что можем обосновать теорию множителя системы дифференциальных уравнений для общего случая $n+1$ переменных иначе, чем это сделано в двенадцатой лекции, а именно тем самым путем, на который мы вступили в десятой лекции для случая трех переменных.

Пусть система

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

интегрируется уравнениями

$$f_1=\alpha_1,\quad f_2=\alpha_2,\ \dots f_n=\alpha_n,$$

в которых $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ обозначают произвольные постоянные. Их непосредственные дифференциалы будут

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n=0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial x}dx+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n=0,
\end{aligned}$$

причем они должны быть тождественны с данной системой, так как произвольные постоянные исчезают при дифференцировании. Если к этим n уравнениям, линейным относительно $dx_1, dx_2, \dots dx_n$, присоединим, как $n+1$-ое, тождество

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=df,$$

где f обозначает произвольную функцию от $x, x_1, \dots x_n$, и применим к этим $n+1$ уравнениям формулы, данные в № 3 одиннадцатой лекции для решения линейных уравнений, то получим для $dx, dx_1, \dots dx_n$ значения:

$$R\,dx=A\,df;\quad R\,dx_1=A_1df;\ \dots\ R\,dx_n=A_ndf,$$

где

$$R=\sum\pm\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=A\frac{\partial f}{\partial x}+A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\dots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n};$$

$$A=\frac{\partial R}{\partial\frac{\partial f}{\partial x}};\quad A_1=\frac{\partial R}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_1}};\ \dots\ A_n=\frac{\partial R}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

Хотя это определение величин $A, A_1, \dots A_n$ из разложения R по частным производным функции f как раз и есть то, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, но интересно также вывести величины A одну из другой, не прибегая к помощи R, — в особенности для того, чтобы проследить аналогию с данным в десятой лекции случаем трех переменных. Прежде всего

$$A=\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Из A получаем, на основании № 2 одиннадцатой лекции, A_1, для чего переставляем между собой дифференцирования по x и по x_1 и меняем знак. Это правило получения A_1 из A можно заменить следующим равнозначащим. Делаем циклическую перестановку производных, взятых по всем $n+1$ переменным x, а именно: на место производных, взятых по $x, x_1, x_2\dots x_{n-1}, x_n$, ставим соответственно производные по $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, x$ и, кроме того, меняем знак или оставляем его, смотря по тому, будет ли число переменных, т. е. $n+1$, четным или нечетным; тогда A превращается в A_1. Последнее правило имеет то преимущество, что простым повторением той же операции A_1 превращается в A_2, A_2 в A_3 и т. д.

Исключив из полученных для $dx, dx_1, \dots dx_n$ значений df, имеем:

$$dx:dx_1:\dots:dx_n=A:A_1:\dots:A_n.$$

что должно согласоваться с данной системой

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n.$$

Таким образом должна иметь место пропорция

$$A : A_1 : \ldots : A_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

т. е. должен существовать множитель M, обладающий тем свойством, что

$$MX = A, \quad MX_1 = A_1, \ldots MX_n = A_n.$$

Теперь дело сводится к тому, чтобы тождество, которому удовлетворяют величины A, уже доказанное для $n = 2$ в десятой лекции, распространить на общий случай, т. е. доказать, что имеет место уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.$$

Если принять во внимание закон составления величин $A, A_1, \ldots A_n$, то легко увидеть, что в левую часть этого уравнения могут входить только первые и вторые производные величин $f_1, f_2, \ldots f_n$ и притом последние только линейно, т. е. никогда не будет входить произведения двух производных второго порядка. Далее, так как в A не входят производные, взятые по x, в A_1 — взятые по $x_1, \ldots$, в A_n — взятые по x_n, то в выражение

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

не входят производные вида $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i^2}$, а только вида $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$, где i отлично от k.

Таким образом рассматриваемое выражение $\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ можно представить как сумму членов вида

$$F_{ik}^{(s)} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Значение $F_{ik}^{(s)}$ вычисляется при помощи формул

$$R = \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

$$A_i = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}, \quad A_k = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k}},$$

причем для этого надо исследовать только обе производные $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$, так как в остальные $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ очевидно не входит. Далее, так как величины A_i и A_k сами представляют определители, то они могут быть выражены так:

$$A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_k}} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_k}} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_k}} \frac{\partial f_n}{\partial x_k};$$

$$A_k = \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_i}} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_i}} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Отсюда получатся, как дополнение к рассматриваемому выражению $\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, два члена, умноженные на $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$. Один из них происходит из $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ и имеет вид

$$\frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k},$$

другой происходит из $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ и имеет вид

$$\frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k};$$

следовательно будем иметь:

$$F_{i,k}^{(s)} = \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} = \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k} \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}}.$$

Формула

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial b_k} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_i} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial b_k} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_i} = 0,$$

содержащаяся в № 2 одиннадцатой лекции, дает в рассматриваемом случае:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k} \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} = 0,$$

так что

$$F_{i,k}^{(s)} = 0.$$

Таким образом в общем случае доказано тождество

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.$$

Но мы имели

$$A = MX; \quad A_1 = MX_1, \ \ldots \ A_n = MX_n,$$

поэтому получится уравнение:

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

которое представляет собою дифференциальное уравнение в частных производных для множителя M.

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ВТОРАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЬ. МНОЖИТЕЛИ ПОСТЕПЕННО ПРИВОДИМОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Мы можем теперь дальнейшее исследование для случая $n+1$ переменных вести точно так же, как это было сделано в десятой лекции для трех переменных. Раскрывая уравнение в частных производных для множителя M, получаем:

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+X_1\frac{\partial M}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial M}{\partial x_n}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}M=0. \qquad (1)$$

Если это дифференциальное уравнение удовлетворяется другой величиной N, то имеем:

$$X\frac{\partial N}{\partial x}+X_1\frac{\partial N}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial N}{\partial x_n}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}N=0.$$

Умножим второе из этих уравнений на $\frac{1}{M}$, первое—на $\frac{N}{M^2}$ и вычтем одно из другого; тогда получим:

$$X\frac{M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x}}{M^2}+X_1\frac{M\frac{\partial N}{\partial x_1}-N\frac{\partial M_1}{\partial x_1}}{M^2}+\ldots+X_n\frac{M\frac{\partial N}{\partial x_n}-N\frac{\partial M}{\partial x_n}}{M^2}=0$$

или

$$X\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x}+X_1\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_n}=0,$$

т. е. $\frac{N}{M}$ есть решение уравнения

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0. \qquad (2)$$

Для полного интегрирования такого уравнения необходимо знание n друг от друга независимых решений $f_1, f_2, \ldots f_n$, т. е. n функций $f_1, f_2, \ldots f_n$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{gathered}
X\frac{\partial f_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}=0\\
X\frac{\partial f_2}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n}=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X\frac{\partial f_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0,
\end{gathered}$$

причем ни одна из этих n функций не будет функцией от остальных. Если такие n функций известны, то самое общее решение будет:

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Это доказываем, умножая вышестоящие n уравнений соответственно на $\frac{\partial F}{\partial f_1}$ $\frac{\partial F}{\partial f_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial f_n}$ и затем складывая их. Что касается $n+1$-го решения f_{n+1}, независимого от остальных n, то его не существует; действительно, предположим, что такое решение есть, тогда, согласно только-что примененному способу заключения, следует, что всякая функция от этих $n+1$ решений

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots f_n, f_{n+1})$$

тоже будет решением. Но так как $f_1, f_2, \ldots f_n, f_{n+1}$ предполагаются взаимно независимыми, то их можно взять за новые переменные вместо $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, а потому произвольная функция от $f_1, f_2, \ldots f_n, f_{n+1}$ равнозначаща с произвольной функцией от $x, x_1, \ldots x_n$. Поэтому рассматриваемому дифференциальному уравнению для f удовлетворяла бы всякая произвольная функция от $x, x_1, \ldots x_n$, что невозможно. Итак, могут существовать только n друг от друга независимых решений $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Эти n решений уравнений в частных производных (2) имеют свойство обращаться в постоянные величины вследствие интегральных уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n. \tag{3}$$

Действительно, в виду того, что эти интегральные уравнения делают величины $X, X_1, \ldots X_n$ пропорциональными дифференциалам $dx, dx_1, \ldots dx_n$, можно в уравнении с частными производными

$$X\frac{\partial f_i}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,$$

имеющем место для какой-нибудь функции f, заменить величины $X, X_1, \ldots X_n$ пропорциональными им дифференциалами $dx, dx_1, \ldots dx_n$, и тогда получится

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}dx + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n = 0$$

или

$$df_i = 0;$$

следовательно

$$f_i = \text{const}.$$

Предполагая, что постоянные, которым должны быть равны $f_1, f_2, \ldots f_n$, представляют собою n друг от друга независимых произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, получим самое общее интегрирование, которое возможно для дифференциальных уравнений (3), и таким образом выражения

$$f_1 = \alpha_1; \quad f_2 = \alpha_2; \quad \ldots f_i = \alpha_i; \quad \ldots f_n = \alpha_n$$

образуют полную систему интегралов этих дифференциальных уравнений, решенную относительно произвольных постоянных. Обратно, если полное интегрирование дифференциальных уравнений (3) будет произведено посредством n уравнений с n друг от друга независимыми произвольными постоянными, т. е. при помощи n уравнений, обладающих свойством, что из них невозможно вывести результат исключения, свободный от всех n постоянных, и если решение этих n уравнений относительно постоянных дает для этих последних значения

$$f_1 = \alpha_1; \quad f_2 = \alpha_2; \quad \ldots f_i = \alpha_i; \quad \ldots f_n = \alpha_n,$$

то, дифференцируя, получим:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Но так как $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$ образуют полную систему интегралов дифференциальных уравнений (3), то дифференциалы dx, dx_1, ... dx_n пропорциональны величинам X, X_1, ... X_n, так что

$$X \frac{\partial f_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,$$

т. е. $f_1, f_2, \ldots f_n$ являются решениями уравнения (2).

Таким образом совершенно одно и то же, сказать ли: $f_1, f_2, \ldots f_n$ представляют собою n друг от друга независимых решений уравнения в частных производных (2), или сказать: $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$, ... $f_n = \alpha_n$ образуют полную систему интегралов дифференциальных уравнений (3).

Далее, мы видели, что

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

есть самое общее решение уравнения (2) и что $\frac{N}{M}$ удовлетворяет этому же уравнению. Отсюда следует, что если M есть некоторое определенное решение уравнения (1) и N — какое-нибудь другое решение, то $\frac{N}{M}$ должно быть функцией от $f_1, f_2, \ldots f_n$. Это дает:

$$N = MF(f_1, f_2, \ldots f_n);$$

т. е., если M есть *один* из множителей, то выражение

$$MF(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

есть общая форма, в которой содержатся *все* множители. Но при посредстве интегральных уравнений системы (3) получим $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$; таким образом при использовании интегральных уравнений этот общий вид отличается от M только постоянным множителем. Для отличия мы будем обозначать определенное значение множителя M через M_0, общее — через M: далее, через $\frac{1}{\tilde{\omega}}$ обозначим функцию от $f_1, f_2, \ldots f_n$, на которую надо умножить M_0, чтобы получить M, так что $M = M_0 \frac{1}{\tilde{\omega}}$. Тогда уравнения

$$MX = A, \ MX_1 = A_1, \ \ldots \ MX_n = A_n,$$

встречающиеся в конце предыдущей лекции, можно написать так:

$$M_0 X = A\tilde{\omega}, \ M_0 X_1 = A_1\tilde{\omega}, \ \ldots \ M_0 X_n = A_n\tilde{\omega}. \tag{4}$$

При помощи системы дифференциальных уравнений (3) можно преобразовать найденное для M уравнение в частных производных (1). Именно уравнение

$$X \frac{\partial M}{\partial x} + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

или, что то же,

$$X\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{X_1}{X}\frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + \frac{X_n}{X}\frac{\partial M}{\partial x_n}\right) + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

переходит, если принять во внимание уравнение (3), в

$$X\frac{dM}{dx}+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)=0$$

или в

$$X\frac{d\lg M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0. \qquad (5)$$

Это уравнение вполне тождественно с уравнением (1), так как для величин x, $x_1, \ldots x_n$ имеют место дифференциальные уравнения (3); посредством (3) можно сделать переход от (1) к (5), также как и обратный переход.

Из уравнения (5) часто можно определить множитель M. Если $\frac{\partial X}{\partial x}+$ $+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$, то находим $M=\text{const}$. В других случаях выражение

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

может быть преобразовано при помощи дифференциальных уравнений (3) в полную производную по x; конечно, это преобразование часто еще требует очень искусных аналитических приемов. Если таковое возможно, то M получится также из уравнения (5).

Если каким-нибудь путем найдено одно значение M_0 множителя M, то польза, которую можно отсюда извлечь для интегрирования системы (3), заключается в том, что посредством M_0 можно дать интегрирующий множитель того дифференциального уравнения, которое остается еще проинтегрировать после того, как найдены $n-1$ интегралов. Вследствие первого уравнения (4) имеем

$$M_0 X=A\bar{\omega},$$

где $\bar{\omega}$ есть функция n решений уравнения в частных производных (2) или, как доказано, функция n интегралов системы (3). Предположим теперь, что $n-1$ из этих интегралов известны, именно $f_2, f_3, \ldots f_n$, так что остается найти только f_1; тогда мы вводим вместо $n-1$ независимых переменных, именно вместо $x_2, x_3, \ldots x_n$, величины $f_2, f_3, \ldots f_n$ и всё выражаем через $x, x_1, f_2, f_3, \ldots f_n$. Исследуем, какое изменение это вызовет в определителе

$$A=\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Напишем его в виде линейной функции от частных производных функции f_1:

$$A=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}B_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}B_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}B_n;$$

тогда, на основании основных свойств определителей, имеют место уравнения:

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}B_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}B_2+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}B_n\\
0&=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}B_1+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}B_2+\ldots+\frac{\partial f_3}{\partial x_n}B_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=\frac{\partial f_n}{\partial x_1}B_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}B_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}B_n.
\end{aligned}$$

Представим себе теперь, что вместо $x_2, x_3, \ldots x_n$ введены $f_2, f_3, \ldots f_n$, так что f_1 представится в форме

$$f_1 = \Phi(x, x_1, f_2, f_3, \ldots f_n)$$

и заключим образованные при такой гипотезе производные от f_1 в скобки; тогда

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_n} + \ldots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

а отсюда, принимая во внимание прежние уравнения, получаем

$$A = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)B_1,$$

где

$$B_1 = \sum \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Если это значение A подставим в уравнение

$$M_0 X = A\tilde{\omega},$$

то получим:

$$M_0 X = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)B_1\tilde{\omega}. \tag{6}$$

Так как f_1 есть искомый интеграл еще остающегося дифференциального уравнения

$$X\,dx_1 - X_1 dx = 0,$$

в котором из X и X_1 посредством известных $n-1$ интегралов исключены переменные $x_2, x_3, \ldots x_n$, то это дифференциальное уравнение должно при помощи искомого интегрирующего множителя перейти в

$$df_1 = 0$$

или в

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)dx = 0;$$

следовательно искомый интегрирующий множитель будет

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)$$

или, на основании (6),

$$\frac{M_0}{B_1\tilde{\omega}},$$

т. е. имеем тождественно:

$$\frac{M_0}{B_1\tilde{\omega}}(X\,dx_1 - X_1 dx) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)dx = df_1$$

или

$$\frac{M_0}{B_1}(X dx_1 - X_1 dx) = \bar{\omega}\, df_1.$$

Здесь $\bar{\omega}$ есть произвольная функция от $f_1, f_2, \ldots f_n$; между тем, при помощи найденных $n-1$ интегралов, $f_2, f_3, \ldots f_n$ обратятся в постоянные; таким образом $\bar{\omega}$ будет функцией только от f_1, а $\bar{\omega}\, df_1$ будет полным дифференциалом так же, как сам df_1. Поэтому можно в делителе отбросить $\bar{\omega}$, и тогда получим $\frac{M_0}{B_1}$ как множитель дифференциального уравнения

$$X dx_1 - X_1 dx = 0.$$

Таким образом мы приходим к следующей теореме:

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

и известны ее $n-1$ интегралов

$$f_2 = \alpha_2,\ f_3 = \alpha_3, \ldots f_n = \alpha_n;$$

далее, пусть известно одно решение M дифференциального уравнения

$$X \frac{d \lg M}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0:$$

если при помощи этих $n-1$ интегралов данная система сведена к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными

$$X dx_1 - X_1 dx = 0,$$

то интегрирующий множитель этого уравнения будет:

$$\frac{M}{\sum \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Это та же самая теорема, которая была установлена в двенадцатой лекции. Там мы нашли для множителя выражение

$$M \sum \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n};$$

но так как $f_2 = \alpha_2$, $f_3 = \alpha_3, \ldots f_n = \alpha_n$, то, на основании теоремы относительно функциональных определителей (стр. 89 и 90 № 2), имеем:

$$\sum \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

так что оба множителя тождественны.

Название „множитель", принадлежащий системе дифференциальных уравнений (3), которое мы присваиваем величине M, определенной уравнением (1) или (5), целесообразно потому, что, в случае двух переменных x и x_1, эта величина совпадает с множителем Эйлера или интегрирующим множителем.

До сих пор мы показали, что в том случае, когда при помощи $n-1$ интегралов система сводится к одному дифференциальному уравнению с двумя переменными, множитель этого дифференциального уравнения может быть выведен из множителя системы. Но это только частный случай общей теоремы; именно, если известны не $n-1$ интегралов, но меньшее их число, хотя бы $n-k$, так что данную систему с $n+1$ переменными можно привести к системе с $k+1$ переменными, то, как мы тотчас увидим, из множителя данной системы можно получить множитель приведенной системы. Это обобщение даст нам сейчас же возможность разобрать один вопрос, касающийся множителя, до сих пор оставшийся незатронутым. Именно до сих пор мы предполагали, что при всяком интегрировании данной системы дифференциальных уравнений присоединяется новая произвольная постоянная. Но необходимо ответить на вопрос — может ли быть метод последнего множителя распространен также на случай, когда произвольные постоянные принимают частные значения и где поэтому в конце концов не приходят к полному интегрированию данной системы дифференциальных уравнений. Чтобы показать, как из множителя данной системы получить множитель приведенной системы какого-либо порядка, поступаем следующим образом. Мы предполагаем сначала заданным *одно* интегральное уравнение $f_n = \alpha_n$, что позволяет понизить порядок системы на *одну* единицу, и ищем множитель таким образом приведенной системы:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n; \tag{3}$$

этот множитель M определится дифференциальным уравнением (1) или (5). Если же мы предположим известными все интегралы системы, то больше нет надобности в решении дифференциального уравнения, и мы можем найти M непосредственно и притом из каждого из уравнений

$$MX = \tilde{\omega} A;\ MX_1 = \tilde{\omega} A_1;\ \ldots\ MX_n = \tilde{\omega} A_n,$$

где

$$A = \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},\quad A_1 = (-1)^n \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial x}$$

и т. д. и где $\tilde{\omega}$ есть функция от $f_1, f_2, \ldots f_n$. Рассмотрим первое из этих уравнений, т. е.

$$MX = \tilde{\omega}(f_1, f_2, \ldots f_n) \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Предположим, что найден интеграл $f_n = \alpha_n$ и что в него входит x_n; тогда можно x_n выразить через f_n и через остальные переменные x. Если это выражение x_n подставить в $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, то эти величины будут функциями от $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ и f_n. Если производные, взятые при такой гипотезе, заключить в скобки, то для элементов определителя A получатся следующие значения:

$$\begin{array}{cccc}
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \ldots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \ldots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, & \ldots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, & \ldots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right) \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.
\end{array}$$

Как показано на стр. 84, здесь можно отбросить те члены первых $n-1$ вертикальных рядов, которые пропорциональны элементам последнего вертикального ряда; при этом исчезают первые $n-1$ элементов последнего горизонтального ряда, так что $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ будет множителем определителя, и поэтому получится:

$$MX = \bar{\omega}(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n) \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \sum \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

или, так как $f_n = \alpha_n$,

$$MX = \bar{\omega}(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n) \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \sum \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right). \quad (7)$$

Из данной системы (3) исключены x_n и dx_n при посредстве интеграла $f_n = \alpha_n$, и таким образом она приведена к системе:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1}. \quad (8)$$

Если μ есть множитель этой системы, то для его определения имеем уравнение:

$$\mu X = F \sum \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right),$$

где F есть произвольная функция от $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$. Одно из значений μ соответствует предположению $F = \bar{\omega}(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n)$; оно определится из уравнения

$$\mu X = \bar{\omega}(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n) \sum \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Из этого последнего уравнения и из (7) получится делением:

$$\frac{M}{\mu} = \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$\mu = \frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Таким образом это выражение есть множитель системы (8).

Этим путем можно итти дальше: если известен один интеграл $f_{n-1} = \alpha_{n-1}$ системы (8) и она при помощи этого интеграла приведена к системе

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2},$$

где x_{n-1} исключен, то множителем этой системы будет выражение

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)}.$$

Если при помощи нового интеграла $_{n-2} = \alpha_{n-2}$ исключить переменную

x_{n-2}, то множителем таким образом образованной системы будет выражение:

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\left(\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right)},$$

где скобки обозначают, что f_{n-1} должно быть выражено через f_n и x_1, x_2, ... x_{n-1}, а f_{n-2} — через f_n, f_{n-1} и $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$. Продолжая так дальше, приходим наконец к дифференциальному уравнению

$$dx : dx_1 = X : X_1$$

или к уравнению

$$X\,dx_1 - X_1 dx = 0,$$

множителем которого будет выражение

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_2}},$$

где дифференцирования надо понимать так, что функции f_n, f_{n-1}, ... f_2 предполагаются представленными в виде:

$$\begin{aligned}
f_n &= \varphi_n(x, x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\\
f_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, f_n)\\
f_{n-2} &= \varphi_{n-2}(x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, f_{n-1}, f_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_2 &= \varphi_2(x, x_1, x_2, f_3, \ldots f_{n-2}, f_{n-1}, f_n).
\end{aligned}$$

При таком постепенном приведении присоединяющееся каждый раз интегральное уравнение применяется для исключения одной из переменных. Например первый интеграл $f_n = \alpha_n$ применяется для того, чтобы x_n выразить через $x, x_1, \ldots x_{n-1}$ и α_n и полученное значение подставить в X, $X_1, \ldots X_{n-1}$. При этом, хотя мы до сих пор рассматривали α_n как произвольную постоянную, однако легко видеть, что в рассуждении ничто не изменится, если вместо α_n подставить определенное значение a_n. Только в этом случае приведенная система не будет более равнозначаща с данной, а будет соответствовать только частному случаю, когда в интегральном уравнении $f_n = \alpha_n$ произвольная постоянная α_n имеет частное значение a_n. Хотя таким образом в течение интегрирования можно дать произвольной постоянной некоторое частное значение и этим путем ввести в выкладки некоторый частный интеграл данной системы, но всё же надо знать полный интеграл $f_n = \alpha_n$, так как для определения множителя μ из M необходимо знание f_n. Таким образом недостаточно знать частный интеграл $x_n = \Phi(x, x_1, \ldots x_{n-1})$ без произвольной постоянной, но надо знать, как произошел частный интеграл из полного интеграла $f_n = \alpha_n$ и какое значение дано произвольной постоянной. В этом заключается распространение принципа последнего множителя, которое можно высказать следующим образом:

Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n;$$

пусть известен ее интеграл с одной произвольной постоянной, и этот интеграл приведен к виду $f_n = \alpha_n = \mathrm{const}$. *Придадим этой постоянной какое-*

нибудь частное значение a_n, решим уравнение $f_n = a_n$ относительно x_n и подставим это найденное значение в $X, X_1, \ldots X_{n-1}$; тогда получится первая приведенная система дифференциальных уравнений:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1},$$

которая не имеет однако больше общности предложенной системы, но соответствует только случаю $\alpha_n = a_n$. Пусть для первой приведенной системы дифференциальных уравнений опять известен интеграл с одной произвольной постоянной и приведен к виду $f_{n-1} = \alpha_{n-1} = \text{const}$, где f_{n-1} есть функция от $x, x_1, \ldots x_{n-1}$. Постоянной α_{n-1} придаем частное значение a_{n-1}, решаем уравнение $f_{n-1} = a_{n-1}$ относительно x_{n-1} и подставляем полученное для него таким образом значение в величины $X, X_1, \ldots X_{n-2}$, так что получится вторая приведенная система дифференциальных уравнений:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2}.$$

Продолжаем таким же образом дальше, пока не придем к дифференциальному уравнению:

$$dx : dx_1 = X : X_1;$$

тогда множитель последнего дифференциального уравнения будет:

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_2}}.$$

Здесь уже $f_n, f_{n-1}, \ldots f_2$ не будут больше $n-1$ интегралом предложенной системы, а только $f_n = \alpha_n$ будет таковым; $f_{n-1} = \alpha_{n-1}$ есть интеграл первой приведенной системы, которая представляет частный случай данной системы, когда $\alpha_n = a_n$; $f_{n-2} = \alpha_{n-2}$ есть интеграл второй приведенной системы, которая представляет частный случай первой приведенной системы для $\alpha_{n-1} = a_{n-1}$ и т. д.

Этим исчерпывается область, на которую можно распространить принцип последнего множителя, и мы переходим теперь к его применениям.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

МНОЖИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА. ПРИМЕНЕНИЕ К СВОБОДНОЙ СИСТЕМЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Все наши предыдущие исследования касались систем дифференциальных уравнений, в которые входят только производные первого порядка. Системы такого рода можно рассматривать как частный случай тех систем в которые входят производные любого порядка. Но обратно, увеличением числа переменных можно привести систему с производными высшего порядка к системе, содержащей только производные первого порядка, так что первая есть частный случай второй. Сначала мы будем заниматься этим приведением любой системы к другой, в которую входят производные только первого порядка. Пусть имеется система i дифференциальных уравнений с $i+1$ переменными $t, x, y, z, \ldots$, где t рассматривается как независимая, а x, y, $z, \ldots$ — как зависимые переменные. Пусть наивысший порядок производных, которые входят в эти дифференциальные уравнения, будет m-ый для x, n-ый для y, p-ый для z и т. д. Предположим далее, что данные дифференциальные уравнения можно решить относительно этих высших производных, так что они примут следующую форму:

$$\frac{d^m x}{dt^m} = A, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B, \quad \frac{d^p z}{dt^p} = C, \ldots, \tag{1}$$

где высшие производные, входящие в A, B, $C \ldots$, будут $m-1$-ая для x, $n-1$-ая для y, $p-1$-ая для z и т. д. Тогда это будет канонической формой дифференциальных уравнений, для которой и надо произвести все исследования. К этой канонической форме (1) не всегда можно непосредственно привести каждую данную систему; например этого нельзя сделать, если в одно из данных уравнений не входят высшие производные

$$\frac{d^m x}{dt^m}, \quad \frac{d^n y}{dt^n}, \quad \frac{d^p z}{dt^p}.$$

Тогда к исключению надо присоединить дифференцирование. Предположим например, что в уравнении, о котором идет речь, наивысшие производные будут

$$\frac{d^{m-\mu} x}{dt^{m-\mu}}, \quad \frac{d^{n-\nu} y}{dt^{n-\nu}}, \quad \frac{d^{p-\pi} z}{dt^{p-\pi}}, \ldots$$

и что $\mu \leqslant \nu \leqslant \pi \leqslant \ldots$; тогда продифференцируем μ раз по t и воспользуемся полученным таким образом уравнением для исключения $\frac{d^m x}{dt^m}$ из остальных уравнений. Если между уравнениями, полученными после этого исключения, снова найдется одно, в которое не входит ни одна из высших производных от y, $z, \ldots$, то это уравнение надо снова дифференцировать и т. д. Если это рассуждение и достаточно для того, чтобы показать, что приведение к канонической форме возможно в каждом случае, то оно всё же не дает предварительно никакого общего метода для этого приведения. Установить такой метод было бы прекрасной задачей; *) она совпадает с задачей определения числа произвольных постоянных, которые содержатся в интегралах данной системы дифференциальных уравнений; это число получится непосредственно из канонической формы, именно оно равно $m+$ $+n+p+\ldots$. Задача определения степени уравнения, получающегося в результате исключения из данной системы алгебраических уравнений, имеет поэтому некоторое сходство с той, о которой идет речь.

Особенный случай канонической формы есть тот, в котором мы исключаем все переменные $y, z, \ldots$ кроме двух t и x и располагаем по производным от x по t. Но это исключение не необходимо для наших рассмотрений; нам нужно только, как сказано, предположить дифференциальные уравнения приведенными к форме (1), где наивысшие производные в A, B, $C\ldots$ будут $m-1$-ая для x, $n-1$-ая для y, $p-1$-ая для $z\ldots$.

Предположив это, введем $m+n+p+\ldots-i$ новых переменных, именно:

$$\left.\begin{array}{l}
x'=\dfrac{dx}{dt},\ x''=\dfrac{dx'}{dt},\ldots x^{(m-1)}=\dfrac{dx^{(m-2)}}{dt};\\[2ex]
y'=\dfrac{dy}{dt},\ y''=\dfrac{dy'}{dt},\ldots y^{(n-1)}=\dfrac{dy^{(n-2)}}{dt};\\[2ex]
z'=\dfrac{dz}{dt},\ z''=\dfrac{dz'}{dt},\ldots z^{(p-1)}=\dfrac{dz^{(p-2)}}{dt};\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\tag{2}$$

тогда можно все эти уравнения вместе с уравнениями (1) представить в виде следующей системы:

$$\left\{\begin{array}{l}
dt:dx:dx':\ldots:dx^{(m-1)}\\
:dy:dy':\ldots:dy^{(n-1)}\\
:dz:dz':\ldots:dz^{(p-1)}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}
1:x':x'':\ldots:A\\
:y':y'':\ldots:B\\
:z':z'':\ldots:C.\\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\tag{3}$$

Если применим к этой системе общую теорию, то получим следующее дифференциальное уравнение для множителя:

$$0=\frac{d\lg M}{dt}+\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}}+\frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}}+\ldots\tag{4}$$

Поэтому можно найти M во всех случаях, в которых сумма

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}}+\frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}}+\ldots$$

---

*) Якоби сам решил эту задачу; указания на это находятся в его статье относительно множителя (Журнал Крелля, Bd. XXIX, стр. 369), где упоминается об ожидаемой далее статье, которая должна быть посвящена этому предмету. Из двух посмертно найденных мемуаров относительно рассматриваемой задачи, один, который содержит очень полное изложение результатов (De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando), присоединен к первому изданию этих лекций; другой, содержащий доказательства, напечатан в 64-м томе Математического журнала (De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque).

Оба мемуара нашли себе место в 5-м томе полного собрания сочинений Jacobi. (*Прим. Клебша.*)

есть полный дифференциал. Если например

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}}+\frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}}+\ldots=0,$$

что, в частности, будет всегда, когда A не содержит $\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$, B не содержит $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$, C не содержит $\frac{d^{p-1}z}{dt^{p-1}}$ и т. д., то имеем

$$M=\text{const}.$$

и можем поэтому, согласно нашей теории, поскольку дифференциальные уравнения (1) приведены к дифференциальному уравнению первого порядка с двумя переменными, найти интегрирующий множитель этого последнего уравнения.

Это рассуждение не имело бы очень большого интереса, если бы такие случаи не встречались на практике. Но на самом деле они имеют место. Именно, коль скоро движение свободной системы материальных точек зависит только от ее конфигурации, так что сопротивление среды не принимается в расчет, дифференциальные уравнения движения будут:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=X_i;\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=Y_i;\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=Z_i, \tag{5}$$

где X_i, Y_i, Z_i не содержат первых производных; поэтому имеем

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i'}=0;\quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_i'}=0;\quad \frac{\partial Z_i}{\partial z_i'}=0,$$

так что

$$\frac{d\lg M}{dt}=0;\quad M=\text{const.},$$

и принцип последнего множителя в этом случае приложим. Но он находит еще приложение, как это мы покажем позже, даже для системы, ограниченной какими-нибудь связями.

Особенного рассмотрения заслуживает тот случай, когда в дифференциальных уравнениях, представленных в канонической форме

$$\frac{d^mx}{dt^m}=A,\quad \frac{d^ny}{dt^n}=B,\quad \frac{d^pz}{dt^p}=C,\ldots, \tag{6}$$

величины A, B, $C\ldots$ не содержат t. В этом случае t можно совсем исключить и притом просто таким образом, что в дифференциальных уравнениях, данных в форме (3), опускаем с левой стороны dt, а с правой — соответствующий ему член 1. Таким образом получаем систему, порядок которой на единицу меньше, именно равен $m+n+p+\ldots-1$. Если проинтегрировать эту систему и выразить вместе с тем все переменные, следовательно также и x', через одну, например через x, то t получится, как уже выше упомянуто, из дифференциального уравнения

$$dx-x'dt=0.$$

Таким образом имеем:

$$dt=\frac{dx}{x'};\quad t=\int\frac{dx}{x'}+C.$$

Таким образом t находится простой квадратурой.

Если теперь мы имеем множитель M, свободный от t (сюда в частности принадлежит случай, когда

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}}+\frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

и следовательно $M=\text{const.}$), то это значение M дает последний множитель системы $(m+n+p+\ldots-1)$-го порядка, из которой исключено t; таким образом можно произвести *оба* последние интегрирования. Наоборот, если имеется только одно значение M, содержащее t, то отсюда нельзя извлечь никакой пользы для $(m+n+p+\ldots-1)$-го интегрирования, но только для $(m+n+p+\ldots)$-го, которое дает значение t и уже сведено к одной квадратуре; притом эта польза состоит в том, что можно избежать и этой квадратуры и определить t, решая некоторое уравнение. В самом деле, на основании первого из уравнений (4) прошлой лекции мы имеем для множителя M системы n-го порядка с переменными $x, x_1, \ldots x_n$, обозначенной через (3), следующую формулу:

$$MX=\tilde{\omega}\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \tag{7}$$

где $f_1=\alpha_1,\ f_2=\alpha_2, \ldots f_n=\alpha_n$ представляют собой интегралы этой системы, а $\tilde{\omega}$ есть функция от $f_1, f_2, \ldots f_n$, и так как эти величины при помощи интегралов системы обращаются в постоянные, то $\tilde{\omega}$ обозначает постоянную. Применим это к системе (6). Если

$$f_1=\alpha_1,\ f_2=\alpha_2, \ldots f_{m+n+p+\ldots-1}=\alpha_{m+n+p+\ldots-1}$$

представляют интегралы приведенной системы, полученной из (6) исключением t, и если

$$f=t-\int\frac{dx}{x'}=\text{const}.$$

есть последний интеграл системы (6), доставляющий значение t, то из формулы (7) получится для множителя M системы (6) следующая формула:

$$M=\tilde{\omega}\sum\pm\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial x''}\cdots\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x^{(m-1)}}\frac{\partial f_m}{\partial y}\cdots\frac{\partial f_{m+n-1}}{\partial y^{(n-1)}}\frac{\partial f_{m+n}}{\partial z}\cdots\frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}}\cdots;$$

для этого надо только вместо $x, x_1, \ldots x_n$ подставить $t, x, x', \ldots x^{(m-1)}$, y, $y', \ldots y^{(n-1)}$, z, $z', \ldots z^{(p-1)}\ldots$ и, в силу этого, вместо X подставить единицу. Но мы имеем $f=t-\int\frac{dx}{x'}$, где x' есть данная функция от x; поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x'},\quad \frac{\partial f}{\partial x'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x''}=0,\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial z^{(p-1)}}=0 \text{ и т. д.}$$

и вместе с этим

$$M=-\text{const.}\cdot\frac{1}{x'}\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial x''}\cdots\frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}}\cdots$$

Правая часть этого равенства есть в то же время множитель свободной от t системы $(m+n+p+\ldots-1)$-го порядка; действительно, для множителя этой системы, который будет обозначен через μ, получим, применяя равенство (7), формулу:

$$\mu x'=\text{const.}\cdot\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial x''}\cdots\frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}}\cdots,$$

где μ, как это само собой разумеется, есть выражение, свободное от t. Мы имеем таким образом

$$M = \text{const.}\, \mu,$$

и так как по предположению M содержит t, то t получится решением этого уравнения. Между тем мы знаем, благодаря уже известному нам определению

$$t = \int \frac{dx}{x'} + \text{const.},$$

что постоянная соединена с t аддитивно; чтобы такое соединение t с постоянной вытекало также из предыдущего уравнения для M, необходимо, чтобы M имело форму

$$e^{mt}N,$$

где N не зависит от t. Тогда получаем логарифмированием:

$$mt = \lg \frac{\mu}{N} + \lg \text{const}.$$

Таким образом, если A, B, C, ... не содержат переменной t, то M, если оно в свою очередь не содержит t, даст предпоследнее интегрирование. Если, напротив, M содержит переменную t, то благодаря знанию M можно избежать одной квадратуры, которая иначе была бы необходима для определения t.

К первому случаю принадлежат дифференциальные уравнения (5), имеющие место для движения системы n материальных точек, так как известное нам значение их множителя $M = \text{const.}$ не зависит от t. Дифференциальные уравнения (5) образуют систему $6n$-го порядка, которая по нашему методу выразится через $6n+1$ переменных $x_i, x_i', y_i, y_i', z_i, z_i', t$. Если для этой системы известно $6n-2=\nu$ интегралов, не содержащих переменной t,

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2, \dots f_\nu = \alpha_\nu,$$

так что все зависимые переменные можно выразить через две, хотя бы через x_1 и y_1, для которых имеет место дифференциальное уравнение первого порядка

$$x_1' dy_1 - y_1' dx_1 = 0,$$

которое надо еще проинтегрировать, то можно определить интегрирующий множитель R этого последнего уравнения. Обозначим те $6n-2=\nu$ переменных, которые останутся из $6n$ переменных $x_i, x_i', y_i, y_i', z_i, z_i'$ после исключения x_1 и y_1, через $p_1, p_2, \dots p_\nu$; тогда

$$R = \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial p_\nu}{\partial \alpha_\nu},$$

где предположено, что вместо переменных $p_1, p_2, \dots p_\nu$ подставлены их значения, получающиеся из интегралов $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$, ... $f_\nu = \alpha_\nu$. Если данные ν интегральных уравнений не решены ни относительно переменных p_1, $p_2, \dots p_\nu$, ни относительно произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ и если они обозначены через

$$\tilde{\omega}_1 = 0, \quad \tilde{\omega}_2 = 0, \dots \tilde{\omega}_\nu = 0,$$

то на основании теорем относительно функциональных определителей, изложенных в тринадцатой лекции, для интегрирующего множителя R получится дробь:

$$R=\frac{\sum\pm\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial\alpha_\nu}}{\sum\pm\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial p_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial p_\nu}}.$$

При сделанном выше предположении, что интегральные уравнения решены относительно произвольных постоянных, надо положить $\tilde{\omega}_i=f_i-\alpha_i$; тогда числитель дроби сведется к единице и интегрирующий множитель будет:

$$R=\frac{1}{\sum\pm\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial f_\nu}{\partial p_\nu}}.$$

Более общий случай, в котором стоящий в числителе вышенаписанной дроби определитель значительно упрощается, есть тот, когда $\tilde{\omega}$ содержит только α_1, $\tilde{\omega}_2$ — только α_1 и α_2 и т. д. и вообще $\tilde{\omega}_i$ — только $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$; тогда определитель

$$\sum\pm\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial\alpha_\nu}$$

сведется к одному члену

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial\alpha_\nu}.$$

Такая форма интегральных уравнений, конечно, всегда может быть достигнута постепенным исключением. Аналогичный случай для знаменателя R есть тот, когда $\tilde{\omega}_1$ из всех переменных $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ содержит только одну p_1, $\tilde{\omega}_2$ — только p_1 и p_2 и т. д., $\tilde{\omega}_i$ — только $p_1, p_2 \ldots p_i$. Тогда определитель

$$\sum\pm\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial p_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial p_\nu}$$

сведется к одному члену:

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial p_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial p_\nu}.$$

Если мы знаем не ν полных интегралов, а ν частных, т. е. таких, в которых постоянным $\alpha_1, \ldots \alpha_\nu$ приданы частные значения, то, хотя мы можем составить определитель в знаменателе R, но в числителе этого сделать не можем, так как для этого надо было бы знать, в какой форме постоянные входят в интегралы. Но если установлено, что до того, как произвольным постоянным приданы частные значения, в $\tilde{\omega}_1$ входила только α_1 в $\tilde{\omega}_2$ — только α_1 и α_2 и т. д., в $\tilde{\omega}_i$ — только $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$, то для того, чтобы быть в состоянии образовать определитель в числителе R, требуется только знать форму, в которой α_1 содержалась в $\tilde{\omega}_1$, α_2 — в $\tilde{\omega}_2$, $\ldots$ α_i — в $\tilde{\omega}_i$, α_ν — в $\tilde{\omega}_\nu$. Напротив, нам не надо знать, как $\tilde{\omega}_2$ зависит от α_1, $\tilde{\omega}_3$ — от α_1, $\alpha_2, \ldots, \tilde{\omega}_i$ — от $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{i-1}$, так как мы видели, что весь определитель приводится к одному члену $\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial\alpha_\nu}$. Этот случай имеет место при интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка, если предположено, что каждое интегрирование можно провести полностью, но тогда, чтобы интегрировать дальше, надо придать произвольной постоянной некоторое частное значение.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИМЕРЫ РАЗЫСКАНИЯ МНОЖИТЕЛЯ. ПРИТЯЖЕНИЕ ТОЧКИ К НЕПОДВИЖНОМУ ЦЕНТРУ В СРЕДЕ, ОКАЗЫВАЮЩЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЕ, И В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Чтобы показать приложения теории множителя, мы рассмотрим сначала случай, в котором, в отличие от всех остальных примеров, к которым относится это исследование, X_i, Y_i, Z_i будут не только функциями от координат, но будут также содержать скорости, где таким образом M не будет постоянной. Это будет случай планеты, которая движется вокруг солнца в сопротивляющейся среде. Если не принимать во внимание сопротивления, то уравнения движения планеты, как известно, будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2\frac{x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-k^2\frac{y}{r^3},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-k^2\frac{z}{r^3},$$

где x, y, z обозначают гелиоцентрические координаты планеты, r — ее расстояние от солнца и k^2 — притяжение, которое солнце оказывает на расстоянии, равном единице. Если $v=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ есть скорость планеты в направлении касательной к ее траектории и V — сопротивление в том же направлении, то составляющие сопротивления по осям x, y и z будут соответственно:

$$\frac{Vx'}{v},\quad \frac{Vy'}{v},\quad \frac{Vz'}{v}.$$

Эти величины надо присоединить к правой части дифференциальных уравнений с тем же знаком, который имеют члены, происходящие от притяжения. Таким образом уравнения движения будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2\frac{x}{r^3}-\frac{Vx'}{v}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2\frac{y}{r^3}-\frac{Vy'}{v}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-k^2\frac{z}{r^3}-\frac{Vz'}{v}.$$

Предположим, что сопротивление пропорционально n-ой степени скорости

$$V=fv^n,$$

где f есть постоянная; тогда имеем дифференциальные уравнения:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-k^2\frac{x}{r^3}-fv^{n-1}x'=A\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-k^2\frac{y}{r^3}-fv^{n-1}y'=B\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=-k^2\frac{z}{r^3}-fv^{n-1}z'=C. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Сравнение этой системы с общим видом (1) и (3) предыдущей лекции дает $m=n=p=2$; таким образом получаем по формуле (4) той же лекции для множителя M системы (1) уравнение:

$$0=\frac{d\lg M}{dt}+\frac{\partial A}{\partial x'}+\frac{\partial B}{\partial y'}+\frac{\partial C}{\partial z'}$$

или, если вместо A, B, C подставить их значения, уравнение:

$$\frac{d\lg M}{dt}=f\left\{\frac{\partial(v^{n-1}x')}{\partial x'}+\frac{\partial(v^{n-1}y')}{\partial y'}+\frac{\partial(v^{n-1}z')}{\partial z'}\right\}=$$
$$=f\left\{3v^{n-1}+(n-1)v^{n-2}\left(x'\frac{\partial v}{\partial x'}+y'\frac{\partial v}{\partial y'}+z'\frac{\partial v}{\partial z'}\right)\right\}.$$

Но мы имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x'}=\frac{x'}{v},\qquad \frac{\partial v}{\partial y'}=\frac{y'}{v},\qquad \frac{\partial v}{\partial z'}=\frac{z'}{v},$$

так что

$$x'\frac{\partial v}{\partial x'}+y'\frac{\partial v}{\partial y'}+z'\frac{\partial v}{\partial z'}=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{v}=v$$

и следовательно

$$\frac{d\lg M}{dt}=(n+2)fv^{n-1}. \tag{2}$$

Для $n=-2$ было бы поэтому $M=\text{const}$. Но этот случай в природе не может встретиться, так как иначе сопротивление должно было бы быть тем меньше, чем быстрее двигается планета. Поэтому мы будем исследовать, можно ли, без этого предположения относительно n, превратить v^{n-1} также в полную производную. Теорема живой силы и теорема площадей для этой задачи не имеют больше места; исследуем однако, какую форму здесь принимают соответствующие им уравнения. Чтобы получить уравнение, аналогичное уравнению живой силы, мы должны три уравнения (1) умножить соответственно на x', y', z' и сложить; тогда получится:

$$x'\frac{d^2x}{dt^2}+y'\frac{d^2y}{dt^2}+z'\frac{d^2z}{dt^2}=$$
$$=-\frac{k^2}{r^3}(xx'+yy'+zz')-fv^{n-1}(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Но мы имеем

$$x'^2+y'^2+z'^2=v^2;\qquad x^2+y^2+z^2=r^2;$$
$$x'\frac{d^2x}{dt^2}+y'\frac{d^2y}{dt^2}+z'\frac{d^2z}{dt^2}=v\frac{dv}{dt};\qquad xx'+yy'+zz'=r\frac{dr}{dt},$$

так что

$$v\frac{dv}{dt}=-\frac{k^2}{r^2}\frac{dr}{dt}-fv^{n+1}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}=k^2\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}-fv^{n+1}$$

и

$$f\int v^{n+1}\,dt=-\frac{1}{2}v^2+k^2\frac{1}{r}.$$

Хотя это тоже замечательный результат, но нам нужен

$$\int v^{n-1}\,dt, \quad \text{а не} \quad \int v^{n+1}\,dt.$$

Чтобы получить уравнения, соответствующие теоремам площадей, мы должны из уравнений (1) образовать величины

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}; \quad z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}; \quad x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2};$$

тогда получится:

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=-fv^{n-1}(yz'-zy'),$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=-fv^{n-1}(zx'-xz'),$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=-fv^{n-1}(xy'-yx')$$

и после интегрирования:

$$-f\int v^{n-1}\,dt=\lg(yz'-zy')-\lg\alpha=\lg(zx'-xz')-\lg\beta=$$
$$=\lg(xy'-yx')-\lg\gamma, \tag{3}$$

где $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$ — произвольные постоянные интегрирования. Таким образом отсюда получаем, во-первых, искомый интеграл $\int v^{n-1}\,dt$, во-вторых, два интегральных уравнения, именно:

$$\frac{yz'-zy'}{\alpha}=\frac{zx'-xz'}{\beta}=\frac{xy'-yx'}{\gamma}. \tag{4}$$

Эти уравнения показывают, что величины

$$yz'-zy', \quad zx'-xz', \quad xy'-yx'$$

находятся в постоянном отношении — результат, который можно было бы предвидеть. Действительно, в виду того, что планета, находящаяся в сопротивляющейся среде, не может прекратить своего движения в плоскости, упомянутые величины, которые после умножения на dt изображают проекции элемента поверхности, описываемого гелиоцентрическим радиусом вектором, по известной теореме относятся друг к другу как косинусы углов, которые образует нормаль к орбите планеты с тремя координатными осями.

