АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

А. А. ЗИНОВЬЕВ

# ЛОГИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

Под логической физикой в книге понимается раздел логики, в котором исследуется терминология, относящаяся к пространству, времени, движению, причинности и т. д. В отличие от физики и философии, в которых формулируются совокупности утверждений о пространстве, времени и движении, сфера логической физики ограничивается исключительно логическими свойствами этой терминологии и содержащих ее утверждений. Автор рассматривает термины, обозначающие пространственный и временной порядок предметов, а также понятия индивида, структуры, эмпирической связи, движения, причинности, возможности, необходимости, вероятности, закона и т. д. При этом анализируются известные парадоксы движения и эмпирических связей, устанавливается различие логических следствий из определений терминов и физических допущений, предлагаются логические исчисления, дающие обоснование некоторым идеям современной физики и философии.

1-5-2

№ 149-73 г.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Логической физикой мы называем раздел логики, в котором исследуются некоторые языковые выражения, относящиеся к пространству, времени, движению, причинности и т. д. В отличие от философии и физики, которые формулируют совокупность утверждений о пространстве, времени, движении, причинности и т. д., а также совокупность утверждений о мире с использованием упомянутых языковых выражений, логическая физика интересуется исключительно логическими свойствами этих выражений и содержащих их утверждений, т. е. такими их свойствами, которые вытекают из логических правил построения языковых выражений. Утверждения, получаемые в логической физике, не являются результатами непосредственного обобщения опытных данных и допущениями относительно предметов действительности. Они суть лишь части определений языковых выражений или получаются из таких определений как логические следствия.

Приведем два примера. На вопрос о том, может ли физическое тело одновременно находиться в разных местах, обычно отвечают отрицательно, а на вопрос о том, почему это невозможно, отвечают: так устроен мир. Однако дело здесь не в устройстве мира. Да и откуда взять гарантии, что наше заявление будет верно на все времена в прошлом и будущем и во всех местах Вселенной? Наша уверенность в том, что физическое тело не может одновременно находиться в разных местах, есть логическое следствие неявного определения выражения «разные места». В самом деле, в каком случае места (области пространства) считаются разными? Интуитивно предполагается, что два места $x$ и $y$ различны, если и только если они не имеют общих точек. Но реальные «точки» суть физические тела. Так что если определение выражения «разные места» записать явно (эксплицировать), то получим следующее. Два места $x$ и $y$ считаются (называются) различными местами, если и только если для любого физического тела $a$ имеет силу утверждение: если $a$ находится в одном из $x$ и $y$, то в то же самое время оно не находится в другом из них. Из этого определения логически следует утверждение: физическое тело не может одновременно находиться в разных местах.

Но если в приведенном выше определении слова «для любого» заменить словами «для некоторого», то из полученного более «слабого» определения уже нельзя будет получить упомянутое следствие.

Логическая физика не навязывает никому тот или иной вариант определения. Она исследует логически мыслимые возможности на этот счет и их свойства. Другой пример: отношение «раньше» является транзитивным, нерефлексивным и несимметричным независимо от того, как устанавливаются временны́е отношения событий и какие при этом возникают проблемы, исследуемые современной физикой. Это отношение фиксируется в истории, химии, биологии и других науках, и указанные свойства его суть часть его определения. Отношение «раньше» обладает логическими свойствами, сходными с отношением «ближе», «правее», «ниже» и т. п., так что можно рассматривать их как частные случаи некоторого логического типа отношений пространственно-временно́го порядка.

Нет необходимости говорить о том, насколько важен анализ упомянутых выражений языка. Жалобы на многосмысленность и неопределенность терминологии стали общим местом. Спекуляции на неясности терминологии принимают чудовищные формы и размеры. Даже сравнительно простые проблемы оказываются практически неразрешимыми из-за незнания или игнорирования логической техники построения терминологии. Возьмем такой любопытный пример. Кажется очевидным, что процесс, не имеющий начала, не начинается. А раз процесс не начинается, то он не существует. Но Мир есть процесс, не имеющий начала во времени. И при этом Мир существует. Как согласовать приведенные положения без противоречия? Пусть читатель попробует выбраться из этого затруднения, и если это ему удастся, пусть отметит для себя, какую роль при этом сыграл терминологический аспект. Та работа, которую он при этом проделает, и будет частным случаем работы, которую логическая физика стремится поднять на профессиональный уровень.

Говоря о логической физике как особом разделе и направлении логики, мы имеем в виду не вообще любое использование логической фразеологии в разговорах на различные темы методологии науки, а разработку аппарата логики с ориентацией на эти темы, как это показано, например, в работах Р. Карнапа, С. Лесневского, Я. Лукасевича, Г. Рейхенбаха, Г. Райта, А. Прайора, Н. Решера, А. Бёркса, А. А. Ивина, Х. Весселя и др. В нашу задачу не входит обзор состояния и истории логических исследований такого рода. Мы намерены предложить вниманию читателя одну определенную точку зрения по некоторому кругу проблем логической физики, привлекая в качестве предпосылки лишь общеизвестные и общедоступные факты языковой практики людей.

Эта книга представляет собой дальнейшее развитие некоторых идей, изложенных в книге автора «Логика науки» (Москва, 1971) и ряде других ранее опубликованных работ. В первой части книги дается краткая характеристика логической техники построения и анализа терминологии, без которой немыслимо сколько-нибудь серьезно говорить на интересующие нас темы. Цель этой части книги состоит не в исследовании самой этой техники как таковой формальными средствами логики, а в разъяснении ее природы с точки зрения интересов последующего анализа языковых выражений. Вместе с тем это описание является вполне достаточным для понимания содержания книги. Причем автор стремился акцентировать внимание на особенностях своей точки зрения по затрагиваемым вопросам, лишь мимоходом и по мере надобности касаясь общеизвестных истин логики.

Самый любопытный, пожалуй, результат логического анализа языка в рамках логической физики — это возможность доказательства или опровержения ряда утверждений, которые на первый взгляд представляются чисто эмпирическими или даже физическими гипотезами. Таковы, например, утверждения существования минимальной протяженности (длины и длительности), максимальной и минимальной скорости и т. д. Доказательство существования минимальной длины и максимальной скорости независимо друг от друга было получено автором и Г. А. Кузнецовым. Точка зрения последнего изложена в работах «Дискретное и непрерывное» («Вопросы философии», 1971, № 7) и «Непрерывность и геометрическая форма» («Логика эмпирического познания». М., 1972). Наше доказательство является более общим (охватывает не только минимальную длину, но и длительность), не предполагает никаких внелогических гипотез и опирается исключительно на определение выражений «минимальная (самая малая) протяженность», «максимальная (самая большая) скорость» и т. д. в системе предварительно разработанной терминологии логической физики. Кроме того, автором получено доказательство целой серии аналогичных утверждений. Все это излагается книге по возможности на общедоступном языке, так что читатель сам при желании может восстановить ход рассуждений автора в таких случаях.

Глава первая

# ЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА ЯЗЫКА

## § 1. Правила логики

Предмет внимания логики — термины и высказывания, т. е. определенного рода явления языка. Примеры терминов: «стол», «корова», «атом», «Тамбов», «частица, заряженная отрицательно», «тот факт, что все четные числа делятся на два без остатка», «движется со скоростью 10 *км/час*» и т. п. Примеры высказываний: «Электрон заряжен отрицательно», «Все четные числа делятся на два без остатка», «Если по проводнику пропустить электрический ток, то вокруг него возникает магнитное поле» и т. п.

Из одних терминов и высказываний с помощью особых языковых средств (терминообразующих и высказываниеобразующих операторов) образуются новые термины и высказывания. Это, например, слова «и», «или», «не», «все», «некоторые», «если, то», «который» и т. п. Исследование терминов и высказываний является одновременно исследованием этих операторов, точно так же как описание свойств последних есть описание свойств терминов и высказываний, в которые они входят.

Логика формулирует определенного вида правила оперирования терминами и высказываниями, а не просто обнаруживает их в готовом виде в существующей языковой практике. В языковой практике людей упомянутые правила складываются стихийно со всеми вытекающими отсюда последствиями: неясность и неосознанность, варьируемость в зависимости от конкретного контекста и неустойчивость, привязанность к конкретному материалу, фрагментарность и т. п.

Логика считается со стихийно сложившимися навыками людей по оперированию терминами и высказываниями и продолжает эту изобретательскую деятельность человечества. Но она продолжает ее на профессиональном уровне, внося необходимую строгость и систематичность. Более того, рассматриваемые правила во многих случаях в стихийной языковой практике вообще не вырабатываются, и логике их приходится буквально вводить впервые. И развитие науки принципиально не меняет этого положения. Подобно тому, как развитие науки не означает автоматически развитие тех или иных разделов математики, оно не рождает автоматически соответствующие правила логики. Развитие науки лишь может дать толчок к разработке логики и в какой-то части определить ее проблематику. Но сами логические правила должны быть разработаны специалистами логиками по законам этой профессии. Мнение, будто наука логика рассказывает людям то, что им и без логики известно в их языковой и познавательной практике, есть предрассудок.

Логика устанавливает такие правила для терминов и высказываний, которые по самому способу их установления не зависят от конкретной сферы употребления языка, от конкретных свойств того или иного языка и тех существ и устройств, которые оперируют языком. Различие здесь может быть лишь в том, что в одних случаях используются некоторые правила логики, а в других — нет; что в одних случаях используются одни правила логики, а в других — другие и т. п. Но это различие столь же обычно и тривиально, как различие в употреблении столовой ложки и синхрофазотрона в других сферах деятельности людей.

## § 2. Термины

Терминами являются слова и группы слов. Но терминами могут быть отдельные буквы, символы и группы символов. Так если мы условимся вместо выражения «лобовое сопротивление» употреблять букву $Q$, а вместо выражения «вероятность события $x$» — группу символов $p(x)$, то $Q$ и $p(x)$ будут терминами.

Какие фрагменты в том или ином конкретном языке считаются терминами, вопрос внелогический. Чтобы применять правила логики, надо иметь некоторый практический навык расчленения речевого потока на те элементы, для которых эти правила формулируются. Правила логики применимы к терминам конкретных языков лишь по такой схеме: если данное явление есть термин, то для него имеют силу такие-то положения логики. Аналогичный принцип имеет место и для высказываний.

Каждый термин обозначает или называет какие-то предметы (предметом здесь называется все, что угодно) — имеет значение. Так, термин «стол» обозначает столы; значение этого термина состоит в том, что он обозначает именно столы, а не предметы другого рода; какие именно предметы обозначаются термином «стол», можно установить путем указания на отдельные видимые столы, путем показывания рисунков или фотографий столов, путем описания столов совокупностью слов и фраз; термином «элементарная частица» в физике обозначают физические предметы, описания и перечисления которых можно найти в соответствующих работах по физике.

Будем говорить, что термин $b$ включается по значению в термин $a$ (или что предмет $a$ есть предмет $b$; или, короче, что $a$ есть $b$), если и только если выполняется следующее: любой предмет, обозначаемый термином $a$, может быть обозначен также термином $b$. Например, термин «число» включается по значению в термин «четное число» (или четное число есть число); термин «элементарная частица» включается по значению в термин «электрон» (или электрон есть элементарная частица).

Если $a$ есть $b$ (или термин $b$ включается по значению в термин $a$), будем это записывать символом

$$a \rightarrow b.$$

Если $a$ не есть $b$ (т. е. не всякий предмет, обозначаемый термином $a$, может быть обозначен также термином $b$), будем это записывать символом

$$\sim (a \rightarrow b).$$

Если $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow a$, то будем говорить, что термины $a$ и $b$ тождественны по значению, и записывать это символом

$$a \rightleftarrows b.$$

Примеры терминов, тождественных по значению: «ромб» и «равносторонний четырехугольник»; «стол», «der Tisch» и «a table».

Через отношение включения терминов по значению определяются другие отношения терминов, в частности, такое: термин $a$ называется общим (родовым) по отношению к термину $b$, а термин $b$ при этом называется частным (видовым) по отношению к $a$, если и только если $b \rightharpoonup a$ и $\sim (a \rightharpoonup b)$. Например, термин «ромб» является видовым по отношению к термину «четырехугольник», а второй является родовым по отношению к первому.

## § 3. Обобщение терминов

Используя отношение включения по значению, можно описать простейший способ образования терминов по правилам логики — введение нового термина путем тривиального обобщения некоторых данных терминов. Эта операция имеет следующий вид: 1) даны некоторые термины $a^1, \ldots, a^n$ (где $n \geqslant 1$); 2) принимается решение считать предмет $b$ термином таким, что, $a^1$ есть $b, \ldots, a^n$ есть $b$. Например, взяв термины «животное», «войсковое подразделение», «племя», «стадо» и «оркестр», мы можем ввести обобщающий их термин «управляемая система». При этом не принимается ограничивающее решение только перечисленные термины $a^1, \ldots, a^n$ считать видовыми по отношению к $b$. Так что при этом не исключается возможность затем принять решение считать термины $c^1, \ldots, c^m$ также видовыми по отношению к $b$. Если упомянутое выше ограничение принимается, то мы будем иметь дело уже с другой операцией по построению терминов.

Частный случай введения терминов путем обобщения имеет такой вид: если $a$ есть термин, обладающий некоторым заданным свойством, то $a$ есть $b$ (где $b$ — вновь вводимый термин).

Если известно значение терминов $a^1, \ldots, a^n$, то известно и значение термина $b$. На вопрос о том, каково значение $b$, следует ответить просто так: $a^1$ есть $b, \ldots, a^n$ есть $b$.

## § 4. Простые и сложные термины

Из данных терминов и высказываний образуются новые термины с помощью особого рода языковых средств. Последние будем называть терминообразующими операторами или, короче, $T$-операторами.

Термины, которые не расчленяются на другие термины и высказывания и $T$-операторы, будем называть логически простыми. Термины же, которые содержат другие термины или высказывания и $T$-операторы, будем называть логически сложными.

Например, из терминов «элементарная частица» и «заряжена отрицательно» с помощью слова «которая» и запятой образуется сложный термин «элементарная частица, которая заряжена отрицательно»; из высказывания «Электрон заряжен отрицательно» образуется термин «Тот факт, что электрон заряжен отрицательно» с помощью слов «тот факт» и «что» и запятой.

Приведенные в примере сложные термины могут быть образованы и в другой языковой форме. Так, в первом примере сложному термину можно придать вид «отрицательно заряженная элементарная частица», где роль $T$-оператора играет грамматическая форма и расположение слов. Здесь $T$-оператор явным образом не выражен, и строение термина остается неявным. Чтобы избежать такого рода явлений, в логике вводят особого рода стандартные символы в качестве $T$-операторов и устанавливают стандартные правила комбинирования терминов, высказываний и таких символов.

Какие комбинации слов и букв считаются простыми терминами и какие сложными, логика судить некомпетентна. Так, вопрос о том, является термин «элементарная частица» простым или сложным, есть вопрос внелогический. Этот термин можно, очевидно, рассматривать и как сложный, если его воспринимать как термин вида «частица, которая является элементарной». Но его можно рассматривать и как простой, если считать его вводимым в употребление иным путем как целое.

## § 5. Два вида терминов

Возьмем высказывание «Электрон заряжен отрицательно». Оно состоит из терминов «электрон» и «заряжен отрицательно». Но эти термины играют в высказывании различную роль: первый обозначает предмет, о котором говорится; второй же обозначает то, что мы хотим сказать об этом предмете. Термины второго типа называют предикатами, а то, что обозначается ими,— признаками предметов. Термины первого вида называют субъектами.

Предикаты разделяются на одно-, двух-, трех- и т. д. местные в зависимости от того, сколько требуется терминов-субъектов, чтобы образовать высказывание. Так, предикат «заряжен отрицательно» — одноместный, а предикаты в высказываниях «$a$ больше $b$» и «$a$ находится между $b$ и $c$» — соответственно являются двухместным и трехместным. Способность различать предикаты таким образом мы предполагаем данной. Точно так же данной предполагается способность различать предикаты и субъекты. В одних случаях это различие очевидно, как в приведенном в начале параграфа примере, в других — требуется некоторое усилие, чтобы предикат обнаружить и выделить. Так, предикатом в высказывании «$a$ больше $b$» является выражение «первый предмет больше второго предмета», что непосредственно усмотреть в нем нельзя.

## § 6. Энки субъектов и предметов

Один из способов образования терминов — образование пар, троек и т. д., вообще — энок терминов. Правило образования таких терминов имеет следующий вид: если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть термины, то $(a^1, \ldots, a^n)$ есть термин. Читаются эти термины так: $(a^1, a^2)$ — «пара предметов $a^1$ и $a^2$»; $(a^1, a^2, a^3)$ — «тройка предметов $a^1$, $a^2$ и $a^3$» и т. д. Или, наоборот, термины вида «энка предметов $a^1, \ldots, a^n$» в логике можно изображать символами вида $(a^1, \ldots, a^n)$.

Энки терминов обладают такими свойствами: 1) $\sim (a^i \rightharpoondown (a^1, \ldots, a^n))$ и $\sim ((a^1, \ldots, a^n) \rightharpoondown a^i)$, где $i = 1, \ldots, n$, т. е. ни один предмет не есть пара предметов, не есть тройка предметов и т. д.; и наоборот; 2) если $m$ не равно $n$, то $\sim ((a^1, \ldots, a^n) \rightharpoondown (b^1, \ldots, b^m))$; 3) если $(b^1, \ldots, b^n)$ образуется из $(a^1, \ldots, a^n)$ путем замены $a^i$ на $b^i$ и при этом $b^i \rightharpoondown a^i$, то $(b^1, \ldots, b^n) \rightharpoondown (a^1, \ldots, a^n)$.

## § 7. Ограничение терминов

Пусть $a$ есть субъект, $P$ есть предикат, $x$ есть высказывание. Из них можно образовать термины «$a$, который имеет признак $P$», «$a$ такой, что $P$», «$a$ такой, что верно $x$», «$a$ такой, что $x$», «$a$, в отношении которого имеет силу $x$» и т. п. Здесь используется $T$-оператор, который мы будем называть оператором ограничения и использовать для его изображения символ $\downarrow$.

Правила построения терминов с оператором ограничения: 1) если $a$ есть субъект, а $P$ есть одноместный предикат, то $a \downarrow P$ есть термин, причем — субъект; если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть субъекты, а $P$ есть $n$-местный предикат, то $(a^1, \ldots, a^n) \downarrow P$ есть субъект; 2) если $a$ есть субъект, а $x$ есть высказывание, то $a \downarrow x$ есть субъект.

Образование терминов посредством оператора ограничения есть ограничение терминов. Термины, полученные таким путем, обладают следующими свойствами (в частности): 1) $a \downarrow P \rightharpoonup a$; 2) $a \downarrow x \rightharpoonup a$.

## § 8. Значение и смысл сложных терминов

Пусть $A$ есть термин, образованный из простых терминов $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ и логических операторов $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ $(m \geqslant 0)$. Частный случай $A$ — когда $n = 1$ и $m = 0$, т. е. $A$ есть простой термин.

Термин $A$ имеет значение, т. е. обозначает какие-то предметы. Но если $A$ есть сложный термин, то здесь появляется одна особенность сравнительно со случаем для простых терминов: значение $A$ можно установить через посредство терминов $a^1, \ldots, a^n$.

Будем говорить, что известен (установлен) смысл термина $A$, если и только если известно значение всех входящих в него терминов $a^1, \ldots, a^n$ и известны (установлены) свойства всех входящих в него операторов $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$. Очевидно, для простых терминов смысл и значение совпадают.

## § 9. Термины из высказываний

Из высказываний образуются термины с помощью особых языковых выражений. Например, из высказывания «Электрон заряжен отрицательно» образуется термин-субъект «Тот факт, что электрон заряжен отрицательно». Будем термины такого вида изображать символами вида $sx$, где $x$ есть высказывание, а $s$ — терминообразующий оператор «тот факт, что».

## § 10. Определения

Определения терминов суть один из способов введения терминов в язык. Но это — наиболее важный способ.

Возьмем такое простое определение «Ромб есть равносторонний четырехугольник». Его можно записать также в другой форме: «Ромбом называется равносторонний четырехугольник» или «Будем ромбом называть равносторонний четырехугольник». Но при всех вариациях остается незыблемым следующее: 1) благодаря определению вводится новый термин «ромб»; 2) принимается решение считать слово «ромб» термином, равнозначным термину «равносторонний четырехугольник».

Так что если выявить полностью логическое строение этого определения, оно примет такой вид: предмет вида «ромб» (слово «ромб») будем считать термином таким, что «ромб» $\rightleftharpoons$ «равносторонний четырехугольник». Термин «ромб» здесь называется определяемым, а термин «равносторонний четырехугольник» — определяющим. Второй является сложным термином типа $a \downarrow P$ («четырехугольник, который является равносторонним», или «четырехугольник, все стороны которого равны между собою»). Его значение считается известным. Значение первого (определяемого) известно лишь благодаря тому, что он считается равнозначным второму (определяющему).

## § 11. Виды определений

Выше мы рассмотрели пример определений, которые строятся по такой общей схеме: «Будем считать предмет $a$ термином таким, что $a \rightleftharpoons b$, где $b$ есть термин». Сокращенно это записывается в виде

$$a = Df \cdot b.$$

В другой форме это определение читается так: $a$ согласно нашему решению (по определению) есть термин, тождественный по значению термину $b$. Такие определения практически целесообразны лишь тогда, когда $b$ есть сложный термин, а $a$ есть либо простой термин, либо содержит вновь вводимый простой термин.

Рассматриваемые определения бывают двух видов: 1) $a$ есть простой термин; 2) $a$ есть сложный термин, содержащий вновь вводимый простой термин. Пример первого вида мы приводили. Пример для второго вида: «Доказуемой формулой данного исчисления $S$ будем называть формулу данного исчисления, которая является аксиомой $S$ или получается из аксиом по правилам вывода $S$». Здесь термин «формула данного исчисления» введен до этого определения. Определяется не он, а все выражение «доказуемая формула данного исчисления $S$», в которое входит определяемый простой термин «доказуемая».

Определение через перечисление видов $a$ строится по такой схеме: пусть $a$ будет термином таким, что $b^1$ есть $a, \ldots, b^n$ есть $a$, и никакой другой предмет не есть $a$ (или $b^1, \ldots, b^n$ и только эти предметы суть $a$). В этом определении помимо обобщения терминов $b^1, \ldots, b^n$ имеется еще ограничение видов $a$.

Если принято определение $a = Df \cdot b$, то принимается утверждение $a \rightleftharpoons b$. Если принято определение через перечисление видов $a$, то принимается множество утверждений: 1) $b^1 \rightarrow a, \ldots, b^n \rightarrow a$; 2) если $\sim (c \rightarrow b^1), \ldots, \sim (c \rightarrow b^n)$, то $\sim (c \rightarrow a)$.

Более сложной формой определения через перечисление являются рекурсивные определения. Простейшие из них строятся по такой схеме. Пусть $a$ будет термином таким, что 1) $b^1 \rightarrow a, \ldots, b^n \rightarrow a$ (где $n \geqslant 1$); 2) если $c^1 \rightarrow a, \ldots, c^m \rightarrow a$ (где $m \geqslant 1$), то $d^1 \rightarrow a, \ldots, d^k \rightarrow a$ (где $k \geqslant 1$); 3) ничто другое, кроме указанного в пунктах 1 и 2, не есть $a$.

Распространенное мнение, согласно которому определения суть всегда определения через род и видовые отличия, ошибочно. Формы определений разнообразны, о чем можно судить уже на основе сказанного выше. Приведем еще один любопытный пример определения типа $a = Df \cdot b \downarrow x$. Термином $a$ будем называть предметы $b$ такие, которые не являются предметами $c$, $d$ и $e$ или в отношении которых верно, что $\sim (b \rightarrow c)$, $\sim (b \rightarrow d)$ и $\sim (b \rightarrow e)$. Здесь не указано никакого видового отличия $b$. Здесь просто произведено исключение: $a$ суть все предметы $b$, кроме $c$, $d$ и $e$.

## § 12. Высказывания

Высказывания суть особого рода языковые конструкции, образованные из терминов, высказываний и высказываниеобразующих операторов ($B$-операторов).

Простейшие высказывания будем изображать символами вида

$$a \leftarrow P,$$

которые читаются так: «Предмет $a$ имеет признак $P$». Это — обобщенное изображение некоторых явлений языка (предложений, фраз), в которых можно обнаружить субъект $a$, предикат $P$ и некоторые языковые средства, объединяющие $a$ и $P$ в целое высказывание. Будем эти средства (и их обобщенное изображение $\leftarrow$) называть оператором предикативности. Причем если $a$ есть энка из $n$ субъектов, то $P$ есть энместный предикат. Примеры простейших высказываний: «Электрон заряжен отрицательно», «$a$ больше $b$», «Число 5 простое» и т. п.

В приведенных примерах оператор предикативности явно не выражен, а предикат не всегда четко локализован. Так что нужен некоторый навык устанавливать логическое строение высказываний. Впрочем на достаточно высоком уровне культуры среднеобразованного человека выработать его можно буквально после нескольких упражнений с примерами.

Приведем, далее, основные $B$-операторы, с помощью которых из данных высказываний образуются новые:

1) $\wedge$ — конъюнкция («и»; «каждый из»);

2) $\vee$ — дизъюнкция («или»; «по крайней мере один из»);

3) $\sim$ — внешнее отрицание («не»; «не так»);

4) $\urcorner$ — внутреннее отрицание (читается так же, как внешнее, только располагается в высказываниях иначе);

5) $\rightarrow$ — оператор условности («если, то»);

6) $\forall$ — квантор общности («все»);

7) $\exists$ — квантор существования («некоторые»).

Отношение этих операторов к соответствующим средствам языка поясним на примере конъюнкции. Во-первых, в логике в качестве конъюнкции используются различные символы помимо $\wedge$, в частности — точка, &, $K$ и т. п. Во-вторых, в различных языках и в различных случаях в одном и том же языке роль $\wedge$ (конъюнкции) может выполнять не только слово «и», но и другие средства, в частности — «но», запятая, точка с запятой, «а», «а также», «кроме того» и т. п. И, в-третьих, упомянутые языковые средства, помимо того, что они играют иногда роль конъюнкции, играют и другие роли. Так что логика, вводя оператор конъюнкции, абстрагирует лишь некоторое свойство различных языковых средств и рассматривает его как таковое, — метод, общий логике с другими науками.

Правила построения высказываний с указанными выше операторами имеют такой вид:

1) если $a$ есть субъект, а $P$ — соответственно местный предикат, то $a \leftarrow P$ и $a \urcorner \leftarrow P$ суть высказывания;

2) если $x$ есть высказывание, то $\sim x$ есть высказывание (поэтому $\sim$ мы и назвали внешним отрицанием);

3) если $x$ и $y$ суть высказывания, то $x \wedge y$ и $x \vee y$ суть высказывания; если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ($n \geqslant 3$) суть высказывания, то $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n$ и $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n$ суть высказывания;

4) если $x$ и $y$ суть высказывания, то $x \rightarrow y$ есть высказывание;

5) если $x$ есть высказывание, а $a$ есть термин, то $(\forall a)x$, $(\exists a)x$, $(\urcorner \forall a)x$ и $(\urcorner \exists a)x$ суть высказывания.

Читаются приведенные конструкции (для интуитивной ясности) так:

1) $a \urcorner \leftarrow P$ — «Предмет $a$ не имеет признака $P$»;

2) $\sim x$ — «не-$x$» («Не так, как говорится в $x$»);

3) $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n$ — «$x^1$ и $x^2$ и ... и $x^n$»;
$x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n$ — «$x^1$ или $x^2$ или ... или $x^n$»;

4) $x \rightarrow y$ — «Если $x$, то $y$»;

5) $(\forall a)x$ — «Все $a$ таковы, что $x$» («Все $a$ $x$»);
$(\urcorner \forall a)x$ — «Не все $a$ таковы, что $x$»;
$(\exists a)x$ — «Некоторые $a$ таковы, что $x$»;
$(\urcorner \exists a)x$ — «Нет таких $a$, что $x$».

В дальнейшем для упрощения записи оператор предикативности будем опускать, заменяя $a \leftarrow P$ и $a \urcorner \leftarrow P$ соответственно на $P(a)$ и $\urcorner P(a)$. Этот способ записи является общепринятым. Он действительно проще, но именно такая запись простых высказываний помешала различить две позиции отрицания — перед высказыванием в целом и перед оператором предикативности, т. е. различить $\sim$ и $\urcorner$ как различные логические операторы. А это привело к довольно ощутимым последствиям в логике, например — к неоправданному ограничению правил логики в интуиционистской логике.

Приведенные структуры высказываний не исчерпывают всех возможных видов высказываний. Другие виды высказываний образуются за счет введения производных $B$-операторов, за счет усложнения строения терминов и перераспределения их частей в языковых конструкциях и т. п. Например, высказывание $P(a)$, в котором $a$ есть термин «$b$, который выбран при условии $c$», может быть посредством языковых трансформаций преобразовано в высказывание «$P(b)$ при условии $c$», в котором ссылка на условия вынесена из субъекта как особая часть высказывания.

## § 13. Смысл высказываний

Будем говорить, что известен смысл высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него терминов и известны свойства всех входящих в него логических операторов.

Два высказывания $x$ и $y$ будем считать тождественными по смыслу, если и только если $sx \rightleftharpoons sy$. Будем тождество высказываний по смыслу изображать символами вида

$$x \equiv y.$$

## § 14. Определения с высказываниями

Термины могут вводиться в употребление так, что при этом определяются сразу целые высказывания, т. е. как части высказываний. Этим способом вводятся термины-предикаты. Определения эти строятся по такой схеме: «Будем считать $x$ высказыванием таким, что $x \equiv y$», где $y$ есть данное высказывание или совокупность высказываний. Сокращенно будем это определение записывать символами вида

$$x \equiv Df.y,$$

где $x$ есть определяемое высказывание, содержащее определяемый термин, а $y$ — данное высказывание, через которое определяется $x$ (т. е. определяющее высказывание).

Пример такого определения: будем считать выражение «Формула доказуема в $S$» высказыванием, тождественным по смыслу высказыванию «Формула есть аксиома $S$ или получена из аксиом $S$ по правилам вывода $S$».

Определение $x \equiv Df.y$ есть лишь сокращенная запись определения вида

$$sx = Df.sy.$$

Чаще (и это удобнее) определения такого рода записывают в такой форме: «Будем говорить, что $x$, если и только если $y$». Например, «Будем говорить, что формула доказуема в $S$, если и только если она есть аксиома $S$ или получается из аксиом по правилам вывода $S$». В такой форме просто элиминирована часть средств определения (например, ссылка на смысл высказываний), что облегчает вывод следствий из определения. Но при этом природа определения не выражается явно, что имеет свои недостатки.

С помощью определения рассматриваемого вида определяются предикаты и логические операторы.

Обычно этим определениям придается (схематично) такой вид: «Будем говорить, что предмет $a$ (или предметы $a^1, \ldots, a^n$, где $n \geqslant 2$) характеризуется признаком $P$, если и только если $y^1, \ldots, y^m$ (где $m \geqslant 1$). Здесь смысл терминов $a$, $a^1, \ldots, a^n$ уже известен, смысл $y^1, \ldots, y^m$ известен, термины $a$, $a^1, \ldots, a^n$ входят в $y^1, \ldots, y^m$; до построения определения лишь $P$ не является термином (или смысл $P$ не известен).

## § 15. Производные операторы

Определения рассмотренного выше типа дают возможность определять производные логические операторы. Приведем несколько примеров:

1. $(x : y) \equiv Df. (x \vee y) \wedge (\sim x \vee \sim y)$
2. $(x \leftrightarrow y) \equiv Df. \quad (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
3. $?\,P(a) \equiv Df. \sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$

   $(?\,\forall a)\, x \equiv Df. \sim (\forall a)\, x \wedge \sim (\neg \forall a)\, x$

   $(?\,\exists a)\, x \equiv Df. \sim (\exists a)\, x \wedge \sim (\neg \exists a)\, x.$

Первый из них есть сильная дизъюнкция и читается так: «одно и только одно из», «либо, либо». Второй читается так: «если и только если». Третий есть оператор неопределенности и читается так: $?P(a)$ — «Нельзя установить, $P(a)$ или $\neg P(a)$», «Не-$P(a)$ и не-$\neg P(a)$», «Неизвестно, $P(a)$ или $\neg P(a)$» и т. п.; аналогично для $(?\forall a)x$ и $(?\exists a)x$. В общем он употребляется тогда, когда мы не можем признать как $P(a)$, так и $\neg P(a)$ (как $(\forall a)x$, так и $(\neg\forall a)x$; как $(\exists a)x$, так и $(\neg\exists a)x$).

## § 16. Об одном свойстве определений

Определения вида $a = Df.b$ дают право повсюду заменять термин $b$ на термин $a$ и термин $a$ на термин $b$, а определения вида $x \equiv Df.y$ — заменять высказывание $x$ на высказывание $y$ и высказывание $y$ на высказывание $x$, причем эти замены дают возможность заменять некоторые языковые комплексы на более удобные с какой-то точки зрения (например, на более компактные, на интуитивно ясные и т. п.).

Например, слово «ромб» короче и удобнее в обращении, чем группа слов «равносторонний четырехугольник»; выражение $x : y$ короче, чем $(x \vee y) \wedge (\sim x \vee \sim y)$.

Без такого рода сокращений и замен, начиная с некоторого момента, становится практически невозможным фиксирование знаний и оперирование ими. Отыскание наиболее удобных форм сокращения есть одна из важнейших задач построения языка науки вообще.

## § 17. Значения истинности высказываний

Общеизвестна оценка высказываний как истинных и ложных. К ним теперь присоединяют еще неопределенность, непроверяемость, неразрешимость и т. п. Выражения «истинно», «ложно», «неопределенно» и т. д. считают терминами (или знаками) значений истинности высказываний или истинностных значений. Ниже мы сформулируем основные принципы, относящиеся к значениям истинности высказываний.

Во-первых, термин «истинно» должен быть определен как предикат высказываний вида «Высказывание $x$ истинно».

Во-вторых, в зависимости от различий в структуре высказываний $x$ определение термина «истинно» должно быть различным. Например, термин «истинно» для высказываний $x \wedge y$ с оператором $\wedge$ и высказываний $x \vee y$ с оператором $\vee$ определяется различно (иначе эти операторы не будут различаться). Независимо от строения $x$ уместно лишь такое определение: «$x$ истинно» $\equiv Df.x$ («$x$ истинно, если и только если $x$»). Это определение дает правило введения предиката «истинно» в язык и элиминации из него как излишнего.

В-третьих, для простых высказываний термин «истинно» принимается без определения. Здесь достаточно ограничиться пояснением и правилом, о котором говорилось во втором пункте. Приняв термин «истинно» для простых высказываний, можно затем определить его для сложных высказываний через эти случаи. При этом определения должны быть построены так, чтобы всегда выполнялось правило, указанное во втором пункте.

В-четвертых, все остальные значения истинности определяются через значение «истинно». Например, значение «неистинно» определяется так: «$x$ неистинно» $\equiv Df.$ «$x$ не является истинным» или «$x$ неистинно» $\equiv Df.$ «$\sim x$ истинно». Другой пример — определения значений «неопределенно» и «ложно» для высказываний типа $P(a)$: 1) «$P(a)$ ложно» $\equiv Df.$ «$\urcorner P(a)$ истинно»; 2) «$P(a)$ неопределенно» $\equiv$ $\equiv Df.$ «$\sim P(a) \wedge \sim \urcorner P(a)$ истинно».

Таким образом, все термины значений истинности в конце концов могут быть элиминированы из языка, и соответствующие выражения с ними заменены на выражения с термином «истинно», а последний вообще может быть устранен из языка по правилу замены выражений «$x$ истинно» на $x$. Но это никак не означает того, что эти термины вообще излишни. Они удобны для установления целого ряда логических операций, а начиная с некоторого момента, они практически необходимы как сильное средство сокращения сложных языковых конструкций в компактные и обозримые.

Значение «истинно» может быть элиминировано из языка, но его нельзя устранить из ситуации, в которой употребляются высказывания. Оно выражает отнесение высказываний к состояниям, выражает акт принятия высказываний или согласия с тем, о чем в них говорится. Так что замена «$x$ истинно» на $x$ означает, что признание $x$ выражается не языковыми средствами (не предикатом «истинно»), а как-то иначе (самим фактом произнесения или написания $x$, как это чаще всего и делается).

Сводимость всех значений истинности к значению «истинно» означает следующее. Утверждая, что $x$ имеет некоторое значение истинности $a$, мы тем самым признаем, что имеет место некоторое состояние, описываемое высказыванием $y$, причем определение $a$ должно быть построено так, чтобы из него можно было вывести утверждение «$x$ имеет значение истинности $a$, если и только если $y$».

Наконец, для каждого значения истинности имеет силу утверждение: любое высказывание либо имеет это значение истинности, либо не имеет его. В частности, каждое высказывание либо истинно, либо не является истинным; либо ложно, либо не является ложным и т. п.

Встречающееся в языке слово «истина» есть лишь сокращение для выражения «высказывание, которое истинно»; аналогично для прочих значений истинности.

## § 18. Число значений истинности

Возьмем простейшее высказывание $P(a)$, например — «Частица $a$ находится в области пространства $b$». Возможны такие случаи: 1) частицу $a$ невозможно наблюдать; 2) частицу $a$ возможно наблюдать. Во втором случае мыслимы такие подслучаи: 1) частица $a$ действительно находится в области пространства $b$; 2) частица $a$ не находится в области пространства $b$; 3) частица $a$ движется так, что нельзя сказать, что она находится в $b$, и нельзя сказать, что она не находится в $b$. Таким образом, для $P(a)$ возможно ввести в употребление четыре термина значений истинности, соответствующие приведенным выше четырем возможностям. Они и вводятся только для того (если на самом деле вводятся), чтобы обозначить, какая именно из этих возможностей признается. Пусть, например, приняты определения:

1) $P(a)$ непроверяемо, если и только если $a$ невозможно наблюдать;

2) $P(a)$ истинно, если и только если $a$ можно наблюдать и на самом деле $a$ имеет признак $P$;

3) $P(a)$ неопределенно, если и только если $a$ можно наблюдать, но невозможно установить, имеет $a$ признак $P$ или нет;

4) $P(a)$ ложно, если и только если $a$ можно наблюдать и при этом $a$ не имеет признака $P$.

И если мы теперь будем утверждать, что, например, высказывание $P(a)$ ложно, то это будет означать лишь то, что мы принимаем (признаем) следующее: $a$ можно наблюдать, $a$ не имеет $P$.

Еще большие возможности открываются для высказываний с более сложными структурами. Так что в принципе число значений истинности не ограниченно. Сколько их на самом деле фигурирует в языке, зависит от практической целесообразности. До последнего времени обходились двумя значениями «истинно» и «ложно», причем ложность понималась как отрицание истинности (как «неистинно»). В последние десятилетия все чаще стали употреблять третье значение — «неопределенно». В связи с этим термин «ложно» оказался двусмысленным: он стал обозначать одно из значений истинности наряду с «истинно» и «неопределенно», а с другой стороны он сохранил смысл отрицания истинности. Это ведет к различного рода недоразумениям.

Мы будем употреблять в качестве отрицания истинности термин «неистинно», приняв такое определение: высказывание неистинно (или является неистинным), если и только если оно не является истинным. Термин же «ложно» мы будем употреблять как обозначение одного из значений истинности, которое лишь иногда полностью совпадает со значением «неистинно», а именно — когда высказывание может принять только одно из двух значений «истинно» и «ложно». Так что если высказывание ложно, то оно неистинно; но если высказывание неистинно, из этого не следует, что оно ложно: оно может быть непроверяемо, неопределенно и т. п.

Очевидно, всякое высказывание либо истинно, либо неистинно. Но не всегда (при условии принятого соглашения) верно, что высказывание либо истинно, либо ложно: высказывание может быть неопределенным, т. е. не быть истинным и не быть ложным.

## § 19. Координаты высказываний

Значения истинности некоторых высказываний зависят от места и времени их использования. Например, высказывание «Окно открыто» может быть истинно в отношении одного окна и неистинно в отношении другого (которое закрыто), может быть истинно в отношении некоторого окна в одно время и неистинно в отношении этого же окна в другое время. Будем называть такие высказывания локальными. К числу локальных высказываний относятся высказывания, значения истинности которых могут меняться в зависимости от индивидов, с которыми их соотносят. Но поскольку различные индивиды так или иначе различаются по положению в пространстве и времени, то смена индивида, с которым сопоставляют высказывание, есть изменение области пространства или времени использования высказывания. Аналогично — зависимость значений истинности высказываний от условий сводится к зависимости от места и времени (изменение условий предполагает смену места или другое время).

Будем называть координатами высказывания $x$ место, время, условия и т. п., в которых используется $x$ и устанавливается его значение истинности. Координаты высказываний обычно предполагаются неявно, иногда не играют роли, иногда фиксируются особыми знаками. При формулировке правил логики и применении их, однако, важно всегда предполагать, что они так или иначе могут быть учтены. Возьмем, например, высказывание «Если $P(a)$, то $Q(a)$». Чтобы оперировать им правильно, в случае локальности входящих в него высказываний необходимо соблюдать тождество координат для $P(a)$ и $Q(a)$, в частности, если выбран индивид $b$ такой, что $b$ есть $a$ в первом из них, то тот же индивид должен быть выбран и во втором. Если дано, что $x$ истинно и $y$ истинно, то мы имеем право признать истинным $x \wedge y$ лишь при условии тождества координат для $x$, $y$ и $x \wedge y$ (в случае, конечно, если высказывания $x$ и $y$ локальны).

Между координатами $a$ и высказыванием $x$ никакой логической связи нет. Координаты суть обособившаяся часть высказывания, и при логических операциях с $x$ во избежание ошибок эту часть $a$ надо как-то ассоциировать с $x$, т. е. оперировать высказыванием «$x$ при $a$».

Высказывания, значения истинности которых не меняются с изменением координат (которые имеют одно и то же значение истинности в любых координатах), будем называть универсальными. Примеры универсальных высказываний: «Все четные числа делятся на два без остатка», «Электрон заряжен отрицательно», «$5 > 3$», «Человек смертен» и т. п.

С учетом корректив относительно координат высказываний правила логики в одинаковой мере относятся как к универсальным высказываниям, так и к локальным. Первые характерны для точных наук, и поскольку для них предполагаются любые координаты (т. е. координаты безразличны), ссылки на последние вообще опускаются. Вторые характерны для опытных наук, и в ряде случаев выявление координат для них играет существенную роль.

## § 20. Значение истинности высказываний с операторами конъюнкции, дизъюнкции и отрицания

Предикаты «истинно» ($v$) и «неистинно» ($nv$) для высказываний с операторами $\sim$, $\vee$, $\wedge$ определяются так:

$1^1$. $(x \wedge y)$ истинно, если и только если $x$ истинно и $y$ истинно.

$1^2$. $(x \wedge y)$ неистинно, если и только если по крайней мере одно из $x$ и $y$ неистинно.

$2^1$. $(x \vee y)$ истинно, если и только если по крайней мере одно из $x$ и $y$ истинно.

$2^2$. $(x \vee y)$ неистинно, если $x$ неистинно и $y$ неистинно.

$3^1$. $\sim x$ истинно, если и только если $x$ неистинно.

$3^2$. $\sim x$ неистинно, если и только если $x$ истинно.

Явные определения отличаются от приведенных лишь тем, что «если и только если» заменяется на $\equiv Df$. Неявным определениям для краткости и наглядности придают форму таблиц.

Из сказанного очевидно, что термин «истинно» имеет различный смысл в зависимости от того, к каким видам высказываний $x \wedge y$, $x \vee y$, $\sim x$ и т. д. он относится. И никакого единого и общего смысла, независимого от структуры высказываний, он не имеет. Он вообще не имеет никакого смысла сам по себе, безотносительно к высказываниям, предикатами которых он является. Аналогично для термина «неистинно».

Более того, термины значений истинности могут иметь различный смысл даже для высказываний с одной и той же структурой в зависимости от числа употребляемых значений истинности. Пусть, например, введены в употребление три значения истинности — «истинно» ($v$), «неопределенно» ($n$) и «ложно» ($f$). Для высказывания вида $\sim x$ возможны такие определения термина «истинно»: 1) $\sim x$ истинно, если и только если $x$ ложно; 2) $\sim x$ истинно, если и только если $x$ неопределенно или $x$ ложно. Для высказывания $x \wedge y$ возможны такие определения термина «ложно»: 1) $x \wedge y$ ложно, если и только если по крайней мере одно из $x$ и $y$ ложно; 2) $x \wedge y$ ложно, если и только если одно из $x$ и $y$ ложно или неопределенно, а другое из них ложно или истинно. Возможности для таких вариаций возрастают с ростом числа значений истинности.

Если термины значений истинности считаются данными (например, первично ясными), то рассмотренные выше определения (и вообще определения такого рода) могут рассматриваться как определения логических операторов $\sim$, $\vee$, $\wedge$. Принципиальная схема определений при этом имеет следующий вид: оператор $\sim$ по определению обладает такими свойствами, что если $x$ истинно (неистинно), то $\sim x$ неистинно (истинно); оператор $\wedge$ обладает такими свойствами, что $x \wedge y$ истинно, если и только если $x$ истинно и $y$ истинно; и т. д. для прочих случаев и для $\vee$.

В зависимости от числа значений истинности здесь возможны различные вариации операторов. Пусть, например, значения истинности суть $v$ («истинно»), $n$ («неопределенно») и $f$ («ложно»). Введем операторы $\wedge^1$, $\wedge^2$ и $\wedge^3$ такие, что:

1) если $x$ истинно и $y$ неопределенно, то $x \wedge^1 y$ неопределенно, $x \wedge^2 y$ неопределенно и $x \wedge^3 y$ ложно;

2) если $x$ ложно и $y$ неопределенно или $x$ неопределенно и $y$ ложно, то $x \wedge^1 y$ ложно, $x \wedge^2 y$ неопределенно и $x \wedge^3 y$ ложно;

3) если повсюду заменить в определениях $\wedge^1$, $\wedge^2$, $\wedge^3$ значения $n$ и $f$ на $nv$, то все эти определения совпадут с приведенным выше определением $\wedge$.

Это явление иногда истолковывают так, будто во всех этих случаях приходится иметь дело с одним и тем же логическим оператором конъюнкции, только свойства этого оператора меняются в зависимости от числа значений истинности. На таких грубейших ошибках строятся претенциозные концепции (в частности, концепция особой логики микрофизики). На самом же деле во всех четырех случаях даны определения различных операторов. Их можно лишь сравнивать по определенным критериям. В частности, операторы $\wedge^1$, $\wedge^2$ и $\wedge^3$ можно рассматривать как аналоги двузначной конъюнкции $\wedge$.

## § 21. Значения истинности других форм высказываний

Для высказываний $P(a)$ и $\neg P(a)$ термин «истинно» мы принимаем без определения. Но зато термин «неистинно» здесь нуждается в пояснении, поскольку отрицание $P(a)$ необязательно есть $\neg P(a)$, а отрицание $\neg P(a)$ необязательно есть $P(a)$. Различая отрицания $\neg$ и $\sim$, мы допускаем не две, а три возможности: 1) можно установить, что $a$ имеет признак $P$; 2) можно установить, что $a$ не имеет признака $P$; 3) невозможно установить (принять) ни то, ни другое. Третья возможность есть эмпирически данный факт (например, в случае переходных состояний предметов и неразрешимых проблем). Потому термин «неистинно» следует определить для рассматриваемых высказываний так: 1) $P(a)$ неистинно, если и только если $\neg P(a)$ истинно или $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно; 2) $\neg P(a)$ неистинно, если и только если $P(a)$ истинно или $\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a)$ истинно.

Для $?P(a)$ термины «истинно» и «неистинно» определяются так:

1) $?P(a)$ истинно, если и только если $\sim P(a) \wedge \wedge \sim \neg P(a)$ истинно (т. е. $P(a)$ неистинно и $\neg P(a)$ неистинно);

2) $?P(a)$ неистинно, если и только если $\sim P(a) \wedge \wedge \sim \neg P(a)$ неистинно (т. е. $P(a)$ истинно или $\neg P(a)$ истинно).

Пусть $A$, $B$ и $C$ суть $P(a)$, $\neg P(a)$ и $?P(a)$, взятые в любом порядке. Соотношение значений истинности их кратко можно записать так:

1) если $A$ истинно, то $B$ и $C$ неистинны;

2) если $A$ и $B$ неистинны, то $C$ истинно. Таким образом, два из них не могут быть вместе истинными, но могут быть вместе неистинными.

Для высказываний с кванторами определения имеют такой вид:

1) $(\forall a)x$ истинно, если и только если для любого индивида $b$ такого, что $b$ есть $a$ (т. е. $b \rightarrow a$), истинно высказывание $x(a/b)$, где $x(a/b)$ есть результат замены $a$ на $b$ везде, где $a$ входит в $x$;

2) $(\neg \forall a)x$ истинно, если и только если по крайней мере для одного индивида $b$ такого, что $b$ есть $a$, высказывание $x(a/b)$ неистинно;

3) $(?\forall a)x$ истинно, если и только если $\sim(\forall a)x \wedge \wedge \sim(\neg \forall a)x$ истинно;

4) $(\forall a)x$ неистинно, если и только если $(\neg \forall a)x \vee \vee (?Aa)x$ истинно;

5) $(\neg \forall a)x$ неистинно, если и только если $(\forall a)x \vee \vee (?\forall a)x$ истинно;

6) $(?\forall a)x$ неистинно, если и только если $(\forall a)x \vee \vee (\neg \forall a)x$ истинно.

