

И. И. ВОРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
НЕЛИНЕЙНОЙ  
ТЕОРИИ  
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1989

ББК 22.25  
В75  
УДК 539.3

Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории оболочек.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 376 с.— ISBN 5-02-014003-1.

Дан полный математический анализ краевых задач нелинейной теории оболочек. Для всех физически осмысленных постановок доказаны теоремы разрешимости и корректности в условиях глубокой нелинейности. Приведены условия единственности решений и условия неединственности. Получили обоснование в этом круге нелинейных задач методы приближенного решения: Бубнова — Галеркина, Рунца, Ньютона — Канторовича и др. Большое внимание уделено нелинейной устойчивости, в которой различаются две проблемы: оценка числа решений краевой задачи и выбор наиболее реального. Подробно проанализированы возможности принципа линеаризации Эйлера, дано строгое математическое обоснование существования нижних критических чисел, развит статистический подход. Основу рассмотренной составили топологические и вариационные соображения.

Для специалистов по теории оболочек и математиков, интересующихся приложениями, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Ил. 46. Библиогр. 504 назв.

**Рецензент**

доктор физико-математических наук *Н. Ф. Морозов*

В 1603040000—141 60-89  
053(02)-89

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1989

ISBN 5-02-014003-1

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава I. Основные краевые задачи нелинейной теории пологих оболочек</b>	<b>9</b>
§ 1. Некоторые соотношения теории поверхностей . . . . .	9
§ 2. $S$ -координаты в пространстве. Образование оболочки. Компоненты конечной деформации в $S$ -координатах. Система их упрощений . . . . .	20
§ 3. Гипотезы Кирхгофа — Лява. Их математическое и механическое содержание. Расчет деформаций полой оболочки на основе гипотез Кирхгофа — Лява . . . . .	25
§ 4. Потенциальная энергия деформации пологих оболочек в условиях закона Гука . . . . .	31
§ 5. Независимые перемещения, обобщенные усилия и элементарная работа внешних сил в условиях гипотез Кирхгофа — Лява . . . . .	38
§ 6. Краевые задачи теории среднего изгиба пологих оболочек в перемещениях . . . . .	41
§ 7. Краевые задачи теории среднего изгиба пологих оболочек с функцией усилий . . . . .	46
§ 8. Некоторые замечания к нелинейной теории пологих оболочек. Исторический очерк . . . . .	58
<b>Глава II. Некоторые математические вопросы . . . . .</b>	<b>62</b>
§ 9. Некоторые общие математические факты . . . . .	62
§ 10. Некоторые общие математические факты (продолжение) . . . . .	75
§ 11. Специальные функциональные пространства $H_t$ , $t = 5, 6, 7, 8$ . Свойства их элементов . . . . .	84
§ 12. Специальные функциональные пространства $H_k$ , $k = 1, 2, 3, 4$ . Свойства их элементов . . . . .	98
<b>Глава III. Топологический метод в проблеме разрешимости основных краевых задач нелинейной теории пологих оболочек в перемещениях . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 13. Обобщенная постановка краевых задач в перемещениях. Сведение к операторным уравнениям. Физическое содержание обобщенных решений . . . . .	111
§ 14. Некоторые свойства операторов $K_{tk}$ , $G_{kk}$ . . . . .	119
§ 15. Вычисление вращения векторного поля $w \in G_{kk}(w)$ на сферах большого радиуса в $H_k$ . Предварительные леммы . . . . .	125
§ 16. Вычисление вращения векторного поля $w \in G_{kk}(w)$ на сферах большого радиуса в $H_k$ . Разрешимость основных краевых задач в перемещениях . . . . .	131
<b>Глава IV. Топологический метод в проблеме разрешимости основных краевых задач нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий . . . . .</b>	<b>145</b>
§ 17. Обобщенная постановка краевых задач теории геометрически пологих оболочек в усилиях. Сведение к операторным уравнениям. Физическое содержание обобщенных решений . . . . .	145