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$\lg M=(n+2)f\int v^{n-1}\,dt=-(n+2)\lg\frac{xy'-yx'}{\gamma},$$

так что

$$M=\frac{\gamma^{n+2}}{(xy'-yx')^{n+2}}$$

или, отбрасывая постоянную γ^{n+2},

$$M=\frac{1}{(xy'-yx')^{n+2}}.$$

Мы можем теперь на самом деле применить принцип последнего множителя к этой задаче. Предложенная система (1) есть система шестого порядка, а после исключения t получим приведенную систему пятого порядка. Между тем, так как движение происходит в плоскости, одну из координатных плоскостей, например плоскость x, y, можно совместить с плоскостью орбиты; тогда надо положить $z=0$, вследствие чего последнее уравнение (1) выпадет и останется система четвертого порядка, а после исключения t получится приведенная система третьего порядка. Но для этой последней нам не дано ни одного интеграла, так как на месте всех теорем площадей существует только одна и та не есть интегральное уравнение, а только дает для $\int v^{n-1}\,dt$ третье из выражений формулы (3). Если теперь для системы третьего порядка, о которой идет речь, найдены два интеграла с двумя произвольными постоянными α_1 и α_2, так что x' и y' могут быть выражены как функции от x и y, и поэтому остается проинтегрировать еще только дифференциальное уравнение первого порядка

$$x'dy - y'dx = 0,$$

то множителем этого последнего будет выражение:

$$\frac{\dfrac{\partial x'}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial y'}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial x'}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial y'}{\partial \alpha_1}}{(xy' - yx')^{n+2}}.$$

В качестве второго примера применения последнего множителя возьмем такой случай, когда мы не будем получать множителя некоторого неизвестного дифференциального уравнения, но сможем провести вполне все интегрирования; именно возьмем движение планеты вокруг солнца в среде, не оказывающей сопротивления. Мы легко убедимся, что движение должно происходить в одной плоскости и что поэтому мы получим только систему четвертого порядка или, после исключения t, третьего порядка. Принципы живой силы и площадей дают для этой системы два интеграла, а принцип последнего множителя дает третий. В этой задаче, как мы видим a priori, интегрирования могут быть проведены полностью. Система дифференциальных уравнений, которую надо проинтегрировать, будет, как мы уже выше видели, следующая:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{r^3}, \tag{5}$$

где k^2 обозначает притяжение, оказываемое солнцем на расстоянии, равном единице. Пусть оба интеграла, которые получаются на основании принципа живой силы и площадей, будут:

$$f_1 = \alpha, \qquad f_2 = \beta,$$

где f_1 и f_2 функции от x, y, x' и y'; тогда найдем, как последний множитель дифференциального уравнения, связывающего x и y, выражение:

$$M\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) = \frac{M}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x'}\dfrac{\partial f_2}{\partial y'} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}\dfrac{\partial f_2}{\partial x'}},$$

где M есть множитель системы (5). Но так как здесь мы имеем дело с совершенно свободным движением, то на основании предыдущей лекции $M=\text{const.}$; таким образом можно положить $M=1$, и тогда в качестве последнего множителя получится выражение:

$$\frac{1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x'}\dfrac{\partial f_2}{\partial y'} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}\dfrac{\partial f_2}{\partial x'}}. \tag{6}$$

Предположим теперь, что x' и y' выражены посредством уравнений $f_1 = \alpha$ и $f_2 = \beta$ через x и y и подставлены в дифференциальное уравнение

$$x'dy - y'dx = 0; \tag{7}$$

тогда это есть уравнение, множителем которого должно быть выражение (6). Мы покажем это, произведя выкладки.

Умножая уравнения (5) соответственно на x' и y' и затем складывая, получим теорему живой силы; действительно, сначала получаем

$$x'\frac{d^2x}{dt^2} + y'\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{xx' + yy'}{r^3} = -k^2\frac{r'}{r^2},$$

откуда после интегрирования находим:

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{k^2}{r} + \alpha. \tag{8}$$

Путем интегрирования выводим из уравнения

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

принцип площадей:

$$xy' - yx' = \beta. \tag{9}$$

Итак наши оба интеграла будут:

$$f_1 = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{k^2}{r} = \alpha; \qquad f_2 = xy' - yx' = \beta,$$

откуда получится:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x'} = x'; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x'} = -y;$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y'} = y'; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y'} = x.$$

Таким образом множителем (7) на основании (6) будет выражение:

$$\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}} = \frac{1}{xx' + yy'};$$

следовательно выражение

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'} \tag{10}$$

будет полным дифференциалом. Мы докажем это, определяя x' и y' из уравнений (8) и (9). Положим для сокращения

$$\frac{k^2}{r} + \alpha = \lambda;$$

тогда для определения x' и y' будем иметь уравнения:

$$x'^2 + y'^2 = 2\lambda; \qquad xy' - yx' = \beta.$$

Второе из этих уравнений уже линейно относительно x' и y'; значит всё дело в том, чтобы заменить первое из них иным, также линейным. Это лучше всего сделать при помощи известной тождественной формулы:

$$(x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2.$$

Подставим в нее вместо $x'^2+y'^2$ и $xy'-yx'$ их значения; тогда получим:

$$2\lambda r^2=(xx'+yy')^2+\beta^2,$$
$$xx'+yy'=\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2},$$

Таким образом имеем уравнения

$$yy'+xx'=\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2},$$
$$xy'-yx'=\beta,$$

а отсюда получится:

$$r^2y'=\beta x+y\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}, \quad r^2x'=-\beta y+x\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}.$$

Если разделим оба уравнения на

$$r^2(yy'+xx')=r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2},$$

то получим:

$$\frac{y'}{xx'+yy'}=\frac{\beta x}{r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{y}{r^2}; \quad \frac{x'}{xx'+yy'}=-\frac{\beta y}{r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{x}{r^2},$$

и если эти значения подставим в (10), то будем иметь:

$$\frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'}=-\frac{\beta}{r^2}\frac{(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{r^2}.$$

Но

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr;$$

далее, если мы подставим вместо λ его значение, то получим

$$\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}=\sqrt{2ar^2+2k^2r-\beta^2}=\sqrt{R},$$

где R есть функция только от r; тогда

$$\frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'}=-\frac{\beta}{\sqrt{R}}\frac{dr}{r}+\frac{x\,dy-y\,dx}{r^2}.$$

Первый член правой части есть полный дифференциал, так как он равен dr, умноженному на некоторую функцию от r. Второй член имеет упомянутую уже в пятой лекции (стр. 30) форму произведения $x\,dy-y\,dx$ на однородную функцию — 2-го порядка от x и y, а это произведение всегда может быть представлено как произведение некоторой функции от отношения $\frac{y}{x}$ на его дифференциал и поэтому есть полный дифференциал. В рассматриваемом случае имеем:

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{r^2}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=d\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Выражение $\frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'}$ есть таким образом полный дифференциал, что и требовалось доказать.

Мы перейдем теперь к дифференциальным уравнениям движения несвободной системы.

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

МНОЖИТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ В ПЕРВОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМЕ.

В седьмой лекции (стр. 47) мы показали, что дифференциальные уравнения системы, связанной условными уравнениями

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \tilde{\omega} = 0, \; \ldots$$

могут быть приведены к виду:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} + \; \ldots,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_i} + \; \ldots,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_i} + \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z_i} + \; \ldots$$

где множители λ, μ, ν, ..., как это было замечено там же, определяются при посредстве двукратного дифференцирования уравнений $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\tilde{\omega} = 0$. Если мы определим таким образом величины λ, μ, ν, ..., то найдем, как это сейчас будет видно, что эти величины не независимы от x', y', z', вследствие чего здесь нельзя положить множитель M равным единице, а надо для его определения обратиться к уравнению (4) пятнадцатой лекции (стр. 105). На основании этого уравнения множитель M для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^m x}{dt^m} = A; \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B; \quad \frac{d^p z}{dt^p} = C$$

определится из уравнения

$$0 = \frac{d \lg M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}};$$

отсюда получится для рассматриваемого случая:

$$-\frac{d \lg M}{dt} = \sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial \lambda}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i'} \right) +$$
$$+ \sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \frac{\partial \mu}{\partial y_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \frac{\partial \mu}{\partial z_i'} \right) +$$
$$+ \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

где в правой части каждому из множителей λ, μ, ... соответствует некоторая сумма. Для применения теории множителя M необходимо, чтобы правая часть этого равенства была полным дифференциалом. Чтобы исследовать, имеет ли место этот случай, должны быть найдены λ, μ, ν, ... или по крайней мере их производные, взятые по величинам x_i', y_i', z_i'. Для определения этих значений продифференцируем по t одно из условных уравнений, например $\varphi = 0$, два раза, один за другим. Первое дифференцирование дает:

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}z_i'\right) = 0;$$

второе дифференцирование приводит к уравнению:

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}z_i''\right) + u = 0,$$

где u обозначает ту часть результата, которая происходит от дифференцирования множителей

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_i},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}$$

и представляет однородную функцию второго порядка от $3n$ величин x_i', y_i', z_i'. Если обозначим комплекс всех $3n$ координат x_i, y_i, z_i посредством ряда p_1, p_2, ... p_{3n}, то функции u можно придать форму:

$$u = \sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i^2}p_i'^2 + 2\sum\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_k}p_i'p_k',$$

где последнюю сумму надо распространить только на отличные друг от друга значения i и k. Таким же образом выведем из других условных уравнений двукратным дифференцированием уравнения:

$$\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\psi}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\psi}{\partial z_i}z_i''\right) + v = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\tilde\omega}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\tilde\omega}{\partial z_i}z_i''\right) + w = 0,$$

. . . . ,

где, согласно выше введенному обозначению координат, функции v, w, ... имеют значения:

$$v = \sum\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i^2}p_i'^2 + 2\sum\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\,\partial p_k}p_i'p_k',$$

$$w = \sum\frac{\partial^2\tilde\omega}{\partial p_i^2}p_i'^2 + 2\sum\sum\frac{\partial^2\tilde\omega}{\partial p_i\,\partial p_k}p_i'p_k',$$

. . . .

Чтобы получить теперь λ, μ, ν, ..., надо в эти уравнения подставить значения x_i'', y_i'', z_i'', выведенные из предложенной системы. Так двукратным дифференцированием выводим из φ следующее уравнение:

$$\left.\begin{aligned} u &+ \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{1}{m_i}\left\{X_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i} + \dots\right\} \\ &+ \sum\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{1}{m_i}\left\{Y_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \nu\frac{\partial\tilde\omega}{\partial y_i} + \dots\right\} \\ &+ \sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{1}{m_i}\left\{Z_i + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z_i} + \nu\frac{\partial\tilde\omega}{\partial z_i} + \dots\right\} \end{aligned}\right\} = 0;$$

если здесь положить

$$a = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\right),$$

$$b = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right),$$

$$c = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial z_i}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = u + \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Z_i\right),$$

то получится:

$$u_1 + a\lambda + b\mu + c\nu + \ldots = 0.$$

Такое линейное уравнение, связывающее величины λ, μ, $\nu, \ldots$, получаем для каждого отдельного условного уравнения

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \tilde\omega = 0 \ldots$$

Введем теперь, как мы это делали в седьмой лекции (стр. 49), обозначение:

$$(F, \Phi) = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial\Phi}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial\Phi}{\partial z_i}\right),$$

так что будем иметь

$$(F, \Phi) = (\Phi, F);$$

положим

$$\begin{array}{lll} a = (\varphi, \varphi), & b = (\varphi, \psi) & c = (\varphi, \tilde\omega), \ \ldots \\ a' = (\psi, \varphi), & b' = (\psi, \psi), & c' = (\psi, \tilde\omega), \ \ldots \\ a'' = (\tilde\omega, \varphi), & b'' = (\tilde\omega, \psi), & c'' = (\tilde\omega, \tilde\omega), \ \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots, \end{array}$$

так что между этими величинами существуют соотношения

$$a' = b, \quad a'' = c, \quad b'' = c', \ \ldots;$$

положим далее, что

$$u_1 = u + \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Z_i\right),$$

$$v_1 = v + \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\psi}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\psi}{\partial z_i}Z_i\right),$$

$$w_1 = w + \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\tilde\omega}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\tilde\omega}{\partial z_i}Z_i\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

тогда для определения λ, μ, ν, ... будем иметь уравнения:

$$\begin{aligned} u_1 + a\lambda + b\mu + c\nu + \ldots &= 0, \\ v_1 + a'\lambda + b'\mu + c'\nu + \ldots &= 0, \\ w_1 + a''\lambda + b''\mu + c''\nu + \ldots &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Вместо того, чтобы решать эти уравнения относительно λ, μ, ν, ... и из полученных таким образом значений выводить дифференцированием производные $\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}$, $\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}$, ..., лучше непосредственно взять частные производные от полученных линейных уравнений, что значительно упрощает выкладки. Именно величины a, b, c, ... a', b', c', ... вовсе не содержат производных x_i', y_i', z_i' и потому рассматриваются при этом дифференцировании как постоянные; далее, величины u_1, v_1, w_1, ... отличаются соответственно от u, v, w, ... только выражениями, которые также не содержат производных x_i', y_i', z_i', и поэтому имеют место равенства

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i'}=\frac{\partial u}{\partial x_i'}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_i'}=\frac{\partial v}{\partial x_i'} \text{ и т. д.};$$

таким образом получится:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x_i'}+a\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial v}{\partial x_i'}+a'\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b'\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c'\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial w}{\partial x_i'}+a''\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b''\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c''\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0.
\end{aligned}$$

Функция u определяется уравнением

$$u=\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i^2}p_i'^2+2\sum\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_k}p_i'p_k',$$

где величины p обозначают $3n$ координат x_i, y_i, z_i и где во второй сумме правой части i отлично от k. Дифференцированием по p_i' найдем, что

$$\frac{\partial u}{\partial p_i'}=2\sum_{k=1}^{k=3n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\,\partial p_k}p_k';$$

поставив вместо p_i снова x_i и вместо величин p_k — величины x_k, y_k, z_k, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i'}=2\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}x_k'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial y_k}y_k'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial z_k}z_k'\right).$$

Сумма справа есть полная производная от $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ по t, так что имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i'}=2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}.$$

В этом уравнении, как само собой разумеется, можно писать y или z вместо x; далее можно писать v, w, ... вместо u, но тогда надо подставить ψ, $\tilde\omega$, ... вместо φ. Таким образом получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i'}=2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}; \quad \frac{\partial v}{\partial x_i'}=2\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}; \quad \frac{\partial w}{\partial x_i'}=2\frac{d\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}}{dt}, \ldots$$

и подобные же уравнения для частных производных, взятых по y_i', z_i'. Таким путем вышенаписанные линейные уравнения для величин

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x_i'}, \quad \frac{\partial\nu}{\partial x_i'}\ldots$$

превратятся в следующие:

$$2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+a\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0,$$

$$2\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+a'\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b'\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c'\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0,$$

$$2\frac{d\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_i}}{dt}+a''\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+b''\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+c''\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Чтобы решить эти линейные уравнения надо, как известно, составить определитель из величин

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ \ldots \\ a',\ b',\ c',\ldots \\ a'',\ b'',\ c'',\ldots \end{array}$$

или, в сокращенных обозначениях, определитель

$$R=\sum\pm ab'c''\ldots;$$

тогда для определения $\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}$ надо умножить вышенаписанные уравнения на

$$\frac{\partial R}{\partial a},\ \frac{\partial R}{\partial a'},\ \frac{\partial R}{\partial a''},\ \ldots$$

и сложить, после чего получим:

$$0=R\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+2\frac{\partial R}{\partial a}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial a'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial a''}\frac{d\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_i}}{dt}+\ldots.$$

Точно так же получим:

$$0=R\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+2\frac{\partial R}{\partial b}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial b'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial b''}\frac{d\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_i}}{dt}+\ldots,$$

$$0=R\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+2\frac{\partial R}{\partial c}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial c'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial c''}\frac{d\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_i}}{dt}+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подобные же уравнения имеют место для производных от λ, μ, ν, ..., взятых по y_i' и z_i'. Значения всех этих производных надо подставить в выше данное выражение для $\frac{d\lg M}{dt}$, которое можно расположить таким образом:

$$\frac{d\lg M}{dt}=\left\{\begin{array}{l} -\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_i}\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots\right) \\ -\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\lambda}{\partial y_i'}+\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\frac{\partial\mu}{\partial y_i'}+\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y_i}\frac{\partial\nu}{\partial y_i'}+\ldots\right) \\ -\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\lambda}{\partial z_i'}+\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\frac{\partial\mu}{\partial z_i'}+\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial z_i}\frac{\partial\nu}{\partial z_i'}+\ldots\right) \end{array}\right.$$

Тогда мы получим для произведения R на первую из трех сумм правой части следующее выражение:

$$-R\sum\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i'}+\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}+\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\nu}{\partial x_i'}+\ldots\right)=$$

$$=2\frac{\partial R}{\partial a}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial a'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial a''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}}{dt}+\ldots$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial b}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial b'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial b''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}}{dt}+\ldots$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial c}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial c'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}+$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial c''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}}{dt}+\ldots$$

. . . .

Но элементы определителя R, как мы видели, стоят в таком отношении друг к другу, что

$$b=a',\quad c=a'',\quad c'=b'',\ \ldots$$

и отсюда, на основании известной теоремы о решении линейных уравнений, следуют соотношения:

$$\frac{\partial R}{\partial b}=\frac{\partial R}{\partial a'};\quad \frac{\partial R}{\partial c}=\frac{\partial R}{\partial a''};\quad \frac{\partial R}{\partial c'}=\frac{\partial R}{\partial b''};\ \ldots$$

Принимая это во внимание, можно правой части вышенаписанного равенства придать также вид:

$$\frac{\partial R}{\partial a}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+2\frac{\partial R}{\partial a'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+$$

$$+2\frac{\partial R}{\partial a''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots$$

$$+\frac{\partial R}{\partial b'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+2\frac{\partial R}{\partial b''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots$$

$$+\frac{\partial R}{\partial c''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots$$

или написав снова вместо

$$2\frac{\partial R}{\partial a'},\quad 2\frac{\partial R}{\partial a''},\quad 2\frac{\partial R}{\partial b''},\ldots$$

соответственно

$$\frac{\partial R}{\partial a'}+\frac{\partial R}{\partial b}; \quad \frac{\partial R}{\partial a''}+\frac{\partial R}{\partial c}; \quad \frac{\partial R}{\partial b''}+\frac{\partial R}{\partial c'}; \ \ldots,$$

такой вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial a}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial a'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\\
&\qquad+\frac{\partial R}{\partial a''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots\\
&+\frac{\partial R}{\partial b}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial b'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\\
&\qquad+\frac{\partial R}{\partial b''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots\\
&+\frac{\partial R}{\partial c}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial c'}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\\
&\qquad+\frac{\partial R}{\partial c''}\sum\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial x_i}+\ldots\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Если подставим аналогичные значения для двух других сумм, входящих в $\frac{d\lg M}{dt}$, и вспомним значения a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., то получим:

$$\begin{aligned}
R\frac{d\lg M}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial R}{\partial a'}\frac{da'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial a''}\frac{da''}{dt}+\ldots\\
&+\frac{\partial R}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial R}{\partial b'}\frac{db'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial b''}\frac{db''}{dt}+\ldots\\
&+\frac{\partial R}{\partial c}\frac{dc}{dt}+\frac{\partial R}{\partial c'}\frac{dc'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial c''}\frac{dc''}{dt}+\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{dR}{dt},
\end{aligned}$$

так что

$$R\frac{d\lg M}{dt}=\frac{dR}{dt};$$

отбрасывая постоянный множитель, найдем, что

$$M=R.$$

Из особенностей формы величин a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ... можно вывести замечательное представление их определителя. Выше мы положили

$$\begin{aligned}
&a=(\varphi,\varphi); \quad a'=(\varphi,\psi); \quad a''=(\varphi,\tilde\omega), \ \ldots\\
&b=(\psi,\varphi); \quad b'=(\psi,\psi); \quad b''=(\psi,\tilde\omega), \ \ldots\\
&c=(\tilde\omega,\varphi); \quad c'=(\tilde\omega,\psi); \quad c''=(\tilde\omega,\tilde\omega), \ \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

где величины в скобках образованы аналогично выражению

$$(\varphi, \psi) = \sum \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} \frac{\partial\psi}{\partial z_i} \right).$$

Эти суммы можно представить несколько проще, если, подобно тому как в начале этой лекции (стр. 117), все $3n$ координат обозначить одной буквой, снабженной $3n$ значками. Если мы вместо самих координат введем пропорциональные им величины и положим

$$\sqrt{m_i}\, x_i = \xi_{3i-2}; \quad \sqrt{m_i}\, y_i = \xi_{3i-1}; \quad \sqrt{m_i}\, z_i = \xi_{3i},$$

так что $3n$ величин $\sqrt{m_i}\, x_i, \sqrt{m_i}\, y_i, \sqrt{m_i}\, z_i$, будут тождественны с $3n$ величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n}$, то выражение (φ, ψ) представится в форме:

$$(\varphi, \psi) = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i},$$

где сумммирование производится от $i = 1$ до $i = 3n$. Определители, элементы которых составлены указанным здесь образом, могут быть представлены как суммы квадратов. (См. мою статью: „De formatione et proprietatibus determinantium“, Crelles Journal, Bd. 22, стр. 285.) Если m есть число функций $\varphi, \psi, \tilde{\omega} \ldots \zeta$ или, что то же, число условных уравнений, имеющих место для механической задачи, и если образовать все возможные определители вида

$$\sum \pm \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_{i'}} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi_{i''}} \cdots \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_{i^{(m-1)}}},$$

где $i, i', i'', \ldots i^{(m-1)}$ обозначают m различных чисел из ряда $1, 2, \ldots 3n$, то сумма квадратов этих определителей равна R. В вышеуказанной статье я дал прекрасное применение этой теоремы, впервые опубликованной Коши, * к методу наименьших квадратов. В случае, когда точка двигается по данной поверхности, уравнение этой поверхности $\varphi = 0$ есть единственное условие; поэтому частные определители, из квадратов которых может быть составлен R, приводятся к

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial z_1},$$

так что

$$R = \frac{1}{m_1} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} \right)^2 \right\}.$$

Случай $m = 3n$, который конечно не встречается в механике (так как m — число условных уравнений — самое большее может быть равно $3n - 1$), есть простейший в отношении теоремы об определителях, так как тогда определитель R сводится к одному единственному квадрату.

Уравнение

$$M = R = \sum \pm a b' c'' \ldots$$

дает нам для системы, связанной какими угодно условиями, и для первой лагранжевой формы дифференциальных уравнений множитель этой системы; вместе с этим, при предположении, что известны все интегралы кроме одного, получается также последний множитель.

---

* Journal de l'école polytechnique, cah. 17.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

МНОЖИТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ.

Мы будем теперь разыскивать множитель дифференциального уравнения несвободной системы для гамильтоновой формы дифференциальных уравнений. Пусть T будет половина живой силы, n — число материальных точек, m — число условных уравнений; так как теперь значок k будет употребляться, подобно i, как указатель, по которому располагается ряд, то число $3n - m$ будем обозначать не через k, а через μ. В восьмой лекции (стр. 54) мы предполагали $3n$ координат выраженными как функции от $3n - m$ новых переменных $q_1, q_2, \dots q_{3n-m}$ так, что условные уравнения после подстановки таких координат удовлетворяются тождественно, и мы получаем тогда T как однородную функцию второго порядка от величин q_i', коэффициенты которых могут содержать величины q_i. Далее, мы ввели величины $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ на место q_i' и таким образом получили в девятой лекции (стр. 62) дифференциальные уравнения движения, связывающие $2(3n - m)$ переменных q_i и p_i, в виде, имеющем место также и в случае, когда не существует силовой функции

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i}; \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i,$$

где

$$Q_i = \sum_{k=}^{k=n} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Эти дифференциальные уравнения можно также написать в виде:

$$dt : dq_1 : dq_2 : \dots : dq_\mu : dp_1 : \dots : dp_\mu =$$
$$= 1 : \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \dots : \frac{\partial T}{\partial p_\mu} : -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 : \dots : -\frac{\partial T}{\partial q_\mu} + Q_\mu;$$

если применить к этой системе теорию множителя, то получится:

$$0 = \frac{d \lg M}{dt} + \sum \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial p_i}}{\partial q_i} + \sum \frac{\partial \left(-\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right)}{\partial p_i}.$$

Так как в задачах, которые мы рассматриваем, X_i, Y_i, Z_i зависят только от координат x_i, y_i, z_i, а не от их производных, то функции Q_i тоже содержат только переменные q_i и не содержат их производных, а следовательно также и переменных p_i; таким образом имеем:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0,$$

а отсюда

$$-\frac{d \lg M}{dt} = \sum \frac{\partial^2 T}{\partial p_i \partial q_i} - \sum \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial p_i} = 0,$$

$$M = \text{const}.$$

Таким образом M можно положить равным единице, так что множитель имеет здесь то же самое значение, как при совсем свободной системе. Чтобы получить последний множитель в этом случае, надо сначала из системы дифференциальных уравнений 2μ-го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i,$$

где i пробегает значения от 1 до μ, исключить t, которое, как мы предполагаем, не входит явно в величины Q_i. Если мы знаем для полученной таким образом приведенной системы $(2\mu - 1)$-го порядка $2\mu - 2$ интегральных уравнения:

$$\tilde{\omega}_1 = 0, \quad \tilde{\omega}_2 = 0, \ \ldots \ \tilde{\omega}_{2\mu-2} = 0,$$

с таким же количеством постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu-2}$, то мы можем при помощи их выразить все 2μ переменных q и p через два из них, хотя бы через q_1 и q_2; тогда останется еще проинтегрировать только дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} dq_2 - \frac{\partial T}{\partial p_2} dq_1 = 0,$$

множитель которого будет:

$$\frac{\sum \pm \dfrac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial \alpha_1} \dfrac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial \alpha_2} \cdots \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{2\mu-2}}{\partial \alpha_{2\mu-2}}}{\sum \pm \dfrac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial q_3} \dfrac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial q_4} \cdots \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{\mu-2}}{\partial q_\mu} \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{\mu-1}}{\partial p_1} \cdots \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{2\mu-2}}{\partial p_\mu}}.$$

Если силы X_i, Y_i, Z_i представляют собой частные производные некоторой функции U, которая, кроме того, еще не содержит явно времени t, т. е. если

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

то будет иметь место равенство $Q_i = \dfrac{\partial U}{\partial q_i}$, и если теперь положить

$$T - U = H,$$

то дифференциальные уравнения движения (стр. 62) перейдут в простую форму:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Дальнейшие исследования, составляющие ядро этих лекций, связаны с этой гамильтоновой формой дифференциальных уравнений; всё предыдущее надо рассматривать как введение к этому.

ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ГАМИЛЬТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.

Гамильтонова форма дифференциальных уравнений движения была выведена в восьмой и девятой лекциях из того принципа, что если заданы начальные и конечные значения координат, то вариация интеграла $\int (T+U)\,dt$ должна обращаться в нуль. Этот принцип можно выразить в более общем виде так, что он имеет место также в том случае, когда заданы не сами начальные и конечные значения, а другие условия, выполняемые на границах. В этом случае надо положить равной нулю не всю вариацию интеграла $\int (T+U)\,dt$, но только ту ее часть, которая стоит под знаком интеграла; вариацию можно тогда выразить без знака интеграла или, что то же, вариация от $T+U$ будет полной производной. Чтобы это сделать ясным, мы должны вернуться к выводу, данному в восьмой лекции.

Пусть T будет половина живой силы, а U — силовая функция, которая кроме координат может также содержать явно t; представим себе $3n$ координат выраженными в таких функциях от $3n - m = \mu$ новых переменных $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, что эти выражения тождественно удовлетворяют m условным уравнениям; пусть далее

$$T + U = \varphi;$$

тогда, так как φ есть функция величин $q_1, \ldots q_\mu$ и $q_1', \ldots q_\mu'$, имеем:

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\delta q_i + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i',$$

$$\delta\int \varphi\,dt = \int \delta\varphi\,dt = \int \left\{ \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\delta q_i \right\} dt + \int \left\{ \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i' \right\} dt.$$

Но здесь имеет место равенство

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i' dt = \int \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\frac{d\delta q_i}{dt}\,dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i - \int \frac{d\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}}{dt}\,\delta q_i dt,$$

и если проинтегрировать от нижней границы τ до верхней t и значения, соответствующие нижней границе τ, обозначить значком 0, поставленным сверху, то получится:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i' dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i - \frac{\partial\varphi^0}{\partial q_i'}\,\delta q_i^0 - \int \frac{d\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}}{dt}\,\delta q_i dt.$$

Подставляя это выражение, будем иметь:

$$\delta\int \varphi\,dt = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}\,\delta q_i - \sum \frac{\partial\varphi^0}{\partial q_i}\,\delta q_i^0 + \int \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} - \frac{d\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}}{dt} \right) \delta q_i dt.$$

Но так как q_i' не входит в U, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i. \tag{1}$$

Далее, все стоящие в правой части под знаком интеграла выражения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i'}}{dt q_i} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} - \frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}}{dt}$$

обращаются в нуль вследствие уравнений движения, представленных во второй лагранжевой форме, данной уравнениями (8) (стр. 55) поэтому в искомой вариации остается только член, свободный от знака интеграла, и мы имеем

$$\delta \int \varphi\, dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}\, \delta q_i - \sum \frac{\partial \varphi^0}{\partial q_i'}\, \delta q_i^0 = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 .$$

По выше сделанному предположению начальные и конечные значения q были даны, вследствие чего $\delta q_i = 0$ и $\delta q_i^0 = 0$ и поэтому правая часть последнего равенства обращалась в нуль; при настоящих более общих предположениях это не имеет места. Чтобы правильно понять смысл, в котором взяты вариации, надо вспомнить, что часть искомой вариации, стоящая под знаком интеграла, обращается в нуль только благодаря дифференциальным уравнениям движения, которые рассматриваются как выполненные. Величины q_i и q_i', так же как и величины p_i, должны поэтому рассматриваться как данные функции от t и 2μ постоянных; и вариации δq_i представляют только те изменения q_i, которые происходят от изменения значений 2μ произвольных постоянных. Значения этих вариаций δq_i, которые соответствуют нижней границе интеграла τ, будут величинами δq_i^0. Если мы обозначим интеграл, вариация которого будет рассматриваться, через V, так что

$$V = \int \varphi\, dt = \int (T+U)\, dt, \tag{2}$$

то вышеполученная формула перепишется так:

$$\left.\begin{aligned} \delta V &= p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots + p_i \delta q_i + \ldots + p_\mu \delta q_\mu \\ &\quad - p_1^0 \delta q_1^0 - p_2^0 \delta q_2^0 - \ldots - p_i^0 \delta q_i^0 - \ldots - p_\mu^0 \delta q_\mu^0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

если t рассматривается не как независимая переменная, то к этому выражению надо присоединить еще член $\dfrac{\partial V}{\partial t}\, \delta t$.

Такое представление вариации V имеет очень важное значение. Именно, после интегрирования дифференциальных уравнений движения мы можем все переменные, а потому также и φ, представить как функцию от t и 2μ постоянных интегрирования и из этого представления φ квадратурой получить V, также в виде функции t и тех же 2μ постоянных. Выбор величин, которые образуют систему этих постоянных в интегральных уравнениях, зависит от нашего желания. Если мы выберем для этого 2μ начальных значений q_i^0, p_i^0, то $2\mu + 1$ переменных t, q_i, p_i и 2μ постоянных q_i^0, p_i^0 образуют вместе систему $4\mu + 1$ величин, которые при помощи интегральных уравнений связаны друг с другом 2μ соотношениями и из которых поэтому любые 2μ можно рассматривать как функции остальных $2\mu + 1$. Представим себе например значения 2μ величин p_i, p_i^0 выраженными через $2\mu + 1$ величин t, q_i, q_i^0 и эти значения p_i^0 подставленными в V, которое нам уже известно как функция от $2\mu + 1$ величин t, q_i^0, p_i^0; таким образом

$V = \int \varphi\, dt$ получится как функция от $2\mu+1$ величин $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$, $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$. Если варьировать это выражение для V, оставляя однако t не варьированным, то получится:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\delta q_\mu + \\ + \frac{\partial V}{\partial q_1^0}\delta q_1^0 + \frac{\partial V}{\partial q_2^0}\delta q_2^0 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu^0}\delta q_\mu^0.$$

Если сравним это выражение для δV с его выражением (3), то будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i;\ \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0. \tag{4}$$

С другой стороны, согласно определению V, данному в (2),

$$\varphi = \frac{dV}{dt}.$$

Но t содержится в V, во-первых, явно, во-вторых, неявно — через величины $q_1, q_2, \ldots q_\mu$; поэтому имеем:

$$\varphi = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt}$$

или, при помощи (4),

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q_i' - \varphi.$$

Это уравнение после введения функции

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi \tag{5}$$

переходит в следующее:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6), если ψ представить в надлежащей форме, есть уравнение в частных производных для функции V. В самом деле, величины q_i' и величины p_i, введенные выше уравнениями

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}, \tag{1}$$

образуют, как мы знаем, две системы величин, которые с помощью величин q_i и t могут замещать друг друга, так что каждое данное выражение, зависящее от $3\mu+1$ переменных t, q_i, q_i', p_i, может быть представлено в то же время как функция от $2\mu+1$ переменных t, q_i, q_i' и как функция от $2\mu+1$ переменных t, q_i, p_i. Таким выражением является

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi. \tag{5}$$

Если мы ψ представим как функцию величин t, q_i, p_i и вместо величин p_i подставим частные производные $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ согласно первому из уравнений (4), то ψ будет выражено окончательно через величины $t, q_1, q_2, \dots q_\mu$, $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}$, и уравнение (6) примет форму:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, q_2, \dots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2} \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0.$$

Это есть гамильтоново уравнение в частных производных, которому удовлетворяет $V = \int \varphi \, dt$, если его рассматривать как функцию от $t, q_1, q_2, \dots q_\mu$ и $q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$. Таким образом интегрирование дифференциальных уравнений движения дает для этого уравнения в частных производных решение, содержащее μ произвольных постоянных $q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$.

Всё предыдущее имеет место не только для механических задач, но также и тогда, когда φ вместо того, чтобы быть равной $T + U$, обозначает произвольную функцию от $t, q_1, q_2, \dots q_\mu, q_1', q_2', \dots q_\mu'$. В механических же задачах, как уже было показано в девятой лекции, ψ получает простое значение. Действительно, если в выражении

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi$$

подставим вместо φ значение

$$\varphi = T + U,$$

где U зависит только от величин q_i, а T есть однородная функция второй степени от величин q_i', то будем иметь

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}, \quad \sum p_i q_i' = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} = 2T,$$

$$\psi = T - U = H,$$

и уравнение в частных производных переходит в следующее:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

Результат предыдущих исследований может быть выражен сначала для механических задач следующим образом.

Если

$$H = T - U, \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$$

и H выражено через величины p_i и q_i, то дифференциальные уравнения движения будут:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Рассмотрим движение в интервале от τ до t и введем в интегральные уравнения, как произвольные постоянные, начальные значения q_1^0, $q_2^0, \dots q_\mu^0$ и $p_1^0, p_2^0, \dots p_\mu^0$; далее положим в H

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

есть уравнение в частных производных первого порядка, определяющее V как функцию от t, q_1, q_2, ... q_μ. Образуем теперь интеграл

$$\int_\tau^t (T+U)\,dt,$$

где, благодаря интегральным уравнениям, $T+U$ есть функция только от t и 2μ постоянных q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0, p_1^0, p_2^0, ... p_μ^0, и выразим результат квадратуры через t, q_1, q_2, ... q_μ и q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0; тогда представленное таким образом значение интеграла

$$V=\int_\tau^t (T+U)\,dt$$

есть решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H=0.$$

Если на месте $T+U$ стоит произвольная функция φ от величин q_i, q_i' и t, то на место дифференциальных уравнений движения надо поставить те уравнения, которые обращают в нуль часть вариации, стоящую под знаком интеграла. Для полноты аналогии мы должны привести эти дифференциальные уравнения к той же форме, которую придал дифференциальным уравнениям движения Гамильтон, для чего здесь также заменяем производные q_i' через величины $p_i=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i'}$, вводим функцию $\psi=\sum p_iq_i'-\varphi$ и затем поступаем подобно тому, как в девятой лекции. Образуем вариацию от функции ψ:

$$\delta\psi=\sum q_i'\delta p_i+\sum p_i\delta q_i'-\delta\varphi$$

и подставим сюда вместо $\delta\varphi$ значение

$$\delta\varphi=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\delta q_i+\sum p_i\delta q'_i+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t,$$

которое содержит также член, пропорциональный δt, если не выбрана независимая переменная; тогда получится:

$$\delta\psi=\sum q_i'\delta p_i-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\delta q_i-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t.$$

Если сравним это выражение $\delta\psi$ с тем, которое получится, когда ψ представлена как функция от величин q_i, p_i и t, т. е. с выражением

$$\delta\psi=\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\delta p_i+\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\delta t,$$

в котором частные производные, взятые при последнем предположении, для отличия заключены в скобки, то из сравнения следует:

$$q_i'=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

Благодаря второму из этих трех уравнений, дифференциальные уравнения

$$\frac{d\,\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i},$$

которые должны быть выполнены для того, чтобы стоящая под знаком интеграла часть вариации $\delta \int \varphi \, dt$ обращалась в нуль, превращаются в

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right),$$

в то время как первое из этих трех уравнений тождественно с

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right).$$

Таким образом дифференциальные уравнения всех изопериметрических задач, в которых под знаком данного интеграла находятся только первые производные, имеют форму

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right),$$

и их интегрирование всегда дает решение уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Отбрасывая у производных $\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right)$ теперь уже ненужные скобки, можем результат, полученный для общего случая, выразить так:

Пусть φ есть какая-нибудь данная функция от t, q_1, q_2, ... q_μ и q_1', q_2', ... q_μ'; введем вместо производных q_i' новые переменные

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'},$$

положим

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi$$

и выразим функцию ψ через переменные p_i, q_i и *t; тогда уравнения*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

будут теми дифференциальными уравнениями, которые должны быть выполнены для того, чтобы стоящая под знаком интеграла часть вариации $\delta \int \varphi \, dt$ обращалась в нуль. Обозначим далее значения 2μ переменных для нижней границы интегрирования τ через q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0, p_1^0, p_2^0, ... p_μ^0 и введем эти величины вместо произвольных постоянных в интегральные уравнения системы; наконец положим

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

есть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое определяет V как функцию от переменных t, q_1, q_2, ... q_μ. Если образуем теперь интеграл

$$\int_\tau^t \varphi \, dt,$$

где φ, *благодаря интегральным уравнениям, есть функция только от* t *и от* 2μ *постоянных* $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_\mu^0$, *и представим результат квадратуры как функцию от* $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ *и* $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$, *то выраженное таким образом значение интеграла*

$$V = \int_\tau^t \varphi\, dt$$

есть решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Зависимость между функциями φ и ψ, заключающаяся в уравнении (5), устанавливает между ними некоторый род взаимности. Именно, если положим

$$\psi = \sum q_i' \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} - \varphi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

где

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'}$$

и φ рассматривается как функция от q_i, q_i' и t, то одновременно будет

$$q_i' = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

в предположении, что ψ рассматривается как функция от q_i, p_i, t; поэтому имеем также

$$\varphi = \sum p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi, \tag{7}$$

куда на место p_i должны быть введены величины q_i' при посредстве уравнений

$$q_i' = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}.$$

Мы можем таким образом найти при помощи равенства (7) для *каждой* данной функции ψ от t и от величин q_i и p_i сопряженную функцию φ от t и от величин q_i и q_i'; поэтому уравнение $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ представляет наиболее общее уравнение в частных производных первого порядка, которое определяет V как функцию от t, $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, не содержит самого V и решено относительно $\frac{\partial V}{\partial t}$. В этом заключается замечательная зависимость между двумя, далеко друг от друга отстоящими, задачами: изопериметрической рассматриваемого рода и задачей интегрирования уравнений в частных производных первого порядка. Эту зависимость можно распространить на прочие изопериметрические задачи, содержащие под знаком интеграла производные порядка выше первого.

Найденное решение уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$, как мы видели, содержит μ произвольных постоянных $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$, и так как в ψ сама величина V не входит, то к этому решению V можно прибавить еще одну произвольную постоянную, и тогда получится решение с $\mu+1$ произвольными постоянными. Таким образом решение V есть то, которое мы называем полным решением уравнения в частных производных первого порядка; именно оно должно содержать столько независимых друг от друга постоянных, сколько независимых друг от друга переменных входит в дифференциальное уравнение.

Подобно тому как интегрирование рассмотренных изопериметрических уравнений или уравнений движения дает указанное полное решение уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$, так и обратно, предположив известным полное решение, можно образовать из него интегральные уравнения рассматриваемых изопериметрических и механических дифференциальных уравнений, причем они содержатся в уже выше (стр. 128) данных уравнениях

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0}=-p_i^0, \tag{4}$$

которые имеют место также в случае рассматриваемой изопериметрической задачи. Таким образом мы представили интегральные уравнения в той же самой форме, в какой раньше были представлены дифференциальные уравнения, именно посредством частных производных от *одной* функции V. Это было найдено Гамильтоном, который функции V дал название *the principal function*. Вторая система уравнений $\frac{\partial V}{\partial q_i^0}=-p_i^0$, заключенная в (4), дает самые интегральные уравнения; первая система $\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i$ дает величины p_i или q_i', выраженные через t и q_i с μ постоянными q_i^0; это есть система первых интегральных уравнений, но чрезвычайно важно, что они также могут быть выражены через частные производные функции V. Как мы позже покажем, μ постоянных, содержащихся в V, не обязательно должны быть начальными значениями q_i^0; но, если только мы вообще знаем полное решение V уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ с какими угодно постоянными, интегральные уравнения всегда могут быть выражены через частные производные от этого решения по содержащимся в нем постоянным.

Гамильтон, опубликовавший свое открытие в двух статьях в Philosophical Transactions, *) определяет V не через одно только уравнение в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$, а устанавливает одновременно еще второе уравнение в частных производных, которому V также должно удовлетворять. Но это последнее уравнение можно отбросить, так как его можно вывести из уже установленного уравнения и так как его присоединение только отнимает у исследования его простоту; действительно, вопрос об определении функции двумя совместными дифференциальными уравнениями не может быть решен в общем виде при теперешних средствах анализа.

Чтобы вывести это второе уравнение в частных производных из уже найденного уравнения $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$, мы должны будем воспользоваться следующей легко доказываемой теоремой.

Пусть дана система n обыкновенных дифференциальных уравнений с $n+1$ переменными t, x_1, x_2, ... x_n; пусть начальному значению τ пере-

---

*) 1834, P. II и 1835, P. I.

менной t соответствуют значения x_1^0, x_2^0, ... x_n^0 и данная система дифференциальных уравнений удовлетворяется системой интегральных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=f_1(t,\ \tau,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots x_n^0), \\ x_2=f_2(t,\ \tau,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots x_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=f_n(t,\ \tau,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots x_n^0). \end{array}\right. \qquad (A)$$

Переставляя переменные t, x_1, x_2, ... x_n, с их начальными значениями τ, x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, получим равнозначную систему интегральных уравнений, так что можем обойтись совершенно без обременительного дела исключения и без дальнейших выкладок представить интегральные уравнения, решенные относительно произвольных постоянных, в таком виде:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^0=f_1(\tau,\ t,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n), \\ x_2^0=f_2(\tau,\ t,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^0=f_n(\tau,\ t,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n). \end{array}\right. \qquad (B)$$

Доказательство этой теоремы следующее: если данной системе дифференциальных уравнений удовлетворяет система интегральных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=F_1(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n) \\ x_2=F_2(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=F_n(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n), \end{array}\right. \qquad (C)$$

то отсюда следует для начальных значений та же система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^0=F_1(\tau,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n), \\ x_2^0=F_2(\tau,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^0=F_n(\tau,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ldots \alpha_n). \end{array}\right. \qquad (D)$$

Система (A) должна получаться из (C) и (D) исключением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Но системы (C) и (D) переходят одна в другую, если заменить t на τ и в то же время x_1 на x_1^0, x_2 на x_2^0 ... x_n на x_n^0; следовательно возможно произвести как раз эту замену в (A) и получающаяся из системы (A) система (B) должна быть равнозначна с (A).

Из этой теоремы можно вывести замечательное следствие. Равенства (B) являются интегралами, т. е. такими интегральными уравнениями, которые, если их продифференцировать и принять во внимание дифференциальные уравнения, дадут тождественно исчезающий результат. Напротив, каждое из уравнений (A) содержит n постоянных, из которых ни одна не является лишней (supervacanea). *) Поэтому, если продифференцировать одно из них, например $x_1=f_1(t,\ \tau,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots x_n^0)$, затем воспользоваться дифференциальными уравнениями и продолжать эту операцию далее, то получатся последовательно все интегральные уравнения. Извлечь такую пользу из знания одного интеграла $\text{const.}=F(t,\ \tau,\ x_1,\ x_2,\ldots x_n)$, где τ обозначает некоторое частное значение t, вообще нельзя. Но если случится, что эта постоянная есть как раз значение одной из переменных, например x_1, соответствующее значению τ переменной t, то из одного интеграла с одной только постоянной

*) См. статью: „Dilucidationes de aequatt. diff. vulg. systematis". Crelles Journal, Bd. 23.

можно вывести все интегральные уравнения. Это имеет место в том случае, когда функция $F(t, \tau, x_1, x_2, \dots x_n)$ для $t=\tau$ сводится к x_1; тогда, на основании вышеприведенной теоремы, можно переместить переменные и их начальные значения, и таким образом из одного интеграла

$$\text{const.} = F(t, \tau, x_1, x_2, \dots x_n)$$

получится интегральное уравнение

$$x_1 = F(\tau, t, x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0),$$

из которого можно последовательным дифференцированием вывести все остальные.

Посмотрим теперь, что будет с V при перестановке переменных с их начальными значениями. Пусть рассмотренные изопериметрические и динамические дифференциальные уравнения интегрируются при помощи системы:

$$\begin{array}{ll} q_1 = \chi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_1 = \tilde{\omega}_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\ q_2 = \chi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_2 = \tilde{\omega}_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ q_\mu = \chi_\mu(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_\mu = \tilde{\omega}_\mu(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}); \end{array}$$

тогда, подставляя вместо t начальное значение τ, получим:

$$\begin{array}{ll} q_1^0 = \chi_1(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\mu}), & p_1^0 = \tilde{\omega}_1(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\ q_2^0 = \chi_2(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\mu}), & p_2^0 = \tilde{\omega}_2(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ q_\mu^0 = \chi_\mu(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\mu}), & p_\mu^0 = \tilde{\omega}_\mu(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}). \end{array}$$

В интеграле

$$V = \int_\tau^t \varphi \, dt$$

φ есть функция от $t, q_1, q_2, \dots q_\mu, p_1, p_2, \dots p_\mu$; следовательно, после подстановки значений $q_1, \dots q_\mu, p_1, \dots p_\mu$ из интегральных уравнений, φ будет функцией только от $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$. Поэтому можем положить

$$\int \varphi \, dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu})$$

и тогда получим:

$$V = \int_\tau^t \varphi \, dt = \Phi(t, \alpha_1, \dots \alpha_{2\mu}) - \Phi(\tau, \alpha_1, \dots \alpha_{2\mu}).$$

Определенная таким образом величина V будет полным решением уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$, если исключить постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$ при помощи вышеприведенных 2μ уравнений для $q_1, q_2, \dots q_\mu, q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$. Но из этих 2μ уравнений одна половина переходит в другую, если заменить t через τ и величины q_i — через величины q_i^0. Поэтому каждая из величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$, выраженная как функция от $t, q_1, q_2, \dots q_\mu, \tau, q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$, должна обладать тем свойством, что она остается без изменения, если t заменить через τ, q_1 — через q_1^0, q_2 — через q_2^0, $\dots q_\mu$ — через q_μ^0. Если принять это во внимание, то становится ясно, что при помощи этой подстановки

$$V = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}) - \Phi(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu})$$

переходит в

$$\Phi(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu}) - \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu}),$$

т. е. в $-V$.