Определения 7—12 для квантора $\exists$ получаются так: в 1—6 повсюду $\forall$ заменяется на $\exists$; в пункте 1 вместо слов «для любого» пишутся слова «по крайней мере для одного»; в пункте 2 вместо слов «по крайней мере для одного» пишутся слова «для любого».

Соотношение значений истинности $(\forall a)x$, $(\neg \forall a)x$ и $(?\forall a)x$ аналогично соотношению их для приведенных выше $A$, $B$ и $C$. Аналогично — для $(\exists a)x$, $(\neg \exists a)x$ и $(?\exists a)x$.

Для высказываний $x \rightarrow y$ имеют силу такие определения:

1) $x \rightarrow y$ истинно, если и только если, приписав $x$ значение «истинно» ($y$ значение «неистинно»), мы вынуж-

дены приписать $y$ значение «истинно» ($x$ значение «неистинно»);

2) $x \to y$ неистинно, если и только если признание истинности $x$ не вынуждает к признанию истинности $y$ или признание неистинности $y$ не вынуждает к признанию неистинности $x$.

Для рассматриваемых высказываний можно ввести три и более значения истинности, что влияет на форму логической теории, но не на ее суть. В частности, это можно сделать таким образом. Пусть термины значений истинности суть $v$ («истинно»), $n$ («неопределенно») и $f$ («ложно»). Пусть $x$ есть высказывание «Предмет $a$ возможно наблюдать». Определениям $v$, $n$ и $f$ для высказываний $P(a)$ и $\neg P(a)$ можно придать такой вид:

1. $(«P(a)» \leftarrow v) \equiv Df.\, x \wedge P(a)$
   $(«P(a)» \leftarrow n) \equiv Df.\, \sim x$
   $(«P(a)» \leftarrow f) \equiv Df.\, x \wedge \neg P(a)$.
2. $(«\neg P(a)» \leftarrow v) \equiv Df.\, x \neg P(a)$
   $(«\neg P(a)» \leftarrow n) \equiv Df.\, \sim x$
   $(«\neg P(a)» \leftarrow f) \equiv Df.\, x \wedge P(a)$.

Эти определения введены с учетом того, что приходится иметь дело с тремя возможностями: 1) $\sim x$; 2) $x \wedge P(a)$; 3) $x \wedge \neg P(a)$.

В рассмотренных определениях значение $n$ для высказываний $P(a)$ и $\neg P(a)$ определено в зависимости от третьего высказывания $x$. Но возможен и другой вариант. Пусть значение $v$ для $P(a)$, $\neg P(a)$ и $?P(a)$ считается данным, причем для $?P(a)$ оно означает, что нельзя установить (или не известно), имеет место $P(a)$ или $\neg P(a)$. В таком случае определения $n$ и $f$ примут такой вид:

$$(«P(a)» \leftarrow n) \equiv Df.\ («?\,P(a)» \leftarrow v)$$
$$(«\neg P(a)» \leftarrow n) \equiv Df.\ («?\,P(a)» \leftarrow v)$$
$$(«P(a)» \leftarrow f) \equiv Df.\ («\neg P(a)» \leftarrow v)$$
$$(«\neg P(a)» \leftarrow f) \equiv Df.\ («P(a)» \leftarrow v)$$
$$(«?\,P(a)» \leftarrow f) \equiv Df. («P(a)« \leftarrow v) \vee$$
$$\vee («\neg P(a)» \leftarrow v).$$

Как видим, здесь неопределенность поставлена в зависимость не от невозможности наблюдать $a$, а от невозможности обнаружить $P$ при условии, что $a$ можно наблюдать. В этом варианте точно так же приходится нам иметь дело с тремя возможностями, но это уже другие возможности: 1) $P(a)$; 2) $\urcorner P(a)$; 3) $\sim P(a) \wedge \sim \urcorner P(a)$. А если принять во внимание как возможность и невозможность наблюдения $a$, так и возможность или невозможность обнаружения $P$, то получим четыре возможности, о которых говорилось в параграфе 18. Очевидно, должны измениться и определения значений истинности, поскольку добавится еще одна возможность. Причем и здесь возможны вариации, например, такие: 1) ввести четвертое значение истинности; 2) считать $P(a)$ и $\urcorner P(a)$ неопределенными не только в случае $\sim x$, но и в случае $?P(a)$.

Таким образом, истинностные значения не написаны на самих высказываниях и состояниях, к которым они относятся. Они вводятся определениями с учетом строения высказываний и состояний, с которыми они сопоставляются.

На примере определений $v$ и $nv$ для условных высказываний можно показать, что определения значений истинности не всегда совпадают с правилами проверки высказываний. Так, чтобы проверить высказывание $x \rightarrow y$, надо прежде всего установить, как оно получено — путем опытного исследования или путем вывода $y$ из $x$ и других высказываний, считаемых истинными. В первом случае проверка будет состоять в выяснении того, соблюдены правила опытного исследования или нет, а во втором — правила дедукции.

## § 22. Тавтологии, противоречия, выполнимые высказывания

Имеются высказывания, которые истинны в силу самих определений термина «истинно» (или в силу правил приписывания значений истинности высказываниям такого типа). Это — логические истинные высказывания, или тавтологии. Таковы, например, высказывания вида $x \vee \sim x$, $\sim (x \wedge \sim x)$, $x \vee \sim x \vee y$ и т. п. Имеются также высказывания, которые неистинны в силу определений термина «неистинно». Это — невыполнимые высказывания, или противоречия. Таковы, например, высказывания вида $x \wedge \sim x$, $\sim (x \vee \sim x)$, $x \wedge \sim x \wedge y$ и т. п. Имеются, наконец, высказывания, в отношении которых логика не компетентна судить, истинны они или неистинны. Это —

выполнимые высказывания. Подавляющее большинство высказываний науки относится к числу выполнимых.

Высказывание вида $x \vee \sim x$ истинно для любых высказываний $x$ и независимо от каких бы то ни было эмпирических исследований, истинно исключительно по той причине, что оно построено из высказываний $x$ и $\sim x$ посредством оператора $\vee$, и что имеются определенные правила приписывать значения истинности высказываниям такого рода. Высказывание же вида $x \wedge \sim x$ неистинно в силу правил приписывания значений истинности высказываниям с операторами $\sim$ и $\wedge$. Первое истинно, а второе неистинно в силу свойств языка, а не в силу свойств предметного мира, к которому относится $x$. Аналогично для прочих тавтологий и противоречий.

В приведенных выше примерах истинность или неистинность высказываний следует из принятых определений. Но имеются такие высказывания, истинность которых в качестве следствий из каких-либо определений установить нельзя, но которые принимаются в логике по иным соображениям, в частности, как очевидные. Таким является, например, утверждение $a \downarrow P \leftarrow P$, т. е. «Предмет, имеющий некоторый признак, имеет этот признак». Так что множество высказываний, которые считаются истинными в логике, не сводится к множеству тавтологий.

Логически истинные высказывания называют законами логики. Причем, когда заходит речь о законах логики, то в силу сложившейся традиции имеют в виду именно логически истинные высказывания (а порой к ним сводят вообще все законы логики). Так что имеет смысл некоторые вопросы, связанные с ними, разобрать подробнее.

Прежде всего следует иметь в виду, что ответ на вопрос о том, какие высказывания являются логически истинными (тавтологиями) и какие нет, зависит от принятых определений значений истинности для операторов, входящих в эти высказывания (или от определений этих операторов). Так что правильно будет говорить не просто о том, что высказывание $x \vee \sim x$ есть тавтология, а высказывание $x \wedge \sim x$ есть противоречие, а о том, что они таковыми являются при условии таких-то определений. Этот тривиальный факт удивительным образом не замечают, когда утверждают, что некоторые законы двузначной логики не сохраняются в многозначной, в частности — в трехзначной. Стоит, например, принять определения, согласно которым если неопределенно $x$, то неопределенно $\sim x$, и если неопределенны оба $x$ и $y$, то неопределенно $x \vee y$, как получим, что $x \vee \sim x$ будет неопределенно. Но делать из этого вывод, будто закон двузначной логики $x \vee \sim x$ здесь потерял силу, бессмысленно. Единственно правильный вывод здесь такой: если операторы $\sim$ и $\vee$ определены так, как указано выше, и если тавтология всегда имеет значение $v$, то $x \vee \sim x$ не есть тавтология.

Когда утверждают, что законы двузначной логики не сохраняются в многозначной, то совершают логическую ошибку, смешивая различные определения терминов значений истинности или логических операторов.

## § 23. Дедукция

Большую часть знаний люди приобретают путем вывода (дедукции) из других уже имеющихся знаний. Исследование правил вывода составляет доминирующую задачу науки логики.

Логика исследует не любые выводы. Пусть, например, даны высказывания: (1) «Корабль $A$ прошел расстояние 1000 *км*»; (2) «Время, которое корабль $A$ затратил при этом, равно 20 часам». Из них выводится высказывание (3) «Корабль $A$ плыл со средней скоростью 50 *км/час*». Здесь высказывание (3) выведено из высказываний (1) и (2). Но сделано это не по правилам логики, а по особому правилу вычисления скорости, установленному в физике: величина средней скорости тела равна частному от деления расстояния, пройденного телом, иа время, затраченное на это. И когда в случаях такого рода говорят, что некоторое высказывание получено чисто логическим путем из других, то допускают неточность или, точнее, смешивают дедукцию в широком смысле слова с дедукцией логической.

Под выводом (дедукцией) в широком смысле слова имеют в виду получение высказываний из некоторых данных высказываний без обращения к опыту (к наблюдениям и экспериментам) по особого рода правилам, установленным для знаков языка, из которых построены исходные высказывания. К числу таких правил относятся не только правила логики, но и правила, введенные в других науках — в математике, физике, химии и т. п. Под выводом в более узком смысле слова имеют в виду вывод одних высказываний из других исключительно по правилам, устанавливаемым в науке логике. Это — логический вывод, или вывод по правилам логического следования. Например, из высказываний «Все металлы электропроводны» и «Медь есть металл» выводится высказывание «Медь электропроводна», причем это сделано по правилу логики, установленному для квантора «все». Это — логический вывод.

В дальнейшем мы слово «логический» будем для краткости опускать, предполагая при этом, что имеется в виду исключительно логический вывод. Выражение «логическое следование», которое часто употребляется и которое мы точно так же употребляем, означает то же самое, что и выражения «логический вывод» и «логическая дедукция».

## § 24. Логический вывод

Установление правил вывода — довольно сложная комплексная задача, при решении которой приходится согласовывать самые различные стороны дела. Укажем некоторые общие черты правил вывода.

Правила вывода вырабатываются с таким расчетом, чтобы выполнялся следующий принцип дедукции: если высказывание $y$ по этим правилам получается из высказываний $x^1, \ldots, x^n$, и последние считаются истинными, то и $y$ должно признать истинным. Правила вывода изобретаются с расчетом на этот принцип. Так что таинственная принудительная сила законов логики есть лишь собственная сила самих людей в отношении одной из сфер их деятельности.

Правила логического вывода (следования) суть особого рода определения свойств логических операторов, входящих в высказывания, и следствия из таких определений. Так, имеются правила, согласно которым из высказывания $x \wedge y$ логически выводится каждое из $x$ и $y$ по отдельности из высказывания $x \wedge y$ выводится $y \wedge x$, из $x \wedge (y \wedge z)$ выводится $(x \wedge y) \wedge z$ и т. д. Эти правила — перечисление свойств оператора $\wedge$. Последний вводится в употребление именно таким, что эти правила имеют силу. При формулировке этих правил принимается во внимание приведенный выше принцип дедукции. В самом деле, если $x \wedge y$ истинно, то $x$ истинно, и т. д.

Логические операторы вводятся в употребление не по одиночке, а совместно, поскольку они и в высказываниях встречаются совместно. Например, в высказывании

$(\forall a)\,(x \vee (\exists b) \sim (y \wedge z))$ фигурируют операторы $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\sim$, $\wedge$. И, разумеется, правила вывода для таких высказываний должны учитывать всевозможные комбинации этих операторов. Так что, хотя каждый оператор по отдельности кажется тривиально простым, определение их свойств в разного рода комбинациях и учет всех возможных комбинаций такого рода есть дело довольно трудное.

Ответом на вопрос о том, когда из одних высказываний логически следуют другие высказывания, являются не общие рассуждения, а перечисление конкретных случаев такого рода. Потому удобным методом здесь оказались логические исчисления, которые не только позволили дать строгую формулировку рассматриваемых правил, но и в целом ряде случаев позволили охватить эти правила исчерпывающим образом.

Тот факт, что из высказывания $x$ дедуцируется (логически следует) высказывание $y$, будем изображать символом вида

$$x \vdash y.$$

Здесь знак $\vdash$ не есть логический оператор. Это — предикат высказывания «Из высказывания $x$ логически следует высказывание $y$». Субъекты этого высказывания суть термины «высказывание $x$» и «высказывание $y$». Высказывание $x$ называется посылкой, высказывание $y$ — заключением, или следствием.

Если вывод совершается из нескольких высказываний $x^1, \ldots, x^n$, то последние объединяются в конъюнкцию $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$, так что приведенная выше схема с одной посылкой вполне достаточна. Во всяком случае, можно принять такое соглашение: из $x^1, \ldots, x^n$ логически следует $y$, если и только если из $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$ логически следует $y$.

Символами вида

$$x \dashv\vdash y$$

будем для краткости записывать то, что имеет место как $x \vdash y$, так и $y \vdash x$. Будем в таком случае считать, что $x$ и $y$ дедуктивно эквивалентны.

Символами вида

$$\vdash x$$

будем записывать тот факт, что $x$ принимается из чисто логических соображений (как логически истинное).

Приведем правила вывода для высказываний с операторами $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$, $\to$ в таком виде и в таком объеме, в каком это необходимо и достаточно (и удобно) для дальнейшего изложения. Подробно логические системы такого рода рассмотрены в работах автора, упомянутых в предисловии.

Правила общей теории дедукции Д$^i$:

1. $\sim\sim x \dashv\vdash x$
2. $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash x^i$,

где $n \geqslant 2$, $x^i$ есть любое из $x^1$, $x^2$, ..., $x^n$

3. $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n \vdash y$
   $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n \vdash y$,

где $y$ отличается от посылки лишь иным порядком конъюнктивных или, соответственно, дизъюнктивных членов.

4. $x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n \dashv\vdash y$
   $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n \dashv\vdash y$,

где $y$ отличается от посылки лишь тем, что какая-то ее часть вида $x^i \wedge \ldots \wedge x^k$, или, соответственно, $x^i \vee \ldots \vee x^k$ заключена в скобки.

5. $(x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n) \wedge y \dashv\vdash (x^1 \wedge y) \vee (x^2 \wedge y) \vee \vee \ldots \vee (x^n \wedge y)$
   $(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n) \vee y \dashv\vdash (x^1 \vee y) \wedge (x^2 \vee y) \wedge \wedge \ldots \wedge (x^n \vee y)$
6. $\sim(x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n) \dashv\vdash \sim x^1 \wedge \sim x^2 \wedge \ldots \wedge \wedge \sim x^n$
   $\sim(x^1 \wedge x^2 \wedge \ldots \wedge x^n) \dashv\vdash \sim x^1 \vee \sim x^2 \vee \ldots \vee \vee \sim x^n$
7. $(x \vee y) \wedge \sim x \vdash y$
8. Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$
9. Если $x \vdash z$ и $y \vdash z$, то $x \vee y \vdash z$
10. Если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash y \wedge z$
11. Если $x \dashv\vdash y$, то $z \vdash v$, где $v$ образуется из $z$ путем замены нуля или более вхождений $x$ в $z$ на $y$.
12. $\vdash x \vee \sim x$

13. $\vdash \sim (x \wedge \sim x)$

14. Если $x \vdash y$ и $\vdash x$, то $\vdash y$

15. Если $x \vdash y$ и $\vdash \sim y$, то $\vdash \sim x$

16. Если $\vdash x$ и $\vdash y$, то $\vdash x \wedge y$.

Правила для условных высказываний $Y^i$:

1. $(x \to y) \wedge x \vdash y$
2. $(x \to y) \wedge \sim y \vdash \sim x$
3. $(x \to y) \vdash (\sim y \to \sim x)$
4. $(x \to y) \wedge (y \to z) \vdash (x \to z)$
5. $(x \to y \wedge z) \dashv\vdash (x \to y) \wedge (x \to z)$
6. $(x \vee y \to z) \dashv\vdash (x \to z) \wedge (y \to z)$
7. Если $x \vdash y$, то $\vdash (x \to y)$.

Правила для предикации $\Pi^i$:

1. $?P(a) \dashv\vdash \sim P(a) \wedge \sim \urcorner P(a)$
2. $P(a) \dashv\vdash \sim \urcorner P(a) \wedge \sim ?P(a)$
3. $\urcorner P(a) \dashv\vdash \sim P(a) \wedge \sim ?P(a)$
4. $P(a) \vdash \sim \urcorner P(a)$
5. $\urcorner P(a) \vdash \sim P(a)$
6. $\vdash P(a) \vee \urcorner P(a) \vee ?P(a)$
7. $\vdash \sim (P(a) \wedge \urcorner P(a))$

   $\vdash \sim (P(a) \wedge ?P(a))$

   $\vdash \sim (\urcorner P(a) \wedge ?P(a))$.

Правила для кванторов $K^i$:

1. $(\forall a) x \vdash x$
2. $x \vdash (\exists a) x$
3. $(\forall a) x \dashv\vdash (\urcorner \exists a) \sim x$
4. $(\urcorner \forall a) x \dashv\vdash (\exists a) \sim x$
5. $(?\forall a) x \dashv\vdash \sim (\forall a) x \wedge \sim (\urcorner \forall a) x$
6. $(\forall a) x \dashv\vdash \sim (\urcorner \forall a) x \wedge \sim (?\forall a) x$
7. $(\urcorner \forall a) x \dashv\vdash \sim (\forall a) x \wedge \sim (?\forall a) x$

8. $(?\exists a)x \dashv\vdash \sim(\exists a)x \wedge \sim(\neg\exists a)x$

9. $(\exists a)x \dashv\vdash \sim(\neg\exists a)x \wedge \sim(?\exists a)x$

10. $(\neg\exists a)x \dashv\vdash \sim(\exists a)x \wedge \sim(?\exists a)x$

11. $(\forall a)(x \wedge y) \dashv\vdash (\forall a)x \wedge (\forall a)y$

12. $(\exists a)(x \vee y) \dashv\vdash (\exists a)x \vee (\exists a)y$

13. $(\forall a)\ (x \vee y) \vdash (\forall a)x \vee (\exists a)y$

14. $(\exists a)(x \wedge y) \vdash (\exists a)x \wedge (\exists a)y$

15. $(\forall a)x \vee (\forall a)y \vdash (\forall a)(x \vee y)$

16. $(\forall a)x \wedge (\exists a)y \vdash (\exists a)(x \wedge y)$

17. $(\forall a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\forall a)x$

18. $(\exists a)(\exists b)x \vdash (\exists b)(\exists a)x$

19. $(\exists a)(\forall b)x \vdash (\forall b)(\exists a)x$

20. $(\forall a)(x \to y) \vdash (\forall a)x \to (\forall a)y$

21. $(\exists a)(x \to y) \vdash (\exists a)x \to (\exists a)y$

22. Если $x \vdash y$, то $(\forall a)x \vdash (\forall a)y$

23. Если $x \vdash y$, то $(\exists a)x \vdash (\exists a)y$

24. Если $\vdash x$, то $\vdash (\forall a)x$.

Мы специально перечислили эти правила так, что некоторые из них выводятся из других как теоремы логики из аксиом логики, дабы не утруждать читателя поисками доказательств и справок, второстепенных для целей данной работы.

## § 25. Классический и неклассический случаи в теории вывода

В приведенной выше теории вывода различаются два отрицания $\sim$ и $\neg$ и фигурирует оператор неопределенности. В ней недоказуемы утверждения

1. $\sim P(a) \vdash \neg P(a)$, $\sim(\forall a)x \vdash (\neg\forall a)x$
$\sim(\exists a)x \vdash (\neg\exists a)x$

2. $\vdash P(a) \vee \neg P(a,$ $\vdash (\forall a)x \vee (\neg\forall a)x$
$\vdash (\exists a)x \vee x(\neg\exists a)x.$

Этот случай в теории вывода будем называть неклассическим, или общим.

Но встречаются такие области, в которых различение отрицаний не производится, а оператор неопределенности является излишним. Для таких случаев теорию вывода можно расширить, приняв дополнительно правила 1. Благодаря этому будут доказуемы утверждения 2. Так что правила предикации и правила 5—10 для кванторов отпадут как излишние. Правила 3 и 4 для кванторов будут равносильны таким:

$$(\forall a)\, x \dashv\vdash \sim (\exists a) \sim x.$$

Будем такой случай в теории вывода называть классическим.

Обращаем внимание еще на одно очень важное отличие неклассического случая от классического. В классическом случае конъюнкция отрицаний обоих членов пар $P(a)$ и $\neg P(a)$, $(\forall a)x$ и $(\neg\forall a)x$, $(\exists a)x$ и $(\neg\exists a)x$ дает противоречие. Покажем это на примере первой пары: поскольку

$$\neg P(a) \dashv\vdash \sim P(a), \sim \neg P(a) \dashv\vdash \sim\sim P(a),$$
$$\sim\sim P(a) \dashv\vdash P(a),$$

получим

$$\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a) \vdash \sim P(a) \wedge \sim\sim P(a)$$
$$\sim P(a) \wedge \sim \neg P(a) \vdash \sim P(a) \wedge P(a).$$

В неклассическом же случае противоречие не получается, поскольку замена $\sim \neg P(a)$ на $\sim\sim P(a)$ и затем на $P(a)$ здесь недопустима. Аналогично для прочих пар.

Игнорирование этого различия ведет к недоразумениям. Это различие есть различие случаев, когда допускаются три возможности и две возможности. В неклассическом случае эти возможности суть $P(a)$, $\neg P(a)$ и $?P(a)$, в классическом — лишь $P(a)$ и $\neg P(a)$. Аналогично для кванторов. Причем неклассический случай является более общим, поскольку в качестве частного случая здесь можно допустить, что третья возможность с оператором неопределенности является пустой.

## § 26. Правила вывода и значения истинности высказываний

Правила вывода не зависят от того, сколько значений истинности решено приписывать высказываниям. При осуществлении выводов принимается во внимание лишь видимое строение высказываний, т. е. наличие в них определенных терминов, высказываний и логических операторов и взаимное расположение их. Значения же истинности принимаются во внимание лишь для реализации основного принципа дедукции: если принимаются (считаются истинными) посылки, то принимаются заключения; если отвергаются (считаются неистинными) заключения, то отвергаются посылки. При этом вполне достаточно одного предиката истинности и его отрицания.

## § 27. Дедуктивные свойства терминов

Используя отношение логического следования одних высказываний из других, можно определить в целом ряде случаев свойства терминов. Делается это как расширение теории дедукции, т. е. как дополнение новых аксиом и правил вывода к изложенным ранее. Этот метод построения различных разделов логики является до известной степени стандартным. Он обеспечивает связь различных разделов логики в единую науку.

Приведем несколько аксиом $T^{i}$ такого рода:

1. $\vdash a \downarrow P \rightarrow a$
2. $\vdash a \downarrow x \rightarrow a$
3. $\vdash P(a \downarrow P)$
4. $\vdash (\forall a \downarrow x)\, x$
5. $(x \equiv y) \dashv\vdash (sx \rightleftarrows sy)$
6. $(a \rightleftarrows b) \wedge x \vdash x\,(a/b)$
7. $\vdash (a \rightleftarrows b) \rightarrow (x \equiv x\,(a/b))$
8. $(x \equiv y) \wedge z \vdash z\,(x/y)$
9. $\vdash (x \equiv y) \rightarrow (z \equiv z\,(x/y))$
10. $(a \rightarrow b) \wedge (\forall b)\, x \vdash (\forall a)\, x\,(b/a)$
11. $(a \rightarrow b) \wedge (\exists a)\, x \vdash (\exists b)\, x\,(a/b)$
12. $(sP(a) \rightarrow sQ(a)) \dashv\vdash (P \rightarrow Q)$.

Читаются эти правила так: 1) в результате ограничения термина получается видовой по отношению к нему термин; 3) предмет, имеющий признак, имеет его; 4) для всех предметов, для которых верно некоторое высказывание, верно это высказывание; 5) высказывания тождественны по смыслу тогда и только тогда, когда тождественны по значению термины, образованные из них посредством оператора «тот факт, что»; 7) тождественные по значению термины можно заменять друг на друга; 9) тождественные по смыслу высказывания можно заменять друг на друга; и т. п.

## § 28. Следствия из определений

Возьмем определение «Ромб есть равносторонний четырехугольник». Слово «есть» здесь играет роль знака $= Df.$, определяющая часть есть литературный вариант термина «четырехугольник, у которого все стороны равны». Кажется очевидным, что будут верны утверждения «У ромба все стороны равны» и «Ромб есть четырехугольник» (где слово «есть» играет уже другую роль, а именно — роль предиката $\rightarrow$). Эти утверждения суть следствия из определений.

Однако правила получения следствий из определений явным образом не сформулированы, а объяснить, почему принимаются приведенные выше утверждения без явной формулировки этих правил, невозможно. (Это, кстати сказать, хороший пример к тому, что говорилось выше о роли логики в обработке языка.)

Дело в том, что как только операция, с помощью которой вводится новый термин $b$, закончена (записана, произнесена, прочитана, услышана и т. п.), $b$ становится полноправным термином, и все то, что сказано о нем, становится полноправным утверждением. И это обстоятельство можно зафиксировать такими правилами $O^i$:

1. Если принято считать $b$ термином таким, что $a^1 \rightarrow b, \ldots$ $\ldots, a^n \rightarrow b$, то приняты утверждения $\vdash (a^1 \rightarrow b), \ldots$ $\ldots, \vdash (a^n \rightarrow b)$.
2. Если $a = Df.b$, то $a \rightleftarrows b$.
3. Если $x \equiv Df.y$, то $x \vdash y$ и $y \vdash x$.

Покажем теперь на примере определения $a = Df.b \downarrow P$, как получаются следствия из определений. Согласно приведенному выше правилу $O^2$

$$(1)\ (a = Df \cdot b \downarrow P) \rightarrow (a \rightleftarrows b \downarrow P).$$

Поскольку $a = Df.b \downarrow P$ принято, по правилам условных высказываний из (1) получается

$$(2) \vdash (a \rightleftarrows b \downarrow P).$$

Имеется логическая аксиома $T^3$

$$(3) \vdash P(b \downarrow P)$$

и логическая аксиома $T^6$

$$(4)\, x \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P) \vdash x\,(a/b \downarrow P).$$

Из (3) по правилу для кванторов $K^{24}$ получаем

$$(5) \vdash (\forall b \downarrow P)\, P(b \downarrow P),$$

а (4) принимает вид

$$(6)\, (\forall b \downarrow P)\, P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P) \vdash (\forall a)\, P(a),$$

если $x$ есть (5). Из (2) и (5) получаем по $Д^{16}$

$$(7) \vdash (\forall b \downarrow P)\, P(b \downarrow P) \wedge (a \rightleftharpoons b \downarrow P).$$

Из (6) и (7) получаем по $Д^{14}$

$$(8) \vdash (\forall a)\, P(a).$$

И, наконец, по $K^1$ имеем

$$(9) \vdash P(a).$$

Мы рассмотрели самый простой случай. В более сложных случаях вывод следствий из определений имеет еще более громоздкое логическое описание. Может быть отчасти и по этой причине обычно не стремятся к логической ясности или прибегают к другой форме определений, о которой будет рассказано в следующем параграфе.

## § 29. Имплицитные определения

Определения, в которых явно принимается решение употреблять некоторое выражение как термин или как высказывание, называются явными, или эксплицитными. Такие определения имеют достоинства, поскольку их логическое строение очевидно, и к вводимым с их помощью терминам не предъявляется никаких дополнительных претензий. Но они в ряде случаев получаются довольно громоздкими и даже практически бывают невыполнимыми. С некоторыми трудностями сопряжено также получение из них нужных следствий. Эти недостатки эксплицитных определений частично восполняют так называемые имплицитные определения.

Имплицитные определения обладают такими свойствами: 1) вновь вводимые (определяемые) термины принимаются как первично ясные; 2) формулируется в качестве аксиом некоторая совокупность утверждений, содержащих термины, указанные в пункте 1. Эти аксиомы подбираются с таким расчетом (хотя это обычно не всегда осознается самими изобретателями определений): если бы определяемые термины были введены эксплицитными определениями, то эти аксиомы были бы следствиями их. Очевидное удобство таких определений — интересы дедукции. Имплицитные определения особенно удобны для введения логических операторов, а также в тех случаях, когда в употребление совместно вводятся сразу несколько терминов и операторов (или комбинации из тех и других). Имплицитные определения порой употребляются совместно с эксплицитными.

Приведем пример. Пусть требуется определить термины 1 («единица») и 0 («ноль») и терминообразующий оператор $+$ («плюс») для таких терминов. Примем такое эксплицитное определение Н-числа: 1) 1 и 0 суть Н-числа; 2) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ суть Н-числа, то $(a^1 + \ldots + a^n)$ есть Н-число; 3) нечто есть Н-число только в силу пунктов 1 и 2. Примем, далее, такую систему аксиом, которая есть имплицитное определение 1, 0 и $+$:

$$1. \vdash (a + 1) > a$$

$$2. \vdash (a > b) \rightarrow (a > b + 1) \vee (a = b + 1)$$

$$3. \vdash (a^1 + a^2 + \ldots + a^n) = b,$$

где $b$ отличается от $(a^1 + a^2 + \ldots + a^n)$ лишь наличием скобок, удовлетворяющих определению Н-числа.

$$4. \vdash (a + 0) = a$$

$$5. \vdash (a + b) = (b + a).$$

Суть этого определения: термины 1 и 0 и оператор $+$ вводятся именно такими, что будут верны утверждения 1—5. Из них по правилам логики можно выводить следствия для чисел с 1, 0 и $+$.

Иногда в простых случаях имплицитное определение легко превращается в эксплицитное, и наоборот. Например, оператор $\supset$ можно эксплицитно определить так:

$$(x \supset y) \equiv Df.(\sim x \vee y),$$

или, в иной форме, так: «$x \supset y$ есть сокращение для $\sim x \vee y$». В имплицитной форме этот оператор включается в алфавит системы, а к числу аксиом этой системы добавляются аксиомы для $\supset$, в частности, такие

$$(x \supset y) \dashv\vdash (\sim x \vee y).$$

Но такие преобразования не всегда практически возможны и целесообразны (как это имеет место в отношении 1, 0 и $+$).

Имплицитные определения имеют свои недостатки. В них явным образом не выражено то, что они суть именно определения, вводящие в употребление новые термины или операторы. Потому и бывает так, что начинают искать еще какой-то их смысл сверх того, что выражено в содержащих их аксиомах, и смешивают определяющие утверждения с утверждениями, которые также содержат определяемые термины, но принимаются из иных соображений.

Хотя в случае имплицитных определений последние принимают вид аксиом, т. е. утверждений, это не означает, что исчезает разница между определениями и аксиомами-высказываниями. Высказывания строятся из терминов, значение которых известно до построения их и независимо от них. Определения даже в случае, когда им придают вид аксиом, содержат термины, значение которых без этих аксиом не известно.

## § 30. Неполные определения

Встречаются имплицитные определения, которые можно назвать неполными, или смешанными. Они строятся так. Каким-то образом устанавливаются ситуации, в которых уместно употребление высказываний с термином $a$. Признаки этих ситуаций строго не определяются (поскольку в этом нет нужды, это практически невозможно, никто не пытался это сделать и т. п.). Но формулируются (принимаются) утверждения типа $x \vdash y$ или $\vdash (x \to y)$, в которых в $x$ входит определяемый термин $a$, а в $y$ нет. Поскольку при этом нет обратных утверждений $y \vdash x$ и $\vdash (y \to x)$, то элиминировать из языка высказывания с термином $a$ нельзя.

Приведем пример. Из языковой практики известно, в каких ситуациях уместно употреблять выражения вида «$a$ порождает $b$». Можно указать некоторые признаки таких ситуаций, в частности — пространственная близость $a$ и $b$. Но для некоторых целей бывает достаточно этого привычного употребления и таких дополнительных пунктов определения: 1) из «$a$ порождает $b$» следует «$a$ возникает раньше $b$»; 2) из «а порождает $b$» следует «если не возникает $a$, то не возникает $b$». И лишь эти пункты могут затем фигурировать в рассуждениях, претендующих на логическую строгость.

## § 31. Псевдоопределения

Встречаются случаи введения языковых выражений, которые мы называем псевдоопределениями. Они строятся так. Имеется совокупность высказываний $x$, в связи с которой вводится выражение $a$. Практически $a$ рождается как сокращение для $x$ (что обычно не осознается), но затем, отделившись от породившей его основы, $a$ начинает жить как выражение с самостоятельным смыслом, независимым от смысла $x$. Особенность здесь состоит в том, что выражению $a$ придают вид высказывания $P$ ($b$). Но делается это не в силу намерения ввести в употребление предикат $P$ или субъект $b$, а в силу языковой практики строить предложения, расчленяя их на субъекты и предикаты, и в силу ничем не ограниченной возможности конструировать $a$ из имеющихся элементов языка. Что это будут за элементы, зависит в таких случаях не от интересов соблюдения правил логики при введении терминологии (о них, повторяем, обычно вообще не подозревают), а от самых различных причин — от языковой традиции, от стремления к литературной выразительности или к сенсации и т. п. А если еще к сказанному добавить то, что выражение $a$ вводится по схеме имплицитного определения («$a$, если и только если $x$»), то $P$ ($b$) вообще воспринимается не как результат языкового творчества определенного сорта, а как вывод из ситуации, описываемой совокупностью высказываний $x$. Короче говоря, дело на поверхности выглядит так, будто высказывание $P$ ($b$) следует из $x$.

Приведем для ясности сначала обиходный пример. Пусть некто $N$, делая карьеру, допустил серьезные промахи в организации работы своего ведомства и во взаимоотношениях с начальством и коллегами. Пусть за это его сняли с работы без перспективы подняться вновь. Всем известно, что в таких ситуациях часто употребляются выражения

«$N$ сломал шею», «$N$ прогорел» и т. п. Эти выражения суть краткие обозначения ситуации, имеющей место для $N$, причем — выражения, понятные и употребляемые в определенных условиях и для определенного круга лиц. И никому в голову при этом не приходит рассматривать введение этих выражений как определения предикатов «сломал шею», «прогорел» и т. п. или понимать их как высказывания, в которых эти предикаты употребляются буквально.

Такого рода примеры встречаются и в науке, с той лишь разницей, что здесь все понимают буквально и воспринимают как результат высочайшего развития науки, а не как результат языковых мистификаций. Так, совокупность высказываний $x$ о поведении светового луча в районе тела $A$ неявно сокращают выражением «Пространство в районе $A$ искривлено». Последнее воспринимается как высказывание с предикатом «искривлено», смысл которого отрывается от $x$ и от выражения, в котором он здесь фигурирует (что значит искривленный предмет, всем известно!). Аналогично совокупность высказываний $x$ о некоторых частицах $A$ в некоторых условиях $B$ неявно сокращают выражением «Время для $A$ в условиях $B$ ускоряется (замедляется)», и слова «ускоряется» и «замедляется» воспринимаются как самостоятельные предикаты с общеизвестным смыслом, но в данном случае применимые для времени.

Здесь имеет место своего рода языковая мимикрия, которую замечают в природе и во многих случаях языковой практики в обычном общении, но которую в массовых масштабах культивируют в ряде областей науки как показатель прогресса научного мышления.

## § 32. Операционные определения

Частный случай имплицитных определений суть определения, содержащие выражения вида $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ и $(y \rightarrow z) \rightarrow x$, в которых $x$ есть высказывание с определяемым термином, $y$ есть описание некоторых действий, $z$ есть описание результата этих действий. Например, выражение «$A$ весит $B$ кг» можно рассматривать как замену выражения «Если $A$ поместить на весы $C$, то стрелка $C$ покажет деление $D$».

Для одного и того же определяемого высказывания $x$ здесь возможны различные определяющие части $y \rightarrow z$. Возможны также случаи, когда число различных $y \rightarrow z$

не указано, не ограничено или вообще не устанавливается общепринятым соглашением. Так что здесь возможны различные варианты, в частности, такие:

1. $x \leftrightarrow (y \rightarrow z)$

2. $x \leftrightarrow ((y^1 \rightarrow z^1) \vee \ldots \vee (y^n \rightarrow z^n))$

3. $((y^i \rightarrow z^i) \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow (a \rightarrow b))$,

где $sy^i$ и $sz^i$ суть любые элементы некоторых заданных классов, а $a$ и $b$ суть переменные для элементов этих классов.

## § 33. Интуитивно очевидные утверждения

Встречаются случаи, когда те или иные утверждения принимаются как интуитивно ясные или очевидные. Например, таковы утверждения, «Предмет, имеющий некоторое свойство, имеет это свойство». «Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками». Такого рода утверждения суть имплицитные определения входящих в них выражений (операторов, терминов, частей терминов) или следствия таких определений. Так, первое из приведенных выше утверждений есть часть имплицитного определений оператора ограничения («который»), а второе — термина «прямая». Эти утверждения кажутся несомненными не благодаря каким-то доказательствам, наблюдениям и т. п., а лишь благодаря тому, что мы сами неявным образом принимаем их как определения свойств соответствующих языковых выражений. Когда отвергают второе из приведенных утверждений, то фактически употребляют термин «прямая» уже в другом смысле и не более того (а отнюдь не открывают какие-то новые опытные факты, противоречащие ранее принятым допущениям).

Интуиция в рассматриваемом случае есть лишь употребление выражений языка на уровне стихийно сложившихся навыков их введения. Поскольку эти навыки аморфны и их логическая природа остается неизвестной, рассматриваемые утверждения мистифицируются. Возникает проблема интуиции, которая кажется тонкой и сложной, но которая при условии достаточно тщательного анализа логических правил введения терминологии оказывается фиктивной. Выявление (экспликация) интуиции есть лишь установление смысла некоторых языковых выражений, входящих в рассматриваемые утверждения, профессионально разработанными средствами логики.

## § 34. Перемеииые

Чтобы придать утверждениям логики желаемую общность, очертить границы их применимости, придать им компактный и обозримый вид, используют особого рода символы, называемые переменными. Переменные используются и в других науках. В логике они вводятся для терминов, высказываний и логических операторов.

Возьмем фразу: «Если $a$ и $b$ суть термины, то $a \wedge b$ есть термин». Ее следует буквально читать так: если на место букв $a$ и $b$ вписаны какие-то термины, то последовательность из первого термина, оператора $\wedge$ и второго термина также будет термином. Здесь буквы $a$ и $b$ суть особым образом отмеченные места для терминов, а в комбинации $a \wedge b$ они указывают вид комбинации, которая получится из терминов, представляемых на место $a$ и $b$. Аналогично в отношении высказываний и операторов.

Переменные вводятся в употребление двумя путями: 1) явно перечисляются символы, которые считаются переменными того или иного рода (например, принимается, что буквы $a^1$, $a^2$, $a^3$, . . . суть переменные для высказываний); 2) произвольные символы употребляются как переменные, но из контекста бывает ясно, для чего они являются переменными (например, утверждая «Если $a$ есть термин, то $\sim a$ есть термин», мы употребляем $a$ как переменную для терминов). Мы до сих пор употребляли и будем употреблять переменные вторым способом. Но в некоторых случаях будем употреблять и переменные первого типа, каждый раз указывая, переменными для каких терминов они являются в том или ином случае. При этом будем также время от времени показывать, какие языковые выражения без переменных заменяют выражения с переменными.

Например, высказывание «Для любого предмета, обладающего тяжестью, найдется другой предмет, обладающий тяжестью, такой, что первый предмет тяжелее второго» с помощью переменных можно записать так: «$(\forall a)(\exists b)$ ($a$ имеет тяжесть) $\wedge$ ($b$ имеет тяжесть) $\rightarrow$ ($b$ тяжелее $a$)», где $a$ и $b$ суть переменные для субъектов.

Соотношение терминов и переменных определяется следующими правилами $B^i$:

1. $\vdash (a \rightharpoonup b)$,

где $a$ есть любой термин из некоторой заданной группы терминов, а $b$ — любая переменная из заданных переменных для этой группы терминов.

2. $(\forall b)\, x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\forall a)\, x\, (b/a)$

3. $(\exists a)\, x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists b)\, x\, (a/b)$,

где $x\, (a/b)$ есть результат замены $a$ на $b$ везде, где $a$ свободно входит в $x$ (т. е. $a$ не подпадает под действие какого-либо квантора $(\forall a)$ или $(\exists a)$, а $x\, (b/a)$ — результат аналогичной замены $b$ на $a$. В качестве следствий 1—3 получаются утверждения:

4. $(\forall b)\, x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash x\, (b/a)$

5. $x \wedge (a \rightharpoonup b) \vdash (\exists b)\, x\, (a/b)$.

Кроме того, имеет силу следующее правило:

6. Если для любого предмета, обозначаемого термином $a$ таким, что $a \rightharpoonup b$, верно $x$, то $(\forall b) x\, (a/b)$.

Например, утверждение «Для любого физического тела $a$ найдется другое физическое тело $b$ такое, что $a$ больше $b$» с помощью переменных $c$ и $d$ для терминов, обозначающих физические тела, запишется так: $(\forall c)\, (\exists d)\, (d > c)$.

## § 35. Определения с переменными

Переменные используются также при построении определений терминов. Логическая схема таких определений имеет следующий вид: $b^1, \ldots, b^n$ $(n \geqslant 1)$ будут терминами $\alpha$ такими, что если (1) $a^1, \ldots, a^m$ $(m \geqslant 1)$ суть термины $\beta$, и (2) верны утверждения $x^1, \ldots, x^k$ $(k \geqslant 1)$, содержащие $a^1, \ldots, a^m$, то (3) будут верны утверждения $y^1, \ldots, y^l$ $(l \geqslant 1)$, содержащие $b^1, \ldots, b^n$.

В таком определении буквы $a^1, \ldots, a^m$ суть переменные для терминов $\beta$. Правило таких определений: подставлять на место переменных $a^1, \ldots, a^m$ термины $b^1, \ldots, b^n$ и все те термины, которые содержат их как часть или определяются через них, нельзя. Это правило содержится в самой формулировке определения: в пункте (1) сказано, что $a^1, \ldots, a^m$ уже до построения определения должны быть терминами некоторого рода $\beta$, чтобы $b^1, \ldots, b^n$ стали терминами рода $\alpha$. А до построения определения $b^1, \ldots, b^n$ терминами вообще не являются. Значит не являются терминами и все те выражения, которые зависят от них по значению (т. е. содержат их или определяются через них).

Приведем пример: будем считать слово «число» термином таким, что если $a$ есть термин, обозначающий число, то $a$ есть «число». Здесь $a$ есть переменная, на место которой могут подставляться любые термины, обозначающие числа — 1, 0, $^1/_2$, $\sqrt{2}$ и т. п.

В приведенном примере подстановка слова «число» на место $a$ дает выражение «число есть число», которое вполне правомерно. Но не всегда такая подстановка проходит безнаказанно. Приведем любопытный пример того, как нарушение правила для рассматриваемых определений ведет к противоречию.

Парадокс множества всех нормальных множеств общеизвестен, и мы не будем приводить его обычную формулировку. Мы сразу осуществим экспликацию определения нормального множества в такой форме, чтобы стала заметной логическая ошибка, совершаемая при получении этого парадокса.

Для наглядности примем сокращения: $n$ — нормальное множество, $Mn$ — множество нормальных множеств, $\in$ — знак включения элемента в множество ($a \in b$ читается как «$a$ есть элемент $b$», «$a$ включается в $b$», «$a$ содержится в $b$» и т. п.). Определение нормального множества можно записать так: $n$ будет термином таким, что если $a$ есть термин множества, то

$$(\sim(a \in a) \rightarrow (a \in Mn)) \wedge ((a \in a) \rightarrow \sim(a \in Mn))$$

(т. е. если $a$ не включается в самого себя, то $a$ включается в множество нормальных множеств).

Парадокс получается, если подставить на место переменной $a$ термин $Mn$:

$$(\sim(Mn \in Mn) \rightarrow (Mn \in Mn)) \wedge ((Mn \in Mn) \rightarrow \sim(Mn \in Mn))$$

(т. е. если $Mn$ не включается в $Mn$, то $Mn$ включается в $Mn$ и если $Mn$ включается в $Mn$, то $Mn$ не включается в $Mn$). Такая подстановка кажется правомерной, поскольку $Mn$ есть термин множества. Но она ошибочна, поскольку по правилам определения выражение $n$ и содержащее его выражение $Mn$ до построения определения вообще терминами не являются, а по самой формулировке определения $a$ есть переменная для вещей, являющихся терминами до построения определения и независимо от него (причем для терминов, обозначающих множества). Так что если строго соблюдать правила определения, то парадокс не получится.

## § 36. Многосмысленность языковых выражений

Общеизвестно, какую негативную роль играет многосмысленность языковых выражений в науке и вообще в языковой практике людей. И сложность борьбы с ней состоит в том, что она не всегда заметна, а порой обнаружение ее требует тщательного анализа. Во-первых, множества предметов, обозначаемых данными терминами, могут почти совпадать, так что их незначительное несовпадение вообще не принимается во внимание (хотя именно оно-то и может сыграть роковую роль). Во-вторых, возможно, что множество предметов может предполагаться одно и то же, но обозначающие их термины вводятся в употребление различными способами, так что из них естественно получаются различные следствия. Сказанное относится и к логическим операторам.

Возьмем, например, термин «пространство». Из привычного словоупотребления кажется ясным, о чем идет речь, когда говорят о пространстве. Но в одних случаях имеют в виду пространственные объемы отвлеченно от тех предметов, которые в них находятся или могут в них поместиться, а в других — эти объемы со всеми содержащимися в них предметами или с заполняющим их особого рода веществом. Хотя здесь имеет место просто различное словоупотребление, одни лица обвиняют других в ошибках. Современные «теоретические» области науки буквально кишат такого рода ситуациями.

## § 37. Экспликация

Встречаются термины и высказывания, смысл которых считается ясным в некотором привычном словоупотреблении и более или менее однозначным. При этом от терминов не требуется, чтобы они были строго определены, а от высказываний не требуется, чтобы их логическое строение было выражено явно. Более того, иногда в таких случаях строгое определение терминов и построение предложений в соответствии со стандартами логики вообще бывает затруднено или практически невозможно. И если возникает потребность использования таких терминов и высказываний в какой-либо науке, то их обычное употребление может оказаться неприемлемым: оно многосмысленно, затрудняет или вообще исключает возможность получения нужных следствий, не дает гарантий правильности рассуждений и т. п. Поэтому вместо этих терминов и высказываний для некоторых целей науки употребляют своего рода заместителей, которые строго определяются и логическое строение которых выражается достаточно явным образом. Эта операция введения терминов и высказываний, замещающих некоторые данные термины и высказывания, называется экспликацией последних.

Задача экспликации языковых выражений состоит не в том, чтобы перечислить, в каких различных смыслах они употребляются, и не в том, чтобы выбрать одно какое-то их употребление, а в том, чтобы определить или дать четкую формулировку некоторых выражений, к которым применимы правила логики, которые удобны с точки зрения вывода нужных следствий, которые гарантируют однозначность результатов проверки и т. п., но которые при всем этом в какой-то мере совпадают с данными языковыми выражениями. Если при этом сохраняются те же слова и те же формулировки, здесь все равно происходит удвоение терминологии.

Экспликацию выражений языка, при которой используются лишь средства логики и некоторые общедоступные навыки языковой практики, будем называть логической. Упомянутые навыки составляют обычный элемент культуры и не требуют для своего понимания никакой специальной науки. Выше мы логическую экспликацию использовали систематически, в частности — ввели операторы $\sim$, $\vee$, $\wedge$,: и т. д. как выражения, эксплицирующие известные выражения языка «не», «или», «и» и т. д. И в дальнейшем она будет важнейшим средством нашего анализа.

## § 38. Метатермины и метавысказывания

Термины, обозначающие термины и высказывания, суть метатермины. Высказывания, содержащие метатермины, суть метавысказывания. Например, выражение «термин «стол»» есть метатермин по отношению к термину «стол», а высказывание «Термин «стол» является простым» — метавысказыванием.

Метатермины образуются посредством терминов логики «термин», «субъект», «предикат», «высказывание» по правилам: 1) если $a$ есть термин, то выражение «Термин $a$» («Термин, имеющий вид $a$», «Термин, который пишется $a$» и т. п.) есть термин, причем — субъект; 2) если $a$ есть субъект (предикат), то выражение «Субъект (предикат) $a$» есть термин, причем — субъект в обоих случаях; 3) если $x$ есть высказывание, то выражение «Высказывание $x$» есть термин, причем — субъект.