§ 18. Основные свойства операторов $K_{\kappa}(w)$ , $G_{\kappa}(w)$ . . . . .	153
§ 19. Вычисление вращения векторного поля $w - G_{\kappa}(w)$ на сферах большого радиуса в $H_{\kappa}$ . Разрешимость основных краевых задач теории геометрически пологих оболочек с функцией усилий . . . . .	158
§ 20. Дифференциальные свойства обобщенных решений задач $ix$ и $ix$ . Условия существования классических решений . . . . .	166
<b>Глава V. Вариационный метод в проблеме разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек . . . . .</b>	<b>177</b>
§ 21. Вариационный метод в проблеме разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек в перемещениях . . . . .	177
§ 22. Вариационный метод в проблеме разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий . . . . .	191
<b>Глава VI. Некоторые численно-аналитические методы в нелинейной теории пологих оболочек . . . . .</b>	<b>200</b>
§ 23. Метод разложения по степеням малого параметра (неособое решение) . . . . .	200
§ 24. Метод разложения по степеням малого параметра (особое решение). Метод Ляпунова — Шмидта . . . . .	206
§ 25. Метод Ньютона — Канторовича . . . . .	213
<b>Глава VII. Прямые методы в нелинейной теории пологих оболочек . . . . .</b>	<b>223</b>
§ 26. Вариационные методы приближенного решения задач $ix$ ( $\kappa=1, 2, 3, 4; i=5, 6, 7, 8$ ). Вариант П. Ф. Папковича . . . . .	223
§ 27. Метод Бубнова — Галеркина — Рунца для приближенного решения задач $ix$ ( $\kappa=1, 2, 3, 4; i=5, 6, 7, 8$ ). Варианты Х. М. Мухтаров и В. З. Власова . . . . .	233
§ 28. Оценка погрешности метода Бубнова — Галеркина — Рунца (БРР) в некоторых задачах нелинейной теории пологих оболочек . . . . .	245
<b>Глава VIII. Постановка задач устойчивости. Глобальная единственность решений. Жесткость оболочек. Классы корректности . . . . .</b>	<b>257</b>
§ 29. Постановка задачи устойчивости в нелинейной теории пологих оболочек. Локальная единственность решений. Условия глобальной единственности . . . . .	257
§ 30. Физическая жесткость оболочек. Связь с геометрической жесткостью срединной поверхности . . . . .	268
§ 31. Корректность задач нелинейной теории пологих оболочек, ее соотношения с физической устойчивостью . . . . .	276
<b>Глава IX. Устойчивость в большом безмоментного напряженно-деформированного состояния пологой оболочки. Существование нижнего критического числа . . . . .</b>	<b>290</b>
§ 32. Безмоментное напряженно-деформированное состояние оболочек. Переход к линеаризованной задаче. Спектральные свойства линеаризованной задачи . . . . .	290
§ 33. Глобальная устойчивость оболочек в задачах $ix$ . Существование нижних критических чисел. Некоторые оценки для У-разбиений . . . . .	301

§ 34. Глобальная устойчивость оболочек в задачах 9ж. Существование нижних критических чисел. Некоторые оценки для У-разбиений . . . . .	315
§ 35. Ветвление решений в окрестности б. м. п. д. с. оболочек . . . . .	320
§ 36. Вариационные методы в глобальной устойчивости пологих оболочек . . . . .	325
§ 37. Некоторые задачи глобальной устойчивости пластин . . . . .	332
<b>Глава X. Статистический метод в проблеме устойчивости пологих оболочек . . . . .</b>	<b>339</b>
§ 38. Статистическая модель работы пологой оболочки при среднем изгибе . . . . .	339
<b>Некоторые нерешенные проблемы математической теории оболочек . . . . .</b>	<b>349</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>351</b>

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Истоки нелинейной теории оболочек восходят к трудам И. Г. Бубнова и Т. фон Кармана. Современное ее состояние в значительной степени обязано идеям Л. Доннела, К. Маргерра, Х. М. Муштари, В. З. Власова, В. В. Новожилова, Вей Цанг Чена и других исследователей. Бурное развитие этого раздела математической теории упругости в первую очередь связано с широкими приложениями, поскольку выяснилось, что проблема устойчивости тонкостенных конструкций в полной мере может решаться лишь на базе нелинейных краевых задач.