Во всем предыдущем мы не делали никаких особенных гипотез относительно дифференциальных уравнений. Теперь, чтобы получить случай, рассмотренный Гамильтоном, мы должны предположить, что переменная t не входит явно в φ. Это имеет место в механике, когда время t не содержится в силовой функции U, а следовательно также и в функции $\psi = H = T - U$. Тогда в дифференциальные уравнения движения

$$dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_\mu : dp_1 : \ldots : dp_\mu = 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial\psi}{\partial p_\mu} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : \ldots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu}$$

входит только дифференциал величины t. Отбросив dt и 1, исключим совершенно время, выразим после интегрирования оставшейся системы все переменные через одну, например через q_1, и определим эту последнюю как функцию времени, для чего решим относительно q_1 уравнение

$$t - \tau = \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{dq_1}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p_1}},$$

получаемое квадратурой из дифференциальной формулы

$$dt = \frac{dq_1}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p_1}}.$$

Так мы получим q_1 как функцию от $t - \tau$, и так как прочие переменные уже выражены как функции от q_1, то все переменные зависят только от разности $t - \tau$. Это имеет место также для функции V, которая тоже содержит обе величины t и τ только в соединении $\theta = t - \tau$; поэтому имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Если теперь величины $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ переставить с их начальными значениями $\tau, q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$, то V перейдет в $-V$, θ в $-\theta$, а $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ останется без изменения. Если далее ψ_0 обозначает то значение, в которое перейдет ψ, когда величины q_i и $p_i = \dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ переставлены с величинами q_i^0 и $p_i^0 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i^0}$, то уравнение

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi$$

перейдет в уравнение

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi_0 = -\frac{\partial V}{\partial \tau} + \psi_0.$$

Это есть второе Гамильтоново уравнение в частных производных, для которого мы таким образом доказали, что оно может быть выведено из ранее полученного уравнения перестановкой переменных с их начальными значениями.

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНО УДОВЛЕТВОРЯЮТ СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ СЛУЧАЯ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ.

Мы пойдем теперь обратным путем и покажем, как, исходя из рассмотренного уравнения в частных производных, перейти к динамическим или изопериметрическим дифференциальным уравнениям.

Пусть

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0 \tag{1}$$

есть любое уравнение в частных производных первого порядка, не содержащее самую функцию V, *так что* ψ *есть какая-нибудь функция величин* $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, p_1, p_2, \ldots p_\mu$, где $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$; *пусть нам известно полное решение* V *уравнения в частных производных* (1), *т. е. такое решение, которое кроме постоянной, соединенной с* V *посредством сложения, содержит еще* μ *произвольных постоянных* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$. *Положим теперь*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2; \ldots; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu, \tag{2}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\mu$ *обозначают новые произвольные постоянные; тогда эти уравнения, в соединении с уравнениями*

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1; \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2; \ldots; \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu,$$

являются интегральными уравнениями системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \tag{3}$$

где i *принимает значения* 1, 2, ... μ.

При доказательстве этой теоремы мы должны принять во внимание, что если предположить полное решение известным и подставить его вместо V в уравнение в частных производных (1), то левая часть этого уравнения должна стать тождественно обращающейся в нуль функцией величин $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ и поэтому ее частные производные, взятые по этим величинам, также должны тождественно обращаться в нуль.

Чтобы вывести первую половину дифференциальных уравнений (3) из уравнений (2), мы поступаем следующим образом. Взяв от уравнений (2) полные производные по t, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt},\\
0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Теперь всё сводится к тому, чтобы решить эти линейные относительно $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_\mu}{dt}$ уравнения и показать, что значения, получаемые при этом решении, тождественны с величинами $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}$. Но эту тождественность можно установить и не решая уравнений, если доказать, что величины $\frac{dq_i}{dt}$ и величины $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ удовлетворяют одной и той же системе линейных уравнений. Для этого доказательства мы должны взять от уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ частные производные по постоянным $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ и при этом вспомнить, что из величин t, q_i и $p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$, функцией которых является ψ, только последние, т. е. p_i, содержат постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$. Дифференцирование по α_i дает

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_i}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial\alpha_i},$$

и так как $p_1=\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $p_2=\frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots p_\mu=\frac{\partial V}{\partial q_\mu}$, так что $\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_i\partial q_k}$, то из этого уравнения для $i=1, 2, \ldots \mu$ получаем систему линейных уравнений, отличающуюся от системы (4) только тем, что в ней на место величин $\frac{dq_i}{dt}$ входят величины $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$. Отсюда заключаем, что $\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ (см. замечание на следующей странице).

Для вывода второй половины дифференциальных уравнений (3), т. е. уравнений $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$, мы обращаемся к помощи второй половины интегральных уравнений, т. е. уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,$$

которые образуют систему первых интегральных уравнений, представляя соотношения между величинами q_i и q_i' и μ произвольными постоянными. Уравнение $p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$, если от него взять полную производную по t, дает:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt},$$

Напишем вместо $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_1}, \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_2}, \ldots \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_\mu}$ соответственно $\frac{\partial p_1}{\partial q_i}, \frac{\partial p_2}{\partial q_i}, \ldots \frac{\partial_\mu}{\partial q_i}$ и воспользуемся уже найденными уравнениями $\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots$ $\ldots \frac{dq_\mu}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}$; тогда получится:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial p_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}. \tag{5}$$

С другой стороны, взяв от уравнения $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ частную производную по q_i, находим, что

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial q_i};$$

вычитая это уравнение из (5), приходим к результату:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}.$$

Таким образом выведена вторая половина дифференциальных уравнений (3), и следовательно данная выше теорема вполне доказана. Важно отметить, что согласно полученному результату μ постоянных, входящих в V, могут быть выбраны произвольно и не должны быть обязательно равны начальным значениям $q_1{}^0, q_2{}^0, \ldots q_\mu{}^0$; действительно, для введения начальных значений надо или решать уравнения, или производить исключения, т. е. осуществлять в большинстве случаев затруднительные операции, чего теперь можем избежать.

Один пункт изложенного доказательства заслуживает более близкого рассмотрения. Убедившись, что уравнения (4), установленные для величин $\frac{dq_i}{dt}$, имеют место также для величин $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$, мы отсюда заключили, что величины $\frac{dq_i}{dt}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ равны друг другу. Но мы имеем право сделать такое заключение только, если величины $\frac{dq_i}{dt}$ благодаря системе линейных уравнений (4) получают конечные и вполне определенные значения. Это всегда имеет место для системы линейных уравнений, коль скоро уравнения не противоречат друг другу или коль скоро одно или несколько из них не составляют следствия остальных. В первом из этих случаев значения переменных будут бесконечными, во втором случае — неопределенными; оба отличаются друг от друга только значениями постоянных членов. В самом деле, если предположим, что последнее уравнение некоторой системы следует из остальных уравнений, то эти уравнения должны, будучи умножены на надлежащие коэффициенты и сложены, дать последнее уравнение. Если изменим теперь постоянный член в последнем уравнении на произвольную величину, то это уравнение не будет более следствием остальных, а будет им противоречить. Таким образом оба случая совпадают в том, что если постоянные члены перенести в левую сторону, правая сторона одного из уравнений, хотя бы последнего, может быть представлена как сумма умноженных на соответствующие множители правых частей остальных уравнений. Если мы теперь подставим вместо коэффициентов, стоящих в последнем горизонтальном ряду, вытекающее отсюда их выражение через остальные коэффициенты, то определитель R рассматриваемых уравнений распадается на сумму определителей, из которых каждый имеет два одинаковых горизонтальных ряда, а следовательно обращается в нуль. Поэтому будет также $R=0$ и исключительный случай, в котором предыдущее доказательство неприменимо имеет место (поскольку коэффициенты линейных уравнений остаются конечными, что мы всегда предполагаем) только тогда, когда определитель линейных уравнений обращается в нуль. Коэффициенты линейных уравнений (4) имеют вид:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_\mu}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_\mu}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu \partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu \partial q_\mu},
\end{array}$$

следовательно их определитель можно представить как функциональный определитель следующим двояким образом:

$$R = \sum \pm \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_1}}{\partial q_1} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}}{\partial q_\mu} = \sum \pm \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial\alpha_1} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial\alpha_2} \cdots \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_\mu}}{\partial\alpha_\mu}.$$

Из этого двойного представления R попутно следует общая теорема относительно функций от 2μ переменных $q_1, q_2, \ldots q_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$. Если бы теперь было $R=0$, то на основании № 5 тринадцатой лекции (стр. 90) величины $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}$, рассматриваемые как функции от $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ не были бы независимы друг от друга, т. е. $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu, t$ должны были бы быть связаны уравнением, не содержащим $q_1, q_2, \ldots q_\mu$. Из второго представления R следует, что тогда одновременно между $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}, q_1, q_2, \ldots q_\mu, t$ должно было бы существовать уравнение, не содержащее $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$. Мы имели бы таким образом уравнение вида

$$0 = F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right),$$

т. е. уравнение в частных производных первого порядка, которому должно было бы удовлетворять предполагаемое решение V и которое не содержит $\frac{\partial V}{\partial t}$. Но это невозможно, если V действительно должно быть *полным* решением уравнения $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$. Действительно, для того чтобы

$$V = f(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) + C$$

соответствовало понятию о *полном* решении необходимо, чтобы для исключения $\mu+1$ постоянной $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$, C были использованы все $\mu+1$ производных

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu}=\frac{\partial f}{\partial q_\mu}. \tag{6}$$

Если можно отсюда исключить все $\mu+1$ постоянных, не употребив равенства $\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}$, то мы придем к уравнению вида

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right)=0.$$

Предположим теперь, что при исключении постоянных из уравнений (6) можно оставить неиспользованным только одно уравнение $\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}$, в то время как при этом требуется каждое из остальных уравнений $\frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{\partial f}{\partial q_i}$; тогда можно придать *одной* из постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ частное значение, причем однако для исключения постоянных необходимо воспользоваться всеми уравнениями $\frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{\partial f}{\partial q_i}$. Действительно, из μ уравнений вообще можно исключить только $\mu-1$ величин. Постоянная, которой придали частное значение, является поэтому излишней (supervacanea), и функцию f надо рассматривать так, как будто она содержит только $\mu-1$ постоянных. Поэтому $V=f+C$ не есть *полное* решение уравнения в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$, но является таковым только для уравнения $F=0$, что противоречит нашему предположению. Таким образом определитель R не может никогда обратиться в нуль, поэтому имеет место заключение, которое мы сделали при доказательстве равенств (3).

В заключение этой лекции мы составим на самом деле уравнение в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ для свободного движения n материальных точек. В этом случае имеем $\psi=T-U$; вместо величин q надо подставить $3n$ координат x_i, y_i, z_i и так как $T=\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$, то из уравнений $p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'}$ следует, что на место величин p здесь встанут $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$. Так как в то же время надо подставить $p=\frac{\partial V}{\partial q}$, то имеем уравнения

$$m_i x_i'=\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad m_i y_i'=\frac{\partial V}{\partial y_i}; \quad m_i z_i'=\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

или

$$x_i'=\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad y_i'=\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial y_i}; \quad z_i'=\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Подстановка этих значений в T дает

$$T=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right],$$

и так как U есть функция только от времени и от величин q, т. е. от координат x_i, y_i, z_i, то мы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U. \qquad (7)$$

Это есть уравнение в частных производных первого порядка, от решения которого зависит интегрирование дифференциальных уравнений движения в том случае, когда движение их совершенно свободно и когда существует силовая функция U, которая может кроме координат также содержать явно время t. Если мы имеем полное решение уравнения (7), т. е. такое значение V, которое содержит, кроме постоянной, прибавленной к V, еще $3n$ постоянных α_1, α_2, ... α_{3n}, то уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}=\beta_i,$$

имеющие место для $i=1, 2, \ldots 3n$, являются интегральными уравнениями для дифференциальных уравнений движения

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i};\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i};\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

имеющих место для $i=1, 2, \ldots n$ и для которых первые интегральные уравнения содержатся в системе:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_i\frac{dx_i}{dt}.\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=m_i\frac{dy_i}{dt},\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=m_i\frac{dz_i}{dt}.$$

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ, КОГДА t НЕ ВХОДИТ ЯВНО.

Особого рассмотрения требует уже вышеотмеченный случай, когда t не входит в ψ. В этом случае уравнение в частных производных $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ может быть сведено к другому уравнению, содержащему одной переменной меньше. Это основывается на одном замечательном преобразовании уравнений в частных производных, при котором одна из независимых переменных и частная производная, взятая по этой переменной, меняются ролями.

Пусть z рассматривается как функция n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; если обозначить через $p_1, p_2, \ldots p_n$ частные производные от z, взятые по $x_1, x_2, \ldots x_n$ то

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n. \tag{1}$$

После того как мы перенесем в левую часть член p_1dx_1 и, кроме того, из обеих частей вычтем x_1dp_1, уравнение (1) превратится в такое:

$$d(z-p_1x_1)=-x_1dp_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n;$$

если мы теперь положим

$$z-p_1x_1=y, \tag{2}$$

то оно превратится в

$$dy=-x_1dp_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n.$$

Поэтому мы получаем, если $y=z-p_1x_1$ рассматривать как функцию от $p_1, x_2, x_3, \ldots x_n$,

$$\frac{\partial y}{\partial p_1}=-x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=p_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3}=p_3, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}=p_n.$$

Если теперь z удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$0=F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n)=F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{3}$$

и если ввести вместо z новую переменную $y=z-p_1x_1$, а вместо x_1 — новую переменную $-\frac{\partial y}{\partial p_1}$, то уравнение в частных производных (3) превратится в следующее:

$$0=F\left(-\frac{\partial y}{\partial p_1}, x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right). \tag{4}$$

Это преобразование, находящееся в третьем томе интегрального исчисления Эйлера, имеет особую важность тогда, когда x_1 не входит в (3), так как тогда одновременно $\frac{\partial y}{\partial p_1}$ не входит в (4) и поэтому p_1 при интегрировании может рассматриваться как постоянная. Применим это к уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\psi\left(q_1, q_2 \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right)=0. \tag{5}$$

Так как в ψ не входит t, то в выше данных формулах на место x_1 ставим t. Теперь вместо t надо ввести новую независимую переменную

$$\alpha=\frac{\partial V}{\partial t},$$

вместо V — новую зависимую переменную

$$W=V-t\frac{\partial V}{\partial t}=V-t\alpha;$$

тогда будем иметь:

$$t=-\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu}=\frac{\partial W}{\partial q_\mu}.$$

Мы можем вывести формулы для этого преобразования и не прибегая к помощи дифференциального уравнения

$$dV=p_1 dq_1+p_2 dq_2+\ldots+p_\mu dq_\mu+\frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

В самом деле, V есть функция от $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ и от произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Положим теперь

$$W=V-t\frac{\partial V}{\partial t}$$

и введем в W вместо t новую переменную α посредством равенства

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\alpha;$$

тогда t будет функцией от α и от прочих величин, входящих в V, кроме t, а

$$W=V-t\alpha$$

будет функцией от $\alpha, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ и от постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Поэтому, принимая во внимание различный смысл дифференцирования для функций V и W, получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}-\alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha}-t=-t$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_i}-\alpha\frac{\partial t}{\partial q_i}=\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}-\alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}.$$

Таким образом, если, согласно нашему предположению, в функцию ψ

уравнения (5) не входит явно время t, то вводим вместо t и V новые переменные α и W посредством уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha, \quad V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$$

и преобразовываем таким путем (5) в уравнение

$$\alpha + \psi\left(q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right) = 0. \tag{6}$$

После интегрирования этого уравнения находим V из уравнения

$$V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W,$$

которое, после того как в него подставлено

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha, \quad t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

превращается в уравнение

$$V = W - \alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha}.$$

В V, кроме того, снова должно быть введено t вместо α и притом посредством уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t,$$

которое должно быть решено относительно α.

На первый взгляд кажется, что этим путем из полного решения W уравнения (6) еще нельзя получить полного решения V уравнения (5). Действительно, так как в W число постоянных есть μ, то в выведенном решении V должно заключаться тоже μ постоянных. Но, если V есть полное решение, то оно должно содержать $\mu + 1$ постоянную. Однако эту недостающую постоянную легко ввести. В самом деле, так как в уравнение (5) не входит само t, а только $\frac{\partial V}{\partial t}$, то решение V уравнения (5) не перестает быть таковым, если t увеличивается или уменьшается на произвольную постоянную, т. е. если на место t ставится $t - \tau$. Тогда формула преобразования $W = V - t\frac{\partial V}{\partial t}$, связывающая V и W, превращается в следующую:

$$W = V - (t - \tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - \alpha(t - \tau),$$

и t вводится уже не при посредстве уравнения $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t$, но при посредстве уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t.$$

Тогда V содержит достаточное число $\mu + 1$ постоянных, именно $\mu - 1$ постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$, входящих в W помимо аддитивной постоянной, саму аддитивную постоянную и связанную с t постоянную τ. Поэтому интегральные уравнения изопериметрических дифференциальных уравнений будут следующие:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = \text{const}.$$

Так как τ входит только в соединении $t - \tau$, то

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t};$$

поэтому последнее из μ интегральных уравнений может быть заменено следующим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что уравнение $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, посредством которого мы вместо t вводили α, есть интеграл и что α должна быть рассматриваема как постоянная.

Как мы видим, оба уравнения $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ и $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ равнозначны и, кроме того, частные производные $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}$ и $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, где i обозначает одно из чисел от 1 до $\mu - 1$, равны друг другу; таким образом можно, не прибегая к помощи V, выразить интегральные уравнения также непосредственно через W и получить их в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t. \tag{7}$$

Также можем систему первых интегральных уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

выразить через W, и так как $\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$, получить ее в форме:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu. \tag{8}$$

В случае задачи механики $\psi = T - U$; поэтому мы имеем теорему:

Пусть силовая функция U не содержит явно времени t, так что имеет место теорема живой силы. Выразим половину живой силы T через величины q_i и $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ и положим после этого в уравнении живой силы

$$0 = \alpha + \psi = \alpha + T - U$$

на место p_i выражение $\frac{\partial W}{\partial q_i}$, так что это уравнение перейдет в уравнение в частных производных для W. Если мы знаем полное решение этого последнего уравнения, содержащее кроме постоянной, соединенной с W аддитивно, $\mu - 1$ постоянную $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\mu-1}$, то выражения

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

являются интегральными уравнениями дифференциальных уравнений движения, к которым можно еще присоединить уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2, \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_{\mu-1}}=p_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_\mu}=p_\mu,$$

как систему первых интегральных уравнений.

2μ постоянных, содержащихся в интегральных уравнениях, будут:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots \ \alpha_{\mu-1}, \ \alpha;$$
$$\beta_1, \ \beta_2, \ldots \ \beta_{\mu-1}, \ \tau.$$

В случае совершенно свободной системы $\mu=3n$; в то же время на место величин p_i входят величины

$$m_i x_i', \quad m_i y_i', \quad m_i z_i';$$

тогда

$$T=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left\{(m_i x_i')^2+(m_i y_i')^2+(m_i z_i')^2\right\},$$

и уравнение в частных производных принимает форму:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z_i}\right)^2\right\}=U-\alpha.$$

ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ.

ЛАГРАНЖЕВ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К МЕХАНИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ, КОТОРЫЕ ЗАВИСЯТ ТОЛЬКО ОТ ДВУХ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ И КРАТЧАЙШАЯ ЛИНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ.

После того как мы свели механические задачи к интегрированию одного нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, мы должны заняться интегрированием этого уравнения, т. е. разысканием его полного решения.

В третьей части Интегрального исчисления Эйлера встречаются прекрасные исследования относительно интегрирования уравнений в частных производных.

Хотя он рассматривает всегда только частные случаи, но он их подбирает так удачно, что позже найденный общий метод по большей части прибавляет к его результатам очень мало или ничего. Работы Эйлера имеют вообще ту большую заслугу, что им везде приведены по возможности все случаи, в которых задачи могут быть решены полностью с помощью данных способов и средств. Поэтому его примеры дают всегда полное содержание его метода согласно тогдашнему состоянию науки и, как правило, когда удается к примерам Эйлера присоединить какой-нибудь новый пример, то это является обогащением науки, так как от него редко ускользал случай, разрешимый при помощи его способов.

Лагранж дал свой общий метод интегрирования уравнений в частных производных первого порядка, являющийся совершенно новой мыслью в интегральном исчислении, в одной статье, помещенной в трудах берлинской академии в 1772 году. В этой статье содержится приведение нелинейных уравнений в частных производных первого порядка к линейным; устанавливаются понятия полных и общих решений, причем последние выводятся из первых, и даются методы для нахождения полных решений. Но всё ограничивается только случаем трех переменных, из которых две не зависят друг от друга. Метод Лагранжа заключается в следующем:

Пусть дано уравнение в частных производных первого порядка

$$\Psi(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0,$$

где x и y независимые переменные, z зависимая и

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

так что между дифференциалами трех переменных существует соотношение

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Пусть предложенное дифференциальное уравнение, будучи решено относительно q, дает

$$q = \chi(x, y, z, p);$$

тогда имеем:

$$dz = p dx + \chi(x, y, z, p)\,dy.$$

Чтобы найти полное решение z, т. е. решение, содержащее две произвольные постоянные, очевидно необходимо только найти значение $p = \tilde{\omega}(x, y, z, a)$, которое, будучи подставлено в выражение $p\,dx + \chi\,dy$, обращает его в полный дифференциал, после чего остается определить z из уравнения $dz = p\,dx + q\,dy$. Последняя операция требует интегрирования одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, благодаря чему в z войдет, кроме a, вторая постоянная b. Значит всё дело состоит в определении p как функции $\tilde{\omega}$ от x, y, z и от произвольной постоянной a таким образом, чтобы выражение $p dx + \chi(x, y, z, p)\,dy$ было полным дифференциалом. Для этого необходимо, чтобы при дифференцировании p по y получалось то же значение, что и при дифференцировании χ по x, т. е. должно быть выполнено уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

или

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\,p = -\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial p}\,p\right)\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Так как χ есть известная функция от x, y, z, p, то это есть линейное уравнение в частных производных относительно p, содержащее три независимых переменных x, y, z; таким образом предложенная задача сводится к тому, чтобы найти для этого линейного уравнения с частными производными одно решение $p = \tilde{\omega}(x, y, z, a)$ с одной произвольной постоянной a. То обстоятельство, что требуется знать только *одно* такое решение, было отмечено Лагранжем.

Рассмотрим теперь только тот случай, когда Ψ, а потому также и χ, не содержат самого z, т. е. когда предложенное уравнение в частных производных имеет более простую форму:

$$\Psi(x, y, p, q) = 0. \tag{1}$$

В этом случае можно определить p также как функцию от x, y, a без z, так что выражение $p\,dx + \chi dy$ будет полным дифференциалом. Так как теперь исчезают как $\frac{\partial \chi}{\partial z}$, так и $\frac{\partial p}{\partial z}$, то линейное уравнение в частных производных для p приводится к следующему:

$$\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

Но вместо того, чтобы предполагать данное уравнение в частных производных (1) решенным относительно q, мы будем в дальнейших вычислениях обычно брать его в его первоначальном виде.

Представим себе далее, что уравнение $p = \tilde{\omega}(x, y, a)$ решено не относительно p, но относительно a, т. е. приведено к виду

$$f(x, y, p) = a;$$

тогда мы должны будем воспользоваться формулами:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial q}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial p}=\frac{\partial q}{\partial p}=-\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial q}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}};\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}.$$

Если мы подставим эти значения в вышенаписанное линейное уравнение в частных производных для p, то оно преобразуется в следующее линейное уравнение в частных производных для f:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial p}\,\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial q}\,\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial p}=0. \tag{2}$$

Если для этого уравнения известно одно решение f, не содержащее постоянной величины, то в рассматриваемом случае для определения полного решения z уравнения (1) не требуется никакого интегрирования дифференциального уравнения. В самом деле, если это решение f положить равным произвольной постоянной a и определить из уравнения

$$f(x,\ y,\ p)=a,$$

в соединении с предложенным дифференциальным уравнением

$$\Psi(x,\ y,\ p,\ q)=0,$$

p и q как функции от x и y, то эти функции будут обладать тем свойством что $p\,dx+q\,dy$ будет полным дифференциалом, так как требуемое для этого условие (2) выполнено и мы получаем поэтому z простой квадратурой из формулы

$$z=\int(p\,dx+q\,dy);$$

таким образом вторая произвольная постоянная, содержащаяся в полном решении z, связана с z аддитивно, что можно было предвидеть, так как в уравнении (1) отсутствует само z.

Итак всё сводится только к тому, чтобы найти *одно* решение линейного уравнения в частных производных (2), в котором частные производные $\frac{\partial\Psi}{\partial p}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial q}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ предполагаются выраженными при посредстве уравнения (1) как функции от x, y и p, без q. Но, как известно, это линейное уравнение в частных производных (2) есть не что иное, *) как уравнение, определяющее те функции f от x, y, p, которые, будучи приравнены постоянной a, дают интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dx:dy:dp=\frac{\partial\Psi}{\partial p}:\frac{\partial\Psi}{\partial q}:-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Всё исследование таким образом сводится к тому, чтобы найти *один* интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3).

*) См. десятую лекцию, стр. 66.

Мы можем еще дополнить эту систему, разыскав при помощи уравнения $\Psi = 0$ величину, которой пропорционален dq. Дифференцирование уравнения $\Psi = 0$ дает:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq = 0;$$

но из дифференциальных уравнений (3) мы имеем пропорцию

$$dx : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

так что $\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp$ само по себе обращается в нуль; поэтому должно также само по себе обращаться в нуль выражение $\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq$, и мы получим:

$$dy : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Поэтому написанная полностью система (3) имеет вид:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \tag{4}$$

Этот результат симметричен с одной стороны относительно x и p, с другой стороны, — относительно y и q, откуда вытекает справедливость произведенного вычисления. Эта система становится на место системы (3), если мы обобщим метод интегрирования, введя в функцию f также q. Действительно, мы можем рассматривать уравнение $f(x, y, p) = a$ как результат исключения q из двух уравнений:

$$F(x, y, p, q) = a \tag{5}$$

и

$$\Psi(x, y, p, q) = 0,$$

так что, если, как прежде, χ обозначает значение q, получающееся как решение уравнения $\Psi = 0$, то выполняется тождественно равенство:

$$F(x, y, p, \chi) = f(x, y, p).$$

Поэтому $F(x, y, p, \chi)$ должно удовлетворять линейному уравнению в частных производных (2), что ведет для F к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) = 0.$$

Но так как χ удовлетворяет тождественно уравнению $\Psi(x, y, p, \chi) = 0$, то мы имеем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial p}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}.$$

Благодаря этому выражение, на которое в левой части предыдущего уравнения множится $\frac{\partial F}{\partial \chi}$, превращается в $-\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, и мы получаем уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}=0, \tag{6}$$

откуда вытекает, что выражение $F=a$ на самом деле будет интегралом системы дифференциальных уравнений (4). Так как $f(x, y, p)=a$ есть результат исключения q из уравнений $F(x, y, p, q)=a$ и $\Psi(x, y, p, q)=0$, то из уравнений $F(x, y, p, q)=a$ и $\Psi(x, y, p, q)=0$ следуют те же значения для p и q, как и из уравнений $f(x, y, p)=a$ и $\Psi(x, y, p, q)=0$. Если, кроме того, принять во внимание, что $\Psi=0$ есть интеграл дифференциальных уравнений (4), притом общий при условии, что в функции Ψ содержится постоянная, входящая в нее аддитивно, и частный в противном случае, то полученные результаты можно соединить в следующую теорему:

Пусть дано уравнение в частных производных

$$\Psi(x, y, p, q)=0, \tag{1}$$

где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$; *образуем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$dx : dy : dp : dq=\frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \tag{4}$$

Если для этой системы, кроме данного a priori интеграла $\Psi=0$, *известен еще второй интеграл*

$$F(x, y, p, q)=a, \tag{5}$$

то из (1) и (5) p и q определятся как функции x и y, и тогда z найдется простой квадратурой по формуле

$$z=\int (p\,dx+q\,dy).$$

Уравнения (4) имеют ту же форму, как и дифференциальные уравнения движения, только на месте величин q_1, q_2, p_1, p_2, $\psi+\alpha$, W здесь стоят величины x, y, p, q, Ψ, z. Следовательно мы получим новое интегральное уравнение для системы (4), если продифференцируем z по входящей в него произвольной постоянной и результат положим равным другой произвольной постоянной. Такой входящей в z постоянной является a, поэтому уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\int\left(\frac{\partial p}{\partial a}\,dx+\frac{\partial q}{\partial a}\,dy\right)=b$$

есть третий интеграл системы (4). То обстоятельство, что мы пришли к этому интегралу путем простой квадратуры, представляет значительную выгоду, вытекающую из приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) к уравнению в частных производных (1). Если мы, чтобы полностью провести аналогию с дифференциальными уравнениями движения, присоединим к пропорции (4) с левой стороны dt, а с правой 1, то t, как мы видели в предыдущей лекции, определится из уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}=\int\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\,dx+\frac{\partial q}{\partial \alpha}\,dy\right)=\tau-t,$$

где α есть постоянная, содержащаяся в $\Psi=\psi+\alpha$.

После того как Гамильтон привел дифференциальные уравнения динамики к уравнению в частных производных первого порядка, достаточно было применить к этому последнему методы, известные уже 65 лет, чтобы получить важный результат для всех задач механики, содержащих только две искомые величины q_1 и q_2.

Если для рассматриваемых механических задач имеет место теорема живой силы, то функция ψ в уравнении $0 = \Psi = \alpha + \psi$ имеет значение

$$\psi = T - U;$$

уравнение

$$T = U - \alpha,$$

выражающее теорему живой силы, в котором U есть функция только от q_1, q_2, а T — функция от q_1, q_2, p_1, p_2, переходит, после подстановки значений $p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}$, в уравнение в частных производных для W, и дифференциальные уравнения движения будут:

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2}.$$

Пусть второй свободный от t интеграл этого уравнения, необходимый для определения полного решения W, будет

$$F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a;$$

тогда имеем:

$$W = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2).$$

Третий свободный от t интеграл дифференциальных уравнений движения есть

$$\frac{\partial W}{\partial a} = b,$$

и t вводится при помощи уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t.$$

Этот результат можно выразить независимо от теории уравнений в частных производных следующим образом:

Если для некоторой задачи механики, содержащей только две искомые величины q_1 и q_2, имеет место теорема живой силы $T = U - \alpha$ и известен кроме того еще один интеграл $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a$, где $p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}$, то из уравнений $\psi = T - U = -\alpha$ и $F = a$ надо определить величины p_1 и p_2 как функции от q_1, q_2, a и α, и тогда два остальные интеграла даются уравнениями

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2\right) = b;$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2\right) = \tau - t,$$

так что в этих четырех интегралах содержится полное интегрирование дифференциальных уравнений движения, т. е. системы

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2}.$$

Это совсем новые формулы: они имеют место например для движения точки на плоскости или на кривой поверхности, если осуществляется теорема живой силы.

Для свободного движения на плоскости мы имеем, если масса точки будет положена равной единице, уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y};\quad T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2),$$

и теорема живой силы содержится в интеграле

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)=U-\alpha.$$

Если мы знаем второй интеграл, т. е. второе уравнение, согласно которому некоторая функция от x, y, x', y' равна произвольной постоянной величине a, и если мы определим из обоих уравнений x' и y' как функции от x, y, a, α, то уравнение траектории будет

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial a}\,dx+\frac{\partial y'}{\partial a}\,dy\right)=b,$$

а время выразится при помощи уравнения

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\,dx+\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\,dy\right)=\tau-t.$$

Эти формулы я сообщил уже в 1836 году парижской академии как простейший результат приведения механических задач к уравнениям в частных производных. Они заслуживают быть помещенными в учебниках по механике, в виду того интереса, который они вызывают, а также потому, что они относятся к самым элементарным случаям механики. В политехнических школах они вошли уже в курс обучения. Пуассон дал в журнале Лиувилля *) их доказательство или скорее их проверку.

Второй случай, заключающийся в вышеприведенных формулах, есть тот, когда точка двигается по данной поверхности только под влиянием начального толчка. Такая точка описывает кратчайшую линию, определение которой зависит от дифференциального уравнения второго порядка. Из предыдущих рассуждений вытекает, что если мы знаем один интеграл этого дифференциального уравнения, то мы можем простой квадратурой вывести отсюда уравнение траектории, связывающее между собой только координаты. Так как в этом случае силовая функция U обращается в нуль, то уравнение в частных производных будет

$$T+\alpha=0.$$

Если x, y, z — координаты движущейся точки, то

$$2T=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}.$$

Рассмотрим x, y как искомые величины, выше обозначенные через q_1, q_2; тогда мы должны подставить в приведенное равенство значение

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

получаемое из уравнения поверхности, после чего найдем:

$$2T=\frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{dt^2}$$

*) Bd. 2, стр. 335.

или

$$2T = x'^2 + y'^2 + (px' + qy')^2.$$

Пусть ξ, η будут величины, выше обозначенные через p_1, p_2: тогда

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial x'} = x' + p(px' + qy'),$$

$$\eta = \frac{\partial T}{\partial y'} = y' + q(px' + qy').$$

$$p\xi + q\eta = (1 + p^2 + q^2)(px' + qy').$$

Полагая

$$N = 1 + p^2 + q^2:$$

получим, решая относительно x' y':

$$x' = \xi - \frac{p}{N}(p\xi + q\eta),$$

$$y' = \eta - \frac{q}{N}(p\xi + q\eta),$$

и так как к T, как к однородной функции второго порядка от x' и y', можно применить формулу

$$2T = \frac{\partial T}{\partial x'}x' + \frac{\partial T}{\partial y'}y' = \xi x' + \eta y',$$

то получится:

$$2T = \xi^2 + \eta^2 - \frac{(p\xi + q\eta)^2}{1 + p^2 + q^2} = \frac{(1 + q^2)\xi^2 + (1 + p^2)\eta^2 - 2pq\,\xi\eta}{1 + p^2 + q^2}.$$

Поэтому уравнение в частных производных для W будет иметь вид:

$$0 = (1 + q^2)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + (1 + p^2)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - 2pq\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha(1 + p^2 + q^2).$$

Это уравнение можно преобразовать многими способами, вводя вместо x и y две новые переменные. Пример этого даст нам впоследствии подстановка, при помощи которой мы определяем кратчайшую линию на трехосном эллипсоиде.

Приведенные случаи относятся в то же время к тем, в которых применяется принцип последнего множителя, дающий последнее интегрирование в механических задачах со сколь угодно большим числом искомых величин. Таким образом мы путем различных рассуждений пришли к одному и тому же результату.

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ТЕХ ЗАДАЧ, В КОТОРЫХ ИМЕЕТ МЕСТО ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ.

Мы будем теперь исследовать, какую пользу можно извлечь для уравнения в частных производных из принципа сохранения центра тяжести.

Коль скоро можно выбрать переменные так, что одна из них сама не входит в уравнение в частных производных $T = U - \alpha$, а входит только производная, взятая по этой переменной от функции W, то мы можем тем же способом преобразования, которым была выведена функция W из V, исключить эту переменную из дифференциального уравнения и таким образом уменьшить число входящих в него переменных.

Рассмотрим случай свободной системы n материальных точек, где $T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$; тогда мы имеем (см. двадцать первую лекцию, стр. 147) уравнение в частных производных:

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left(\left[\frac{\partial W}{\partial x_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial y_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial z_i} \right]^2 \right) = U - \alpha. \tag{1}$$

Если имеет место принцип сохранения центра тяжести, то U зависит только от разностей координат, так что, если положить

$$\xi_1 = x_1 - x_n, \quad \xi_2 = x_2 - x_n, \quad \ldots \quad \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n,$$

то U, рассматриваемая как функция координат x, выразится только через величины ξ. Будем писать частные производные функции W с квадратными скобками, когда W рассматривается как функция от $x_1, x_2, \ldots x_n$, и без них, когда она рассматривается как функция от $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, x_n$; тогда получим

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad \left[\frac{\partial W}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad \left[\frac{\partial W}{\partial x_{n-1}} \right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}}.$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_n} \right] = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}} \right) + \frac{\partial W}{\partial x_n}.$$

и при помощи этих формул для суммы $\sum \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial W}{\partial x_i} \right]^2$, входящей в уравнение (1), получится новое выражение:

$$\sum \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial W}{\partial x_i} \right]^2 = \sum \frac{1}{m_s} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_s} \right)^2 + \frac{1}{m_n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_n} - \sum \frac{\partial W}{\partial \xi_s} \right)^2, \tag{2}$$

где суммирование, относящееся к значку i, производится от 1 до n, а относящееся к значку s — от 1 до $n-1$. После введения этого выражения в уравнение в частных производных (1), первоначальные переменные x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$, x_n полностью заменятся через $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, x_n, и сама переменная x_n больше не будет входить, а будет входить только взятая по ней производная от W. Поэтому вместо x_n вводим новую переменную α' посредством уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = \alpha',$$

а вместо W — новую переменную

$$W_1 = W + (\alpha_0 - x_n) \frac{\partial W}{\partial x_n},$$

которая рассматривается как функция от $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ и α', причем α_0 обозначает произвольную постоянную. При помощи уравнений

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \ldots \frac{\partial W_1}{\partial \xi_{n-1}} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}}$$

выражение (2) преобразуется теперь так:

$$\sum \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \sum \frac{1}{m_s} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi_s}\right)^2 + \frac{1}{m_n} \left(\alpha' - \sum \frac{\partial W_1}{\partial \xi_s}\right)^2; \qquad (3)$$

если теперь правую часть (3) подставим в (1) и примем во внимание, что при дифференцировании по y_i или z_i производные от W и от W_1 равны между собой, то уравнение (1) превратится в уравнение в частных производных для W_1 и в это уравнение будет входить только сама переменная α', но не производная $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'}$. Чтобы от переменных α' и W_1 снова вернуться к x_n и W, воспользуемся уравнениями:

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = \alpha_0 - x_n, \quad W = W_1 - \alpha' \frac{\partial W_1}{\partial \alpha'}.$$

Выражение (3) можно еще больше упростить, заставив исчезнуть те члены, которые линейны относительно частных производных зависимой переменной, что достигается при помощи нового преобразования, аналогичного приведению уравнения конического сечения к его центру. Именно, положим

$$W_1 = W_2 + \sum g_s \xi_s,$$

где $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ обозначают постоянные, еще нуждающиеся в определении, так что будет

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi_s} = \frac{\partial W_2}{\partial \xi_s} + g_s;$$

тогда выражение (3) перейдет в следующее:

$$\sum \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \sum \frac{1}{m_s} \left\{\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s} + g_s\right\}^2 + \frac{1}{m_n} \left\{\alpha' - \sum g_s - \sum \frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right\}^2. \qquad (4)$$

Пусть s' есть один из зн ов s; разыскиваем в правой части уравнения (4) член, умноженный на первую степень $\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{s'}}$, и полагаем его равным нулю;

тогда получим:

$$\frac{g_{s'}}{m_{s'}} - \frac{\alpha' - \sum g_s}{m_n} = 0. \tag{5}$$

Это уравнение должно иметь место для $n-1$ значения s'. Умножая его на $m_{s'}$ и суммируя от $s'=1$ до $s'=n-1$, получим сначала значение $\sum g_s$, именно

$$\left(1 + \frac{\sum m_s}{m_n}\right) \sum g_s = \frac{\alpha' \sum m_s}{m_n},$$

откуда, вводя, как это было сделано в третьей лекции, обозначение

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum m_s + m_n,$$

получим:

$$\sum g_s = \alpha' \left(1 - \frac{m_n}{M}\right),$$

$$\alpha' - \sum g_s = \frac{\alpha'}{M} m_n.$$

Внося это выражение в (5), для $g_{s'}$ найдем простое значение:

$$g_{s'} = \frac{\alpha'}{M} m_{s'},$$

так что формула преобразования W_1 в W_2 напишется следующим образом

$$W_1 = W_2 + \frac{\alpha'}{M} \sum m_s \xi_s. \tag{6}$$

После подстановки значения g_s в (4) та часть этого выражения, которая не зависит от величин $\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}$, будет иметь вид

$$\sum \frac{1}{m_s} g_s^2 + \frac{1}{m_n} \{\alpha' - \sum g_s\}^2 = \frac{\alpha'^2}{M},$$

и мы получим:

$$\sum \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \sum \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right)^2 + \frac{1}{m_n} \left(\sum \frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right)^2 + \frac{\alpha'^2}{M}. \tag{7}$$

Если это выражение подставить в уравнение (1) и принять во внимание, что W_1 отличается от W_2 на величины, не зависящие от y_i и z_i, так что при дифференцировании по y_i или z_i равны между собою не только производные от W и W_1, но также и производные от W_1 и W_2, то уравнение (1) перейдет в уравнение в частных производных для зависимой переменной W_2. Это дифференциальное уравнение не содержит больше $3n$ независимых переменных x_i, y_i, z_i, но только $3n-1$; действительно, n переменных x заменены через $n-1$ переменных ξ, а вновь введенная величина α' должна рассматриваться как постоянная в виду того, что производная от W_2 по этой величине отсутствует. Проинтегрировав уравнение в частных производных для W_2 и определив W_1 из W_2 при помощи уравнения (6), вводим, как уже замечено выше, x_n при помощи уравнения $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = \alpha_0 - x_n$; после замены W_1

на W_2 это уравнение переходит в следующее:

$$\alpha_0 - x_n = \frac{\partial W_2}{\partial \alpha'} + \frac{1}{M} \sum m_s \xi_s.$$

Это последнее уравнение есть в то же время интеграл дифференциальных уравнений движения, которые могут быть приведены к уравнению в частных производных (1), и притом тот интеграл, который надо присоединить после нахождения интегралов, содержащих $3n-1$ переменных ξ_s, y_i и z_i, совсем подобно тому, как уравнение $\tau - t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_2}{\partial \alpha}$, при посредстве которого вводится затем t, образует в то же время последний интеграл.

Если оба преобразования

$$W = W_1 - \alpha' \frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = W_1 - \alpha' (\alpha_0 - x_n),$$

$$W_1 = W_2 + \frac{\alpha'}{M} \sum m_s \xi_s$$

соединить в одно, то получится формула

$$W_2 = W - \frac{\alpha'}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i + \alpha' \alpha_0,$$

в которой, кроме того, можно опустить член $\alpha' \alpha_0$ благодаря связанной с W произвольной постоянной, так как само W не входит в уравнение (1).

Так же как этим преобразованием n переменных x_i уравнения в частных производных (1) были приведены к $n-1$ переменным $\xi_s = x_s - x_n$, мы можем двумя новыми преобразованиями того же вида привести $2n$ переменных y_i и z_i к $2(n-1)$ переменным $\eta_s = y_s - y_n$ и $\zeta_s = z_s - z_n$ и, соединив все преобразования в одно, получить следующую теорему:

В случае свободной системы n материальных точек, для которой дифференциальные уравнения движения могут быть приведены к уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial x_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial y_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial z_i} \right]^2 \right\} = U - \alpha, \tag{1}$$

полагаем:

$$\xi_1 = x_1 - x_n, \quad \xi_2 = x_2 - x_n, \quad \ldots \quad \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n,$$
$$\eta_1 = y_1 - y_n, \quad \eta_2 = y_2 - y_n, \quad \ldots \quad \eta_{n-1} = y_{n-1} - y_n,$$
$$\zeta_1 = z_1 - z_n, \quad \zeta_2 = z_2 - z_n, \quad \ldots \quad \zeta_{n-1} = z_{n-1} - z_n$$

и вводим вместо W новую зависимую переменную

$$\Omega = W - \frac{\alpha'}{M} \sum m_i x_i - \frac{\beta'}{M} \sum m_i y_i - \frac{\gamma'}{M} \sum m_i z_i;$$

тогда уравнение в частных производных (1) *превращается в следующее:*

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_s} \left\{ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_s} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2m_n} \left\{ \left(\sum \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_s} \right)^2 + \left(\sum \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_s} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sum \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_s} \right)^2 \right\} = U - \beta, \tag{8}$$

где

$$\beta = \alpha + \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2M}.$$

После интегрирования этого уравнения в частных производных для Ω вводятся переменные x_n, y_n, z_n посредством уравнений

$$\alpha_0 - x_n = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha'} + \frac{1}{M} \sum m_s \xi_s, \quad \beta_0 - y_n = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta'} + \frac{1}{M} \sum m_s \eta_s,$$

$$\gamma_0 - z_n = \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma'} + \frac{1}{M} \sum m_s \zeta_s,$$

и наконец определяется переменная t из уравнения

$$\tau - t = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Но, так как четыре постоянные α', β', γ' и α соединились в одну постоянную β, мы имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha'} = \frac{\alpha'}{M} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta'} = \frac{\beta'}{M} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma'} = \frac{\gamma'}{M} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta},$$

и поэтому предыдущие четыре уравнения переходят в следующие:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \tau - t,$$

$$\alpha_0 - x_n = \frac{\alpha'}{M} (\tau - t) + \frac{1}{M} \sum m_s \xi_s,$$

$$\beta_0 - y_n = \frac{\beta'}{M} (\tau - t) + \frac{1}{M} \sum m_s \eta_s,$$

$$\gamma_0 - z_n = \frac{\gamma'}{M} (\tau - t) + \frac{1}{M} \sum m_s \zeta_s.$$

Последние три формулы, если мы их приведем к виду

$$\alpha_0 + \frac{\alpha'}{M} (t - \tau) = x_n + \frac{1}{M} \sum m_s \xi_s = \frac{1}{M} \sum m_i x_i,$$

$$\beta_0 + \frac{\beta'}{M} (t - \tau) = y_n + \frac{1}{M} \sum m_s \eta_s = \frac{1}{M} \sum m_i y_i,$$

$$\gamma_0 + \frac{\gamma'}{M} (t - \tau) = z_n + \frac{1}{M} \sum m_s \zeta_s = \frac{1}{M} \sum m_i z_i,$$

согласуются с данными в третьей лекции [стр. 17 формула (3)] формулами для прямолинейного движения центра тяжести, так как величины в правой части являются не чем иным, как координатами центра тяжести.

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ ВОКРУГ СОЛНЦА. РЕШЕНИЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

Дальнейшим общим рассуждениям будет предшествовать разбор некоторых примеров по методу Гамильтона. Первым примером послужит движение планеты вокруг солнца.