Введем обобщенный способ образования метатерминов посредством особого оператора $m$: 1) если $a$ есть термин или высказывание, то $ma$ есть метатермин; 2) метатермин есть термин, причем — субъект.

Никаких метапредикатов не существует. Если $a$ есть предикат, то $ma$ будет все равно субъектом. Но имеются предикаты, смысл которых устанавливается исключительно для метатерминов. Таковы, например, предикаты логики $\vdash$, $\rightharpoonup$, $\rightleftharpoons$.

Для любого термина $a$

$$\sim(a \rightharpoonup ma) \wedge \sim(ma \rightharpoonup a).$$

Так что для любого предиката $P$ смысл $P(a)$ и $P(ma)$ устанавливается независимо друг от друга. Значения истинности $P(a)$ и $P(ma)$ также не имеют логической связи. Например, высказывание «Флогистон существует» неистинно, а высказывание «Термин «флогистон» существует» истинно. Однако здесь имеет место такая зависимость: смысл $ma$ известен, если и только если известен смысл $a$; и если $a$ не есть термин, то $ma$ не есть термин.

Законы логики суть метавысказывания, субъекты которых суть метатермины $ma$, где $a$ есть термин или высказывание, а предикаты суть $\vdash$, $\rightharpoonup$, «истинно», «ложно», «доказуемо» и т. п. Логика есть метанаука по отношению ко всем прочим наукам и, кстати сказать — единственная метанаука вообще, если считать необходимым признаком науки обобщенное изучение той или иной области предметов. Так что законами логики являются не утверждения вида $x \vee \sim x$, $x \wedge y \supset x$ и т. п., как принято думать, но либо метаутверждения вида $\vdash x \vee \sim x$, $x \wedge y \vdash x$ и т. п., либо метаутверждения вида «$m\,(x \vee \sim x)$ есть тавтология, если приняты такие-то таблицы истинности для $\vee$ и $\sim$ и такое-то определение тавтологии». «Из $m\,(x \wedge y)$ следует $mx$» и т. п.

## § 39. О форме изложения логики

Логика, как и всякая наука, погружена в некоторую общекультурную и языковую среду, без которой она не может существовать в качестве науки. Это выражается, в частности, в том, что в логике постоянно приходится использовать некоторые привычно ясные и легко доступные для понимания соображения, использовать простые примеры и разъяснения посредством обычного языка. Все это не входит в число законов логики, но без этого последние нельзя выработать и понять. И это не есть отступление от методов логики. Наоборот, это — необходимый элемент методологии всякой науки, если иметь в виду науку в целом, а не отдельные ее проблемы, которые могут до известной степени обособиться и создать видимость независимости от упомянутой среды.

По мере более детального изложения логики надобность в такой среде все более возрастает отчасти потому, что при этом логика выходит на поверхность языковой практики, где приходится учитывать массу обстоятельств, нарушающих чистоту логических нормативов, а отчасти потому, что логика рассматривает выражения языка, которые по самой своей природе являются продуктом многочисленных и разнообразных источников и которые функционируют в сложной системе языковых связей. От первичной чистоты логических построений, которые можно видеть, например, на уровне исчисления высказываний, здесь остается очень немногое. На место сложностей дедукционного порядка здесь приходят сложности, связанные с необходимостью согласовать множество различных факторов анализа. Меняется вследствие этого и способ изложения логики. Теперь уже невозможно такое изложение, когда последовательно добавляются новые определения и утверждения, от которых никак не зависит предшествующее изложение.

Теперь складывается ситуация, когда нужно сразу рассматривать целый комплекс проблем, понятий и утверждений. Но сказать обо всем сразу нельзя. Последовательное рассмотрение одних проблем здесь предполагает отвлечение от других, допущение данными целого ряда терминов и положений, которые затем становятся предметом специального исследования. И в результате изложение материала перестает соответствовать представлению об изложении логики, сложившемуся на основе наблюдения логики высказываний и предикатов в современных курсах логики.

Глава вторая

# ЛОГИЧЕСКИЕ ТИПЫ ТЕРМИНОВ И ПРЕДМЕТОВ

## § 1. Логические типы субъектов и предметов

Термины-субъекты различаются с логической точки зрения так, что можно говорить о их логических типах. Это, например, термины индивидов, классов, скоплений, отношений, структур, изменения, связей и т. д. Соответственно различаются логические типы предметов. Эти термины обладают различными логическими свойствами, в том числе они определяются или эксплицируются разными способами и ассоциируются с различными предикатами, одни и те же предикаты имеют различный смысл в соединении с различными типами субъектов и т. д.

Фактическое положение дел в логике таково, что она не только исследует общие свойства терминов и высказываний, но также выясняет их логические различия, соотношения их логических типов, условия их предикации и т. д. Внешне это напоминает натурфилософию прошлого. Однако это — принципиально иное явление. Это — исследование чисто логических (описываемых в специфической терминологии логики) свойств языковых выражений, которые здесь отчасти (и в основе) принимаются как нечто данное в языковой практике определенного рода, а отчасти допускаются как нечто возможное и изобретаемое вновь.

## § 2. Эмпирические предметы

Предметы, которые ощущаются, воспринимаются, наблюдаются и т. д. исследователем, т. е. воздействуют на чувственный аппарат отражения исследователя, суть эмпирические предметы. Они существуют в определенное время и в определенных областях пространства, возникают, изменяются и разрушаются, воздействуют друг на друга и т. п. Короче говоря, к ним относится все то, что можно в общей форме сказать о содержании исследовательской деятельности людей.

## § 3. Абстрактные предметы

Исследователь может принять решение не учитывать какие-то признаки изучаемых предметов или принимать во внимание только некоторые определенные их признаки. Это решение может быть реализовано путем выбора подходящей ситуации исследования или путем искусственного создания ее. При этом, однако, изучаемые предметы остаются эмпирическими предметами, взятыми лишь в особых условиях.

Иначе обстоит дело, если принимается решение отвлечься от таких признаков предметов, без которых эмпирические предметы не могут существовать. Например, исследователь решает не принимать во внимание размеры и форму физических тел при рассмотрении их перемещения, допуская, что эти тела не имеют пространственных размеров (суть «материальные точки»). Реализацией такого решения является допущение особых предметов, называемых абстрактными, или идеальными. Такие предметы не существуют эмпирически по самому характеру их допущения. И исследование их уже не будет процессом наблюдения. Это будет процесс отыскания подходящих определений и аксиом (постулатов) и дедуцирования из них нужных следствий.

Термины абстрактных предметов вводятся в употребление прежде всего определениями, которые в явном виде и схематично можно представить так: 1) термином $a$ будут называться предметы, которые имеют признаки $P^1, \ldots, P^n$ $(n \geqslant 1)$, но не имеют признаков $Q^1, \ldots, Q^m$ $(m \geqslant 1)$; причем признаки $Q^1, \ldots, Q^m$ таковы, что если эмпирические предметы имеют признаки $P^1, \ldots, P^n$, то они имеют и признаки $Q^1, \ldots, Q^m$; 2) термином $a$ будут называться предметы, которые имеют признаки $P^1, \ldots, P^n$, и если из этого допущения и других принимаемых в данной науке утверждений логически не следует $Q(a)$, то $\neg Q(a)$; причем признак $Q$ может быть таким, что если эмпирический предмет имеет признаки $P^1, \ldots, P^n$, то он имеет и $Q$. Затем термины абстрактных предметов вводятся по общим правилам построения терминологии, опираясь как на исходный базис на термины, введенные определениями 1 и 2.

Примеры терминов абстрактных предметов — термины «материальная точка», «идеальный газ», «несжимаемая жидкость» и т. п. В случае с материальной точкой принимается, что физическое тело имеет массу, но не имеет пространственных размеров.

Предметы, обозначаемые терминами абстрактных предметов, эмпирически не существуют по самим условиям построения этих терминов. Из этого не следует, что эти термины ничего не обозначают. Так, термин «материальная точка» обозначает физические тела, имеющие массу, но не имеющие пространственных размеров. Что касается отношения этих терминов к эмпирическим предметам, то оно регулируется таким правилом: принимается решение считать некоторые эмпирические предметы $a$ такими, что $a \rightharpoondown b$, где $b$ есть термин абстрактного предмета. Например, принимается решение считать, что планеты Солнечной системы и Солнце суть материальные точки. Как подбираются предметы $a$, вопрос внелогический. Важно здесь то, что $a \rightharpoondown b$ принимается по воле и желанию исследователей. Теперь из $a \rightharpoondown b$ и некоторых высказываний, содержащих $b$, в качестве логических следствий можно получить высказывания, содержащие $a$. Предметы $a$ подбираются с таким расчетом, чтобы эти последние высказывания можно было принять как истинные. Получающиеся здесь отклонения от желаемого не меняют существа рассматриваемой операции.

Практически же дело обстоит так: известны эмпирические предметы $a$, обладающие признаками $P^1, \ldots, P^n$; известно, что их признаками $Q^i$ можно пренебречь; и термин абстрактного предмета $b$ вводится так, что заранее предполагается решение принять $a \rightharpoondown b$; но область предметов, которые можно считать предметами $b$, не ограничивается предметами $a$; она в принципе не ограниченна, и любые предметы, подобные предметам $a$ (с точки зрения упомянутых признаков), могут рассматриваться как предметы $b$.

Подбор эмпирического предмета $a$ такого, что $a \rightharpoondown b$, есть эмпирическая интерпретация абстрактного предмета. Если термины абстрактных предметов являются сложными и для них вводятся производные предикаты, то эмпирическая интерпретация абстрактных предметов оказывается делом довольно тонким и не всегда возможным. И целый ряд методологических трудностей есть результат нарушения правил такой интерпретации.

Если $b$ есть термин абстрактного предмета, а $P$ есть предикат, введенный для терминов абстрактных предметов и уместный в отношении $b$, то при эмпирической интерпретации $b$ вопрос о возможности распространения сферы действия предиката $P$ на $a$ должен быть решен в каждом случае конкретно. Не исключено, что эта интерпретация $b$ будет интерпретацией выражения $P(b)$, при которой для $a$ подыскивается некоторый предикат $Q$ такой, что $sQ(a) \rightharpoondown sP(b)$.

## § 4. Индивиды

Термины-субъекты, которые не могут быть родовыми по отношению к любому термину, будем называть индивидуальными, а обозначаемые ими предметы — индивидами. Другими словами, термин-субъект $a$ является индивидуальным, если и только если для любого термина $b$ имеет силу следующее: если $b \rightharpoondown a$, то $a \rightharpoondown b$. Примеры индивидуальных терминов: «первый космонавт, осуществивший орбитальный полет вокруг Земли», «русский поэт М. Ю. Лермонтов, убитый на дуэли в 1841 г.», «планета Солнечной системы Земля» и т. п.

Пусть $a$ и $b$ — переменные для терминов-субъектов. Приведенному определению можно придать такой вид: $b$ является индивидуальным термином, если и только если

$$(\forall a)((a \rightharpoondown b) \rightarrow (b \rightharpoondown a)).$$

Из определения следует: если $a$ есть индивидуальный термин, и при этом $b \rightharpoondown a$, то $a \rightharpoondown b$ и $a \rightleftharpoons b$.

Число предметов, обозначаемых индивидуальным термином, равно единице. Потому эти термины называют также единичными. Но этот признак является внелогическим, бесперспективным с точки зрения получения логических следствий.

Переменные для индивидуальных терминов будем называть индивидными переменными. Введем термин «индивид» (сокращенно $I$), приняв соглашение: $I$ будет термином таким, что

$$\vdash (\forall a)(a \rightharpoondown I),$$

где $a$ есть индивидная переменная (другими словами, если

$b$ есть индивидуальный термин, то $b$ есть индивид). Выражение «индивид $x$» есть лишь модификация термина $I \downarrow (I \rightharpoondown x)$, т. е. термина «индивид, который есть $x$».

Для индивидуальных терминов имеют силу утверждения:

$$(a \rightharpoondown I) \wedge x \vdash (\forall a) x$$

$$(a \rightharpoondown I) \wedge (\exists a) x \vdash x.$$

Так что кванторы для индивидуальных терминов излишни.

## § 5. Предикаты величин и степени истинности

Как известно, многие признаки предметов измеряются и сравниваются по величине. В результате образуются предикаты типа

$$P\alpha,$$

где $P$ есть название признака, а $\alpha$ есть какое-то языковое выражение, фиксирующее величину признака $P$. Например, таковы выражения «вес 10 *кг*», «скорость 100 *км/час*», «длина 100 *м*» и т. п. В свою очередь $\alpha$ расчленяется на части, в частности, на число и некоторую совокупность знаков, фиксирующих единицы и способ измерения. Такого рода предикаты суть результат сокращения сложных выражений. Анализ этих операций есть дело наук, в которых эти предикаты употребляются. Но так как в конкретных случаях участвует большое число высказываний различного плана, сокращения производятся по различным направлениям, литературные удобства выражений не всегда гармонируют с интересами выявления логической структуры этих выражений и т. д., то представить дело в виде соглашений $x \equiv Df.y$ бывает не всегда практически удобно и порой невозможно. Величины фиксируются не только числами, но и словами «большой», «малый», «значительный», «еле заметный» и т. п.

Термины типа $P\alpha$ имеют некоторые общие свойства, выразимые на языке логики. Приведем некоторые из них, входящие в само определение выражения «величина признака».

Если $P(a)$, то для любого $P$ и любого $a$ величина $P$ заключена в некотором интервале между минимальной ($min$) и максимальной (*max*), т. е.

$$P(a) \leftrightarrow (min \leqslant P\alpha \leqslant max).$$

Если $\neg P(a)$, то величина $P$ равна нулю, и наоборот, т. е.

$$\neg P(a) \leftrightarrow (P\alpha = 0).$$

И если $P(a)$, то величина $P$ больше нуля и наоборот, т. е.

$$P(a) \leftrightarrow (P\alpha > 0).$$

Например, если $a$ не перемещается, то скорость перемещения его равна нулю, а если перемещается — больше нуля.

Выражения типа «величина $a$ по $P$ есть $\alpha$» (например, «вес $a$ равен 10 *кг*», «скорость передвижения $a$ больше 100 *км/час*» и т. п.) образуются по правилам языковых трансформаций из высказываний $P\alpha(a)$.

Трудно сказать, приемлем или нет эвристический принцип, согласно которому любой признак может быть измерен. Практически возможности на этот счет не ограничены. Возьмем, например, признак, обозначаемый словом «совесть». Его можно измерить числом $\alpha/\beta$, где $\beta$ есть общее число поступков человека, к которым применим предикат «совесть», а $\alpha$ — число поступков этого человека, когда считается, что он проявил совесть (остальные поступки оцениваются как бессовестные). А между тем это — типичный «неизмеряемый» или «качественный» признак.

Высказывания $P_\alpha(a)$ и $P_\beta(a)$ могут различаться только числами, входящими в $\alpha$ и $\beta$, но могут оба считаться истинными в отношении одних и тех же индивидов $a$. Например, высказывания «$a$ весит 10 *кг*» и «$a$ весит 9,99 *кг*» могут считаться одинаково приемлемыми. Класс индивидов $a$, в отношении которых истинны такие высказывания, есть область их истинности. А пределы, в которых могут колебаться числа, фигурирующие в их предикатах, определяют диапазон истинности высказываний об этих индивидах.

Известно, далее, что величины признаков предметов измеряются с большей или меньшей степенью приближения или точности. Само наше знание об этой степени в высказывание $P_\alpha(a)$ не входит. Это — дополнительное знание о высказывании или о сравнении таких высказываний. Например, «Высказывание $P_\alpha(a)$ точнее, чем $P_\beta(a)$», «$P_\alpha(a)$ весьма приблизительно» и т. п. Такие оценки высказываний суть своеобразные истинностные значения.

Здесь уместно говорить о степенях истинности (или о степенях приближения к истинности).

Никаких логических способов измерения степеней истинности нет. Но если они каким-то образом измеряются, то имеют место логические правила, например, такие (сокращенно выражение «степень истинности $a$» будем записывать символом $v(a)$):

$$\vdash v(x \wedge y) = min(v(x), v(y))$$

$$\vdash v(x \vee y) = max(v(x), v(y))$$

$$(x \vdash y) \wedge (v(x) = \alpha) \vdash (v(y) \leqslant \alpha),$$

т. е. степень истинности конъюнкции равна наименьшей из степеней истинности ее членов, степень истинности дизъюнкции равна наибольшей из степеней истинности ее членов, степень истинности заключений не превышает степени истинности посылок.

Изменение степени истинности может быть или не быть координировано с изменением области истинности высказываний. Возможно, что увеличение степени истинности не влияет на область истинности высказываний. Оно может сокращать последнюю. Но оно не может ее расширить. Уменьшение же степени истинности не сокращает область истинности. Колебания степеней истинности имеют место в диапазоне истинности.

## § 6. Классы (множества)

Выражение «класс» и «множество» мы употребляем как синонимы. Мы, далее, различаем логическую и математическую теории классов (множеств). Задача логической теории классов — установить такие правила оперирования терминами классов и высказываниями с этими терминами, которые не зависят от конкретных свойств тех или иных классов.

Мы различаем термин «класс» и особый терминообразующий оператор, который также читается словом «класс», но термином не является. Будем в качестве такого оператора употреблять символ $K$.

С помощью оператора $K$ образуются термины первичных классов по такому правилу: если $a$ есть термин-субъект, то $Ka$ есть термин-субъект, причем, $Ka$ есть индивидуальный термин.

Образовать первичный класс — значит построить термин $Ka$, т. е. буквально сказать «класс предметов $a$». Например, образовать класс богов — значит образовать термин «класс богов», где слово «класс» есть оператор $K$; образовать класс микрочастиц — значит построить термин «класс микрочастиц» и т. п.

Термины первичных классов образуют основу, на которой строится вся терминология, обозначающая классы. Путем обобщения терминов классов вводится, в частности, термин «класс». А именно, это можно сделать так, используя переменную для терминов классов: слово «класс» будет термином таким, что если $a$ есть термин класса, то $a \rightharpoonup$ «класс». Используя операцию ограничения, можно вводить термины типа «класс такой, что $P$» (например, «пустой класс») и «класс такой, что $x$» (например, «класс такой, что все элементы этого класса имеют признаки $Q^1, \ldots, Q^n$»).

Высказывания о том, что предметы, обозначаемые термином $a$, включаются в класс, обозначаемый термином $B$, будем записывать символами вида

$$a \in B.$$

Фигурирующий в них предикат включения индивидов в класс (т. е. $\in$) определяется совместно со свойствами классообразующих операторов, в том числе — совместно с $K$. Индивиды, обозначаемые термином $a$, суть элементы класса $B$. Но термин $a$ может быть общим.

Свойства терминов с оператором $K$ и предиката $\in$ определяются имплицитно системой утверждений, в числе которых могут быть такие:

$$(\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$$

$$(\forall a)(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in Kc) \vdash (\forall a)(a \in Kc)$$

$$(\exists a)(a \in Kb) \wedge (\forall b)(b \in Kc) \vdash (\exists a)(a \in Kc)$$

$$(a \in Kb) \wedge (a \in Kc) \vdash (\exists b)(b \in Kc).$$

Здесь и в ряде случаев ниже мы не приводим полной системы аксиом, поскольку это не потребуется. А для иллюстрации сути дела достаточно отдельных примеров.

Используя предикат $\in$ и оператор $K$, термин «класс» (сокращенно $kl$) можно определить также следующим образом: если $a$ есть термин класса, то $a \in Kkl$. Очевидно, если $b$ есть термин-субъект, то $Kb$ есть термин класса, и значит $Kb \in Kkl$.

Высказывание о том, что класс $A$ включается в класс $B$, будем записывать символами вида

$$A \subset B$$

Фигурирующий в нем предикат включения класса в класс (т. е. $\subset$) определяется через предикат $\in$ имплицитно следующим образом:

$$(\forall a)((a \in A) \rightarrow (a \in B)) \dashv\vdash (A \subset B)$$

$$(\exists a)(((a \in A) \wedge \sim (a \in B)) \vee ((a \in B) \wedge \sim (a \in A))) \dashv\vdash \sim (A \subset B)$$

$$(\forall a)(a \in A) \dashv\vdash (Ka \subset A),$$

где $a$ есть индивидная переменная.

Из терминов классов образуются термины того же рода с помощью операторов объединения ($\cup$), пересечения ($\cap$) и дополнения ($\bar{\ }$) классов. Правила построения таких терминов: 1) если $a$ и $b$ суть термины классов, то $a \cup b$ и $a \cap b$ — термины классов; 2) если $a$ есть термин класса, то $\bar{a}$ — термин класса. Свойства этих операторов определяются утверждениями (в частности):

$$(a \in A) \wedge (a \in B) \dashv\vdash (a \in A \cap B)$$

$$(a \in A) \vee (a \in B) \dashv\vdash (a \in A \cup B)$$

$$(a \in B) \dashv\vdash (a \in \bar{\bar{B}}).$$

Для существования первичного класса достаточно построить его термин. Так, построив выражение «класс богов», мы образовали класс богов, и он стал существовать независимо от того, существуют боги или нет. Вопрос о существовании производных классов решается в зависимости от соблюдения правил логики при построении их названий и от дополнительных определений. В частности, если из определения термина класса следует $(a \in A) \wedge \sim (a \in A)$, то $A$ не существует.

Существование классов вообще не зависит от существования индивидов, включаемых в них. Так, целое число, равное квадратному корню из пяти, не существует, но класс целых чисел, равных квадратному корню из пяти, существует. О нем, в частности, можно сказать, что этот класс пуст (т. е. нет такого целого числа, которое в него может быть включено без ошибки). И наоборот, существование индивидов не зависит от того, включают их в какие-то классы или нет и в какие классы их включают. Термин класса может быть построен так, что такой класс заведомо существовать не будет. Но в этот класс могут включаться существующие индивиды. Например, образуем термин класса такой: «класс, в который включается предмет $a$ и в то же время этот предмет не включается, а также в который включаются электроны». Такой класс не существует, поскольку нарушены правила логики при его образовании; но электроны, как известно, существуют.

Как видим, классы — это такие предметы, которые существуют лишь постольку, поскольку конструируются их названия. И когда пытаются определить классы как нечто, существующее независимо от их терминов, то классы смешивают с энками и скоплениями предметов. А это смешение не всегда безразлично. Например, тройка целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего, не существует, тогда как класс таких троек чисел существует, н о нем, в частности, можно сказать, что он пуст. Но представить такой класс как нечто существующее независимо от иазвания класса здесь невозможно.

Изучение классов есть изучение предметов, включаемых в эти классы. Так что все предикаты для классов определяются со ссылкой на их элементы. Приведем несколько примеров такого рода.

Класс $A$ есть подкласс класса $B$, если и только если $A \subset B$. А поскольку $A \subset B$ есть лишь сокращение для выражения $(\forall a)((a \in A) \rightarrow (a \in B))$, то первое в приведенном определении может быть заменено на второе.

Классы $A$ и $B$ не пересекаются, если $(\forall a) \sim ((a \in A) \wedge \wedge (a \in B))$, и пересекаются, если $(\exists a)((a \in A) \wedge (a \in B))$, где $a$ есть индивидная переменная.

Класс $A$ является пустым, если $(\forall a) \sim (a \in A)$, и непустым, если $(\exists a)(a \in A)$. Класс $A$ является универсальным, если $(\forall a)(a \in A)$, и неуниверсальным, если $(\exists a) \sim \sim (a \in A)$.

Классы $A$ и $B$ эквивалентны, если и только если $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ или, в другой форме, $(\forall a)((a \in A) \leftrightarrow \leftrightarrow (a \in B))$.

Класс считается конечным, если число его элементов конечно, и бесконечным, если число его элементов бесконечно. Выражение «мощность класса» есть лишь замеиа выражения «число элементов класса». Все предикаты порядка для классов определяются через указание на упорядоченность их элемеитов.

## § 7. Скопления

Как и в случае с классами, будем различать оператор «скопление» и термин «скопление». Последний определяется (аналогично термину «класс») так: если $a$ есть термин, обозначающий скопление индивидов, то $a \rightharpoonup$ «скопление».

Первичные термины скоплений строятся по правилу: если $a$ есть термин-субъект, то «скопление $a$» есть термин-субъект. Прочие термины скоплений предметов образуются по общим правилам образования терминологии. Заметим, что в отличие от термина «класс $a$» термин «скопление $a$» не обязательно индивидуален.

Пример различия оператора и термина «скопление»: в термине «скопление, состоящее из $a$, $b$ и $c$» слово «скопление» есть термин, а в термине «скопление звезд в области $A$»— оператор. Когда употребляют выражение «дома, расположенные в районе $A$», «молекулы в данном объеме газа», «звезды, входящие в Галактику» и т. п., часто имеют в виду не классы, а скопления соответствующих предметов. Это — иная точка зрения на предметы, чем точка зрения на них в случае образования классов. Так, в отношении класса бессмысленно говорить о пространственных размерах, о перемещении и т. п., тогда как подобные предикаты вполне уместны в отношении скоплений. Существование класса не зависит от существования включаемых в него индивидов, существование же скоплений зависит. Так, скопление из $a$ и $b$ существует, если и только если существует каждый из $a$ и $b$, тогда как класс, в который включаются $a$ и $b$, существует, если образован термин «класс, в который включаются $a$ и $b$».

Как и в случае с классами, будем символами вида $a \in B$ изображать то, что предмет $a$ входит (включается) в скопление $B$. Символами вида $A \subset B$ будем изображать (как и в случае классов) то, что все предметы, включающиеся в скопление $A$, включаются в скопление $B$.

Если термин скопления $A$ построен так, что относительно любого индивида $a$ известно, включается он в $A$ или нет, то $A$ есть индивидуальный термин, а обозначаемое им скопление — индивид.

## § 8. Состояния, события

Пусть $x$ есть высказывание $\alpha P(a^1, ..., a^n)$, где $n \geqslant 1$, а $\alpha$ означает наличие или отсутствие кванторов, отрицаний и оператора неопределенности в тех или иных допустимых сочетаниях, или комбинация высказываний такого рода посредством высказываниеобразующих операторов. В таком случае $sx$ есть термин состояния. Предметы, обозначаемые такими терминами, суть состояния.

Термин $a^i$ $(i = 1, ..., n)$ будем называть свободным в $x$, если в $\alpha$ нет соответствующего квантора $(\forall a^i)$ и $(\exists a^i)$. Термин $sx$ будем считать индивидуальным (а обозначаемое состояние — индивидуальным состоянием), если и только если все свободные термины из числа $a^1, ..., a^n$ суть индивидуальные термины.

Употребляется также выражение «событие». Оно ассоциируется обычно с такими $sx$, в которых в предикате высказывания $x$ имеется какое-то указание на то, что $x$ стало истинным, а до этого было истинным $\sim x$. Например, термин «тот факт, что частица $a$ попала в область $b$» обозначает событие. Всякое событие есть состояние.

## § 9. Существование

Предикат «существует» будем сокращенно записывать символом $E$. Употребление такого предиката есть эмпирически данный факт, поскольку встречаются высказывания вроде «Электрон существует», «Флогистон не существует», «Христос как историческая личность не существовал» и т. п.

Предметы существуют или не существуют в определенном месте, в определенное время, в любом месте, в любое время и т. д.,— в каких-то координатах. Мы их будем предполагать при рассмотрении предиката $E$, но для упрощения изложения будем от них отвлекаться (они специфически не характеризуют его). И введение символа $E$ выполняет здесь, кстати сказать, еще одну задачу: отвлечься от тех ассоциаций, которые вызывает грамматическая форма слова «существует».

Имеются случаи, когда смысл термина $E$ не определяется, а лишь разъясняется. Эти случаи суть случаи употребления в высказываниях $E(a)$, $\neg E(a)$ и $?E(a)$, где $a$ есть индивидуальный термин. Здесь имеют место два подслучая: 1) вопрос о существовании индивидов решается в зависимости от возможности наблюдать их с помощью органов чувств или посредством приборов, непосредственно или по их следам (по результатам воздействия на другие предметы); сюда же относится доверие к свидетельствам тех, кто наблюдал тот или иной индивид; 2) вопрос о существовании индивидов решается посредством доказательства из других данных, как допущение для каких-либо целей, как вывод из определений и т. п. Неопределенность здесь означает, что невозможно установить посредством наблюдения (например, в случае процесса возникновения или уничтожения индивида) или посредством рассуждений, существует или не существует индивид.

Предполагая данным значение $E$ для указанных случаев, можно дать точное определение этого предиката для других случаев.

Пусть $a$ в высказываниях $E(a)$, $\urcorner E(a)$ и $?\,E(a)$ может быть родовым термином. Например, в высказывании «Электрон существует» слово «электрон» является общим термином. Определения $E$ для общих субъектов имеют такой вид:

$$E(a) \equiv Df \cdot (\exists I)((I \rightharpoondown a) \wedge E(I))$$

или, в другой форме,

$$E(a) \equiv Df \cdot (\exists I) E(I \downarrow (I \rightharpoondown a)),$$

что читается как «$a$ существует, если и только если существует по крайней мере один такой индивид, который есть $a$»,

$$\urcorner E(a) \equiv Df \cdot (\forall I)((I \rightharpoondown a) \to \urcorner E(I))$$

или, в другой форме,

$$\urcorner E(a) \equiv Df \cdot (\forall I) \urcorner E(I \downarrow (I \rightharpoondown a)),$$

что читается как «$a$ не существует, если и только если все индивиды, которые суть $a$, не существуют».

$$?\,E(a) \equiv Df \cdot \sim E(a) \wedge \sim \urcorner E(a).$$

Для энок субъектов предикат $E$ определяется так:

$$E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot E(a^1) \wedge \ldots \wedge E(a^n),$$

т. е. энка предметов существует, если и только если существует каждый предмет, входящий в нее.

$$\urcorner E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot \urcorner E(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner E(a^n),$$

т. е. энка предметов не существует, если и только если не существует по крайней мере один из входящих в нее предметов.

$$? E(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot \sim E(a^1, \ldots, a^n) \wedge \urcorner E(a^1, \ldots, a^n),$$

В имплицитной форме принятые определения имеют такой вид:

1. $E(a) \dashv\vdash (\exists I) E(I \downarrow (I \rightarrow a))$
2. $\urcorner E(a) \dashv\vdash (\forall I) \urcorner E(I \downarrow (I \rightarrow a))$
3. $? E(a) \dashv\vdash \sim E(a) \wedge \sim \urcorner E(a)$
4. $E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash E(a^1) \wedge \ldots \wedge E(a^n)$
5. $\urcorner E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \urcorner E(a^1) \vee \ldots \vee \urcorner E(a^n)$
6. $? E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \sim E(a^1, \ldots, a^n) \wedge$
$\wedge \sim \urcorner E(a^1, \ldots, a^n).$

Существование индивидуальных состояний определяется аксиомами:

7. $E(sx) \dashv\vdash x,$

т. е. $sx$ существует, если и только если $x$ истинно.

8. $\urcorner E(sx) \dashv\vdash \sim x,$

т. е. $sx$ не существует, если и только если $\sim x$ истинно. Если $sx$ есть родовой термин, то предикат существования определяется для $sx$ на общих основаниях (как выше). Поскольку либо $x$ истинно, либо $\sim x$ истинно, то для существования состояний отрицания $\sim$ и $\urcorner$ совпадут, что запишется аксиомами:

9. $\sim E(sx) \dashv\vdash \urcorner E(sx).$

Из приведенных аксиом получаются следствия, например, такие:

$E(s(x \wedge y)) \dashv\vdash E(sx) \wedge E(sy)$

$\vdash E(s(x \vee \sim x))$

$\vdash \urcorner E(s(x \wedge \sim x)).$

Вопрос о существовании классов решается иначе, чем для рассмотренных случаев. Для первичных классов: 1) $E(Ka)$, если и только если $a$ есть термин-субъект; 2) $\urcorner E(Ka)$, если и только если $a$ не есть термин-субъект;

3) $\sim E(Ka) \equiv \neg E(Ka)$. Для других терминов классов предикат существования определяется так: $E(a)$, если и только если соблюдены правила построения терминов при образовании $a$, и введение $a$ не ведет к противоречию. Построим, например, такой термин класса $a$: «класс, в который включается индивид $b$ и не включается этот же индивид $b$». Этот термин по построению обладает таким свойством: $b \in a$ и $\sim (b \in a)$, т. е. ведет к противоречию. Такой класс по определению самого $a$ не существует.

Как уже говорилось, иначе обстоит дело с существованием скоплений предметов. Здесь все зависит от того, как построен термин скопления. Если термин $a$ построен так, что в скопление $a$ включаются только предметы $b^1, \ldots, b^m$ $(m \geqslant 1)$, то $E(a) \equiv Df.\ E(b^1) \wedge \ldots \wedge E(b^m)$. Если $a$ построен так, что указано лишь число предметов, включаемых в $a$, то для существования $a$ необходимо и достаточно существования именно такого числа предметов данного рода. Если не определено, какие именно предметы данного рода включаются в скопление $a$ и сколько предметов включается в $a$, то возможны два случая. Если при этом $a$ есть индивидуальный термин, то имеет силу такое определение: $E(a)$, если и только если существует по крайней мере один индивид, входящий в $a$, т. е.

$$E(a) \dashv\vdash (\exists I)\, E(I \downarrow (I \in a))$$

$$\neg E(a) \dashv\vdash (\forall I) \neg E(I \downarrow (I \in a))$$

$$?E(a) \dashv\vdash \sim E(a) \wedge \sim \neg E(a).$$

Если $a$ есть общий (родовой) термин, то вопрос решается так же, как выше для родовых терминов, т. е. $E(a) \dashv\vdash (\exists I)\, E(I \downarrow (I \rightharpoonup a))$ и т. д. (только здесь для $I$ вопрос решается в указанных выше определениях, поскольку $I$ есть скопление).

И совершенно иначе предикат существования определяется для абстрактных предметов. Здесь надо различать два аспекта. Пусть $b$ есть термин абстрактного предмета. Предмет $b$ существует эмпирически, если и только если имеется его эмпирическая интерпретация $a \rightharpoonup b$ и при этом $a$ существует. Это — один аспект. Другой аспект — чисто логический: $b$ существует логически, если и только если при образовании его соблюдены правила логики и если употребление его не ведет к противоречию.

## § 10. Модальные предикаты

Предикаты «возможно», «необходимо» и «случайно» (их называют модальными) будем для краткости записывать символами $M$, $N$ и $C$. Как и в случае с предикатом $E$, смысл этих предикатов зависит от логических типов предметов (субъектов), к которым их относят.

Прежде всего надо сказать, что модальные предикаты ассоциируются с терминами состояний, т. е. с терминами типа $sx$. Что касается просто терминов предметов, то употребление модальных предикатов есть лишь результат сокращений такого типа:

$$M(a) \equiv Df \cdot M(sE(a))$$

$$N(a) \equiv Df \cdot N(sE(a))$$

и т. д. Мы в дальнейшем, рассматривая высказывания вида $M(a)$, $N(a)$ и т. д., будем предполагать, что $a$ суть термины состояний.

К высказываниям с модальными предикатами относится все то, что говорилось о месте, времени, условиях и т. д. в отношении предиката $E$. Но мы все это, как и выше, для упрощения изложения будем опускать как нечто само собой разумеющееся и предполагаемое.

Предикат $N$ определяется через предикат $M$ таким образом:

$$N(sx) \equiv Df \cdot \urcorner M(s \sim x)$$

$$\urcorner N(sx) \equiv Df \cdot M(s \sim x)$$

$$?N(sx) \equiv Df \cdot ?M(s \sim x).$$

А в случаях, когда отрицания $\sim$ и $\urcorner$ совпадают, достаточно такого определения

$$N(sx) \equiv Df \cdot \sim M(s \sim x).$$

Так что в дальнейшем будет достаточно рассмотреть лишь предикат $M$.

Подчеркиваем, что термины $M$, $N$ и $C$ суть предикаты, а не субъекты. Однако их часто рассматривают как субъекты, говоря о возможности, необходимости и случайности как об эмпирических предметах. Например, «То, что получилось $a$, есть чистая случайность», «$B$ имеет возможность попасть в $A$» и т. п. Но в таких случаях либо слова «возможность», «необходимость» и «случайность» употребляются в таком смысле, что это не имеет никакого отношения к модальностям состояний (под возможностями имеют в виду средства, необходимость понимают как обязанность и т. п.), либо выражения с этими словами суть литературные вариации высказываний с модальными предикатами (например, фраза «$B$ имеет возможность попасть в $A$» может быть модификацией высказывания «То, что $B$ попадет в $A$, возможно»).

## § 11. Возможность

В языковой практике предикат $M$ вводится в самых различных случаях, которые объединить в одном определении невозможно. Приведем основные случаи.

Для родовых терминов $sx$ предикат $M$ определяется аналогично предикату $E$:

$$M(sx) \equiv Df \cdot (\exists I) M(I \downarrow (I \rightharpoondown sx))$$

$$\urcorner M(sx) \equiv Df \cdot (\forall I) \urcorner M(I \downarrow (I \rightharpoondown sx))$$

$$?\, M(sx) \equiv Df \cdot \sim M(sx) \wedge \sim \urcorner M(sx).$$

Для терминов состояний с операторами $\vee$ и $\wedge$ предикат $M$ определяется некоторой системой аксиом, среди которых могут быть такие аксиомы (системы аксиом могут варьироваться, и приводимые ниже аксиомы могут оказаться теоремами, выводимыми из других аксиом):

$$M(s(x \vee y)) \dashv\vdash M(sx) \vee M(sy)$$

$$\urcorner M(s(x \vee y)) \dashv\vdash \urcorner M(sx) \wedge \urcorner M(sy)$$

$$\urcorner M(s(x \wedge y)) \dashv\vdash \urcorner M(sx) \vee \urcorner M(sy)$$

и т. п. Интересно, что в этом случае эксплицитные определения не всегда возможны. Так, поскольку неприемлемо утверждение

$$M(sx) \wedge M(sy) \vdash M(s(x \wedge y))$$

(а оно неприемлемо в общем виде, так как если $x \rightarrow \sim y$, то будет $\urcorner M(s(x \wedge y))$), неприемлемо и определение вида

$$M(s(x \wedge y)) \dashv\vdash M(sx) \wedge M(sy).$$

Однако и здесь при некоторых ограничениях можно найти имплицитное определение, заменимое на эксплицитное. В частности, в рассматриваемом примере это можно сделать так:

$$M(s(x \wedge y)) \dashv\vdash M(sx) \wedge M(sy) \wedge \sim(x \rightarrow \sim y).$$

Для энок и скоплений предметов предикат $M$ определяется аналогично $E$ (если в определениях $E$ везде заменить $E$ на $M$, то получим определения $M$). Например,

$$M(a^1, \ldots, a^n) \equiv Df \cdot M(a^1) \wedge \ldots \wedge M(a^n).$$

Для абстрактных предметов и для классов термины $E$ и $M$ не различаются, т. е. если $a$ есть термин абстрактного предмета или класса, то

$$M(a) \equiv Df \cdot E(a)$$

$$\urcorner M(a) \equiv Df \cdot \urcorner E(a).$$

Рассмотрим, наконец, смысл предиката $M$ в сочетании с индивидуальными терминами $sx$. Один случай здесь является бесспорным, а именно — случай

$$x \rightarrow M(sx).$$

Этот случай предполагает, что $x$ истинио, и предикат $M$ в нем оказывается практически излишним. Интереснее другой случай, а именно — когда $x$ не является истинным (или $\sim x$ истинно), т. е. $sx$ не существует в то время, когда строится высказывание о возможиости или иевозможиости $sx$. Но для этого случая строгого определения предиката $M$ иет. Навык оперировать им вырабатывается на отдельных примерах. Ниже мы опишем некоторую общую схему для этого.

Пусть $t^1$ есть время, когда строится (принимается) высказывание $\alpha M(sx)$, где $\alpha$ означает наличие $\urcorner$ или ? или отсутствие их обоих. Возможны два подслучая: 1) предполагается, что состояние $sx$ возможно или невозможно в будущем (в какое-то время $t^2$); 2) предполагается, что состояние $sx$ было возможно или невозможно в какое-то время $t^2$ в прошлом. Второй подслучай сводится к первому, поскольку смысл предиката $M$ здесь устанавливается путем переноса всей ситуации во время $t^3$, предшествовавшее $t^2$. Например, в $t^2$ состояние $sx$ не существовало; предикат $M$ будем рассматривать с точки зрения положения вещей во время $t^3$, предшествовавшее $t^2$, в которое $sx$ также не существовало; ио мы смотрим на дело так, как будто нам в $t^3$ не известио, что $sx$ в $t^2$ существовать не будет. И не исключено, что согласно каким-то правилам введения $M$ высказывание $M\ (sx)$, отнесенное к $t^2$, для $t^3$ окажется приемлемым. Такие случаи употребления часто встречаются (например, в высказывании «Наполеон мог выиграть битву при Ватерлоо»).

Итак, остался случай употребления предиката $M$ для индивидуальных состояний, которые не существуют в настоящее время, причем предполагается будущее время существования или несуществования этих состояний. Излагаемые ниже определения для этого случая не являются правилами получения истинных (или принимаемых) высказываний с предикатом $M$, а суть лишь разъяснение смысла этого предиката для такого случая.

Определение предиката $M$ для индивидуальных терминов $sx$ ($a$ есть переменная для высказывания):

$$M\,(sx) \equiv Df\cdot(\forall sa)\,(a \rightarrow \sim (a \rightarrow \sim x))$$

$$\urcorner M\,(sx) \equiv Df\cdot(\exists sa)\,(a \wedge (a \rightarrow \sim x))$$

$$?\,M\,(sx) \equiv Df\cdot \sim M\,(sx) \wedge \sim \urcorner M\,(sx).$$

## § 12. Случайность

Предикат $C$ употребляется в отношении состояний, которые уже существовали или существуют или относительно которых предполагается, что они могут существовать в будущем (например, «Наполеон случайно проиграл сражение при Ватерлоо», «Если $A$ станет президентом, то это будет случайно»).

Предикат $C$ определяется через предикат $M$ так:

$$C\,(sx) \equiv Df\cdot(x \wedge M\,(s \sim x))$$

$$\urcorner C\,(sx) \equiv Df\cdot(x \wedge \urcorner M\,(s \sim x))$$

$$?\,C\,(sx) \equiv Df\cdot C(sx) \wedge \sim \urcorner C(sx).$$

Опять-таки здесь речь идет о смысле предиката $C$, а не о том, что дает нам уверенность в справедливости утверждений с этим предикатом. Например, высказывание «$A$ проиграл партию в шахматы $B$ случайно» можно рассматривать с двух точек зрения: 1) каков смысл слова «случайно» (и ответом на этот вопрос будет изложение приведенных выше определений); 2) почему мы считаем так (и ответом на этот вопрос могут быть различные объяснения, например, то, что $A$ крупный шахматист, а $B$ — слабый, о чем мы судим по прошлым партиям; $A$ был болен, не в настроении; в следующих партиях $A$ победил с явным преимуществом и т. д.).

## § 13. Фатализм

Фатализм есть концепция мира, согласно которой все происходящее в мире происходит с необходимостью. Будучи распространен на будущее, он ведет к концепции предопределенности.

Эта концепция не есть нечто такое, с чем можно спорить как с одной из гипотез науки. Она есть результат двусмысленности предикатов $M$ и $N$.

Согласно самим определениям предикатов возможности и необходимости верны лишь такие утверждения $A$:

$$x \vdash M(sx) \qquad N(sx) \vdash x,$$

т. е. «Существующее возможно» и «Необходимое существует или будет существовать» (в соответствующее время), а утверждения $B$:

$$x \vdash N(sx) \qquad M(sx) \vdash x$$

неверны, т. е. неверны утверждения «Если нечто существует, то с необходимостью» и «Если нечто возможно, то оно существует». Утверждения $A$ верны, а утверждения $B$ неверны не в силу какого-то опытного изучения мира, а в силу определений терминов $M$ и $N$. Последние вводятся в употребление именно такими. Так что если некоторое состояние $sx$ существует или существовало или будет существовать, то из этого логически не следует, что $sx$ необходимо. Не исключено, что из каких-то других источников будет установлено, что $sx$ действительно необходимо. Но — из других источников, а не из факта существования $sx$. Так что утверждение «Все существовавшее и существующее необходимо» неявным образом предполагает иное определение предикатов возможности и необходимости, согласно которому

$$E(a) \vdash N(sE(a)) \qquad \urcorner E(a) \vdash \urcorner M(sE(a)).$$

Точно так же ошибочно считать, будто все то, что не произошло в прошлом, было невозможно, так как по определению предиката $M$ утверждение

$$\sim x \vdash \urcorner M(sx)$$

неверно. Другое дело, высказывание $\neg M(sx)$ может оказаться верным, но уверенность в этом нам даст не знание о том, что $\sim x$ истинно, а какие-то другие сведения.

Что касается будущих состояний, то концепция предопределенности есть либо тавтология «Чему быть, того не миновать», либо частный случай приведенного выше переопределения предикатов.

Чтобы проверить суждение «Все состояния, которые будут иметь место в будущем, будут иметь место с необходимостью (являются необходимыми)» в случае с излагаемым здесь определением предиката $N$, надо проверить каждое суждение вида $N(sx)$, где $sx$ обозначает состояния, которых нет сейчас, но которые будут иметь место со временем. Но, во-первых, мы не можем иметь даже терминов типа $sx$ для всех будущих состояний. Во-вторых, чтобы принять такие высказывания сейчас, когда истинно $\sim x$, нужны какие-то основания, а не просто чисто психологическая вера. И среди этих оснований должны быть указаны правила признания истинности высказываний вида $N(sx)$ для будущих состояний. А правила эти в общем сводятся к следующему: если у нас имеются такие высказывания $y$, которые мы принимаем как истинные сейчас, и если истинно $y \rightarrow x$, то высказывание $N(sx)$ истинно. Если же таких высказываний нет или имеются высказывания $z$ такие, что $z \rightarrow \sim x$, то $N(sx)$ неистинно. Но всем хорошо известно, что случаи такого рода, когда находятся $y$, бывают, но бывают не так уж часто, да и то с массой оговорок, ошибок и т. д. Так что если принято определение $M$ и $N$ такое, что верны утверждения $A$ и неверны $B$, то концепции фатализма и предопределенности суть результат логических ошибок.

## § 14. Модальные операторы

Слова «возможно» и «необходимо» могут играть роль не только предикатов, но и операторов, подобно тому как слова «существует» и «универсально» могут быть предикатами и кванторами. Будем для этой цели употреблять символы соответственно $\mathrm{M}$ и $\mathrm{N}$. Они определяются так:

$$(\mathrm{M}\,a)\,x \equiv Df \cdot M\,(a \downarrow x)$$
$$(\neg\,\mathrm{M}\,a)\,x \equiv Df \cdot \neg\,\mathrm{M}\,(a \downarrow x)$$
$$(\mathrm{N}\,a)\,x \equiv Df \cdot N\,(a \downarrow x)$$
$$(\neg\,\mathrm{N}\,a)\,x \equiv Df \cdot \neg\,N\,(a \downarrow x).$$

Читаются выражения с ними так: «Возможен $a$ такой, что $x$» и т. п.

Для кванторов E и $\forall$ имеют место аналогичные соотношения с предикатами $E$ и $U$ (вследствие чего эти кванторы иногда называют кванторами соответственно существования и универсальности):

$$(\exists a) x \dashv\vdash E (a \downarrow x)$$

$$(\forall a) x \dashv\vdash U (a \downarrow x)$$

и т. д., если $x$ не содержит предикатов $E$ и $U$.

Соотношение $\exists$ и M определяется утверждениями:

$$(\exists a) x \vdash (\mathrm{M}\, a) x.$$

$$(\neg \mathrm{M}\, a) x \vdash (\neg \exists a) x.$$

## § 15. Актуальное и потенциальное

Многие термины определяются так, что в определяющей части фигурируют кванторы $\exists$. Например,

$$Q (d) \equiv Df. (\forall a) (\exists c) ((a \in d) \wedge (c \in d) \wedge P (a,c)).$$

Но такого рода определениям соответствуют определения, в которых вместо $\exists$ фигурирует M. Очевидно, это должно как-то сказаться на определяемом выражении. Будем в таком случае различать актуальное и потенциальное наличие определяемого признака у предмета в зависимости от того, фигурирует в определяющей части $\exists$ или M.

## § 16. Измерение возможности

Возможности состояний различаются по величине или степени. Например, употребляются выражения вида «$sx$ очень возможно», «Возможность $sx$ незначительна», «Возможность $sx$ почти равна нулю», «$sx$ более возможно, чем $sy$» и т. п., в которых в архаической форме явно проступает различие возможностей состояний по величине. В такого рода случаях к предикату $M$ присоединяются некоторые языковые средства $\alpha$, фиксирующие величину, и в результате получаются предикаты типа $M\alpha$. В частности, это могут быть предикаты типа «$M$ со степенью, равной $\beta$», «$M$ со степенью, большей $\beta$ » и т. п.