Вместе с этим нелинейная теория оболочек может рассматриваться как широкое развитие классической задачи Плато, и в этом ее большое естественнонаучное значение. Действительно, задача Плато относится к поверхностям с вполне определенным законом деформирования: плотность потенциальной энергии деформации пропорциональна изменению площади элемента. Между тем в теории оболочек рассматриваются поверхности, у которых плотность потенциальной энергии деформации есть некоторая скалярная функция тензора деформации, что в значительной степени осложняет проблему, придавая ей вместе с этим и больший естественнонаучный интерес, и большое практическое значение. Имеется громадное количество работ, в которых исследуются конкретные задачи нелинейной теории оболочек. Однако нет ни одной задачи этой теории, когда бы ее решение можно было получить в сколь-нибудь замкнутой форме. Поэтому здесь используется широкий комплекс приближенных методов с применением ЭВМ. Это делает особо актуальным строгое математическое исследование рассматриваемого класса нелинейных задач. Отметим также, что практически интересные механические явления не позволяют для своего анализа использовать почти любые постановки, они связаны с большими «глубокими» нелинейностями.

В связи с этим построение математической теории нелинейных задач требует привлечения широкой гаммы математических средств, и это в большой мере определило структуру монографии.

Глава I посвящена постановке краевых задач нелинейной теории оболочек. В ее ходе детально проанализировано само понятие пологости, которое имеет сложный физико-геометрический характер. Оно отрабатывалось в трудах К. Маргерра, Х. М. Муштари, В. З. Власова, К. З. Галимова, В. В. Новожилова и др. Приведен единый критерий «пологости» оболочки. Основные краевые задачи формулированы в произвольных неортогональных координатах как в перемещениях, так и с функцией усилий.

В гл. II монографии приведены некоторые сведения о функциональных классах С. Л. Соболева, ряд теорем функционального анализа, которые составляют основу для последующих рассмотрений. Здесь же дается разъяснение такого важного топологического инварианта, как степень отображения, и приводятся его основные свойства, доказываются одна из лемм о коэрцитивности, широко используемая в дальнейших выводах. В этой же главе в § 11, 12 также построены основные функциональные пространства  $H_{1k}$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ , в которых дается обобщенная постановка краевых задач. Поскольку мы имеем дело с существенно нелинейными задачами, то переход к обобщенным решениям можно совершить разнообразными приемами. Автор избрал обобщенные решения, непосредственно вытекающие из вариационных принципов Лагранжа и Алуэза. При этом проясняется и механический смысл обобщенных решений. В § 13—16 гл. III развивается топологический метод доказательства разрешимости основных краевых задач в перемещениях.

Он основывается на вычислении вращения некоторого вполне непрерывного векторного поля на сферах большого радиуса в гильбертовом пространстве  $H$ , для чего используется идея гомотопности, опирающаяся на априорную оценку решения. Последняя же получена здесь при весьма широких смешанных условиях закрепления оболочки, при действии как поперечных, так и продольных нагрузок.

Поскольку получение априорной оценки есть один из существенных моментов доказательства, то отметим, что в основе ее вывода лежит физическая идея разбегания сферы энергетического пространства  $H$  на две части, одна из которых не содержит слабого замыкания нуля. Для этой части сферы доказательство базируется на анализе энергии растяжения оболочки, для остальной части сферы соответствующие неравенства достигаются за счет оценки энергии изгиба. Вычисление вращения векторного поля дает не только теорему разрешимости, но и основу для анализа числа решений задачи. В частности, в некоторых случаях на этом пути удается доказать неединственность решения. В § 17—19 гл. IV аналогичные рассуждения проведены для случая краевой задачи с функцией усилий. При этом также вычислено вращение соответствующего векторного поля и доказаны теоремы разрешимости.

В § 20 подробно изучаются дифференциальные свойства обобщенных решений, в частности, устанавливаются условия существования классических решений. Эти результаты впоследствии используются для оценки быстроты сходимости некоторых приближенных методов.

В гл. V для исследования краевых задач нелинейной теории пологих оболочек использован вариационный подход. Хотя основной результат здесь снова — теоремы разрешимости, полученные решения качественно отличаются от решений § 16, 19, поскольку они характеризуют экстремальные состояния системы.