В случае свободной системы n материальных точек уравнение в частных производных, к которому сводятся дифференциальные уравнения движения (см. стр. 147), будет следующее:

$$T=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z_i}\right)^2\right\}=U-\alpha.$$

Для движения планеты, имеющей гелиоцентрические координаты x, y, z, сумма сводится к одному члену; далее мы положим массу планеты равной 1 и обозначим силу притяжения солнца на расстоянии, равном единице, через k^2; тогда силовой функцией будет выражение

$$U=\frac{k^2}{r},\quad \text{где } r^2=x^2+y^2+z^2,$$

и мы имеем:

$$T=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}=\frac{k^2}{r}-\alpha. \tag{1}$$

Так как в правую часть этого уравнения входит радиус вектор, то целесообразно вместо прямоугольных координат x, y, z ввести полярные координаты по формулам

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\varphi\sin\psi.$$

Тогда половина живой силы будет

$$T=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=\frac{1}{2}(r'^2+r^2\varphi'^2+r^2\sin^2\varphi\psi'^2),$$

так что

$$\frac{\partial T}{\partial r'}=r',\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'}=r^2\varphi',\quad \frac{\partial T}{\partial \psi'}=r^2\sin^2\varphi\psi'.$$

Эти величины представляют собой прежние величины p, следовательно их надо положить равными $\frac{\partial W}{\partial r}$, $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial W}{\partial \psi}$; поэтому имеем

$$r'=\frac{\partial W}{\partial r},\quad \varphi'=\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \varphi},\quad \psi'=\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial W}{\partial \psi},$$

откуда получим

$$T=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}.$$

Уравнение в частных производных (1) превращается поэтому для полярных координат в следующее:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\frac{k^2}{r}-\alpha. \tag{2}$$

Это уравнение мы проинтегрируем таким путем, что разбиваем его на несколько уравнений, каждое из которых содержит только одну независимую переменную. Если мы один только первый член левой части положим равным правой части, то получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2=\frac{k^2}{r}-\alpha;$$

это дифференциальное уравнение содержит только одну независимую переменную r, и тогда остается уравнение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2=0,$$

которое больше не содержит r. Это разбиение можно проделать в несколько более общей форме, прибавляя и отнимая в правой части уравнения (2) член $\frac{\beta}{r^2}$ и после этого разлагая уравнение (2) на два следующих уравнения:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2=\frac{k^2}{r}-\alpha-\frac{\beta}{r^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta.$$

Интеграл первого уравнения будет:

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+F(\varphi,\ \psi);$$

подставляя это значение во второе уравнение, получим для $F(\varphi, \psi)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta.$$

Это уравнение в частных производных можно снова разделить на два уравнения, каждое из которых содержит только одну независимую переменную. В самом деле, в правой части снова прибавим и вычтем $\frac{\gamma}{\sin^2\varphi}$ и разложим уравнение на два таких:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2=\beta-\frac{\gamma}{\sin^2\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2=\gamma.$$

Интеграл первого уравнения будет

$$F(\varphi,\ \psi)=\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+f(\psi),$$

и, вследствие второго уравнения, функция $f(\psi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2=\gamma,$$

т. е.

$$f(\psi)=\sqrt{2\gamma}\cdot\psi;$$

таким образом

$$F(\varphi,\ \psi)=\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\cdot\psi$$

и, окончательно,

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\cdot\psi. \qquad (3)$$

Это есть полное решение дифференциального уравнения (2), так как оно содержит необходимое число произвольных постоянных. Таким образом получаем интегральные уравнения движения в форме

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\alpha'-t, \qquad \frac{\partial W}{\partial\beta}=\beta', \qquad \frac{\partial W}{\partial\gamma}=\gamma',$$

где α' есть постоянная, раньше обозначенная через τ. Выполнив дифференцирование, получим:

$$\left.\begin{aligned}
t-\alpha'&=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}},\\
\beta'&=-\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}},\\
\gamma'&=-\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\,\psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Следует заметить, что метод, посредством которого мы проинтегрировали уравнение (2), может быть распространен на любое число переменных. Это основывается на следующем. Если имеются n переменных $x_1,\ x_2,\dots x_n$, то полагаем

$$\begin{aligned}
x_1&=r\cos\varphi_1,\\
x_2&=r\sin\varphi_1\,\cos\varphi_2,\\
x_3&=r\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\cos\varphi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1}&=r\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\sin\varphi_3\dots\sin\varphi_{n-2}\,\cos\varphi_{n-1},\\
x_n&=r\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\sin\varphi_3\dots\sin\varphi_{n-2}\,\sin\varphi_{n-1};
\end{aligned}$$

тогда

$$dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2=dr^2+r^2d\varphi_1^2+r^2\sin^2\varphi_1 d\varphi_2^2+$$
$$+r^2\sin^2\varphi_1\,\sin^2\varphi_2 d\varphi_3^2+\dots+r^2\sin^2\varphi_1\,\sin^2\varphi_2\dots\sin^2\varphi_{n-2}\,d\varphi^2_{n-1}.$$

Поэтому вышеприведенный метод может быть применен без дальнейших рассуждений, если правая часть уравнения в частных производных может быть представлена в форме:

$$f(r)+\frac{1}{r^2}f_1(\varphi_1)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi_1}f_2(\varphi_2)+\dots+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi_1\,\sin^2\varphi_2\dots\sin^2\varphi_{n-2}}f_{n-1}(\varphi_{n-1}).$$

Произвольные постоянные β, γ, входящие в интегральные уравнения (4), имеют замечательные свойства, которые делают очень важным их введение в задачу возмущения. Поэтому интересно исследовать геометрическое значение этих постоянных. Это значение получится следующим образом.

Приравняв нулю выражение, стоящее под знаком корня в интегралах, взятых по r, получим уравнение второй степени относительно r; корни этого уравнения представляют наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать радиус-вектор. Корни уравнения

$$\alpha r^2 - k^2 r + \beta = 0$$

будут таким образом $a(1+e)$ и $a(1-e)$, где a есть большая полуось, а e — эксцентриситет орбиты планеты. Это дает уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k^2}{\alpha} = 2a, \quad \frac{\beta}{\alpha} = a^2(1-e^2), \\ &\text{так что} \\ &\alpha = \frac{k^2}{2a}, \quad \beta = \frac{k^2}{2} a(1-e^2) = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{p}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где p есть параметр.

Если положить выражение, стоящее под знаком квадратного корня в интегралах, взятых по φ, равным нулю, то получится наибольшее или наименьшее значение для $\sin\varphi$, именно $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$. Но $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, где x обозначает расстояние планеты от эклиптики (плоскости y, z), и следовательно $\cos\varphi$ может уменьшаться до нуля; поэтому для $\cos\varphi$ не существует минимума, а только максимум, и это имеет место, когда $\varphi = 90° - J$, где J обозначает наклон орбиты планеты к эклиптике. Следовательно этому значению соответствует минимальное значение $\sin\varphi$, равное $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, т. е. будем иметь:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \sin(90° - J) = \cos J, \tag{6}$$

$$\sqrt{\gamma} = \cos J \sqrt{\beta} = \frac{k}{2} \cos J \sqrt{p}. \tag{7}$$

Чтобы определить геометрическое значение постоянных α', β', γ', надо сначала точнее установить границы интегралов, входящих в (4). Именно, за нижнюю границу одного из этих интегралов можно взять либо какое-нибудь данное числовое значение, либо такое значение, которое обращает в нуль квадратный корень, стоящий под знаком интеграла. При последнем предположении, которое мы примем в дальнейшем, границы зависят от произвольных постоянных α, β, γ, и так как интегральные уравнения (4) получились из уравнения (3) дифференцированием по этим постоянным, то можно было бы думать, что к уравнениям (4) должны присоединиться новые члены, которые происходят от границ. Но, по известным правилам дифференцирования, присоединяющиеся члены умножаются на те значения, которые принимают для нижних границ интегралов функции, стоящие в уравнении (3) под знаком интегралов, а так как эти значения обращаются в нуль, то уравнения (4) остаются без изменения.

При этих предположениях мы принимаем за нижнюю границу интеграла, взятого по r и входящего в первое уравнение (4), значение $a(1-e)$, которое r принимает в перигелии. Если тогда верхняя граница падает на то же значение r, то первое уравнение (4) дает $t - \alpha' = 0$, т. е.

$$\alpha' = \text{времени прохождения через перигелий.} \tag{8}$$

Чтобы найти значение β', определим сначала значение взятого по φ и входящего во второе уравнение (4) интеграла

$$\Phi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}} = \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2\beta - 2\gamma - 2\beta\cos^2\varphi}},$$

приняв за его нижнюю границу $\varphi = 90° - J$.

При подстановке

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}\cos\eta,$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}\sin\eta\, d\eta$$

рассматриваемый интеграл перейдет в

$$\Phi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}\int \frac{\sin\eta d\eta}{\sqrt{2(\beta-\gamma)(1-\cos^2\eta)}},$$

т. е. в

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\int d\eta.$$

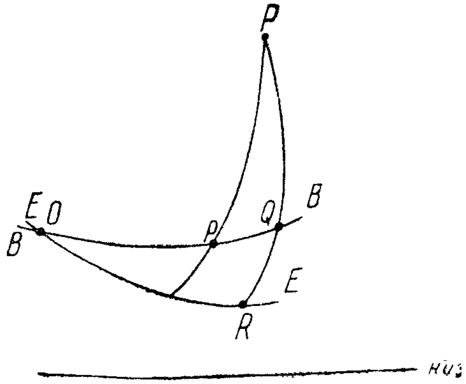


Рис. 4.

Для нижней границы $\varphi = 90° - J$ получим, согласно уравнению (6), $\sin\varphi = \cos J = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ и следовательно $\cos\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}$; поэтому $\cos\eta = 1$, $\sin\eta = 0$. На основании этого интеграл, взятый по η, надо брать от нижней границы $\eta = 0$, и тогда получится

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\eta,$$

так что второе уравнение (4) перейдет в следующее:

$$\beta' = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\eta.$$

Из соотношения, имеющего место между φ и η, можно определить геометрическое значение η, потому что φ есть гипотенуза прямоугольного сферического треугольника, катетами которого являются η и $90° - J$.

Пусть теперь EE есть эклиптика, P — ее полюс, BB — плоскость орбиты планеты, O — восходящий узел: через P, перпендикулярно к BB, проводим большой круг PQ, встречающий EE в R; тогда будет $QR = J$ и следовательно $PQ = 90° - J$. Если далее радиус вектор, проведенный к планете из центра шара — солнца, встречает поверхность шара в p, то $pP = \varphi$ и отсюда следует, что $\cos\varphi = \sin J\cos(pQ)$, т. е.

$$\eta = pQ = 90° - Op.$$

Op есть удаление планеты от восходящего узла O, и мы обозначим это расстояние через ζ. Тогда имеем:

$$\eta = 90° - \zeta$$

$$\beta' = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(90° - \zeta).$$

Чтобы определить β', нужно теперь только взять момент времени, в который планета проходит через перигелий; тогда интеграл, взятый по r, будет равен нулю, и мы получим:

$$\beta' = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \text{ (90° — удаление перигелия от восходящего узла).} \qquad (9)$$

Наконец, γ' получится из третьего уравнения (4). Для $\varphi = 90° - J$, т. е. когда радиус вектор планеты встречает шар в Q, интеграл, взятый по φ, равен нулю, и мы получим:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \psi',$$

где ψ' есть значение угла ψ, соответствующее точке Q. Так как теперь $\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{y}$, то ψ' обозначает угол, который ось y образует с плоскостью PQR, т. е., если ось y проходит через точку равноденствия V, то $\psi' = VR = VO + OR$ равно долготе восходящего узла $+ 90°$. Таким образом имеем:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \text{ (90° + долгота восходящего узла).} \qquad (10)$$

Таким образом определены все постоянные, входящие в уравнение (4).

При интегрировании уравнения в частных производных (2) мы могли бы также воспользоваться тем обстоятельством, что в (2) входит не сама ψ, а только $\frac{\partial W}{\partial \psi}$. Преобразование

$$W = W_1 + \varepsilon\psi, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi} = \varepsilon,$$

примененное на основании этого, привело бы нас к уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r} - \alpha - \frac{\varepsilon^2}{2r^2\sin^2\varphi},$$

содержащему только две независимые переменные. Но его интегрирование потребовало бы выкладок, по существу не отличающихся от выше примененных.

ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

РЕШЕНИЕ ТОЙ ЖЕ ЗАДАЧИ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ РАССТОЯНИЙ ПЛАНЕТЫ ОТ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК.

Между двумя радиусами-векторами орбиты планеты и хордой, соединяющей их конечные точки, существуют замечательные соотношения, которые получатся, если исходить из обыкновенных дифференциальных уравнений эллиптического движения, только путем сложных выкладок. Мы выведем эти соотношения без труда из уравнения в частных производных; при этом мы должны только сделать гипотезу, что W может быть выражено через гелиоцентрический радиус вектор r и через удаление ρ планеты от некоторой другой точки M; хотя справедливость этой гипотезы не видна сразу, a priori, [1] но мы убедимся в ней при дальнейших вычислениях.

Пусть координаты точки M будут a, b, c, так что

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2.$$

При сделанной нами гипотезе, что W может быть выражено через r и ρ, имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{x-a}{\rho},$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{y-b}{\rho},$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{z}{r}+\frac{\partial W}{\partial \rho}\frac{z-c}{\rho}.$$

Эти выражения надо подставить в уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=\frac{2k^2}{r}-2\alpha, \tag{1}$$

и тогда его левая часть превратится в

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2+\{2x(x-a)+2y(y-b)+2z(z-c)\}\frac{1}{r\rho}\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial W}{\partial \rho}.$$

Выражение, стоящее в скобках, равно $r^2+\rho^2-r_0^2$, где

$$r_0^2=a^2+b^2+c^2,$$

так что уравнение (1) переходит в уравнение:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2+\frac{r^2+\rho^2-r_0^2}{r\rho}\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial W}{\partial \rho}=\frac{2k^2}{r}-2\alpha.$$

[1] Для доказательства требуется следствие, вытекающее из теорем площадей, что движение планеты происходит в одной плоскости, и то известное обстоятельство, что для точки, перемещающейся по плоскости, оба ее расстояния от двух неподвижных точек могут быть рассматриваемы как определяющее ее положение величины.

От произведения обеих частных производных можно освободиться, введя вместо r и ρ их сумму и разность:

$$\sigma = r + \rho; \quad \sigma' = r - \rho,$$

так что имеют место равенства

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial W}{\partial \sigma'}, \quad \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial W}{\partial \sigma'};$$

тогда получится

$$2\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 + \frac{r^2 + \rho^2 - r_0^2}{r\rho}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2\right\} = \frac{2k^2}{r} - 2\alpha.$$

После умножения на $r\rho$ будем иметь:

$$\{(r + \rho)^2 - r_0^2\}\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - \{(r - \rho)^2 - r_0^2\}\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = 2\rho\,(k^2 - \alpha r),$$

откуда, если подставить вместо r, ρ их значения

$$r = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma'), \quad \rho = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma'),$$

получится окончательно:

$$(\sigma^2 - r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - (\sigma'^2 - r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2(\sigma - \sigma') - \frac{1}{2}\alpha(\sigma^2 - \sigma'^2). \quad (2)$$

Это уравнение в частных производных можно интегрировать уже примененным в предыдущей лекции способом, при помощи разложения на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых одно содержит только σ и $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$, а другое — только σ' и $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$. Одновременно прибавляя и вычитая в правой части произвольную постоянную β, получаем оба дифференциальных уравнения

$$(\sigma^2 - r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 + k^2\sigma + \beta,$$

$$(\sigma'^2 - r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = -\frac{1}{2}\alpha\sigma' + k^2\sigma' + \beta,$$

а отсюда получается для W значение:

$$W = \pm\int d\sigma\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 + k^2\sigma + \beta}{\sigma^2 - r_0^2}} \pm \int d\sigma'\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2 + k^2\sigma' + \beta}{\sigma'^2 - r_0^2}}.$$

Знаки обоих корней или, что то же, интегралов, произвольны и независимы друг от друга. Таким образом за W можно брать как сумму, так и разность обоих интегралов; при обоих этих предположениях получатся правильные интегральные уравнения, и основанием для выбора того или другого выражения может служить только бо́льшая или меньшая простота получаемых формул. Решим взять разность и положим для сокращения

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta}{s^2 - r_0^2}. \quad (3)$$

тогда, как решение уравнения (2), мы получим выражение

$$W = \int d\sigma \sqrt{F(\sigma)} - \int d\sigma' \sqrt{F(\sigma')}, \tag{4}$$

которому мы можем также придать форму

$$W = \int_{\sigma'}^{\sigma} ds \sqrt{F(s)}. \tag{4*}$$

Отсюда следует например формула для введения времени в эллиптическое движение планеты:

$$t - \alpha' = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{4}\int \frac{\sigma^2\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 - r_0^2)\left(-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 + k^2\sigma + \beta\right)}} -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{\sigma'^2\, d\sigma'}{\sqrt{(\sigma^2 - r_0^2)\left(-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2 + k^2\sigma' + \beta\right)}},$$

правая часть которой вообще состоит из эллиптических интегралов. Но так как время в координатах, как известно, выражается через дуги круга, то отсюда для эллиптических интегралов получаются следствия, ведущие к основной теореме сложения.

Выражение (4) есть полное решение уравнения в частных производных (2), так как к нему можно, кроме содержащейся в нем произвольной постоянной β, присоединить аддитивно еще вторую постоянную C. Но выражение (4) есть также полное решение уравнения в частных производных (1) так как по отношению к этому уравнению постоянными величинами являются не только β и C, но также и a, b, c, вследствие того, что они не встречаются в (1), но в то же время входят в выражение (4). Выражение (4), рассматриваемое как решение уравнения (1), содержит постоянных больше, чем это нужно, т. е. в него входят лишние постоянные. Если мы хотим применить подобные полные решения уравнения в частных производных, содержащие излишние постоянные, к интегрированию связанной с этим уравнением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то, хотя мы еще можем приравнять производные, взятые по всем постоянным, новым произвольным постоянным, но эти новые постоянные не будут больше независимы друг от друга. С другой стороны можно свободно распоряжаться излишними произвольными постоянными, как это мы найдем более выгодным: в данном случае воспользуемся ими для того, чтобы эллиптический интеграл $\int ds \sqrt{F(s)}$, образующий выражение (4*) для W, превратился в круговой. То же превращение произойдет тогда также и с выведенными отсюда эллиптическими интегралами, входящими в частные производные, взятые от W по постоянным, содержащимся в $F(s)$.

Это приведение интеграла $\int ds \sqrt{F(s)}$ к специальному виду может быть произведено двумя способами. Первый состоит в том, что числитель $F(s)$, т. е. $-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta$, делается полным квадратом, второй — в том, что из этого числителя выносится делитель $s - r_0$ общий со знаменателем $s^2 - r_0^2$ функции $F(s)$.

Мы выберем второй способ и притом по следующей причине. Если, не придавая постоянным частных значений, вывести из (4*) интегральные уравнения и между ними уравнение $a' = \frac{\partial W}{\partial a}$, которое, так как a содержится в σ, σ' и r_0, принимает форму

$$a' = \sqrt{F(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial a} - \sqrt{F(\sigma')}\frac{\partial\sigma'}{\partial a} + a\int d\sigma\frac{\sqrt{F(\sigma)}}{\sigma^2 - r_0^2} - a\int d\sigma'\frac{\sqrt{F(\sigma')}}{\sigma'^2 - r_0^2}, \quad (5)$$

то входящие сюда эллиптические интегралы нельзя брать от $x = a$, $y = b$, $z = c$, так как тогда было бы $\rho = 0$, $\sigma = \sigma' = r_0$ и интегралы обратились бы в бесконечность, вследствие входящей в них $\left(-\frac{3}{2}\right)$-ой степени выражений $\sigma^2 - r_0^2$, $\sigma'^2 - r_0^2$. Это обращение в бесконечность интеграла в выражении (5) не будет предотвращено вышеупомянутым первым способом приведения интеграла к специальному виду, но мы его избежим при втором способе. А так как именно необходимо положить $\rho = 0$ в тех формулах, которые должны быть выведены, то мы выбираем второй способ.

Если мы, таким образом, предположим, что числитель $F(s)$ обращается в нуль при $s = r_0$, то получим между β и r_0 соотношение:

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha r_0^2 - k^2 r_0. \quad (6)$$

Благодаря этому будет

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{2}\alpha(s^2 - r_0^2) + k^2(s - r_0)}{s^2 - r_0^2} = \frac{k^2}{s + r_0} - \frac{1}{2}\alpha,$$

следовательно

$$W = \int_{\sigma'}^{\sigma} ds\sqrt{\frac{k^2}{s + r_0} - \frac{1}{2}\alpha}. \quad (7)$$

Это есть то значение W, дифференцирование которого дает замечательные формулы для эллиптического движения, открытые Эйлером и Ламбертом и использованные Ольберсом и Гауссом при определении элементов орбиты.

Система первых интегральных уравнений дается формулами:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Мы уже выше выразили $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ через $\frac{\partial W}{\partial r}$ и $\frac{\partial W}{\partial \rho}$, а последние величины — через $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$. Подставляя эти соотношения одно в другое и заменяя $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$ их значениями $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma + r_0} - \frac{1}{2}\alpha}$, $-\sqrt{\frac{k^2}{\sigma' + r_0} - \frac{1}{2}\alpha}$, получаемыми из формулы (7), мы будем иметь уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{x}{r} + \frac{x-a}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma + r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{x}{r} - \frac{x-a}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma' + r_0} - \frac{1}{2}\alpha},\\
\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{y}{r} + \frac{y-b}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma + r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{y}{r} - \frac{y-b}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma' + r_0} - \frac{1}{2}\alpha},\\
\frac{dz}{dt} &= \left(\frac{z}{r} + \frac{z-c}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma + r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{z}{r} - \frac{z-c}{\rho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma' + r_0} - \frac{1}{2}\alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

справедливость которых можно проверить, возводя их в квадрат и складывая и таким путем выводя теорему живой силы, как это и должно быть.

Система интегральных уравнений, связывающих координаты, дается формулами

$$a' = \frac{\partial W}{\partial a}, \quad b' = \frac{\partial W}{\partial b}, \quad c' = \frac{\partial W}{\partial c},$$

где a', b', c' обозначают новые произвольные постоянные.

Из уравнения (7) получается:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{1}{2} k^2 \frac{a}{r_0} \int\limits_{\sigma'}^{\sigma} \frac{ds}{(s+r_0)^2 \sqrt{\frac{k^2}{s+r_0} - \frac{1}{2}\alpha}} +$$

$$+ \frac{\partial\sigma}{\partial a} \sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \frac{\partial\sigma'}{\partial a} \sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0} - \frac{1}{2}\alpha};$$

подставляя вместо $\frac{\partial\sigma}{\partial a}$, $\frac{\partial\sigma'}{\partial a}$ их значения $-\frac{x-a}{\rho}$, $+\frac{x-a}{\rho}$ и принимая во внимание, что

$$-\frac{1}{2} k^2 \int \frac{ds}{(s+r_0)^2 \sqrt{\frac{k^2}{s+r_0} - \frac{1}{2}\alpha}} = \sqrt{\frac{k^2}{s+r_0} - \frac{1}{2}\alpha},$$

находим:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left(\frac{a}{r_0} - \frac{x-a}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{a}{r_0} + \frac{x-a}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0} - \frac{1}{2}\alpha}.$$

При помощи этого значения и соответствующих значений для $\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial c}$ получаем искомые интегральные уравнения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
a' &= \left(\frac{a}{r_0} - \frac{x-a}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{a}{r_0} + \frac{x-a}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0} - \frac{1}{2}\alpha},\\
b' &= \left(\frac{b}{r_0} - \frac{y-b}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{b}{r_0} + \frac{y-b}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0} - \frac{1}{2}\alpha},\\
c' &= \left(\frac{c}{r_0} - \frac{z-c}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0} - \frac{1}{2}\alpha} - \left(\frac{c}{r_0} + \frac{z-c}{\rho}\right) \sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0} - \frac{1}{2}\alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Постоянные a', b', c' определяем, полагая $\rho = 0$, что является допустимым значением для ρ, так как, в силу специального выбора постоянных в уравнении (6), точка (a, b, c) есть точка орбиты планеты. [1]

Таким образом, если мы заставим подвижную точку (x, y, z) совпасть с неподвижной (a, b, c), то дроби $\frac{x-a}{\rho}$, $\frac{y-b}{\rho}$, $\frac{z-c}{\rho}$ примут форму

---

[1] Чтобы доказать это утверждение, необходимо вернуться к выражению (4*) для W, еще не приведенному к специальному виду. Оно является полным решением уравнения в частных производных (2), а к этому последнему сводится задача движения планеты при присоединении уравнения плоскости орбиты планеты, если решение ищется в переменных σ, σ', причем a, b, c рассматриваются не как произвольные, а как данные постоянные. Отсюда следует, что если из (4) вывести новое уравнение $\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta}$, где β' обозначает произвольную постоянную, то это уравнение, вместе с уравнением плоскости орбиты планеты, определяет орбиту. Дифференцирование по β, если для сокращения положить

$$f(s) = (s^2 - r_0^2)\left(-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta\right),$$

дает

$$2\beta' = 2\,\frac{\partial W}{\partial \beta} = \int\limits_{\sigma'}^{\sigma} \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}.$$

Это есть трансцендентная форма интеграла дифференциального уравнения

$$0 = \frac{d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}} - \frac{d\sigma'}{\sqrt{f(\sigma')}},$$

интегральное уравнение которого в алгебраическом виде, вследствие эйлеровой теоремы сложения эллиптических интегралов, получается в следующей форме, данной Лагранжем (Miscellanea Taurinensia, IV, p. 110):

$$\frac{\sqrt{f(\sigma)} + \sqrt{f(\sigma')}}{\sigma - \sigma'} = \sqrt{G^2 + k^2(\sigma + \sigma') - \frac{1}{2}\alpha(\sigma + \sigma')^2}, \tag{I}$$

где G^2 обозначает постоянную интегрирования.

Для получения условия того, чтобы точка (a, b, c) лежала на орбите планеты, т. е. чтобы можно было положить $\rho = 0$, откуда тогда следует $x = a$, $y = b$, $z = c$, $r = r_0$, $\sigma = \sigma' = r_0$, мы исследуем сначала случай, когда ρ есть бесконечно малая величина.

Пусть θ есть угол, который образует радиус-вектор r_0, направленный от солнца к точке (a, b, c), с касательной к орбите планеты в точке (a, b, c), направленной от этой точки к бесконечно близкой точке (x, y, z); тогда имеем для бесконечно малых значений ρ

$$r - r_0 = \rho\cos\theta,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \sigma - r_0 &= r - r_0 + \rho = (1 + \cos\theta)\rho, \\ \sigma' - r_0 &= r - r_0 - \rho = -(1 - \cos\theta)\rho. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Отсюда вытекает, что для бесконечно малых значений ρ обе величины $\sqrt{f(\sigma)}$ и $\sqrt{f(\sigma')}$ пропорциональны $\sqrt{\rho}$ и что, следовательно, числитель $\sqrt{f(\sigma)} + \sqrt{f(\sigma')}$ в левой части уравнения (I) пропорционален $\sqrt{\rho}$, а знаменатель $\sigma - \sigma'$ пропорционален ρ; вся дробь будет, таким образом, бесконечной, в то время как правая часть имеет конечное значение. Таким образом значение $\rho = 0$ допустимо только, когда в функцию

$$f(s) = (s^2 - r_0^2)\left(-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta\right)$$

множитель $s - r_0$, пропорциональный ρ для $s = \sigma$ и $s = \sigma'$ и для бесконечно малых значений ρ, входит еще второй раз, т. е. когда между β и r_0 имеет место вышеустановленное соотношение:

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha r_0^2 - k^2 r_0. \tag{6}$$

$\frac{0}{0}$. Их истинными значениями являются $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, если мы обозначим через ξ, η, ζ углы, образуемые касательной к орбите планеты в точке (a, b, c) с осями x, y, z. Так как, кроме того, имеем $\sigma=\sigma'=r_0$, то из уравнений (9) получатся решения:

$$a' = -2\cos\xi\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha};\quad b'=-2\cos\eta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha};$$
$$c'=-2\cos\zeta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha}. \tag{10}$$

Эти же значения с обратными знаками получатся из уравнений (8) для величин $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, если положить $\rho=0$; следовательно $-a'$, $-b'$, $-c'$ являются составляющими скорости планеты в точке (a, b, c).[1]

Теперь остается только ввести время, что производится при помощи формулы $\alpha'-t=\frac{\partial W}{\partial\alpha}$ или

$$t-\alpha'=\frac{1}{4}\int\limits_{\sigma'}^{\sigma}\frac{ds}{\sqrt{\frac{k^2}{s+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}}. \tag{11}$$

---

[1] Если мы уравнения (9) возведем в квадрат и сложим, то получим между a', b', c' соотношение

$$a'^2+b'^2+c'^2=2\left(\frac{k^2}{r_0}-\alpha\right),$$

которое представляет собою не что иное, как теорему живой силы для точки (a, b, c). Эта зависимость между величинами a, b, c подтверждает то, что было замечено выше в тексте относительно поведения решений с излишними постоянными, и показывает, что три уравнения (9) должны считаться только за два. Эти два уравнения, к которым они приводятся, можно получить следующим образом. Исключим из уравнений (9) оба содержащихся в них знака корня; тогда получим:

$$(bc'-b'c)x+(ca'-c'a)y+(ab'-a'b)z=0 \tag{III}$$

как уравнение плоскости орбиты планеты, которое удовлетворяется значениями $x=a$, $y=b$, $z=c$. Если мы далее умножим уравнения (9) по порядку на a, b, c и сложим результаты, то получим

$$\left.\begin{aligned}&-(aa'+bb'+cc')(\sigma-\sigma')=\\&=(\sigma+r_0)(\sigma'-r_0)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}+(\sigma-r_0)(\sigma'+r_0)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

как уравнение орбиты в плоскости орбиты. Легко проверить тождественность этого результата с тем, который содержится в уравнении (I) предыдущего замечания для рассматриваемого случая. Сохраняя прежнее определение для угла θ, мы имеем

$$aa'+bb'+cc'=-2r_0\cos\theta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha},$$

откуда, принимая во внимание уравнения (II), выводим, что уравнение (IV) для бесконечно малых значений ρ дает тождественный результат, в предположении, что значения корней $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$, $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$ оба приближаются к значению $\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$, взятому с тем же знаком.

Этот интеграл приводит к дугам круга; преобразовывая их в надлежащий вид, получаем формулы, данные Гауссом в theoria motus.[1] Предположение $\alpha=0$ соответствует параболическому движению; оно дает формулы, которые служат для определения элементов орбиты кометы.

В то время как уравнения от (7) до (11) имеют место для двух выходящих из фокуса радиусов векторов r, r_0 и соединяющей их хорды ρ при движении планеты по коническому сечению, более общие формулы для этого движения получатся, если не делать специального предположения (6), т. е. если точка (a, b, c) не лежит на орбите планеты. Тогда для W имеет место уравнение (4); в это уравнение, так же как и в выведенные из него интегральные уравнения, входит разность двух эллиптических интегралов, которые имеют одинаковую форму и различаются только своими аргументами σ и σ'. По теореме сложения эллиптических интегралов эта разность может быть преобразована в *один* интеграл, с новым аргументом σ'', сложенный с алгебраической и круговой или логарифмической функцией от σ и σ'. Далее, так как интегральные уравнения, как мы знаем, не содержат эллиптических интегралов, то новый аргумент σ'', зависящий алгебраически от σ и σ', должен стать равным постоянной величине. Уравнение $\sigma''=\text{const}$. является, таким образом, одним из интегральных уравнений[2] и притом уравнением орбиты, в то время как остальная алгебраическая и логарифмическая часть образует оставшуюся часть интегральных уравнений.

Общие формулы, следующие из (4), имеют еще то замечательное свойство, что они сохраняются также в том случае, когда на точку (a, b, c) действует вторая притягательная сила, если не обращать внимания на некоторую модификацию, о которой мы упомянем. Тогда a, b, c не будут больше произвольными, но будут данными постоянными; мы имеем кроме α еще только одну постоянную β и не можем ею свободно распоряжаться. Модификация, которой теперь подлежит уравнение в частных производных (2), с правою частью

$$k^2(\sigma-\sigma')-\frac{1}{2}\alpha(\sigma^2-\sigma'^2)=2r\rho\left(\frac{k^2}{r}-\alpha\right),$$

состоит в том, что к силовой функции $U=\frac{k^2}{r}$ присоединяется еще член $\frac{k'^2}{\rho}$, происходящий от притяжения к точке (a, b, c); так что правая часть превращается в

$$2r\rho\left(\frac{k^2}{r}+\frac{k'^2}{\rho}-\alpha\right)=k^2(\sigma-\sigma')+k'^2(\sigma+\sigma')-\frac{1}{2}\alpha(\sigma^2-\sigma'^2).$$

На основании этого, уравнение в частных производных (2) преобразуется в следующее:

$$(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)^2-(\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma'}\right)^2=$$
$$=(k^2+k'^2)\sigma-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2-\left\{(k^2-k'^2)\sigma'-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2\right\}.$$

Так как это уравнение можно разложить на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)^2=\beta+(k^2+k'^2)\sigma-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2;$$
$$(\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma'}\right)^2=\beta+(k^2-k'^2)\sigma'-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2,$$

[1] Ср. Crelles Journal, Bd. 17, стр. 122.

[2] Ср. относительно этого замечание на стр. 172.

то для W получается решение

$$W = \int d\sigma \sqrt{\frac{\beta + (k^2 + k'^2)\,\sigma - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2}{\sigma^2 - r_0^2}} +$$

$$+ \int d\sigma' \sqrt{\frac{\beta + (k^2 - k'^2)\,\sigma' - \frac{1}{2}\alpha\sigma'^2}{\sigma'^2 - r_0^2}},$$

в котором оба эллиптических интеграла отличаются уже не только аргументом, но также и формой. Для задачи притяжения к двум неподвижным центрам в пространстве заключающееся здесь число постоянных недостаточно. Наоборот, для задачи на плоскости (а к ней можно свести задачу в пространстве) выше полученное значение W является полным решением $\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta'$ дает путь точки, $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha' - t$ дает время.

ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ.

Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны итти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена.

Я сообщил об одной такой подстановке берлинской академии в одной заметке, также напечатанной в Crelles Journal,[1] и привел ряд задач, в особенности из механики, в которых она применяется. Это применение основывается главным образом на том, что выражение $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$ в новых координатах принимает также очень простой вид. Мы рассмотрим потом по очереди эти задачи, к которым принадлежит попутно разобранное в прошлой лекции притяжение к двум неподвижным центрам, начнем же с того, что установим упомянутую замечательную подстановку и притом, для общности, сразу для любого числа переменных.

Пусть предложено уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n+\lambda} = 1. \tag{1}$$

Пусть величины a_1, a_2, ... a_n расположены по их величине так, что

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n,$$

где знак $<$ надо понимать так, что разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$ должны быть положительными числами. Числители все положительны, на что указывает то обстоятельство, что для них поставлены квадраты. Умножим уравнение (1) на произведение $(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)$; тогда получим уравнение n-ой степени относительно λ, корни которого обозначим через λ_1, λ_2, ... λ_n. Легко доказать, что все эти n корней вещественны. В самом деле, заставим λ пробегать все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и исследуем, какие значения при этом принимает левая часть уравнения (1), которую мы обозначим через L. Для $\lambda = -\infty$ будет $L = 0$; когда λ растет, L становится отрицательным и пробегает все отрицательные значения, пока не сделается бесконечным при $\lambda = -a_n$. Так как a_n есть наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, то λ достигает сначала значения $-a_n$, т. е. $a_n + \lambda$ есть первый знаменатель, обращающийся в нуль. До того как λ достигнет значения $-a_n$ выражение $a_n + \lambda$ отрицательно и когда $a_n + \lambda$ приближается к нулю, оказывается

[1] Bd XIX, стр. 309.

$\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}=-\infty$. Когда λ растет дальше, $a_n+\lambda$ становится положительным, $\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}$ делает поэтому скачок от $-\infty$ до $+\infty$, и так как остальные дроби конечны и притом отрицательны, то всё, что было показано для $\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}$, применимо также к L. Если теперь λ растет дальше и приближается к $-a_{n-1}$, то L будет равно $-\infty$; таким образом L пробежало все вещественные значения при изменении λ от $\lambda=-a_n$ до $\lambda=-a_{n-1}$, следовательно в этом интервале должен лежать по крайней мере один корень уравнения и притом только один, так как L от $\lambda=-a_n$ до $\lambda=-a_{n-1}$ непрерывно убывает. При $\lambda=-a_{n-1}$ величина L делает снова скачок от $-\infty$ до $+\infty$, и то же самое имеет место для дальнейшего продвижения, так что в каждом из интервалов от $-a_n$ до $-a_{n-1}$, от $-a_{n-1}$ до $-a_{n-2}$, ... от $-a_3$ до $-a_2$, от $-a_2$ до $-a_1$ лежит один и только один корень уравнения. Если теперь λ только что перешло значение $-a_1$, то $L=+\infty$, и в то время как λ, начиная отсюда, растет дальше до $+\infty$, L убывает до 0. В этом интервале от $-a_1$ до $+\infty$ должен таким образом также лежать один корень. Таким образом мы показали, что уравнение (1) имеет n вещественных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Мы предположим, что они расположены по величине, так что λ_1 лежит между $+\infty$ и $-a_1$, λ_2 между $-a_1$ и $-a_2$ и т. д., наконец λ_n между $-a_{n-1}$ и $-a_n$. Таким образом имеем:

$$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>\ldots>\lambda_{n-1}>\lambda_n.$$

Если эти значения λ подставить в уравнение (1), то получится следующая система тождественных равенств:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_1}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_1}=1,\\
&\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_2}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_2}=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_n}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_n}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_n}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_n}=1.
\end{aligned}\right\}\qquad (S)$$

Если мы будем рассматривать величины a как постоянные, величины же x и λ, напротив как переменные, то их взаимная зависимость будет такого рода, что в то время как величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ найдутся из величин $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ путем решения уравнения n-ой степени (1), обратно величины $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ определятся как функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ из системы линейных уравнений. Мы пришли теперь к решению системы (S), для чего мы из различных возможных способов выберем способ последовательного исключения. Прежде всего мы исключаем x_n^2 при помощи первого уравнения изо всех остальных уравнений. Например, чтобы исключить его из второго, мы должны первое уравнение, умноженное на $a_n+\lambda_1$, вычесть из второго, умноженного на $a_n+\lambda_2$, и тогда получим:

$$x_1^2\left\{\frac{a_n+\lambda_2}{a_1+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_1+\lambda_1}\right\}+\ldots+x^2_{n-1}\left\{\frac{a_n+\lambda_2}{a_{n-1}+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_{n-1}+\lambda_1}\right\}=\lambda_2-\lambda_1.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{a_n+\lambda_2}{a_1+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_1+\lambda_1}=\frac{(a_1-a_n)(\lambda_2-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_1)}$$

и отбросив во всех членах общий множитель $\lambda_2-\lambda_1$, преобразуем наше уравнение в следующее:

$$\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}\,x_1^2+$$
$$+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}\,x_2^2+\ldots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_2)}\,x^2_{n-1}=1\,.$$

Проделаем такое же исключение из первого и третьего, из первого и четвертого..., наконец из первого и n-го уравнения системы (S); тогда получим следующую систему $(n-1)$-го порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}\,x_1^2+\\
&\quad+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}\,x_2^2+\ldots+\frac{a_{n-1}\quad n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_2)}\,x^2_{n-1}=1,\\
&\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_3)}\,x_1^2+\\
&\quad+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_3)}\,x_2^2+\ldots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_3)}\,x^2_{n-1}=1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_n)}\,x_1^2+\\
&\quad+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_n)}\,x_2^2+\ldots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_n)}\,x^2_{n-1}=1.
\end{aligned}\right\}(S_1)$$

От этой первой приведенной системы $(n-1)$-го порядка можно снова тем же путем перейти ко второй приведенной системе $(n-2)$-го порядка, причем следует только заметить, что если рассматривать

$$\frac{a_1-a_n}{a_1+\lambda_1}\,x_1^2;\ \frac{a_2-a_n}{a_2+\lambda_1}\,x_2^2;\ \ldots\ \frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}+\lambda_1}\,x^2_{n-1},$$

как новые переменные, то система (S_1) будет иметь ту же форму, как система (S). Таким образом получаем вторую приведенную систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}\,x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}\,x_2^2+\ldots+\\
&\quad+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_3)}\,x^2_{n-2}=1,\\
&\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_4)}\,x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_4)}\,x_2^2+\ldots+\\
&\quad+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_4)}\,x^2_{n-2}=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_n)}\,x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_n)}\,x_2^2+\ldots+\\
&\quad+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_n)}\,x^2_{n-2}=1,
\end{aligned}\right\}(S_2)$$

и если таким же образом продолжать дальше, то придем к системе (S_{n-1}), которая содержит только одну переменную x_1^2 и состоит только из одного уравнения. Это уравнение, о форме которого можно заключить из самого процесса вычисления, будет следующим:

$$\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})\ldots(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}\,x_1^2=1;$$

таким образом, решая систему (S), получим следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}
x_1^2&=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_{n-1})(a_1+\lambda_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)},\\
x_2^2&=\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)\ldots(a_2+\lambda_{n-1})(a_2+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m^2&=\frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{n-1})(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^2&=\frac{(a_n+\lambda_1)(a_n+\lambda_2)\ldots(a_n+\lambda_{n-1})(a_n+\lambda_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Так как эти выражения равны квадратам, то они должны быть положительны, в чем также легко убедиться. Например, в выражении для x_1^2 первый множитель числителя положителен, остальные отрицательны, таким образом числитель имеет тот же знак, как $(-1)^{n-1}$; в знаменателе все $(n-1)$ множители отрицательны, значит он имеет тот же знак, как числитель; следовательно дробь положительна. То же самое будет иметь место для значений прочих величин: x_2^2, x_3^2, ... x_n^2.

Можно также испытать выражения (2), подставляя их в систему (S), и показать, что она будет выполнена тождественно. При этом следует воспользоваться вспомогательной теоремой, известной в теории разложения на простейшие дроби, по которой сумма

$$\sum_{m=1}^{m=n}\frac{a_m^s}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)},$$

при $s=1, 2, \ldots n-2$ обращается в нуль, и при $s=n-1$ равняется единице, в то время как для всякого бо́льшего значения $n-1+r$, получаемого s, она равна сумме комбинаций по r с повторениями из элементов $a_1, a_2, \ldots a_n$; следствия этой теоремы я развил в своей диссертации.[1] В системе (S) величине λ_i соответствует уравнение

$$1=\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_i}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_i}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_i}=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{a_m+\lambda_i}.$$

Для того чтобы оно удовлетворялось значениями (2) величин $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$, должно быть тождественно выполнено равенство

$$1=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{i-1})(a_m+\lambda_{i+1})\ldots(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)},\quad(3)$$

в чем на самом деле можно удостовериться при помощи только-что упомянутой теоремы, так как в числителе высшая степень a_m есть a_m^{n-1} и она имеет коэффициент 1.

---

[1] Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus. Berlini, 1825. (Полное собрание сочинений, т. III, стр. 3 и следующие.)

Величины $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$, определенные формулами (2), удовлетворяют еще другим уравнениям, которые можно сразу вывести при помощи указанной теоремы. В самом деле, разделим величины x_m^2 не только на $a_m+\lambda_i$, но на произведение множителей $a_m+\lambda_i$, $a_m+\lambda_k$, где λ_i, λ_k обозначают два различных корня уравнения (1); тогда получим сумму, которая отличается от правой части уравнения (3) только тем, что числитель по отношению к a_m будет не $(n-1)$-ой степени, а только $(n-2)$-ой. Поэтому сумма будет равна нулю, и мы имеем уравнение:

$$\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)(a_1+\lambda_k)}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)(a_2+\lambda_k)}+\ldots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)(a_n+\lambda_k)}=0. \tag{4}$$

Исследуем, что будет с левой частью уравнения (4), если λ_i, λ_k не обозначают больше различных корней, но представляют один и тот же корень уравнения (1).

Итак, спрашивается, какое значение получит выражение

$$M_i=\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)^2}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)^2}, \tag{5}$$

когда оно будет представлено только через λ. Подставляя значения (2) на место x^2, получим

$$M_i=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{i-1})(a_m+\lambda_{i+1})\ldots(a_m+\lambda_n)}{(a_m+\lambda_i)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}.$$

Числитель дроби, стоящей под знаком суммы, есть функция $(n-1)$-ой степени от a_m. Полагаем в нем вместо каждого $a_m+\lambda_s$ выражение $a_m+\lambda_i+$ $+\lambda_s-\lambda_i$, разлагаем после этого числитель по степеням $a_m+\lambda_i$; тогда член, свободный от $a_m+\lambda_i$, будет:

$$(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_2-\lambda_i)\ldots(\lambda_{i-1}-\lambda_i)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\ldots(\lambda_n-\lambda_i).$$

Все остальные члены разложения, взятые вместе и разделенные на множитель $a_m+\lambda_i$, входящий в знаменатель, образуют функцию $(n-2)$-ой степени от a_m и поэтому, согласно упомянутой вспомогательной теореме, при суммировании по m они выпадают. На основании этого выражение для M_i превращается в следующее:

$$M_i=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{a_m+\lambda_i}\,\frac{(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_2-\lambda_i)\ldots(\lambda_{i-1}-\lambda_i)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\ldots(\lambda_n-\lambda_i)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)};$$

но, как известно, согласно теории разложения на простейшие дроби, имеет место равенство

$$\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{a_m+\lambda_i}\,\frac{1}{(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)};$$

поэтому получим для M_i окончательно такое значение:

$$M_i=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}, \tag{6}$$

и следовательно имеет место уравнение:

$$\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)^2}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)^2}=$$
$$=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}. \tag{7}$$

Этот результат можно получить другим, несколько более легким путем. Полагаем

$$u=1-\left\{\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}\right\}, \tag{8}$$

так что уравнение $u=0$ тождественно с уравнением (1); тогда выражение M_i, определенное уравнением (5), может быть представлено при помощи функции u в форме

$$M_i=\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_i},$$

и мы сможем поэтому вывести выражение (6) для M_i из u, если предварительно заменим в правой части уравнения (8) переменные x_1^2, x_2^2, ... x_n^2 через переменные λ_1, λ_2, ... λ_n. Чтобы произвести это преобразование, умножаем u на произведение знаменателей $(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)$; тогда получим целое рациональное выражение n-го степени относительно λ, обращающееся в нуль, когда λ_n принимает значения λ_1, λ_2, ... λ_n, и имеющее коэффициентом при λ^n единицу. Таким образом имеем:

$$(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)\,u=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$

или

$$u=\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)}; \tag{8*}$$

попутно заметим, что из сопоставления этого равенства с равенством (8) можно заключить, что значения (2) величин x_1^2, x_2^2, ... x_n^2 могут быть определены как взятые с отрицательными знаками числители простейших дробей $\frac{1}{a_1+\lambda}$, $\frac{1}{a_2+\lambda}$, ... $\frac{1}{a_n+\lambda}$ в разложении дроби (8*). Дифференцируя выражение (8*) для u по λ и затем полагая $\lambda=\lambda_i$, мы получаем значение M_i:

$$M_i=\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_i}=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)},$$

совпадающее с значением (6).