Частный случай предикатов типа $M\alpha$ суть предикаты вероятности, где $\alpha$ есть выражение $= \beta$, $< \beta$, $> \beta$, $\geqslant \beta$ или $\leqslant \beta$, а $\beta$ суть числа на некотором отрезке от $A$ до $B$. Принято измерять вероятность числами от 0 до 1. Это факт внелогический. Мы будем рассматривать 0 и 1 соответственно как «минимальная величина» и «максимальная величина». Выражения «Вероятность $sx$ равна $\beta$ (есть $\beta$, больше $\beta$, меньше $\beta$ и т. п.)» суть лишь языковые трансформации высказываний типа $M\alpha$ $(sx)$ («$sx$ возможно со степенью $\beta$», «$sx$ имеет степень возможности, равную $\beta$» и т. п.). Будем их для краткости и удобства чтения записывать общепринятыми символами типа $p(x) = \beta$, $p(x) > \beta$ и т. п.

Логические свойства предикатов вероятности определяются утверждениями:

$$\vdash 0 \leqslant p(x) \leqslant 1$$

$$\vdash (p(x) = 0) \leftrightarrow \neg M(sx)$$

$$\vdash (p(x) > 0) \leftrightarrow M(sx),$$

которые суть частный случай утверждений для предикатов величин, и дополнительно к ним утверждениями:

$$\vdash p(x \wedge y) \leqslant min(p(x), p(y))$$

$$\vdash p(x \vee y) \geqslant max(p(x), p(y))$$

$$\vdash p(\sim x) = 1 - p(x),$$

относящимся к операторам $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Для оператора условности имеют силу утверждения:

$$\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow (p(y) \leqslant p(x))$$

$$\vdash x \rightarrow (p(x \rightarrow y) = p(y)).$$

Наличие различных способов вычисления вероятности и возможность модификации правил вычисления нельзя рассматривать как наличие различных понятий вероятности. Дело в том, что слово «вероятность» есть лишь замена выражения «величина (степень) возможности», а точным определением его является не изобретение определений типа «вероятность есть...», а описание свойств предикатов вероятности и, более того, содержащих их высказываний. Правильно поставленным здесь будет вопрос такого рода: каков смысл выражений типа $M\alpha$ $(sx)$, $p(x) = \alpha$, $p(x) > \alpha$ и т. п.? Логически правильный ответ на вопрос есть описание свойств предикатов $M\alpha$ и описание способов нахождения $\alpha$.

Употребляют выражение «вероятность высказывания». Оно многосмысленно и неопределенно. Оно может означать вероятность того, что некоторое высказывание $x$ истинно или будет истинным, а эти выражения в свою очередь могут означать, что $sx$ существует или наступит, а также то, что мы правы в отношении некоторого предмета, утверждая $x$.

Интерес представляют здесь два случая. Первый: вероятность того, что $sx$ существует, есть вероятность того, что мы обнаружим существование $sx$. Здесь имеется в виду уже не состояние $sx$, а состояние $sy$, где $y$ есть высказывание «Существование $sx$ обнаружено (установлено и т. п.)». Для этого случая имеет силу очевидное правило: $p(y) \leqslant p(x)$.

Второй случай: вероятность того, что мы правы, утверждая $x$. Это — частный случай вычисления вероятности для индивидуальных состояний. Здесь принимаются во внимание обстоятельства в пользу $x$ и против. Только ситуация здесь запутывается потому, что в качестве обстоятельств «за» и «против» могут приниматься во внимание признаки предметов, о которых говорится в $x$ (например, при установлении вероятности того, что мимолетно виденный нами человек есть $A$, принимаются во внимание известные нам признаки $A$ и обстоятельства его жизни).

Несколько слов еще об одной любопытной логической ошибке. Встречается утверждение, что возможное событие рано или поздно осуществится. В самом деле, если $M(sx)$, то $p(x) > 0$. А если число некоторых «испытаний», в которых может выпасть состояние $sx$, достаточно велико, то отсюда следует, что $sx$ рано или поздно будет иметь место. Но это было бы верно, если бы частотный метод был единственным способом установления вероятности событий. Как мы видели, этот метод не применим для индивидуальных событий и вообще в случаях, когда число «испытаний» не может быть достаточно большим. Кроме того, высказывание $p(x) > 0$ может быть просто следствием $M(sx)$, а последнее может быть принято только потому, что $x$ не ведет к противоречию, что нет таких $sy$, что $y \rightarrow \sim x$, и т. п.

## § 17. Отношения

Среди высказываний с двух и более местными предикатами имеются такие, которые имеют строение $aRb$ и $a \urcorner Rb$ или могут быть путем некоторых языковых преобразований приведены к такому виду. Например, «$a$ больше $b$», «$a$ не больше $b$», «$a$ в три раза тяжелее $b$» и т. д. Такие высказывания называются высказываниями об отношениях, а то, о чем в них говорится, называется отношениями (т. е. если $x$ есть высказывание об отношении, то предмет, обозначаемый термином $sx$, есть отношение). Например, термин «Тот факт, что $a$ больше $b$» обозначает отношение.

В символах $aRb$ и $a \urcorner Rb$ буква $R$ обозначает тип предиката отношения (и, соответственно, отношения), но не сам предикат полностью. Так, в высказывании «$a$ больше $b$» субъекты суть термины $a$ и $b$, предикат запишется выражением «первый предмет больше второго», тип отношения обозначает слово «больше». Термин $b$ может быть парой, тройкой и т. д. терминов. Например, в высказывании «$a$ находится между $b$, $c$ и $d$» термин, идущий вслед за отношением «находится между», есть тройка терминов ($b$, $c$, $d$).

Оператор ? определяется для высказываний об отношениях следующим образом:

$$(a ? Rb) \equiv Df \cdot \sim (aRb) \wedge \sim (a \urcorner Rb).$$

Отношение $R$ является рефлексивным, если и только если истинно $aRa$, симметричным, если и только если истинно $(aRb) \rightarrow (bRa)$, и транзитивным, если и только если истинно $(aRb) \wedge (bRc) \rightarrow (aRc)$.

## § 18. Сравнение

Отношения различаются как отношения сравнения (например, «тяжелее») и отношения порядка (например, «расположен правее»). В случае сравнения у предметов выделяются какие-то признаки и выясняется наличие или отсутствие у них каких-то признаков (сходство и различие), а также количественное сходство или различие по какому-то одному признаку.

Имеется группа высказываний сравнения, в которых говорится о превосходстве одних предметов над другими по какому-то признаку. Будем их изображать символами вида

$$a > pb,$$

где символ $> p$ читается как «превосходит по признаку $p$». Это — схематичное или обобщенное изображение группы высказываний, которые литературно могут иметь самую различную форму и знак отношения в которых не всегда расчленен на $>$ и $p$. Так, в высказываниях «$a$ выше $b$» и

«$a$ тяжелее $b$» слова «выше» и «тяжелее» суть частные случаи знаков отношения «превосходит по высоте» и «превосходит по весу». Внутреннее отрицание и неопределенная форма таких высказываний имеют вид

$$a \neg > pb \quad \text{и} \quad a ? > pb.$$

Через отношение превосходства определяются отношения «тождественно по признаку» и «уступает по признаку». Будем их записывать символами $= p$ и $< p$. Таковы, например, «$a$ имеет такую же высоту, как $b$», «$a$ равен по весу $b$», «$a$ легче $b$», «$a$ меньше $b$» и т. п. Определения этих отношений можно эксплицитно записать так:

$$(a = pb) \equiv Df \cdot (a \neg > pb) \wedge (b \neg > pa)$$
$$(a \neg = pb) \equiv Df \cdot (a > pb) : (b > pa)$$
$$(a < pb) \equiv Df \cdot (b > pa)$$
$$(a \neg < pb) \equiv Df \cdot (b > pa) : (a = pb),$$

где оператор: есть сильная дизъюнкция («одно и только одно из двух»). Неопределенность определяется по общему правилу.

Логические свойства знака отношения $> p$ определяются имплицитно системой аксиом $C^i$, среди которых имеются такие:

1. $\vdash (a \neg > pa)$
2. $(a > pb) \vdash (b \neg > pa)$
3. $(a \neg > pb) \vdash (b > pa) : (a = pb)$
4. $(a > pb) \wedge (b > pc) \vdash (a > pc)$
5. $(a > pb) \wedge (b = pc) \vdash (a > pc)$
6. $(a = pb) \wedge (b > pc) \vdash (a > pc)$
7. $(a \neg > pb) \wedge (b \neg > pc) \vdash (a \neg > pc)$.

Первая аксиома означает, что отношение $> p$ нерефлексивно, вторая — что оно несимметрично, четвертая — что оно транзитивно. Знак $A = pB$ здесь фигурирует лишь как сокращение для $(A \neg > pB) \wedge (B \neg > pA)$, так что он может быть устранен.

Очень важное значение имеет следующее обстоятельство. Сравнение предметов всегда производится каким-то способом и относительно чего-то третьего, отличного от сравниваемых предметов. Например, чтобы сказать, что $a$ движется медленее, чем $b$ (или что скорость $a$ меньше скорости $b$), необходим либо некоторый способ сравнения величин, либо способ наблюдения движущихся предметов,— требуется тот, кто осуществляет сравнение и какие-то средства для этого. Так что условимся букву за знаками $>$, $=$ и $<$ считать не только знаком признака предметов, но и способа сравнения, т. е. будем в способ сравнения включать признаки, по которым осуществляется сравнение, и то, как производится сравнение.

## § 19. Отношение порядка

Отношение порядка рассмотрим несколько подробнее, так как оно играет весьма большую роль в последующем изложении.

Выражение «упорядоченность (порядок) предметов» мы принимаем за первично ясное, ограничиваясь примерами и пояснениями. В частности, расположение предметов в пространстве и появление или исчезновение их во времени суть случаи упорядоченности. Для фиксирования ее употребляются выражения «первый», «второй», ..., «выше», «ниже», «раньше», «одновременно», «правее» и т. п.

Порядок предметов $a$ и $b$ определяется относительно третьего предмета $c$, который будем называть точкой определения и отсчета порядка.

При установлении порядка предметов важны не только точки определения порядка, но также и способы некоторых действий. Мы можем, например, определить порядок точек $a$ и $b$ на окружности относительно третьей точки $c$. Но порядок $a$ и $b$ тем самым еще остается не заданным: потребуется еще указать, будем мы двигаться по часовой стрелке или против. В зависимости от направления движения мы получим разные результаты: в одном случае окажется, что $a$ будет дальше $b$ относительно $c$, а в другом — $b$ дальше $a$. В дальнейшем мы будем употреблять выражение «способ отсчета (определения) порядка», полагая, что способ отсчета (определения) порядка включает также и точку отсчета (определения) порядка.

Высказывания о том, что $a$ находится в отношении порядка $R$ к $b$ относительно способа установления порядка $\alpha$, будем изображать символом

$$a(R\alpha)b.$$

Соответственно $a \urcorner (R\alpha)\, b$ и $a?\ (R\alpha)\, b$ суть его частное отрицание и неопределенная форма.

Вопрос о зависимости порядкового отношения предметов от способа установления порядка имеет различные аспекты.

Аспект логический. Пусть $\alpha$ и $\beta$ суть различные способы установления порядка. При этом условии из $a\,(R^1\alpha)\,b$ логически не следует как $a\,(R^1\beta)\,b$, так и его отрицание $\sim (a\,(R^1\beta)\,b)$. Здесь предполагается одно и то же время $t^1$. Если в это время имеет место $a\,(R^1\alpha)\,b$ и $a\,(R^2\beta)\,\beta$, то, избрав вместо $\alpha$ другой способ $\beta$, мы тем самым не можем изменить отношение $a\,(R^1\alpha)\,b$, т. е. сделать верным $\sim (a\,(R^1\alpha)b)$. Причем это — в силу правила логики $\vdash \sim (x \wedge \sim x)$.

Аспект эмпирический (или физический). Пусть $a\,(R^1\alpha)b$ во время $t^1$ и $a\,(R^2\beta)\,b$ во время $t^2$. Здесь возможно, что порядковое отношение $a$ и $b$ во время $t^2$ изменится по каким-то причинам сравнительно с $t^1$ так, что будет неверно $a\,(R^1\alpha)\,b$. В частности, причиной этого может быть применение способа $\beta$. Но это не обязательно всегда так: в $t^2$ возможно будет $\sim (a\,(R^1\alpha)\,b)$, хотя мы вообще не применяем $\beta$. Здесь возможен также случай, когда применение $\beta$ исключает применение $\alpha$. И тогда в $t^2$ будет верно $a?\,(R^1\alpha)\,b$ и, следовательно, $\sim (a\,(R^1\alpha)\,b)$, но будет неверно $a \urcorner (R^1\alpha)\,b$.

Установление отношений порядка для некоторых предметов проблемы не представляет. Их порядок как-то дан, и споров на этот счет не возникает. Для других же случаев порядок устанавливается путем применения к указанным выше случаям правил логики, математики и специальных правил, выработанных в той или иной области науки применительно к особенностям изучаемых в ней предметов (например, теория относительности в физике).

Как и в случае со сравнением, употребляются высказывания о превосходстве одних предметов над другими по порядку относительно некоторого способа установления порядка, а также о тождестве предметов по порядку и о том, что одни предметы уступают другим по порядку (опять-таки относительно некоторого способа установления порядка) будем изображать символами вида

$$a > \alpha b, \quad a < \alpha b, \quad a = \alpha b.$$

Аналогично — внутренние их отрицания и неопределенные формы:

$$a \urcorner > \alpha b, \quad a\,? > \alpha b, \quad a \urcorner < \alpha b$$

и т. д. Отличие от сравнения состоит лишь в том, что вместо признака $p$ имеется в виду способ установления порядка.

Отношения $= \alpha$ и $< \alpha$ определяются через $> \alpha$ точно так же, как в случае с аналогичными отношениями сравнения, а отношение $> \alpha$ определяется имплицитно аксиомами УП$^i$, среди которых имеются аксиомы, аналогичные аксиомам сравнения 1—7 для $> p$ (с той лишь разницей, что имеется в виду не признак $p$, а способ упорядочивания $\alpha$).

Заметим, что различение $> \alpha$ и $< \alpha$ не предрешает вопроса о том, какое из отношений пар «дальше — ближе», «выше — ниже», «правее — левее» и т. п. будет $> \alpha$ и какое будет $< \alpha$. Важно здесь лишь то, что если одно рассматривается как $> \alpha$, то другое есть $< \alpha$.

## § 20. Отношение «между»

Простейший случай отношения «между» определяется так: $a$ находится между $b$ и $c$ относительно $\alpha$, если и только если $(a > \alpha b) \wedge (c > \alpha a)$ или $(b > \alpha a) \wedge (a > \alpha c)$. В общем виде (для любого числа предметов) это отношение определяется так: $a$ находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно способов установления порядка $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$, если и только если для любой пары $b^i$ и $b^k$ из $b^1, \ldots, b^n$ найдется такой $\alpha^j$ из $a^1, \ldots, \alpha^m$, что $(a > \alpha^j b^i) \wedge (b^k > \alpha^j a)$ или $(b^i > \alpha^j a) \wedge$ $\wedge$ $(a > \alpha^j b^k)$.

Для скоплений (и энок) предметов имеет силу следующее положение: скопление (энка) предметов $A$ находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$, если и только если каждый предмет, входящий в $A$, находится между $b^1, \ldots, b^n$ относительно $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$.

## § 21. Существование отношений

Вопрос о существовании отношений заслуживает особого внимания, ибо к нему сводится вопрос о существовании пространства и времени.

Для отношений имеют силу общие положения о существовании состояний $sx$. Однако особенности этих состояний при этом не учитываются. Поэтому необходимо здесь сделать некоторые дополнительные разъяснения.

Термин $s\,(aRb)$ является индивидуальным, как очевидно из сказанного выше, если и только если $a$ и $b$ суть индивидуальные термины. Если $s\,(aRb)$ есть индивидуальный термин, то предикат существования для него имеет такой смысл: отношение $s\,(aRb)$ существует, если и только если существует $a$, существует $b$ и результат некоторых операций с $a$ и $b$ (сравнения $a$ и $b$ или установления их порядка) дает именно $R$. Для общих терминов $s\,(aRb)$ проблема существования сводится к проблеме для индивидуальных терминов по рассмотренным выше правилам для любых общих терминов.

Из определения существования отношения $aRb$ следует: если существует это отношение, то существуют оба предмета $a$ и $b$; и если не существует по крайней мере один из $a$ и $b$, то не существует и их отношение.

## § 22. Отношение чисел и величин

Числа суть абстрактные предметы. Для них предикаты $>$, $<$ и $=$ суть предикаты порядка, а не сравнения. Указание на способ установления порядка опускается, поскольку предполагается единая и общепринятая система соглашений на этот счет. Например, $2 > 1$ есть высказывание «2 превосходит по порядку 1 относительно принятой системы упорядочивания чисел».

Если числа фигурируют в высказываниях, то они суть термины абстрактных предметов. Для них имеет силу правило

$$\vdash (a = b) \leftrightarrow (a \rightleftharpoons b)$$

или, в другой форме,

$$(a = b) \dashv\vdash (a \rightleftharpoons b).$$

Например, из высказывания $2 + 2 = 4$ («Числа $2 + 2$ и 4 тождественны по порядку») следует $2 + 2 \rightleftharpoons 4$ («Термины $2 + 2$ и 4 тождественны по значению»); и наоборот.

Пусть $l$ есть краткая запись слова «величина», а $la$ — выражения «величина $a$». Высказывания вида $la = x$ тождественны по смыслу «$a$ имеет величину, равную $x$». Высказывания $la > lb$, $la < lb$, $la = lb$ суть порядковые высказывания, как и высказывания об отношениях чисел такого же рода. Но они тождественны по смыслу высказываниям сравнения $a > lb$, $a < lb$, $a = lb$ («$a$ превосходит $b$ по величине» и т. д.). Наконец, для величин имеет силу правило

$$\vdash (la = lb) \leftrightarrow (la \rightleftharpoons lb)$$

или в другой форме

$$(la = lb) \dashv\vdash (la \rightleftharpoons lb)$$

(читается так: если $a$ и $b$ тождественны по порядку, то термины $la$ и $lb$ тождественны по значению; и наоборот).

Приведенные правила важно знать при построении (и анализе) определений терминов величины и чисел. Определения вида $\vdash (x = y)$, где $x$ суть определяемые выражения, суть неявные эквиваленты явных определений $x = Df \cdot y$. Например, число 2 по определению таково, что $2 = 1 + 1$; в явной форме это определение есть определение $2 = Df \cdot \cdot (1 + 1)$, где 2 и $1 + 1$ суть термины теории чисел. Для чисел и величин отрицания $\urcorner$ и $\sim$ совпадают.

## § 23. Упорядоченный ряд

Скопление индивидов такое, что для любой пары $a$ и $b$ из них $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$, будем называть упорядоченным относительно $\alpha$ рядом. Индивиды, входящие в данный упорядоченный ряд, суть его элементы. Из определения очевидно: если $a = \alpha b$, то $a$ и $b$ не могут быть элементами одного ряда. Они могут быть лишь элементами различных рядов.

На рис. 1 изображены

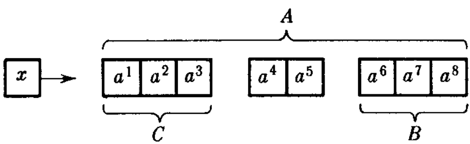


Рис. 1

три упорядоченных ряда $A$, $B$ и $C$. Все они упорядочены относительно индивида $x$, а стрелка указывает направление выбора индивидов и возрастание их порядка. На рис. 2 изображены упорядоченные ряды $D$, $E$ и $F$,

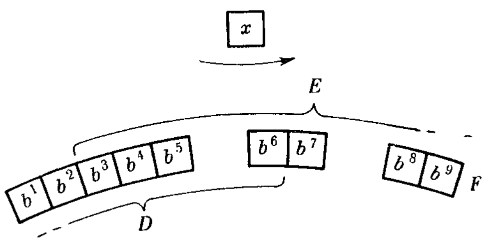


Рис. 2

элементы которых упорядочены относительно $x$, но способ установления порядка несколько иной: определяется поворотом $x$, причем изогнутая стрелка показывает возрастание порядка индивидов.

Элементы $a$ и $b$ ряда $A$, упорядоченного относительно $\alpha$, будем называть соседними, если и только если ни один элемент $A$ не находится между $a$ и $b$ относительно $\alpha$. Так, на рис. 1 соседними являются $a^1$ и $a^2$, $a^2$ и $a^3$, $a^4$ и $a^5$ и т. д.

Определение соседних элементов ряда можно записать также следующим образом: $a$ и $b$ суть соседние элементы $A$, если и только если

$$(\neg \mathrm{Э} c)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in A) \wedge (((b > \alpha c) \wedge (c > \alpha a)) \vee ((a > \alpha c) \wedge (c > \alpha b)))),$$

где $a$, $b$ и $c$ суть индивидные переменные. Это определение есть определение актуально соседних элементов ряда. Если в нем заменить Э на М, то получим определение потенциально соседних элементов ряда. В дальнейшем мы ограничимся формулировками определений с Э, полагая, что читатель сам сможет сделать дополнение «актуальное» и построить соответствующее определение с М.

Если $a$ и $b$ суть соседние элементы ряда относительно $\alpha$, будем это записывать символами вида

$$a \mid \alpha b.$$

На рис. 1 отношение ряда $B$ и $A$ обозначается выражением «отрезок ряда». Здесь $B$ есть отрезок ряда $A$. Аналогично ряды $E$ и $D$ на рис. 2 суть отрезки ряда $F$. В общем виде термин «отрезок ряда» определяется таким образом. Пусть $a$ и $b$ — элементы ряда $A$. Пусть $B$ есть скопление индивидов такое, что все индивиды $B$ не уступают по порядку $a$ относительно $\alpha$ или не превосходят по порядку $b$ относительно $\alpha$ (или и то и другое). Если $B \subset A$, то $B$ есть отрезок ряда $A$.

Из элементов ряда $A$ могут быть выбраны такие элементы, которые образуют новый ряд $B$. Так, элементы $a^1$, $a^3$, $a^5$ и $a^7$ ряда $A$ на рис. 1 образуют ряд. Но такой ряд нельзя назвать отрезком $A$. Это — отношение рядов уже иного рода.

Ряд есть скопление индивидов, и вопрос о его существовании решается в зависимости от того, как это скопление определено. Например, ряд из индивидов $a$, $b$ и $c$, упорядоченных так, что $a > \alpha b$ и $b > \alpha c$, существует, если и только если существуют все три индивида $a$, $b$ и $c$ и при этом они упорядочены именно так, как указано выше. Но пусть ряд $A$ определен так: если $a > \alpha b$, то $a \in A$ и $b \in A$. Для существования такого ряда необходимо и достаточно, чтобы существовала по крайней мере одна пара индивидов $a$ и $b$ такая, что $a > \alpha b$.

## § 24. Соприкосновение

Будем говорить, что индивиды $a$ и $b$ соприкасаются (не соприкасаются) относительно $\alpha$ и класса индивидов $A$, если и только если $a > \alpha b$ или $b > \alpha \breve{a}$, и при этом никакой индивид класса $A$ невозможно поместить между $a$ и $b$ относительно $\alpha$. На рис. 1 индивиды $a^1$ и $a^2$ соприкасаются относительно $\alpha$, а индивиды $a^3$ и $a^4$ не соприкасаются, поскольку между ними можно поместить некоторый индивид $b$.

Конечно, вопрос о том, можно или нет в том или ином конкретном случае поместить между $a$ и $b$ какой-то индивид $c$, решается в зависимости от некоторой условности, договоренности, практических возможностей и т. п. Например, на рис. 3 изображены два индивида $a$ и $b$,

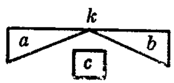


Рис. 3

которые могут считаться соприкасающимися, поскольку у них есть точка соприкосновения $k$, и могут считаться несоприкасающимися, поскольку возможно поместить индивид $c$ так, как показано на рисунке. Но он в каждом случае практически решается, и этого достаточно, чтобы оправдать данное определение. Для определения безразлично, можно или нет реализовать ту или иную операцию, ибо определение имеет целью установить значение терминов, а не правило выяснения значений истинности высказываний в этими терминами.

Ссылки на класс $A$ будем опускать, предполагая, что в каждом случае имеется в виду какой-то или любой класс индивидов. Высказывание «$a$ соприкасается с $b$ относительно $\alpha$» будем для краткости записывать символом

$a \parallel \alpha b$.

Принятое определение можно записать так:

1. $(a \parallel \alpha b) \dashv\vdash ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a)) \wedge (\urcorner \mathrm{M}\, I)(((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)))$

2. $(a \urcorner \parallel \alpha b) \dashv\vdash ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a)) \wedge (\mathrm{M} I)(((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)))$

3. $(a ? \parallel \alpha b) \dashv\vdash \sim (a \parallel \alpha b) \wedge \sim (a \urcorner \parallel \alpha b)$.

Если не вводится оператор М, то в приведенных определениях следует заметить М на Ǝ. При этом термин $I$ можно заменить на индивидную переменную.

В рассматриваемом случае различение отрицаний $\urcorner$ и $\sim$ исключительно важно: $a \urcorner \parallel \alpha b$ означает «$a$ и $b$ не соприкасаются относительно $\alpha$», а $\sim (a \parallel \alpha b)$ означает «Нельзя сказать (принять), что $a \parallel \alpha b$» (это может быть не только $a \urcorner \parallel \alpha b$, но и $a = \alpha b$, $a? > \alpha b$ и т. п.).

Из определения следует:

$$(a = \alpha b) \vdash \sim (a \parallel \alpha b)$$

$$\sim (a \parallel \alpha b) \dashv\vdash \sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a) \vee \sim (\urcorner \mathrm{M}\, I)(((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)))$$

$$(a \parallel \alpha b) \vdash (a \mid \alpha b).$$

## § 25. Непрерывность и прерывность эмпирического ряда

Ряд является эмпирическим, если и только если он образован эмпирическими индивидами. Ряд является абстрактным, если и только если он образован абстрактными индивидами.

Одни и те же предикаты могут определяться различно для абстрактных и эмпирических рядов. В частности, это имеет место для предикатов прерывности и непрерывности.

Ряд $A$ будем называть непрерывным (сплошным) относительно $\alpha$, если и только если все его соседние элементы попарно соприкасаются относительно $\alpha$. Другими словами, ряд $A$ непрерывен относительно $\alpha$, если и только если

$$(\forall a)(\forall b)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (a \mid \alpha b) \to (a \parallel \alpha b)),$$

где $a$ и $b$ суть индивидные переменные. Ряд $A$ будем называть прерывным (пористым) относительно $\alpha$, если и только если по крайней мере для одной пары соседних элементов его верно, что они не соприкасаются относительно $\alpha$. Другими словами, ряд прерывен относительно $\alpha$, если и только если

$$(\exists a)(\exists b)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (a|\alpha b) \wedge \sim (a\|\alpha b)).$$

Так, ряды $B$ и $C$ на рис. 1 непрерывны, а ряд $D$ и ряд $E$ на рис. 2 прерывны.

## § 26. Начало и конец ряда

Ряд $A$ имеет начальный элемент относительно $\alpha$, если и только если найдется такой элемент этого ряда $a$, что любой другой элемент этого ряда превосходит его по порядку относительно $\alpha$. Если $a$ и $b$ суть индивидные переменные, то определяющая часть этого определения запишется так:

$$(\exists a)(\forall b)((a \in A) \wedge ((b \in A) \wedge \sim (a \rightleftharpoons b) \rightarrow (b > \alpha a))).$$

Элемент $a$ есть начальный или первый по порядку элемент ряда $A$.

Ряд $A$ имеет конечный элемент относительно $\alpha$, если и только если

$$(\exists a)(\forall b)((a \in A) \wedge ((b \in A) \wedge \sim (a \rightleftharpoons b) \rightarrow (a > \alpha b))).$$

(т. е. если найдется такой элемент его $a$, который превосходит все остальные по порядку относительно $\alpha$). Элемент $a$ есть конечный или последний элемент ряда $A$ относительно $\alpha$.

Ряд $A$ не имеет начального элемента относительно $\alpha$, если и только если

$$(\forall a)(\exists b)((a \in A) \rightarrow (b \in A) \wedge (b < \alpha a)).$$

Ряд $A$ не имеет конечного элемента относительно $\alpha$, если и только если

$$(\forall a)(\exists b)((a \in A) \rightarrow (b \in A) \wedge (a < \alpha b)).$$

Ряд может быть определен так, что при этом указывается, какой элемент является начальным, какой является конечным или и то и другое. Так, на рис. 1 индивид $a^1$ есть начало ряда $A$, а индивид $a^8$ — конец; индивид $b^3$ есть начало ряда $E$ на рис. 2, а индивид $b^6$ — конец ряда $D$. Но ряды могут быть определены так, что не указывается, какие именно их элементы суть конечные и начальные. Так, на рис. 2 для ряда $E$ не указано, какой элемент является конечным, а для ряда $D$ — какой начальным. В одних случаях такого рода проделывается какое-то исследование, в результате которого устанавливается начальный или конечный элемент ряда (или и то и другое). В других же случаях выясняется или допускается невозможность сделать это или вообще допускается отсутствие начального или конечного элемента ряда (или того и другого).

Возможно так, что начиная с некоторого момента порядок индивидов ряда $A$ относительно $\alpha$ установить невозможно. Это — случай с неопределенностью. Если $x$ есть утверждение «Ряд $A$ имеет начальный (конечный) элемент», а $y$ — утверждение «Ряд $A$ не имеет начального (конечного) элемента», то рассматриваемый случай запишется как $\sim x \wedge \sim y$. Практически же здесь допустима та или иная договоренность. В частности, последний элемент ряда $A$, для которого можно установить порядок относительно $\alpha$, правомерно принять за первый или последний элемент ряда.

Если же допускается, что ряд не имеет начального или не имеет конечного элемента, а из $\alpha$ не ясно, наступит или нет такой момент, когда порядок индивидов относительно $\alpha$ установить становится уже невозможно, то создается видимость рядов, не имеющих начального или конечного элементов (или даже того и другого). Однако это лишь на уровне допущений имеет смысл. Что касается утверждений типа «Ряд $A$ не имеет начального элемента», «Ряд $A$ не имеет конечного элемента» и т. п., то они не могут быть проверены эмпирически в случаях, о которых идет речь, в силу невозможности перебрать бесконечный ряд предметов и установить для них отношение порядка. Так что если из определения ряда или из способа построения его обозначения нельзя вывести наличие начального или конечного элемента, а эмпирически соответствующие утверждения нельзя проверить, то одинаково правомерны как допущения отсутствия начального или конечного элемента, так и допущения их наличия или возможности. При этом только надо помнить, что это — лишь допущения, а не бесспорные истины.

Невозможность установить начальный (конечный) элемент ряда и отсутствие таковых не всегда совпадают. Это зависит от определения ряда.

Конечный элемент одного ряда не всегда есть начальный элемент другого, а начальный одного — не всегда есть конечный другого. Так, ряд $A$ может быть таким относительно $\alpha$, что начиная с некоторого момента установить порядок индивидов относительно $\alpha$ становится невозможным, так что ни о каком начальном или конечном элементе нового ряда относительно $\alpha$ говорить нельзя. Что касается ряда $B$ относительно другого способа упорядочивания $\beta$, то из утверждения о существовании начального или конечного элемента ряда $A$ не следует утверждение о существовании конечного или начального элемента ряда $B$. Так что утверждение о том, что конечный (начальный) элемент одного ряда есть начальный (конечный) элемент другого, либо бессмысленно, либо неверно.

Если ряд не имеет начального элемента, из этого не следует, что не существует этот ряд и не существуют его элементы.

## § 27. Интервал

Для выражений «интервал» и «интервал между $a$ и $b$» не возможно построить определения по принципу «Интервалом (интервалом между $a$ и $b$) называется...». Здесь возможны лишь определения сложных выражений, которые содержат слово «интервал» и высказывания с этим словом. Например, выражение «Величина интервала между $a$ и $b$ равна десяти $c$» есть замена (по определению) выражения «Между $a$ и $b$ можно поместить десять предметов класса $c$ так, что предметы $a$, $b$ и $c$ образуют непрерывный ряд»; выражение «$a$ произошло в интервале между $b$ и $c$» есть замена для выражения «$a$ произошло между $b$ и $c$» (здесь слово «интервал» вообще является излишним).

Выражение «интервал» уместно использовать лишь для случаев, когда предметы суть элементы упорядоченного ряда. Точнее говоря, слово «интервал» есть лишь часть выражения «Интервал между $a$ и $b$ относительно $\alpha$», которое уместно исключительно для случаев, когда имеет место $a > \alpha b$. Будем это выражение для краткости и наглядности записывать символом вида

$$\{a, b, \alpha\}.$$

Предметы $a$ и $b$ будем называть границами интервала. Выражение $\{a, b, \alpha\}$ есть термин-субъект. Причем термины $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, a, \alpha\}$ не всегда тождественны по значению; аналогично для терминов $\{a, b, \alpha\}$ и $\{a, b, \beta\}$, если $\alpha$ и $\beta$ различны.

## § 28. Протяжённость

Интервалы характеризуются величиной или протяжённостью. Выражения вида «Протяженность $\{a, b, \alpha\}$» будем записывать символами вида

$$l\{a, b, \alpha\},$$

где $l$ есть просто слов «протяженность».

Протяженность интервала между эмпирическими предметами определяется возможностью или невозможностью поместить между ними какие-то предметы и числом последних, а также путем сравнения с другим интервалом. Здесь способ нахождения величины интервала есть одновременно способ определения выражения, в котором говорится об этой величине,— типичный пример для «операционных» определений. Так, в выражении «Интервал между $a$ и $b$ равен десяти $c$» указана величина интервала — «десять $c$», а в выражении, через которое оно определяется («между $a$ и $b$ можно поместить...»), указан некоторый способ измерения величины интервала.

Сравнение интервалов $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \beta\}$ предполагает такое их сопоставление, чтобы можно было представить $a$, $b$, $c$ и $d$ упорядоченными относительно $\alpha$ или $\beta$ так, что-либо $a = \alpha c$ (или $a = \beta c$), либо $b = \alpha d$ (или $b = \beta d$), но чтобы при этом интервалы не изменялись по величине, т. е. представить как наложение одного из них на другой, совмещая одни из их элементов. Условимся накладывать $\{c, d, \beta\}$ на $\{a, b, \alpha\}$ так, что $\{c, d, \beta\}$ равен по протяженности $\{c, d, \alpha\}$.

Возможны такие имплицитные определения выражений, сравнивающих интервалы:

$$(l\{a, b, \alpha\} = l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash ((a = \alpha c) \leftrightarrow (b = \alpha d))$$

$$(l\{a, b, \alpha\} > l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash ((a = \alpha c) \rightarrow (b > \alpha d)) \wedge$$
$$((b = \alpha d) \rightarrow (c > \alpha a))$$

$$(l\{a, b, \alpha\} < l\{c, d, \alpha\}) \dashv\vdash (l\{c, d, \alpha\} > l\{a, b, \alpha\}).$$

Интервалы $\{a, b, \alpha\}$ и $\{a, b, \beta\}$ не обязательно равны, если различны $\alpha$ и $\beta$. Аналогично не обязательно равны $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, a, \alpha\}$.

Для обозначения протяженности отдельно взятых предметов используются выражения «длина», «высота», «продолжительность» и т. п. Выражение «Протяженность $a$» будем кратко записывать символом вида

$la$.

Протяженность эмпирических предметов определяется (там, где это уместно) так: протяженность эмпирического предмета $a$ относительно некоторого способа установления порядка $\alpha$ равна протяженности интервала $\{b, c, \alpha\}$ такого, что если $a$ поместить между $b$ и $c$, то $b$ и $a$ будут соприкасаться относительно $\alpha$, а также $a$ и $c$ будут соприкасаться относительно $\alpha$. Частный случай — в качестве $b$ и $c$ берутся части $a$ такие, что все прочие части $a$ находятся между $b$ и $c$ относительно $\alpha$.

Протяженность эмпирических предметов определяется относительно некоторых способов установления порядка. Если $a$ есть предмет, а не интервал между предметами, то в определении должно фигурировать выражение «$la$ относительно $\alpha$». Будем его записывать символом

$$l\{a, \alpha\}.$$

Если $\alpha$ и $\beta$ различны, то не всегда $l\{a, \alpha\} = l\{a, \beta\}$.

Приведенное выше определение $l\{a, \alpha\}$ можно записать так:

$$\vdash (b \| \alpha a) \wedge (a \| \alpha c) \rightarrow (l\{a, \alpha\} = l\{b, c, \alpha\}).$$

Или в другой форме,

$$\vdash (l\{a, \alpha\} = l\{b \downarrow x, c \downarrow x, \alpha\}),$$

где $x$ есть $(b \| \alpha a) \wedge (a \| \alpha c)$.

Для абстрактных предметов и интервалов между ними утверждения о протяженности принимаются как допущения. Здесь единственными ограничителями являются логическая непротиворечивость утверждений и интересы приложения теоретических построений. Известны случаи, когда допускаются предметы, не имеющие протяженности, бесконечно малые и бесконечно большие интервалы, нулевые интервалы и т. п. Для эмпирических предметов такого рода допущения неправомерны. Так, невозможно наблюдать предметы, не имеющие никакой протяженности или имеющие бесконечно малую протяженность; невозможно зафиксировать бесконечно большой интервал между эмпирическими предметами и т. п. Все допущения такого рода нельзя подтвердить и опровергнуть опытным путем.

Если для каких-то эмпирических предметов и интервалов между ними не существует способ установления (нахождения, измерения) величин их протяженности, то соответствующие выражения не имеют смысла. Подчеркиваем, что в такого рода случаях не установлен (или даже не может быть в принципе установлен) смысл выражений $la$. Но это никак не означает того, что упомянутые предметы и интервалы не имеют протяженности, т. е. что $lx = 0$.

Заметим, что выражения вида $la > lb$, $la < lb$ и т. д. тождественны выражениям вида соответственно $a > lb$, $a < lb$ и т. д. (т. е. «$a$ превосходит $b$ по протяженности» и т.д.).

## § 29. Абстрактные ряды

Абстрактный упорядоченный ряд есть ряд, элементы которого суть абстрактные предметы.

Если элементы абстрактного ряда не имеют протяженности, то многие предикаты для них определяются иначе, чем для эмпирических рядов. Это имеет первостепенное значение для устранения целого ряда затруднений (вроде парадоксов Зенона). Последние совершенно непреодолимы, если не учитывать различия абстрактных и эмпирических рядов и того, что одни и те же предикаты определяются различно в зависимости от того, к каким рядам они относятся.

Пусть $a$, $b$ и $c$ суть переменные для терминов, обозначающих элементы ряда $A$, т. е. $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$.

Примем определения: 1) ряд $A$ непрерывен относительно $\alpha$, если и только если

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)(((a > \alpha c) \wedge (c > \alpha b)) \vee ((b > \alpha c) \wedge (c > \alpha a)));$$

2) ряд $A$ прерывен относительно $\alpha$, если и только если

$$(\exists a)(\exists b)(\neg \exists c)(((a > \alpha c) \wedge (c > \alpha b)) \vee ((b > \alpha c) \wedge (c > \alpha a))).$$

Несовпадение этих определений с соответствующими определениями для эмпирических рядов очевидно. Посмотрим, к каким последствиям ведет такая интерпретация абстрактного ряда в терминах эмпирического ряда, при которой осуществляется следующее: для каждого элемента $a$ абстрактного ряда находится элемент $b$ эмпирического ряда такой, что принимается $b \to a$ (т. е. каждому элементу абстрактного ряда приводится в соответствие элемент эмпирического ряда). В таком случае непрерывность эмпирического ряда будет выступать так, будто для любых двух элементов эмпирического ряда имеется такой элемент, который помещается между ними. И так без конца. Но это ошибочно.

Причина ошибки — неправильная интерпретация абстрактного ряда: интерпретироваться должны не только его элементы, но и предикаты, введенные для абстрактных предметов. Правильная интерпретация в рассматриваемом случае имеет такой вид. Если абстрактный ряд непрерывен, то интерпретация его непрерывности как непрерывности эмпирического ряда означает:

1) абстрактный непрерывный ряд сопоставляется с эмпирическим непрерывным же рядом;

2) каждому элементу абстрактного ряда сопоставляется какой-то элемент эмпирического ряда, а не перерыв («пустое место») между элементами эмпирического ряда — таких перерывов в последнем нет.

Так что если «спроецировать» точку абстрактного ряда на эмпирический ряд, мы наткнемся на какой-то эмпирический индивид, являющийся элементом этого ряда. Причем для различных точек абстрактного ряда это может быть один и тот же индивид эмпирического.

На рисунке 4 изображен отрезок *AB*, точки которого образуют непрерывный абстрактный ряд, и тела *a*, *b*, *c*, *d*,

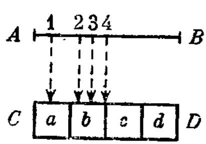

Рис. 4

образующие непрерывный эмпирический ряд *CD*. Пунктирными стрелками указано, что если ряд *CD* есть интерпретация ряда *AB*, то проекция любой точки *AB* наткнется на какое-то из тел *a*, *b*, *c* и *d*. Причем точки *2* и *3* проецируются на одно и то же тело *b*, точка *4* проецируется в стык тел *b* и *c*, т. е. сопоставляется сразу двум телам эмпирического ряда.

Если абстрактный ряд интерпретируется так, что каждому элементу его ставится в соответствие элемент эмпирического ряда, причем разным его элементам ставятся в соответствие разные элементы эмпирического ряда, то непрерывный абстрактный ряд не имеет эмпирической интерпретации.

Таким образом, интерпретация абстрактного ряда не есть просто интерпретация его элементов. Это есть еще подыскание подходящей интерпретации прочих терминов, относящихся к рядам, не вступающей в конфликт с соответствующей терминологией для эмпирических рядов.

Заметим кстати, что многочисленные парадоксы и противоречия в науке возникают вследствие того, что смешиваются абстрактные и эмпирические предметы, а если они и различаются, то нарушаются правила интерпретации первых в терминах вторых.

## § 30. Конечные и бесконечные ряды

Мы уже видели, что ряды бывают конечные и бесконечные в смысле наличия или отсутствия начального или конечного элемента. Но они также различаются как конечные и бесконечные с точки зрения числа входящих в них элементов и с точки зрения протяженности. Так что, как видим, при оперировании предикатами «конечный» или «бесконечный» надо учитывать, что именно имеется в виду. Кроме того, необходимо учитывать и различие рядов как эмпирических и абстрактных, ибо и здесь имеет место расхождение, рассмотренное выше.

Если число элементов эмпирического ряда бесконечно, то ряд бесконечно протяжен. Для абстрактного ряда это не так. Например, отрезок *AB* на рис. 4 содержит бесконечное множество точек, но имеет конечную протяженность.

Для абстрактных рядов правомерны любые допущения, лишь бы они были логически непротиворечивы. Таковы, например, допущения бесконечно протяженных рядов. Можно даже допустить ряд, который бесконечно протяжен, но имеет начальный и конечный элемент (если, например, допустить бесконечно большой интервал между его элементами). Для эмпирических же рядов такие допущения либо остаются эмпирически неверифицируемыми гипотезами, либо же такие абстрактные ряды не имеют эмпирических интерпретаций. Так, абстрактный ряд с бесконечно протяженными интервалами между какими-либо его элементами не имеет эмпирической интерпретации.

## § 31. Структура

Интуитивно приемлемым кажется такое определение структуры: структура есть скопление индивидов, для любого элемента $a$ которого найдется такой другой его элемент $b$ и такой способ установления порядка $\alpha$, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$. Однако такого рода определение уместно лишь как ориентировочное определение, цель которого — наметить для читателя, о чем будет идти речь. С таким определением невозможны строгие рассуждения.

Покажем сначала, как вводятся первичные термины структур. Они могут быть введены разными способами, и в частности — таким.

Выражение «Структура, которая образуется элементами скопления $A$ относительно класса способов установления порядка $B$» будем считать термином, тождественным по значению термину «Скопление индивидов $A$ такое, для любого элемента $a$ которого найдется другой его элемент $b$, и такой способ установления порядка $\alpha$, принадлежащий к классу $B$, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$».

В приведенном определении слово «структура» определено как часть сложного термина. Чтобы ввести его в употребление как термин, производный от первичных терминов структур, можно воспользоваться общими правилами введения терминологии, в том числе — обобщением.

Приведенное определение является эксплицитным. Из него очевидно, что индивиды какого-либо скопления образуют структуру лишь относительно некоторых данных способов установления порядка. Если последние не даны, ни о какой структуре и речи быть не может. А так как выбор этих способов есть дело исследователя, то он не имеет права спрашивать относительно какого-либо скопления $A$, есть оно структура или нет, если предварительно не задал (не выбрал) класс способов установления порядка $B$. Структура — скопление, но не всякое скопление — структура (хотя это не исключает того, что для любого скопления из двух и более индивидов могут быть найдены какие-то способы установления порядка такие, что это скопление будет структурой).

Имплицитно термины первичных структур определяются так: элементы скопления $A$ образуют структуру относительно класса способов установления порядка $B$, если и только если для любого элемента $a$ этого скопления найдется другой его элемент $b$ и такой способ установления порядка $\alpha$, относящийся к классу $B$, что $a > \alpha b$ или $b > \alpha a$. Используя индивидные переменные $a$ и $b$ и переменную для способов установления порядка $\alpha$, определяющую часть (после слов если и только если) можно записать так:

$$(\forall a)(\exists b)(\exists \alpha)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in B) \to ((a > \alpha b) \vee (b > \alpha a))).$$

В имплицитном определении слово «структура» определено как часть высказывания. И требуются еще дополнительные логические операции, чтобы ввести термин «структура» как самостоятельный термин. Впрочем это не является обязательным делом, если при оперировании этим термином в ориентировочном смысле иметь в виду, что в рассуждениях всегда предполагаются термины, обозначающие конкретные структуры (в конечном счете — первичные термины структур).

Частный случай скопления $A$, указанного выше, есть скопление, состоящее из индивидов $a^1$, ..., $a^n$ ($n \geqslant 2$), а частный случай класса $B$ — перечисление способов установления порядка $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ ($m \geqslant 1$)

На рис. 5 показано, что

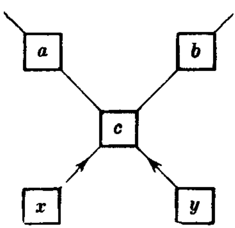


Рис. 5

индивиды $a$, и $c$ образуют структуру относительно способов установления порядка $\alpha^1$ (точка отсчета порядка $x$, направление возрастания порядка указано стрелкой) и $\alpha^2$ ($y$ и стрелка). Но эти индивиды могут образовать структуру относительно других способов установления порядка, в частности — так, как показано на рис. 6.

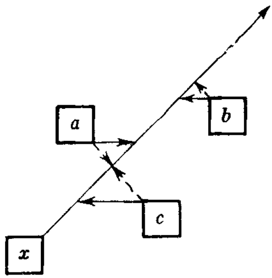


Рис. 6

Здесь точка отсчета одна, но порядок *a*, *b* и *c* устанавливается путем проецирования их на линию, указанную большой сплошной стрелкой. Если изменить способ проецирования, как указано пунктирными стрелками, будет иная (о чем скажем ниже) структура из *a*, *b* и *c*, но все же структура. Но зато индивиды *a* и *c* не образуют структуру относительно способа установления порядка, указанного на рис. 6 пунктирными стрелками.

Упорядоченный ряд есть, очевидно, структура. Простейшая структура — структура из двух индивидов и одного способа установления порядка.

Определение структуры дает право считать или не считать то или иное скопление *A* структурой относительно *B*. Но оно не содержит в себе всего того, что мы можем знать о структуре. Структура может исследоваться как самостоятельный предмет. В частности, могут выясняться интервалы между ее элементами, число элементов, их порядок друг относительно друга (например, на рис. 6 индивиды *a* и *c* тождественны по порядку относительно способа установления порядка с пунктирной стрелкой) и т. д. Причем если индивиды *A* суть эмпирические индивиды, то структура из них есть также эмпирический индивид, хотя мы сами выбираем способы установления порядка и можем их менять. От этого выбора зависит лишь способ описания скопления *A*, от смены этих способов изменяется лишь способ описания того же самого скопления *A*, а не само это скопление. К структурам относится все, сказанное об отношениях порядка вообще, только в усложненной форме.

Использование терминов структур в качестве субъектов высказываний (предицирование структур) не означает еще того, что можно ассоциировать их с любыми предикатами, получая осмысленные высказывания. Имеются такие предикаты, для которых еще должны быть установлены условия приписывания их структурам (т. е. установлен их смысл в сочетании с терминами структур). С примерами такого рода нам придется еще встречаться.

Пусть скопление $A^1$ образует структуру $C$ относительно $B$. Пусть $A^2$ есть скопление, образующее структуру $D$ точно так же относительно $B$. Если $A^1 \subset A^2$, то будем говорить, что $C$ есть подструктура структуры $D$ относительно $B$. Если $\sim (A^2 \subset A^1)$, то $C$ — собственная подструктура структуры $D$. На рис. 7 скопление индивидов $a$, $b$ и $c$ есть подструктура скопления индивидов $a$, $b$, $c$ и $d$.

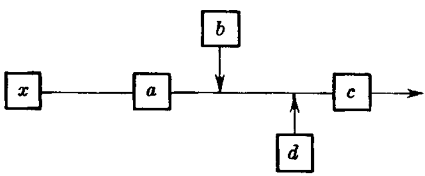


Рис. 7

Пусть скопление $A^1$ образует структуру $C^1$ относительно $B$, а скопление $A^2$ — структуру $C^2$ относительно $B$. Объединением структур $C^1$ и $C^2$ будем называть такую структуру $C$, которая образована из элементов скоплений $A^1$ и $A^2$ относительно $B$, причем $C^1$ и $C^2$ — подструктуры $C$.