Полученные результаты позволяют нам присоединить, без дальнейших вычислений, к вышеуказанной подстановке вытекающие из нее дифференциальные формулы. Если от значения x_m^2, данного в равенстве (2):

$$x_m^2=\frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{n-1})(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}$$

взять логарифм и затем продифференцировать, то получим

$$\frac{2dx_m}{x_m}=\frac{d\lambda_1}{a_m+\lambda_1}+\frac{d\lambda_2}{a_m+\lambda_2}+\ldots+\frac{d\lambda_n}{a_m+\lambda_n}.$$

Отсюда получается для суммы квадратов дифференциалов от $x_1, x_2, \ldots x_n$ следующая формула:

$$4(dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2)=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_1)^2}\,d\lambda_1^2+\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_2)^2}\,d\lambda_2^2+\ldots+$$

$$+\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_n)^2}\,d\lambda_n^2+2\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)}\,d\lambda_1 d\lambda_2+\ldots$$

Вследствие равенства (4) коэффициент при $d\lambda_1 d\lambda_2$ обращается в нуль, и точно так же уничтожаются коэффициенты при всех произведениях дифференциалов двух различных величин λ. Коэффициентами же при квадратах $d\lambda_1^2, d\lambda_2^2, \ldots d\lambda_n^2$ на основании равенства (5) являются величины $M_1, M_2, \ldots M_n$, так что мы имеем

$$4(dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2)=M_1 d\lambda_1^2+M_2 d\lambda_2^2+\ldots+M_n d\lambda_n^2, \tag{9}$$

где коэффициенты M определяются равенством (6):

$$M_i=\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}. \tag{6}$$

Если мы распространим понятие о живой силе $\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)$ свободно движущейся точки с массой 1 на n измерений и положим

$$T=\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+\ldots+x_n'^2),$$

то это выражение T можно при помощи равенства (9) представить как функцию переменных λ и их производных по t, и тогда получится

$$8T=4(x_1'^2+x_2'^2+\ldots+x_n'^2)=M_1\lambda_1'^2+M_2\lambda_2'^2+\ldots+M_n\lambda_n'^2. \tag{10}$$

Упомянутому распространению на n измерений соответствует гамильтоново уравнение в частных производных, левой частью которого является выражение:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2.$$

Оно получается из $2T$, если сделать подстановку:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'}=\frac{\partial W}{\partial x_1},\quad \frac{\partial T}{\partial x_2'}=\frac{\partial W}{\partial x_2},\ \ldots\ \frac{\partial T}{\partial x_n'}=\frac{\partial W}{\partial x_n}.$$

Если мы хотим теперь найти, во что превратится это выражение при преобразовании переменных x в переменные λ, то мы поступаем согласно девятнадцатой лекции, применяя к преобразованному выражению $2T$ равенства

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_1'}=\frac{\partial W}{\partial \lambda_1},\quad \frac{\partial T}{\partial \lambda_2'}=\frac{\partial W}{\partial \lambda_2},\ \ldots\ \frac{\partial T}{\partial \lambda_n'}=\frac{\partial W}{\partial \lambda_n}.$$

В рассматриваемом случае мы имеем на основании равенства (10)

$$4\frac{\partial T}{\partial \lambda_i'}=M_i\lambda_i'=4\frac{\partial W}{\partial \lambda_i},$$

следовательно мы должны подставить

$$\lambda_i'=\frac{4}{M_i}\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

в выражение

$$2T=\frac{1}{4}\{M_1\lambda_1'^2+M_2\lambda_2'^2+\ldots+M_n\lambda_n'^2\}$$

и таким образом получим:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2=4\left\{\frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{M_n}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_n}\right)^2\right\}, \qquad (11)$$

где для M_i надо взять выражения (6); иначе это можно написать так:

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2=4\sum\frac{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}{(\lambda_i-\lambda_1)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_i}\right)^2. \qquad (12)$$

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. КВАДРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ЕГО ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ.

Рассмотрим теперь более подробное геометрическое значение подстановки, данной в предыдущей лекции для $n=2$ и $n=3$. Для случая двух переменных мы имеем уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}=1.$$

Если рассматривать x_1 и x_2 как прямоугольные координаты, то это есть уравнение конического сечения и притом, если λ лежит в границах $-a_1$ и $+\infty$, так что оба знаменателя положительны, то это есть уравнение эллипса; если же λ лежит между $-a_1$ и $-a_2$, так что первый знаменатель отрицателен, второй положителен, то это будет гипербола. Если величина λ меняется, в то время как a_1 и a_2 остаются постоянными, то уравнение представляет систему софокусных конических сечений. Если x_1 и x_2 даны, то всегда имеются два значения λ, удовлетворяющие уравнению: одно лежит между $-a_1$ и ∞, другое между $-a_1$ и $-a_2$; иначе говоря, в системе софокусных конических сечений через данную точку всегда проходят два из них и притом это будут один эллипс и одна гипербола. Поэтому введение переменных λ_1 и λ_2 вместо x_1 и x_2 геометрически обозначает то, что мы точки на плоскости определяем помощью эллипсов и гипербол, которые через них проходят и две данные точки имеют фокусами. Если положить $\lambda_1=\text{const}$, то получатся все точки, лежащие на одном эллипсе системы софокусных конических сечений; если положить $\lambda_2=\text{const}$, то это даст все точки одной гиперболы. Обе системы софокусных эллипсов и гипербол имеют то общее с обыкновенной системой координат, что любые две кривые одной системы не пересекаются друг с другом и каждая кривая одной системы пересекает все кривые другой системы под прямым углом. В самом деле, пусть один из эллипсов и одна из гипербол пересекаются в точке (x_1, x_2); тогда имеют место соотношения

$$E=\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}=1;$$

$$H=\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2}=1;$$

тогда нормали к эллипсу и к гиперболе, построенные в точке (x_1, x_2), образуют с осями углы, косинусы которых относятся друг к другу как $\frac{\partial E}{\partial x_1}:\frac{\partial E}{\partial x_2}$ и как $\frac{\partial H}{\partial x_1}:\frac{\partial H}{\partial x_2}$. Если эти нормали перпендикулярны друг к другу, то должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial x_2}=0$$

или

$$\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}=0,$$

и так как, благодаря равенству (4) предыдущей лекции, это выражение есть тождество, то этим доказана ортогональность эллипса и гиперболы. Это обстоятельство облегчает вычисление элемента площади, так как в то время, как вообще он равен $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2}-\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2}\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1}\right)d\lambda_1\,d\lambda_2$, в рассматриваемом случае достаточно только перемножить между собой элементы дуг эллипса и гиперболы. По формуле (9) прошлой лекции учетверенный квадрат элемента дуги произвольной кривой выражается так:

$$4\,(dx_1^2+dx_2^2)=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}\,d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}\,d\lambda_2^2. \quad (1)$$

Отсюда получается элемент дуги эллипса, если положить λ_1 постоянным, следовательно $d\lambda_1=0$; элемент дуги гиперболы, если положить λ_2 постоянным, следовательно $d\lambda_2=0$. Поэтому эти элементы дуг будут равны соответственно

$$\frac{1}{2}\,d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\,d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}},$$

и элемент площади есть их произведение, т. е.

$$\frac{\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2}{\sqrt{-(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}.$$

Совершенно аналогичные рассуждения могут быть применены в случае трех переменных, т. е. для пространства. Пусть x_1, x_2, x_3 — прямоугольные координаты; тогда уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda}=1$$

при варьировании λ представляет систему софокусных поверхностей второго порядка. Теоремы относительно софокусных поверхностей второго порядка (т. е. таких, у которых главные сечения имеют общие фокусы) принадлежат к замечательнейшим теоремам аналитической геометрии; некоторые важнейшие из них я впервые опубликовал в 12 томе журнала Crell'я.[1] Шаль в своем Aperçu historique[2] указывает на них, как на новые, не упоминая о моем приоритете, но надо вспомнить, что в этом сочинении все написанные по-немецки статьи журнала Crell'я не приняты во внимание.[3]

Софокусные поверхности делятся на три системы: на систему эллипсоидов, для которой λ лежит между $-a_1$ и $+\infty$, на систему однополых гиперболоидов, для которой λ лежит между $-a_1$ и $-a_2$, на систему двуполых гиперболоидов, для которой λ лежит между $-a_2$ и $-a_3$. В самом деле, в первом случае все знаменатели $a_1+\lambda$, $a_2+\lambda$, $a_3+\lambda$ положительны, во втором случае $a_1+\lambda$ отрицателен, в то время как $a_2+\lambda$ и $a_3+\lambda$ положительны, в третьем случае $a_1+\lambda$ и $a_2+\lambda$ отрицательны, $a_3+\lambda$ положителен. Для каждой точки (x_1, x_2, x_3) имеются три значения λ_1, λ_2, λ_3 для λ,

[1] Письмо к Штейнеру, стр. 137.
[2] Примечание XXXI, стр. 384.
[3] Aperçu historique, стр. 215, примечание.

удовлетворяющие вышенаписанному уравнению, и притом λ_1 соответствует эллипсоиду, λ_2 — однополому гиперболоиду, λ_3 — двуполому гиперболоиду. Таким образом из данной системы софокусных поверхностей второго порядка через данную точку всегда проходят *один* эллипсоид, *один* однополый гиперболоид и *один* двуполый гиперболоид. Из этих трех систем каждая пересекает две другие под прямым углом. Бине первый доказал, что кривые пересечения будут в то же время линиями кривизны этих поверхностей. Шарль Дюпен в своих Développements de géometrie показал, что эта теорема всегда имеет место, если три системы поверхностей пересекаются взаимно ортогонально. В новейшее время Ляме дал интересные применения теории софокусных поверхностей к математической физике.

Что три софокусные поверхности, проходящие через заданную точку пространства, пересекаются друг с другом под прямым углом, вытекает из геометрического значения равенства (4) предыдущей лекции. Само собой разумеется, что три кривые пересечения этих поверхностей, попарно взятых, ортогональны друг к другу. Отсюда следует, что попарно взятые элементы дуги этих кривых пересечения, будучи перемножены, дают элемент площади поверхности, содержащей взятую пару элементов дуги, и что произведение всех трех элементов дуг кривых пересечения представляет элемент объема в координатной системе (λ_1, λ_2, λ_3).

Выражение для квадрата элемента дуги какой-нибудь пространственной кривой будет на основании формулы (9) предыдущей лекции иметь вид:

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}\,d\lambda_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}\,d\lambda_2^2+\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}\,d\lambda_3^2\right\}. \tag{2}$$

Если в этом выражении положить одну из величин λ_1, λ_2, λ_3 постоянной, то оно будет соответствовать случаю кривой, которая лежит на одной из софокусных поверхностей, например для постоянного λ_1 кривая лежит на эллипсоиде. Если далее положить в этом выражении две из величин λ_1, λ_2, λ_3 постоянными, то оно будет соответствовать случаю упомянутых кривых пересечения и притом тех, которые лежат на софокусном эллипсоиде, если положить постоянными λ_1 и λ_2 или λ_1 и λ_3, если же положить постоянными λ_2 и λ_3, то на пересечении двух софокусных гиперболоидов. На основании этого получаем для элементов дуг кривых пересечения на эллипсоиде выражения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\\ \text{и}\qquad&\\ &\frac{1}{2}\,d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и для элемента поверхности эллипсоида имеем:

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{4}\,d\lambda_2 d\lambda_3\sqrt{-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}.$$

Проинтегрируем этот дифференциал и интегрирование распространим на все возможные значения λ_2 и λ_3, т. е. от $\lambda_2=-a_2$ до $\lambda_2=-a_1$ и от $\lambda_3=-a_3$ до $\lambda_3=-a_2$: тогда получим восьмую часть поверхности целого эллипсоида.

Но этот двойной интеграл сам собой распадается на сумму двух произведений простых интегралов и дает для поверхности эллипсоида выражение

$$\left.\begin{aligned}&2\int_{-a_2}^{-a_1} d\lambda_2\cdot\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\times\\&\times\int_{-a_3}^{-a_2} d\lambda_3\sqrt{-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}-\\&-2\int_{-a_2}^{-a_1} d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\times\\&\times\int_{-a_3}^{-a_2} d\lambda_3\cdot\lambda_3\sqrt{-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}},\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

составленное из эллиптических интегралов. Это путь, которым Лежандр пришел к квадратуре поверхности эллипсоида.[1] Его работа имеет огромную важность в особенности потому, что при этом в первый раз были применены линии кривизны как аналитический инструмент для преобразования координат. Если возьмем в предыдущем выражении интеграл в более узких границах, то получим поверхность не целого эллипсоида, но только его части, заключенной между двумя линиями кривизны одного рода и двумя другого рода.

Чтобы получить элемент объема, надо умножить элемент поверхности эллипсоида на элемент дуги кривой пересечения, образованной обоими гиперболоидами. Таким элементом дуги является, если положить λ_2 и λ_3 постоянными, выражение

$$\frac{1}{2}\,d\lambda_1\sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}},$$

следовательно элемент объема представится так:

$$\frac{\frac{1}{8}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3}{\sqrt{-(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}.$$

Если этот дифференциал трижды проинтегрировать, притом внутри таких границ, которые не превосходят возможных значений для λ_1, λ_2, λ_3, то получится объем, ограниченный двумя софокусными эллипсоидами, двумя софокусными однополыми гиперболоидами и двумя софокусными двуполыми гиперболоидами. Тройной интеграл распадается сам собой на 6 членов, каждый из которых есть произведение трех простых интегралов.

Оба элемента дуги

$$\frac{1}{2}\,d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\quad\text{и}\quad\frac{1}{2}\,d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},$$

которые мы умножаем друг на друга при квадратуре эллипсоида, являются по теореме Бине элементами линий кривизны на эллипсоиде. Интегрирование

[1] Exercices de calcul intégral, I, стр. 185, или Traité des fonctions elliptiques, I, стр. 352.

этих элементов дает спрямление линий кривизны, и мы получаем для дуг этих линий интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} \\ \text{и} \qquad &\frac{1}{2}\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которые принадлежат к абелевым интегралам и притом к тому роду, который ближе всего подходит к эллиптическим интегралам.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ.

КРАТЧАЙШАЯ ЛИНИЯ НА ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ. ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ КАРТ.

Формулы последних двух лекций ведут очень простым путем к упомянутому уже в двадцать второй лекции (стр. 155) и до сих пор считавшемуся невыполнимым определению кратчайшей линии на трехосном эллипсоиде. Такая линия описывается материальной точкой, принужденной оставаться на поверхности эллипсоида и двигающейся только под влиянием первоначального толчка, без воздействия какой-либо внешней силы, так что в этом случае силовая функция U обращается в нуль.

Пусть x_1, x_2, x_3 обозначают прямоугольные координаты движущейся точки, отнесенные к осям эллипсоида; тогда то обстоятельство, что точка принуждена оставаться на эллипсоиде, выразится условиым уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_1}=1.$$

Дело сводится теперь к тому, чтобы представить x_1, x_2, x_3 как функции двух новых переменных так, чтобы эти выражения, будучи подставлены в условное уравнение, удовлетворяли ему тождественно. Таковыми являются найденные нами выражения для x_1^2, x_2^2, x_3^2 через λ_1, λ_2, λ_3, если в них считать λ_1 постоянною, а λ_2 и λ_3 переменными. Мы выразим живую силу через величины λ_2, λ_3, заступающие теперь место переменных, ранее обозначенных через q, и через их производные $\lambda_2'=\frac{d\lambda_2}{dt}$, $\lambda_3'=\frac{d\lambda_3}{dt}$; затем введем вместо λ_2' и λ_3' новые переменные $\mu_2=\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}$ и $\mu_3=\frac{\partial T}{\partial\lambda_3'}$, соответствующие величинам, обозначенным через p, и положим $\mu_2=\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$, $\mu_3=\frac{\partial T}{\partial\lambda_3'}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}$. Таким образом T получится выраженным через λ_2, λ_3, $\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$, $\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}$, и тогда уравнение $T+\alpha=0$, которое можно писать также в форме $T=h$, если положить $\alpha=-h$, является для этой задачи уравнением в частных производных, определяющим W как функцию от λ_2, λ_3. Если в уравнении (10) двадцать шестой лекции ограничить число переменных тремя, то для живой силы $2T$ получится формула преобразования:

$$2T=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=\frac{1}{4}M_1\lambda_1'^2+\frac{1}{4}M_2\lambda_2'^2+\frac{1}{4}M_3\lambda_3'^2,$$

где

$$M_1=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)};\quad M_2=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)};$$

$$M_3=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)};$$

но так как движение происходит на эллипсоиде, то λ_1 есть постоянная величина, $\lambda_1'=0$ и

$$2T=\frac{1}{4}M_2\lambda_2'^2+\frac{1}{4}M_3\lambda_3'^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}=\frac{1}{4}M_2\lambda_2'=\frac{\partial W}{\partial\lambda_2},\quad \frac{\partial T}{\partial\lambda_3'}=\frac{1}{4}M_3\lambda_3'=\frac{\partial W}{\partial\lambda_3},$$

$$\lambda_2'=\frac{4}{M_2}\frac{\partial W}{\partial\lambda_2},\quad \lambda_3'=\frac{4}{M_3}\frac{\partial W}{\partial\lambda_3},$$

и мы получим для $2T$ выражение

$$2T=\frac{4}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2+\frac{4}{M_3}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2.$$

На основании этого искомое уравнение в частных производвых имеет вид:

$$T=2\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2+$$
$$+2\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2=h$$

или

$$\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2-$$
$$-\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2=\frac{1}{2}h(\lambda_2-\lambda_3). \qquad (1)$$

Это уравнение в частных производных опять распадается само собою на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых каждое содержит только одну независимую переменную; при этом в правой части опять одновременно прибавляем и вычитаем произвольную постоянную. Таким образом получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=\frac{1}{2}h(\lambda_2+\beta),$$

$$\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2=\frac{1}{2}h(\lambda_3+\beta).$$

Коэффициент при $\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2$ положителен, так как из трех множителей числителя только первый отрицателен и $(\lambda_2-\lambda_1)$ также отрицательно, поэтому $\frac{1}{2}h(\lambda_2+\beta)$ должно быть положительным; напротив, коэффициент при $\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2$ отрицателен, так как оба первые множителя числителя отрицательны и знаменатель $\lambda_3-\lambda_1$ также, следовательно $\frac{1}{2}h(\lambda_3+\beta)$ должно быть отрицательным. Но постоянная h положительна, так как она равна половине живой силы, т. е. по своей природе положительной величине. Так как поэтому $\lambda_2+\beta$ должно быть положительным, а $\lambda_3+\beta$ отрицательным, то мы имеем неравенства:

$$\beta+\lambda_2>0,\quad \beta+\lambda_3<0$$
$$-\lambda_2<\beta<-\lambda_3,$$

и эти два условия совместны, так как $\lambda_2>\lambda_3$.

Мы получаем из вышенаписанных обыкновенных дифференциальных уравнений следующее полное решение уравнения в частных производных (1):

$$W=\sqrt{\frac{1}{2}h}\left\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\right.$$
$$\left.+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\right\}. \tag{2}$$

Отсюда получится для кратчайшей линии на трехосном эллипсоиде уравнение $\frac{\partial W}{\partial \beta}=\text{const}$ или

$$\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}}+$$
$$+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)(\beta+\lambda_3)}}=\text{const}. \tag{3}$$

Для времени мы имеем уравнение $\tau-t=\frac{\partial W}{\partial \alpha}=-\frac{\partial W}{\partial h}$, или, так как W зависит от h только через множитель $\sqrt{h}$ и вследствие этого $\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{1}{2h}W$, то

$$t-\tau=\frac{1}{2h}W. \tag{4}$$

Если s означает дугу кратчайшей линии, отсчитанную от точки, в которой находилась движущаяся точка в момент времени τ, то теорема живой силы дает $T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=h$; $ds=\sqrt{2h}\,dt$,

$$s=\sqrt{2h}\,(t-\tau).$$

Отсюда, сравнивая с (4), получим для дуги s равенство $s=\frac{1}{\sqrt{2h}}W$ или

$$s=\frac{1}{2}\left\{\int d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}+\right.$$
$$\left.+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\right\};$$

таким образом произведено также спрямление кратчайшей линии.

Так одним взглядом на уравнение в частных производных мы решили задачу, которая до сих пор считалась неразрешимой. Хотя применение подстановки составляет существенное требование для этого решения, но метод приведения к уравнению в частных производных также значительно облегчает дело. Действительно, когда Миндинг хотел применить опубликованную мною подстановку, он встретил на обычном пути интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения трудности, которые он по собственному признанию не мог бы преодолеть, если бы ему не был уже известен данный мною результат. [1]

При помощи этой же подстановки, давшей нам уже решение многих трудных задач, мы можем также разрешить задачу проектирования карт для трехосного эллипсоида. Из различных способов изображения кривой поверхности на плоскости, как это нужно для карт, предпочтителен тот способ

[1] Ср. Crelles Journal, т. XX, стр. 325.

проекции, при котором бесконечно малые элементы остаются подобными. Эту проекцию многосторонне изучал Ламберт в прошлом столетии, с чем можно ближе познакомиться по его математическим статьям. Заинтересованный этим, тогдашний коллега Ламберта, Лагранж предпринял исследование этого предмета и достиг полного решения для всех поверхностей вращения. Копенгагенское общество, позже назначившее премию за решение этой задачи для всех кривых поверхностей, премировало статью, присланную Гауссом. В этой последней нет никакого упоминания о работе Лагранжа, к которой оставалось только немного прибавить.

Руководящая идея при решении задачи проектирования карт следующая. Если мы соединим точку, лежащую на поверхности, с бесконечно близкими точками и то же самое проделаем с соответствующими точками на плоскости, то для того, чтобы бесконечно малые элементы были подобны, соответствующие длины должны быть пропорциональны, и обратно, если соответствующие длины пропорциональны, то бесконечно малые элементы подобны. Эту пропорциональность надо выразить аналитически.

Пусть координаты x, y, z точки на поверхности даны как функции двух величин: p и q; тогда квадрат элемента дуги какой-нибудь кривой на поверхности будет представлен выражением

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A\,dp^2 + 2B\,dp\,dq + C\,dq^2.$$

Квадрат соответствующего элемента дуги на плоскости есть

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$

где u и v обозначают прямоугольные координаты на плоскости. Для того чтобы теперь бесконечно малые длины были пропорциональны друг другу, должно быть $d\sigma^2 = m\,ds^2$, где m может быть какой-нибудь функцией от p и q. Соответствие между величинами u, v и p, q должно быть следовательно таким, чтобы имело место уравнение

$$du^2 + dv^2 = m\,(A\,dp^2 + 2B\,dp\,dq + C\,dq^2),$$

где $\sqrt{m}$ обозначает отношение подобия.

Этому дифференциальному уравнению мы можем удовлетворить следующим образом. Разбиваем выражение $A\,dp^2 + 2B\,dp\,dq + C\,dq^2$ на два линейных множителя

$$\sqrt{A}\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\,\sqrt{-1}\right)dq;$$

$$\sqrt{A}\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\,\sqrt{-1}\right)dq$$

и представляем себе m разложенным на множители $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$; тогда вышенаписанное дифференциальное уравнение может быть разбито на два следующие:

$$du + dv\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})\left\{\sqrt{A}\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq\right\},$$

$$du - dv\sqrt{-1} = (a - b\sqrt{-1})\left\{\sqrt{A}\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq\right\}.$$

Если теперь можно определить a и b так, что правые части этих уравнений станут полными дифференциалами, то после интегрирования u и v получатся как функции от p и q. Определить же интегрирующий множитель $a \pm b\sqrt{-1}$ это значит проинтегрировать дифференциальные уравнения:

$$0=\sqrt{A}\,dp+\left(\frac{B}{\sqrt{A}}+\sqrt{C-\frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq,$$

$$0=\sqrt{A}\,dp+\left(\frac{B}{\sqrt{A}}-\sqrt{C-\frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq,$$

и это интегрирование есть та задача, к решению которой мы в заключение приходим. Если $B=0$, то должны быть найдены множители $a+b\sqrt{-1}$ и $a-b\sqrt{-1}$, делающие интегрируемыми выражения

$$\sqrt{A}\,dp+\sqrt{C}\sqrt{-1}dq \text{ и } \sqrt{A}\,dp-\sqrt{C}\sqrt{-1}dq,$$

и тогда $\sqrt{a^2+b^2}$ есть отношение подобия.

Если поверхность есть трехосный эллипсоид, то, вводя величины λ_1, λ_2, λ_3, из коих λ_1 полагается постоянной, мы получим, вследствие уравнения (2) двадцать седьмой лекции, для элемента дуги какой-либо кривой, на нем лежащей, выражение:

$$ds^2=A\,d\lambda_2^2+C\,d\lambda_3^2=\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}\,d\lambda_2^2+$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}\,d\lambda_3^2,$$

и следовательно надо найти множители, которые делают интегрируемыми выражения:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\,d\lambda_2+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\sqrt{-1}\,d\lambda_3,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\,d\lambda_2-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\sqrt{-1}\,d\lambda_3.$$

Этими множителями для обоих выражений будет $\frac{2}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}}$; поэтому имеем $a=\frac{2}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}}$, $b=0$, и дифференциальные уравнения, которые дают соотношение между u, v и p, q, получатся в виде:

$$du+dv\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\,d\lambda_2+$$

$$+\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\sqrt{-1}\,d\lambda_3;$$

$$du-dv\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\,d\lambda_2-$$

$$-\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\sqrt{-1}\,d\lambda_3.$$

Отсюда следует:

$$u = \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},$$

$$v = \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}},$$

и отношение подобия есть

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}};$$

на определенную таким образом величину $\sqrt{m}$ должны умножаться длины на эллипсоиде для получения соответствующих длин на плоскости.

Формулы, которые мы нашли для кратчайшей линии на трехосном эллипсоиде, претерпевают существенное изменение в случае эллипсоида вращения. При этом надо рассматривать два случая: первый случай сплюснутого сфероида, у которого равны между собой обе большие оси, где таким образом $a_2 = a_3$, второй случай удлиненного сфероида, у которого равны между собою обе меньшие оси, где таким образом $a_2 = a_1$. Из этих двух случаев мы рассмотрим только первый, так как последний может быть рассмотрен совершенно аналогично. Поступаем при этом по известному способу, предполагая сначала a_2 и a_3 бесконечно мало отличающимися друг от друга и только в заключение заставляя их совпасть друг с другом. Итак пусть сначала

$$a_3 = a_2 + \omega,$$

где ω обозначает бесконечно-малую величину. Согласно общим рассуждениям λ_3 лежит между $-a_2$ и $-a_3$, а в рассматриваемом случае между $-a_2$ и $-(a_2+\omega)$; поэтому можно положить

$$\lambda_3 = -(a_2 + \omega \sin^2\varphi),$$

т. е.

$$a_2 + \lambda_3 = -\omega \sin^2\varphi,$$

$$a_3 + \lambda_3 = \omega - \omega\sin^2\varphi = \omega\cos^2\varphi.$$

$$d\lambda_3 = -\omega\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi.$$

Отсюда следует:

$$\frac{d\lambda_3}{\sqrt{-(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} = -2d\varphi.$$

Мы должны это подставить в уравнение кратчайшей линии, т. е. в уравнение

$$\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}} +$$

$$+\int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)(\beta+\lambda_3)}} = \text{const}. \quad (3)$$

Из множителей, стоящих в первом интеграле под знаком корня, $a_2+\lambda_2$ и $a_3+\lambda_2$ будут равны друг другу, интеграл превращается поэтому в эллиптический. Второй же переходит в следующий:

$$-2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\int d\varphi = -2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\,\varphi,$$

и уравнение (3) принимает форму:

$$\int \frac{d\lambda_2}{a_2+\lambda_2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}}-2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\,\varphi=\text{const}.$$

Выражения координат для точек поверхности трехосного эллипсоида были:

$$x_1=\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}},$$

$$x_2=\sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}};$$

в случае сплюснутого сфероида они будут иметь вид:

$$x_1=\sqrt{\frac{a_1+\lambda_1}{a_1-a_2}}\sqrt{a_1+\lambda_2},$$

$$x_2=\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{a_2-a_1}}\sqrt{a_2+\lambda_2}\sin\varphi,$$

$$x_3=\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{a_2-a_1}}\sqrt{a_2+\lambda_2}\cos\varphi.$$

Так как общие формулы для x_2 и x_3 переходят одна в другую при перестановке a_2 и a_3, то при поверхностном рассмотрении можно было бы подумать, что при $a_2=a_3$ будет также $x_2=x_3$; но, как мы видим, это никоим образом не случится. Формулы, которые имеют тогда место, будут те же, которые получатся, если координаты x_1 и $\sqrt{x_2^2+x_3^2}$ меридиана сфероида выразить через λ_1 и λ_2 при помощи подстановки, пригодной для плоскости, а для долготы на сфероиде ввести угол φ.

Для ранее рассмотренного проектирования карт при применении к сфероиду также получаются особенные формулы. Этот особенный случай проекции носит название *стереографической*; характеристическое его свойство, что гомологичные кривые на поверхности и на плоскости пересекаются под одинаковыми углами, есть только другое выражение подобия бесконечно малых элементов.

Уравнение в частных производных, интегрирование которого дало нам уравнение кратчайших линий на эллипсоиде, имело форму

$$\frac{f(\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2-f(\lambda_3)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}\right)^2}{\lambda_2-\lambda_3}=\text{const}.$$

где

$$f(\lambda)=\frac{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}{\lambda-\lambda_1}.$$

В правой части равенства стоит постоянная, потому что мы предполагаем движущуюся точку не подверженной никакой силе, кроме первоначального толчка. Мы можем поставить себе теперь вопрос — каковы должны быть силы, действующие на точку, чтобы вытекающая отсюда форма вышестоящего дифференциального уравнения допускала тот же метод интегрирования, который мы применяли до сих пор. Общая форма, к которой должна приводиться для этой цели силовая функция, будет, как легко видеть, иметь вид

$$\frac{\chi(\lambda_2)+\psi(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3},$$

так как тогда делается возможным разделение на два обыкновенных дифференциальных уравнения. Но из этой аналитической формы в общем случае нельзя вывести никакого механического значения; мы рассмотрим только один случай, который допускает такое значение, именно случай, когда силовая функция имеет форму $\lambda_2+\lambda_3$, каковое выражение допускает приведение к форме $\frac{\lambda_2^2-\lambda_3^2}{\lambda_2-\lambda_3}$ и следовательно принадлежит к рассматриваемой категории. Этот случай соответствует той механической задаче, когда точка, двигающаяся по поверхности эллипсоида, подвержена силе, притягивающей ее к центру пропорционально расстоянию этой точки от центра. В самом деле, в этом случае сила, действующая на точку в направлении радиуса-вектора r, выходящего из центра, равна kr; следовательно силовая функция будет $\frac{1}{2}kr^2=\frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. Если мы теперь вспомним общие выражения для x_1^2, x_2^2, ... x_n^2 через λ_1, λ_2, ... λ_n, данные в двадцать шестой лекции [равенство (2)], т. е. выражения

$$x_m^2=\frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}=$$

$$=\frac{a_m^n+(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)a_m^{n-1}+\ldots+\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)},$$

то из известных теорем относительно простейших дробей следует замечательная формула

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a_1+a_2+\ldots+a_n+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n.$$

Для $n=3$ будем иметь

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a_1+a_2+a_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

В рассматриваемом нами случае λ_1 есть постоянная величина, так что мы получаем для силовой функции выражение

$$\frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\frac{1}{2}k(\lambda_2+\lambda_3)+\text{const},$$

следовательно в этом случае уравнение в частных производных интегрируется с такою же легкостью, как и раньше.

Это рассмотрение можно еще расширить и предположить, что присоединенная сила не направлена более к центру эллипсоида. В только что рассмотренном случае kr была сила, действующая на точку по направлению радиуса вектора, поэтому ее составляющие по координатным осям были kx_1, kx_2, kx_3. Если мы придадим теперь координатам различные коэффициенты m_1, m_2, m_3, то интегрирование будет также еще возможным, если эти величины подчинить некоторому условию. В самом деле, если составляющие по направлению координатных осей будут m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3, то силовая функция выразится так:

$$\frac{1}{2}(m_1x_1^2+m_2x_2^2+m_3x_3^2)=\frac{1}{2}m_1\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+$$

$$+\frac{1}{2}m_2\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{1}{2}m_3\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)};$$

следовательно она может быть представлена в виде

$$A+B(\lambda_2+\lambda_3)+C\lambda_2\lambda_3$$

и поэтому будет иметь надлежащую форму, если C исчезнет, т. е. если будет иметь место уравнение:

$$\frac{m_1(a_1+\lambda_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{m_2(a_2+\lambda_1)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{m_3(a_3+\lambda_1)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=0.$$

Если значения m_1, m_2, m_3 удовлетворяют этому условному уравнению, то применим прежний метод интегрирования.

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИТЯЖЕНИЕ ТОЧКИ К ДВУМ НЕПОДВИЖНЫМ ЦЕНТРАМ.

Мы переходим теперь к движению точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами. Ограничимся сначала тем случаем, когда движение происходит в плоскости, что будет всегда иметь место, если направление начальной скорости лежит в одной плоскости с прямой, соединяющей неподвижные центры. Эту прямую возьмем за ось x_2; прямую перпендикулярную к ней, проходящую посредине между неподвижными, отстоящими друг от друга на $2f$ центрами, возьмем за ось x_1. Выразим теперь x_1 и x_2 через λ_1 и λ_2 и выберем постоянные a_1 и a_2, входящие в подстановку, так, что оба неподвижные центра попадают в фокусы софокусной системы: тогда мы придем к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2+\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}h, \quad (1)$$

где U также должно быть выражено через λ_1 и λ_2.

Пусть r и r_1 будут расстояния притягиваемой точки от обоих центров; тогда мы имеем

$$r^2=(x_2+f)^2+x_1^2, \quad r_1^2=(x_2-f)^2+x_1^2$$

или

$$r^2=x_1^2+x_2^2+f^2+2fx_2; \quad r_1^2=x_1^2+x_2^2+f^2-2fx_2.$$

По основному свойству эллипса

$$f^2=(a_2+\lambda_1)-(a_1+\lambda_1)=a_2-a_1;$$

кроме того подстановка

$$x_1=\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}{a_1-a_2}}, \quad x_2=\sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}{a_2-a_1}} \quad (2)$$

дает, как мы знаем, уравнение

$$x_1^2+x_2^2=a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2:$$

поэтому будем иметь:

$$r^2=x_1^2+x_2^2+f^2+2fx_2=2a_2+\lambda_1+\lambda_2+2\sqrt{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}=$$
$$=\{\sqrt{a_2+\lambda_1}+\sqrt{a_2+\lambda_2}\}^2,$$
$$r_1^2=x_1^2+x_2^2+f^2-2fx_2=2a_2+\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}=$$
$$=\{\sqrt{a_2+\lambda_1}-\sqrt{a_2+\lambda_2}\}^2.$$

Таким образом:

$$r=\sqrt{a_2+\lambda_1}+\sqrt{a_2+\lambda_2}; \quad r_1=\sqrt{a_2+\lambda_1}-\sqrt{a_2+\lambda_2}.$$

Если подставить эти выражения в силовую функцию

$$U=\frac{m}{r}+\frac{m_1}{r_1}=\frac{mr_1+m_1r}{rr_1}.$$

то получится

$$U=\frac{(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Если подставим это значение U в уравнение в частных производных (1) и умножим на $\lambda_1-\lambda_2$, то получим:

$$\left.\begin{aligned}(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=\\ =\frac{1}{2}h\lambda_1+\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-\\ -\left\{\frac{1}{2}h\lambda_2+\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}\right\};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и так как, введя произвольную постоянную β, можем разбить это уравнение на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2=\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1+\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}+\beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2+\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}+\beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)},$$

то получим:

$$\begin{aligned}W=\int d\lambda_1\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1+\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}+\beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}+\\ +\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2+\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}+\beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Если мы хотим теперь избавиться от иррациональности под знаком квадратного корня, то полагаем

$$\sqrt{a_2+\lambda_1}=p,\qquad \sqrt{a_2+\lambda_2}=q,$$

и получаем:

$$\begin{aligned}W=\int dp\sqrt{\frac{2(hp^2+(m+m_1)p+2\beta-ha_2)}{p^2-f^2}}+\\ +\int dq\sqrt{\frac{2(hq^2+(m-m_1)q+2\beta-ha_2)}{q^2-f^2}}.\end{aligned}$$

Из равенства (4) получатся интегральные уравнения в форме:

$$\beta'=\frac{\partial W}{\partial\beta};\quad t-\tau=\frac{\partial W}{\partial h}.$$

Лагранж в первом томе туринских мемуаров старался найти таки силы, которые можно присоединить к притяжению к двум неподвижным центрам, чтобы эйлерово решение задачи продолжало иметь место. Хотя это исследование не привело ни к какому существенному результату, тем не менее оно представляет огромный интерес и притом не только при тогдашнем состоянии науки, но и в настоящее время. Сила, которую можно присоединить согласно Лагранжу, есть притяжение, направленное к точке, лежащей посредине между обоими неподвижными центрами и пропорциональное расстоянию. Это вполне согласуется с тем, что мы нашли для кратчайшей линии на эллипсоиде. Действительно, благодаря этой силе в силовую функцию войдет член

$$\frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} k (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1 + a_2),$$

следовательно в правую часть уравнения в частных производных, т. е. в $\frac{1}{2} U (\lambda_1 - \lambda_2)$ войдет выражение $\psi(\lambda_1) - \psi(\lambda_2)$, если положить $\psi(\lambda) = \frac{1}{4} k \{\lambda^2 + (a_1 + a_2)\lambda\}$. Притом $\psi(\lambda_1)$ и $\psi(\lambda_2)$ будут тогда соответственно членами, на которые возрастут числители под знаками квадратных корней в интегралах, взятых по λ_1 и λ_2 в выражении (4) для W.

При помощи вышенаписанных формул мы решили полностью задачу притяжения точки к двум неподвижным центрам, когда движение происходит в плоскости; теперь остается только свести более общий случай к этому. Это достигается при помощи принципа площадей.

Чтобы рассмотреть задачу в ее наибольшей общности, мы предположим, что точка притягивается не двумя, а произвольным числом неподвижных центров, лежащих на одной прямой. В этом случае, и даже в более общем, когда присоединяется еще постоянная сила, параллельная той же прямой, имеет место принцип площадей по отношению к плоскости, перпендикулярной к этой прямой. Если теперь начальная скорость движущейся точки лежит в одной плоскости с этой прямой, то всё движение происходит в этой плоскости, и нет необходимости применять теорему площадей. Напротив, если начальная скорость не лежит в одной плоскости с той прямой, то точка описывает кривую двоякой кривизны. При этом очень выгодно разложить движение на два; в самом деле, предположим, что через точку и через прямую, содержащую центры, проведена плоскость; представим себе, что эта плоскость вращается вокруг прямой и кроме того точка двигается по вращающейся плоскости. Это разложение, которое возможно при всех обстоятельствах, в общем случае не дает никакого упрощения, но в рассматриваемом случае можно, благодаря принципу площадей, совершенно отделить движение точки в плоскости от вращательного движения, так что мы разыскиваем сначала движение точки по плоскости, а после того как оно найдено, получаем простой квадратурой угол вращения этой плоскости (отсчитанный от некоторого определенного ее положения). Дифференциальные уравнения движения точки по вращающейся плоскости отличаются, как мы увидим, от дифференциальных уравнений, получаемых, когда движение вообще остается плоским, только тем, что присоединяется член, пропорциональный $\frac{1}{r^3}$, где r обозначает расстояние точки от прямой, содержащей центры. Пусть эта прямая, содержащая неподвижные центры, будет ось x; представим далее уравнения движения точки, не выписывая на самом деле выражения для сил, в обычном виде формулами

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

тогда имеет место условное уравнение

$$yZ - zY = 0.$$

Это уравнение, которое говорит, что силы Y, Z так относятся друг к другу, как координаты y, z, т. е. что направление их равнодействующих проходит через ось x, равносильно принципу площадей; в самом деле, положим $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ вместо Y и Z, тогда получим:

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

а отсюда интегрированием найдем

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=\alpha.$$

Чтобы теперь отделить движение точки в плоскости, проходящей через ось x, от вращательного движения этой плоскости, мы должны положить

$$y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi,$$

так что x, r обозначают координаты точки на вращающейся плоскости, φ — угол вращения, отсчитываемый от плоскости x, y. Тогда имеем:

$$r=\sqrt{y^2+z^2};\quad \frac{dr}{dt}=\frac{y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Два последние члена, будучи соединены в одии, дают:

$$\frac{(y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда, на основании известной формулы

$$(y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

получаем:

$$\frac{\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

воспользовавшись теперь теоремой площадей, окончательно получаем выражение

$$\frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Таким образом мы имеем уравнение:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{\alpha^2}{r^3}=\frac{yY+zZ}{r}+\frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Пусть теперь R будет сила, действующая на точку в направлении, перпендикулярном оси x, т. е. равнодействующая сил Y и Z: тогда имеем

$$Y = \frac{y}{r} R, \quad Z = \frac{z}{r} R,$$

$$yY + zZ = \frac{y^2 + z^2}{r} R = rR,$$

и поэтому

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = R + \frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Таким образом мы получим оба уравнения движения точки по вращающейся плоскости в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = R + \frac{\alpha^2}{r^3}. \tag{5}$$

Так как теперь в рассматриваемом нами случае силы совершенно не зависят от угла вращения φ, то X и R зависят только от x и r. Поэтому мы можем эти оба уравнения интегрировать самостоятельно, и определив при помощи интегральных уравнений x и r как функции от t, получим из теоремы площадей угол вращения φ. Эта теорема после введения r и φ приобретает вид:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \alpha, \tag{6}$$

так что φ определится формулой

$$\varphi = \alpha \int \frac{dt}{r^2}.$$

Следовательно мы свели первоначальную систему дифференциальных уравнений шестого порядка в x, y, z, t к системе четвертого порядка в x, r, t, и так как в нее t явно не входит, то ее можно привести к системе третьего порядка, придав ей форму

$$dx : dr : dx' : dr' = x' : r' : X : \left(R + \frac{\alpha^2}{r^3}\right). \tag{7}$$

Если мы знаем два интеграла этой системы, то третий получим по принципу последнего множителя, а после этого найдем время помощью одной квадратуры. Если например все переменные x, x' и r' выражены через r, то можно еще до того, как r выражено через t, представить, при помощи равенства

$$t = \int \frac{dr}{r'},$$

φ как взятый по r интеграл

$$\varphi = \alpha \int \frac{dr}{r^2 r'}.$$

Чтобы теперь полностью решить задачу, нужно только знать два интеграла системы третьего порядка (7). Но один из этих интегралов дает теорема живой силы, которая, как известно, всегда имеет место при притяжениях к неподвижным центрам и при взаимных притяжениях. В самом деле, в уравнении

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

положим для рассматриваемого случая

$$Y = \frac{y}{r} R; \quad Z = \frac{z}{r} R;$$

$$Y\,dy + Z\,dz = R\frac{y\,dy + z\,dz}{r} = R\,dr;$$

далее имеем

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

или, так как по принципу площадей $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\alpha}{r^2}$, то

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}.$$

и следовательно получим:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} = \int (X\,dx + R\,dr) - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{r^2}:$$

это и есть интегральное уравнение системы (7).

Теперь дело сводится к тому, чтобы найти еще один интеграл; следовательно задача притяжения точки любым числом неподвижных центров, лежащих на одной прямой, причем на эту точку может кроме того действовать еще постоянная сила, параллельная той прямой, приводится к разысканию одного интегрального уравнения некоторой системы второго порядка.

Если имеются только два неподвижных центра, то мы найдем это интегральное уравнение по методу, изложенному в начале этой лекции. Координаты x и r будут те самые, которые выше обозначены через x_2 и x_1, но силовая функция уже не будет больше та же самая. Когда всё движение происходит в плоскости, то ее значение будет $\int (X\,dx + R\,dr)$; теперь же присоединяется член $-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{r^2}$ или, согласно прежнему обозначению,

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{x_1^2}.$$

Для того чтобы дифференциальное уравнение (1), после присоединения этого члена к силовой функции, можно было бы всё же интегрировать по прежнему методу, этот член должен допускать приведение к форме

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[\chi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2)],$$

и это на самом деле имеет место, так как согласно равенству (2)

$$x_1^2 = \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{a_1 - a_2},$$

и разложением на простейшие дроби получим:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{x_1^2} = \frac{1}{2}\alpha^2\,\frac{a_2 - a_1}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)} = -\frac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2 - a_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{\frac{1}{a_1 + \lambda_1} - \frac{1}{a_1 + \lambda_2}\right\}.$$

Таким образом к правой части уравнения (3) или, что то же, к $\frac{1}{2} U(\lambda_1 - \lambda_2)$ присоединяется выражение

$$-\frac{1}{4}\alpha^2(a_2-a_1)\left\{\frac{1}{a_1+\lambda_1}-\frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}=-\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_1}+\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_2},$$

и поэтому мы получим теперь следующее уравнение в частных производных:

$$(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}h\lambda_1+\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_1}-$$

$$-\left\{\frac{1}{2}h\lambda_2+\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}-\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}.$$

Из этого уравнения получится:

$$\left.\begin{aligned}W=&\int d\lambda_1\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1+\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_1}+\beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}+\\&+\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2+\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}-\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\frac{1}{a_1+\lambda_2}+\beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}},\end{aligned}\right\}(8)$$

и отсюда дифференцированием по постоянной β получится искомое второе интегральное уравнение системы (7):

$$\beta'=\frac{\partial W}{\partial\beta}. \tag{9}$$

Это есть уравнение кривой, которую описывает движущаяся точка на вращающейся плоскости. Теперь нам остается еще определить угол вращения φ; при этом нам встретится некоторое затруднение. Именно, если мы выразим дифференциал φ, который на основании уравнения (6) и в настоящих обозначениях дается формулой

$$d\varphi=\alpha\frac{dt}{x_1^2}$$

в величинах λ_1 и λ_2, то сначала не получим полного дифференциала. Действительно, если подставить в уравнение, служащее для определения времени

$$t-\tau=\frac{\partial W}{\partial h},$$

вместо W его значение (8), то дифференциал t получится в форме

$$dt=F_1(\lambda_1)\,d\lambda_1+F_2(\lambda_2)\,d\lambda_2,$$

и это выражение, будучи умножено на

$$\frac{\alpha}{x_1^2}=\frac{\alpha(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)},$$

не дает непосредственно полного дифференциала и может быть превращено в таковой только с помощью имеющего место для переменных λ_1 и λ_2 уравнения (9).

Этой трудности можно избежать, если задачу притяжения к двум неподвижным центрам полностью свести также для пространства к уравнению в частных производных, не входя в частные рассмотрения. Общий вид уравнения в частных производных для свободного движения, когда имеет место теорема живой силы, есть

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=2U+2h.$$

Если мы вместо y и z введем полярные координаты и положим

$$y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi,$$

то получим:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2=2U+2h.$$

Так как в U не входит переменная φ, то по общему, уже часто применявшемуся методу, можно положить

$$W=W_1+\alpha\varphi,$$

где W_1 — функция только от x и r, но не от φ; тогда будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W_1}{\partial x},\quad \frac{\partial W}{\partial r}=\frac{\partial W_1}{\partial r},\quad \frac{\partial W}{\partial\varphi}=\alpha,$$

и уравнение в частных производных для W превратится в следующее:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2=2U-\frac{\alpha^2}{r^2}+2h. \qquad (10)$$

Это дифференциальное уравнение совпадает в точности с тем, которое мы получили выше приведением движения в пространстве к движению по вращающейся плоскости; так как произведенное там рассмотрение показало, что от U надо отнять член $\frac{\alpha^2}{2r^2}$, то введенная теперь постоянная α в точности совпадает с ранее так обозначенной. Поэтому выше полученное выражение (8) для W удовлетворяет дифференциальному уравнению (10) для W_1, и мы определяем из него W с помощью равенства

$$W=W_1+\alpha\varphi.$$

Тогда отсюда вытекают оба интегральные уравнения

$$\beta'=\frac{\partial W}{\partial\beta}=\frac{\partial W_1}{\partial\beta};\quad \alpha'=\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha}+\varphi,$$

из которых первое то же самое, которое мы уже нашли выше, в то время как второе дает значение φ из уравнения $\alpha'-\varphi=\frac{\partial W_1}{\partial\alpha}$. Здесь на место W_1 надо подставить выражение (8) для W. Итак, оба интегральные уравнения, совокупность которых определяет кривую второго порядка, по которой двигается точка, будут следующие:

$$\beta'=\frac{\partial W}{\partial\beta}\quad\text{и}\quad \alpha'-\varphi=\frac{\partial W}{\partial\alpha},$$

где

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2} h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}} +$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2} h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}},$$

а время выразится при помощи уравнения

$$t - \tau = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

После выполнения дифференцирований мы получаем следующие готовые формулы

$$\beta' = \int \frac{\frac{1}{2} d\lambda_1}{\sqrt{a_2+\lambda_1}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}+\beta\right](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}} +$$

$$+ \int \frac{\frac{1}{2} d\lambda_2}{\sqrt{a_2+\lambda_2}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}+\beta\right](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}};$$

$$\varphi - \alpha' = \int \frac{\frac{1}{4} \alpha f^2 d\lambda_1}{(a_1+\lambda_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}+\beta\right](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}} +$$

$$+ \int \frac{\frac{1}{4} \alpha f^2 d\lambda_2}{(a_1+\lambda_2)\sqrt{a_2+\lambda_2}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}+\beta\right](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}};$$

$$t - \tau = \int \frac{\frac{1}{4} \lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{(a_2+\lambda_1)}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}+\beta\right](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}} +$$

$$+ \int \frac{\frac{1}{4} \lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{(a_2+\lambda_2)}\sqrt{\left[\frac{1}{2} h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}+\beta\right](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}}$$

Здесь можем так же, как это было сделано выше, устранить иррациональность под знаком квадратного корня, вводя вместо λ_1, λ_2, как новые переменные, величины

$$\sqrt{a_2+\lambda_1} = p, \quad \sqrt{a_2+\lambda_2} = q.$$

ТРИДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ.