Пусть $B$ — класс способов установления порядка, относительно которого элементы скопления $A$ образуют структуру $C$. Будем говорить, что скопление индивидов $D$ находится внутри $C$ (включено в $C$) относительно $B$, если и только если все элементы $D$ находятся между элементами $A$ относительно $B$.

В зависимости от того, какими являются элементы структур — эмпирическими или абстрактными предметами,— различаются эмпирические и абстрактные структуры. Проблемы эмпирической интерпретации последних являются порой еще более сложными, чем проблемы эмпирической интерпретации абстрактных рядов.

## § 32. Существование структуры

Вопрос о существовании структур сводится (в соответствии с правилами построения терминологии) к вопросу о существовании структур, обозначаемых первичными терминами структур. А существование последних определяется в зависимости от существования их элементов и отношений между ними, удовлетворяющих определению соответствующих терминов. Например, структура, которую образуют индивиды $a$, $b$ и $c$ относительно $\alpha$, существует, если и только если существуют $a$, $b$, $c$, и между ними имеют место отношения порядка относительно $\alpha$, удовлетворяющие определению структуры. Аналогично обстоит дело с предикатом возможности.

Таким образом, утверждение «Структура не существует (невозможна), если не существуют (невозможны) образующие ее индивиды» есть следствие определения структуры и предиката существования (возможности) применительно к отношениям вообще и структурам в частности.

## § 33. Протяженность структуры

Вопрос о протяженности структур сводится к вопросу о протяженности индивидов, интервалов и рядов и к операциям с соответствующими величинами. Таковы, как известно, операции по нахождению площадей и объемов фигур и тел. Мы эти вопросы не рассматриваем. Ограничимся краткими замечаниями.

Если принято, что протяженность эмпирического индивида всегда больше нуля, то из этого следует, что протяженность любого рода эмпирической структуры также больше нуля.

Протяженность индивидов устанавливается, так же как протяженность некоторой структуры, образуемой частями этих индивидов.

Протяженность подструктуры $A$ данной структуры $B$ не может превышать протяженности $B$. Если индивид $a$ находится внутри структуры $A$, то его протяженность не больше протяженности $A$. Если индивид $a$ есть элемент структуры $A$, его протяженность не больше протяженности $A$.

## § 34. Соответствие

Выбрать предмет — значит так или иначе обратить на него внимание, указать на него, назвать, представить и т. п. Выбор предметов есть первичная познавательная операция, разъясняемая на примерах.

Выбор двух или более различных предметов есть их сопоставление. Обращаем внимание на то, что в случае сопоставления предметов каждый из сопоставляемых предметов может быть выбран независимо от других. Выбираемые предметы различны, так что предмет сам с собой не сопоставляется.

Если принято (установлено) некоторое правило сопоставления предметов, будем говорить, что установлено соответствие этих предметов. Соответствие устанавливается только между различными предметами. Точнее понятие соответствия определяется для конкретных его видов. Соответствие предметов считается установленным с точки зрения какой-то данной группы лиц, и без этих лиц оно вообще не существует. Независимо от лиц, устанавливающих соответствие предметов, последние сами по себе в соответствии не находятся.

Высказывание «Предмет $b$ соответствует предмету $a$» (или «Предмету $a$ соответствует $b$», «Предмету $a$ поставлен в соответствие предмет $b$») будем кратко записывать символом

$$a \Leftarrow b\,,$$

где $\Leftarrow$ есть двухместный предикат «второй соответствует первому».

Если $a$ и $b$ суть индивидуальные термины, то предикат $\Leftarrow$ имеет такой смысл: $a \Leftarrow b$, если и только если $\sim (a \rightleftharpoons b)$, и принято решение в некоторых заданных условиях $x$ всегда вслед за выбором $a$ выбирать $b$. Выражение «Всегда вслед за выбором $a$ выбирается $b$» равносильно выражению «Если выбирается $a$, то вслед за этим выбирается $b$». Так что выражение $a \Leftarrow b$ есть лишь сокращенная запись более сложного выражения, содержащего высказывание типа $y \to z$.

Если $b$ есть общий термин, а $a$ индивидуальный, предикат соответствия определяется так:

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df.\ (\forall\, \alpha)\,((\alpha \rightharpoonup b) \to (a \Leftarrow \alpha))$$

$$(a \urcorner \Leftarrow b) \equiv Df.\ (\exists\, \alpha)\,((\alpha \rightharpoonup b) \wedge \sim (a \Leftarrow \alpha)),$$

где $\alpha$ есть индивидная переменная (т. е. $a \Leftarrow b$, если и только если любой индивид, который есть $b$, соответствует $a$). Если $a$ есть общий, а $b$ — индивидуальный термин, то определение примет вид:

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df. (\forall \alpha)((\alpha \rightarrow a) \rightarrow (\alpha \Leftarrow b))$$

$$(a \urcorner \Leftarrow b) \equiv Df. (\exists \alpha)((\alpha \rightarrow a) \wedge \sim (\alpha \Leftarrow b))$$

(т. е. $a \Leftarrow b$, если и только если любому индивиду, который есть $a$, соответствует $b$). Если $a$ и $b$ оба общие термины, то

$$(a \Leftarrow b) \equiv Df. (\forall \alpha)(\forall \beta)((\alpha \rightarrow a) \wedge (\beta \rightarrow b) \rightarrow (\alpha \Leftarrow \beta))$$

$$(a \urcorner \Leftarrow b) \equiv Df. (\exists \alpha)(\exists \beta)((\alpha \rightarrow a) \wedge (\beta \rightarrow b) \wedge \sim (\alpha \Leftarrow \beta)),$$

где $\alpha$ и $\beta$ суть индивидные переменные. Например, любой экземпляр слова «стол» соответствует любому экземпляру столов.

Из определений следует:

$$(a \rightleftarrows b) \rightarrow \sim (a \Leftarrow b) \wedge \sim (b \Leftarrow a).$$

## § 35. Соответствие классов

Установление соответствия предметов практически целесообразно тогда, когда приходится иметь дело с отношениями классов предметов. По нашему мнению, оно имеет смысл лишь для непустых и непересекающихся классов. При этом мы исходим из таких соображений.

Из рассмотрения случаев, когда устанавливают соответствие пересекающихся (имеющих общие элементы) классов, обнаруживается, что их общие элементы так или иначе удваиваются. Если индивид $a$ включается в класс $A$ и в класс $B$, то при сопоставлении $A$ и $B$ как различных классов (иначе сопоставление невозможно) рассматривают $a$ как общий термин, а в качестве индивидуальных терминов фигурируют $a \downarrow (a \in A)$ (т. е. берется индивид $a$, включаемый в $A$) и $a \downarrow (a \in B)$ (т. е. берется индивид $a$, включаемый в $B$).

Рассмотрим такой пример. Пусть устанавливается какое-то соответствие класса натуральных чисел $A$ и класса четных чисел $B$. Число 2 включается как в класс $A$, так и в класс $B$. Но дело в том, что выражение 2 не есть индивидуальный термин (2 не есть единственный индивид, обозначаемый словом «два»). Существует много индивидов, которые суть «два». И мы их здесь можем продуцировать в любом количестве: 2, 2, 2, ... . И все они различны (хотя бы потому, что занимают различное место в пространстве). Аналогично для всех других чисел. Так что при установлении соответствия классов натуральных и четных чисел берутся фактически не $A$ и $B$, а совсем другие классы, являющиеся лишь их подклассами, а именно: 1) класс, в который включается только один экземпляр единицы, только один экземпляр двойки и т. д.; 2) класс, в который включается только один экземпляр двойки, только один экземпляр числа четыре и т. д. Термины этих классов (соответственно $A^*$ и $B^*$) в отличие от $A$ и $B$ являются общими, а не индивидуальными. И при этом двойки, включаемые в эти классы, суть различные индивиды. Поскольку берутся любые классы такого рода, то получаемые утверждения в явной форме имеют вид $(\forall\alpha)(\forall\beta)x$, где $\alpha$ и $\beta$ — переменные для классов такого рода, а $x$ — результат сопоставления их. Классы $A^*$ и $B^*$ — непересекающиеся классы. Классы же $A$ и $B$ таковы, что $B \subset A$. Причем $A$ содержит ничем не ограниченное и не поддающееся учету множество единиц, двоек и т. д. Аналогично $B$.

Итак, будем говорить, что класс $B$ поставлен в соответствие классу $A$, если и только если $A$ и $B$ не пересекаются, оба не являются пустыми, и каждому элементу $A$ поставлен в соответствие по крайней мере один элемент $B$. Это есть определение предиката $\Leftarrow$ для терминов классов. Из определения следует: 1) если хотя бы один из $A$ и $B$ пуст, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge \sim(B \Leftarrow A)$; 2) если $A$ и $B$ пересекаются, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge \sim(B \Leftarrow A)$; 3) если $A \subset B$, то $\sim(A \Leftarrow B) \wedge$ $\wedge \sim(B \Leftarrow A)$; 4) $\sim(A \Leftarrow A)$.

Пусть $a, b, c, d$ — индивидные переменные; $A$ и $B$ — переменные для классов; $x$ — высказывание «$A$ и $B$ не пусты и не пересекаются»; $y$ — высказывание «Каждому элементу $A$ ставится в соответствие один и только один элемент $B$», т. е.

$$(\forall a)(\exists b)(\forall c)((a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (a \Leftarrow b) \wedge ((a \Leftarrow c) \wedge$$
$$\wedge (c \in B) \to (b \rightleftharpoons c))),$$

$z$ есть высказывание «Разным элементам $A$ ставятся в соответствие разные элементы $B$», т. е.

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(\forall d)((a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in B) \wedge$$
$$\wedge (d \in B) \wedge (a \Leftarrow c) \wedge (b \Leftarrow d) \wedge \sim(a \rightleftharpoons b) \to \sim(c \rightleftharpoons d)).$$

Примем такие определения:

1) класс $B$ однозначно соответствует классу $A$ (сокращенно $A \langle\equiv B$), если и только если $x \wedge y \wedge z$, т. е.

$$(A \langle\equiv B) \equiv Df. (x \wedge y \wedge z);$$

2) классы $A$ и $B$ находятся во взаимнооднозначном соответствии (сокращенно $A \langle\equiv\rangle B$), если и только если $(A \langle\equiv B) \wedge (B \langle\equiv A)$, т. е.

$$(A \langle\equiv\rangle B) \equiv Df. (A \langle\equiv B) \wedge (B \langle\equiv A).$$

Предикаты сравнения классов по мощности $> m$ и $= m$ можно определить таким образом:

1. $\vdash (A \subset B) \rightarrow (A \neg > m\, B)$
2. $\vdash (\exists a)(a \in A) \wedge (\forall a) \sim (a \in B) \rightarrow (A > mB)$
3. $\vdash (A \langle\equiv B) \rightarrow (A \neg > mB)$
4. $\vdash (A \subset CUD) \wedge (CUD \subset A) \wedge (B \subset CUE) \wedge$ $\wedge (CUE \subset B) \rightarrow ((D > mE) \leftrightarrow (A > mB)) \wedge ((D = mE) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (A = mB))$
5. $\vdash x \rightarrow ((A > mB) \leftrightarrow (\exists c)(\exists d)((c \subset A) \wedge (c \langle\equiv\rangle B) \wedge$ $\wedge (d \in A) \wedge \sim (d \in c)))$,

где $x$ — высказывание «$A$ и $B$ не пусты и не пересекаются», $c$ — переменная для классов, $d$ — индивидная переменная. Читаются 1—5 так: 1) подкласс класса не превосходит по мощности сам класс; 2) непустой класс превосходит по мощности пустой класс; 3) класс, которому однозначно соответствует другой класс, не превосходит по мощности последний; 4) отношение мощностей пересекающихся классов тождественно отношению их непересекающихся частей; 5) если $x$, то $A$ превосходит по мощности $B$, если и только если найдется собственный подкласс $C$ класса $A$, находящийся во взаимнооднозначном соответствии с $B$.

Из 1 следует: 6) эквивалентные классы равномощны; 7) пустые классы равномощны; 8) универсальные классы равномощны. Из 3 следует: 9) $\vdash (A \langle\equiv\rangle B) \rightarrow (A = mB)$, т. е. классы, находящиеся во взаимнооднозначном соответствии, равномощны.

Таким образом, если классы пересекаются, то для их общей части вопрос о соотношении их мощностей решается по правилам 1 и 6, а для непересекающихся частей используется 3, 5, 9.

## § 36. Функция

Если указан (установлен) общий способ, с помощью которого для каждого элемента $Ka$ можно установить, какие именно элементы $Kb$ ему соответствуют, то будем говорить, что задан (установлен) способ или тип соответствия класса $Kb$ классу $Ka$ или что задана функция $b$ от $a$.

Высказывания о том, что $b$ есть функция от $a$, будем записывать символами вида

$$b \Leftarrow f(a),$$

где $f$ обозначает способ соответствия (тип функции), а $\Leftarrow f$ есть двухместный предикат «первый есть функция $f$ от второго».

Для одних и тех же $Ka$ и $Kb$ могут быть установлены различные способы соответствия, фиксируемые высказываниями

$$b \Leftarrow f^1(a), \ldots, b \Leftarrow f^n(a),$$

где $n \geqslant 1$. Например, соответствие класса нечетных чисел $Kb$ классу четных чисел $Ka$ может быть установлено равенством $b = a + 1$ и равенством $b = a \pm 1$. И если принято решение установнть упомянутые виды соответствия класса $Kb$ классу $Ka$, все $b \Leftarrow f^i(a)$ считаются истинными.

## § 37. Упорядоченные состояния

Важное значение для науки имеет фиксирование порядковых отношений состояний. Например, «После того, как прозвенел звонок, у собаки началось отделение слюны», «Вокруг проводника возникает магнитное поле в то время, как по нему проходит электрический ток» и т. п.

Частный случай высказываний, учитывающих порядок событий, суть высказывания типа «$y$ в отношении $R$ к $x$ (или к тому, что $x$)». Будем их записывать символами

$$(Rx)\, y.$$

Например, «$y$ через час после того, как $x$».

Встречаются, далее, высказывания вида «$x$ и затем $y$», «$x$ и перед этим $y$», «$x$ и слева от этого $y$» и т. п. Эти своеобразные упорядоченные конъюнкции нередко употребляются неявно и смешиваются с обычными. Именно на таком смешении базируется, на наш взгляд, исключение некоторых законов классической логики в «логике микромира».

В общем случае упорядоченные конъюнкции имеют вид

$$x \wedge (Rx)\, y.$$

Аналогично возможны упорядоченные дизъюнкции

$$x \vee (Rx)\, y.$$

Для этих конъюнкций и дизъюнкций не всегда верны утверждения

$$x \wedge (Rx)\, y \rightarrow y \wedge (Ry)\, x$$

$$x \vee (Rx)\, y \rightarrow y \vee (Ry)\, x.$$

Так что для них нельзя принимать правила коммутации

$$x \wedge (Rx)\, y \vdash y \wedge (Ry)\, x$$

$$x \vee (Rx)\, y \vdash y \vee (Ry)\, x.$$

Для них верны правила коммутации лишь такого вида:

$$(x \wedge (R^1x)\, y) \wedge ((aR^1b) \rightarrow (bR^2a)) \vdash (y \wedge (R^2y)\, x)$$

$$(x \vee (R^1x)\, y) \wedge ((aR^1b) \rightarrow (bR^2a)) \vdash (y \vee (R^2y)\, x).$$

Например, из высказывания «$x$ и затем $y$» следует «$y$ и до этого $x$», поскольку из «$a$ происходит после $b$» следует «$b$ происходит до $a$».

## § 38. Условные высказывания с отношением порядка

Встречаются условные высказывания вида

$$x \rightarrow (Rx)\, y,$$

где $R$ есть отношение порядка. Например, «Если по проводнику пропустить электрический ток, то одновременно с этим (или сразу после этого) вокруг проводника возникает магнитное поле». Благодаря наличию $R$ эти высказывания приобретают дополнительные свойства, в частности, такие:

$$(x \rightarrow (Rx)\, y) \dashv\vdash (\forall sx)\, ((Rx)\, y)$$

$$(x \rightarrow (R^1x)\, y) \wedge ((aR^1b) \rightarrow (bR^2a)) \vdash (\sim y \rightarrow (R^2 \sim y) \sim x).$$

## § 39. Функциональная зависимость

Для любых двух непустых классов $Ka$ и $Kb$ в принципе может быть найден способ соответствия $f$ такой, что $b \Leftarrow f(a)$. Это — тривиально: условимся, например, любому $a$ ставить в соответствие какой-то один $b$ или любой $b$. Это тривиально, поскольку установление соответствия классов есть волевое решение лиц, имеющих дело с классами.

Однако имеются случаи, когда способ соответствия навязывается какими-то обстоятельствами и не является произвольно выбираемым. Это бывает тогда, когда между индивидами одного класса и индивидами другого класса, независимо от того, изучают их или нет, имеется какая-то связь (зависимость). Высказывания, получаемые в таких случаях, суть высказывания вида

$$s(Rx)\,y \Leftarrow f(sx),$$

в которых речь идет не просто об индивидах, но о состояниях индивидов.

Эти высказывания получаются из высказываний вида

$$x^i \to (Rx^i)y^i,$$

таких, что

$$(sx^i \to sx) \wedge (sy^i \to sy) \wedge (sy \Leftarrow f(sx)).$$

Здесь $f$ подбирается с таким расчетом, чтобы выполнялось условие

$$\vdash (s(Rx)\,y \Leftarrow f(sx)) \wedge x^i \to (Rx^i)\,y^i$$

для любых $x^i$ и $y^i$ таких, что $sx^i \to sx$ и $sy^i \to sy$. Такие высказывания — высказывания о функциональной связи состояний.

Приведем пример. Наблюдаются состояния предметов $a$ и $b$ последовательно во времени по некоторому признаку $P$. Причем фиксируется величина $P$ для $a$ и затем через некоторое время $t$ фиксируется величина $b$ по этому признаку. Это — тип отношения $R$ в высказывании $(Rx)\ y$. Составляется таблица величин $a$ и $b$. Изучение последней позволяет установить, что с некоторыми огрублениями, допущениями и т. п. величина $b$ всегда примерно в два раза больше величины $a$. Это — тип функции $f$ в высказывании $sy \Leftarrow f\ (sx)$. Высказывания $x^i$ и $y^i$ здесь — высказывания о величине $a$ и, соответственно, $b$ в данное время и в диапазоне величин, установленном также наблюдением (это может быть задано таблицей).

Высказыванию $s(Rx)\,y \Leftarrow f(sx)$ можно придать вид условного высказывания

$$x \to (Rx)\,y^*,$$

где $f$ внесено в $y$ так, что получается высказывание $y^*$. Так, в рассмотренном выше примере высказыванию можно придать вид: «Если $a$ имеет некоторую величину, то через время $t$ предмет $b$ будет иметь величину вдвое больше».

## § 40. Связи

Высказывания вида

$$x \to (Rx)\,y$$
$$s(Rx)\,y \Leftarrow f(sx),$$

такие, что высказывание

$$x \to y$$

не является логически доказуемым (логически истинным), будем называть высказываниями о связи состояний $sx$ и $sy$ или о физическом следовании $sy$ из $sx$. Если $a$ есть такое высказывание, то $sa$ есть термин связи, а то, что обозначается этим термином,— связь состояний. Последние суть элементы связи. Будем говорить также, что упомянутые состояния находятся в связи (связаны).

Поскольку высказывание о функциональной связи можно трансформировать в условное высказывание с отношением, в дальнейшем мы будем высказывания об эмпирических связях брать в обобщенной форме $x \to (Rx)\,y$, где $y$ может содержать описание некоторой функции.

Если в $x \to (Rx)\,y$ отношение $R$ означает тождество координат для $x$ и $y$, то $Rx$ опускают, и высказывания принимают вид $x \to y$. Но отношение $Rx$ в них так или иначе предполагается. Например, в высказывании «Если по проводнику пропустить электрический ток, то вокруг него возникает магнитное поле» предполагается то же самое время или время сразу после наступления первого события.

Высказывание $A$ о связи строится с таким расчетом, чтобы из высказываний $x^i$ можно было чисто логически получать высказывания $y^i$, такие, что $sx^i \in Ksx$ и $sy^i \in Ksy$, а $x$, $y$ и $Rx$ входят в $A$. Другими словами, $A$ строится так чтобы имело место

$$x^i \wedge (sx^i \in Ksx) \wedge A \vdash (Rx^i)\, y^i.$$

Поэтому $A$ можно рассматривать как особое правило получения одних высказываний из других. Но это правило не логическое (относящееся к свойствам языка), а относящееся к свойствам той или иной предметной области.

В зависимости от строения $x$ и $y$ различаются простые и сложные высказывания о связях. Соответственно различаются и связи. Так, в высказывании $(a \wedge b) \to (R\ (a \wedge b)\ c)$ высказывание $x$ есть сложное высказывание $a \wedge b$, состоящее из двух высказываний; в $a \to (Ra)\ (b \vee c)$ сложным является $y$.

Свойства сложных высказываний о связях определяются через простые особыми логическими правилами. Например, это правила вида

$$(a \vee b \to (R(a \vee b))c) \dashv\vdash (a \to (Ra)c) \wedge (b \to (Rb)c)$$
$$(a \to (Ra)\,(b \wedge c)) \dashv\vdash (a \to (Ra)b) \wedge (a \to (Ra)c)$$

и т. п. Но, кроме того, здесь возможны правила совершенно иной природы. Более подробно вопросы, относящиеся к связям, рассмотрим в следующей главе.

## § 41. О некоторых уточнениях в теории классов

В связи с принятыми выше уточнением понятия взаимно-однозначного соответствия и утверждениями для предикатов отношения мощностей классов необходимо сделать некоторые коррективы в математической теории классов. Эти коррективы затрагивают лишь логические основания теории классов. Поясним их на примере классов натуральных и четных чисел.

Мы различаем термины «один», «единица», «два», «три» и т. д. и обозначаемые ими числа. Эти термины являются общими. Так, термин «один» обозначает каждую из записываемых здесь единиц 1, 1, 1, ... , причем последние суть различные индивиды из области значения термина «один» или различные индивиды класса единиц.

Класс натуральных чисел (сокращенно *Кнч*, где *нч* — термин «натуральное число») состоит не из одной только единицы, одной только двойки и т. д., а из класса единиц, класса двоек и т. д. Аналогично класс четных чисел (сокращенно *Кчч*, где *чч* — термин «четное число») состоит из класса двоек, класса четверок и т. д.

Утверждение «Между *Кнч* и *Кчч* имеет место взаимнооднозначное соответствие» с излагаемой здесь точки зрения неверно, поскольку они не пусты и $Кчч \subset Кнч$.

Пусть $\alpha$ есть класс, в который включается одно и только одно число 1, одно и только одно число 2 и т. д. для всех натуральных чисел, и никакие другие индивиды в $\alpha$ не включаются. Очевидно, таких классов более двух. Например, класс $\alpha$, в который включена записываемая ниже единица 1, и класс $\alpha$, в который включена записываемая ниже другая единица 1, суть различные классы $\alpha$. Все $\alpha$ суть подклассы класса натуральных чисел, т. е. $(\forall\alpha)$ $(\alpha \subset Кнч)$.

Аналогично пусть $\beta$ есть класс, в который включается одно и только одно число 2, одно и только одно число 4 и т. д. для всех четных чисел, и никакие другие индивиды в $\beta$ не включаются. Все $\beta$ суть подклассы класса четных чисел, т. е. $(\forall\beta)$ $(\beta \subset Кчч)$.

Правильным будет лишь такое утверждение о соотношении классов натуральных и четных чисел: «Для всех $\alpha$ и всех $\beta$, если $\alpha$ и $\beta$ не пересекаются, то между ними имеет место взаимнооднозначное соответствие».

Имеет смысл допустить некоторый класс — эталон, который есть класс $\alpha$, но который не пересекается ни с одним из всех прочих классов $\alpha$. Аналогично для $\beta$ и вообще для любых классов. Целесообразно также принять допущение: ни один класс-эталон не пересекается ни с одним другим классом-эталоном.

Глава третья

# ЭМПИРИЧЕСКИЕ ПРЕДМЕТЫ

## § 1. Логические типы эмпирических предметов

В зависимости от типов терминов, обозначающих эмпирические предметы, различаются соответственно логические типы самих этих предметов. Это различение в языке фиксируется употреблением терминов «тело», «состояние», «событие», «изменение», «превращение» и т. п. Как уже отмечалось, упомянутые термины вводятся в употребление различными способами, условия приписывания им тех или иных предикатов различны. Более того, последние имеют различный смысл в ассоциации с различными терминами эмпирических предметов. Рассмотрим два примера на этот счет, прежде чем приступить к более подробному анализу упомянутой терминологии.

Кажется вполне очевидным, что всякий эмпирический предмет возникает в какое-то время, существует и затем разрушается. Но вот что получится, если взять это утверждение ($z$) в связи с другими терминами и утверждениями логики. Если $sx$ и $sy$ — эмпирические состояния (частный случай эмпирических предметов), то по определению $s\,(x \vee y)$ — также эмпирическое состояние. Но частный случай последнего есть состояние $s\,(x \vee \sim x)$. Если допустить $z$, то следует признать, что когда-то состояния $s\,(x \vee \sim x)$ не было, т. е. имело место $s \sim (x \vee \sim x)$. Но состояние $s \sim (x \vee \sim x)$ логически невозможно. Другой пример. Скопление эмпирических предметов есть эмпирический предмет. Мир в целом можно рассматривать как скопление эмпирических предметов, т. е. как эмпирический предмет. Но к миру в целом неприменимы понятия «возникновение» и «исчезновение», что противоречит $z$. Термин «возникновение» и «исчезновение» применимы не к любым эмпирическим предметам, а утверждение *г* уместно лишь как часть определения какого-либо типа эмпирических предметов. Например, возможно такое определение: эмпирический предмет будем называть *а*, если и только если этот предмет возникает в некоторое время и затем через какое-то время разрушается. Теперь утверждение *г* будет верно для *а* как следствие из их определения.

## § 2. Эмпирические тела

Имеются эмпирические предметы, которые обладают конечной пространственной протяженностью (длиной, шириной, объемом и т. д.) или, другими словами, к которым уместно применять слова «протяженность», «длина» и т. п. Будем их называть телами. Именно из наблюдения тел человек впервые вырабатывает пространственные представления и соответствующую терминологию.

В дальнейшем при рассмотрении проблем, относящихся к пространственным величинам, мы ограничимся только интервалами и длинами эмпирических тел (длина, ширина, высота и т. п.— частные случаи длин). Проблемы, связанные с площадями и объемами, сводятся к проблемам длин и суть лишь усложнения последних.

Эмпирические тела, чтобы быть обнаруженными человеком или соответствующими приборами и устройствами, должны обладать некоторой пространственной протяженностью. Если это — гипотетические тела, то их следы, по которым судят об их существовании и их свойствах, должны иметь протяженность. Величина последней исторически условна и преходяща. Эмпирические тела по самому принятому их определению имеют пространственную протяженность и в том числе длину. Какой бы величиной ни характеризовалась она, эта величина больше нуля.

Выражение «длина *а* относительно $\alpha$» будем кратко записывать символом

$$l\{a, \alpha\}.$$

Определение эмпирического тела в более явной форме можно сформулировать так: *а* есть эмпирическое тело относительно $\alpha$, если и только если *а* есть эмпирический предмет такой, что

$$l\{a,\alpha\} > 0.$$

Из определения следует: если $l\{a, \alpha\} = 0$, то *а* не есть эмпирическое тело относительно $\alpha$.

Для некоторых целей достаточно имплицитного определения эмпирического тела, устанавливаемого аксиомой

АФ[1]. $\vdash A \rightarrow (l\{a, \alpha\} > 0)$,

где $a$ есть переменная, область значения которой суть термины эмпирических тел (относительно $\alpha$, конечно), а $\alpha$ — переменная, область значения которой суть выражения, обозначающие способы установления пространственного порядка, $A$ есть «$a$ есть эмпирический индивид относительно $\alpha$».

Определение эмпирического тела можно ослабить так: $a$ есть эмпирическое тело, если и только если $a$ есть эмпирический предмет, и для любого $\alpha$ верно $l\{a, \alpha\} > 0$. Соответственно АФ[1] примет вид:

$\vdash B \rightarrow (\forall a)(l\{a, \alpha\} > 0)$,

где $B$ есть «$a$ есть эмпирический индивид».

## § 3. Изменение

Пусть $sx$ есть состояние эмпирического предмета $a$ в одно время, а $sy$ — состояние того же индивида в другое время после этого, т. е. $sy$ превосходит $sx$ по временному порядку. Пусть при этом $\vdash \sim (x \wedge y)$, т. е. состояния $sx$ и $sy$ исключают друг друга. Будем говорить, что при этом произошло превращение состояния $sx$ в состояние $sy$ (или что $sx$ превратилось в $sy$) или что $a \downarrow x$ превратился в $a \downarrow y$ и записывать символами

$sx \Rightarrow sy$ и $a \downarrow x \Rightarrow a \downarrow y$.

Частные случаи превращения индивида из одного состояния в другое или изменения суть следующие:

1) $s \urcorner E(a) \Rightarrow sE(a)$ — возникновение $a$;
2) $s \sim x \Rightarrow sx$ — возникновение $sx$;
3) $sE(a) \Rightarrow s \urcorner E(a)$ — уничтожение $a$;
4) $sx \Rightarrow s \sim x$ — уничтожение $sx$;
5) $sP(a) \Rightarrow s \urcorner P(a)$ — потеря признака индивидом $a$;
6) $s \urcorner P(a) \Rightarrow sP(a)$ — приобретение признака индивидом $a$;
7) $sP\alpha(a) \Rightarrow sP\beta(a)$, где $\alpha > \beta$ — уменьшение $a$ по признаку $P$;
8) $sP\alpha(a) \Rightarrow sP\beta(a)$, где $\alpha < \beta$ — увеличение $a$ по признаку $P$.

Говоря об изменении или превращении, следовательно, надо иметь в виду, что предполагается какой-то эмпирический предмет и смена его состояний во времени.

Когда говорят о превращении одного предмета $a$ в другой $b$ (например, куколка превратилась в бабочку), то предполагается превращение одного состояния некоторого предмета, обозначаемого термином $a$, в другое состояние того же предмета, обозначаемое термином $b$. Так что запись $a \Rightarrow b$ есть лишь сокращение для записи $s(I \rightarrow a) \Rightarrow s(I \rightarrow b)$.

Чтобы какое-то скопление изменений, упорядоченное в пространстве и времени, назвать также изменением, необходимо ввести термин $a$, которым можно обозначить данное скопление эмпирических предметов в различное время несмотря на происходящие изменения, а результаты последних представить как различные состояния $a$.

Частный случай изменения — перемена места в пространстве (перемещение или движение). Этот случай специально рассмотрим ниже.

Изменения происходят в каких-то областях пространства. Изменяющиеся предметы имеют пространственные размеры. Но говорить о пространственной протяженности изменения как такового без особой договоренности нельзя,— пространственные предикаты вводятся для эмпирических предметов иного типа (к этому вопросу мы еще вернемся). Изменения характеризуются временной протяженностью или длительностью.

Подобно тому, как наблюдение некоторых эмпирических тел позволяет ввести пространственные термины и составить представление о длине, так наблюдение некоторых изменений служит базой представлений о времени и некоторой первичной терминологии относящейся ко времени. Существует также исторически условная и преходящая величина длительности изменения, необходимая для того, чтобы изменение было обнаружено.

Термин «длительность изменения $a$ относительно $\alpha$» будем кратко записывать также символом

$$l\{a,\alpha\}.$$

Всякое эмпирическое изменение совершается во времени, т. е. величина длительности любого эмпирического изменения больше 0. Это — часть определения самого выражения «эмпирическое изменение».

Точнее определение эмпирического изменения запишется так: $a$ есть эмпирическое изменение относительно $\alpha$, если и только если $a$ есть изменение, и $l\{a, \alpha\} > 0$. Следствие определения: если $l\{a, \alpha\} = 0$, то $a$ не есть эмпирическое изменение относительно $\alpha$.

Для некоторых целей достаточно аксиомы:

$$\text{АФ}^2. \vdash A \rightarrow (\forall a)(l\{a,\alpha\} > 0),$$

где $a$ есть переменная для эмпирических изменений, а $\alpha$ — переменная для способов установления временного порядка; $A$ есть «$a$ есть эмпирическое изменение относительно $\alpha$».

Ослабленное определение: $a$ есть эмпирическое изменение, если и только если $a$ есть изменение, и для любого $\alpha$ верно $t\{a, \alpha\} > 0$. Аксиома АФ$^2$ соответственно примет вид:

$$АФ^2. \vdash B \rightarrow (\forall \alpha)(l\{a,\alpha\} > 0),$$

где $B$ есть «$a$ есть эмпирическое изменение».

Пусть $t^1$ есть время, когда зафиксировано состояние $sx$, а $t^2$ — когда зафиксировано состояние $sy$, образующие $sx \Rightarrow sy$. Известны из опыта случаи, когда между $t^1$ и $t^2$ имеется временной интервал $t^3$ такой, что $\sim x \wedge \sim y$. Такое состояние индивида $s\ (\sim x \wedge \sim y)$ будем называть переходным состоянием. Если $x$ есть $P\ (a)$ или $\neg P\ (a)$, а $y$ есть соответственно $\neg P\ (a)$ или $P\ (a)$, то $s\ (\sim x \wedge \sim y)$ есть $s?\ P\ (a)$. Аналогично $s\ (\sim x \wedge \sim y)$ есть $s?E\ (a)$ в случае, если одно из $x$ и $y$ есть $E\ (a)$, а другое — $\neg E\ (a)$.

## § 4. Пространство и время

Надо различать два вида проблем, относящихся к пространству и времени: 1) терминологические, т. е. связанные с установлением значения терминов «пространство», «время», «дальше», «ближе», «раньше» и т. п.; 2) измеренческие (или физические), т. е. связанные с установлением пространственно-временных характеристик предметов. Различие этих аспектов видно хотя бы из такого примера. Если некоторый человек $A$ утверждает, что Иркутск расположен ближе к Москве (по железной дороге), чем Новосибирск, то мы усматриваем в этом не ошибку в употреблении термина «ближе», а в установлении пространственного порядка Иркутска и Новосибирска относительно Москвы по железной дороге.

И если $A$ согласится с тем, что Новосибирск ближе Иркутска, то термин «ближе» он будет употреблять в том же смысле (так же), как и в первом случае.

В силу разделения труда в науке проблемы исследования пространственно-временны́х свойств и отношений предметов стали проблемами физики. Однако физические теории пространства и времени не дают определений пространственно-временно́й терминологии в том смысле, что не вводят эту терминологию в употребление впервые. Они предполагают ее данной и устанавливают методы выяснения пространственно-временны́х отношений предметов для различного рода трудных (сравнительно с обычным житейским опытом) случаев, в частности — для различно движущихся систем, для удаленных событий, для случаев, когда имеет значение скорость распространения сигналов, взаимные перемещения событий и наблюдателей и т. п. При этом явно или неявно предполагаются некоторые базисные случаи, для которых установление пространственно-временны́х отношений проблемы не представляет и на примере которых соответствующая терминология вводится в язык. Например, к базисным случаям относятся такие, когда последовательность наблюдения событий считается точно совпадающей с последовательностью их наступления во времени. Пространственно-временны́е отношения для прочих случаев выясняются путем применения правил логики, математики и физики к тем данным, которые получаются из наблюдения базисных случаев. В качестве одного из условий и следствий физические теории осуществляют экспликацию пространственно-временно́й терминологии для особого рода случаев отношений предметов. При этом происходит следующее любопытное явление.

В случае упомянутой экспликации не происходит введение новых терминов, учитывающих особенности рассматриваемых случаев, а используется та же самая общая терминология, выработанная на основе наблюдений пространственно-временны́х отношений предметов в обычном опыте. В результате происходит неявное наложение двух (по крайней мере) различных совокупностей терминов с известными парадоксальными последствиями.

С другой стороны, на пространство и время перенесли терминологию, выработанную для эмпирических предметов, т. е. фактически стали рассматривать пространство и время как особого рода эмпирические предметы наряду с другими. В частности, стали говорить об изменении пространства и времени, о ходе или движении времени, о сжатии пространства, о замедлении и ускорении хода времени, об обратном течении времени и т. п. Причем эти выражения употребляются не иносказательно, а буквально. В результате в литературе, так или иначе связанной с пространством и временем, сложилась такая хаотическая терминологическая ситуация, что логический анализ самых фундаментальных вопросов терминологии здесь явно был бы не бесполезен.

Попытки ввести пространственно-временные термины путем определения через другие обнаруживают, что для этого требуются термины, не имеющие с точки зрения первичной ясности никаких преимуществ перед пространственно-временными терминами. Кроме того, среди последних имеются такие, которые вообще вводятся в употребление не посредством определений, а иными способами. И применительно к такого рода терминам речь может идти лишь об их экспликации.

Эксплицирующие термины по воспринимаемому виду могут быть тождественны эксплицируемым. Именно так обстоит дело в нашем случае. В этом нет ничего страшного, если постоянно помнить различные роли одних и тех же слов.

## § 5. Пространственно-временные отношения

Простейшие пространственно-временные термины суть термины из области значения знаков $>\alpha$, $<\alpha$ и $=\alpha$. Их отношения друг к другу таковы, как отношение этих знаков в общем случае. Что касается их особенностей, то надо выяснить следующее: что присоединяется к логическим соображениям, когда мы выбираем ту или иную тройку конкретных терминов порядка (например, «раньше — позже — одновременно», «ближе — дальше — на одинаковом расстоянии» и т. п.)?

В общем обо всех простейших пространственно-временных терминах такого рода можно сказать следующее: исследователь имеет особые приспособления (прирожденные способности, если это человек; особые технические средства, если это человекоподобная машина), благодаря которым он фиксирует пространственные и временные отношения, и после достаточно большого числа повторений начинает правильно употреблять соответствующие термины (подобно тому, как люди усваивают большинство слов языка, обозначающих вещи, события, поступки и т. п.). Приспособления, о которых сказано выше,— поворот глаз, поворот тела, смена восприятий и т. п. Все это дологические операции.

Важно отметить различие предметов, которые фигурируют в пространственном и временно́м порядке. В случае пространственного порядка предметы суть эмпирические (воспринимаемые, т. е. видимые, слышимые и т. п.) тела. В случае временны́х отношений предметы суть воспринимаемые изменения (наступления событий, «вспышки», «возмущения» и т. п.).

Некоторые тела и изменения становятся особого рода метками или знаками пространства и, соответственно, времени, если не принимаются во внимание их длины и длительности и принимается во внимание лишь их упорядоченность друг относительно друга и интервалы между ними. Будем в таких случаях говорить о точках пространства и моментах времени. Выражения «в такой-то точке пространства» и «в такой-то момент» не следует понимать, будто соответствующие тела и изменения не имеют длины и длительности. Они учитывают лишь место предметов в пространственном или временно́м порядке.

Та совокупность терминов, о которой говорилось выше, есть совокупность предикатов. Используя ее, можно нечто высказать о пространственно-временны́х свойствах и отношениях эмпирических индивидов. Но ее нельзя использовать в качестве субъектов суждений, т. е. нельзя еще высказать что-либо о пространстве и времени как об особых предметах.

Чтобы ввести термины, обозначающие пространство и время как особые предметы, необходимо проделать еще такие операции по введению терминов.

Пусть эмпирические индивиды $a^1, \ldots, a^n$ образуют пространственную структуру $A$. Возможны по крайней мере три различных смысла термина «данное пространство $A$».

В первом смысле термин «данное пространство $A$» вводится так. Берется пространственная структура $A$ и происходит отвлечение от всех индивидов, находящихся внутри $A$, а также от того, что именно $a^1, \ldots, a^n$ образуют ее. Этому отвлеченно придают наглядную форму допущений, вполне соответствующую обычному опыту: находящиеся внутри $A$ индивиды могут быть изъяты из нее (предельный случай — пустое или чистое пространство без индивидов), любые индивиды подходящего размера могут быть помещены в $A$, индивиды $a^1, \ldots, a^n$ могут быть заменены любыми другими, подходящими для фиксирования границ $A$. В результате под данным пространством $A$ будем иметь в виду лишь то, что заключено между какими-то индивидами, расположение которых аналогично расположению $a^1, \ldots, a^n$ в $A$, после исключения из $A$ всех индивидов. Индивидуальность данного пространства определяется положением $A$.

Таким образом, «данное пространство $A$» в рассматриваемом смысле есть то, что останется, если сохранить только положение $A$, а из $A$ изъять все индивиды (в том числе — и граничные ее точки $a^1, \ldots, a^n$). Так что термин «данное пространство $A$» удобнее было бы читать как «пространство, занимаемое $A$».

Важно здесь следующее: возможно или нет осуществить указанную выше операцию, это никак не влияет на определение термина «данное пространство $A$» и на его правомерность.

Для образования термина, обозначающего данное пространство $A$ в смысле два, осуществляется то же самое, что и в первом случае, за исключением допущений относительно предметов $a^1, \ldots, a^n$: они принимаются во внимание как граничные точки данного пространства. При образовании термина данного пространства $A$ в смысле три допускают, что его образует пространственная структура $A$ с какими-то предметами, которые находятся внутри ее. Здесь возможны варианты: согласно одному из них, в данное пространство $A$ включаются все предметы, находящиеся в $A$, и в этом случае данное пространство $A$ есть кусок материи, заключенный в пространственной структуре $A$; согласно другим, в него включаются лишь какие-то особые виды «тонкой» материи (в частности, такие, которые физически нельзя изъять из $A$ в принципе ни при каких обстоятельствах).

Аналогично обстоит дело с терминами данного времени. Берется временна́я структура $B$, образованная событиями $b^1, \ldots, b^n$ и осуществляются допущения относительно событий $b^1, \ldots, b^n$ и событий внутри $B$, подобные допущениям для терминов данного пространства. Заметим только, что допущения для времени, подобные допущениям для пространства, точно так же имеют наглядную основу в опыте людей. Дело в том, что исследователь фиксирует некоторую пространственную структуру в какое-то определенное время, а временну́ю структуру — в какой-то определенной области пространства. А области пространства, где, повидимому, ничего не происходит («все спокойно»), в какой-то мере встречаются в опыте людей. Точно так же в рамках заданной временной структуры исследователь может вызывать сам подходящие события или препятствовать их наступлению. По крайней мере он может не обращать на них внимания. В третьем смысле данное время $B$ есть мир со всеми (или избранными) событиями во временной структуре $B$.

Термины «данное пространство» и «данное время» образуются (подобно термину «структура») как обобщение терминов, обозначающих конкретные пространства и времена. Конечно, в реальных языках здесь имеет место комплекс разнообразных терминов вроде «интервал», «место», «отрезок», «область пространства» и т. п., но они все — частные случаи, подобно тому как термины «бинарная структура», «тернарная структура» и т. п.— видовые термины для термина «структура».

Но обычно, когда употребляют термины «пространство» и «время» сами по себе, то (в отличие от соотношения термина «структура» и терминов, обозначающих конкретные структуры) имеют в виду не любые конкретные пространства и времена («отрезки» и «объемы» пространства и времени), а их объединение в целое. Для введения этих терминов (скажем, «пространство в целом» и «время в целом») надо допустить пространственную и временну́ю структуры такие, в которые включаются любые данные пространственные и, соответственно, временны́е структуры (в рассмотренном выше смысле). И в отношении этой гипотетической структуры проделать те же допущения, что и в отношении данных пространственных и временны́х структур. Только при этом различие первого и второго смысла терминов теряется. Остается лишь различие первого и третьего: 1) пространство — вместилище всех вещей, время — чистая длительность; 2) пространство — мир всех (или избранных) вещей, время — мир всех (или избранных) событий.

Как видим, обнаруживается явное разнообразие значений терминов. А между тем судьба многих высказываний с пространственно-временно́й терминологией всецело зависит от того, какие определения приняты (явно или неявно) для нее. И от этой зависимости не в состоянии избавить никакие достижения науки. Если, например, высказано утверждение, что пространство в районе такой-то звезды искривлено, то это утверждение еще ровным счетом ничего не значит, пока не сказано, в каком смысле здесь употреблен термин «пространство». Если он употреблен в первом смысле, то это утверждение бессмысленно, ибо искривлен может быть лишь какой-то ряд предметов относительно какого-то другого ряда, а с точки зрения первого понятия пространства все это исключено. Значит термин «пространство» употреблен здесь в третьем смысле. Но в таком случае ничего удивительного в этом нет.

Относительно пространства и времени в целом (т. е. объединения всех пространств и времен) надо заметить еще следующее. Для объединения всех пространственных (временны́х) структур в одну пространственную (временну́ю) структуру требуется один и тот же класс способов установления пространственного (временно́го) порядка для всех структур. А это практически немыслимо. Если же иметь в виду класс всех способов установления порядка (и он действительно будет один), то таковой будет содержать взаимоисключающие способы и потому логически невозможен. Так что все рассуждения о пространстве и времени как о целом (объединении всех пространств и времен) остаются всегда чисто гипотетическими.

Более того, если попытаться придать логически явный вид приведенным выше абстракциям, то обнаруживается следующее интересное обстоятельство.

Абстракцию, осуществляемую для образования термина «данное пространство $A$» в первом смысле, явным образом можно записать так: Если изъять (исключить) из пространственной структуры $A$ все индивиды, находящиеся внутри $A$, и индивиды $a^1, \ldots, a^n$, оставив все остальные без изменения, то то, что останется от $A$, будем называть пространством $A$ (или пространством, занимаемым $A$). В этом утверждении право употреблять термин «пространство $A$» поставлено в зависимость от такого условия, которое невыполнимо. И потому в соответствии со свойствами оператора «если, то» это право реализовать нельзя. Замена «если, то» на выражения «если бы, то», «если бы можно было, то» лишь еще более запутывает дело. Так что приведенные схемы образования терминов пространства логически совершенно несостоятельны. Аналогично для времени.

По нашему мнению, логически корректным является лишь такой путь. Логической экспликации поддаются термины, обозначающие пространственный и временно́й порядок индивидов, термины «пространственная структура», «временна́я структура» и совокупность терминов, которые связаны с ними и которые мы отчасти рассмотрели. Что касается самих слов «пространство» и «время», то они могут быть точно определены лишь как части сложных выражений (если, конечно, есть в этом надобность). Например, так: «Индивид $a$ находится в пространстве $A$» $\equiv Df$. «Индивид $a$ находится внутри пространственной структуры $A$»; «Пространство в области $\alpha$ искривлено» $\equiv Df \cdot x$, где $x$ есть описание данных наблюдения или эксперимента относительно поведения или положения каких-то индивидов в области $\alpha$. Но во всех таких случаях определяются практически выражения, содержащие слова «пространство» и «время», но не сами эти слова как отдельные самостоятельные термины.

## § 6. Кванторы для времени и пространства

Употребляемые в языке выражения «всегда», «в любое время», «иногда», «везде» и т. п. суть неявные кванторы, связывающие термины «интервал времени» («время»), «место во времени» («момент»), «область пространства» («место») и т. д. Если $t$ есть термин «время» (время — временна́я структура или место во временно́м порядке), а $s$ — термин «место» (место — пространственная структура или место в пространственном порядке), то рассматриваемые кванторы явно будут выражаться так:

$$(\forall t)\,x,\ (\forall s)\,x,\ (\exists t)\,x,\ (\exists s)\,x.$$

## § 7. Время существования эмпирического индивида

Высказывания вида «$a$ существует во время $t$» будем записывать символами вида

$$Et,(a)$$

где $t$ есть какое-либо обозначение времени (временно́го интервала или момента), а $Et$ — предикат «существует во время $t$».

Примем далее, что временны́е интервалы (времена) и моменты упорядочены относительно некоторого способа упорядочивания. Для упрощения записи в этом параграфе будем символы $t^1 > t^2$, $t^1 < t^2$ и $t^1 = t^2$ употреблять в смысле соответственно «$t^1$ после (позже) $t^2$», «$t^1$ до (раньше) $t^2$», «$t^1$ и $t^2$ совпадают (суть одно и то же время)».

Частью имплицитного определения выражения «эмпирический индивид» является следующее утверждение: время существования эмпирического индивида локализовано и непрерывно ($X$). Это утверждение означает следующее, Пусть $t^1$ есть время, когда возникает $a$ (перед этим его не было), а $t^2$ — время, когда исчезает или разрушается $a$ (после этого его уже нет). В любое время $t^i$ такое, что $t^i < t^1$, $a$ не существует (утверждение $X^1$). В любое время $t^i$ такое, что $t^i > t^2$, $a$ не существует (утверждение $X^2$). В любое время $t^i$ такое, что $t^2 > t^i$ и $t^i > t^1$, $a$ существует (утверждение $X^3$). Другими словами, $a$ не существует в любое время до $t^1$ ($X^1$), $a$ не существует в любое время после $t^2$ ($X^2$), и если $a$ существует в $t^1$ и в $t^2$, то существует в любое время в интервале между $t^1$ и $t^2$. В отношении времени после $t^2$ уместно даже сказать, что $a$ невозможен в любое время после $t^2$. Утверждение $X$ есть лишь сокращение $X^1 \wedge X^2 \wedge X^3$, т. е. $X \equiv Df \cdot X^1 \wedge X^2 \wedge X^3$. А последнее принимается как аксиома, являющаяся частью имплицитного определения эмпирического индивида.