Чтобы в заключение показать на особенно важном примере всю силу подстановки, разобранной в двадцать шестой лекции и давшей нам уже решение ряда механических задач, мы ее применим к теореме Абеля. Эта теорема относится к некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений и дает две различные системы ее интегральных уравнений, из которых одна выражается через трансцендентные функции, другая — чисто алгебраически. Эти две системы интегральных уравнений, так различные по своей форме, тем не менее вполне тождественны.

По нашему методу система обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к одному уравнению в частных производных первого порядка, затем ищется полное решение этого уравнения, и производные, взятые от этого решения по произвольным постоянным, дают систему интегральных уравнений. Но решение уравнения в частных производных может принимать чрезвычайно разнящиеся друг от друга формы; разыскивая эти различные формы, мы получаем различные по виду системы интегральных уравнений, которые однако должны по своему значению совпадать друг с другом. Это и есть тот путь, следуя которым мы будем доказывать теорему Абеля. Мы будем исходить из уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=2h, \tag{1}$$

соответствующего при $n=3$ простейшей механической задаче — прямолинейному равномерному движению точки в пространстве. Оно заменяет обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2}=0, \ldots \qquad \frac{d^2x_n}{dt^2}=0.$$

Если воспользоваться подстановкой, данной в двадцать шестой лекции, то получится теорема Абеля и притом в более наглядной форме, чем та, в которой она дана Абелем.

Так как в уравнение (1) сами переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ не входят, то полное решение V получим, полагая

$$V=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n. \tag{2}$$

В самом деле, тогда постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ должны только удовлетворять условию

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_{n-1}^2+\alpha_n^2=2h,$$

так что

$$\alpha_n=\sqrt{2h-\alpha_1^2-\alpha_2^2-\ldots-\alpha_{n-1}^2},$$

и поэтому V содержит, не считая постоянной, которую можно еще прибавить, $n-1$ постоянных; следовательно это есть полное решение. Как интегральные уравнения, мы получим следующие:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\alpha_1'; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\alpha_2' \ \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}=\alpha_{n-1}'; \quad \frac{\partial V}{\partial h}=t-\tau$$

или

$$x_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}x_n=\alpha_1',$$
$$x_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}x_n=\alpha_2',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}x_n=\alpha_{n-1}',$$
$$\frac{1}{\alpha_n}x_n=t-\tau,$$

или наконец, подставляя последнее уравнение в остальные,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1(t-\tau)+\alpha_1',\\ x_2 &= \alpha_2(t-\tau)+\alpha_2',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} &= \alpha_{n-1}(t-\tau)+\alpha_{n-1}',\\ x_n &= \alpha_n(t-\tau). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При $n=3$ это в самом деле будут уравнения прямолинейного движения.

Если мы теперь введем в уравнение (1) вместо переменных x переменные λ, то получим по формуле (12) двадцать шестой лекции уравнение:

$$\sum_{i=1}^{=n}\frac{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\right)^2=\frac{1}{2}h. \tag{4}$$

Здесь не видно непосредственно, каким образом в этом уравнении переменные могут быть отделены друг от друга. Но надо только, вспомнив данную в двадцать шестой лекции (стр. 179) вспомогательную теорему из теории простейших дробей, составить следующую вытекающую из нее формулу

$$\frac{1}{2}h=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\ldots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}, \tag{5}$$

в которой $c, c_1, \ldots c_{n-2}$ обозначают произвольные постоянные, и это выражение для $\frac{1}{2}h$ подставить в (4). Если удовлетворить получающемуся отсюда уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\right)^2=\\ &=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\ldots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

приравнивая друг другу соответствующие члены обеих частей, и таким образом разложить уравнение в частных производных (6) на n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\right)^2=$$
$$=c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\ldots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1},$$

где $i=1, 2, \ldots n$, то для V получится следующее полное решение:

$$V=\sum_{i=1}^{i=n}\int d\lambda_i\sqrt{\frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\ldots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}}, \tag{7}$$

а отсюда следуют интегральные уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial c}=c', \quad \frac{\partial V}{\partial c_1}=c_1', \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial c_{n-2}}=c_{n-2}', \quad \frac{\partial V}{\partial h}=t-\tau,$$

которые после введения обозначения

$$f(\lambda)=$$
$$=\left(c_1+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots+c_{n-2}\lambda^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda^{n-1}\right)(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)$$

примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
2c' &= \sum\int\frac{d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}},\\
2c_1' &= \sum\int\frac{\lambda_i\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2c_{n-2}' &= \sum\int\frac{\lambda_i^{n-2}\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}},\\
4(t-\tau) &= \sum\int\frac{\lambda_i^{n-1}\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Эти выражения являются трансцендентными интегральными уравнениями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\sum\frac{d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}}=0, \quad \sum\frac{\lambda_i\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}}=0, \quad \ldots, \quad \sum\frac{\lambda_i^{n-2}\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}}=0,\\
\sum\frac{\lambda_i^{n-1}\, d\lambda_i}{\sqrt{f(\lambda_i)}}=4dt,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

в то время как выражения (3) представляют алгебраические интегральные уравнения той же системы.

В этом алгебраическом интегрировании дифференциальных уравнений (9) и состоит теорема Абеля; притом здесь она является в форме, имеющей перед формой, данной первоначально Абелем, то преимущество, что она существенно облегчает, иначе связанные с большими затруднениями, исследования как относительно вещественности переменных, так и относительно границ, внутри которых надо их брать. Поэтому вышеприведенное доказательство теоремы Абеля дало нечто существенно новое, и если Ришело позже из самой теоремы Абеля смог вывести те же следствия, [1] то всё же данный здесь путь есть тот, который приводит к ним наиболее естественным образом.

Так как постоянные $c, c_1, \ldots c_{n-2}$ совершенно произвольны, то их надо определить так, чтобы стоящие под знаком корня выражения $f(\lambda_i)$ были положительны и вместе с этим все интегралы стали вещественными.

Из предыдущего теорема Абеля получится еще не совсем полностью; действительно, функция $f(\lambda)$ есть функция $(2n-1)$-й степени, т. е. нечетной, и поэтому необходимо особо рассмотреть другой случай, являющийся здесь как более общий, когда $f(\lambda)$ будет $2n$-й степени. Мы получим его таким образом, что в правой части уравнения в частных производных (1) к постоянной $2h$ прибавляем еще другие члены. Примененный метод интегрирования остается допустимым, если к h прибавить сумму квадратов $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, умноженную на постоянную величину k. В переменных λ это выражение принимает такую форму:

$$k(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=k(a_1+a_2+\ldots+a_n+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n),$$

и, вводя вместо h новую постоянную

$$h'=h+k(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

мы должны теперь в правую часть уравнения (4) вместо $\frac{1}{2}h$ подставить выражение

$$\frac{1}{2}h'+\frac{1}{2}k(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n).$$

Если это уравнение преобразовать при помощи вышеупомянутой вспомогательной теоремы, подобно тому, как это было сделано для уравнения (5), то окажется, что в правых частях уравнений (5) и (6) произойдет только то изменение, что под знаком суммы в числителе прибавится член

$$\frac{1}{2}k\lambda_i^n$$

и h превратится в h'. Поэтому в трансцендентных интегральных уравнениях (8) теоремы Абеля теперь на месте прежней функции $(2n-1)$-й степени $f(\lambda)$ стоит функция $2n$-й степени:

$$f(\lambda)=\left\{c+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots+c_{n-2}\lambda^{n-2}+\frac{1}{2}h'\lambda^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}k\lambda^n\right\}(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda). \qquad (10)$$

Алгебраические интегральные уравнения в этом случае будут несколько более сложными. Уравнение в частных производных, выраженное в переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=2h+2k(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \quad (11)$$

и поэтому может быть разложено на следующие уравнения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2=2kx_1^2+\beta_1;\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2=2kx_2^2+\beta_2;\ldots\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=2kx_n^2+\beta_n,$$

[1] Crelles Journal, том XXIII, стр. 354.

где

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=2h.$$

Отсюда находим

$$V=\int\sqrt{2kx_1^2+\beta_1}\,dx_1+\int\sqrt{2kx_2^2+\beta_2}\,dx_2+\ldots+\int\sqrt{2kx_n^2+\beta_n}\,dx_n.$$

Представим себе теперь, что при помощи вышенаписанного соотношения β_n выражено через h и прочие β, и обозначим взятые при этом предположении производные от V скобками; тогда обыкновенные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнению в частных производных (11), имеют следующие интегралы:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\beta_1}\right)=\beta_1';\quad\left(\frac{\partial V}{\partial\beta_2}\right)=\beta_2';\ \ldots\left(\frac{\partial V}{\partial\beta_{n-1}}\right)=\beta_{n-1}';\quad\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)=t-\tau.$$

Если же производные от V, при образовании которых не принимается во внимание соотношение, имеющее место между величинами $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\beta_n$, обозначать без скобок, то получатся равенства:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\beta_1}\right)=\frac{\partial V}{\partial\beta_1}-\frac{\partial V}{\partial\beta_n};\quad\left(\frac{\partial V}{\partial\beta_2}\right)=\frac{\partial V}{\partial\beta_2}-\frac{\partial V}{\partial\beta_n};\ \ldots\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)=2\frac{\partial V}{\partial\beta_n}.$$

Поэтому, вводя для постоянных $2\beta_1'-\tau,\ 2\beta_2'-\tau,\ \ldots\ -\tau$ — обозначение τ_1, $\tau_2,\ \ldots\tau_n$, можем придать интегральным уравнениям симметричный вид:

$$2\frac{\partial V}{\partial\beta_1}=\int\frac{dx_1}{\sqrt{2kx_1^2+\beta_1}}=t+\tau_1,$$

$$2\frac{\partial V}{\partial\beta_2}=\int\frac{dx_2}{\sqrt{2kx_2^2+\beta_2}}=t+\tau_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\frac{\partial V}{\partial\beta_n}=\int\frac{dx_n}{\sqrt{2kx_n^2+\beta_n}}=t+\tau_n.$$

Эти уравнения конечно не выражают непосредственно алгебраической зависимости между переменными x. Но эта зависимость тотчас же выявится, как только мы определим значения интегралов, которые приводятся либо все к дугам круга, либо все к логарифмам, и заметим, что получающиеся отсюда значения переменных x будут выражаться либо все через синусы и косинусы, либо все через показательные величины, аргумент которых представляет произведение t на одну и ту же постоянную. Поэтому, исключая t из вышенаписанных уравнений, мы получим алгебраические соотношения. Значениям переменных x можно дать следующую форму:

$$x_1=\sqrt{-\frac{\beta_1}{2k}}\sin\left[\sqrt{-2k}\,(t+\tau_1)\right],$$

$$x_2=\sqrt{-\frac{\beta_2}{2k}}\sin\left[\sqrt{-2k}\,(t+\tau_2)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\sqrt{-\frac{\beta_n}{2k}}\sin\left[\sqrt{-2k}\,(t+\tau_n)\right].$$

Соотношения, получаемые исключением t из этих равенств, могут быть так представлены, что только одно из них будет второй степени, а все остальные линейны относительно $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению в частных производных (11), будет следующая:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2kx_1, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = 2kx_2, \ldots \frac{d^2x_n}{dt^2} = 2kx_n. \tag{12}$$

Таким образом из предыдущего видим, что если исходить из дифференциальных уравнений (9), выраженных через переменные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, в предположении, что $f(\lambda)$ есть целая функция $2n$-й степени (10) от λ, и сделать замену переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ через $x_1, x_2, \ldots x_n$, то мы должны придти к этим простым дифференциальным уравнениям (12) с переменными $x_1, x_2, \ldots x_n$. Такой способ исследования я применил в своей статье о теореме Абеля в 29-м томе Журнала Крелля, не касаясь однако раскрытых здесь исходных точек.

Подобным же образом Лагранж в первом томе туринских мемуаров, в статье о притяжении к двум неподвижным центрам, доказал основную теорему относительно эллиптических трансцендентностей, составляющую частный случай ($n = 2$) этого исследования.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

ОБЩИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УСЛОВИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ.

Мы будем теперь заниматься общими исследованиями относительно уравнений в частных производных первого порядка и при этом предположим, что сама искомая функция не входит в дифференциальное уравнение. Это предположение не представляет существенного ограничения, так как общий случай всегда может быть приведен к этому. В самом деле, если предложенное дифференциальное уравнение содержит искомую функцию V и, следовательно, имеет форму

$$0=\Phi\left(V,\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n},\ q_1,\ q_2, \ldots q_n\right),$$

то вводим новую независимую переменную q и новую зависимую переменную W уравнением

$$W=qV;$$

таким образом будем иметь:

$$\frac{\partial W}{\partial q}=V,\quad \frac{\partial W}{\partial q_1}=q\,\frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}=q\,\frac{\partial V}{\partial q_n},$$

так что

$$V=\frac{\partial W}{\partial q},\quad \frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}=\frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_n}.$$

Поэтому предложенное дифференциальное уравнение переходит в следующее:

$$0=\Phi\left(\frac{\partial W}{\partial q},\ \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_n},\ q_1,\ q_2, \ldots q_n\right).$$

В это уравнение входит, правда, одною независимою переменною больше, именно входит q, но оно уже не содержит самой функции W, а только ее производные по q, q_1, q_2, ... q_n. Таким образом мы можем, не нарушая общности, ограничиться случаем, когда дано дифференциальное уравнение

$$\varphi\left(\frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n},\ q_1,\ q_2, \ldots q_n\right)=0$$

и функция V сама не входит в уравнение. Положив здесь для краткости

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,$$

получим уравнение:

$$\varphi(p_1,\ p_2, \ldots p_n,\ q_1,\ q_2, \ldots q_n)=0. \tag{1}$$

Если мы теперь, следуя Лагранжу, захотим для определения V применить тот же метод, которым мы пользовались для случая $n=2$ в двадцать второй лекции, то мы должны величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ определить в виде таких функций от $q_1, q_2, \ldots q_n$, чтобы выражение

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n \tag{2}$$

было полным дифференциалом. Но мы здесь наталкиваемся на своеобразную трудность. Именно, так как уравнение (1) уже представляет соотношение между величинами p и q, то нам нужны еще $n-1$ других соотношений, чтобы мы могли все величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ выразить через $q_1, q_2, \ldots q_n$. Следовательно мы располагаем $n-1$ функцией от переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$ и должны их определить так, чтобы выражение (2) было полным дифференциалом. Для удовлетворения этого требования необходимо выполнение $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}$$

или, при введении сокращенных обозначений

$$(i, k) = \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

выполнение $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений

$$(i, k) = 0,$$

между тем как мы имеем в своем распоряжении только $n-1$ функций. Для $n=2$ эти два числа правда равны друг другу, именно оба равны 1, но во всех других случаях первое число превосходит второе.

Это затруднение удерживало до сих пор аналитиков от распространения метода Лагранжа на большее число переменных. Нас оно не устрашит, напротив, зная a priori, что задача, несмотря на слишком большое число условий, всё же может быть решена, мы будем исследовать — как это может произойти, что $n-1$ функция удовлетворяет $\frac{n(n-1)}{2}$ условным уравнениям.

Отметим заранее одно обстоятельство, которое должно нам пригодиться при этом исследовании, так как благодаря ему $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений приводятся в связь друг с другом. Именно, пусть i, i', i'' обозначают три любых значка; тогда мы имеем тождество

$$\frac{\partial(i', i'')}{\partial q_i} + \frac{\partial(i'', i)}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial(i, i')}{\partial q_{i''}} = 0.$$

Хотя отсюда еще не следует, что, когда $(i'', i) = 0$ и $(i, i') = 0$, то также исчезает и (i', i''), но ясно, что тогда это последнее выражение не зависит от q_i, так что если оно исчезает для какого-нибудь значения q_i, то оно вообще равно нулю.

Чтобы разобрать исчерпывающе поставленный вопрос, мы должны сначала преобразовать условные уравнения. В предыдущей форме этих уравнений $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}$ величины p рассматриваются только как функции величин q, т. е. предполагается, что n соотношений между величинами p и q, из которых одно дано уравнением (1), в то время как остальные $n-1$ в нашем распоряжении, решены относительно n величин $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Для исследования, о котором идет речь, эта форма слишком определенная. Мы сделаем другую гипотезу относительно представления величин $p_1, p_2, \dots p_n$, а именно предположим, что

p_n	представляется	как	функция	от	$q_1, q_2, \dots q_n$
p_{n-1}	»	»	»	»	$p_n, q_1, q_2, \dots q_n$
p_{n-2}	»	»	»	»	$p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n$
. . .					. . .
p_i	»	»	»	»	$p_{i+1}, \dots p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n$
. . .					. . .
p_1	»	»	»	»	$p_2, p_3, \dots p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n$

Производные, взятые от p_i по $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1 \dots q_n$, при этой гипотезе, будем писать без скобок, в то время как производные, взятые при прежней гипотезе, по которой все p функции только от $q_1, q_2, \dots q_n$, заключаем в скобки. Это изменение в способе представления требует, чтобы производные, входящие в $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений и заключенные теперь в скобки, были заменены на другие, что́ и должно быть сейчас выполнено.

Рассматриваемые $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений могут быть расположены следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r}
\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right)=\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right),\dots\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_1}\right),\dots\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_1}\right),\\
\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\dots\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_2}\right),\dots\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_2}\right),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right),\dots\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{n-1}}\right).
\end{array}\right\}\quad(3)$$

Любое из этих уравнений, например $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$, после перенесения правого члена в левую сторону заменится уравнением $(i, k)=0$, так что, например, уравнения m-го ряда

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right),\ \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+2}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_m}\right),\ \dots\ \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),$$

сокращенно представляются так:

$$(m, m+1)=0,\ (m, m+2)=0,\ \dots\ (m, n)=0.$$

Если теперь i есть один из значков $m+1$, $m+2$, ... n, то мы имеем:

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_i}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}.$$

Заменим выражения

$$\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_i}\right),\quad \left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_i}\right)\ldots\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right)$$

при помощи условных уравнений (3) производными по p_i; тогда получим:

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}.$$

Поэтому условные уравнения m-го ряда, если мы их напишем в обратном порядке, начиная с $(m, n)=0$, примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+2}}\right)+\ldots+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+2}}\right)+\ldots+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_{n-1}}=\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_m}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}\right)+\ldots+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+2}}\right)+\ldots+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Эту систему уравнений после перенесения членов, стоящих справа, в левую часть можно представить в сокращенных обозначениях в таком виде:

$$((m,\ n))=0,\ ((m,\ n-1))=0,\ \ldots\ ((m,\ i))=0,\ \ldots\ ((m,\ m+1))=0.$$

Уравнения (4) уже не тождественны больше с уравнениями, стоящими в m-м ряду системы (3), так как при их составлении мы воспользовались последующими рядами этой системы; между уравнениями обеих систем существует связь, выражаемая соотношением

$$((m,\ i))=(m,\ i)-\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}(m+1,\ i)-\ldots-\frac{\partial p_m}{\partial p_{i-1}}(i-1,\ i)+$$
$$+\frac{\partial p_m}{\partial p_{i+1}}(i,\ i+1)+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}(i,\ n).$$

Но если преобразование, посредством которого мы получили из m-го горизонтального ряда системы (3) уравнения (4), применить ко всем ее горизонтальным рядам, то *система, полученная после преобразования, будет равнозначаща с первоначальной системой* (3). Чтобы в этом убедиться, напишем преобразованную систему в обратном, т. е. в следующем порядке:

$$((n-1,\ n))=0,$$
$$((n-2,\ n))=0,\ ((n-2,\ n-1))=0,$$
$$((n-3,\ n))=0,\ ((n-3,\ n-1))=0,\ ((n-3,\ n-2))=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тогда будем иметь:

$$((n-1,\ n))=(n-1,\ n),$$
$$((n-2,n))=(n-2,\ n)-\frac{\partial p_{n-2}}{\partial p_{n-1}}(n-1,\ n),$$
$$((n-3,\ n))=(n-3,\ n)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-2}}(n-2,\ n)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-1}}(n-1,\ n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$((n-2,\ n-1))=(n-2,\ n-1)+\frac{\partial p_{n-2}}{\partial p_n}(n-1,\ n),$$
$$((n-3,\ n-1))=(n-3,\ n-1)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-2}}(n-2,n-1)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_n}(n-1,n).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$((n-3,n-2))=(n-3,\ n-2)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-1}}(n-2,\ n-1)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_n}(n-2,n).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда видим, что из новых уравнений следуют также старые и, таким образом, обе системы равнозначащи.

Чтобы теперь в системе (4) совершенно избавиться от производных заключенных в скобки, образуем из нее новую систему:

$$((m,\ n))=0,$$
$$((m,\ n-1))-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}((m,\ n))=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$((m,\ i))-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}((m,\ i+1))-\ldots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}((m,\ n))=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$((m,\ m+1))-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+2}}((m,\ m+2))-\ldots-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_n}((m,\ n))=0$$

Из этой новой системы, благодаря уравнениям

$$\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial p_n}{\partial q_k}$$
$$\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_k}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_k}\right)+\ldots+\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

производные, заключенные в скобки, совершенно выпадают и мы получим

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+2}}+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_n}+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_n}{\partial q_m},\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+2}}+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial q_{n-1}}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_m};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\\
&\qquad-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}-\ldots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_i}{\partial q_m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+2}}+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_n}+\\
&\qquad+\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+2}}-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+3}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+3}}-\\
&\qquad-\ldots-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)
$$

Эта система равнозначаща с системой (4), поэтому уравнения (4) могут быть выведены из уравнений (5) и обратно, как это само собой вытекает из самого способа образования уравнений (5).

Все уравнения системы (5) заключаются в следующей общей схеме:

$$
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}+\ldots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}+
$$

$$
+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}-\ldots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_i}{\partial q_m}
$$

или

$$
\sum_{k=m+1}^{k=n}\frac{\partial p_m}{\partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\sum_{k=i+1}^{k=n}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_m}{\partial q_k}+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_m}=0.
$$

Это уравнение, исключая два последние члена, симметрично, так как, хотя вторая сумма распространяется только на значения от $i+1$ до n, в то время как первая включает также еще значения от $m+1$ до i, но происходит это только потому, что по нашей гипотезе в p_i входят переменные

$p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_n$ и не входят переменные $p_1, p_2, \ldots p_{i-1}$, так что величины $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}$ только тогда отличны от нуля, когда $k > i$.

Но мы можем рассматривать задачу преобразования условных уравнений в еще более общем виде. Возьмем какое-нибудь из них, например:

$$(i, i') = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i}\right) = 0,$$

где p_i и $p_{i'}$ зависят только от величин $q_1, q_2, \ldots q_n$. Предположим теперь что p_i содержит, кроме величин $q_1, q_2, \ldots q_n$, еще $p_\varkappa, p_\lambda, \ldots$; также $p_{i'}$, кроме величин $q_1, q_2, \ldots q_n$, — еще $p_{\varkappa'}, p_{\lambda'}, \ldots$ и т. д., и будем писать производные, взятые при *этой* гипотезе, без скобок; тогда получим:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i'}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i'}}\right) + \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_i}\right) + \ldots,$$

или, если мы заменим производные

$$\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i'}}\right), \quad \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i'}}\right), \ldots \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_i}\right), \quad \left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_i}\right), \ldots$$

через производные от $p_{i'}$ и от p_i, которым они равны на основании условий (3), то будем иметь:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\lambda}\right) + \ldots = \frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right) + \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\lambda'}}\right) + \ldots = \frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i} + \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right),$$

где суммирование по $\varkappa$ распространяется на значения $\varkappa, \lambda, \ldots$, а суммирование по $\varkappa'$ на значения $\varkappa', \lambda', \ldots$ После введения этих выражений условное уравнение $(i, i') = 0$ перейдет в следующее:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}} - \frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right) - \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right) = 0. \tag{6}$$

Можно дать общее доказательство того, что разность обеих сумм, содержащих производные, заключенные в скобки, не меняет своего значения, если отбросить скобки. В самом деле, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right) = \frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa} + \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right), \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}} +$$

$$+ \sum_\varkappa \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right);$$

поэтому

$$\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right)-\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right)=\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}-\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}+$$

$$+\sum_{\varkappa}\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right)-\sum_{\varkappa'}\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right);$$

но так как обе двойные суммы вследствие условных уравнений $\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right)=$ $=\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right)$ взаимно уничтожаются, то мы получим:

$$\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right)-\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right)=\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}-\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}},$$

и уравнение (6) превратится в уравнение:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{i'}}-\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_i}+\sum_{\varkappa}\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}-\sum_{\varkappa'}\frac{\partial p_{i'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}=0, \tag{7}$$

отличающееся от прежнего только отсутствием скобок.

Хотя мы вывели (7) из $(i, i')=0$, но всё-таки оба уравнения не равнозначащи, так как при преобразовании мы воспользовались еще следующими из условных уравнений:

$$\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i'}}\right)=\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_\varkappa}\right),\quad \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_i}\right)=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{\varkappa'}}\right),\quad \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right)=\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right),$$

и притом для всех значений $\varkappa$ и $\varkappa'$.

Применим формулу (7) к случаю, когда величины p_1 и p_2 выражены как функции от $p_3, p_4, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$. Здесь надо положить $i=1$, $i'=2$, а $\varkappa$, так же как и $\varkappa'$, получают все значения от 3 до n. Поэтому мы имеем:

$$0=\frac{\partial p_1}{\partial q_2}-\frac{\partial p_2}{\partial q_1}+\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}+\ldots+\frac{\partial p_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\\ -\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\ldots-\frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_1}{\partial q_n}.\end{array}\right\} \tag{8}$$

В этом уравнении несимметричны только первые два члена, и это происходит вследствие того предпочтения, которое мы оказали величинам p_1 и p_2, предполагая, что они явно выражены через остальные. Несимметричность исчезнет, если мы вместо этого предположим, что имеются два уравнения, содержащие все величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ и $q_1, q_2, \ldots q_n$, и что их можно решить как относительно p_1 и p_2, так и относительно любых двух других величин p_i и $p_{i'}$. Пусть эти два уравнения будут

$$\varphi=a, \quad \psi=b,$$

где φ и ψ — функции от $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ и a, b — постоянные. Тогда полная симметрия будет достигнута тем, что входящие в уравнение (8) частные производные от величин p_1, p_2 заменятся частными производными от φ и ψ. Так как уравнение (8) имеет форму

$$0=\frac{\partial p_1}{\partial q_2}-\frac{\partial p_2}{\partial q_1}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k}-\frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}\right), \tag{8*}$$

то для намеченного преобразования необходимо выразить величины $\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}$ и $\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}$ через частные производные от φ и ψ. Мы должны при этом рассматривать величины p_1 и p_2 благодаря уравнениям $\varphi = a$ и $\psi = b$ как функции всех остальных $p_3, p_4, \ldots p_n, q_1, \ldots q_n$, а эти последние — как независимые друг от друга величины. Дифференцируя уравнения $\varphi = a$ и $\psi = b$ по b_1 и q_2, мы найдем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = 0; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = 0;$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial\psi}{\partial q_1} = 0; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = 0;$$

а отсюда, введя обозначение

$$N = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_1},$$

получаем значения:

$$\left.\begin{aligned} -N\frac{\partial p_2}{\partial q_1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \qquad N\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\\ N\left\{\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right\} &= \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Дифференцируя уравнения $\varphi = a$ и $\psi = b$ по p_k и q_k, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial p_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_k} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_k} = 0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_k} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial p_k} + \frac{\partial\psi}{\partial p_k} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi}{\partial q_k} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Отсюда, решая стоящие друг под другом линейные уравнения и сохраняя прежнее значение N, получим для производных от p_1 и p_2, взятых по p_k и q_k, следующие значения:

$$N\frac{\partial p_1}{\partial p_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}; \qquad N\frac{\partial p_1}{\partial q_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k};$$
$$-N\frac{\partial p_2}{\partial p_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}; \qquad -N\frac{\partial p_2}{\partial q_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}.$$

Если мы теперь образуем выражение $\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}$, то получим уравнение, левая часть которого делится на квадрат N, в то время как правая часть содержит N один раз как множитель. Отбросив в обеих частях общий делитель N, получим формулу

$$N\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}\right\} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}, \qquad (11)$$

при выводе которой можно также избежать сокращения общего делителя N, для чего, например, решаем относительно $\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}$ оба уравнения, стоящие в первом горизонтальном ряду системы (10), и в выражении, полученном для $\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}$, подставляем на место $\frac{\partial p_2}{\partial p_k}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial q_k}$ вышеполученные для них значения. При посредстве формул (9) и (11) уравнение (8*) превратится в такое:

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}-\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+\sum_{k=3}^{k=n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right\}.$$

Поэтому мы имеем, если соединим все члены, такую распространенную от 1 до n сумму:

$$0=\sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right\}\tag{12}$$

и таким образом получаем теорему:

Если $\varphi=a$ и $\psi=b$ обозначают два любых из n уравнений, определяющих $p_1, p_2, \ldots p_n$ как функции от $q_1, q_2, \ldots q_n$, таким образом, что

$$p_1\,dq_1+p_2\,dq_2+\ldots+p_n\,dq_n$$

есть полный дифференциал, то они должны удовлетворять условию:

$$0=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_1}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_2}+\ldots+\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_n}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_n},\\[2ex] -\dfrac{\partial\psi}{\partial p_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}-\dfrac{\partial\psi}{\partial p_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}-\ldots-\dfrac{\partial\psi}{\partial p_n}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_n},\end{array}\right\}\tag{12}$$

и притом это равенство есть тождество, так как в него не входят произвольные постоянные a и b.

Уравнение (12) содержит результат, данный в (7) как частный случай. Действительно, предположим, что функции φ и ψ имеют форму

$$\varphi=p_i-f(p_\chi, p_\lambda, \ldots q_1, q_2, \ldots q_n),$$
$$\psi=p_{i'}-F(p_{\chi'}, p_{\lambda'}, \ldots q_1, q_2, \ldots q_n);$$

тогда уравнение (12) перейдет в уравнение (7).

ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРЯМОЙ ВЫВОД НАИБОЛЕЕ ОБЩЕЙ ФОРМЫ УСЛОВИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ. ВВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ H, КОТОРЫЕ, БУДУЧИ ПРИРАВНЕНЫ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОСТОЯННЫМ, ОПРЕДЕЛЯЮТ p КАК ФУНКЦИИ q.

Мы докажем *непосредственно* ту теорему, к которой мы пришли в конце прошлой лекции.

Представим себе, что n уравнений, которые обращают выражение $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n$ в полный дифференциал и к которым принадлежат уравнения $\varphi = a$, $\psi = b$, решены относительно $p_1, p_2, \ldots p_n$ и эти значения подставлены в уравнения $\varphi = a$, $\psi = b$; тогда эти последние будут выполнены тождественно. Поэтому, находя частные производные от функций $\varphi = a$ и $\psi = b$ по какой-либо из величин q, снова получим тождество, если при этом рассматривать p как функции величин q. Так, при дифференцировании уравнения $\varphi = a$ по q_i получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_i}\right) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = 0.$$

Точно так же при дифференцировании $\psi = b$ по q_k

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial q_k} = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ и просуммируем по i от 1 до n, умножим затем второе уравнение на $\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}$ и просуммируем по k от 1 до n; тогда мы получим следующие два результата:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial q_k} = 0.$$

Если эти равенства вычесть одно из другого, то двойные суммы сократятся, так как величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ определяются из n уравнений, обращающих выражение $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал, благодаря чему $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$; таким образом останется следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=0$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right\}=0; \tag{1}$$

этот результат согласуется с уравнением (12) прошлой лекции. Из этого доказательства видим, что для вывода уравнения (1) необходимы все условные уравнения

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right),$$

так как только при помощи этого равенства сократятся двойные суммы, распространенные на все значения i и k.

Уравнение (1) предполагает, как мы раньше заметили, только то, что уравнения $\varphi=a$ и $\psi=b$ являются какими-нибудь двумя из таких n уравнений, которые обращают выражение $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал. Взятые при таком общем предположении a и b могут быть как произвольными постоянными, так и определенными численными величинами, например, нулями. Равным образом мы можем не делать никаких особых предположений относительно природы функций φ и ψ. Эти функции сами могут содержать произвольные постоянные, но могут также быть свободными от них.

Сообразно с этими различными обстоятельствами равенство (1) будет тождеством или не будет таковым. Если a и b не являются произвольными постоянными, то оно может не быть тождеством, а удовлетворяться вследствие уравнений $\varphi=a$ и $\psi=b$. Но этот случай встречается всего реже; гораздо чаще встречается случай, когда уравнение (1) является третьим из n уравнений, обращающих выражение $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал; тогда из уравнения (1) и одного из уравнений $\varphi=a$, $\psi=b$ можно вывести простым дифференцированием четвертое уравнение. Это уравнение снова будет либо тождеством, либо следствием уже известных нам трех уравнений, либо, наконец, четвертым из системы n уравнений и т. д. Таким образом может случиться, что из равенств $\varphi=a$ и $\psi=b$ простым дифференцированием получатся n различных уравнений, которые исчерпывают систему n уравнений; но больше чем n независимых друг от друга уравнений, считая в их числе $\varphi=a$ и $\psi=b$, мы никогда не можем получить, так как все они должны удовлетворяться теми же самыми значениями $p_1, p_2, \ldots p_n$, которые обращают $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал. Мы видим таким образом, что если мы ничего не установим относительно характера уравнений $\varphi=a$ и $\psi=b$, то мы не сможем сказать ничего определенного относительно природы уравнения (1).

Это более точное определение получится, если мы к требованию, что $\varphi=a$ и $\psi=b$ принадлежат к системе n уравнений, обращающих выражение $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал, присоединим еще требование, что функция

$$V=\int(p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n)$$

есть полное решение предложенного уравнения в частных производных, т. е. она кроме аддитивной постоянной содержит еще $n-1$ произвольных постоянных. Предположим, что предложенное уравнение в частных производных само содержит неопределенную постоянную h и решено относительно нее, т. е. оно имеет форму

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n) = h,$$

и полное решение V содержит кроме h еще $n-1$ произвольных постоянных $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$; тогда уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n$$

будут как раз теми уравнениями, которые обращают выражение $p_1dq_1 + p_2dq_2 + \ldots + p_ndq_n$ в полный дифференциал, а его интеграл — в полное решение уравнения в частных производных. Представим себе эти n уравнений решенными относительно содержащихся в них постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ и результат приведенным к виду

$$h = H, \ h_1 = H_1, \ h_2 = H_2, \ldots h_{n-1} = H_{n-1},$$

где $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ — функции только от $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$; тогда первое уравнение $h = H$ очевидно есть не что иное, как данное уравнение в частных производных, так как оно есть единственное свободное от произвольных постоянных $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$. Таким образом, как мы видим, каждый раз получится, кроме данного дифференциального уравнения $h = H = \varphi$, еще $n-1$ независимых как от него, та́к и друг от друга уравнений вида:

$$h_1 = H_1, \quad h_2 = H_2, \ldots h_{n-1} = H_{n-1},$$

обладающих тем свойством, что если из этих n уравнений определить величины $p_1, p_2, \ldots p_n$, то $\int (p_1dq_1 + p_2dq_2 + \ldots + p_ndq_n)$ будет полным решением уравнения в частных производных $h = H$. Из этих n уравнений

$$h = H, \quad h_1 = H_1, \ldots h_{n-1} = H_{n-1}$$

невозможно вывести еще какое-нибудь уравнение, совершенно свободное от постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}$; в самом деле, иначе можно было бы из этого уравнения и из уравнения $h = H$ исключить одну из величин p и получить таким образом уравнение в частных производных, в котором число переменных, по которым будет производиться дифференцирование, окажется на одну единицу ниже, чем в предложенном уравнении, и которому однако удовлетворяло бы выражение $V = \int p_1dq_1 + p_2dq_2 + \ldots + p_ndq_n$; поэтому V не могло бы быть *полным* решением уравнения $h = H$. Итак, невозможно исключить сразу все постоянные; отсюда следует, что если мы из n уравнений $h = H, h_1 = H_1, \ldots h_{n-1} = H_{n-1}$ выведем уравнение, свободное от всех постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}$, то оно будет тождеством. В самом деле, это уравнение должно удовлетворяться значениями величин $p_1, p_2, \ldots p_n$, которые мы определяем из тех n уравнений. Но эти значения $p_1, p_2, \ldots p_n$ содержат снова столько же независимых друг от друга величин $h, h_1, \ldots h_{n-1}$; поэтому вышеуказанное уравнение, если оно тождественно удовлетворяется после подстановки значений $p_1, p_2, \ldots p_n$, уже до подстановки должно быть тождеством. Таким уравнением является уравнение (1), если в нем вместо φ и ψ подставить две величины H; поэтому уравнение

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial H_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial q_1}+\dfrac{\partial H_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial q_2}+\ldots+\dfrac{\partial H_i}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial q_n}\\ -\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}-\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_2}-\ldots-\dfrac{\partial H_{i'}}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_n}\end{array}\right\}=0$$

есть тождество. Итак, в том случае, когда $\varphi=a$ и $\psi=b$ принадлежат к системе уравнений $h_i=H_i$, не остается никакого сомнения относительно природы уравнения (1); мы знаем, что оно будет тогда тождеством. Поэтому те $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений, которые мы получаем, подставляя вместо φ и ψ все комбинации по две из величин H_i, являются условными уравнениями, которым должны удовлетворять эти величины. Таким образом мы получим снова $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений, которые должны удовлетворяться n функциями, из которых известна одна именно H, а остальные $n-1$ функции $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$ — искомые.

Введем теперь обозначение:

$$(H_i,\ H_k)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial H_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_1}+\dfrac{\partial H_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_2}+\ldots+\dfrac{\partial H_i}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_n}\\ -\dfrac{\partial H_k}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}-\dfrac{\partial H_k}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_2}-\ldots-\dfrac{\partial H_k}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_n}\end{array}\right.$$

[оно не имеет никакого отношения к введенному в прошлой лекции обозначению $(i,\ k)$], так что для любого произвольного значения H_i и H_k будем иметь

$$(H_i,\ H_k)=-(H_k,\ H_i),\ (H_i,\ H_i)=0.$$

Если теперь $h=H,\ h_1=H_1, \ldots h_{n-1}=H_{n-1}$ являются теми уравнениями, которые обращают V в полное решение предложенного уравнения в частных производных $h=H$, то величины H должны удовлетворять $\frac{n(n-1)}{2}$ условным уравнениям, которые мы получим, если в уравнении

$$(H_i,\ H_k)=0$$

вместо обоих различных друг от друга значков i и k подставим все возможные комбинации по два из чисел $0, 1, \ldots\ n-1$.

Эти $\frac{n(n-1)}{2}$ условий необходимы для того, чтобы получаемые из уравнений $h_i=H_i$ значения $p_1, p_2, \ldots p_n$ обращали выражение p_1dq_1+ $+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ в полный дифференциал, а его интеграл — в полное решение предложенного уравнения в частных производных. Остается только показать, что они также достаточны, т. е. что если они выполнены, то в самом деле $p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n$ будет полным дифференциалом и вместе с тем будут иметь место $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)$$

[вторая часть высказанного нами положения, именно что

$$\int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n)$$

есть полное решение, очевидна сама собой, так как постоянные $h_1, h_2, \ldots h_n$ произвольны и друг от друга независимы]. Таким образом мы должны доказать, что из условных уравнений

$$(H_i, H_k) = 0$$

следуют условные уравнения

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right),$$

так же как выше мы из последних вывели первые.

Чтобы провести это доказательство, мы должны вернуться к уравнениям, которые встретились в начале этой лекции при прямом доказательстве равенства (1). Исходя из предположения, что $\varphi = a$ и $\psi = b$ принадлежат к системе n уравнений, которые служат для определения $p_1, p_2, \ldots p_n$ как функций от $q_1, q_2, \ldots q_n$, и что поэтому уравнения $\varphi = a$ и $\psi = b$ тождественно удовлетворяются выражениями величин p через $q_1, q_2, \ldots q_n$, мы получили уравнения:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = 0.$$

Предположив затем выполненными условные уравнения $\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = 0$, мы сократили при вычитании двойные суммы и получили новую форму условных уравнений; теперь, когда мы не можем предполагать выполненными условные уравнения $\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)$, но хотим их доказать, мы получим, вычитая вышенаписанные два уравнения одно из другого и ставя на место функций φ и ψ функции H_α и H_β, следующий результат:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} \left\{\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\right\} + \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H_\beta}{\partial q_i} - \frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\right\}. \quad (2)$$

Простая сумма, образующая второй член правой части этого равенства, есть не что иное, как величина, обозначенная выше через (H_α, H_β); двойная сумма, образующая первый член, может быть сведена к $\frac{n(n-1)}{2}$ членам, так как члены, в которых $i = k$, исчезают, а из прочих каждые два, получаемые друг из друга перестановкой i и k, соединяются в один. Таким образом уравнение (2) превращается в:

$$0 = \sum_{i,k} \left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial H_\beta}{\partial p_k} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}\right\} \left\{\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\right\} + (H_\alpha, H_\beta) \quad (2^*)$$

где суммирование распространяется на все различные между собой комбинации i и k. Таких уравнений, подставляя вместо H_α, H_β две различные из величин $H, H_1, \ldots H_{n-1}$, получим $\frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом получится система $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений, которые линейны по отношению к величинам $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$ и в которых (H_α, H_β) образуют постоянные члены. Надо показать, что когда эти последние величины исчезают, то и все первые величины становятся равными нулю. Но в системе линейных уравнений исчезновение постоянных членов всегда имеет необходимым следствием обращение в нуль неизвестных, если только определитель системы не равен нулю, [1] в каковом случае значения неизвестных становятся неопределенными. Что этот случай здесь не имеет места, можно доказать, не вычисляя самого определителя, а приняв во внимание, что формулы для решения системы (2*) выводятся из данной формы (2) уравнений этой системы следующим простым способом. Полагаем для сокращения

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = a_i^{(\alpha)}$$

и обозначаем через R определитель, составленный из n^2 величин $a_i^{(\alpha)}$, где α принимает значение $0, 1, \ldots n-1$, а i — значения $1, 2, \ldots n$, так что

$$R = \sum \pm a_1 a_2' a_3'' \ldots a_n^{(n-1)};$$

далее полагаем

$$A_i^{(\alpha)} = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(\alpha)}}.$$

После подстановки этих обозначений и перестановки α и β уравнение (2) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_i^{(\alpha)} a_k^{(\beta)} \left\{ \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) \right\} = (H_\alpha, H_\beta). \tag{3}$$

Это уравнение имеет место не только тогда, когда вместо α и β подставлены два различные значения из ряда $0, 1, \ldots n-1$, но также когда оба значка равны одному и тому же из этих n значений. В этом последнем случае уравнение (3) есть тождество, так как тогда в уравнении (2*), только формально отличающемся от уравнения (3), все члены поодиночке обращаются в нуль.

Если мы умножим уравнение (3) на $A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)}$, где r и s обозначают числа из ряда $1, 2, \ldots n$, то можно, как это только-что замечено, суммировать от 0 до $n-1$ по каждому из значков α и β, независимо от другого значка. Если мы в результате изменим порядок суммирований, которые производятся с одной стороны по i и k, а с другой по α и β, и обозначим через $M_{i,k}$ двойную сумму

$$M_{i,k} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} a_i^{(\alpha)} a_k^{(\beta)} A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} a_i^{(\alpha)} A_r^{(\alpha)} \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} a_k^{(\beta)} A_s^{(\beta)},$$

то получим

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} M_{i,k} \left\{ \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) \right\} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)} (H_\alpha, H_\beta). \tag{4}$$

---

[1] См. стр. 139 и 140.

Простые суммы, произведением которых является $M_{i,k}$, равны 0 или R,[1] смотря по тому, отличаются ли i от r и k от s, или i совпадает с r и k с s. Таким образом имеем

$$M_{i,k}=0$$

кроме того случая, когда одновременно $i=r$ и $k=s$, и в этом случае

$$M_{r,s}=R^2;$$

поэтому уравнение (4) переходит в следующее:

$$R^2\left\{\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)-\left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)\right\}=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1}\sum_{\beta=0}^{\beta=n-1}A_r^{(\alpha)}A_s^{(\beta)}(H_\alpha, H_\beta).$$

Отсюда мы видим, что если по предположению все величины (H_α, H_β) равны нулю, то все величины $\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)-\left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)$ также исчезают, если только R не равен нулю. Но обращение в нуль выражения

$$R=\sum\pm a_1 a_2' a_3''\ldots a_n^{(n-1)}=\sum\pm\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n}$$

обозначает, что $H, H_1, \ldots H_{n-1}$, являющиеся функциями от величин $p_1, p_2, \ldots p_n$, не независимы друг от друга, и таким образом уравнений $H=h$, $H_1=h_1, \ldots H_{n-1}=h_{n-1}$ не достаточно, чтобы из них определить переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функции от $q_1, q_2, \ldots q_n$. Исключая этот единственный случай, мы можем таким образом обратно из $\frac{n(n-1)}{2}$ условных уравнений

$$(H_\alpha, H_\beta)=0$$

вывести $\frac{n(n-1)}{2}$ первоначальных условных уравнений

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)=0.$$

[1] См. 11-ю лекцию, n° 3.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ.

О СОВМЕСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

Задача интегрирования предложенного уравнения в частных производных $H = h$ приведена теперь к нахождению $n-1$ функций $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$ от переменных $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$; эти функции не зависят как друг от друга, так и от функции H. Они удовлетворяют $\frac{n(n-1)}{2}$ условным уравнениям

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0$$

(для значений $0, 1, \ldots n-1$ значков α, β) и должны быть приравнены $n-1$ друг от друга независимым произвольным постоянным $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$. Таким образом между какой-нибудь из этих $n-1$ функций, например между H_1, и между известной нам функцией H имеет место условное уравнение $(H, H_1) = 0$, т. е. H_1 удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\ldots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\\ -&\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}-\ldots-\frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\end{aligned}\right\}=0;$$

другими словами, $H_1 = h_1$ есть интеграл системы изопериметрических дифференциальных уравнений,

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n =$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_n} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

переходящей для $H = T - U$ в систему дифференциальных уравнений механики. То же самое имеет место для функций $H_2, \ldots H_{n-1}$, которые удовлетворяют аналогичным условным уравнениям

$$(H, H_2) = 0, \ldots (H, H_{n-1}) = 0.$$

Все $n-1$ равенств

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \ldots \quad H_{n-1} = h_{n-1}$$

будут поэтому интегралами выше полученной системы изопериметрических дифференциальных уравнений. Но такое определение функций $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$

оказывается недостаточным. Благодаря ему удовлетворяются только условные уравнения:

$$(H, H_1) = 0, \quad (H, H_2) = 0, \ldots \quad (H, H_{n-1}) = 0;$$

остальные $\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ условные уравнения $(H_\alpha, H_\beta) = 0$, которые должны иметь место между любыми двумя из $n-1$ функций $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$, не будут удовлетворяться, таким образом определенными значениями этих функций если только мы не выберем $n-1$ интеграл специально для этой цели. Мы даже не можем a priori знать — можно ли взять совершенно произвольный интеграл за первую из искомых функций H_1 и можно ли тогда так определить остальные $n-2$ функций, чтобы они как с H и с H_1, так и между собой выполняли все указанные условия.