Утверждения $X^1$, $X^2$ и $X^3$ можно получить как следствия из других аксиом, а именно — таких:

АФ$^3$. Если $a$ существует в $t^1$ и не существует в $t^2$ до $t^1$, то он не существует в любое время до $t^2$.

АФ$^4$. Если $a$ существует в $t^1$ и не существует в $t^2$ после $t^1$, то он не существует в любое время после $t^2$.

Из АФ$^3$ и АФ$^4$ следует: если $a$ существует в $t^1$ и в $t^2$, причем $t^1 > \alpha t^2$ или $t^2 > \alpha t^1$, то $a$ существует в любое время $t^3$ между $t^1$ и $t^2$. Утверждение очевидно: если $a$ не существует в $t^3$, то $a$ не существует в $t^1$, если $t^3 > t^1$, или в $t^2$, если $t^3 > t^2$, а также $a$ не существует в $t^1$, если $t^3 < t^1$, или в $t^2$, если $t^3 < t^2$.

Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — переменные для терминов времени. Утверждения АФ$^3$ и АФ$^4$ можно записать также в следующей форме:

$$\text{АФ}^3.\ \vdash (E\alpha(a) \wedge (\exists\beta)((\beta < \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall\gamma)((\gamma < \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a))$$

$$\text{АФ}^4.\ \vdash (E\alpha(a) \wedge (\exists\beta)((\beta > \alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall\gamma)((\gamma > \beta) \rightarrow \sim E\gamma(a)).$$

Из АФ$^3$ и АФ$^4$ получается утверждение непрерывности времени существования эмпирического индивида:

$$\text{ТФ}^3.\ \vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \to (\forall\beta)(((\beta<\alpha)\wedge(\gamma<\beta))\vee \vee((\beta>\alpha)\wedge(\gamma>\beta)) \to E\beta(a)).$$

Приведем доказательство ТФ$^3$ более или менее полно. Вместо формул АФ$^3$ и АФ$^4$ будем для сокращения писать их номера АФ$^3$ и АФ$^4$. Если какая-либо теорема входит как часть в теорему, следующую за ней по порядку в изложении доказательства, для сокращения будем писать лишь ее номер в доказательстве. Если N — номер некоторой теоремы, имеющей вид N$^1 \to$ N$^2$, то символом (N $\to$) будем записывать ее антецедент N$^1$, а символом ($\to$ N) записывать ее консеквент N$^2$.

Доказательство ТФ$^3$:

1. $(\to \text{АФ}^3) \vdash ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a))$
2. $\vdash ((\to \text{АФ}^3) \to ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a)))$
3. $\vdash \text{АФ}^3 \wedge 2$
4. $(\text{АФ}^3 \wedge 2) \vdash ((\text{АФ}^3 \to) \to ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a)))$
5. $\vdash ((\text{АФ}^3 \to) \to ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a)))$
6. $E\alpha(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)$
7. $(\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash (\exists\beta)((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a))$
8. $E\alpha(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash$ $\vdash (\exists\beta)((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a))$
9. $E\alpha(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash E\alpha(a)$
10. $E\alpha(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \vdash (\text{АФ}^3 \to)$
11. $E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash$ $\vdash E\alpha(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a))$
12. $E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \vdash (\text{АФ}^3 \to)$
13. $\vdash ((E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \to (\text{АФ}^3 \to))$
14. $\vdash 13 \wedge 5$
15. $13 \wedge 5 \vdash (E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a)) \to$ $\to ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a))$
16. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \to ((\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a))$
17. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta<\alpha) \wedge \sim E\beta(a) \wedge (\gamma<\beta) \to \sim E\gamma(a)$
18. $\vdash E\alpha(a) \wedge \sim E\beta(a) \wedge ((\beta<\alpha) \wedge (\gamma<\beta)) \to$ $\to \sim E\gamma(a)$.

Аналогичным образом доказывается формула 19:

19. $\vdash E\alpha(a) \wedge \sim E\beta(a) \wedge ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow$
$\rightarrow \sim E\gamma(a)$

20. $\vdash (18 \rightarrow) \rightarrow E\alpha(a)(\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta) \wedge \sim E\beta(a)$

21. $\vdash (\rightarrow 20) \rightarrow \sim E\gamma(a)$

22. $\vdash E\alpha(a) \wedge (\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta) \wedge E\gamma(a) \rightarrow E\beta(a)$

23. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge ((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \rightarrow E\beta(a)$.

Аналогично получается формула 24:

24. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow E\beta(a)$

25. $\vdash (23 \vee 24) \rightarrow E\beta(a)$

26. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \wedge (((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \vee$
$\vee ((\beta > \alpha) \wedge (\gamma > \beta))) \rightarrow E\beta(a)$

27. $\vdash E\alpha(a) \wedge E\gamma(a) \rightarrow ((((\beta < \alpha) \wedge (\gamma < \beta)) \vee ((\beta > \alpha) \wedge$
$\wedge (\gamma > \beta)) \rightarrow E\beta(a))$

28. $\vdash (\forall\beta)(27)$

29. $\vdash 28 \rightarrow ((27 \rightarrow) \rightarrow (\forall\beta)(\rightarrow 27))$

30. $\vdash (27 \rightarrow) \rightarrow (\forall\beta)(\rightarrow 27)$.

Формула 30 есть ТФ³.

Утверждения 18 и 19 эквивалентны АФ³ и АФ⁴ в том смысле, что если принять 18 и 19 за аксиомы, то АФ³ и АФ⁴ будут теоремами, выводимыми из них.

Если учесть различие отрицаний $\sim$ и $\neg$, то аксиомы АФ³ и АФ⁴ следует заменить такими четырьмя:

1. $\vdash (\text{АФ}^3 (\sim E\beta(a) / \neg E\beta(a)))(\sim E\gamma(a) / \neg E\gamma(a))$
2. $\vdash (\text{АФ}^3 (\sim E\beta(a) / ?\, E\beta(a)))(\sim E\gamma(a) / ?\, E\gamma(a))$
3. $\vdash (\text{АФ}^4 (\sim E\beta(a) / \neg E\beta(a)))(\sim E\gamma(a) / \neg E\gamma(a))$
4. $\vdash (\text{АФ}^4 (\sim E\beta(a) / \neg ?\, E\beta(a)))(\sim E\gamma(a) / ?\, E\gamma(a))$.

## § 8. Существование пространства и времени

Обработка пространственно-временной терминологии не заканчивается введением соответствующих субъектов. Если последние введены, это не означает, что мы можем получать осмысленные высказывания, соединяя их с любыми предикатами. Условия предицирования пространства и времени для целого ряда предикатов еще должны быть определены. Возьмем, например, утверждение о бесконечности пространства. Оно, в частности, имеет смысл как замена для следующего положения: имеется способ установления порядка, относительно которого упорядочиваются пространственные структуры; и этот упорядоченный ряд бесконечен. В противном случае оно не имеет смысла.

Возьмем предикат существования. В каком смысле говорят о существовании пространства и времени? Оставим в стороне различия терминологии, рассмотренные выше, и выделим общее: 1) вопрос о существовании данного пространства и времени и пространства и времени вообще; 2) вопрос о существовании пространственно-временны́х структур.

Первый вопрос принципиальных трудностей не представляет: вопрос о существовании любого пространства (и времени) и вопрос о существовании пространства (времени) вообще совпадают и сводятся к вопросу о существовании некоторого данного пространства (и времени), подобно тому как вопрос о существовании стола вообще сводится к вопросу о существовании какого-то конкретного стола.

Вопрос о существовании структур сводится к вопросу о существовании порядковых отношений, а существование последних определяется в зависимости от существования предметов: отношение $aRb$ существует, если и только если существуют $a$ и $b$ и при этом отношение между ними именно таково, как сказано в утверждении $aRb$. Другие определения существования являются лишь усложнением этой схемы.

Поскольку пространственные структуры суть структуры эмпирических предметов, то из самого определения предиката существования для этих структур следует, что пространство не существует без эмпирических предметов. Но, поскольку не только в обиходе, но и в науке обходятся неявными определениями, это обстоятельство остается скрытым, и положение о невозможности существования пространства без вещей расценивается и как результат наблюдений или как постулат. Совершенно аналогично для времени: время не существует без эмпирических изменений.

Данное пространство $A$ существует для исследователя, если и только если для него существует данная пространственная структура $A$ (или существуют какие-то предметы, образующие пространственную структуру $A$, в случае первого смысла термина). А последняя существует для исследователя, если и только если существуют предметы $a^1$, ...,

..., $a^n$ (или какие-то предметы в соответствующих местах), и порядок их таков, как сказано в определении $A$. Пространство вообще существует для исследователя, если и только если для него существует какое-то данное пространство. Важно заметить, что здесь предполагается существование предметов, образующих данную пространственную структуру, в некоторое данное время (предполагается «одновременность» вещей).

Определения существования для времени аналогичны, только напоминаем, что в них имеются в виду не эмпирические устойчивые вещи, а изменения вещей. И здесь важна разновременность изменений. Изменения, образующие данную временну́ю структуру, наблюдаются исследователем и, следовательно, существуют для него в разное время, а сама временна́я структура существует для него именно тогда, когда она им фиксируется. Так что для исследователя имеет смысл говорить не о времени существования данного времени, а лишь о некоторой пространственной области, в которой исследователь наблюдает изменения, образующие данную временну́ю структуру. Эти измеиения, можно сказать, «однопространственны».

## § 9. Положение индивида в пространстве и времени

Положение индивидов в пространстве и времени определяется их местом в пространственных и временны́х рядах и положением внутри пространственных и временны́х структур. В дальнейшем, употребляя выражения «во время $t$» и «в месте $s$», мы будем иметь в виду какой-то (любой) способ установления положения индивида.

## § 10. Тот же самый индивид

Надо различать два случая употребления термина «тождественный» в отношении индивидов:

1) когда имеется в виду, что индивиды $a$ и $b$ тождественны по каким-то признакам; в частности, здесь может иметь место случай, когда $a$ и $b$ тождественны по всем признакам;

2) когда имеется в виду, что $a$ и $b$ суть один и тот же индивид.

Частный случай, указанный в пункте 1, можно записать так ($P$ — переменная для предикатов):

$$(\forall P)(P(a) \leftrightarrow P(b)).$$

В этом случае, можно сказать, $a$ и $b$ тождественны во всем.

Кажется естественным считать, что если $a$ и $b$ тождественны во всем, то $a$ и $b$ суть один и тот же индивид. Однако выражение «один и тот же индивид» имеет совсем иной смысл. Возьмем такой пример: индивид $a$ имеет признак $P$ во время $t^1$ и не имеет признака $Q$ в это время: затем происходит его изменение, и во время $t^2$ индивид $a$ не имеет $P$, но зато приобретает $Q$. Индивид $a$ остается тем же самым, но индивид $a$ во время $t^1$ и индивид $a$ во время $t^2$ не являются тождественными во всем.

Выражение «один и тот же индивид» определяется совершенно иначе, а именно — так. Индивиды $a$ и $b$ суть один и тот же индивид, если и только если для них имеют силу утверждения (в них $\alpha$ есть переменная для времени, а $\beta$ — переменная для способов установления положения индивида в пространстве):

1) $(\forall\alpha)(\forall\beta)(a = \beta b)$
2) $(\forall\alpha)((E\alpha(a) \leftrightarrow E\alpha(b))$.

Первое утверждение означает: в любое время $a$ тождествен $b$ по пространственному положению относительно любого способа установления пространственного порядка. Второе означает: всегда, когда существует один из $a$ и $b$, существует и другой (т. е. времена их существования совпадают). Из второго по правилу контрапозиции получаем: всегда, когда не существует один из $a$ и $b$, не существует и другой.

Как видим, выражение «тот же самый индивид» практически широко употребимо. Что же касается случая, когда эмпирические индивиды $a$ и $b$ тождественны во всем, то он фактически не может встретиться, поскольку эмпирические индивиды постоянно изменяются так или иначе (это опытное суждение). Лишь для абстрактных индивидов возможно допущение, согласно которому некоторые индивиды не изменяются со временем.

Выражение «тот же самый» выше было определено для индивидов. Оно, далее, должно быть определено для прочих типов эмпирических предметов — классов, скоплений, структур и т. д. Особый интерес здесь для нас представляет определение его для структур.

Возьмем структуру $A$, образованную индивидами $a^1, \ldots$ $\ldots, a^n$, и структуру $B$, образованную индивидами $b^1, \ldots, b^m$.

Для того чтобы считать $A$ и $B$ одной и той же структурой, необходимо следующее: 1) число индивидов $a^1, \ldots, a^n$ должно быть равно числу индивидов $b^1, \ldots, b^m$; 2) для каждого индивида $a^i$ имеется индивид $b^k$ такой, что $a^i$ и $b^k$ — один и тот же индивид; и в обратную сторону, для каждого $b^k$ имеется $a^i$ такой, что $b^k$ и $a^i$ — один и тот же индивид. Но этого мало. Остаются еще отношения между индивидами, образующими каждую структуру. Включать или не включать тождество этих отношений в определение выражения «тот же самый» для структур? В природе вещей не заложено ничего такого, что обязывает нас принять то или иное решение.

Итак, возможны по крайней мере два смысла выражения «тот же самый» применительно к структурам:

1) слабый, при котором считается достаточными для определения указанные выше два пункта (будем говорить «слабо тот же самый»);

2) сильный, при котором помимо упомянутых двух пунктов в определение включается третий пункт — тождество отношений между соответствующими парами индивидов (будем говорить «сильно тот же самый»).

Причем сильный вариант, в свою очередь, дифференцируется: можно ограничиться требованием тождества отношений на уровне предикатов порядка, но можно потребовать еще и совпадения соответствующих интервалов между индивидами. Так, на рис. 8

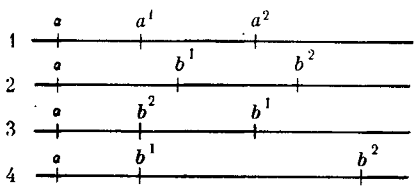


Рис. 8

показано, что отношение порядка сохраняется в том смысле, что в обоих случаях 2 и 4 имеет место $b^2 > ab^1$, но интервал между $b^1$ и $b^2$ изменился. Так что если в паре $a^1$ и $b^1$ и в паре $a^2$ и $b^2$ мы имеем дело с одним и тем же индивидом, то для ответа на вопрос, имеем мы дело с одной и той же структурой или с разными структурами, требуется еще договоренность относительно порядка индивидов и протяженности интервалов. В слабом варианте все структуры 1—4 суть одна и та же структура, в сильном же структуры 1 и 3 не есть одна и та же структура. Если в сильном варианте учитывается также размер интервалов, то все структуры 1—4 попарно не есть одна и та же структура.

Обращаем внимание на то, что отрицанием утверждения «$a$ и $b$ суть тот же самый индивид» есть утверждение «$a$ и $b$ не есть один и тот же индивид», а не утверждение «$a$ и $b$ различны». Дело в том, что $a$ и $b$ могут различаться, но быть одним и тем же индивидом в разное время.

## § 11. Изменение пространства и времени

Возьмем пространственную структуру $A$, образованную предметами $a^1$, ..., $a^n$. Для того чтобы считать $A$, взятую во время $t^1$, и $A$, взятую в другое время $t^2$, одной и той же структурой, необходимо, чтобы для каждого $a^i$ выполнялось следующее: $a^i$, взятый в $t^1$, и $a^i$, взятый в $t^2$, суть один и тот же предмет. Но достаточно это условие или нет? Нужно ли в определении указывать на то, что все отношения между $a^i$ в $t^2$ остаются такими же, как в $t^1$?

Если это второе условие в определении не указывать (не считать его обязательным), то пространственные структуры в силу определений будут иметь возможность изменяться (т. е. утверждение «$A$ изменилась» и другие производные утверждения о величинах изменений, о скорости и т. п., могут быть истинными). Если же это условие считать обязательным, то все пространственные структуры будут неизменны по определениям: если отношения между $a^i$ в $t^2$ не изменились сравнительно с $t^1$, то структура $A$ не изменилась; если же они изменились, то мы не имеем права сказать, что $A$ в $t^1$ и $A$ в $t^2$ суть одна и та же структура, и не имеем условий для применения предикатов изменения.

Второе условие не мешает тому, что происходит смена одних структур другими. И все то, что можно сказать без принятия второго условия, можно сказать и с ним только в несколько иных выражениях (на ином варианте языка).

Заметим, кстати, еще одно интересное обстоятельство. Предмет $a$, взятый в любое время, есть один и тот же предмет $a$. Здесь указание на время не входит в состав термина. Если же мы введем указание на время в термин, т. е. возьмем термин «$a$, взятый в $t^1$» («$a$, который существует в $t^1$») и «$a$, взятый в $t^2$» («$a$, который существует в $t^2$»), и при этом один из $t^1$ и $t^2$ превосходит другой, то обозначаемые ими предметы нельзя рассматривать как один и тот же предмет в силу второго пункта определения. Они суть лишь представители одного и того же класса предметов $a$. Так что если при задании пространственной структуры $A$ фигурируют названия образующих ее предметов только что рассмотренного вида, то условия для применения предикатов изменения исчезают, и все высказывания об изменениях пространственных структур оказываются непроверяемыми.

Обратимся к временны́м структурам. Здесь, для того, чтобы сказать «та же самая временна́я структура», требуется, чтобы были теми же самыми образующие ее события. Возьмем простейший случай — структуру $B$ из двух событий $b^1$ и $b^2$. Время существования $B$ есть само это время. Пусть $b^1$ произошло в $t^1$, а $b^2$ в $t^2$. Пусть интервал между $t^1$ и $t^2$ есть время $t_1$. Чтобы судить об изменении, надо взять ту же самую структуру $B$ в другое время $t_2$. Причем как $t_1$ и $t^1$, так и $t_2$ и $t^2$ суть разные времена. Но по определению существования событий события $b^1$ и $b^2$ не существуют в $t_2$. Если мы возьмем некоторые события, аналогичные $b^1$ и $b^2$, но существующие в $t_2$, они по определениям не существуют в $t_1$. Так что здесь даже независимо от условия, аналогичного второму условию для пространственных структур, все высказывания об изменениях временны́х структур нельзя проверить. Здесь нельзя сказать, что временна́я структура изменилась. Но нельзя сказать, что она не изменилась: чтобы признать, что $B$ не изменилась, нужно воспроизвести те же самые события $b^1$ и $b^2$ в $t_2$, что невозможно. Таким образом, в силу определений наши высказывания как об изменениях времени (об ускорении, замедлении и т. п.), так и о его неизменности являются непроверяемыми.

Но можно ли считать, что принятие таких высказываний является делом безобидным? Ничего подобного. Если мы приняли утверждение, что временны́е структуры изменяются, то в силу смысла соответствующих терминов мы придем к следствиям, противоречащим принятым определениям (например, к заключению, что одно и то же событие осуществляется в разное время). Принятие такого рода высказываний означает неявный отказ от каких-то определений, изменение смысла терминологии и т. п. Это не физические допущения, а всего лишь небрежное обращение со словами.

Единственное, что уместно говорить с точки зрения изменений о временны́х структурах, это изменение временно́го интервала между различными представителями классов событий, изменение порядка представителей классов событий и т. п. Но это ничего общего не имеет с изменением временны́х структур и времени.

Возможна ли такая ситуация, что в одном месте мира время идет иначе (быстрее, медленнее, наоборот), чем в другом? Не говоря уж о том, что вообще бессмысленно говорить о движении времени, если строго относиться к словам и рассматривать движение как вид изменения, здесь присоединяются слова, являющиеся результатом сравнения (например, слово «быстрее»). Оставим в стороне указанную бессмысленность и сформулируем проблему приемлемым образом так: пусть события $a^1$ и $a^2$ суть элементы класса событий $Ka$ (т. е. однородные события), а $b^1$ и $b^2$ – класса $Kb$. Пусть измерение времени между $a^1$ и $a^2$ дало результат $a^1(R^1\alpha)\,a^2$, а между $b^1$ и $b^2$ — результат $b^1(R^2\beta)b^2$. Чтобы сравнить эти времена, необходим единый способ установления временно́го отношения $\gamma$ как для пары событий $a^1$ и $a^2$, так и для пары $b^1$ и $b^2$. Лишь после того, как мы получим $a^1\,(R^3\gamma)\,a^2$ и $b^1(R^4\gamma)\,b^2$, мы можем высказать свои суждения о временно́м отношении $a^1$ и $b^1$, с одной стороны, и $a^2$ и $b^2$, с другой стороны, осуществив их сравнение. Например, мы можем сказать, что в некоторой области пространства $A$ сначала происходит $c$ и затем $d$, а в области пространства $B$ — наоборот, причем в $A$ интервал между $c$ и $d$ вдвое больше, чем в $B$.

Изменение продолжительности существования индивидов с изменением некоторых условий не есть изменение хода времени. Так, от изменения скорости движения зависит продолжительность существования некоторых микрочастиц. Но видеть в этом пример изменения (замедления или ускорения) хода времени правомерно в такой же мере, как в случае изменения продолжительности жизни людей в зависимости от изменения характера питания.

Рассмотрим, наконец, такой случай. Пусть взята пара одинаковых часов $\alpha$ и $\beta$. Слово «одинаковые» здесь есть ни к чему не обязывающее литературное выражение. Точнее, следует сказать, что часы однородны или принадлежат к одному классу. Пусть $\alpha$ оставлены на Земле ($A$), а $\beta$ помещены на тело $B$, которое во время $t^1$ покидает Землю, движется каким-то образом и во время $t^2$ возвращается на

Землю. Пусть показания $\alpha$ и $\beta$ оказываются различными (в $\alpha$ произошло нечто, характеризуемое величиной $x$, а в $\beta$ — величиной $y$, причем $x$ и $y$ не равны).

Что можно высказать об указанном факте, соблюдая правила осмысленности употребляемых выражений? Наблюдатель, осуществляющий сравнение $\alpha$ и $\beta$ и имеющий какой-то способ измерения времени, в котором он фиксирует $t^1$, $t^2$ и интервал $z$ между ними, может сказать следующее: показания $\alpha$ и $\beta$ различны; за одно и то же время $z$ в $\alpha$ осуществился некоторый процесс, фиксируемый величиной $x$, а в $\beta$ — процесс того же рода, фиксируемый величиной $y$; этот процесс в одних из часов $\alpha$ и $\beta$ протекал медленнее (быстрее), чем в других из них. На вопрос о том, сколько прошло времени, нужно поставить другой вопрос: относительно какого способа отсчета времени? И только при этом условии можно дать такие ответы, не противоречащие друг другу: 1) за время $z$ прошло время, которое характеризуется величиной $x$ (прошло времени $x$), относительно $\alpha$, установленных на $A$; 2) за время $z$ прошло время $y$ относительно $\beta$, установленных на $B$; 3) прошло время $z$ относительно некоторого способа установления временны́х отношений; 4) прошло время $x$ относительно $\alpha$ на $A$; 5) прошло время $y$ относительно $\beta$ на $B$. Пункты 1—5 могут попарно совпадать и различаться, что не играет роли. Но невозможны имеющие смысл выражения «Для $A$ и $B$ прошло разное время», «Для $A$ и $B$ время текло с различной скоростью» и т. п., ибо они предполагают сравнение и одно и то же время, без которого указанное сравнение логически исключено.

Таким образом, дело не в том, что утверждение о замедлении или ускорении времени неверно. Дело в том, что здесь одинаково бессмысленно как само такое утверждение, так и его отрицание. Здесь имеют место языковые конструкции, похожие на высказывания, но таковыми не являющиеся, ибо входящие в них выражения не имеют смысла (не являются терминами). А бессмыслицу нельзя доказать (подтвердить) и нельзя опровергнуть.

Если для каких-либо предметов прошло времени $x$ относительно некоторого способа установления временны́х отношений $\alpha$, то для любых предметов за это же время прошло времени $x$ относительно $\alpha$. Это утверждение есть логическая тавтология, только это обстоятельство здесь скрыто за нестрогой словесной формулировкой. Оно иначе (и более явно) может быть сформулировано так: для любого предмета

$a$, если для $a$ можно измерить время способом $\alpha$ и если при этом получается величина $x$, то величина времени для $a$ относительно $\alpha$ характеризуется величиной $x$.

## § 12. Необратимость времени

Вопрос об обратимости и необратимости времени есть часть вопроса об изменении времени. Мы его выделили здесь, чтобы обратить внимание еще на одну деталь.

Вопрос об обратимости и необратимости времени смешивают с вопросом об обратимости и необратимости процессов. Но если даже на минуту признать, что это — одна и та же проблема, мы должны считаться с такими фактами.

Если мы наблюдаем превращение $A$ в $B$, а затем обратное превращение $B$ в $A$, это не будет возврат во времени: если в $t^1$ наблюдается $A$, а затем в $t^2$ имеет место $B$, то обратное превращение $B$ в $A$ возможно лишь во время $t^3$, следующее за $t^1$ и $t^2$. Кроме того, то $A$, которое превращалось в $B$, и то $A$, в которое превратилось $B$, это не один и тот же предмет в силу определения выражения «один и тот же предмет». В результате $B \Rightarrow A$ получается предмет такой же, как $A$ (того же класса), но не тот же $A$.

Необратимость времени не имеет никаких физических оснований. Временна́я терминология вырабатывается так ( и для таких отношений предметов), что в силу самого способа выработки этой терминологии приходится признать необратимость времени во избежание конфликта с определениями терминов.

Пусть интервал времени $t^1$ имеет место позже, чем $t^2$ (т. е. все изменения, происходящие в $t^1$, происходят позже всех изменений, происходящих в $t^2$). Выражение «время обратимо» означает (в простейшем случае) следующее: возможны такие $t^1$ и $t^2$, для которых можно изменить временно́е отношение на обратное (т. е. сделать так, что $t^2$ будет иметь место позже, чем $t^1$). Причем постоянно предполагается одна и та же точка отсчета времени (что здесь не играет роли). Пусть $t^1 > t^2$ означает, что $t^1$ позже $t^2$, а $t^2 > t^1$ — наоборот, что $t^2$ позже $t^1$. Обернуть время — значит в некоторое время иметь $t^1 > t^2$, а в другое — $t^2 > t^1$.

Чтобы ответить на вопрос о том, возможно или нет обернуть время, надо, как видим, сами временны́е интервалы (и моменты) рассматривать как индивиды и установить, что́ будет называться временем существования времени.

Мы не будем восстанавливать все тонкости, связанные с переносом принятых выше определений на такого рода индивиды. Приведем лишь очевидный результат: время существования данного времени $t$ есть само это время $t$. Так что $t^1$ не существует в $t^2$, а $t^2$ не существует в $t^1$. Если $t^2$ не существует в $t^1$, то $t^2$ не будет больше существовать никогда. Так что во время $t^3$, когда мы хотим получить $t^2 > t^1$, не будет существовать ни $t^2$, ни $t^1$ (поскольку $t^3 > t^1$). Так что $t^1$ и $t^2$ неповторимы, и отношение между ними изменить уже нельзя. Сказанное можно для большей убедительности переформулировать, заменив $t^1$ и $t^2$ скоплениями изменений в $t^1$ и $t^2$, которые индивидуальны и, значит, неповторимы.

## § 13. Об отношении порождения

Пусть индивид $A$ улетел с Земли во время $t^1$ и вернулся во время $t^2$. По самому смыслу слова «вернулся» время $t^2$ следует за $t^1$ относительно некоторой точки отсчета времени $\alpha$. Если индивид $B$ существовал в $t^1$ или до $t^1$ и не существует в $t^2$, то согласно АФ$^3$ и АФ$^4$ этот индивид никогда не будет существовать после $t^2$. Так что если $B$ есть отец или мать индивида $A$, то по крайней мере можно сказать следующее: куда бы $A$ ни улетал и как бы он ни летал (и что бы с ним ни случилось в пути), если он вернувшись, не находит в живых своих родителей, то они никогда уже не появятся на свет, причем наша уверенность в этом вытекает из анализа терминов, в которых формулируются наши утверждения.

Отношение детей и родителей есть частный случай отношения «порождает». Для этого отношения по определению имеет силу следующее: если $a$ порождает $b$, то для любого способа установления временно́го порядка индивид $a$ возникает раньше, чем $b$. Если $\alpha$ и $\beta$ суть переменные времени, а $a$ и $b$ — индивидные переменные, то сказанное можно записать так: если $a$ порождает $b$, то для любого способа отсчета времени

$$(\exists\alpha)(\exists\beta)(E\alpha(a) \wedge \neg E\alpha(b) \wedge E\beta(b) \wedge (\beta > \alpha)).$$

Мы здесь не рассматриваем смысл термина «порождает» полностью. Но приведенное утверждение есть часть возможного имплицитного определения его. Если это определение не принимать, то либо отношение детей и родителей не будет частным случаем порождения, либо разговоры на этот счет теряют всякий смысл.

## § 14. Непрерывность пространства и времени

Непрерывность пространства и времени не сводятся к непрерывности рядов эмпирических предметов в пространстве и времени. Они непрерывны в таком смысле: между любыми пространственными (временными) структурами заключены также пространственные (временные) структуры. Уточним это понимание.

Рассмотрим сначала интервалы. Пусть $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ — пространственные интервалы, причем $b > \alpha c$. Возможны два пути. Первый: принять, что при заданных условиях также $\{b, c, \alpha\}$ — пространственный интервал. Но при этом возникает вопрос: как быть с $\{a, d, \alpha\}$? Чтобы признать его пространственным интервалом, требуется еще одна аксиома (аксиома сложения интервалов): если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, c, \alpha\}$ суть пространственные интервалы, то $\{a, c, \alpha\}$ — также пространственный интервал. Второй путь: принять, что при заданных условиях $\{a, d, \alpha\}$ также есть пространственный интервал. Но при этом возникает вопрос относительно $\{b, c, \alpha\}$. Чтобы признать его пространственным интервалом, необходима еще аксиома (аксиома деления интервалов); если $a > \alpha b$ и $b > \alpha c$ и при этом $\{a, c, \alpha\}$ — пространственный интервал, то $\{a, b, \alpha\}$ и $\{b, c, \alpha\}$ — пространственные интервалы. Совершенно аналогично для времени. Приведенные два пути эквивалентны.

Если принята аксиома сложения интервалов, то должна быть принята следующая аксиома $X^1$, с помощью которой можно определить непрерывность пространства на уровне интервалов: если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ суть пространственные интервалы и при этом $b > \alpha c$, то $\{b, c, \alpha\}$ также есть пространственный интервал. Назовем $X^1$ аксиомой непрерывности. Определение непрерывности пространства примет такой вид: «пространство непрерывно» $\equiv Df. X^1$. Аналогично для времени.

Если принята аксиома деления интервалов, то должна быть принята следующая аксиома непрерывности $X^2$: если $\{a, b, \alpha\}$ и $\{c, d, \alpha\}$ — пространственные интервалы и при этом $b > \alpha c$, то $\{a, d, \alpha\}$ — также пространственный интервал. Непрерывность пространства определится так:

«пространство непрерывно» $\equiv Df. X^2$. Аналогично для времени.

Если для времени приведенное определение кажется достаточным (время представляется «неплоскостным» и «необъемным»), то для пространства требуется более общее определение, учитывающее любые пространственные структуры. Заметим, что это требуется и для времени, если учесть разнопространственность способов отсчета времени. Во всяком случае, в приводимом ниже определении для времени можно иметь в виду лишь бинарные структуры с общим способом установления порядка (привычный частный случай).

Для структур нам известны такие соотношения: одна структура есть подструктура другой и одна структура находится внутри другой (если все элементы первой находятся внутри другой). Второе сводится к первому таким образом. Если структура $A$ находится внутри структуры $B$ относительно некоторого класса способов установления порядка $\alpha$, то: 1) элементы $A$ образуют структуру $A^*$ относительно $\alpha$, а элементы $B$ образуют структуру $B^*$ относительно $\alpha$; 2) элементы $A$ и $B$ образуют структуру $C$ относительно $\alpha$; 3) $A^*$ есть подструктура $C$ и $B^*$ есть подструктура $C$. Так что в дальнейшем достаточно ограничиться соотношением структуры и подструктуры.

Примем следующую аксиому сложения пространственных структур АФ[5]: если $A$ и $B$ — пространственные структуры, $C$ — структура относительно $\alpha$, $A$ и $B$ — подструктуры $C$ относительно $\alpha$, то $C$ также есть пространственная структура (т. е. сложение пространств дает пространство или сумма пространств есть пространство). Аналогично для времени (сложение времен дает время; сумма времен есть время).

Примем следующую аксиому непрерывности пространства АФ[6]: если $A$ и $B$ — пространственные структуры относительно $\alpha$, $C$ — структура, образованная относительно $\alpha$ из элементов $A$ (причем из $A$ взят по крайней мере один элемент) и элементов $B$ (также взят по крайней мере один элемент $B$), то $C$ есть пространственная структура относительно $\alpha$ (т. е. между любыми пространствами заключено пространство). Аналогично для времени (между любыми временами заключено время).

Другой вариант — с аксиомой деления пространства и времени. Если принят первый, то второй получается как следствие. И наоборот.

## § 15. Инвариантность пространства и времени

Пространство и время инвариантны в смысле следующей аксиомы: если $A$ есть пространственная (временна́я) структура относительно $\alpha$, и $A^*$ есть структура, образованная из элементов $A$ относительно $\beta$, то $A^*$ также есть пространственная (соответственно, временна́я) структура.

Сказанное можно истолковать так: пространство всегда остается пространством (а время — временем), независимо от способа его ограничения, отсчета, измерения и т. п.

## § 16. Тождество и различие места и времени

Пусть $A$ и $B$ — пространственные структуры относительно $\alpha$. Высказывания «Индивид находится во время $t$ внутри $A$ (внутри $B$) относительно $\alpha$» будем кратко записывать буквами соответственно $x$ и $y$. Примем определения:

1) $A$ и $B$ пересекаются относительно $\alpha$ во время $t$, если и только если $(\exists I)\ (x \wedge y)$.

2) $A$ и $B$ совпадают относительно $\alpha$ во время $t$, если и только если $(\forall I)\ (x \wedge y)$.

Аналогичные определения имеют силу для временны́х структур, с той лишь разницей, что выражение «время $t$» повсюду заменяется на «место $s$».

Из определений 1 и 2 следует:

3) $A$ и $B$ не пересекаются относительно $\alpha$ во время $t$, если и только если $(\neg\exists I)\ (x \wedge y)$.

4) $A$ и $B$ не совпадают относительно $\alpha$ во время $t$, если и только если $(\neg\forall I)\ (x \wedge y)$.

Большинство людей принимает утверждение: физическое тело не может одновременно находиться в разных местах. Но поставьте вопрос: почему не может? И вы, как правило, услышите в ответ: так устроена природа.

Но природа здесь на самом деле совершенно ни при чем. И приведенное утверждение не так уж бесспорно, если разобраться в том, что оно означает. На самом деле это утверждение принимается лишь постольку, поскольку неявно принимается некоторое определение терминов «разные места» и «в то же самое время».

Выражения «разные места» и «разные времена» неоднозначны: они могут означать, что некоторые пространственные (временны́е) структуры не пересекаются, и могут означать, что они не совпадают. А выражения «одно и то же место» и «одно и то же время» могут означать, что пространственные (временны́е) структуры пересекаются и могут означать, что эти структуры совпадают.

Кроме того, тождество и различие мест и времен понимается как тождество и различие предметов по пространственному и временно́му порядку, т. е. как тождество и различие точек пространства и моментов времени в пространственном и временно́м порядке предметов. Так, что, например, выражение «$a$ одновременно $b$» может означать $a = \alpha b$, где $\alpha$ — способ отсчета времени, а также то, что временны́е интервалы, в которых существуют $a$ и $b$, совпадают.

Если принято определение, согласно которому $A$ и $B$ суть разные места, если и только если они не пересекаются, то из утверждения 3 получим в качестве следствия: эмпирический индивид не может находиться одновременно в разных местах. Причем одновременность здесь понимается как тождество моментов или совпадение временны́х интервалов. Если же разные места определены более «слабо», лишь как несовпадающие места, или разные времена определены как несовпадение временны́х интервалов, то не исключена возможность нахождения индивида в одно и то же время в разных местах (если он находится в их общей части).

## § 17. Предицирование изменений

Изменение $sx \Rightarrow sy$ исследуется как особый предмет $s(sx \Rightarrow sy)$, и ему приписываются предикаты. Последние при этом должны быть в ряде случаев специально определены, а именно — тогда, когда учитывается особенность этого логического типа эмпирического предмета.

Изменение рассматривается как дискретное, если не принимается во внимание переходное состояние. Если допускается, что переходного состояния вообще нет, то допускается абстрактное изменение. Изменение рассматривается как недискретное, если принимается во внимание переходное состояние, и последнее в свою очередь рассматривается как скопление изменений и т. д. до тех пор, пока не дойдем до непрерывного ряда промежуточных изменений. Таким образом, предикаты «дискретный» и «недискретный» в применении к изменению приобретают дополнительный сравнительно с их применением к рядам оттенок, а именно — указание на способ нашего анализа.

Изменение $s$ ($sx \Rightarrow sy$) существует (осуществляется) в интервале времени $t$, если и только если имеет место следующее:

1) в $t^1$ существует $sx$ (и не существует $sy$);

2) затем во время $t^2$ существует $s$ ($\sim x \wedge \sim y$);

3) затем во время $t^3$ существует $sy$ (и не существует $sx$);

4) $t^1$, $t^2$, $t^3$ образуют непрерывный ряд;

5) $t$ есть временной интервал, в который включается интервал между $t^1$ и $t^3$, а также примыкающие к нему части $t^1$ и $t^3$, которые необходимы и достаточны для существования $sx$ и, соответственно, $sy$; $t$ есть при этом собственное время $s(sx \Rightarrow sy)$.

Изменение $s$ ($sx \Rightarrow sy$) существует только в собственное время $t$. Как только оно произошло, оно перестает существовать как особый индивид. Оно как индивид не существует в любое время до $t^1$ и в любое время после $t^3$.

Предикат $\Rightarrow$ является двухместным. Но употребляется и одноместный предикат «изменяется», «изменился» и т. п. (будем его изображать символом $\Downarrow$), который можно определить следующим образом: $\Downarrow(a)$, если и только если возможно какое-то высказывание, которое содержит в качестве субъекта $a$ и которое истинно в одно время и неистинно в другое; причем это высказывание не есть $E$ ($a$) и $\neg E$ ($a$), т. е. существование $a$ предполагается.

Таким образом, предикат $\Downarrow$ есть лишь модификация $\Rightarrow$ для особых случаев.

Применимы ли предикаты изменения к самому изменению? Вопрос далеко не праздный, поскольку с неясностью в такого рода случаях употребления терминологии связаны различного рода спекуляции.

Что можно иметь в виду, применяя предикаты $\Rightarrow$ и $\Downarrow$ к изменению $s$ ($sx \Rightarrow sy$)? Возможны такие случаи: 1) $sx$ превращается не в $sy$, а в $sz$; 2) $sx$ превращается в $sy$, но иначе. В первом случае имеет место другое изменение $s$ ($sx \Rightarrow sz$). Во втором случае встает вопрос: сравнительно с чем иначе? Если $s$ ($sx \Rightarrow sy$) произошло, то оно уже не существует и не будет существовать никогда. Значит речь может идти лишь о сравнении случаев изменения одного класса.

Пусть $sx^1 \in Kxs$, $sx^2 \in Ksx$, $sy^1 \in Ksy$ и $sy^2 \in Ksy$. Пусть происходят или могут происходить изменения $s$ ($sx^1 \Rightarrow sy^1$) и $s$ ($sx^2 \Rightarrow sy^2$). Эти изменения суть элементы одного и того же класса изменений $Ks$ ($sx \Rightarrow sy$). Они могут различаться по самым различным признакам — по месту, по продолжительности и т. п. Но это не есть изменение каждого из $s(sx^1 \Rightarrow sy^1)$ и $s(sx^2 \Rightarrow sy^2)$.

Таким образом, применить предикаты изменения к самим изменениям просто невозможно — соответствующие высказывания бессмысленны.

Для предиката изменения имеют силу утверждения, входящие в его имплицитное определение, в частности — такие:

1. $\vdash (sx \Rightarrow sy) \rightarrow \sim (sx \Rightarrow s \sim y)$
2. $\vdash (sx \urcorner \Rightarrow sy) \leftrightarrow \sim (sx \Rightarrow sy)$
3. $\vdash \sim (sx \Rightarrow sy) \rightarrow x \vee ((sx \Rightarrow sz) \wedge \sim (y \wedge z))$
4. $\vdash \sim y \rightarrow \sim (sx \Rightarrow sy)$
5. $\vdash x \rightarrow \sim (sx \Rightarrow sy)$
6. $\vdash (sx \Rightarrow sy) \rightarrow (sx \Rightarrow s \sim x) \wedge (s \sim y \Rightarrow sy)$.

Последнее читается так: «Если $sx$ превращается в $sy$, то $sx$ исчезает и $sy$ возникает в то же самое время». Частный случай: «Если предмет $a$ превращается в $b$, то в то же самое время исчезает $a$ и возникает $b$».

## § 18. Перемещение

Перемещение тел в пространстве (движение) есть частный случай изменения.

Предикат $\Rightarrow$ в случае перемещения имеет такой смысл. Пусть $x$ есть высказывание «Тело $a$ находится в месте $\alpha$», $y$ есть высказывание «Тело $a$ находится в месте $\beta$», $\alpha$ и $\beta$ суть разные места, состояние $sx$ по времени предшествует $sy$. При этом $sx \Rightarrow sy$ читается сокращенно так: «Тело $a$ переместилось (перемещается) из места $\alpha$ в место $\beta$».

Выражение $\Downarrow(a)$ («Тело $a$ перемещается (движется)») двусмысленно. Оно может означать, что имеет место переходное состояние $s(\sim x \wedge \sim y)$. Но его можно эксплицировать так: в данное время $t$ может быть указана область пространства $\alpha$ такая, что неверно «Тело $a$ находится в $\alpha$» и неверно «Тело $a$ не находится в $\alpha$».

Выражение «$a$ переместилось из $\alpha$ в $\beta$» по определению означает, что в некоторое время $t^1$ предмет $a$ находился в месте $\alpha$, а во время $t^2$ — в месте $\beta$, причем $t^2 > t^1$. Выражение «$a$ не переместилось из $\alpha$ (пребывает в $\alpha$)» означает, что $a$ находился в $\alpha$ как в $t^1$, так и в $t^2$, причем в любое время между $t^1$ и $t^2$ предмет $a$ был в $\alpha$.

Но возникает вопрос: возможно или нет, чтобы один прибор или человек $A$ отметил нахождение $a$ в месте $\alpha$ во время $t$, а другой прибор или человек $B$ отметил нахождение $a$ в другом месте $\beta$ в то же самое время $t$? Вспомним определение разных мест. Согласно этому определению: если $\alpha$ и $\beta$ суть непересекающиеся места, то $a$ не может находиться одновременно в разных местах с точки зрения одного и того же способа установления порядка. Так что если различие $A$ и $B$ означает различие способов установления порядка, то мы не можем считать $\alpha$ и $\beta$ разными местами. А если различие $A$ и $B$ есть различие в рамках одного и того же способа установления порядка, то указанная выше ситуация невозможна.

Если принято определение разных мест как непересекающихся (не имеющих общих «точек»), то из него логически следует невозможность мгновенных перемещений. Перемещение тела $a$ из места $\alpha$ в другое место $\beta$ считается мгновенным, если и только если $a$ находится во время $t$ в $\alpha$ и в то же самое время оказывается в $\beta$. Но если по определению разных мест никакое тело $a$ не может находиться сразу в $\alpha$ и $\beta$, то мгновенное перемещение невозможно. Так что допущение мгновенных перемещений есть чисто физическое допущение. Оно правомерно лишь как намерение не учитывать время, затраченное в том или ином случае на перемещение, или как допущение абстрактных предметов, способных перемещаться вне времени.

## § 19. Парадокс движения

Движение, т. е. перемещение тел в пространстве, есть лишь частный случай изменений предметов. На него распространяется все, сказанное выше об изменении вообще. Ниже мы рассмотрим известный парадокс движения «Движущееся тело находится и в то же самое время не находится в данном месте пространства».

В большинстве случаев на вопрос «Может ли физическое тело находиться и в то же самое время не находиться в данном месте?» отвечают отрицательно. И в большинстве случаев мотивы отрицательного ответа заслуживают критики.

Физическое тело не может находиться и в то же самое время не находиться в данном месте потому, что таков мир,—

так часто отвечают на поставленный выше вопрос. Действительно, в нашем опыте не встречаются случаи, противоречащие такому ответу. И никогда не встретятся. Но причина этого принципиально отличается от причин того, что не встречаются лошади с десятью рогами и зайцы с лошадиными копытами. Причина этого заключается в том, что мы употребляем знаки «и» и «не», а высказывание «Физическое тело находится в данное время в данном месте» есть частный случай высказывания. И никакой иной премудрости здесь не заключено.

Трудность устранения всяких парадоксов заключается прежде всего в том, чтобы строго описать, как они получаются. Так обстоит дело и в данном случае. Откуда берется утверждение «Движущееся тело находится и в то же самое время не находится в данном месте»? Является результатом эмпирического наблюдения? Нет. Логически невозможное невозможно и фактически, а невозможное (и несуществующее) нельзя наблюдать. Значит оно принимается как аксиома или получается как следствие из других утверждений. Как аксиома оно не может быть принято, поскольку оно логически противоречиво (неистинно в силу свойств конъюнкции «и» и отрицания «не»). Значит оно есть следствие каких-то других допущений. Каких именно?

Эмпирически замечены случаи, когда о перемещающемся предмете нельзя сказать, что он находится в некотором месте, и нельзя сказать, что он не находится в этом месте, т. е. когда имеет место переходное состояние. Если $P(a)$ есть высказывание «$a$ находится в $\alpha$», то в отношении переходного состояния верно высказывание

1. $\sim P(a) \wedge \sim \urcorner P(a)$.

Но если не различают два отрицания, т. е. не различают $\sim$ и $\urcorner$, а последнее воспринимают как $\sim$, то переходное состояние ошибочно описывают высказыванием

2. $\sim P(a) \wedge \sim \sim P(a)$.

Поскольку имеют силу правила логики

3. $\sim \sim P(a) \dashv\vdash P(a)$,

из 2 и 3 получается

4. $\sim P(a) \wedge P(a)$.

А если принято 2, то нужно принимать и 4. Отсюда по правилам $K^i$ и $B^i$ следует, что

5. $(\exists x)(\sim P(x) \wedge P(x))$
6. $\sim (\forall x)(P(x) \vee \sim P(x))$,

где $x$ есть индивидная переменная, т. е., что закон исключенного третьего $\vdash A \vee \sim A$ верен не для всех индивидов.

Парадокс есть результат ошибки, суть которой заключается в следующем: с самого начала допускается неклассический случай, для которого неверны утверждения

$$\vdash P(a) \vee \urcorner P(a)$$
$$\sim \urcorner P(a) \vdash P(a),$$

поскольку предполагаются три возможности

$$P(a), \urcorner P(a), \sim P(a) \wedge \sim \urcorner P(a),$$

а применяют правила для классического случая, для которого отрицания $\urcorner$ и $\sim$ не различаются, а значит верны упомянутые утверждения, поскольку допускаются лишь две возможности

$$P(a), \urcorner P(a).$$

## § 20. Процесс

Процесс есть упорядоченный во времени ряд изменений, обладающий такими свойствами. Пусть $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ есть любая пара соседних элементов этого ряда. Если состояние $a$ существует в $t^a$, $b$ — в $t^b$, а $c$ — в $t^c$, то $t^c > t^b$ и $t^b > t^a$. Состояния $a$, $b$ и $c$ суть состояния одного и того же индивида $A$.

Вопрос о существовании процесса решается в зависимости от определения термина, обозначающего его. Например, процесс $B$ может быть определен так: это — последовательность изменений предмета $A$ такая, что $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$. Очевидно, $B$ существует, если и только если существуют $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ в соответствующем временно́м порядке. Но процесс $B$ может быть назван так: «процесс индивида $A$». Для существования такого процесса достаточно, чтобы существовало по крайней мере одно изменение индивида $A$. Одним словом, вопрос о существовании процесса решается в зависимости от типа термина, обозначающего его.

С процессами связаны парадоксы. Процесс, не имеющий начала, не начинается и, значит, не существует (не происходит). Но считается, что процесс изменений в мире не имеет начала (бесконечен в прошлое), однако он существует. Если процесс состоит из бесконечного числа изменений, то он не заканчивается. Считается, однако, что любой закончившийся процесс можно без конца разлагать на составные изменения.

Чтобы разобраться в этих парадоксах, необходимо прежде всего отметить, что выражение «процесс не имеет начала (не начинается)» двусмысленно. Процесс может не иметь начала как ряд изменений, не имеющий начального элемента. И процесс может не иметь начала в том смысле, что индивид пребывает все время (данное или вообще) в некотором состоянии, и последнее не превращается в другое состояние. Например, процесс из изменений $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow c$ не имеет начала во втором смысле, если состояние $a$ сохраняется во время $t^b$ и $t^c$.