Более точное исследование показывает, что H_1 действительно можно выбирать произвольно между интегралами и что таким образом H_1 должно удовлетворять только условию

$$(H, H_1) = 0;$$

какую бы функцию H_1 соответственно этому условию мы ни взяли, всегда существует вторая функция H_2, которая удовлетворяет одновременно обоим условиям:

$$(H, H_2) = 0, \quad (H_1, H_2) = 0;$$

далее, какую бы функцию H_2 соответственно этим двум условиям мы ни взяли, всегда существует третья функция H_3, которая удовлетворяет одновременно трем условиям:

$$(H, H_3) = 0, \quad (H_1, H_3) = 0, \quad (H_2, H_3) = 0,$$

и так пока не определятся все функции $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$.

Мы видим, что настоящее исследование приводит нас к необходимости ответить на вопрос — возможно ли и при каких условиях возможно удовлетворить одновременно нескольким уравнениям в частных производных.

Чтобы разобрать вопрос во всей его наибольшей общности, возьмем рассматриваемые линейные уравнения в частных производных в форме:

$$A_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Обозначим левую часть этого уравнения, в которой $A_0, A_1, \ldots A_n$ представляют данные функции от $x_0, x_1 \ldots x_n$, через $A(f)$, так что мы рассматриваем это выражение как операцию, произведенную над неизвестной функцией f.

Итак, пусть

$$A(f) = A_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

точно так же

$$B(f) = B_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{k=0}^{k=n} B_i \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

$A(f)$ и $B(f)$ являются двумя различными операциями рассматриваемого вида, которые можно произвести над функцией f. Если мы произведем одну за другой обе операции, то получатся, смотря по тому, начнем ли мы с операции A или с операции B, два выражения $B(A(f))$ и $A(B(f))$, которые определяются равенствами:

$$B(A(f))=\sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=0}^{i=n} B_k A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=0}^{i=n} B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i};$$

$$A(B(f))=\sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right\}=$$

$$=\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} A_i B_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

В обоих выражениях вообще равны между собою только члены, умноженные на производные второго порядка от f; поэтому в их разности останутся только члены, содержащие производные первого порядка от f. Для этой разности, которую мы назовем $C(f)$, получится:

$$C(f)=B(A(f))-A(B(f))=\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=0}^{i=n} B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}=$$

$$=\sum_{i=0}^{i=n}\left\{\sum_{k=0}^{k=n}\left(B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}-A_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right)\right\}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Внося сюда обозначение:

$$C_i=\sum_{k=0}^{k=n}\left(B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}-A_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k}\right)=\left\{\begin{array}{c} B_0\frac{\partial A_i}{\partial x_0}+B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1}+\ldots+B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n} \\ -A_0\frac{\partial B_i}{\partial x_0}-A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1}-\ldots-A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n}\end{array}\right\},$$

найдем:

$$C(f)=\sum_{i=0}^{i=n} C_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=C_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+C_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+C_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем исследовании, что имеют место $n+1$ уравнений

$$C_0=0,\quad C_1=0,\quad \ldots\quad C_n=0,$$

так что для значений 0, 1, ... n значка i выполняется уравнение:

$$C_i=\left\{\begin{array}{c} B_0\frac{\partial A_i}{\partial x_0}+B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1}+\ldots+B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n} \\ -A_0\frac{\partial B_i}{\partial x_0}-A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1}-\ldots-A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n}\end{array}\right\}=0;$$

тогда мы имеем

$$C(f)=B(A(f))-A(B(f))=0$$

или

$$B(A(f))=A(B(f)),$$

т. е. безразлично — производить ли сначала операцию A и потом операцию B, или сначала операцию B, а потом операцию A.

Эта независимость результата от порядка, в котором производятся операции A и B, имеет большую важность, так как она может быть распространена на любое число повторений обеих операций. Если мы обозначим через $A^2, A^3, \ldots A^m$ операцию A, повторенную дважды, трижды, ... m раз одна за другой, а через $B^2, B^3, \ldots, B^{m'}$ операцию B, повторенную дважды, трижды, ... m' раз одна за другой, то из равенства

$$B(A(f)) = A(B(f))$$

следует более общее

$$B^{m'}(A^m(f)) = A^m(B^{m'}(f)).$$

Из этого результата можно извлечь, при исследовании обоих линейных уравнений в частных производных

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0,$$

удовлетворяющих $n+1$ условным уравнениям $C_i = 0$, большую пользу как для нахождения решений каждого отдельного дифференциального уравнения, так и для нахождения их совместных решений. Предположим, что нам известно одно решение f_1 дифференциального уравнения $A(f) = 0$, так что имеем тождественно

$$A(f_1) = 0;$$

тогда отсюда следует

$$B(A(f_1)) = B(0) = 0.$$

Но так как по нашему предположению выполняются $n+1$ условий $C_i = 0$, то можно переставить порядок операций A и B, и тогда из равенства

$$B(A(f_1)) = 0$$

будет следовать равенство:

$$A(B(f_1)) = 0,$$

т. е. $B(f_1)$ есть также решение уравнения $A(f) = 0$. Смотря по природе этого решения, надо различать три разных случая, причем надо вспомнить, что уравнение в частных производных $A(f) = 0$ кроме f_1 имеет еще $n-1$ независимых как друг от друга, так и от f_1 решений $f_2, f_3, \ldots f_n$ и что, кроме того, имеется очевидное решение $f = \text{const}$. Может случиться, во-первых, что $B(f_1)$ является независимым от f_1 решением f_2; во-вторых,—что это есть функция от f_1, которая также может быть постоянной; и в-третьих, мы должны рассматривать как особенный случай тот, когда $B(f_1)$ оказывается равным нулю. Мы имеем таким образом три случая:

$$B(f_1) = f_2, \quad B(f_1) = F(f_1), \quad B(f_1) = 0.$$

В первом случае мы из решения f_1 уравнения в частных производных $A(f) = 0$ находим второе решение $f_2 = B(f_1)$; в третьем случае мы имеем одновременно $A(f_1) = 0$ и $B(f_1) = 0$, т. е. f_1 есть совместное решение уравнений $A(f) = 0$ и $B(f) = 0$; второй случай мы рассмотрим позже.

В первом случае, когда $B(f_1)$ равно новому решению f_2, можно продолжать таким же образом поступать дальше. Именно, так как $A(f_2) = 0$, то мы получаем $B(A(f_2)) = B(0) = 0$ или, после перестановки обеих операций,

$$0 = A(B(f_2)) = A(B^2(f_1)),$$

т. е. $B^2(f_1)$ также есть решение уравнения $A(f)=0$. Здесь снова надо различать три случая, именно:

$$B^2(f_1)=f_3, \quad B^2(f_1)=F(f_1, f_2), \quad B^2(f_1)=B(f_2)=0.$$

В первом случае мы имеем третье, независимое от f_1 и f_2, решение $f_3=B^2(f_1)$ уравнения $A(f)=0$; в третьем случае $f_2=B(f_1)$ есть совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$; ко второму случаю, когда $B^2(f_1)$ есть функция прежних решений f_1 и $f_2=B(f_1)$, которая может также обратиться в постоянную величину, не равную нулю, мы вернемся позже. Через повторное применение операции из *одного* решения f_1 возникает ряд величин f_1, $B(f_1)$, $B^2(f_1), \ldots$, которые все удовлетворяют уравнению в частных производных $A(f)=0$. В этом ряду n первых величин либо являются независимыми друг от друга функциями и образуют тогда полную систему решений уравнения $A(f)=0$, либо уже одна из тех величин, хотя бы $B^m(f_1)$, является функцией предыдущих величин f_1, $B(f_1)$, $B^2(f_1)$, $B^{m-1}(f_1)$ и эта функция может превратиться в постоянную величину, не равную нулю, или в нуль.

Случай, когда пробегается неполный цикл решений уравнения $A(f)=0$, будучи неблагоприятным для разыскания этих решений, как раз и облегчает разыскание совместных решений уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$.

Самое общее решение уравнения $A(f)=0$ есть произвольная функция ее n друг от друга независимых решений $f_1, f_2, \ldots f_n$. Для получения совместного решения уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$, надо эту произвольную функцию от $f_1, f_2, \ldots f_n$ определить так, чтобы она удовлетворяла также уравнению $B(f)=0$. С этой целью введем в выражение $B(f)$ на место n из $n+1$ переменных $x_0, x_1, \ldots x_n$, например на место $x_1, x_2, \ldots x_n$, новые переменные — функции $f_1, f_2, \ldots f_n$ и обозначим производные от f, взятые при этой новой гипотезе, через $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial f_1}$, $\frac{\partial f}{\partial f_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial f_n}$, где новая производная $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$ совершенно отлична от прежней $\frac{\partial f}{\partial x_0}$: тогда мы получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_0},$$

и если i обозначает одно из чисел от 1 до n, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Поэтому будем иметь

$$B(f)=B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)+B_0\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_0}+\sum_{i=1}^{i=n}B_i\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=$$

$$=B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}\left\{\sum_{i=0}^{i=n}B_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial f}{\partial f_k},$$

и так как

$$\sum_{i=0}^{i=n}B_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

есть не что иное, как $B(f_k)$, то мы получим

$$B(f)=B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}B(f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k}.$$

Но если функция f должна быть решением уравнения $A(f)=0$, то она может зависеть только от величин f_k и не может больше содержать x_0: таким образом мы имеем $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)=0$, и уравнение $B(f)=0$ сводится к следующему:

$$\sum_{k=1}^{k=n} B(f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k}=0,$$

или

$$B(f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1}+B(f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2}+\ldots+B(f_n)\frac{\partial f}{\partial f_n}=0.$$

Но вследствие предположенных нами $n+1$ условий

$$C_i=B(A_i)-A(B_i)=0,$$

имеющих место для $i=0, 1, \ldots n$, выражение $B(f_i)$ будет одновременно с решением f_i уравнения $A(f)=0$ также решением этого уравнения, причем сюда присоединяется и очевидное решение $f=\mathrm{const}$. Следовательно все величины $B(f_1)$, $B(f_2)$, $\ldots B(f_n)$ являются решениями уравнения $A(f)=0$, и так как самое общее решение уравнения $A(f)=0$ есть произвольная функция от $f_1, f_2, \ldots f_n$, то $B(f_1)$, $B(f_2)$, $\ldots B(f_n)$ все будут функциями от величин $f_1, f_2, \ldots f_n$; таким образом уравнение

$$B(f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1}+B(f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2}+\ldots+B(f_n)\frac{\partial f}{\partial f_n}=0$$

есть уравнение в частных производных, определяющее f как функцию от $f_1, f_2, \ldots f_n$. Оно допускает $n-1$ независимых друг от друга решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$, и самое общее его решение, которое одновременно является самым общим совместным решением уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$, будет поэтому произвольной функцией $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ от этих $n-1$ друг от друга независимых решений. Следовательно такие совместные решения существуют всегда, когда выполнены $n+1$ условий $C_i=0$.

Чтобы показать теперь пользу, которую приносит повторное применение операции B над решением f_1 уравнения $A(f)=0$, когда дело не идет больше об определении самого общего решения, а разыскивается частное совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$, я предположу, что величины $B(f_1)=f_2$, $B^2(f_1)=f_3$, $\ldots$ $B^{m-1}(f_1)=f_m$, где m меньше или—самое большее—равно n, являются решениями уравнения $A(f)=0$, независимыми как друг от друга, так и от f_1; напротив, $B^m(f_1)$ уже не будет решением, независимым от $f_1, f_2, \ldots f_m$; тогда надо различать два случая:

1. Если $B^m(f_1)$ равняется функции $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ от $f_1, f_2, \ldots f_m$, которая может перейти также в постоянное значение, не равное нулю, то совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$ может быть всегда определено так, что оно зависит только от $f_1, f_2, \ldots f_m$ и не содержит прочих решений $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots f_n$. В самом деле, при этой гипотезе вышенаписанное уравнение в частных производных, определяющее совместное решение f как функцию величин $f_1, f_2, \ldots f_n$, приводится к уравнению:

$$f_2\frac{\partial f}{\partial f_1}+f_3\frac{\partial f}{\partial f_2}+\ldots+f_m\frac{\partial f}{\partial f_{m-1}}+F(f_1, f_2, \ldots f_m)\frac{\partial f}{\partial f_m}=0,$$

которое согласуется с системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$df_1:df_2:\ldots:df_{m-1}:df_m=f_2:f_3:\ldots:f_m:F(f_1, f_2, \ldots f_m).$$

Если к этой системе присоединим еще переменную t, приравняв m равных отношений отношению $dt:1$, то получим

$$\frac{df_1}{dt}=f_2,\quad \frac{df_2}{dt}=f_3,\ \ldots\ \frac{df_{m-1}}{dt}=f_m,\quad \frac{df_m}{dt}=F(f_1, f_2, \ldots f_m)$$

или

$$f_2=\frac{df_1}{dt},\quad f_3=\frac{d^2f_1}{dt^2},\ \ldots\ f_m=\frac{d^{m-1}f_1}{dt^{m-1}},\quad \frac{df_m}{dt}=\frac{d^mf_1}{dt^m}$$

и вследствие этого

$$\frac{d^mf_1}{dt^m}=F\left(f_1, \frac{df_1}{dt}, \ldots \frac{d^{m-1}f_1}{dt^{m-1}}\right).$$

Если теперь $\varphi_1=\text{const}$ есть какой-нибудь интеграл этого уравнения m-го порядка, не содержащий t, то $f=\varphi_1$ есть совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$.

2. Если $B^m(f_1)=0$, то мы имеем $0=B\left(B^{m-1}(f_1)\right)=B(f_m)$ и $0=A(f_m)$; таким образом функция $f_m=B^{m-1}(f_1)$ есть совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$.

Результат, полученный в случае 1, имеет исключение для $m=1$. т. е. когда уже $B(f_1)$ приводится к функции от f_1 или к постоянной, отличной от нуля. Это мы видим уже из того обстоятельства, что тогда дифференциальное уравнение, связывающее f_1 и t, будет первого порядка и следовательно не имеет интеграла, не содержащего t. Уравнение в частных производных, определяющее t как функцию от $f_1, f_2, \ldots f_m$, переходит тогда в следующее:

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}=0$$

и дает очевидное решение $f=\text{const}$, которое нам непригодно. В этом случае из одного решения f_1 нельзя извлечь никакой пользы, но надо знать еще одно решение f_2 уравнения $A(f)=0$. Применим к f_2 операцию B, как раньше это делали с f_1, и если $B(f_2)$ не будет функцией только от f_2, то по предыдущему получим из f_2 совместное решение уравнений $A(f)=0$ и $B(f)=0$. Но если, напротив, $B(f_2)$ есть функция только от f_2, так что совместное решение не может быть также найдено из одного только f_2, то всё же мы найдем такое решение, воспользовавшись одновременно функциями f_1 и f_2. В самом деле, пусть

$$B(f_1)=\Phi(f_1),\quad B(f_2)=\Psi(f_2);$$

тогда мы можем предположить, что f есть функция только от f_1 и f_2, и для определения этой функции получить уравнение в частных производных:

$$\Phi(f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1}+\Psi(f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2}=0,$$

которое приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$df_1:df_2=\Phi(f_1):\Psi(f_2)$$

и, как искомое совместное решение, дает выражение:

$$f=\int\frac{df_1}{\Phi(f_1)}-\int\frac{df_2}{\Psi(f_2)}.$$

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И В ЧАСТНОСТИ К СЛУЧАЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ТЕОРЕМА О ТРЕТЬЕМ ИНТЕГРАЛЕ, ВЫВОДИМОМ ИЗ ДВУХ ДАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ.

Имея в виду применить результаты произведенного в прошлой лекции исследования относительно совместных решений линейных уравнений в частных производных, к случаю, который вызвал это исследование и с которым мы столкнулись при интегрировании уравнения в частных производных $H=h$, мы заменим сначала $n+1$ независимых переменных $x_0, x_1, \dots x_n$ четным числом $2n$ переменных $x_1, x_2, \dots x_{2n}$, значки у которых будут начинаться не с 0, а с 1, так что теперь выражения $A(f)$ и $B(f)$ будут определены равенствами:

$$A(f)=A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+A_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}},$$

$$B(f)=B_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+B_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}},$$

а $2n$ условных уравнений $C_i=B(A_i)-A(B_i)=0$ будут иметь место для $i=1, 2, \dots 2n$. Далее, пусть на место $2n$ независимых переменных войдут величины p и q, так что будем иметь $x_1=q_1$, $x_2=q_2, \dots x_n=q_n$, $x_{n+1}=p_1$, $x_{n+2}=p_2, \dots x_{2n}=p_n$, и, наконец, пусть коэффициенты A_i и B_i будут определены равенствами:

$$A_1=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\quad A_2=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2},\quad \dots\quad A_n=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n};$$

$$A_{n+1}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\quad A_{n+2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\quad \dots\quad A_{2n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_n};$$

$$B_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\quad B_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2},\quad \dots\quad B_n=\frac{\partial\psi}{\partial p_n};$$

$$B_{n+1}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_1},\quad B_{n+2}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\quad \dots\quad B_{2n}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_n}.$$

Тогда мы получим

$$A(f)=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\dots+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}-\dots-\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n};$$

$$B(f)=\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\dots+$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}-\dots-\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

или, согласно обозначению, введенному в тридцать второй лекции (стр. 223),

$$A(f)=(\varphi, f),$$
$$B(f)=(\psi, f).$$

Чтобы получить значения $2n$ величин C_i для $i=1, 2, \ldots 2n$, мы разделим их на две группы: C_i и C_{n+i}, где $i=1, 2, \ldots n$; тогда получится

$$C_i=B(A_i)-A(B_i)=\left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right),$$
$$C_{n+i}=B(A_{n+i})-A(B_{n+i})=\left(\psi, -\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)-\left(\varphi, -\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right),$$

или, если принять во внимание тождество

$$(\psi, \varphi)=-(\varphi, \psi)=(\varphi, -\psi),$$

то получится:

$$-C_i=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, \psi\right)+\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right),$$
$$C_{n+i}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \psi\right)+\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right).$$

Но так как выражение (φ, ψ) есть линейная функция как производных от φ, так и производных от ψ, то правые части этих равенств представляют собой не что иное, как производные от (φ, ψ), взятые по p_i и q_i; таким образом мы имеем

$$C_i=-\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial p_i}, \quad C_{n+i}=\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial q_i},$$

и все $2n$ условных уравнений $C_i=0$, $C_{n+i}=0$ будут выполнены для $i=1, 2, \ldots n$, как только будет тождественно удовлетворяться равенство

$$(\varphi, \psi)=0,$$

т. е. как только $f=\psi$ будет решением линейного уравнения в частных производных $A(f)=(\varphi, f)=0$. Когда это единственное условное уравнение

$$(\varphi, \psi)=0$$

будет выполнено, тогда всегда буду тсуществовать совместные решения уравнений

$$(\varphi, f)=0, \quad (\psi, f)=0,$$

и для их определения можно воспользоваться выводами прошлой лекции.

Таким образом доказано утверждение, высказанное в начале упомянутой лекции, по которому, если H_1 обозначает какую-нибудь функцию, удовлетворяющую условию $(H, H_1)=0$, всегда можно определить вторую функцию H_2, удовлетворяющую одновременно обоим условиям $(H, H_2)=0$, $(H_1, H_2)=0$; при этом исследования прошлой лекции дают не только доказательство существования, но также и средства вычисления H_2. Затем предположим, что функции H_1 и H_2 определены; тогда дальнейшее продолжение указанных исследований дает нам средства для определения новой функции H_3, удовлетворяющей одновременно трем условиям $(H, H_3)=0$, $(H_1, H_3)=0$, $(H_2, H_3)=0$ и т. д.

Но в прошлой лекции мы не только нашли совместные решения двух линейных уравнений в частных производных $A(f)=0$, $B(f)=0$, удовлетворяющие условиям $C_i=B(A_i)-A(B_i)$, но, что не менее важно, вывели из *одного* решения f_1 уравнения $A(f)=0$ последовательным повторением операции B ряд новых решений $B(f_1)=f_2$, $B(f_2)=f_3, \ldots B(f_{m-1})=f_m$, продолжающийся до тех пор, пока следующее повторение операции не приведет к решению $B(f_m)=f_{m+1}$, которое будет или функцией $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ от прежних решений, или постоянной величиной, которая в частности может также стать равной нулю.

Мы применим эти соображения к рассматриваемому случаю; однако здесь будет иметь место одна модификация, которая покоится на следующем обстоятельстве. Вообще говоря, уравнение $A(f)=0$ имеет только одно очевидное решение $f=\mathrm{const}$, и кроме того, согласно гипотезе, из которой мы исходим, нам известно еще и только одно его решение $f=f_1$. Но в частном случае, когда $A(f)=(\varphi, f)$, $B(f)=(\psi, f)$, в то время как условные уравнения $C_i=0$ выполняются благодаря тождеству $(\varphi, \psi)=0$, мы знаем уже заранее, что в том случае $f=f_1$ есть решение уравнения $(\varphi, f)=0$, то кроме f_1 вторым решением будет ψ, и что кроме того к общему очевидному решению $f=\mathrm{const}$ в этом случае присоединяется еще частное решение $f=\varphi$. Поэтому здесь функция f_{m+1} не будет новым решением и в том случае, когда она равна функции $F(\varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots f_m)$, содержащей кроме $f_1, f_2, \ldots f_m$ еще φ и ψ. Имея это в виду и не выделяя отдельно случай, когда функция F приводится к постоянной или когда эта последняя превращается в нуль, а включая этот случай в обозначение $F(\varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots f_m)$, мы получим следующий результат:

Если f_1 есть решение линейного уравнения в частных производных $(\varphi, f)=0$, определяющего функцию f, и если удовлетворяется условное уравнение $(\varphi, \psi)=0$, то выражение $(\psi, f_1)=f_2$ тоже будет решением уравнения $(\varphi, f)=0$ и притом — вообще говоря — новым решением, в частных случаях могущим стать функцией $F(\varphi, \psi, f_1)$ от ψ, f_1 и очевидного решения φ. Продолжая поступать таким образом далее и полагая

$$(\psi, f_2)=f_3, \ (\psi, f_3)=f_4, \ldots (\psi, f_{m-1})=f_m, \ (\psi, f_m)=f_{m+1},$$

будем получать — вообще говоря — только новые решения $f_3, f_4, \ldots f_m$ уравнения $(\varphi, f)=0$, пока f_{m+1} не станет функцией $F(\varphi, \psi, f_1, \ldots f_m)$ от уже ранее известных решений ψ, $f_1, f_2, \ldots f_m$ и очевидного решения φ.

Если мы теперь заставим функцию φ совпасть с функцией H, образующей левую часть уравнения в частных производных $H=h$, то будет целесообразным изменить также и остальные обозначения. Положим $\varphi=H$, $\psi=H_1$, $f_1=H_2$, $f_2=H_3 \ldots$ и т. д.; тогда вышеполученный результат будет гласить:

Если удовлетворяются уравнения $(H, H_1)=0$ и $(H, H_2)=0$, т. е. H_1 и H_2 являются решениями линейного уравнения в частных производных $(H, H_i)=0$, определяющего H_i, то выражение $(H_1, H_2)=H_3$ также будет решением этого дифференциального уравнения и притом вообще новым решением; однако в частных случаях H_3 может быть функцией от H, H_1, H_2. Продолжая эту операцию и полагая $(H_1, H_3)=H_4$, $(H_1, H_4)=H_5, \ldots$ $(H_1, H_{m-1})=H_m$, $(H_1, H_m)=H_{m+1}$, будем вообще получать только новые решения $H_4, H_5 \ldots H_m$ уравнения $(H, H_i)=0$, [1] пока H_{m+1} не станет функцией уже известных решений H, $H_1, \ldots H_m$, включая сюда очевидное решение H.

Но мы знаем, что безразлично — сказать ли, что H_1 есть решение

---

[1] Не надо забывать, что величины H_1, H_2, $H_3 \ldots$ обозначают здесь какие угодно решения уравнения $(H, H_i)=0$, а не специальную систему тех решений, которые, будучи приравнены постоянным, образуют уравнения, приводящие к полному решению уравнения в частных производных $H=h$ (см. тридцать вторую лекцию, стр. 223).

линейного уравнения в частных производных $(H, H_i)=0$, определяющего H_i, т. е. уравнения

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_i}{\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_i}{\partial q_2}+\ldots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial H_i}{\partial q_n}\\ -\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H_i}{\partial p_1}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial H_i}{\partial p_2}-\ldots-\frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial H_i}{\partial p_n}\end{array}\right\}=0,$$

или сказать, что функция H_1, приравненная произвольной постоянной h_1, есть интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n =$$
$$=\frac{\partial H}{\partial p_1}:\frac{\partial H}{\partial p_2}:\ldots\frac{\partial H}{\partial p_n}:-\frac{\partial H}{\partial q_1}:-\frac{\partial H}{\partial q_2}:\ldots:-\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

т. е. независящий от t интеграл системы изопериметрических дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\ldots\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_n};$$
$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2},\ldots\frac{dp_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_n}.$$

Эти уравнения, если положить $H=T-U$, где T обозначает половину живой силы, а U — силовую функцию, переходят в систему дифференциальных уравнений движения. Мы можем поэтому полученный результат выразить следующей теоремой:

Пусть дана система изопериметрических дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\ldots\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_n},$$
$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2},\ldots\frac{dp_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

в которой H есть функция переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, не содержащая t, которая при $H=T-U$ переходит в систему дифференциальных уравнений динамики. Если мы знаем два независящих от t интеграла $H_1=h_1$, $H_2=h_2$ этой системы и составим выражение

$$H_3=(H_1, H_2)=\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_2}+\ldots+\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial H_2}{\partial q_n}\\ -\frac{\partial H_2}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}-\frac{\partial H_2}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\ldots-\frac{\partial H_2}{\partial p_n}\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\end{array}\right\}$$

то выражение

$$H_3'=h_3,$$

где h_3 обозначает третью произвольную постоянную, вообще является новым интегралом системы. В частных случаях H_3 может быть функцией от H, H_1, H_2 или постоянным численным значением, не исключая нуля; в этих случаях выражение $H_3=h_3$ не является новым интегралом, а будет уравнением, которое тождественно выполняется при посредстве прежних интегралов $H_1=h_1$, $H_2=h_2$ и очевидного интеграла $H=h$. Если продолжать дальше эту операцию и образовать из H_1 и H_3 или из H_2 и H_3 выражение (H_1, H_3) или (H_2, H_3), то это последнее, *приравненное постоянной величине, дает вообще опять новый интеграл и т. д.*

Это одна из замечательнейших теорем всего интегрального исчисления, и, в частном случае, когда положено $H = T - U$, это есть основная теорема аналитической механики. Именно она показывает, что если имеет место теорема живой силы, то из двух интегралов дифференциальных уравнений движения простым дифференцированием вообще можно вывести третий интеграл, отсюда четвертый и т. д., так что либо получатся все интегралы, либо по крайней мере некоторое число их.

После того как я нашел эту теорему, я сообщил об этом академиям в Берлине и в Париже, как о совсем новом открытии. Но скоро после этого я заметил, что эта теорема уже была открыта, но втечение 30 лет оставалась в неизвестности, так как не подозревали ее истинного смысла, а употребляли ее только как вспомогательную теорему при совсем другой задаче.

Если для определенной механической задачи мы проинтегрировали вышенаписанные дифференциальные уравнения и теперь хотим, согласно так называемой теории возмущения, развитой Лагранжем и Лапласом, определить изменения, которые претерпевает движение благодаря присоединению новых малых сил, то мы придем к определенным выражениям, составленным из p_i, q_i и не зависящим от времени — таков результат, принадлежащий к величайшим открытиям названных геометров. Пуассон, который повел исследование несколько иначе, нашел, что эти не зависящие от t выражения имеют как раз форму (H_i, H_k). Эта теорема Пуассона была знаменита трудностью своего доказательства; но ей придавали так мало значения, что Лагранж даже не поместил ее во второе издание аналитической механики, а предпочел *свои* формулы, как более простые. Но как раз эта теорема Пуассона по существу совпадает с вышеизложенной. Действительно, если выражения (H_i, H_k), которые у Пуассона входят как коэффициенты в возмущающую функцию, не зависят от времени, то они должны быть функциями, которые в первоначальной задаче обращаются в постоянные величины. Но это замечание ускользнуло от геометров, и понадобилось на самом деле новое открытие, чтобы выдвинуть теорему в ее истинном значении.

Тому, что никто не распознал важности открытой теоремы столь долгое время, способствовало одно своеобразное обстоятельство. Именно, случаи, в которых ее применяли, были как раз такие, что вновь образованное выражение не давало нового интеграла и результат становился либо тождественно равным нулю, либо равным числу, отличному от нуля, например единице. Эти случаи, которые в общей теории являются исключениями, на практике встречаются вообще очень часто. Именно, для того, чтобы некоторый интеграл, скомбинированный с каким-нибудь другим интегралом, доставлял один за другим все интегралы, необходимо, чтобы он был интегралом, специально принадлежащим рассматриваемой частной задаче. Но первые интегралы, которые отыскивались для какой-нибудь предложенной задачи, были, как правило, те, которые следовали из общих принципов (например из принципа сохранения площадей), поэтому они не принадлежали специально именно к рассматриваемой задаче; поэтому нельзя требовать, чтобы из них должны были выводиться все интегралы.

Мы видим, что для интегралов имеет место некоторая полярность, т. е. качественное различие. Раньше это было неизвестно, каждый интеграл считался равноценным с остальными, и единственная польза, которую из него умели извлечь, заключалась в понижении на одну единицу порядка данной системы. Теперь же мы видим, что существуют такие интегралы $H_1 = h_1$, $H_2 = h_2$, из которых можно сразу вывести все остальные. Этот случай является даже общим. В самом деле, если равенства $H_1 = h_1$,

$H_2 = h_2, \ldots H_m = h_m$ дают все интегралы и мы образуем из их левых частей произвольную функцию

$$F(H_1, H_2, \ldots H_m) = H_{m+1},$$

которая может быть заранее задана, то в бесконечно превышающем числе случаев можно вывести из H_{m+1} и из одного из данных интегралов, например из H_{m+1} и из H_1, все остальные интегралы, и это есть общий случай, так как функция H_{m+1}, приравненная произвольной постоянной, представляет наиболее общую форму интеграла. Но первые интегралы, которые мы находим при решении некоторой задачи, как правило, не являются теми, которые специально принадлежат данной задаче, подобно H_{m+1}, и которые составлены из интегралов, получаемых из общих принципов; обычно они — только общих типов, и поэтому мы не получаем из них всех интегралов задачи.

Применение общей теоремы к свободному движению дает следующую теорему:

Если мы знаем два не зависящих от t интеграла $\varphi = h_1$ и $\psi = h_2$ системы

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

и образуем выражение

$$(\varphi, \psi) = \sum \frac{1}{m_i} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i'} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i'} \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i'} \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i} \\ - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i'} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i'} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i'} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} \end{array} \right\},$$

то выражение

$$(\varphi, \psi) = h_3$$

будет вообще новым интегралом; в частных же случаях (φ, ψ) может стать функцией постоянных h_1, h_2 и постоянной h, входящей в теорему живой силы $T - U = h$, или стать чистым числовым значением, хотя бы и нулем.

Таким образом из двух теорем площадей можно вывести третью. Для этого мы должны только положить:

$$\varphi = \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i'); \quad \psi = \sum m_i (x_i z_i' - z_i x_i');$$

тогда мы получим:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = m_i y_i', & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} = - m_i x_i', & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i'} = - m_i y_i, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i'} = m_i x_i, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i'} = 0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = m_i z_i', & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0, & \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i} = - m_i x_i', \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i'} = - m_i z_i, & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i'} = 0, & \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i'} = m_i x_i; \end{array}$$

поэтому

$$(\varphi, \psi) = \sum m_i (y_i' z_i - y_i z_i').$$

Таким образом выражение

$$(\varphi, \psi) = h_3$$

есть третья теорема площадей.

Пуассон в своей знаменитой статье о вариации постоянных в 15-й тетради Журнала Политехнической школы дает применение своей вышеупомянутой теоремы возмущения к возмущениям вращательного движения вокруг неподвижной точки. При этом он принужден произвести те же вычислительные операции, которые мы только-что проделали. Поэтому в его вычислениях содержится вывод третьей теоремы площадей из двух других; но он ни одним словом не упоминает об этом замечательном результате.

Подобные исследования мы можем произвести, если присоединим к трем теоремам площадей три уравнения принципа сохранения центра тяжести и исследуем — из скольких из этих шести интегралов получатся остальные.

ТРИДЦАТЬ ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ.

ДВА КЛАССА ИНТЕГРАЛОВ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПО МЕТОДУ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ НИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЯ (φ, ψ).

Если для системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} dt : dq_1 : dq_2 : \ldots dq_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = 1 : \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots \\ \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_n} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : - \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

обладающей очевидным интегралом $H = h$, даны два независящих от t интеграла $H_1 = h_1$ и $H_2 = h_2$, то, хотя, как мы это видели, вообще нельзя сказать a priori с определенностью, будет ли выражение (H_1, H_2), если его приравнять постоянной величине, давать новый интеграл, или же (H_1, H_2) сведется к независящей от h, h_1, h_2 постоянной, или к чисто числовому значению, или, наконец, это последнее сводится к нулю. Однако этот вопрос может быть полностью решен, если $H_1 = h_1$ и $H_2 = h_2$ являются интегралами, принадлежащими к системе, получаемой из гамильтонова уравнения в частных производных. Именно мы увидим, что, если $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ являются двумя интегралами Гамильтона, то (φ, ψ) будет равно либо 0, либо ± 1. Таким образом два интеграла этой системы никогда не дают нового интеграла. Чтобы доказать эту теорему, мы обращаемся к вспомогательной теореме, которая показывает, во что обращается выражение (φ, ψ), если в φ и ψ, кроме величин $q_1, q_2, \ldots q_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_n$, входят еще m величин $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$, которые являются функциями от $q_1, q_2, \ldots q_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_n$. В этом случае можно как производные, взятые от φ и ψ по p и q, так и выражение (φ, ψ) образовать двумя разными способами, смотря по тому, принимать ли во внимание то обстоятельство, что переменные p и q входят в $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, или не принимать. Производные от φ и ψ, взятые этими двумя способами, мы будем писать соответственно со скобками или без скобок, а составленное из φ и ψ выражение с двойными скобками (φ, ψ) или с простыми скобками; тогда будем иметь:

$$((\varphi, \psi)) = \sum_i \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right) \right\}, \qquad (2)$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right\}. \qquad (3)$$

Суммы, взятые по i, распространяются на значения $1, 2 \ldots n$, и для заключенных в скобки производных в (2) имеют место равенства:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} + \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial p_i}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial p_i} + \sum_{k'} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}}\frac{\partial \omega_{k'}}{\partial p_i},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \sum_{k'} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}}\frac{\partial \omega_{k'}}{\partial q_i},$$

в которых суммы по k и k' надо брать от 1 до m. Если эти выражения подставить в (2), то в результате получится простая сумма, взятая по i, двойная сумма по i и k (или k') и тройная сумма по i, k и k'. Именно мы получим:

$$
\begin{aligned}
((\varphi, \psi)) &= \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right) + \\
&+ \sum_i \sum_{k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} \frac{\partial \omega_{k'}}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} \frac{\partial \omega_{k'}}{\partial p_i} \right) - \\
&- \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial p_i} \right) + \\
&+ \sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial p_i} \frac{\partial \omega_{k'}}{\partial q_i} - \frac{\partial \omega_{k'}}{\partial p_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial q_i} \right);
\end{aligned}
$$

если мы в двойных и тройных суммах переставим порядок суммирования и примем во внимание данное равенством (3) определение выражений вида (φ, ψ), заключенных в простые скобки, то получим:

$$
\begin{aligned}
((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi) &+ \sum_{k'} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} (\varphi, \omega_{k'}) - \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} (\psi, \omega_k) + \\
&+ \sum_k \sum_{k'} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} (\omega_k, \omega_{k'}).
\end{aligned}
$$

Так как суммирование по k и k' распространяется на одни и те же значения от 1 до m, то в первой сумме первой строчки можно написать k вместо k'. Во второй строчке члены, для которых значения k и k' совпадают, обращаются в нуль благодаря множителю $(\omega_k, \omega_{k'})$; остальные члены можно попарно соединять в один член, так как $(\omega_{k'}, \omega_k) = -(\omega_k, \omega_{k'})$. Поэтому сумму надо распространять только на комбинации по два различных между собой значений k и k', и тогда $(\omega_k, \omega_{k'})$ получится умноженным на $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_{k'}} \right)$, так что в конце концов мы будем иметь равенство

$$
\left.
\begin{aligned}
((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi) &+ \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial \omega_k} (\varphi, \omega_k) - \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} (\psi, \omega_k) + \\
&+ \sum_{k,\, k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial \omega_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_{k'}} \right) (\omega_k, \omega_{k'}).
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

Имея в виду дальнейшее применение, мы придадим формуле (4) некоторый специальный вид, для чего вместо величин $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ подставим уже ранее[1] рассматривавшиеся n функций $H, H_1, \ldots H_{n-1}$, которые не содержат произвольных постоянных и зависят только от переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, \ldots p_n$ и которые, будучи приравнены друг от друга независимым произвольным постоянным $h, h_1, \ldots h_{n-1}$, так определяют переменные p_1, $p_2, \ldots p_n$ в функциях от переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$, что выражение

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$$

становится полным дифференциалом, а его интеграл будет полным решением V уравнения в частных производных $H = h$. Тогда, как мы знаем, будет иметь место тождественное равенство

$$(H_k, H_{k'}) = 0$$

[1] См. тридцать вторую лекцию, стр. 225.

и, следовательно, в общей формуле (4) двойная сумма, взятая по k, k', обратится в нуль, после чего мы получим

$$((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi) + \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial H_k} (\varphi, H_k) - \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial H_k} (\psi, H_k), \tag{5}$$

где суммы берутся от $k = 0$ до $k = n - 1$.

Приведем эту формулу к еще более специальному виду. Согласно нашему прежнему предположению функции φ и ψ содержат переменные p и q, во-первых, явно, во-вторых, неявно посредством величин $H, H_1, \ldots H_{n-1}$. Предположим теперь, что функции φ и ψ содержат переменные p только в последней форме, т. е. *только неявно*, чего всегда можно достигнуть введением величин H как новых переменных вместо n величин p. Так как вместе с тем φ и ψ выразятся только через $q_1, q_2, \ldots q_n, H, H_1, \ldots H_{n-1}$, то при такой гипотезе получится значительное упрощение входящих в равенство (5) выражений:

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right),$$

$$(\varphi, H_k) = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i} \right), \quad (\psi, H_k) = \sum_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i} \right).$$

Производные $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \psi}{\partial p_i}$ обратятся в нуль для всякого значения i, и получится

$$(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, H_k) = -\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i}, \quad (\psi, H_k) = -\sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i},$$

и общее выражение (5) для $((\varphi, \psi))$ теперь принимает следующий простой вид:

$$((\varphi, \psi)) = -\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i} + \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i}. \tag{6}$$

Это равенство является специальной формой вспомогательной теоремы (4), и мы будем им пользоваться при рассмотрении гамильтоновой формы интегралов.

Чтобы при этих предположениях написать полностью в гамильтоновой форме интегралы системы дифференциальных уравнений (1), воспользуемся, при сохранении прежних обозначений, уравнениями

$$H = h, \; H_1 = h_1, \ldots H_{n-1} = h_{n-1},$$

которые так определяют переменные $p_1, p_2, \ldots p_n$, что

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n)$$

будет полным решением уравнения в частных производных $H = h$. Тогда, как мы знаем, [1] интегральные уравнения системы (1) в гамильтоновой форме напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \\ &\frac{\partial V}{\partial h} = t + h', \quad \frac{\partial V}{\partial h_1} = h_1', \ldots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}} = h'_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1] См. двадцатую лекцию, стр. 148.

где h', h_1', ... h'_{n-1} обозначают новые произвольные постоянные. Но эти интегральные уравнения не все решены относительно произвольных постоянных. Чтобы их получить в этой форме, т. е., согласно нашей терминологии, как *интегралы*, мы заменяем первую половину интегральных уравнений (7) равнозначными им интегралами:

$$H = h, \ H_1 = h_1 \ldots H_{n-1} = h_{n-1},$$

а во второй их половине, которая уже решена относительно произвольных постоянных h', $h'_1, \ldots h'_{n-1}$, вместо h, $h_1, \ldots h_{n-1}$ подставляем их значения H, $H_1, \ldots H_{n-1}$. Тогда интегральные уравнения, стоящие во второй строке системы (7), в том случае, когда H', $H_1', \ldots H'_{n-1}$ обозначают функции переменных q_1, $q_2, \ldots q_n$, $p, \ldots p_n$, в которые после этой подстановки превратятся величины $\frac{\partial V}{\partial h}$, $\frac{\partial V}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$, получатся в форме интегралов:

$$H' = t + h', \ H_1' = h_1', \ H_2' = h_2', \ldots H'_{n-1} = h'_{n-1}.$$

Величины H', $H_1', \ldots H'_{n-1}$ содержат переменные p_1, $p_2, \ldots p_n$ только неявно при посредстве величин H, $H_1, \ldots H_{n-1}$, так как функция V и ее производные $\frac{\partial V}{\partial h}$, $\frac{\partial V}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$ зависят только от q_1, $q_2, \ldots q_n$, h, $h_1, \ldots h_{n-1}$, и поэтому величины H', $H_1', \ldots H'_{n-1}$ зависят только от величин q_1, $q_2, \ldots q_n$, H, $H_1, \ldots H_{n-1}$. Следовательно H', $H_1', \ldots H'_{n-1}$ имеют как раз ту форму, в которой, по нашему предположению, представлены величины φ и ψ в равенстве (6). То же самое имеет место, как это само собой разумеется, для величин H, $H_1, \ldots H_{n-1}$, если мы их рассматриваем как функции от них самих, но только тогда в них также не входят явно переменные q_1, $q_2, \ldots q_n$. К выражениям $((H_\alpha', H_\beta'))$ или $((H_\alpha, H_\beta))$, двойные скобки которых мы теперь отбросим для упрощения обозначений, теперь может быть применена формула (6), данная для $((\varphi, \psi))$.

Если в формуле (6) положим сначала $\varphi = H_\alpha'$, $\psi = H_\beta'$, где α и β обозначают числа из ряда 0, 1, ... $n-1$, то получится:

$$(H_\alpha', H_\beta') = -\sum_k \frac{\partial H_\beta'}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i} + \sum_k \frac{\partial H_\alpha'}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial H_\beta'}{\partial q_i} \frac{\partial H_k}{\partial p_i}. \tag{8}$$

Но по определению величин H_α' имеем:

$$H_\alpha' = \frac{\partial V}{\partial h_\alpha}$$

в предположении, что в производной $\frac{\partial V}{\partial h_\alpha}$ вместо величин h_k поставлены величины H_k. Так как из равенства, служащего для определения V,

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n),$$

для производной от V по h_α получится значение

$$\frac{\partial V}{\partial h_\alpha} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h_\alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h_\alpha} dq_2 + \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial h_\alpha} dq_n \right),$$

то, взяв отсюда частную производную по q_i, будем иметь:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial h_\alpha}\right)}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial h_\alpha}.$$

Следовательно после замены величин h_k соответствующими величинами H_k получим:

$$\frac{\partial H_\alpha'}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial H_\alpha}. \tag{9}$$

При посредстве этого равенства суммы, взятые по i, входящие в формулу (8), принимают следующие простые значения:

$$\sum_i \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H_\alpha} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha},$$

$$\sum_i \frac{\partial H_\beta'}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H_\beta} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\beta}$$

и равенство (8) переходит в такое:

$$(H_\alpha', H_\beta') = -\sum_k \frac{\partial H_\beta'}{\partial H_k}\frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha} + \sum_k \frac{\partial H_\alpha'}{\partial H_k}\frac{\partial H_k}{\partial H_\beta};$$

и так как $\frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha}$ обращается в 0 для всех отличных от α значений k, а для $k=\alpha$ обращается в единицу, то

$$(H_\alpha', H_\beta') = -\frac{\partial H_\beta'}{\partial H_\alpha} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial H_\beta}.$$

Правая часть этого равенства есть нуль; действительно, пусть V' обозначает функцию, в которую превращается V, если величины h_k заменяются соответствующими величинами H_k; тогда имеют место равенства

$$H' = \frac{\partial V'}{\partial H}, \quad H_1' = \frac{\partial V'}{\partial H_1}, \quad H_2' = \frac{\partial V'}{\partial H_2}, \ \ldots \ H_n' = \frac{\partial V'}{\partial H_n},$$

так что получим

$$\frac{\partial H_\alpha'}{\partial H_\beta} = \frac{\partial H_\beta'}{\partial H_\alpha'},$$

а отсюда следует равенство

$$(H_\alpha', H_\beta') = 0.$$

Теперь, чтобы преобразовать выражения вида (H_α', H_β), мы подставим в формулу (6) вместо φ и ψ значения $\varphi = H_\alpha'$, $\psi = H_\beta$; тогда получится

$$(H_\alpha', H_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H_\beta}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} + \sum_k \frac{\partial H_\alpha'}{\partial H_k} \sum_i \frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i}. \tag{10}$$

Первая входящая сюда, взятая по i, сумма при посредстве равенства (9) принимает значение:

$$\sum_i \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha}.$$

Вторая же сумма, взятая по i, исчезает; в самом деле, так как мы рассматриваем величины $q_1, q_2, \ldots q_n$ и $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ как независимые переменные, то H_β не содержит q_i и все производные $\frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}$ равны нулю. Таким образом равенство (10) превращается в следующее:

$$(H_\alpha', H_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha} = -\frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha},$$

и так как $\frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha}$ равняется 0 или 1, смотря по тому, отличается β от α или равно α, то для двух различных между собой значений α и β имеем

$$(H_\alpha', H_\beta) = 0;$$

если же $\alpha = \beta$, то

$$(H_\alpha', H_\alpha) = -1.$$

Наконец, благодаря условным уравнениям, определяющим величины H, получаем

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0.$$

Таким образом мы имеем для величин H_α и H_α' следующие тождества:

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0, \quad (H_\alpha', H_\beta') = 0,$$
$$(H_\alpha, H_\beta') = 0,$$

из которых два первых имеют место для всех значений α и β, а последнее только для различных между собой значений α и β, в то время как для $\alpha = \beta$ имеет место равенство

$$(H_\alpha, H_\alpha') = 1.$$

Эти результаты можно обобщить в следующую теорему:

Пусть дана система изопериметрических дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \ldots \frac{dq_n}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_n}; \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \ldots \frac{dp_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

в которой H обозначает данную функцию от переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ и которая при $H = T - U$ переходит в систему дифференциальных уравнений динамики для случая, когда имеет место принцип живой силы. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$H = h,$$

в котором

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}$$

и к которому может быть приведена система (1).