Очевидно, что если процесс не имеет начального элемента (т. е. для любого его элемента $\alpha$ найдется другой элемент $\beta$, который предшествует ему), из этого не следует, что он не существует. Если же процесс не начинался, т. е. некоторое состояние индивида не сменялось другими состояниями, то согласно определению существования процесса такой процесс не существует. Указанный выше первый парадокс есть результат смешения понятий, т. е. обычной логической ошибки.

Что касается второго парадокса процесса, то рассмотрим такой простейший случай. Пусть произошло изменение $a \Rightarrow b$. Анализ его может обнаружить, что это изменение есть процесс из изменений

$$a \Rightarrow c^1,\ c^1 \Rightarrow c^2, \ldots, c^n \Rightarrow b.$$

И кажется, что каждое изменение этого процесса можно анализировать аналогично, так что всякое изменение можно представить как процесс из бесконечного числа изменений. Но на каждое изменение нужно время. А если последнее больше нуля и конечно, то потребуется бесконечное число изменений, а оно не может закончиться. Значит изменение $a \Rightarrow b$ невозможно. Но также невозможно и каждое изменение данного процесса.

Этот парадокс есть результат смешения абстрактных и эмпирических процессов. В случае абстрактных процессов допускаются изменения, на которые не требуется время или которые могут быть как угодно быстрыми. И затем результаты рассуждений для абстрактных процессов переносятся на эмпирические процессы, что не всегда правомерно, а в данном случае ошибочно.

## § 21. Минимальная протяженность

Для абстрактных предметов принимаются допущения, согласно которым протяженность предметов может быть равна нулю, а для каждого интервала между предметами, который больше нуля, имеется другой интервал, который меньше первого и больше нуля. В таких допущениях нет ничего страшного, если не забывать, что это относится лишь к абстрактным предметам. Если $x$ и $y$ суть переменные для интервалов, то указанные допущения можно записать так:

1. $(\exists x)(x = 0)$
2. $(\forall x)(\exists y)((x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x > y))$.

Для эмпирических предметов дело обстоит иначе. Здесь имеет место следующее: индивиды $a$ и $b$ либо соприкасаются, либо нет. Если соприкасаются, то между ними нет никаких индивидов и невозможно поместить никакой индивид. Если же неверно, что они соприкасаются, то надо учесть следующее.

Выражение «интервал $\{a, b, \alpha\}$» уместно лишь при том условии, что $a > \alpha b$. Но в таком случае исключается $\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a)$, так как

$$\vdash (a > \alpha b) \rightarrow (a > \alpha b) \vee (b > \alpha a)$$
$$(a > \alpha b) \vee (b > \alpha a) \rightarrow \sim (\sim (a > \alpha b) \vee \sim (b > \alpha a))$$
$$\vdash (a > \alpha b) \rightarrow \sim (\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a)).$$

Исключается также $(b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)$, так как

$$\vdash (b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a) \rightarrow (b > \alpha a)$$
$$\vdash (a > \alpha b) \rightarrow \sim (b > \alpha a)$$
$$\vdash ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a) \rightarrow (b > \alpha a)) \rightarrow ((\sim (b > \alpha a) \rightarrow$$
$$\rightarrow \sim ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)))$$
$$\vdash \sim (b > \alpha a) \rightarrow \sim ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a))$$
$$\vdash (a > \alpha b) \rightarrow \sim ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)).$$

В результате получим, что при условии $a > \alpha b$

$$\vdash \sim (a \| \alpha b) \leftrightarrow (\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a)) \vee$$
$$\vee \sim (\urcorner MI)(((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a)))$$
$$\vdash \sim (\sim (a > \alpha b) \wedge \sim (b > \alpha a))$$
$$\vdash \sim ((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a))$$
$$\vdash (\urcorner MI)((b > \alpha I) \wedge (I > \alpha a))$$
$$\vdash \sim (a \| \alpha b) \leftrightarrow \sim (\urcorner MI)((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$$
$$\vdash \sim (a \| \alpha b) \leftrightarrow (MI)((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee$$
$$\vee (?\, MI)((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)).$$

Если заменить M на $\exists$, получим: $\vdash \sim (a \| \alpha b) \leftrightarrow (\exists I)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b)) \vee (?\exists I)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$. Но если $(MI)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$ или $(\exists I)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$, то между $a$ и $b$ можно поместить по крайней мере один индивид. А если $(?MI)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$ или $(?\exists I)\ ((a > \alpha I) \wedge (I > \alpha b))$, то между $a$ и $b$ можно поместить не больше одного индивида (если больше одного, то неопределенность отпадает) и не меньше нуля.

Символами

$$l\{a, b, \alpha\} = min$$
$$l\{a, b, \alpha\} \geqslant min$$

будем записывать высказывания соответственно «Интервал $\{a,\ b,\ \alpha\}$ имеет самую малую (минимальную) величину» и «Интервал $\{a,\ b,\ \alpha\}$ имеет величину, которая больше или равна минимальной». Учитывая сказанное выше, естественно принять такие определения этих выражений:

АФ$^7$. $(l\{a, b, \alpha\} = min) \dashv\vdash (a \| \alpha b)$

АФ$^8$. $(l\{a, b, \alpha\} \geqslant min) \dashv\vdash \sim (a \| \alpha b)$.

Поскольку согласно Д$^{12}$

1. $\vdash (a \| \alpha b) \vee \sim (a \| \alpha b)$,

из АФ$^7$ и АФ$^8$ по правилу Д$^{11}$ и У$^7$ получим

2. $\vdash (a \| \alpha b) \vee \sim (a \| \alpha b) \rightarrow (l\{a, b, \alpha\} = min) \vee$
$\vee (l\{a, b, \alpha\} \geqslant min)$.

По правилу Д$^{16}$ имеем

3. $\vdash (1) \wedge (2)$

и по правилу У$^1$

4. $\vdash (l\{a, b, \alpha\} = min) \vee (l\{a, b, \alpha\} \geqslant min)$.

Поскольку $(l\{a, b, \alpha\} \geqslant min)$ есть лишь сокращенная запись

$$(l\{a, b, \alpha\} > min) \vee (l\{a, b, \alpha\} = min).$$

из 4 имеем

5. $\vdash (l\{a, b, \alpha\} = min) \vee (l\{a, b, \alpha\} = min) \vee$
$\vee (l\{a, b, \alpha\} > min)$.

Поскольку

6. $x \vee x \dashv \vdash x$,

имеем

7. $\vdash (l\{a, b, \alpha\} \geqslant min)$.

По правилам УП$^i$ и Д$^{14}$

8. $(l\{a, b, \alpha\} > min) \vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < min)$
9. $(l\{a, b, \alpha\} = min) \vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < min)$
10. $(l\{a, b, \alpha\} \geqslant min) \vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < min)$
11. $\vdash \sim (l\{a, b, \alpha\} < min)$.

Поскольку сказанное имеет силу для любого интервала, то по правилу введения переменной $z$ для терминов интервалов получим:

ТФ$^4$. $\vdash (\forall z)(lz \geqslant min)$
$\vdash (\forall z) \sim (lz < min)$.

Поскольку по правилам К$^i$

$$(\forall z) \sim (lz < min) \vdash (\neg \exists z)(lz < min),$$

имеем

$$\vdash (\neg \exists z)(lz < min).$$

Пусть $x$ и $y$ суть переменные для интервалов. В логике отношений доказуемо

$$\vdash (lx = ly) \vee (lx > ly) \vee (lx < ly) \vee (lx \; ? > ly).$$

Пусть $z$ есть интервал такой, что $lz = min$. Подставив $z$

на место $x$, получим

$$\vdash (lz = ly) \vee (lz < ly) \vee (lz > ly) \vee (lz \ ? > ly).$$

В силу того, что $\sim (ly < min)$, и в силу правил логики отношений

$$(lz > ly) \wedge (lz = min) \vdash (ly < min)$$

$$(lz \ ? > ly) \vdash \sim (lz > ly)$$

получим:

1. $\vdash ((lz = ly) \vee (lz > ly) \vee (lz < ly) \vee \sim (lz > ly)) \wedge$ $\wedge (lz = min)$
2. $\vdash ((lz = ly) \vee (lz < ly) \vee \sim (lz > ly)) \vee ((lz > ly) \wedge$ $\wedge (lz = min))$
3. $\vdash (lz > ly) \wedge (lz = min) \to (ly < min)$
4. $\vdash ((lz = ly) \vee (lz < ly) \vee \sim (lz > ly) \vee (ly < min))$
5. $\vdash (4) \wedge \sim (ly < min)$
6. $\vdash (4) \wedge (5) \to ((lz = ly) \vee (lz < ly) \vee \sim (lz > ly))$
7. $(lz = ly) \vee (lz < ly) \vee \sim (lz > ly)$
8. $\vdash (lz = ly) \vee (lz < ly) \to \sim (lz > ly)$
9. $\vdash \sim (lz > ly)$
10. $\vdash (\forall y) \sim (lz > ly)$.

Наконец, по правилу введения переменной получим:

ТФ[5]. $\vdash (\exists x)(\forall y) \sim (lx > ly)$,

т. е. утверждение о существовании интервала, который не больше любого другого интервала.

Напоминаем, что определение протяженности эмпирического индивида сводится к определению протяженности интервала, т. е.

АФ[9]. $\vdash (l\{c, \alpha\} = l\{a \downarrow x, b \downarrow x, \alpha\})$,

где $x$ есть $(a \parallel \alpha c) \wedge (c \parallel \alpha b)$.

Поскольку верно $x$, имеем

$$\vdash \sim (a \parallel \alpha b)$$

$$\vdash (l\{a \downarrow x, b \downarrow x, \alpha\} \geqslant min)$$

$$\vdash (l\{a, b, \alpha\} \geqslant min)$$

и, следовательно,

$$\vdash l\{c, \alpha\} \geqslant min.$$

Так как $c$ — любой эмпирический индивид, имеем

$$\text{ТФ}^6.\ \vdash (\forall x)(l\{x, \alpha\} \geqslant min)$$

$$\vdash (\forall x) \sim (l\{x, \alpha\} < min),$$

где $x$ есть индивидная переменная (для эмпирических индивидов, конечно). По правилам для кванторов и предикатов $=$ , $>$ и $<$ имеем:

$$\vdash (\neg \exists x) \sim (l\{x, \alpha\} \geqslant min)$$

$$\vdash (\neg \exists x)(l\{x, \alpha\} < min).$$

Мы получили, таким образом, что протяженность всякого эмпирического индивида относительно заданного способа установления порядка $\alpha$ не может быть меньше некоторого минимума. Причем здесь $\alpha$ есть любой способ установления порядка, так что имеем

$$\vdash (\forall \alpha)(\forall x) \sim (l\{x, \alpha\} < min).$$

Возьмем, далее, интервал $\{a, b, \alpha\}$, который больше минимального, и будем сближать $a$ и $b$. Это сближение равносильно выбору интервала $\{c, d, \alpha\}$, который короче $\{a, b, \alpha\}$. При сближении $a$ и $b$ (или при сравнении интервалов) будет иметь место следующее. Либо сближение не влияет на величину интервала (между $a$ и $b$ помещается такой же индивид, как и ранее), или такое же число некоторых индивидов, как и ранее), либо величина интервала скачком изменится на длину одного индивида: он перестанет помещаться между $a$ (или $b$) и индивидами, которые помещены между $a$ и $b$ и через которые определяется протяженность $\{a, b, \alpha\}$. А поскольку протяженность индивидов не может быть меньше некоторого минимума, сближение $a$ и $b$ будет серией конечного числа скочкообразного уменьшения интервала до тех пор, пока он не достигнет минимума (между $a$ и $b$ уже оказывается невозможным вставить какой-либо индивид). Так что если интервал $x$ превышает интервал $y$ лишь на минимальную длину некоторого индивида, а $y$ превышает длину минимального интервала также на один индивид, то для $y$ не найдется интервал $z$ такой, что $(y > min) \wedge (z > min) \wedge (y > z)$. Если $y > z$, то при этих условиях $z = min$.

Таким образом имеет силу утверждение

ТФ[7]. $\vdash (\exists x)(\forall y)((l\{x, \alpha\} \leqslant l\{y, \alpha\}) \wedge (l\{x, \alpha\} > 0))$.

Сказанное выше относится как к длинам, так и к длительностям.

Из сказанного выше также следует, что пространственно-временные отношения эмпирических индивидов и их протяженности изменяются скачкообразно, квантами (вернемся к этому вопросу ниже).

## § 22. Скорость

Скорость процесса $A$ есть отношение числа $m$ последовательных изменений данного процесса к величине $n$ времени, в течение которого эти изменения произошли. Причем $m \geqslant 1$ и $n \geqslant min > 0$. Если $m = 0$, то изменения не происходят, и процесс не существует. Время изменения не может быть меньше минимального и больше нуля. Величина скорости $A$ есть величина $m/n$.

Более узкое понятие скорости процесса отличается от приведенного тем, что выбираются однородные изменения, т. е. изменения, относящиеся к некоторому классу $B$. Изменения некоторого рода выбираются в качестве стандартных единиц измерения.

Частный случай процесса есть перемещение тела (перемена места тела в пространстве). Здесь упомянутый выше класс $B$ образуют перемещения на одинаковое расстояние. Имеются стандартные единицы расстояния. Когда рассматривают величину скорости перемещения тела как частное от деления величины расстояния, пройденного телом, на величину времени, затраченного на это, то тем самым в неявной форме проделывают сказанное выше: число $m$ одинаковых последовательных перемещений тела за время $n$ и есть величина расстояния, пройденного телом за это время.

Время $n$, в течение которого подсчитывается число $m$, конечно. Иначе получить величину скорости невозможно. Так что это можно включить в качестве особого пункта в определение скорости.

Из определения скорости получаются такие следствия. Скорость всякого процесса конечна. Это утверждение справедливо в силу таких соображений: на каждое изменение процесса требуется время $k$, которое больше нуля и не меньше минимального; оно равно или меньше $n$, а $n/k$ есть конечная величина.

Скорость всякого процесса не может быть больше скорости для случая, когда на каждое изменение процесса уходит минимальное время, и изменения процесса образуют непрерывный ряд. В этом случае число $m$ будет максимальным. Очевидно также, что если $m = 1$, то это будет нижний предел скорости,— скорость процесса не может быть меньше $1/n$.

Получаются также следствия, которые мы приведем в форме для частного случая перемещения (обобщить на любые процессы это можно путем простой перефразировки).

Возьмем утверждение: для всякой скорости перемещения тел (в общем — процесса) $x$ имеется (возможна) скорость перемещения тел $y$ такая, что $y > x$. Что означает это утверждение, если сопоставить его с определением скорости? А то, что если тело $A$ проходит расстояние $s$ за время $t^1$, то возможно такое перемещение тела $B$ ($B$ может быть, в частности, $A$), что это же расстояние $s$ тело $B$ пройдет за время $t^2$, и при этом $t^2 < t^1$. И так без конца. Значит время, затрачиваемое на прохождение $s$, может быть как угодно мало. Но это противоречит утверждению, согласно которому время на любое изменение не может быть меньше минимального. Значит, когда время достигает минимального, то и скорость перемещения тел будет максимальной. Утверждение, приведенное в начале абзаца, ошибочно. Правильным будет утверждение: существует такая скорость перемещения, которая больше любой скорости перемещения,— максимальная скорость. Если $a$ и $b$ суть индивидные переменные, а $q$ — скорость, то

ТФ$^8$. $\vdash (\exists a)(\forall b)(a \geqslant qb)$.

Это утверждение есть следствие утверждения о существовании минимального времени, т. е.

$$\vdash (\exists \alpha)(\forall \beta)(l\alpha \leqslant l\beta) \to (\exists a)(\forall b)(a \geqslant qb).$$

Утверждение о существовании скорости $y$, превышающей скорость $x$, можно представить также так, что за одно и то же время в случае $y$ тело продвинется дальше, чем в случае $x$. Однако такое понимание сводится к рассмотренному ранее: берем любой отрезок пути, пройденного телом в случае $x$, и сопоставляем его с тем же отрезком в случае $y$; получим прохождение одного и того же расстояния за разное время, причем уменьшение времени и здесь невозможно меньше минимума.

Мы можем получить и еще одно интересное утверждение для скорости. Будем говорить, что тело $A$ перемещается непрерывно во временно́м интервале $\{t^1, t^2, \alpha\}$ по ряду упорядоченных точек относительно $\beta$, если и только если выполняется следующее: для любой пары времен $t_1$ и $t_2$ такой, что $t_1 \parallel \alpha t_2$, $t^1 \geqslant \alpha t_1$ и $t_2 \geqslant \alpha t^2$, тело $A$ находится в точке $s^1$ в $t_1$ и в точке $s^2$ в $t_2$, причем $\sim (s^1 \parallel \beta s^2)$. Из самого определения следует, что за минимальное время тело $A$ проходит расстояние, превышающее минимальное. А значит и за время $\{t^1, t^2, \alpha\}$ тело $A$ проходит расстояние, превышающее минимальное. Если считать минимальной скоростью перемещение тела $A$ во время $\{t^1, t^2, \alpha\}$ частное от деления величины этого времени на минимальное расстояние, проходимое телом за то время, то очевидно, что если тело $A$ движется непрерывно, то скорость его больше минимальной ($ТФ^9$).

## § 23. Парадоксы Зенона

Существует мнение, что парадоксы Зенона до сих пор не разрешены. И это действительно так, ибо, разрешая «парадоксы Зенона», различные авторы под этим названием решают какие-то свои разнообразные проблемы, а не действительные парадоксы, которые либо тривиальны, либо не существуют вообще.

Здесь не представляется возможным проанализировать эти парадоксы подробно. Ограничимся лишь кратким замечанием по поводу парадокса «Ахиллес и черепаха». Парадокс формулируют так: Ахиллес и черепаха движутся в одном направлении; Ахиллес отстает от черепахи на расстояние $s^1$; скорость движения Ахиллеса превосходит скорость движения черепахи; когда Ахиллес пробежит расстояние $s^1$, черепаха за это время проползет расстояние $s^2$, и Ахиллес должен будет преодолеть $s^2$; когда Ахиллес сделает это, черепаха за это время проползет расстояние $s^3$, и т. д. без конца для любого $s^i$; отсюда делают вывод, что Ахиллес не догонит черепаху.

Однако вывод этот неправомерен: из изложенных посылок он логически никак не следует. И всякие ссылки на математику и физику при попытках разрешить парадокс лишены смысла, ибо вывод получен не по правилам логики, а на основе каких-то психологических и языковых ассоциаций. Чтобы получить вывод «Ахиллес не догонит черепаху», задуманные условия надо переформулировать так: пока черепаха не преодолела расстояние $s^i$, Ахиллес не должен преодолевать расстояние, превышающее $s^{i-1}$. Это условие можно наглядно представить себе так: Ахиллес и черепаха скреплены стержнем, который может сжиматься сколь угодно, но никогда не превращается в ноль (не исчезает). При этом условии Ахиллес действительно не догонит черепаху. Но это лишь в случае абстрактного процесса. Для эмпирического же процесса даже при указанных условиях наступает момент, когда Ахиллес вступает в соприкосновение с черепахой,— интервал между ними достигает минимального (и «стержень» между ними становится таким, что между ними нельзя уже поместить никакой индивид). Вспомним также о том, что сокращение интервала между Ахиллесом и черепахой происходит «скачками», и если им при этом ничто не препятствует, интервал может быть сокращен до минимального.

## § 24. Кванты пространства, времени и движения

Выше (§ 22) мы уже говорили о том, что «сближение» $a$ и $b$ в случае интервала $\{a, b, \alpha\}$ или выбор интервала $\{c, d, \alpha\}$, который меньше $\{a, b, \alpha\}$, совершается скачкообразно. Это означает, вообще говоря, что если два интервала $x$ и $y$ различны по протяженности, то разница их величин не может быть меньше некоторой минимальной величины, т. е. минимальной протяженности некоторого индивида. Соответственно, если два индивида $x$ и $y$ имеют различные протяженности, разность их не может быть меньше минимальной.

Таким образом, если упорядочить все тела и расстояния по длинам, то получится иерархия длин таких, что для каждой пары из них $x$ и $y$ будет иметь место: либо $x = y$, либо одна из $x$ и $y$ больше другой на минимальную длину. Аналогично для продолжительностей существования индивидов и временны́х интервалов.

Таким образом, пространство и время имеют в некотором роде квантовую природу, но не в том смысле, что они буквально состоят из квантов пространства и времени, а в том смысле, что предметы по пространственной и временно́й протяженности различаются в конечном счете скачкообразно, квантами.

Все сказанное распространяется и на изменение пространственных и временных отношений между предметами: они происходят скачкообразно.

Запишем сказанное точнее. Пусть $a$, $b$ и $c$ суть переменные для индивидов (или все для интервалов между индивидами), а знак $>l$ означает превосходство по длине. Утверждение

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)((a > lc) \wedge (c > lb))$$

(т. е. «Ряд величин протяженностей абстрактно непрерывен») для эмпирических предметов неприемлемо. Для них верно утверждение $X$:

$$(\exists a)(\exists b)(\neg \exists c)((a > lc) \wedge (c > lb))$$

(т. е. «Ряд величин протяженностей абстрактно прерывен»). Заменяя $a > lc$ на $la > lc$ и $c > lb$ на $lc > lb$, $X$ можно придать более удобный вид

АФ[16]. $\vdash (\exists a)(\exists b)(\neg \exists c)((la > lc) \wedge (lc > lb))$.

Таким образом, квантовая гипотеза пространства, времени и движения имеет логические основания.

Из сказанного следует, что парадокс Зенона «Дихотомия», долженствующий доказать невозможность движения, не имеет силу в отношении перемещения эмпирических тел: здесь нельзя бесконечно делить расстояние и время; это деление достигает некоторого минимума, и дальнейший процесс прекращается.

## § 25. Мир в целом

Мир (Вселенная) есть скопление эмпирических индивидов, в которое включаются все эмпирические индивиды, т. е. если $x$ есть переменная для эмпирических индивидов, то

$$\vdash (\forall x)(x \in Мир).$$

Из определения следует, что *Мир* есть эмпирический индивид. Из определения также следует единственность *Мира* в смысле такого утверждения

$$\vdash (\forall x)(\forall y)((x \rightharpoondown Мир) \wedge (y \rightharpoondown Мир)) \to (x \rightleftharpoons y)),$$

где $x$ и $y$ суть индивидные переменные (т. е. если $x$ есть Мир и $y$ есть Мир, то термины $x$ и $y$ тождественны по значению или $x$ и $y$ суть один и тот же индивид).

Из определения также следует:

$$\vdash E(\textit{Мир}) \equiv (\exists x)\, E(x)$$

$$\vdash \neg E(\textit{Мир}) \equiv (\forall x) \neg E(x),$$

т. е. Мир существует, если и только если существует хотя бы один эмпирический индивид, и Мир не существует, если и только если не существует ни один эмпирический индивид.

Мир есть скопление индивидов, и к нему (как ко всякому скоплению) применимы предикаты, определенные для скоплений. Но здесь нужно соблюдать осторожность, связанную с особенностью определения этого скопления и с двусмысленностью языковых выражений со словами «возникает», «бесконечен» и т. п.

Возьмем выражение «Мир не возник во времени» (или «Мир не имеет начала во времени», «Мир вечен в прошлом» и т. п.). Оно двусмысленно. Во-первых, его можно понимать как отрицание утверждения «Мир возник во времени», которое есть сокращение для

$$\neg E(\textit{Мир}) \Rightarrow E(\textit{Мир})$$

и в котором Мир берется просто как эмпирический индивид. Но чтобы принять или отвергнуть такое утверждение, необходимо иметь точку отсчета времени — некоторое эмпирическое событие $a$, иметь метки времени — эмпирические события $b^1$, $b^2$, ..., иметь возможность наблюдать состояние $s \neg E$ (*Мир*), причем индивиды $a$, $b^1$, $b^2$, ... не должны включаться в Мир. А это исключено по определению. Если же $a$, $b^1$, $b^2$, ... включаются в Мир, то из определений и из $E$ ($a$), $E$ ($b^1$), $E$ ($b^2$), ... получим, что $E$ (*Мир*), т. е. состояние $s \neg E$ (*Мир*) невозможно наблюдать в принципе. Таким образом, в рассматриваемом смысле наше утверждение неопределенно, т. е. неверно, что «Мир возник», и неверно, что «Мир не возник».

Таким образом, мы имеем нечто противоположное кантовским антиномиям: отрицание обоих противоположных суждений. Но здесь это не ведет к противоречию, поскольку имеется третья возможность — неопределенность.

Второй смысл рассматриваемого утверждения заключается в следующем. Мир рассматривается как процесс, т. е. как ряд различных состояний во времени. При этом наше утверждение означает, что этот ряд не имеет начального элемента, т. е.

$(\forall x)(\exists y)(x > \alpha y)$,

где $x$ и $y$ суть переменные для состояний Мира, а $\alpha$ — способ упорядочивания их во времени относительно некоторого события, принадлежащего к Миру (здесь это не запрещается).

Оставляя без внимания вопрос о том, можно или нет проверить это утверждение практически, с чисто логической точки зрения оно осмысленно и не вступает в конфликт с принятыми определениями. В частности, из того, что Мир не имеет начала во времени (во втором смысле), не следует невозможность его существования.

Аналогично нельзя принять и отвергнуть утверждение о том, что Мир не перемещается в пространстве, если рассматривать просто Мир как индивид, так как невозможны тела, относительно которых фиксируется перемещение или покой Мира и которые не включались бы в Мир.

Правила предицирования для субъектов с выражениями «Мир в пространстве» и «Мир во времени» одинаковы с правилами для субъектов с выражениями «Пространство» и «Время». Так что практически эти выражения употребляются как синонимы. Эксплицировать их можно разными способами, и в частности — так.

Мир актуально (потенциально) конечен в пространстве относительно класса способов установления пространственного порядка $A$, если и только если (Ax) $(\exists a)$ $(\forall b)$ $((x \in A) \rightarrow (a \geqslant xb))$, где $a$ и $b$ суть переменные для эмпирических индивидов, а $x$ — для способов пространственного порядка (соответственно $(\forall x)$ $(\mathrm{M}a)$ $(\forall b)$ $((x \in A) \rightarrow (a \geqslant xb))$. Мир актуально (потенциально) бесконечен в пространстве относительно $A$, если и только если $(\forall x)$ $(\forall a)$ $(\exists b)$ $((x \in A) \rightarrow (b > xa))$ (соответственно $(\forall x)$ $(\forall a)$ $(\mathrm{M}b)$ $((x \in A) \rightarrow (b > xa)))$. Логически не исключено, что для некоторого $A$ Мир не конечен и не бесконечен. Мир конечен (бесконечен) во времени в прошлом относительно $\beta$, если и только если $(\exists x)$ $(\forall y)$ $(x \leqslant \beta y)$ (соответственно $(\forall x)$ $(\exists y)$ $(y < \beta x)$), где $\beta$ есть способ установления временного порядка, а $x$ и $y$ суть переменные для эмпирических изменений. Мир конечен (бесконечен) во времени в будущем относительно $\beta$, если и только если $(\mathrm{M}x)$ $(\forall y)$ $(y \leqslant \beta x)$ (соответственно $(\forall x)$ $(\mathrm{M}y)$ $(y > \beta x)$). Выражения «Мир потенциально конечен (бесконечен) в прошлом» и «Мир актуально конечен (бесконечен) в будущем» лишены смысла.

Общим для всех возможных экспликаций рассматриваемых утверждений является то, что они не являются логически истинными и логически ложными,— они независимы от положений логики и логически выполнимы. Логически невыполнимы лишь их противоречивые комбинации.

## § 26. Эмпирические связи

Высказывания, субъекты которых суть термины эмпирических предметов и которые не являются логически истинными и логически неистинными, суть эмпирические высказывания. Если $x$ есть эмпирические высказывания, то предмет, обозначаемый термином $sx$, есть эмпирическое состояние. Связь эмпирических состояний есть эмпирическая связь.

Пусть $x$ есть высказывание о связи состояний $a$ и $b$, $y$ — о связи $a$ и $c$, $z$ — о связи $c$ и $b$. Связь $a$ и $b$ будем называть опосредованной во времени (в пространстве) относительно $\alpha$, если и только если найдется такое состояние $c$, что

$$\vdash (y \wedge z \rightarrow x),$$

и при этом $c$ находится между $a$ и $b$ относительно $\alpha$. Состояние $c$ есть посредник связи $a$ и $b$. Определение неопосредованной связи получается из приведенного путем записи отрицания перед словом «найдется».

Очевидно, если временно́й (пространственный) интервал между $a$ и $b$ равен минимальному относительно $\alpha$, то связь $a$ и $b$ является неопосредованной во времени (в пространстве) относительно $\alpha$. Так что процесс нахождения посредников не является бесконечным.

Процесс нахождения посредников не бесконечен и в случае изменения способа установления порядка. Пусть время между $a$ и $b$ равно $t$. Найдя посредник $c$ между $a$ и $b$, мы можем найти посредник между $c$ и $a$ лишь при условии, если время между ними больше минимального. Это время меньше $t$. Поскольку $t$ конечно, а уменьшение его при нахождении посредников происходит скачкообразно, то, продолжая процесс, мы придем к интервалу, который уже не может быть уменьшен.

Процесс нахождения посредников $c^1, \ldots, c^n$ между $a$ и $b$ имеет принципиальный предел такой, что $a, c^1, \ldots, c^n, b$ образуют непрерывный ряд относительно $\alpha$.

## § 27. Предикаты тенденций

В языковой практике часто встречаются предикаты, знание логических свойств которых важно для анализа высказываний о связях,— предикаты тенденций. Поясним на примерах, о чем идет речь.

Пусть наблюдается беспорядочное движение большого числа частиц $a$ в некоторой области пространства $b$. При этом замечается, что время от времени какие-то частицы $a$ образуют некоторые регулярные («правильные», упорядоченные) скопления. Эти скопления недолговечны и не охватывают все частицы, так что нельзя сказать, будто происходит упорядочивание частиц $a$ в области $b$. Говорят нечто более «слабое», а именно — что имеет место некоторая тенденция к упорядочиванию.

Другой пример. Мы ожидаем (по опыту и по всем данным) повышения температуры в области $a$. И она действительно повышается, но не так быстро и не так высоко, как мы ожидали. Предполагается при этом, что какое-то обстоятельство препятствует повышению температуры или даже способствует понижению. В таком случае говорят, что имеется тенденция к понижению температуры в $a$ (хотя температура на самом деле повышается).

Случаи и условия употребления таких предикатов тенденций разнообразны. Здесь возможно и происходит на самом деле измерение степени тенденций, в частности, говорят о сильной, умеренной, слабой, ярко выраженной, едва заметной и т. п. тенденции. Мы констатируем существование таких предикатов как факт и рассмотрим их некоторые свойства.

Введем особый терминообразующий оператор тенденции $t$. Примем такое правило: если $P$ есть предикат, то $tP$ есть предикат. Примем также утверждение:

$$\vdash P(a) \to tP(a).$$

Из него следует:

$$\vdash \sim tP(a) \to \sim P(a).$$

Для любого предиката $P$ имеет силу закон противоречия

$$\vdash \sim (P(a) \wedge \sim P(a)),$$

а утверждение $P(a) \wedge \sim P(a)$ не может быть истинно (логически неистинно, противоречиво). Но утверждение

$$\vdash \sim (tP(a) \wedge \sim P(a))$$

не есть правило логики, а утверждение $tP(a) \wedge \sim P(a)$ логически выполнимо (может быть истинным). Например, конъюнкция утверждений «Неверно, что температура $a$ увеличивается» и «Температура $a$ имеет тенденцию к увеличению» может быть истинной.

Интересно также отметить, что признаки $P$ и $Q$ могут исключать друг друга, т. е. может быть верно

$$P(a) \to \sim Q(a),$$

а признаки $tP$ и $tQ$ нет. Если $P$ и $Q$ исключают друг друга, то $P(a) \wedge Q(a)$ есть противоречие. Но $tP(a) \wedge tQ(a)$ может быть истинным. Так что одному и тому же предмету в одно и то же время могут быть присущи взаимоисключающие (и в том числе — противоположные) тенденции. Так, величина некоторого предмета $a$ может одновременно иметь тенденцию к увеличению и к уменьшению. И в этом нет никакого логического противоречия. Тело $a$ может одновременно иметь тенденцию двигаться в направлении $b$ и тенденцию двигаться в другом направлении $c$. Причем утверждения «$a$ движется в направлении $b$» и «$a$ движется в направлении $c$» могут оба оказаться неистинными, так как тело $a$ движется в третьем направлении $d$. Так что возможны такие ситуации, когда истинно

$$\sim P^1(a) \wedge \sim P^2(a) \wedge P^3(a) \wedge tP^1(a) \wedge tP^2(a)$$

и другие более сложные случаи, дающие богатый материал для разного рода словесных манипуляций.

Если высказывание $x$ таково, что

$$x \to (tP(a) \to Q(a)),$$

то $sx$ есть условие реализации тенденции $P$, а $Q$ есть реализация $tP$. Причем $Q$ не всегда совпадает с $P$. И даже возможны случаи, когда они несовместимы, т. е. $\sim (P(a) \wedge \wedge Q(a))$.

## § 28. Парадоксы связей

Встречаются высказывания об эмпирических связях

(1) $x \to (Ra)\, z$

(2) $y \to (Ra)\, v$,

которые на первый взгляд обладают следующим свойством. По правилам логики из них получается

(3) $x \wedge y \rightarrow (Ra)(z \wedge v)$,

но при этом высказывание $x \wedge y$ может быть истинным, а $z \wedge v$ нет, т. е. истинно $\sim (z \wedge v)$. Например, (1) есть «Если к телу $A$ приложить силу $B$, то $A$ сдвинется в направлении $C$ на расстояние $\alpha$», а (2) есть «Если к телу $A$ приложить силу $D$, то $A$ сдвинется в направлении $E$ на расстояние $\beta$»; к телу $A$ можно приложить одновременно силу $B$ и силу $D$, но одновременно сдвинуться в направлении $C$ и $E$ (например, вправо и влево) тело не может. Сложившаяся ситуация воспринимается как парадоксальная (один из вариантов парадоксов связей).

Ничего парадоксального, однако, в рассмотренной ситуации не останется, если восстановить достаточно полную логическую ее картину. На самом деле в формулировке (1), (2) и (3) опущено указание на условия, при которых они принимаются как истинные. Причем эти условия различны. Пусть $w^1$ суть условия для (1), $w^2$ — условия для (2), $w^3$ — условия для (3). Условия $w^1$ могут включать в себя $\sim y$ или такое $z$, из которого следует $\sim y$, т. е. $w^1 \rightarrow \sim y$. Условия $w^2$ могут предполагать $\sim x$, т. е. $w^2 \rightarrow \sim x$. Например, $w^1$ предполагает, что к $A$ не прилагается сила $D$; $w^2$ предполагает, что к $A$ не прилагается сила $B$. Возьмем простейший случай: $w^1$ есть $w^3 \wedge \sim y$; $w^2$ есть $w^3 \wedge \sim x$. Наличие $w^3$ во всех трех $w^1$, $w^2$ и $w^3$ необходимо для того, чтобы было возможно рассуждение. В таком случае мы имеем:

(1) $x \wedge \sim y \rightarrow (Ra) z$

(2) $\sim x \wedge y \rightarrow (Ra) v$

(3) $x \wedge \sim y \wedge \sim x \wedge y \rightarrow (Ra)(z \wedge v)$

(при условии $w^3$ для всех трех). Но $x \wedge \sim y \wedge \sim x \wedge y$ есть противоречие, и парадоксальность (3) исчезает. Теперь, чтобы установить, какое следствие будет вытекать из $x \wedge y$ (в частности, какое положение займет тело $A$, если к нему сразу приложить силы $B$ и $D$), необходимо либо дополнительное эмпирическое исследование, дающее

(4) $x \wedge y \rightarrow (Ra) w$,

либо особое правило оперирования с $z$ и $v$, позволяющее дедуктивно получить $w$ (например, правило параллелограмма сил).

Разрешением парадоксальности рассматриваемой ситуации является употребление предикатов тенденций. Например, вместо выражения «Если к телу $A$ приложить силу $B$, то $A$ сдвинется в направлении $C$ на расстояние $\alpha$ (при условии, что никакие другие силы не действуют на $A$)» употребляется более краткое «Если к телу $A$ приложить силу $B$, то $A$ будет иметь тенденцию двигаться в направлении $C$ на расстояние $\alpha$». В этом случае какие бы силы ни действовали на $A$ и куда бы оно ни сдвинулось, наше высказывание будет фиксировать не фактическое положение дел, а долю участия силы $B$ в нем. При этом наши высказывания примут вид

(1) $x \rightarrow (Ra) z^*$

(2) $y \rightarrow (Ra) v^*$,

где в $z^*$ и $v^*$ говорится не о реальных положениях, а о тенденциях. В таком случае будет верно

(3) $x \wedge y \rightarrow (Ra) (z^* \wedge v^*)$,

поскольку $z^* \wedge v^*$ не есть противоречие. Наличие противоположных тенденций не есть логическое противоречие. Как реализуются тенденции $z^*$ и $v^*$ совместно, должен установить опять-таки опыт или специально выработанное на основе опыта правило.

Другой вариант парадокса связей получается при рассмотрении воздействия одного предмета на другой через различные посредники (по различным «каналам») в случаях, когда результат воздействия через один из посредников исключает результат воздействия через другой.

## § 29. Условные предикаты

Некоторые предикаты обладают свойствами, которые легко объяснимы, если их рассматривать как предикаты, вводимые такими определениями:

(1) $P(a) \equiv Df \cdot (x \rightarrow (Rx)\, Q(a))$,

где $x$ есть некоторое высказывание, координированное с $Q(a)$ так, что

(2) $\vdash Q(a) \rightarrow x$.

Например, предикат «растворим в воде» можно представить как предикат, определяемый по такой схеме: «$a$ растворим в воде» $\equiv Df$. «Если $a$ поместить в сосуд с водой, то $a$ растворяется в воде». Здесь высказывание «$a$ растворяется в воде» истинно при этом условии, что $a$ помещен в сосуд с водой. Так что если оно истинно, то истинно «$a$ помещен в сосуд с водой».

Обычно такие предикаты $P$ вводятся как словесные модификации $Q$, и их незначительные внешние различия дают базу для смешения терминов. Мы введем особый оператор условности $c$ для таких предикатов. Правило построения терминов с ним: если $Q$ есть предикат, то $cQ$ есть предикат.

Рассматриваемые предикаты имеют свойства, сходные с предикатами тенденций. Так, высказывания $x \rightarrow (Rx)$ $Q\ (a)$ и $\sim x$ совместимы, так что может быть истинно

(3) $(x \rightarrow (Rx)\ Q\ (a)) \wedge \sim x$.

Заменяем по определению (1) первое на $cQ\ (a)$. Получим

(4) $cQ\ (a) \wedge \sim x$.

Но согласно (2) имеем

(5) $\vdash \sim x \rightarrow \sim Q\ (a)$.

Из (4) и (5) имеем

(6) $cQ\ (a) \wedge \sim Q\ (a)$.

Так что если истинно (3), то истинно и (6).

Но если предикаты $Q^1$ и $Q^2$ исключают друг друга, то несовместимы и предикаты с $Q^1$ и $cQ^2$. Если

$$Q^1\ (a) \rightarrow \sim Q^2\ (a),$$

то получим:

$$(x \rightarrow (Rx)\ Q^1\ (a)) \rightarrow (x \rightarrow (Rx) \sim Q^2\ (a))$$
$$cQ^1\ (a) \rightarrow \sim cQ^2\ (a).$$

## § 30. Воздействие

Связи различаются, в свою очередь, по логическим типам. Рассмотрим некоторые из них (наиболее важные с известной точки зрения).

Пусть $\alpha$ есть

$$P^1\ (a) \Rightarrow P^2\ (a),$$

а β есть

$$Q^1(a) \Rightarrow Q^2(a).$$

Будем говорить, что $a$ оказывает воздействие или воздействует на $b$ (а $b$ испытывает воздействие $a$), если и только если

$$\alpha \rightarrow (R\alpha)\beta,$$

где $R$ есть временно́е отношение «после этого», а интервал времени между $s\alpha$ и $s\beta$ конечен. Это отношение транзитивно. Временно́е отношение $s\alpha$ и $s\beta$, иначе говоря, таково, что

$$s\beta > ts\alpha,$$

где $t$ есть способ установления временно́го порядка, а $>$ читается как «позже» или «после этого». Будем также говорить, что β есть результат воздействия α.

Пусть $\gamma^i$ есть

$$T^{i1}(c^i) \Rightarrow T^{i2}(c^i),$$

где $c^i$ есть индивидная переменная ($i = 1, 2, \ldots$). Воздействие $a$ на $b$ будем называть непосредственным относительно класса $A$, если и только если

$$(\neg \exists c^i)((c^i \in A) \wedge (\alpha \rightarrow (R\alpha)\gamma^i) \wedge (\gamma^i \rightarrow (R\gamma^i)\beta)),$$

и опосредованным, если и только если

$$(\exists c^1) \ldots (\exists c^n)((c^1 \in A) \wedge \ldots \wedge (c^n \in A) \wedge$$
$$\wedge (\alpha \rightarrow (R\alpha)\gamma^1) \wedge \ldots \wedge (\gamma^n \rightarrow (R\gamma^n)\beta))).$$

Индивиды $c^1, \ldots, c^n$ суть посредники воздействия $a$ на $b$. В случае $n \geqslant 1$ будем называть $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$ механизмом воздействия $a$ на $b$.

Имеются случаи, для которых воздействие $a$ на $b$ непосредственно и очевидно. Для других случаев оно осуществляется через посредников и выясняется путем нахождения последних. Из изложенного выше можно вывести некоторые общелогические следствия для таких случаев.

Очевидно, события $s\alpha$, $s\gamma^1, \ldots, s\gamma^n$, $s\beta$ образуют упорядоченный во времени ряд. Если этот ряд непрерывен (т. е. все его соседние события соприкасаются во времени), то число $s\gamma^1, \ldots, s\gamma^n$ конечно. В самом деле, интервал времени между $s\alpha$ и $s\beta$ (обозначим $t$) конечен, длительность всех событий $s\gamma^1,\ldots,s\gamma^n$ и интервалов между $s\alpha$, $s\gamma^1,\ldots,s\gamma^n$, $s\beta$ не меньше некоторого минимума, так что в $t$ может разместиться лишь конечное число событий.

И только в случае абстрактных событий, для которых допускается сколь угодно малая длительность и сколь угодно малые интервалы между событиями, наше утверждение неверно: для них если ряд событий между $s\alpha$ и $s\beta$ непрерывен, то число событий, опосредствующих их и образующих механизм воздействия, бесконечно.

Таким образом, если $\alpha \rightarrow (R\alpha)\beta$, и мы хотим полностью восстановить механизм воздействия $a$ на $b$, то мы должны отыскать множество $s\gamma^1,\ldots,s\gamma^n$ таких, как указано выше, причем это множество конечно, а ряд $s\alpha$, $s\gamma^1,\ldots,s\gamma^n$, $s\beta$ непрерывен во времени. Таким образом, процесс этот не бесконечен, он оканчивается, что соответствует практике познания.

Но воздействие $a$ на $b$ можно рассматривать как цепь событий в пространстве. Иллюзия, будто с этой точки зрения процесс отыскания посредников бесконечен, возникает за счет неопределенности терминов и задачи.

Как бы ни были расположены пространственные области, в которых происходят события, последние так или иначе должны быть выбраны как события, образующие временно́й ряд между $s\alpha$ и $s\beta$. А при этом вступает в силу следующее обстоятельство. Сумма длительностей событий между $s\alpha$ и $s\beta$ и интервалов между ними не должна превышать интервала $t$, а это означает число посредствующих событий конечно (как выше). Если же эта сумма превышает $t$, значит выбран ряд событий такой, в котором $a$ не воздействует на $b$, скажем — ряд, попадающий мимо цели.

Обращаем внимание на то, что мы не рассматриваем воздействие $a$ на $b$ как перемещение некоторого эмпирического тела $c$, и существование максимальной скорости перемещения здесь совершенно ни при чем (а обычно именно на это ссылаются, говоря о существовании событий, не связанных эмпирически, в частности — причинно). Воздействие $a$ на $b$ посредством перемещения $c$ есть частный случай. И для этого случая действительно верно такое рассуждение: если изменение $b$ есть следствие того, что $c$ от $a$ достигает $b$, и только этого обстоятельства, то время между $s\alpha$ и $s\beta$ не должно быть меньше времени, которое требуется для $c$ на преодоление расстояния между $a$ и $b$.

Скорость распространения воздействия $a$ на $b$ в пространстве равна частному от деления расстояния между областями пространства, в которых происходят $s\alpha$ и $s\beta$, на $t$. А здесь получить такой же логический эффект, как для скорости перемещения при имеющихся у нас предпосылках, нельзя.

Вопрос о том, в какой мере возможно в рамках логики рассмотреть проблемы, касающиеся эффекта воздействия данного события $s\alpha$ на окружающие предметы, распространения этого воздействия, затухание его и т. д., мы здесь не затрагиваем. Но думается, что при более тщательном (чем у нас) анализе здесь кое-что сделать возможно. Во всяком случае это довольно любопытное дело.

Рассмотрим, далее, понятие взаимодействия. При этом имеется в виду то, что $a$ воздействует на $b$, а $b$ — на $a$. Однако в такой формулировке не видны некоторые важные логические детали.

Если $s\alpha$ и $s\beta$ суть индивидуальные события, то

$$(\alpha \rightarrow (R\alpha)\,\beta) \vdash \sim (\beta \rightarrow (R\beta)\,\alpha),$$

поскольку $s\alpha$ неповторимо (на прошлое воздействовать нельзя). Если $b$ обратно воздействует на $a$, то имеет место

$$\beta \rightarrow (R\beta)\,\alpha^{*},$$

где $\alpha^{*}$ есть

$$P^{3}(a) \Rightarrow P^{4}(a),$$

причем $\alpha^{*}$ происходит после $s\beta$, а значит (в силу транзитивности $R$) и после $s\alpha$. Иллюзия одновременного воздействия $a$ на $b$ и $b$ на $a$, в котором имеет место то же самое воздействие, создается за счет употребления общих терминов событий. Например, возьмем утверждение «Увеличение $a$ ведет к увеличению $b$, а увеличение $b$, в свою очередь, ведет к увеличению $a$ в то же самое время». Здесь «Увеличение $a$» есть общий термин такой, что как $\alpha$, так и $\alpha^{*}$ могут быть частными его случаями; выражение «Увеличение $b$» может означать $\beta$ как результат воздействия $a$ на $b$ и некоторое $\beta^{*}$, которое есть изменение $b$, исходящее из иного источника.

Выше мы рассмотрели простой случай воздействия предмета $a$ на предмет $b$. Сложный случай есть соединение простых по такой схеме: пусть $\alpha^{1} \Rightarrow \alpha^{2}$, $\alpha^{2} \Rightarrow \alpha^{3}, \ldots$, $\alpha^{n} \Rightarrow \alpha^{n+1}, \ldots$ есть последовательная смена состояний $a$, а $\beta^1 \Rightarrow \beta^2$, $\beta^2 \Rightarrow \beta^3$, ..., $\beta^n \Rightarrow \beta^{n+1}$,... — последовательная смена состояний $b$, причем вторая есть результат воздействия первой; каждому состоянию $\beta^i$ соответствует состояние $\alpha^i$. По определению состояние $\beta^i$ наступает после того, как наступило состояние $\alpha^i$. Интервал времени между ними не меньше минимального. Так что имеют силу следующие принципы «запаздывания» (которые являются, однако, чисто логическими): 1) результат воздействия $a$ на $b$ обнаруживается не сразу; 2) если изменения $a$ прекращаются, то еще некоторое время после этого продолжается изменение $b$, являющееся результатом воздействия $a$.

Используя введенные термины, можно осуществить экспликацию терминов сил, масс и т. п. Пусть $a$ и $b$ суть индивидные переменные, $Q$ — предикат некоторого изменения или некоторой тенденции изменения, $P$ — предикат, выбираемый специально для введения рассматриваемых выражений. Термины сил можно ввести как сокращения для выражений $a \downarrow (\exists b)\,(x \wedge y \wedge P\,(b))$, где $x$ есть высказывание «$a$ воздействует на $b$», а $y$ есть высказывание «$sQ\,(b)$ есть следствие $sx$». В зависимости от вида $P$ и $Q$ определяется вид силы (например, $P$ может быть вес тела, а $Q$ — сдвиг тела на какое-то расстояние). Выражение «К $b$ приложена сила $\alpha$» будет при этом сокращением для $(\exists a)\,(x \wedge y \wedge P\,(b))$. Таким образом, сила есть предмет, который определенным образом воздействует на другой предмет, обладающий некоторым заданным признаком. Термины масс эксплицируются по схеме: выражение «$a$ имеет массу $\alpha$» есть сокращение для выражения «Если к $a$ приложить силу $\beta$, то $P\,(a)$; если же к $a$ сила $\beta$ не приложена (в том числе — если ее величина меньше $\beta$), то $\neg P\,(a)$». От вида $P$ зависит вид массы и ее величина.