Пусть

$$H_1 = h_1, \; H_2 = h_2, \ldots H_{n-1} = h_{n-1}$$

будут те уравнения, которые вместе с уравнением $H=h$ так определяют $p_1, p_2, \ldots p_n$ как функции от $q_1, q_2, \ldots q_n$, что выражение

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$$

становится полным дифференциалом, а его интеграл

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n)$$

будет полным решением уравнения в частных производных $H=h$. Обозначим далее через $H', H_1', \ldots H'_{n-1}$ те функции переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, в которые превращаются производные $\frac{\partial V}{\partial h}, \frac{\partial V}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$, после того как постоянные $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ заменятся функциями $H, H_1, \ldots H_{n-1}$, и составим для системы дифференциальных уравнений (1) *систему ее интегралов в форме Гамильтона, т. е. в форме равенств*

$$H = h,\ H_1 = h_1,\ H_2 = h_2, \ldots H_{n-1} = h_{n-1},$$

$$H' = t + h',\ H_1' = h_1',\ H_2' = h_2', \ldots H'_{n-1} = h'_{n-1};$$

тогда $2n$ функций $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H', H_1', \ldots H'_{n-1}$, образующих левые части этих интегралов, обладают тем свойством, что если в выражении

$$(\varphi, \psi) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\frac{\partial \psi}{\partial q_n} \\ - \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \ldots - \frac{\partial \psi}{\partial p_n}\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \end{array} \right\}$$

подставить вместо φ и ψ какие-нибудь $2n$ величин $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H', H_1', \ldots H'_{n-1}$, то это выражение обратится в нуль, за единственным исключением комбинаций H и H', H_1 и $H_1', \ldots H_{n-1}$ и H'_{n-1}, каждая из которых, будучи подставлена вместо φ и ψ, делает выражение (φ, ψ) равным единице.

Посредством этой теоремы можно установить очень простые формулы для вариации постоянных, что составит предмет следующей лекции.

ТРИДЦАТЬ ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ.

Когда в динамике применяют теорию вариации постоянных и к характеристической функции H присоединяется возмущающая функция Ω, которая, кроме переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, может также содержать явно время t, то система дифференциальных уравнений движения изменяется и эти дифференциальные уравнения превращаются в следующие:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}. \tag{1}$$

Если Ω очень мала сравнительно с H, то можно значения p_i и q_i в „невозмущенной" задаче (для $\Omega = 0$) принять за их приближенные значения в „возмущенной" задаче и новые значения p_i и q_i представить так, что они сохранят прежнюю аналитическую форму, но на место прежних произвольных постоянных (или элементов, говоря на языке астрономов) теперь войдут функции времени. Вместо того чтобы рассматривать величины p_i и q_i как искомые переменные, как это делается в „невозмущенной" задаче, мы ищем в „возмущенной" те функции, которые становятся на место прежних произвольных постоянных или элементов, т. е. возмущенные элементы становятся переменными новой задачи. Это дает ту выгоду, что мы получаем как первое приближение не функции времени, содержащие постоянные величины, а сами постоянные — элементы „невозмущенной" задачи.

Дело сводится теперь к тому, чтобы составить дифференциальные уравнения возмущенных элементов. Вспомним прежде всего гамильтонову форму интегралов „невозмущенной" задачи, т. е. рассмотренную в прошлой лекции систему:

$$\left.\begin{aligned} &H = h, \quad H_1 = h_1, \; \ldots \; H_{n-1} = h_{n-1} \\ &H' = h' + t, \; H_1' = h_1', \; \ldots \; H'_{n-1} = h'_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и обозначим какой-нибудь независящий от t интеграл „невозмущенной" задачи через

$$\varphi = a,$$

где φ есть функция от переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, на которую произвольные постоянные не оказали возмущающего действия, и a есть произвольная постоянная, так что φ может быть представлена как функция $2n-1$ переменных $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H_1', \ldots H'_{n-1}$ и a — как та же самая функция от $2n-1$ постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h_1', \ldots h'_{n-1}$. В „возмущенной" задаче a уже не является больше постоянной, поэтому $\frac{da}{dt}$ не будет больше нулем, и при помощи дифференциального уравнения (1) для $\frac{da}{dt}$ получится выражение

$$\frac{da}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\Omega}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\Omega}{\partial q_i}\right),$$

или, что то же,

$$\frac{da}{dt}=(H,\ \varphi)+(\Omega,\ \varphi). \tag{3}$$

Так как $\varphi=a$ есть независящий от t интеграл „невозмущенной“ задачи, то φ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных $(H,\ \varphi)=0$ и выражение $\frac{da}{dt}$ приведется к такому:

$$\frac{da}{dt}=(\Omega,\ \varphi). \tag{3*}$$

Правая часть этого равенства содержит кроме t, явно входящего в Ω, еще $2n$ переменных $q_1,\ q_2,\dots q_n,\ p_1,\ p_2\dots p_n$, вместо которых мы однако введем как новые переменные $2n$ функций от них $H,\ H_1,\dots H_{n-1},\ H',\ H_1',\dots H'_{n-1}$. Введение в Ω новых переменных дает для $(\Omega,\ \varphi)$ преобразование:

$$(\Omega,\ \varphi)=\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{\partial\Omega}{\partial H_k}(H_k,\ \varphi)+\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{\partial\Omega}{\partial H_k'}(H_k',\ \varphi). \tag{4}$$

Если мы введем новые переменные также и в φ и примем во внимание, что φ не зависит от одной из них, именно от H', и таким образом $\frac{\partial\varphi}{\partial H'}$ обращается в нуль, то мы получим для выражений $(H_k,\ \varphi)$, $(H_k',\ \varphi)$ следующие преобразования:

$$(H_k,\ \varphi)=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s}(H_k,\ H_s)+\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s'}(H_k,\ H_s'),$$
$$(H_k',\ \varphi)=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s}(H_k',\ H_s)+\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s'}(H_k',\ H_s').$$

Но по теореме, доказанной в прошлой лекции, все выражения $(H_k,\ H_s)$, $(H_k,\ H_s')$, $(H_k',\ H_s)$, $(H_k',\ H_s')$ обращаются в нуль, за исключением тех $(H_k,\ H_s')$, $(H_k',\ H_s)$, в которых k и s имеют одинаковые значения и из этих выражений первые равны положительной единице, вторые отрицательной. Поэтому выражения $(H_k,\ \varphi)$, $(H_k',\ \varphi)$ приобретают следующий простой вид:

$$(H_k,\ \varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial H_k'}$$
$$(H_k',\ \varphi)=-\frac{\partial\varphi}{\partial H_k}.$$

Вследствие этого равенство (4) переходит в такое:

$$(\Omega, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k'} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k'} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k}$$

и уравнение (3*) дает для $\frac{da}{dt}$ окончательно следующее значение:

$$\frac{da}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k'} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k'} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k}. \tag{5}$$

Частные производные возмущающей функции здесь умножаются на $\frac{\partial \varphi}{\partial H_k'}$ и $-\frac{\partial \varphi}{\partial H_k}$, т. е. на выражения, не содержащие явно t, так как t не входит в φ. В этом и состоит знаменитая теорема Пуассона.

Если мы придадим формуле (5) специальный вид, подставляя вместо φ величины $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H_1', \ldots H'_{n-1}$ и одновременно вместо a — соответственно величины $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h_1' \ldots h'_{n-1}$, то получим при $k = 0, 1, \ldots n-1$ формулы:

$$\frac{dh_k}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial H_k'}, \tag{6}$$

и для $k = 1, 2, \ldots n-1$

$$\frac{dh_k'}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial H_k}. \tag{7}$$

Теперь остается только рассмотреть тот интеграл „невозмущенной" задачи, через который вводится время, т. е. интеграл

$$H' = h' + t.$$

Так как теперь $h' + t$ становится на место a и H' на место φ, то уравнение (3) превращается в следующее:

$$\frac{dh'}{dt} + 1 = (H, H') + (\Omega, H'),$$

и так как имеет место равенство $(H, H') = 1$, то мы получаем:

$$\frac{dh'}{dt} = (\Omega, H').$$

Это уравнение в точности вида (3*), только на место a и φ входят h' и H'. Если в равенство (4) подставить также H' на место φ, то выражение (Ω, H') становится равным частной производной $\frac{\partial \Omega}{\partial H}$ и мы поэтому окончательно получаем:

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial H},$$

т. е. равенство (7) имеет место также для $k = 0$.

Равенства (2), которые для „невозмущенной" задачи изображают систему ее интегралов, для „возмущенной" являются только уравнениями, определяющими новые переменные $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h', h'_1, \ldots h'_{n-1}$ и служат для того, чтобы выражать старые переменные $q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$ или их функции $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H', H_1', \ldots H'_{n-1}$ через новые переменные. Если произвести эту подстановку в возмущающей функции, следовательно заменить в ней $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H', H_1', \ldots H'_{n-1}$ через $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h'+t, h_1', \ldots h'_{n-1}$, так что Ω будет функцией от $2n+1$ переменных $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h', h_1', \ldots h'_{n-1}$ и t, то производные $\frac{\partial \Omega}{\partial H_k}, \frac{\partial \Omega}{\partial H_k'}$ переходят в $\frac{\partial \Omega}{\partial h_k}, \frac{\partial \Omega}{\partial h_k'}$, и мы получаем для переменных, которые входят в „возмущенную" задачу, на место постоянных „невозмущенной", следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial h'}, & \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial h_1'}, & \ldots \frac{dh_{n-1}}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial h'_{n-1}}, \\ \frac{dh'}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial h}, & \frac{dh_1'}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial h_1}, & \ldots \frac{dh'_{n-1}}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial h_{n-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Эта система имеет ту же самую форму, что и дифференциальные уравнения движения „невозмущенной" задачи, только на место переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ и их функции H входят переменные $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h', h_1' \ldots h'_{n-1}$ и функция — Ω, из которых последняя содержит еще кроме того явно время t. Поэтому интегрирование этой системы, согласно прежним общим рассмотрениям, [1] равнозначно с определением полного решения уравнения в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0,$$

которое, после того как переменные $h', h'_1, \ldots h'_{n-1}$ будут заменены производными $\frac{\partial S}{\partial h}, \frac{\partial S}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial h_{n-1}}$, определит S как функцию от $t, h, h_1, \ldots h_{n-1}$.

Установленные здесь дифференциальные уравнения „возмущенной" задачи согласуются с дифференциальными уравнениями, данными Лагранжем и Лапласом, в том, что возмущенные элементы являются искомыми переменными и что правые части дифференциальных уравнений выражаются через производные от возмущающей функции по возмущенным элементам. Но здесь вообще входят в каждое дифференциальное уравнение все производные возмущающей функции, и коэффициентами при них являются выражения вида (φ, ψ); образование которых очень затруднительно. Более подробное изложение этого можно найти в аналитической механике Лагранжа, в которой с огромным искусством сокращена растянутость необходимых вычислений, а также в астрономическом ежегоднике Энке за 1837 год. В простом случае планетных возмущений по старым формулам необходимо вычислить 15 выражений вида (φ, ψ).

Только благодаря тому, что мы взяли элементы „невозмущенной" задачи как раз в форме, которую дает метод Гамильтона, мы смогли так упростить дифференциальные уравнения, что в каждое из них входит только *одна* производная от возмущающей функции и что коэффициент при этой производной приводится к положительной или отрицательной единице. Этот выбор элементов имеет огромную важность; поэтому при определении движения планет по методу Гамильтона мы подробно выяснили геометрическое значение введенных там произвольных постоянных.

Вместо того чтобы вводить переменные h_k и h_k' вместо первоначальных переменных p_i и q_i в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и, таким образом, окольным путем приходить к уравнению в частных

[1] См. двадцатую лекцию, стр. 137.

производных $\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0$, мы поставим себе в последующем задачу осуществить введение новых переменных непосредственно в уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + \Omega = 0, \tag{9}$$

которое относится к задаче возмущения, выраженной в ее первоначальных переменных.

Предполагая, что для уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + H = 0, \tag{10}$$

принадлежащего „невозмущенной“ задаче, известно полное решение V_0, требующееся для определения новых переменных h_k и h_k', мы перейдем от уравнения в частных производных (9) непосредственно к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0. \tag{11}$$

Уравнение в частных производных (9), в котором величины $p_1, p_2, \ldots p_n$ заменены частными производными $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$, равнозначно с уравнением в полных дифференциалах

$$dV = -(H + \Omega)\, dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n, \tag{12}$$

где в H и Ω снова на месте $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$ стоят $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Вводя, как новые переменные, функции, которые в „невозмущенной“ задаче обращаются в произвольные постоянные, мы должны осуществить подстановку той же природы, как рассмотренная в двадцать первой лекции, но более общую, чем та. В рассматриваемом случае, так же, как и там, не только надо ввести вместо независимых переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, t$ и вместо искомой их функции V новые переменные, но новые переменные должны кроме того зависеть от $p_1, p_2, \ldots p_n$, т. е. от взятых по $q_1, q_2, \ldots q_n$ производных функций V. Преобразование, о котором идет речь, производится следующим образом:

Для „невозмущенной“ задачи мы имеем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + H = 0, \tag{10}$$

которое в двадцать первой лекции [1] подстановкой

$$V_0 = W - ht$$

мы привели к уравнению

$$H = h.$$

Полное решение W этого уравнения в частных производных есть функция от $q_1, q_2, \ldots q_n$, содержащая кроме h еще $n-1$ произвольных постоянных

[1] Стр. 144.

$h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$. Если мы его нашли, то система интегральных уравнений „невозмущенной“ задачи будет иметь вид:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}=p_n.$$

$$\frac{\partial W}{\partial h}=t+h', \quad \frac{\partial W}{\partial h_1}=h_1', \ldots \frac{\partial W}{\partial h_{n-1}}=h'_{n-1}.$$

Так как в „невозмущенной“ задаче $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ являются постоянными, то W удовлетворяет уравнению в полных дифференциалах

$$dW=p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n.$$

В задаче возмущения напротив на место произвольных постоянных входят функции времени: $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ делаются переменными, и к полному дифференциалу W присоединяется сумма

$$\frac{\partial W}{\partial h}dh+\frac{\partial W}{\partial h_1}dh_1+\ldots+\frac{\partial W}{\partial h_{n-1}}dh_{n-1}=(t+h')\,dh+$$
$$+h_1'dh_1+h_2'dh_2+\ldots+h'_{n-1}dh_{n-1}.$$

Таким образом в задаче возмущения имеем

$$dW=p_1dq_1+p_2dq_2+\ldots+p_ndq_n+(t+h')\,dh+$$
$$+h_1'dh_1+h_2'dh_2+\ldots+h'_{n-1}dh_{n-1}. \qquad (13)$$

Это уравнение удовлетворяется тождественно интегральными уравнениями, если рассматривать прежние постоянные как переменные, т. е. если это будут интегральные уравнения задачи возмущения, а не „не возмущенной“ задачи. Итак, в этом случае рассматриваемое уравнение будет *тождеством*. Поэтому уравнение в полных дифференциалах (12) для dV не изменится, если мы из него вычтем равенство (13) для dW. Если мы возьмем разность с обратным знаком, то получим:

$$d(W-V)=(H+\Omega)\,dt+(t+h')\,dh+h_1'\,dh_1+$$
$$+h_2'dh_2+\ldots+h'_{n-1}dh_{n-1}.$$

Но при посредстве интегральных уравнений задачи возмущения будет также тождественно $H=h$, следовательно члены $Hdt+tdh$, стоящие в правой части, соединятся в один член $d(ht)$. Перенеся эту величину в левую часть, мы получим

$$d(W-ht-V)=\Omega dt+h'dh+h_1'dh_1+\ldots+h'_{n-1}dh_{n-1}.$$

и если мы положим

$$W-ht-V=V_0-V=S,$$

то

$$dS=\Omega dt+h'dh+h_1'dh_1+\ldots+h'_{n-1}dh_{n-1},$$

и это уравнение в полных дифференциалах равнозначно с вышеполученным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\Omega=0, \qquad (11)$$

в котором величины $h', h_1', \ldots h'_{n-1}$ должны быть заменены производными $\frac{\partial S}{\partial h}, \frac{\partial S}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial h_{n-1}}$. Наконец уравнение в частных производных (11) есть то, к которому приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений (8). Итак, мы пришли кратчайшим путем к той же системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial h'},\quad \frac{dh_1}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial h_1'},\quad\ldots\quad \frac{dh_{n-1}}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial h'_{n-1}},$$
$$\frac{dh'}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial h},\quad \frac{dh_1'}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial h_1},\quad\ldots\quad \frac{dh'_{n-1}}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial h_{n-1}},$$

которую мы раньше нашли другим способом.

Эта система дифференциальных уравнений обладает тем преимуществом, что первую поправку элементов мы находим простыми квадратурами. Она получится, если рассматривать в Ω элементы как постоянные и придавать им те значения, которые они имели в „невозмущенной“ задаче. Тогда Ω будет функцией только от времени t и исправленные элементы получатся простыми квадратурами. Определение высших поправок является трудной задачей, которой мы здесь не можем касаться.

Существует еще другая замечательная система формул, которая получается также при введении в качестве элементов постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}$, $h', h_1', \ldots h'_{n-1}$. Из двух главных форм, в которых можно представить интегральные уравнения, мы рассматривали до сих пор ту форму

$$H=h,\ H_1=h_1,\ldots H_{n-1}=h_{n-1},$$
$$H'=h'+t,\ H_1'=h_1',\ldots H'_{n-1}=h'_{n-1},$$

в которой уравнения решены относительно произвольных постоянных h_k и h_k', а величины H_k и H_k' являются функциями только переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$. Вторая главная форма та, в которой $2n$ переменных $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ представляются как функции от t и от постоянных $h, h_1, \ldots h_{n-1}$, $h', h_1', \ldots h'_{n-1}$. Смотря по тому, выбираем ли мы ту или другую форму, мы имеем в теории возмущения дело либо с частными производными величин H_k и H_k' по переменным q_i и p_i, либо с производными переменных q_i и p_i по произвольным постоянным h_k и h_k', т. е. мы должны либо, как это делал Пуассон, брать производные по переменным от функций, которым равны элементы, либо, как это делал Лагранж, брать производные от переменных по элементам. В каждом случае приходится составлять систему $4n^2$ производных. Постоянные h_k и h_k', которые мы получаем благодаря представлению интегральных уравнений в форме Гамильтона, кроме уже указанных замечательных свойств, имеют теперь еще то свойство, что обе системы производных будут либо равны, либо противоположны по знаку.

В самом деле, по теореме, доказанной в прошлой лекции, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&(H_i, H)=0,\quad (H_i, H_1)=0\ldots(H_i, H_{i-1})=0,\\
&(H_i, H_i)=0,\ (H_i, H_{i+1})=0\ldots(H_i, H_{n-1})=0,\\
&(H_i, H')=0,\quad (H_i, H_1')=0\ldots(H_i, H'_{i-1})=0,\\
&(H_i, H_i')=1,\quad (H_i, H'_{i+1})=0,\ldots(H_i, H'_{n-1})=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

В этих $2n$ уравнениях содержатся линейно $2n$ частных производных от H_i:

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_2},\quad\ldots\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_n},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_2},\quad\ldots\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_n},$$

которые мы рассматриваем как неизвестные для этой системы. Коэффициентами этих $2n$ неизвестных в уравнениях (14) являются $2n$ величин

$$-\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad -\frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots \quad -\frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial q_n}$$

и соответствующие величины, получаемые при дифференцировании функций H_1, $H_2, \ldots H_{n-1}$, H', $H_1', \ldots H'_{i-1}$, H_i', $H'_{i+1}, \ldots H'_{n-1}$. В правой части уравнений (14) везде стоит нуль, с единственным исключением того уравнения, коэффициентами которого являются производные от H_i' и у которого правая часть равна единице.

Такую же самую систему линейных уравнений, т. е. систему, в которой коэффициенты и правые части те же самые, мы получим для производных от $-p_1$, $-p_2, \ldots -p_n$, q_1, $q_2, \ldots q_n$, взятых по h_i'. Действительно, интегралы

$$\begin{array}{llllll} H = h, & H_1 = h_1, & H_2 = h_2, \ldots & H_i = h_i, \ldots & H_{n-1} = h_{n-1}, \\ H' = t + h', & H_1' = h_1', & H_2' = h_2', \ldots & H_i' = h_i', \ldots & H'_{n-1} = h'_{n-1} \end{array}$$

станут тождествами, если мы предположим подставленными в них вместо переменных q_1, $q_2, \ldots q_n$, p_1, $p_2, \ldots p_n$ их выражения через t и $2n$ произвольных постоянных. Поэтому от них можно брать частные производные по каждой произвольной постоянной, и после дифференцирования по h_i' получится система уравнений

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\partial H}{\partial h_i'} = 0, & \dfrac{\partial H_1}{\partial h_i'} = 0, & \ldots & \dfrac{\partial H_{i-1}}{\partial h_i'} = 0, \\ \dfrac{\partial H_i}{\partial h_i'} = 0, & \dfrac{\partial H_{i+1}}{\partial h_i'} = 0, & \ldots & \dfrac{\partial H_{n-1}}{\partial h_i'} = 0, \\ \dfrac{\partial H'}{\partial h_i'} = 0, & \dfrac{\partial H_1'}{\partial h_i'} = 0, & \ldots & \dfrac{\partial H'_{i-1}}{\partial h_i'} = 0, \\ \dfrac{\partial H_i'}{\partial h_i'} = 1, & \dfrac{\partial H'_{i+1}}{\partial h_i'} = 0, & \ldots & \dfrac{\partial H'_{n-1}}{\partial h_i'} = 0, \end{array}\right\} \tag{15}$$

из которых первое, например, в раскрытой форме выглядит так:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h_i'} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h_i'} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial h_i'} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial h_i'} + \\ + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial h_i'} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial h_i'} = 0.$$

Эта система отличается от системы (14) только тем, что на месте прежних неизвестных

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial q_2}, \ldots \quad \frac{\partial H_i}{\partial q_n}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial p_2}, \ldots \quad \frac{\partial H_i}{\partial p_n}$$

теперь стоят величины

$$-\frac{\partial p_1}{\partial h_i'}, \quad -\frac{\partial p_2}{\partial h_i'}, \ldots \quad -\frac{\partial p_n}{\partial h_i'}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial h_i'}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial h_i'}, \ldots \quad \frac{\partial q_n}{\partial h_i'}.$$

Но, если в двух системах линейных уравнений коэффициенты и постоянные члены соответственно равны между собой, то равны также и неизвестные, если только определитель системы, т. е. в рассматриваемом случае выражение

$$\sum \pm \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_n} \frac{\partial H'}{\partial p_1} \frac{\partial H'_1}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H'_{n-1}}{\partial p_n}$$

не обращается в нуль. Но такой случай не может иметь места, так как иначе $2n$ величин $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H', \ldots H'_{n-1}$ не были бы независимыми друг от друга функциями $2n$ переменных $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ и система интегралов была бы недостаточна для определения этих $2n$ переменных как функций от $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h'+t, h_1' \ldots h'_{n-1}$. Поэтому обе системы неизвестных равны между собой, т. е. мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial h_i'} &= \frac{\partial H_i}{\partial p_1}, & \frac{\partial q_2}{\partial h_i'} &= \frac{\partial H_i}{\partial p_2}, & \ldots \frac{\partial q_n}{\partial h_i'} &= \frac{\partial H_i}{\partial p_n}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial h_i'} &= -\frac{\partial H_i}{\partial q_1}, & \frac{\partial p_2}{\partial h_i'} &= -\frac{\partial H_i}{\partial q_2}, & \ldots \frac{\partial p_n}{\partial h_i'} &= -\frac{\partial H_i}{\partial q_n}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

С этой системой формул, происходящей от сравнения систем (14) и (15), можно сопоставить другую, выводимую из нее простой перестановкой. В самом деле, системы (14) и (15) дают снова верные системы уравнений, если для всех значений значка i подставить вместо величин без штриха H_i, h_i соответствующие взятые с отрицательным знаком величины с одним штрихом — H_i', — h_i' и, напротив, на место величин с одним штрихом H_i', h_i' поставить соответствующие взятые с положительным знаком величины без штриха H_i, h_i. Этот способ перестановки должен быть поэтому применим также к системе (16), и мы получаем из нее новую систему формул:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial h_i} &= -\frac{\partial H_i'}{\partial p_1}, & \frac{\partial q_2}{\partial h_i} &= -\frac{\partial H_i'}{\partial p_2}, & \ldots \frac{\partial q_n}{\partial h_i} &= -\frac{\partial H_i'}{\partial p_n}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial h_i} &= \frac{\partial H_i'}{\partial q_1}, & \frac{\partial p_2}{\partial h_i} &= \frac{\partial H_i'}{\partial q_2}, & \ldots \frac{\partial p_n}{\partial h_i} &= \frac{\partial H_i'}{\partial q_n}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Мы соединим системы формул (16) и (17) в следующие четыре уравнения

$$\frac{\partial q_k}{\partial h_i'} = \frac{\partial H_i}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial h_i} = -\frac{\partial H_i'}{\partial p_k}; \quad \frac{\partial p_k}{\partial h_i'} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial h_i} = \frac{\partial H_i'}{\partial q_k}$$

и выразим полученный результат следующей теоремой: [1]

Допустим, что посредством представленных в гамильтоновой форме систем интегралов

$$H = h, \quad H_1 = h_1, \ldots H_{n-1} = h_{n-1},$$
$$H' = h' + t, \quad H_1' = h_1', \ldots H'_{n-1} = h'_{n-1}$$

с одной стороны постоянные h_k, h_k' выражены через переменные p_i, q_i и время t, с другой стороны эти переменные p_i и q_i выражены из тех же уравнений через постоянные и время t; тогда частные производные от постоянных по переменным p_i, q_i, взятые при первом способе выражения, и частные производные от переменных p_i, q_i, взятые по постоянным при последнем способе выражения, попарно равные между собой, если не принимать во внимание знака.

---

[1] Эта теорема сообщена 21 ноября 1838 г. берлинской академии (см. Monatsberichte, 1838, стр. 178).

17*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Весною 1843 г. тяжелая болезнь помешала Якоби закончить его лекции по динамике. Но расположение этих лекций ясно показывает, что в конце их он хотел изложить свой метод интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка, изложенный в статье, полностью обработанной в 1838 г. и найденной среди оставшихся после него бумаг. Статью эту я опубликовал в 60-м томе Математического журнала. Положив в основу эту статью, я попробовал здесь восполнить в духе Якоби тот пробел, который остался в конце его лекций.

Клебш

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Интегрирование уравнения в частных производных $f=h$ или $H=h$ в тридцать второй лекции (стр. 223) было приведено к решению системы совместных уравнений

$$(H_i,\ H_k)=0. \tag{1}$$

Если функции H определены из этих уравнений, то уравнения

$$H=h,\ H_1=h_1,\ \dots\ H_{n-1}=h_{n-1} \tag{2}$$

дают такие значения для p, для которых выражение

$$dV=p_1dq_1+p_2dq_2+\dots+p_ndq_n$$

будет полным дифференциалом. Но вместо того чтобы произвести совместное интегрирование системы (1) при помощи принципов, изложенных в тридцать четвертой лекции, можно поставить себе задачу непосредственно найти выражения, которые принимают $p_1, p_2, \dots p_n$, вследствие уравнений (2). Представим себе, как это изложено в тридцать первой лекции (стр. 213), p_1 выраженным в функции величин q и $p_2, p_3, \dots p_n$, далее p_2 определенным в функции величин q и $p_3, p_4, \dots p_n$ и т. д. Если найдены $p_1, p_2, \dots p_i$, то раньше, чем приступить к разысканию p_{i+1}, их можно выразить через $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n$ и через q. Те i уравнений, которым тогда должна одновременно удовлетворять функция p_{i+1}, найдем из уравнения (7) тридцать первой лекции (стр. 213), если в нем заменим i последовательно числами $1, 2, \dots i$, а вместо i подставим $i+1$. И так как тогда p_i зависит только от $p_{+1}, p_{i+2}, \dots p_n$, а p_{i+1}—

только от $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_n$, то указанное уравнение приводит к следующей системе:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+3}} + \ldots + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} \times \\
&\times \frac{\partial p_1}{\partial q_n} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+3}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \ldots - \\
&\qquad\qquad - \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = 0, \\
&\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+3}} + \ldots + \\
&+ \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+3}} \times \\
&\qquad \times \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \ldots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+3}} + \ldots + \\
&+ \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial q_n} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+3}} \times \\
&\qquad \times \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \ldots - \frac{\partial p_i}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Мы можем еще преобразовать эту систему, для чего, вместо того, чтобы рассматривать p_{i+1} как функцию величин $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, вводим уравнение

$$f = \text{const},$$

связывающее p_{i+1} и эти величины. Тогда будем иметь для $h > i + 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_h} + \frac{\partial f}{\partial p_h} = 0$$

и для всякого значения h:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \cdot \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_h} + \frac{\partial f}{\partial q_h} = 0.$$

Таким образом, если уравнения (3) умножить соответственно на $\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}$, то они примут следующую форму:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}}+\ldots+\frac{\partial p_1}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_n}-\\
&\quad-\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}}-\ldots-\frac{\partial p_1}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_n}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial q_2}+\frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}}+\ldots+\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_n}-\\
&\quad-\frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}}-\ldots-\frac{\partial p_2}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}}+\ldots+\frac{\partial p_1}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_n}-\\
&\quad-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\,\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}}-\ldots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_n}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Совместное интегрирование этой системы опирается на теоремы, данные в конце тридцать первой лекции и в тридцать четвертой лекции. Пусть $p_\varkappa$ есть одна из величин $p_1, p_2, \ldots p_n$ и пусть

$$\varphi_\varkappa-p_\varkappa=0$$

есть уравнение, при помощи которого $p_\varkappa$ выражается через $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, тогда

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa-p_\varkappa)}{\partial p_{i+h}}=\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial p_{i+h}}=\frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+h}},$$

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa-p_\varkappa)}{\partial q_h}=\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial q_h}=\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_h};$$

если же $h<i+1$, то мы имеем

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa-p_\varkappa)}{\partial p_h}=0,\qquad\frac{\partial(\varphi_\varkappa-p_\varkappa)}{\partial p_\varkappa}=-1.$$

Поэтому уравнения (4) при помощи обозначения (φ, ψ) могут быть написаны так:

$$(f,\ \varphi_1-p_1)=0,\ (f,\ \varphi_2-p_2)=0,\ \ldots\ (f,\ \varphi_i-p_i)=0.\qquad(5)$$

Если мы теперь образуем выражение $(\varphi_\varkappa-p_\varkappa,\ \varphi_\lambda-p_\lambda)$, где $\varkappa$ и λ обозначают какие-нибудь два из чисел $1, 2, \ldots i$, то получим:

$$(\varphi_\varkappa-p_\varkappa,\ \varphi_\lambda-p_\lambda)=0.$$

В самом деле, как $\varphi_\varkappa-p_\varkappa$, так и $\varphi_\lambda-p_\lambda$ принадлежат системе уравнений, служащих для определения p, а потому, на основании теоремы, данной в конце тридцать первой лекции, вышеприведенное выражение должно обращаться в нуль. Далее в тридцать четвертой лекции было показано, что если $(\varphi, \psi)=0$, то из одного решения F уравнения

$$(f, \varphi)=0$$

можно вывести дальнейшие решения:

$$F'=(F, \psi), \quad F''=(F', \psi) \text{ и т. д.}$$

Если мы применим эту теорему к каким-нибудь двум уравнениям

$$(f, \varphi_\varkappa-p_\varkappa)=0, \quad (f, \varphi_\lambda-p_\lambda)=0$$

системы (5), то увидим, что из какой-либо функции F, удовлетворяющей уравнению

$$(F, \varphi_\varkappa-p_\varkappa)=0,$$

можно получить ряд новых решений этого же уравнения, а именно такие:

$$F'=(F, \varphi_\lambda-p_\lambda) \quad F''=(F', \varphi_\lambda-p_\lambda) \text{ и т. д.}$$

Наконец, отсюда следует теорема: *Если F есть совместное решение уравнений*

$$(f, \varphi_1-p_1)=0, \ (f, \varphi_2-p_2)=0, \ \ldots \ (f, \varphi_{h-1}-p_{h-1})=0,$$

то выражения

$$F'=(F, \varphi_h-p_h), \ F''=(F', \varphi_h-p_h), \ \ldots$$

также будут совместными решениями тех же уравнений.

Предположим теперь, что нами найдено одно общее решение F первых $h-1$ уравнений (5) и ищется решение, которое удовлетворяет также h-му из этих уравнений. Тогда встает вопрос, существует ли такая функция Φ, которая удовлетворяет последнему уравнению и является функцией только от F, от полученных из F решений $F', F'', \ldots F^{(\mu-1)}$ и от величин $q_h, q_{h+1}, \ldots q_i$, причем эти последние величины, очевидно, удовлетворяют $h-1$ первым уравнениям (5) [или (4)]. Число μ ограничено тем, что функция $F^{(\mu)}$ должна выражаться через предыдущие функции $F, F', \ldots$ $\ldots F^{(\mu-1)}$ и через $q_h, q_{h+1}, \ldots q_i$, так что

$$F^{(\mu)}=\Pi\left(F, F', \ldots F^{(\mu-1)}, q_h, q_{h+1}, \ldots q_i\right).$$

Но $h-1$ друг от друга независимых линейных уравнений в частных производных с $2n-i$ переменными $q_1, q_2, \ldots q_n, p_{i+1}, p_n$ вообще допускают только

$$2n-i-(h-1)$$

общих решений; поэтому число аргументов функции Π не может превышать этого числа, т. е.

$$\mu+i-(h-1) \leqq 2n-i-(h-1)$$

или

$$\mu \leqq 2(n-i).$$

Если мы теперь будем рассматривать некоторое решение Φ уравнения

$$(\Phi, \varphi_h-p_h)=0, \tag{6}$$

как функцию аргументов, входящих в функцию П, то получим

$$0=(\Phi, \varphi_h-p_h)=\frac{\partial\Phi}{\partial F}(F, \varphi_h-p_h)+\frac{\partial\Phi}{\partial F'}(F', \varphi_h-p_h)+\ldots+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial F^{(\mu-1)}}\left(F^{(\mu-1)}, \varphi_h-p_h\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial q_h}(q_h, \varphi_h-p_h)+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial q_{h+1}}(q_{h+1}, \varphi_h-p_h)+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}(q_i, \varphi_h-p_h). \qquad (7)$$

Так как h-ое уравнение системы (4) или (5) содержит только производные, взятые по q_h, но не по $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots q_i$, то коэффициенты

$$(q_{h+1}, \varphi_h-p_h), (q_{h+2}, \varphi_h-p_h), \ldots (q_i, \varphi_h-p_h)$$

обращаются в нуль и, кроме того, мы находим:

$$(q_h, \varphi_h-p_h)=1.$$

Если мы теперь примем во внимание закон образования функций F, то увидим, что уравнение (6) или (7) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_h}+F'\frac{\partial\Phi}{\partial F}+F''\frac{\partial\Phi}{\partial F'}+\ldots+\Pi\frac{\partial\Phi}{\partial F^{(\mu-1)}}=0. \qquad (8)$$

Вид этого уравнения свидетельствует о том, что указанным способом можно определить функцию Ф; в самом деле, коэффициенты этого уравнения содержат только те переменные, от которых по предположению зависит функция Ф.

Для того чтобы получить решение уравнения (8), требуется найти только один интеграл системы дифференциальных уравнений или, что равносильно этому, первый интеграл дифференциального уравнения μ-го порядка

$$\frac{d^\mu F}{dq_h^\mu}=\Pi,$$

где в функцию π надо поставить вместо величин $F', F'', \ldots F^{(\mu-1)}$ величины

$$\frac{\partial F}{\partial q_h}, \frac{d^2F}{\partial q_h^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}F}{dq_h^{\mu-1}}.$$

Этот результат можно представить в виде следующей теоремы: *Если известно совместное решение, общее для первых $h-1$ уравнений системы (4) или (5), то для разыскания решения, удовлетворяющего также и h-му уравнению, требуется только знание одного первого интеграла некоторого дифференциального уравнения порядка не выше 2 $(n-i)$-го.*

Чтобы теперь найти решение, общее для всей системы (5), надо указанную операцию повторить i раз подряд. Сначала разыскиваем решение F первого уравнения (5) или интеграл системы 2 $(n-1)$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_{i+1}}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}, \quad \frac{dp_{i+2}}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}, \ldots \frac{dp_n}{dq_1}=\frac{dp_1}{dq_n},$$

$$\frac{dq_{i+1}}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}},\quad \frac{dq_{i+2}}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}},\quad \ldots\quad \frac{dq_n}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Затем выводим отсюда другие решения того же уравнения, а именно:

$$F'=(F,\ \varphi_2-p_2),\ F''=(F',\ \varphi_2-p_2),\ \ldots\ F^{(\mu)}=\Pi\,(F,\ F',\ \ldots\ F^{(\mu-1)},\ q_2,\ q_3,\ \ldots\ q_i).$$

Всякий первый интеграл уравнения

$$\frac{d^{\mu}F}{dq_2^{\mu}}=\Pi\left(F,\ \frac{dF}{dq_2},\ \ldots\ \frac{d^{(\mu-1)}F}{dq_2^{(\mu-1)}},\ q_2,\ q_3,\ \ldots\ q_i\right),$$

содержащий произвольную постоянную, дает решение, удовлетворяющее обоим первым уравнениям (5). Пусть Φ будет это решение; образуем функции

$$\Phi'=(\Phi,\ \varphi_3-p_3),\ \Phi''=(\Phi',\ \varphi_3-p_3),\ldots\ \Phi^{(\nu)}=\Pi(\Phi,\ \Phi',\ldots\ \Phi^{(\nu-1)},\ q_3,\ q_4,\ldots q_i).$$

Каждый первый интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{d^{\nu}\Phi}{dq_3^{\nu}}=\Pi\left(\Phi,\ \frac{d\Phi}{dq_3},\ \frac{d^2\Phi}{dq_3^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu-1}\Phi}{dq_3^{\nu-1}},\ q_3,\ q_4,\ \ldots\ q_i\right),$$

содержащий произвольную постоянную, дает функцию, удовлетворяющую трем первым уравнениям (5), и т. д.

Итак, разыскание решения общего для всей системы (5) или (4) требует знания одного первого интеграла каждого из i дифференциальных уравнений, из которых первое $2\,(n-i)$-го порядка, а остальные могут быть также и низшего порядка.

Весь процесс интегрирования требует, таким образом, прежде всего нахождения величины p_1 из данного уравнения в частных производных. Как только это сделано, то разыскиваем, во-первых, интеграл системы $2\,(n-1)$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_2}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_2},\quad \frac{dp_3}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_3},\quad \ldots\quad \frac{dp_n}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$

$$\frac{dq_2}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_2},\quad \frac{dq_3}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_3},\quad \ldots\quad \frac{dq_n}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Из найденного интеграла определяем p_2 как функцию q и следующих p, и, вводя эту функцию в выражение для p_1, представляем p_1 как функцию этих же величин.

Затем, *во-вторых,* ищем интеграл системы $2\,(n-2)$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_3}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_3},\quad \frac{dp_4}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_4},\quad \ldots\quad \frac{dp_n}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$

$$\frac{dq_3}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_3},\quad \frac{dq_4}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_4},\quad \ldots\quad \frac{dq_n}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_n},$$

где производные от p_1 взяты уже в новом, только что указанном, смысле. Пусть $F=\mathrm{const}$ есть интеграл этой системы. Образуем функции

$$F' = \frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_3} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4} \frac{\partial F}{\partial p_4} + \ldots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \frac{\partial F}{\partial q_4} - \ldots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

$$F'' = \frac{\partial F'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3} \frac{\partial F'}{\partial p_3} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4} \frac{\partial F'}{\partial p_4} + \ldots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial F'}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_3} \frac{\partial F'}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \frac{\partial F'}{\partial q_4} - \ldots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial F'}{\partial q_n} \text{ и т. д.,}$$

до тех пор, пока не получим такую функцию $F^{(\mu)}$ (где $\mu \leq 2(n-2)$), которая может быть представлена как функция от q_2, F, F', $\ldots$ $F^{(\mu-1)}$. Если эта функция будет

$$F^{(\mu)} = \Pi(F,\ F',\ \ldots\ F^{(\mu-1)},\ q_2),$$

то мы должны далее разыскать первый интеграл дифференциального уравнения μ-го порядка

$$\frac{d^\mu F}{dq_2^\mu} = \Pi\left(F,\ \frac{dF}{dq_2},\ \frac{d^2F}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}F}{dq_2^{\mu-1}},\ q_2\right):$$

этот интеграл имеет вид:

$$\Phi\left(F, \frac{dF}{dq_2},\ \frac{d^2F}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}F}{dq_2^{\mu-1}},\ q_2\right) = \text{const}.$$

После этого образуем уравнение

$$\Phi(F,\ F',\ F'',\ \ldots\ F^{(\mu-1)},\ q_2) = \text{const}.$$

Это уравнение служит для определения p_3. Выразив p_3 через p_4, p_5, $\ldots$ p_n и q и при посредстве полученного выражения, представив также p_1 и p_2 как функции этих же аргументов, мы разыскиваем, *в-третьих*, интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4},\quad \frac{dp_5}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_5},\ \ldots\ \frac{dp_n}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$

$$\frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4},\quad \frac{dq_5}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_5},\ \ldots\ \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Пусть этот интеграл будет $\Psi = \text{const}$, тогда мы снова образуем функции

$$\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial p_5} + \ldots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5} \frac{\partial \Psi}{\partial q_5} - \ldots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_n},$$

$$\Psi'' = \frac{\partial \Psi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5} \frac{\partial \Psi'}{\partial p_5} + \ldots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n} \frac{\partial \Psi'}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4} \frac{\partial \Psi'}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5} \frac{\partial \Psi'}{\partial q_5} - \ldots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n} \frac{\partial \Psi'}{\partial q_n} \text{ и т. д.,}$$

пока не придем к функции

$$\Psi^{(\nu)} = \Pi(\Psi,\ \Psi',\ \ldots\ \Psi^{(\nu-1)},\ q_2,\ q_3),$$

где $\nu \leqq 2(n-3)$. Далее разыскиваем первый интеграл дифференциального уравнения ν-го порядка

$$\frac{d^\nu \Psi}{dq_2^\nu} = \Pi\left(\Psi,\ \frac{d\Psi}{dq_2},\ \frac{d^2\Psi}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu-1}\Psi}{dq_2^{\nu-1}},\ q_2,\ q_3\right),$$

он имеет вид

$$X\left(\Psi,\ \frac{d\Psi}{dq_2},\ \frac{d^2\Psi}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu-1}\Psi}{dq_2^{\nu-1}},\ q_2,\ q_3\right) = \text{const}.$$

После этого из функции

$$X(\Psi,\ \Psi',\ \Psi'',\ \ldots\ \Psi^{(\nu-1)},\ q_2,\ q_3)$$

образуем следующие функции

$$X' = \frac{\partial X}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\cdot\frac{\partial X}{\partial p_4} + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\cdot\frac{\partial X}{\partial p_5} + \ldots + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial X}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\cdot\frac{\partial X}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\cdot\frac{\partial X}{\partial q_5} - \ldots - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial X}{\partial q_n},$$

$$X'' = \frac{\partial X'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial X'}{\partial p_4} + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\frac{\partial X'}{\partial p_5} + \ldots + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial X'}{\partial p_n} -$$

$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial X'}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial X'}{\partial q_5} - \ldots - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial X'}{\partial q_n} \text{ и т. д.}$$

до тех пор, пока не придем к функции

$$X^{(\rho)} = \Pi(X,\ X',\ \ldots\ X^{(\rho-1)},\ q_3),$$

(где $\rho \leqq 2(n-3)$). После этого разыскиваем первый интеграл дифференциального уравнения ρ-го порядка:

$$\frac{d^\rho X}{dq_3^\rho} = \Pi\left(X,\ \frac{dX}{dq_3},\ \ldots\ \frac{d^{\rho-1}X}{dq_3^{\rho-1}},\ q_3\right):$$

он имеет вид:

$$\Omega\left(X,\ \frac{dX}{dq_3},\ \ldots\ \frac{d^{\rho-1}X}{dq_3^{\rho-1}},\ q_3\right) = \text{const}.$$

Уравнение

$$\Omega(X,\ X',\ \ldots\ X^{(\rho-1)},\ q_3) = \text{const}.$$

послужит для того, чтобы выразить p_4 через p_5, p_6, ... p_n и затем представить p_1, p_2, p_3 также как функции этих аргументов.

Продолжая этот процесс далее, мы приходим наконец к тому, что p_1, p_2, ... p_{n-1} выразятся как функции от p_n и от величин q. После этого мы должны будем выразить последнюю величину p_n через одни только q.

Для этого сначала разыскиваем интеграл Ξ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_n}{dq_1}=\frac{\partial p_1}{\partial q_n}, \quad \frac{dq_n}{dq_1}=-\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

После этого образуем функции

$$\Xi'=\frac{\partial \Xi}{\partial q_2}+\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Xi}{\partial p_n}-\frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Xi}{\partial q_n},$$

$$\Xi''=\frac{\partial \Xi'}{\partial q_2}+\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Xi'}{\partial p_n}-\frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Xi}{\partial q_n};$$

из этих функций, если не первая, то, во всяком случае, вторая выразятся через Ξ или соответственно через Ξ и Ξ' и через величины $q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$. Затем, в случае, когда

$$\Xi'=\Pi(\Xi, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}),$$

мы интегрируем уравнение

$$\frac{d\Xi}{dq_2}=\Pi(\Xi, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}),$$

в случае же, когда

$$\Xi''=\Pi(\Xi, \Xi', q_2, q_3, \ldots q_{n-1}),$$

интегрируем уравнение

$$\frac{d^2\Xi}{dq_2^2}=\Pi\left(\Xi, \frac{d\Xi}{dq_2}, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}\right).$$

В первом из этих случаев приходим к функции

$$Y=Y(\Xi, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}),$$

во втором случае, заменяя производную от Ξ снова через Ξ', приходим к функции

$$Y=Y(\Xi, \Xi', q_2, q_3, \ldots q_{n-1}).$$

Далее, из функции Y образуем функции

$$Y'=\frac{\partial Y}{\partial q_3}+\frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial Y}{\partial p_n}-\frac{\partial p_3}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial Y}{\partial q_n},$$

$$Y''=\frac{\partial Y'}{\partial q_3}+\frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial Y'}{\partial p_n}-\frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial Y'}{\partial q_n}$$

и т. д. Продолжая этот процесс, приходим наконец к функции Z, из которой выводим функции

$$Z'=\frac{\partial Z}{\partial q_{n-1}}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial Z}{\partial p_n}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial Z}{\partial q_n},$$

$$Z''=\frac{\partial Z'}{\partial q_{n-1}}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial Z'}{\partial p_n}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial Z'}{\partial q_n}.$$

Если уже Z' является функцией Π от Z и q_{n-1}, то мы интегрируем уравнение

$$\frac{dZ}{dq_{n-1}}=\Pi(Z, q_{n-1}),$$

и найденный интеграл дает последнее уравнение, посредством которого p_n выражается через q. Но, если только

$$Z'' = \Pi(Z,\ Z',\ q_{n-1}),$$

то мы должны найти первый интеграл дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2Z}{dq_{n-1}^2} = \Pi\left(Z,\ \frac{dZ}{dq_{n-1}},\ q_{n-1}\right).$$

Если этот интеграл имеет вид

$$\Theta\left(Z,\ \frac{dZ}{dq_{n-1}},\ q_{n-1}\right) = \text{const},$$

то для определения p_n служит уравнение

$$\Theta(Z,\ Z',\ q_{n-1}) = \text{const}.$$

Таким образом, при помощи этих операций разыскание полного решения данного уравнения в частных производных доведено до того момента, когда остается только выполнить квадратуру и получить

$$V = \int (p_1dq_1 + p_2dq_2 + \ldots + p_ndq_n).$$

Если каждую из рассмотренных систем свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению высшего порядка, то придется разыскивать по одному интегралу:

для одного дифференциального уравнения $2(n-1)$-го порядка,
„ двух дифференциальных уравнений $2(n-2)$-го порядка,
„ i дифференциальных уравнений $2(n-i)$-го порядка,
„ $n-1$ дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Но только в самом неблагоприятном случае все дифференциальные уравнения действительно достигают указанного здесь порядка. Вообще же, в каждом данном классе только одно уравнение достигает этого порядка, порядки же других уравнений более или менее снижены.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.