## § 31. Причина

Выражение «$a$ есть причина $b$» употребляется во многих различных смыслах, например в таких:

1) «$a$ есть причина $b$» $\dashv\vdash$ «Если не-$a$, то не-$b$; наступает $a$; вслед за этим наступает $b$».

2) «$a$ есть причина $b$» $\dashv\vdash$ «Если наступает $a$, то вслед за этим наступает $b$».

3) «$a$ есть причина $b$» $\dashv\vdash$ «Если бы не было $a$, то не было бы $b$; имеет место $b$».

4) «$a$ есть причина $b$» $\dashv\vdash$ «$a$ и затем $b$; не будь $a$, не было бы и $b$».

Кроме того, говоря о причине, имеют в виду ответ на вопросы типа «Что является причиной события (состояния и т. п.) $a$?» И на этот вопрос отвечают различно, в частности, так: 1) причиной состояния (явления, события) $a$ является все то, что порождает $a$ (что ведет к возникновению $a$); 2) причиной $a$ является то, без чего не может существовать $a$; 3) причиной $a$ являются те особые условия, которые отличают возникновение от возникновения других состояний, и т. п.

Ниже мы сформулируем несколько положений, относящихся к проблеме причинности или, точнее, к совокупности проблем, к которым так или иначе причастно слово «причина».

Тщетно искать некое «единственно правильное» понимание причины. Его пока просто нет. Имеются разные словоупотребления и только. Имеются различные познавательные ситуации, нуждающиеся для своего фиксирования в строгой терминологии, учитывающей упомянутые различия. Так, встречается отношение состояний такое, что

$$x \to (Rx)\, y,$$

и такое, что

$$x \wedge (Rx)\, y \wedge (\sim x \to (R \sim x) \sim y),$$

где $R$ означает «затем», «после» и т. п. В качестве сокращения для первого можно ввести выражение

$$sxC^1sy,$$

а в качестве сокращения для второго — выражение

$$sxC^2sy.$$

Здесь $C^1$ и $C^2$ суть особые двухместные предикаты. И ни один из них не лучше и не хуже другого в качестве средства экспликации термина «причина». Если уж непременно здесь нужно это слово использовать, то можно вводить какие-то ограничения типа «позитивная причина», «негативная причина», «полная причина» и т. п.

Далее, если даже принято только одно строго определенное употребление слова «причина», это еще не дает никаких гарантий в том отношении, что исследователи при установлении причин одних и тех же явлений будут находить одни и те же причины. Так, если мы приняли в качестве экспликации слова «причина» знак $C^2$, то это не исключает возможности построения высказываний $sxC^2sy$ и $szC^2sy$ при отыскании причины $sy$. Одно другому не противоречит, и согласно определению $sx$ в качестве причины $sy$ не лучше и не хуже, чем $sz$, и наоборот.

Можно, конечно, условиться считать причиной некоторого состояния $sy$ такое состояние, которое единственно является причиной $sy$ (т. е. никакое другое состояние, отличное от него, причиной $sy$ не является). Но это — лишь общие ни к чему не обязывающие разговоры. Одно дело — определение слова «причина» и другое дело — отыскание причин конкретных состояний. Когда в практике познания приходят к единодушному согласию считать причиной некоторого явления $a$ определенное явление $b$, то это делается не в силу определения слова «причина» (никакое определение такого рода не может содержать указание на единственность причины, ибо не может дать гарантий этой единственности), а как неявное соглашение считать именно $b$ причиной $a$, поскольку соотношение $a$ и $b$ удовлетворяет определению слова «причина» и удовлетворяет некоторым другим требованиям, не входящим в это определение (например, в некоторых само собой разумеющихся условиях наступление $b$ всегда ведет к $a$, а ненаступление $b$ не ведет к $a$ при тех же условиях; причем другие явления не ведут к наступлению $a$).

Выше мы говорили о слове «причина» как о части предиката «...причина...». Но оно употребляется и как субъект, точнее — как часть субъектов типа «причина события», «причина $sx$», «причина того, что $x$» и т. п. В этой своей роли оно определяется как производное от предиката «причина» следующим образом (буквы $x$ и $y$ суть переменные для терминов состояний): «Причина $x$» $\equiv Df$. «Состояние $sy$ такое, что $sy$ есть причина $sx$» (т. е. причина некоторого состояния есть другое состояние такое, которое является его причиной). Упомянутое в предшествующем параграфе соглашение есть неявное определение такого рода, содержащее еще дополнительно элемент ограничения.

Известные индуктивные методы установления причинной связи (методы Бэкона — Милля) являются не просто способами исследования, предполагающими, что термин «причина» определен до их применения и независимо от них. Они сами суть имплицитное определение различных случаев употребления термина «причина». Так, метод сопутствующих изменений формулируется следующим образом: если каждый раз, когда наступает событие $a$, вслед за этим наступает событие $b$, то $a$ есть причина $b$. Это следует понимать не как утверждение с термином «причина», смысл которого известен и без этого утверждения, а как фрагмент имплицитного определения самого слова «причина». И методу этому точнее следует придать такой вид: если каждый раз вслед за наступлением $a$ наступает $b$, то $a$ будем называть причиной явления $b$. Это, другими словами, запишется так: «$a$ есть причина $b$»$\dashv\vdash$«Если наступает $a$, то наступает $b$». Метод единственного сходства формулируется так: если случаи, когда наступает $b$, различаются во всем и сходны только в том, что наступление $b$ предшествует $a$, то $a$ есть причина $b$. Опять-таки это есть не просто прием исследования, но фрагмент неявного определения слова «причина». Аналогично для прочих методов. Если же рассматривать упомянутые методы как приемы исследования причин, причем, что такое «причина» — известно без них, то неизбежны недоразумения, за которые эти методы многократно критиковались в истории логики и философии. К ним в таком случае предъявляли необоснованно чрезмерные претензии.

При экспликации терминов надо различать, далее, благие пожелания и реальные возможности языка. Так, мы можем поставить задачу определить причину $a$ так, чтобы причиной $a$ было все то, что порождает $a$ и без чего невозможно возникновение $a$. Но это — лишь пожелание, и не более того (вроде пожелания о глубоком и всестороннем изучении $a$). Спрашивается, как теперь быть с Миром, без которого нет никакого состояния; как быть с Галактикой, без которой нет никаких событий в Солнечной системе; как быть с электронами, когда речь заходит о причинах поражения в той или иной войне и т. д. Никакие схоластические ухищрения здесь не помогут. Экспликация, адекватная приведенному пожеланию, просто невозможна практически.

Если $a$ есть причина $b$, то наступление $a$ предшествует во времени наступлению $b$. Временно́е отношение $a$ и $b$ есть один из признаков причинного отношения, участвующих в определении последнего. Вся терминология времени определяется и вводится в употребление независимо от термина «причина», но не наоборот.

## § 32. Виды причинных связей

При сравнении случаев, когда употребляется выражение «$sx$ есть причина $sy$», обнаруживается следующее: в одних случаях предполагается, что из $x$ логически не следует $y$, в других — не предполагается; в одних случаях предполагается, что из «$sx$ есть причина $sy$» и $x$ следует $y$, в других — нет; в одних случаях предполагается, что из «$sx$ есть причина $sy$» и $\sim x$ следует $\sim y$, а в других — нет; в одних случаях предполагается транзитивность причинного отношения, а в других — нет и т. д. Так что найти в этих употреблениях какой-то «инвариант», который можно было бы изобразить как «подлинное понимание причины», есть дело совершенно бесперспективное.

Мы считаем целесообразным говорить о видах причинных отношений состояний $sx$ и $sy$, причисляя к этим видам следующие (повсюду $R^1a$ читается как «вслед за $a$», «после $a$», а $R^2a$ — как «до $a$», «перед $a$»):

$$x \rightarrow (R^1x)\,y \qquad (y \rightarrow (R^2y)\,x) \wedge x \wedge (R^1x)\,y$$
$$y \rightarrow (R^2y)\,x \qquad (\sim x \rightarrow (R^1 \sim x) \sim y) \wedge x \wedge (R^1x)\,y$$
$$\sim x \rightarrow (R^1 \sim x) \sim y \qquad (\sim y \rightarrow (R^2 \sim y) \sim x) \wedge x \wedge (R^1x)\,y$$
$$\sim y \rightarrow (R^2 \sim y) \sim x \qquad (x \rightarrow (R^1x)\,y) \wedge (y \rightarrow (R^2y)\,x)$$
$$(x \rightarrow (R^1x)\,y) \wedge y$$
$$\wedge (R^2y)\,x$$

и т. п. Общим для них всех является наличие условного отношения высказываний, описывающих состояния, и временно́го отношения «вслед за этим» или «до этого». И свойства этих отношений целиком определены свойствами соответствующих высказываний (они рассмотрены во второй главе). В частности,

$$(x \rightarrow (R^1x)\,y) \vdash (\sim y \rightarrow (R^2 \sim y) \sim x)$$
$$(x \rightarrow (R^1x)\,y) \wedge (y \rightarrow (R^1y)\,z) \vdash (x \rightarrow (R^1x)\,z).$$

Если $a$ есть причина $b$, то $b$ есть следствие $a$ (это — определение термина «следствие»).

Если $sx$ и $sy$ суть индивидуальные термины, то термин «причина» определяется для них следующим образом: «$sx$ есть причина $sy$» $\dashv\vdash$ $(sx \rightharpoondown a) \wedge (sy \rightharpoondown b) \wedge$ «$a$ есть причина $b$» (т. е. $sx$ есть причина $sy$, если и только если $sx$ есть $a$, $sy$ есть $b$ и $a$ есть причина $b$). Как видим, здесь предполагается, что термин «причина» сначала определяли для общих терминов, а затем — для индивидуальных.

И в этом есть резон, поскольку для общих терминов причинное отношение определяется через условное отношение высказываний, а последнее предполагает обобщения, в частности, то, что

$$(x \to (Rx)\, y) \dashv\vdash (\forall sx)\, (Rx)\, y$$

и т. д. Да и с точки зрения установления причинных отношений индивидуальных состояний $sx$ и $sy$, помимо того, что второе появляется по времени после первого, требуется еще нечто дополнительное, имеющее силу для классов состояний, элементами которых являются $sx$ и $sy$.

Этим, кстати сказать, объясняется тот факт, что большинство утверждений о причинной связи событий прошлого невозможно подтвердить и невозможно отвергнуть, поскольку для них невозможно построить истинные высказывания типа $x \to (Rx)\, y$. Здесь опять-таки вместо логической убедительности обычно прибегают к неявным соглашениям считать одни события причиной других, т. е. неявным образом утверждения вида «$a$ причина $b$» принимают как постулаты, обставляя это свое решение всякого рода разговорами. Последние называют обоснованием принятого утверждения.

Частными случаями причинных отношений $sx$ и $sy$ являются такие, в которых так или иначе фигурирует вероятность событий. Это, например, отношения, фиксируемые высказываниями вида «Вероятность того, что $sx$ есть причина $sy$, есть $\alpha$ (равна $\alpha$, больше $\alpha$ и т. п.)», «Если $x$, то вслед за этим наступает $sy$ с вероятностью $\alpha$» и т. п.

## § 33. Детерминизм и индетерминизм

Понятие детерминизма (и его отрицания — индетерминизма) неоднозначно. Оно употребляется по крайней мере в таких смыслах.

Под детерминизмом понимают прежде всего такой принцип: для всякого эмпирического состояния (события) имеется некоторое другое состояние, являющееся его причиной (все происходящее имеет причину или ничто не происходит без причины). Модификацией этого принципа является следующее допущение: для всякого эмпирического состояния можно отыскать другое состояние, являющееся его причиной (для всего можно отыскать причину). Это допущение не только признает существование причин любых состояний, но и возможность их нахождения. Оно, очевидно, сильнее.

Индетерминизм, в свою очередь, понимается как отрицание приведенных выше принципов. Причем отрицание первого означает допущение состояний, не имеющих причин (беспричинных событий). Отрицание же второго означает лишь допущение того, что в некоторых случаях найти причины событий нельзя.

Детерминизм, далее, понимается как допущение, согласно которому для каждого эмпирического состояния $sx$ имеется такое состояние $sy$, что $y \to (Ry)\, x$ с вероятностью 1, где $R$ есть некоторое временнóе отношение. Если $a$ и $b$ суть переменные для высказываний об эмпирических предметах, то это допущение запишется так:

$$(\forall a)(\exists b)(b \to (Rb)\, a).$$

Усилением этого допущения является допущение, согласно которому для каждого эмпирического состояния $sx$ не только имеется указанное выше состояние $sy$, но его можно и обнаружить. Отрицание же детерминизма в таком понимании понимается как допущение, согласно которому имеются случаи, когда $y \to (Ry)\, x$ с вероятностью 1 найти невозможно, а возможно лишь с вероятностью меньше единицы. А это — уже совершенно иной аспект дела.

Детерминизм понимается также в более узком смысле, а именно — как принцип, согласно которому, если имеются достаточно полные и точные сведения о состоянии данной области мира в данное время, то можно предсказать ее состояние в последующее время. Физический детерминизм есть еще более узкий принцип: если известны импульсы и траектории физических тел в настоящее время, то можно предвидеть их положения в последующее время. К вопросу о таком детерминизме мы вернемся ниже.

## § 34. Другие виды связей

В языке употребляется огромное число выражений, обозначающих эмпирические связи: «зависимость», «влияние», «неразрывно связаны», «порождение», «совместность» и т. п. В большинстве случаев они аморфны, многосмысленны, зависят от контекста и от особенностей среды употребления и т. д. Конечно, наивно рассчитывать навести здесь строгий логический порядок. Мы лишь обратим внимание читателя на два момента: 1) анализ этих выражений обнаруживает ту или иную комбинацию высказываний типа $x \rightarrow (Rx)\, y$; 2) эти комбинации весьма разнообразны, их число и степень устойчивости определяются лишь соображениями практической целесообразности.

Например, совместность предметов можно определить так: $a$ и $b$ совместны, если и только если всегда и везде имеет силу утверждение

$$(E(a) \leftrightarrow E(b)) \wedge (\neg E(a) \leftrightarrow \neg E(b)).$$

Совместность признаков можно определить так: $P$ и $Q$ совместны, если и только для любого предмета $a$ имеет силу утверждение

$$(P(a) \leftrightarrow Q(a)) \wedge (\neg P(a) \leftrightarrow \neg Q(a)).$$

Часто употребляется выражение «зависимость» («зависит»). Оно многосмысленно. В частности, речь может идти о зависимости состояния от другого состояния, состояния от недифференцируемого предмета, предмета от состояния, предмета от предмета. И в каждом случае, в свою очередь, есть вариации. Например, возможны такие определения: 1) $sx$ зависит от $sy$, если и только если $x$ при условии $z$ и $\sim x$ при условии $z \wedge y$; 2) $sx$ зависит от $sy$, если и только если $x$ при условии $z$ и $\sim x$ при условии $z \wedge \sim y$. Как видим, в определяющей части (1) фигурирует $z \wedge y$, а (2) — $z \wedge \sim y$. Кроме того, зависимость иногда понимают как воздействие, как взаимодействие, как причинную связь и т. д.

## § 35. Система связей

Системой связей мы называем такое скопление связей, в котором связи в свою очередь являются элементами связей (т. е. связи связей).

Тривиальный пример системы связей: тело $a$ воздействует иа тело $b$ и тело $c$ воздействует на $b$; если воздействие $c$ на $b$ описывается высказыванием $x$ и имеет место, то воздействие $a$ на $b$ фиксируется высказыванием $y$; таким образом, имеем $x \rightarrow (R)\, y$, где $R$ есть «одновременно с этим»; но если $c$ не воздействует на $b$, т. е. верно $\sim x$, то воздействие $a$ на $b$ будет фиксироваться высказыванием $z$ таким, что $\sim (y \wedge z)$; получим $\sim x \rightarrow (R)\, z$; здесь связь $c$ и $b$ влияет на связь $a$ с $b$, как указано выше.

Две связи находятся в свою очередь в связи, если и только если элементы одной из них находятся в связи с элементами другой, причем наличие такой связи оказывает влияние на характер по крайней мере одной из них (т. е. если ее исключить, то связь элементов последней будет иной). Аналогично для системы из трех и более связей.

Две и более связей могут образовать систему так, что их можно рассматривать как сложную связь. Так, приведенную выше в примере систему можно рассматривать как сложную связь, в которой $a$ и $c$ воздействуют на $b$.

Из определения следует, что связи $x \rightarrow (R^1x)y$ и $y \rightarrow \rightarrow (R^2y)z$ не образуют систему, ибо ни одна из них не влияет на характер другой.

Из высказываний об одних связях системы логически не следует высказывания о других связях без дополнительных допущений внелогического порядка. Из высказываний об отдельных связях системы логически не следует высказывание о сложной связи, которую они образуют, без дополнительных внелогических допущений. Так, из высказывания о характере воздействия $a$ на $b$ логически не следует высказывание о характере воздействия $c$ на $b$, а из высказываний о воздействии $a$ на $b$ и $c$ на $b$ логически не следует высказывание о характере совместного воздействия $a$ и $c$ на $b$ без некоторого внелогического правила сложения воздействий (вроде правила параллелограмма сил).

## § 36. О логической ситуации в микрофизике

Особенность свойств и условий исследования явлений микромира сравнительно со свойствами и условиями исследования явлений макромира породили мысль об особой логике микромира (логике микрофизики, логике квантовой механики), принципиально отличной от той привычной логики, которая сложилась на основе изучения явлений макромира.

При обосновании тезиса особой логики для микрофизики ссылаются, с одной стороны, на исключительные свойства объектов микромира и, с другой стороны, на исключительные условия их познания. Однако логика вообще не есть теория бытия, и ее правила одинаковы для всех наук, к каким бы сферам бытия они ни относились. Различие сфер бытия (т. е. областей познания) сказывается на правилах логики лишь в том, что в разных ситуациях могут фигурировать термины и высказывания с различной логической структурой. Разумеется, при этом могут использоваться и различные правила логики. Но из этого никак не следует, что одно и то же правило логики в одной ситуации ведет к положительным результатам, а в другой — к ошибкам. Если в какой-то области науки складывается ситуация, когда кажется, будто применение некоторых правил логики ведет к ошибкам, то это должно порождать не сомнение в универсальности этих правил и стремление построить особую логику для этой области науки, а стремление найти источник недоразумений в смешении различных логических операторов, в отсутствии должной их дифференциации или в неправильном (неуместном) их употреблении.

Логическая ситуация в микрофизике считается из ряда вон выходящей потому, что в ней встречаются высказывания, которые не являются истинными и не являются ложными, т. е. обладают некоторым третьим значением истинности («неопределенно»).

Кроме того, в микрофизике встречаются пары высказываний, которые связаны так, что если одно из высказываний истинно или ложно, то другое неопределенно (дополнительные высказывания).

Но факт трехзначности высказываний не является исключительной особенностью микрофизики, идеи многозначной логики были известны в логике до возникновения квантовой механики, а правила трехзначной логики являются столь же универсальными, как и правила двузначной логики, независимо от того, встречаются вообще где-либо случаи для их применения или нет.

Аналогично обстоит дело с дополнительными высказываниями. Такого рода зависимости высказываний встречаются не только в микрофизике. Но если бы даже дополнительные высказывания были исключительной привилегией микрофизики, обнаружение их не ведет ни к какому перевороту в способах рассуждения, как и обнаружение трехзначности высказываний вообще. Поясним, в чем тут дело.

В первой главе мы уже отмечали, что для установления правил вывода и их применения вообще не играет роли, сколько значений истинности приписывается высказываниям. Эти правила по природе своей таковы, что для установления и применения их достаточно оперировать одним значением истинности «истинно» и его отрицанием «неистинно». А в силу сводимости всех предикатов значений истинности к «истинно» всякое описание, использующее три значения истинности, может быть заменено адекватным ему описанием, использующим лишь значение «истинно» и его отрицание.

Ситуация в микрофизике, породившая идею особой логики микрофизики, заключается в следующем:

1) чтобы принять или отвергнуть высказывание об импульсе микрочастицы, необходимо иметь возможность его измерить; аналогично для координат;

2) но если имеется возможность точно измерить импульс (координаты) частицы, то при этом оказывается невозможным точное измерение координат (импульса).

Как видим, ситуация описана вообще без использования предикатов истинностных значений, что вполне соответствует нашему утверждению (в первой главе) об элиминируемости этих предикатов из языка. Но эти предикаты используют, что и служит базой для дискуссии.

Примем сокращения:

1) $P(a)$ — «Импульс частицы $a$ можно точно измерить»;

2) $Q(a)$ — «Координаты частицы $a$ можно точно измерить»;

3) $S(a)$ — «Импульс $a$ равен $\alpha$»;

4) $T(a)$ — «Координаты $a$ равны $\beta$».

Для высказываний $P(a)$ и $Q(a)$ и их отрицаний $\neg P(a)$ и $\neg Q(a)$ имеют силу такие положения:

1) $x$ истинно, если и только если на самом деле $x$ (где $x$ есть любое из них);

2) $P(a)$ ложно, если и только если $\neg P(a)$ истинно; $\neg P(a)$ ложно, если и только если $P(a)$ истинно; аналогично для $Q(a)$ и $\neg Q(a)$;

3) отрицание истинности («неистинно») и ложность для таких высказываний совпадают (они двузначны).

Для высказываний $S(a)$ и $T(a)$ и их отрицаний $\neg S(a)$ и $\neg T(a)$ имеют силу такие положения:

1) $S(a)$ истинно, если и только если $P(a)$ истинно и на самом деле $S(a)$; аналогично $T(a)$ истинно, если и только если $Q(a)$ истинно и на самом деле $T(a)$; $\neg S(a)$ истинно, если и только если $P(a)$ истинно и на самом деле $\neg S(a)$; $\neg T(a)$ истинно, если и только если $Q(a)$ истинно и на самом деле $\neg T(a)$; отличие от первого пункта

для $P(a)$ и $Q(a)$ здесь в том, что в качестве условия истинности $S(a)$ и $\neg S(a)$ предполагается $P(a)$, а в качестве условия истинности $T(a)$ и $\neg T(a)$ предполагается $Q(a)$;

2) $S(a)$ неопределенно, если и только если $P(a)$ ложно; $\neg S(a)$ неопределенно, если и только если $P(a)$ ложно; $T(a)$ неопределенно, если и только если $Q(a)$ ложно; $\neg T(a)$ неопределенно, если и только если $Q(a)$ ложно; здесь, в отличие от $P(a)$ и $Q(a)$, возможность проверки $S(a)$, $T(a)$ и их отрицаний поставлена в зависимость от истинности и ложности других высказываний, так что становится возможным ввести третье значение «неопределенно»;

3) $S(a)$ ложно, если и только если $\neg S(a)$ истинно; $\neg S(a)$ ложно, если и только если $S(a)$ истинно; $T(a)$ ложно, если и только если $\neg T(a)$ истинно; $\neg T(a)$ ложно, если и только если $T(a)$ истинно.

Между $P(a)$ и $Q(a)$ имеет место такая зависимость: если истинно одно из них, то ложно другое.

Из принятых предпосылок получается следствие: если одно из $S(a)$ и $T(a)$ истинно или ложно, то другое из них неопределенно.

Примем определение. Два высказывания $x$ и $y$ называются дополнительными, если и только если имеет место такая зависимость: если одно из них истинно илн ложно, то другое неопределенно.

Согласно этому определению и ранее полученному утверждению высказывания $S(a)$ и $T(a)$ суть дополнительные высказывания.

Очевидно, что конъюнкция $x \wedge y$ дополнительных высказываний $x$ и $y$ не может быть истинной, поскольку для нее по определению имеет силу следующее: она ложна, если одно из $x$ и $y$ ложно; если же одно из $x$ и $y$ истинно, то $x \wedge y$ неопределенна, поскольку неопределенно другое из $x$ и $y$; она неопределенна, если неопределенны оба $x$ и $y$.

Мы описали логическую ситуацию с высказываниями $S(a)$ и $T(a)$ в терминах трехзначной логики. Но то же самое описание можно осуществить и в терминах двузначной логики со значениями «истинно» и «неистинно». Для этого достаточно повсюду заменить выражения с терминами «неопределенно» и «ложно» адекватными им выражениями с терминами «истинно» и «неистинно». А именно, это делается так:

1) для высказываний $P(a)$, $Q(a)$ и их отрицаний не-

определенности исключены по условию, а выражения «$x$ ложно» заменяются на «$x$ неистинно»;

2) выражения «$x$ неопределенно» для высказываний $S(a)$ и $\neg S(a)$ заменяются на выражения «$P(a)$ неистинно» или «$\neg P(a)$ истинно», а для высказываний $T(a)$ и $\neg T(a)$ — на выражения «$Q(a)$ неистинно» или «$\neg Q(a)$ истинно»;

3) выражение «$S(a)$ ложно» заменяется на «$\neg S(a)$ истинно», «$\neg S(a)$ ложно» — на «$S(a)$ истинно», «$T(a)$ ложно» — на «$\neg T(a)$ истинно», «$\neg T(a)$ ложно» — на «$T(a)$ истинно».

Если приведенные замены нельзя осуществить, то термины «неопределенно» и «ложно» остаются бессмысленными (т. е. пустой звук).

Более того, рассматриваемую логическую ситуацию вообще можно описать без терминов значений истинности, причем — очень просто.

Примем такое определение. Высказывания $Q^1(b)$ и $Q^2(b)$ будем считать дополнительными, если и только если с ними координированы такие высказывания $P^1(b)$ и $P^2(b)$, что

1. $P^1(b) \to \sim P^2(b)$
2. $Q^1(b) \to P^1(b)$
3. $Q^2(b) \to P^2(b)$
4. $\neg Q^1(b) \to P^1(b)$
5. $\neg Q^2(b) \to P^2(b)$.

Из утверждений 1—5 по правилу У$^3$ следует:

6. $P^2(b) \to \sim P^1(b)$
7. $\sim P^1(b) \to \sim Q^1(b)$
8. $\sim P^2(b) \to \sim Q^2(b)$
9. $\sim P^1(b) \to \sim \neg Q^1(b)$
10. $\sim P^2(b) \to \sim \neg Q^2(b)$.

Из 1,2 и 4 по У$^6$ следует:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \to \sim P^2(b).$$

Из 6,3 и 5 по У$^6$ следует:

$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \to \sim P^1(b).$$

Из 8 и 10 по У$^5$ следует:

$$\sim P^2(b) \to \sim Q^2(b) \wedge \sim \neg Q^2 b.$$

Из 7 и 9 по У$^5$ следует:

$$\sim P^1(b) \to \sim Q^1(b) \wedge \sim \neg Q^1(b).$$

В результате по $У^4$, $Д^{16}$ и $У^1$ имеем:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \rightarrow \sim Q^2(b) \wedge \sim \neg Q^2(b)$$

$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \rightarrow \sim Q^1(b) \wedge \sim \neg Q^1(b).$$

Введя оператор неопределенности по $П^1$ получим:

$$Q^1(b) \vee \neg Q^1(b) \rightarrow ?\ Q^2(b)$$

$$Q^2(b) \vee \neg Q^2(b) \rightarrow ?\ Q^1(b)$$

и, далее, по $П^1$ и $Д^6$

$$\sim ?\ Q^1(b) \rightarrow ?\ Q^2(b)$$

$$\sim ?\ Q^2(b) \rightarrow ?\ Q^1(b).$$

Таким образом, если высказывания дополнительны, то из отрицания неопределенности одного следует неопределенность другого.

Если $x$ и $y$ суть дополнительные высказывания, то $\vdash \sim (x \wedge y)$. В самом деле, возьмем

(1) $Q^1(b) \wedge Q^2(b)$.

Поскольку в силу 1 и 2 по правилам $У^i$

(2) $\vdash Q^1(b) \wedge Q^2(b) \rightarrow P^1(b) \wedge P^2(b)$,

то в силу 6 и по $У^i$ имеем

(3) $\vdash Q^1(b) \wedge Q^2(b) \rightarrow P^1(b) \wedge \sim P^1(b)$

А так как по $Д^{13}$ и по $У^3$

(4) $\vdash \sim (P^1(b) \wedge \sim P^1(b))$

(5) $\vdash \sim (P^1(b) \wedge \sim P^1(b)) \rightarrow \sim (Q^1(b) \wedge Q^2(b))$,

по $Д^{16}$, $У^1$ и $Д^{14}$ имеем

$$\vdash \sim (Q^1(b) \wedge Q^2(b)).$$

## § 37. О прогнозах

Логически обоснованные прогнозы относительно эмпирических состояний строятся по схеме

$$x^* \wedge y \rightarrow z^*,$$

где $x^*$ есть совокупность высказываний $x$ о состоянии той или иной области мира $A$ во время $t^1$ (т. е. $x^*$ есть «$x$ в $t^1$»), $z^*$ есть совокупность высказываний $z$ о состоянии $A$

во время $t^2$ после $t^1$ (т. е. $z^*$ есть «$z$ в $t^2$»), а $y$ есть совокупность высказываний, благодаря которой из $x^*$ получается $z^*$ и без которой из $x^*$ получить $z^*$ невозможно. Высказывание $z^*$ есть прогноз относительно $A$, если оно получено в $t^1$. Будем называть $x$ эмпирическим условием прогноза $z^*$, а $y$ — логическим условием прогноза $z^*$.

Логическое условие $y$ прогноза $z^*$ либо непосредственно есть высказывание типа $w \to v$, либо в логике имеются правила такие, что

$$\vdash y \leftrightarrow (w \to v)$$

$$y \dashv \vdash (w \to v).$$

Причем $w \to v$ есть такое высказывание, что по правилам логики (в частности, по правилам подстановки терминов на место переменных или видовых терминов на место родовых) из него получается высказывание

$$x^* \to z^*.$$

Последнее (как и первое) есть высказывание о связи, поскольку в нем фигурирует временно́е отношение эмпирических состояний.

Детерминизм, как уже отмечалось, понимается так же как эвристический принцип, согласно которому можно предсказать состояние $A$ в $t^2$ с любой степенью полноты и точности (приближения), если только можно знать состояние $A$ в $t^1$ с достаточной степенью приближения. Предельный случай — если состояние $A$ в $t^1$ известно с абсолютной полнотой и точностью, то с той же степенью полноты и точности можно предсказать, каким будет состояние $A$ в $t^2$.

Обращаем внимание на то, что сам рассматриваемый принцип имеет строение $C \to Д$. Так что если будет установлено, что $C$ неверно, то из этого никак не будет следовать ошибочность самого $C \to Д$. Последнее может быть истинным при неистинном $C$ и может быть неистинным при истинном $C$. С логической точки зрения верное утверждение о том, что невозможно в данное время $t^1$ знать об $A$ все и с полной точностью, не есть еще само по себе аргумент против принципа детерминизма. В частности, утверждение «Если нам известно об $A$ в $t^1$ все, то мы можем точно предсказать состояние $A$ в $t^2$» нельзя подтвердить, но нельзя и опровергнуть, если в $t^1$ об $A$ знать все невозможно. Но в качестве резкой (крайней) формулировки некоторого эвристического принципа, который с массой оговорок и лишь в некоторых случаях дает положительный эффект, оно не таит в себе ничего страшного. Вообще принцип детерминизма даже в такой крайней формулировке (как и многие другие принципы, которые стало модным «опровергать» со ссылками на прогресс науки) заслуживает более снисходительного отношения, чем это принято.

Второе обстоятельство, на которое следует обратить здесь внимание, состоит в том, что в формулировках принципа детерминизма обычно указывают только на эмпирическое условие прогноза и опускают логическое условие. Включает ли этот принцип допущение неограниченной возможности нахождения логических условий прогнозов или нет? В зависимости от того или иного ответа на вопрос получаются весьма различные принципы.

Если даже допустить неограниченную возможность построения высказываний $w \rightarrow v$, образующих логическое условие прогнозов для отдельных состояний, существование дополнительных высказываний ведет к такому следствию.

Если в высказываниях $A^1 \rightarrow B$ и $A^2 \rightarrow C$ антицеденты $A^1$ и $A^2$ суть дополнительные высказывания, то $A^1 \wedge A^2$ не может быть истинным, и воспользоваться объединением этих условных высказываний в $A^1 \wedge A^2 \rightarrow B \wedge C$ практически невозможно.

Высказывания, позволяющие делать прогнозы и сводимые в конце концов к виду $w \rightarrow v$, строятся и имеют силу при определенных условиях. Если в $A^1 \rightarrow B$ и $A^2 \rightarrow C$ высказывания $A^1$ и $A^2$ дополнительны, то они дополнительны при одних и тех же условиях. Но тогда из них может быть использовано лишь одно. Они оба могут быть использованы лишь при разных условиях $\alpha$ и $\beta$, которые несовместимы, т. е. для которых верно $\sim(\alpha \wedge \beta)$. Так что либо одни и те же условия, но $\sim(A^1 \wedge A^2)$, либо разные условия, но $\sim(\alpha \wedge \beta)$.

Дополнительные высказывания суть частный случай отношения высказываний, при котором $A^1 \rightarrow \sim A^2$, и условия истинности $\alpha$ и $\beta$ высказываний соответственно $A^1$ и $A^2$ также находятся в зависимости $\alpha \rightarrow \sim \beta$. В результате объединение $A^1 \rightarrow B$ и $A^2 \rightarrow C$ в $A^1 \wedge A^2 \rightarrow B \wedge C$ оказывается практически бесполезным делом. А поскольку здесь имеют дело с эмпирическими связями, для которых по определению из $A^1 \wedge A^2$ логически не следует $B \wedge C$, то такого рода сложные высказывания не могут быть истинными.

Таким образом, существование дополнительных высказываний имеет неизбежным следствием невозможность построения в ряде случаев таких истинных высказываний, которые могли бы стать логическим условием прогнозов.

## § 38. Эвристические гипотезы

Эвристические допущения являются внелогическими С логической точки зрения они выполнимы, но недоказу емы в логике. Далее, они не могут быть подтверждены или отвергнуты эмпирически. Они утверждают лишь возможность или невозможность построить какие-то высказывания в данной области науки, но не определяют эти высказывания конкретно, т. е. в терминах данной науки. Они не расширяют дедуктивные возможности науки, но лишь ориентируют исследование в некотором направлении. Они должны быть построены так, чтобы не получались логические противоречия по их вине. Не существует никаких логических критериев предпочтения одних эвристических допущений другим, за исключением случаев, когда между ними самими возможно установить дедуктивные отношения.

К числу эвристических допущений относятся общие утверждения «Всякое качественное изменение есть следствие количественных изменений», «Природа непрерывна», «Всякие природные процессы не кончаются мгновенно (имеют некоторую инерцию)» (на этом основывается экстраполяция), «Природа не делает скачков» (на этом основывается интерполяция), «Все происходит скачкообразно», «Всякие природные процессы рано или поздно затухают (прекращаются)», «Всякий прогресс рано или поздно достигает предела», «Все объекты в природе упорядочены», «В природе господствует хаос» и т. д.

Вернемся к утверждению

$$(\forall a)(\exists b)(b < aa),$$

где $a$ и $b$ суть переменные состояний Мира во времени. Мы рассматривали его выше не с точки зрения истинности или неистинности, а исключительно с точки зрения его логического строения. В такой же мере предметом нашего внимания может стать противоположное утверждение «Мир имеет начало во времени», которое мы в логически явной форме можем представить так:

$$(\exists a)(\forall b)(b \geqslant \alpha a).$$

Но какое из этих утверждений принимать или отвергать, это не входит в компетенцию логики. Заметим по этому поводу лишь следующее.

В связи с тем, что в первом утверждении пересмотреть все состояния Мира в прошлое невозможно, ибо по самому этому допущению число их бесконечно, а во втором утверждении нельзя указать, какое конкретное состояние Мира является начальным, для эмпирического познания совершенно безразличны оба рассматриваемые утверждения. Принятие любого из них по отдельности само по себе еще не ведет ни к какому логическому противоречию.

Аналогично обстоит дело с другими общими гипотезами о Мире: одно дело — анализ их логического строения и экспликация, другое дело — вопрос об их принятии. Возьмем такую гипотезу: «Пространство везде и всегда непусто». На языке логики ее можно эксплицировать так:

$$(\forall s)(\forall t)(\exists a)\, Ets(a),$$

где $s$ — переменная пространства, $t$ — переменная времени, $a$ — переменная тела. Но насколько это верно — проверить невозможно. И таких гипотез имеется много: «Нет чистой длительности», т. е.

$$(\forall t)(\exists a)\, Et(a),$$

где $a$ есть переменная изменений; «Если нечто возникло, то оно рано или поздно уничтожится»; «Если нечто имеет конец, то оно имеет и начало» и т. п. К числу таких гипотез относятся и гипотезы о бесконечности Мира в пространстве и во времени в будущее, об инертности природы и т. п.

Однако имеются случаи, когда логика компетентна принимать или отвергать такого рода утверждения. Это — случаи, когда те или иные утверждения или их отрицания выводятся по правилам логики из определений (явных или неявных) терминов, входящих в эти утверждения. Имеются также случаи, когда логика компетентна сказать, что то или иное утверждение неопределенно. И мы случаи такого рода рассматривали неоднократно выше. Общего критерия различения утверждений на логические (верифицируемые в логике) и внелогические (безразличные к построениям логики) нет. Вопрос решается конкретно, применительно к каждому частному случаю. Причем здесь могут быть неожиданности и парадоксальные на первый взгляд явления. Так, мы видели, что утверждения о минимальных длинах и длительностях и максимальных скоростях суть логические утверждения, а утверждения о конечности и бесконечности Мира — внелогические, хотя казалось бы должно быть наоборот.

Рассмотрим несколько подробнее гипотезы о существовании начала Мира во времени и об отсутствии такого начала. На их примере сформулируем некоторые важные общелогические принципы и идеи относительно логического анализа языковых конструкций такого рода вообще.

Прежде всего запишем эти гипотезы в логически явном виде. Пусть $x$ и $y$ суть переменные терминов эмпирических событий, а $t$ есть способ установления временнóго порядка событий. Гипотеза «Мир не имеет начала во времени» запишется так:

(1) $(\forall x)(\exists y)(x > ty)$

(т. е. для всякого события найдется другое событие, которое произошло раньше его). Гипотеза «Мир имеет начало во времени» запишется так:

(2) $(\exists x)(\forall y)(x \leqslant ty)$

(т. е. имеется такое событие, что все прочие события произошли либо одновременно с ним, либо после него).

Из (1) следует $\sim$(2), а из (2) следует $\sim$(1). Но рассматривать одну из (1) и (2) просто как отрицание другой нельзя, так как возможен третий случай, а именно

(3) $\sim(1) \wedge \sim(2)$,

т. е. случай с неопределенностями (причем здесь возможно несколько вариантов). Дабы не усложнять дело, мы не рассматриваем $t$ как переменную и не вводим кванторы для такой переменной. Если это сделать, то число вариантов увеличится, так как придется учитывать комбинацию с $(\forall t)$ (1), $(\exists t)$ (1), $(\forall t)$ (2), $(\exists t)$ (2) и их отрицаниями. Как видим, рассматриваемые гипотезы многосмысленны не только из-за двусмысленности слова «начало» (см. выше), но и вследствие вариаций их явной записи. Мы ограничимся лишь вариантами (1), (2) и (3).

Прежде всего следует сказать, что эти гипотезы суть внелогические утверждения. Это можно показать обычными средствами логики, доказав независимость каждой из $\vdash$ (1), $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3) от аксиом и правил вывода логики. Эти гипотезы, далее, логически выполнимы, т. е. в рамках логики недоказуемы утверждения $\vdash \sim$ (1), $\vdash \sim$ (2) и $\vdash \sim$ (3). Принятие любой из $\vdash$ (1), $\vdash$ (2), $\vdash$ (3) по отдельности само по себе не ведет к противоречию. И в частности, если принять $\vdash$ (1), то в полученной системе не будут доказуемы $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3); если принять $\vdash$ (2), не будут доказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (3); если принять $\vdash$ (3), то не будут доказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (2). Принятие какой-то пары из них совместно исключено правилами логики. Если из какой-то совокупности внелогических утверждений $w$ следует конъюнкция двух из них, то $w$ логически противоречива. А эмпирически проверить эти гипотезы невозможно.

Непротиворечивость системы, полученной путем присоединения $\vdash$ (1) к логике, можно доказать, найдя подходящую семантическую интерпретацию формул вида $\vdash \alpha\,(a > \beta b)$, где $\alpha$ есть какая-то (возможно, пустая) последовательность кванторов. В частности, это можно сделать так: если $a$ и $b$ различны, то $a > \beta b$ можно приписать значение $v$; если $a > \beta b$ можно приписать значение $v$, то $\vdash (\exists b)\,(a > \beta b)$ имеет значение $v$. Эти семантические правила не затрагивают утверждений логики. Аналогично можно доказать непротиворечивость системы, полученной путем присоединения к логике $\vdash$ (2) или $\vdash$ (3). В силу непротиворечивости таких систем в системе с $\vdash$ (1) недоказуемы $\vdash$ (2) и $\vdash$ (3); в системе с $\vdash$ (2) недоказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (3); в системе с $\vdash$ (3) недоказуемы $\vdash$ (1) и $\vdash$ (2). Так что никакого логического предпочтения ни одной из гипотез отдать нельзя. Известные кантовские антиномии, относящиеся к пространству и времени, суть просто результат плохой логической обработки терминологии, смешения различных понятий и неявных допущений.

Совершенно аналогично обстоит дело с бесконечностью Мира в пространстве. Здесь из допущения одной из трех (по крайней мере трех) взаимоисключающих возможных гипотез также не следует необходимость признания другой, и никакого логического предпочтения ни одной из них отдать нельзя.

Аналогично обстоит дело с такими гипотезами: (1) «Число индивидов любого скопления эмпирических индивидов в любое данное время конечно»; (2) внутреннее отрицание (1); (3) конъюнкция внешних отрицаний (1) и (2). Частный случай гипотезы (1) — гипотезы «Число эмпирических индивидов в Мире в любое данное время конечно», «Число эмпирических индивидов любого класса в любое данное время конечно».

Гипотезы «Из ничего ничто не возникает» и «Нечто не превращается в ничто» можно эксплицировать разными способами и в частности — соответственно так:

1. $(\forall a)(\exists b)((\neg E(a) \Rightarrow E(a)) \rightarrow (b \Rightarrow a))$
2. $(\forall a)(\exists b)((E(a) \Rightarrow \neg E(a)) \rightarrow (a \Rightarrow b))$.

Из этих гипотез получаются логические следствия, например такие:

$$(\forall a)(\exists b)((\neg E(a) \Rightarrow E(a)) \rightarrow (E(b) \Rightarrow \neg E(b))$$
$$(\forall a)(\exists b)((\neg Et^1(a) \Rightarrow Et^2(a)) \rightarrow Et^1(b))$$
$$(\forall a)(\exists b)((E(a) \Rightarrow \neg E(a)) \rightarrow (\neg E(b) \Rightarrow E(b))$$
$$(\forall a)(\exists b)((Et^1(a) \Rightarrow \neg Et^2(a)) \rightarrow Et^2(b)).$$

Этот пример свидетельствует о том, что при исследовании эвристических гипотез возможно отыскать некоторое число таких гипотез, из которых по правилам логики выводятся (с той или иной степенью полноты) другие гипотезы. Эта выводимость возможна постольку, поскольку эвристические гипотезы являются действительно общими (не предполагают термины частных наук) и поддаются экспликации в рамках языка логики.

Приведенные гипотезы интересны также вот с какой точки зрения. Они имеют смысл не для любых эмпирических предметов. Возьмем, например, отношение «$a$ тяжелее $b$» и уничтожим $a$. Это отношение $a$ и $b$ перестает существовать, но оно не превращается при этом ни во что другое. Или, создав предметы $a$ и $b$ и установив между ними некоторое пространственное отношение $R$, мы создаем отношение $aRb$. Но указать, что́ именно превратилось в это отношение, затруднительно, поскольку смысл всех употребляемых здесь языковых выражений препятствует этому. А ограничение осмысленности этих гипотез некоторыми определенными логическими типами предметов есть часть имплицитного определения последних. В данном случае сказать, что рассматриваемые гипотезы имеют смысл лишь для эмпирических тел, значит в неявной форме принять это в качестве части имплицитного определения.

## § 39 Общие утверждения о Мире и физические допущения

Между фундаментальными допущениями физики и общими утверждениями о Мире имеет место логическая связь, которая обнаруживается лишь при условии логической экспликации содержащих их языковых выражений. Отметим важнейшие особенности этой связи.

Возьмем, например, физическое допущение $A$: «Тело сохраняет состояние прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния». Его частично можно эксплицировать так: «Если тело движется и на него не действуют никакие силы ($X$), то оно движется прямолинейно и равномерно ($Y$), и при этом $(\forall a)\,(\exists b)\,(b > \alpha a)$», где $a$ и $b$ суть переменные для положений тела в пространстве, а $\alpha$ есть некоторый способ установления пространственного порядка. Из $A$ логически следует утверждение $B$: «Если $X$, то $(\forall a)\,(\exists y)\,(y > \alpha a)$», где $y$ есть переменная для эмпирических индивидов.

Пусть, далее, принято допущение конечности Мира в пространстве, эксплицируемое так, что из него следует утверждение $(\exists x)\,(\forall y)\,(x \geqslant \alpha y)$, где $x$ и $y$ суть переменные для эмпирических индивидов. Из последнего следует $\sim (\forall a)\,(\exists y)\,(y > \alpha a)$, где $a$ есть переменная для положений тела в пространстве (утверждение $C$). Из $B$ и $C$ следует $\sim X$. Таким образом, допущение конечности Мира в пространстве имеет своим следствием неистинность $X$, а это исключает возможность использования $A$ для получения истинных следствий.

Из сказанного не следует, что в интересах физики здесь надо принять допущение бесконечности мира в пространстве. Из сказанного следует лишь то, что если принимается закон инерции для движения, то нельзя принимать допущение конечности Мира в пространстве, ибо это допущение делает рассматриваемый закон практически бесполезным. Логического противоречия, однако, здесь еще не возникает. Но если все же приходится выбрать какое-то из двух упомянутых утверждений о Мире, то предпочтение следует отдать, очевидно, утверждению о бесконечности Мира в пространстве.

Можно показать, что допущения «Из ничего ничто не возникает» и «Нечто не превращается в ничто» логически несовместимы с допущениями конечности Мира во времени в прошлом и, соответственно, в будущем. Из этого не следует, что нужно принять допущения бесконечности Мира во времени в прошлом и будущем. Но здесь имеет место более жесткая логическая связь, чем выше, а именно — логическое противоречие между допущениями. И опять-таки это может служить основанием для предпочтения одних гипотез другим.

Далее, имеются физические допущения, из экспликации которых можно вывести утверждение $A$ о том, что всякий эмпирический индивид имеет непрерывное окружение (погружен в сплошную среду) из эмпирич ских индивидов. Эксплицируем $A$ следующим образом: $(\forall\alpha)\,(\forall a)\,(\exists b)((b > \alpha a) \wedge (a \parallel \alpha b))$, где $a$ и $b$ суть переменные для эмпирических индивидов, а $\alpha$ есть переменная для способов установления пространственного порядка. Из $A$ следуют утверждения $B$ и $C$ соответственно такие: $(\forall\alpha)\,(\forall a)\,(\exists b)\,(b > \alpha a)$ и $(\forall\alpha)\,(\forall a)\,(\exists b)\,(a \parallel \alpha b)$. Первое из них есть экспликация утверждения о бесконечности Мира в пространстве, а второе — утверждения об отсутствии абсолютной пустоты. Таким образом, утверждение о бесконечности Мира в пространстве можно получить как следствие некоторых физических гипотез. Но нельзя наоборот. Так, из $B$ и $C$ не следует $A$. Аналогичное рассуждение можно привести для времени.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Александрович Зиновьев

**Логическая физика**

*Утверждено к печати*
*Институтом философии*
*Академии наук СССР*

Редактор издательства *Н. И. Кондаков*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Художник *Р. Н. Новашинская*
Технический редактор *В. Д. Прилепская*

Сдано в набор 27/VII 1972 г. Подписано к печати 12/Х-1972 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Печ. л. 6,0. Усл. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,8.
Тираж 10700 экз. Т-16919. Бумага № 2. Тип. зак. 1017.

*Цена 59 коп.*

Издательство «Наука». 103717 ГСП,
Москва К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография Издательства «Наука». 121099,
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

# ОПЕЧАТКИ

| Страница | Строка | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|---|
| 28 | 18 св. | $x \neg P(a)$ | $x \wedge \neg P(a)$ |
| 72 | 10 сн. | $Df \cdot C(sx)$ | $Df \cdot \sim C(sx)$ |
| 125 | 4 св. | $E\alpha(a)\,(\beta < \alpha)$ | $E\alpha(a) \wedge (\quad < \alpha)$ |
| 125 | 7 сн. | $\neg\, ?\, E\beta(a)$ | $?\, E\beta(a)$ |
| 146 | 9 сн. | $\vee \sim$ | $\wedge \sim$ |
| 157 | 19 сн. | $(\mathrm{A}x)$ | $(\forall x)$ |
| 164 | 2 св. | $Q^1(a) \Rightarrow Q^2(a)$ | $Q^1(b) \Rightarrow Q^2(b)$ |