Характерная особенность рассуждений, использованных в гл. III—V, заключается в том, что примененные здесь методы дают нелокальные результаты. Иными словами, краевые задачи нелинейной теории оболочек исследованы без каких бы то ни было предположений о малости нелинейных членов, параметров нагрузки, кривизны и т. д.

В гл. VI, VII подробно анализируется большая гамма методов, широко используемых в настоящее время для численного решения краевых задач нелинейной теории пологих оболочек. В первую очередь изучены локальные методы (малого параметра, последовательных приближений, Ньютона — Канторовича), установлены пределы их применимости, приведены рекомендации по усилению эффективности. В гл. VII дано полное обоснование методов Бубнова — Галеркина и Ритца в формах, которые наиболее широко используются: П. Ф. Папковича, Х. М. Муштари, В. З. Власова. При этом анализе также не применяются какие-либо соображения локальности, базирующиеся на предположениях о малости определяющих факторов.

Отметим важную в этом плане особенность рассматриваемых задач: обоснование приближенных методов проведено в условиях возможной неединственности, что придает результатам достаточную общность. Схема обоснования прямых методов решения краевых задач нелинейной теории пологих оболочек, изложенная в гл. VII, приложима и к анализу методов конечных разностей, конечных элементов. При этом для указанных методов может быть сформулирован и некоторый общий принцип: погрешность приближенного отыскания решения из краевой задачи, как правило, асимптотически эквивалентна погрешности прямого приближения отыскиваемого решения используемым аппаратом. Исключения здесь могут составлять лишь решения, лежащие на «складках», т. е. в пограничных областях определяющих параметров, разделяющих области изменения числа решения нелинейной системы.

Вопросы устойчивости оболочек «в большом» рассмотрены в гл. VIII—X. Автор исходит из того, что в рассматриваемой механической задаче решение проблемы устойчивости должно выделить наиболее реальные формы равновесия оболочки в условиях их неоднозначности. Таким образом, в первую

очередь следует изучить вопрос о числе форм равновесия системы при данных нагрузках. В связи с этим в § 29—31 проанализированы условия единственности решения нелинейных краевых задач теории пологих оболочек. При этом приходится различать глобальную единственность (во всем функциональном пространстве) и локальную единственность (в некоторой малой окрестности нуля функционального пространства). В связи с глобальной единственностью введен класс жестких оболочек. Показано, что жесткость оболочек определяется некоторой новой инвариантной упруго-геометрической характеристикой. В § 31 гл. VIII установлены классы корректности, в которых обеспечено малое изменение картины напряженно-деформированного состояния оболочки. Важным моментом в проблеме устойчивости тонкостенных конструкций является вопрос о нижнем критическом числе. Его приближенное определение является, можно сказать, неизменным элементом всякого исследования устойчивости. В связи с этим в § 33 дается теорема о существовании нижнего критического числа для широкого класса задач. Вся же гл. IX в целом посвящена выводу соотношений между верхним и нижним критическими числами, точками спектра соответствующей линеаризованной задачи и эйлеровой характеристикой — первым собственным числом этой задачи.

Содержание гл. X в соответствии с нашим пониманием проблемы устойчивости посвящено первой части этой задачи — оценке числа форм равновесия оболочки при той или иной нагрузке. В § 38 сделана попытка проанализировать вторую ее часть — выяснить степень реальности той или иной формы равновесия, если их несколько. Для этого работа оболочки описывается с учетом статистических факторов, причем оказывается возможным приписать той или иной форме равновесия вероятность пребывания в этой форме. В частном случае в качестве меры вероятности выступает уровень потенциальной энергии оболочки. Этим, в сущности, завершается намеченный план рассмотрения проблемы устойчивости пологих оболочек. Автор надеется, что книга окажется полезной исследователям и инженерам, работающим с тонкостенными конструкциями, а также математикам, интересующимся нелинейными проблемами механики сплошной среды.

Л. П. Лебедев тщательнейшим образом прочитал и отредактировал рукопись, сделав при этом много ценных предложений по ее усовершенствованию. Н. Ф. Морозов высказал ряд замечаний при рецензировании монографии, которые мною также учтены. Им моя искренняя признательность.

*Л. П. Воронич*



**ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

**§ 1. Некоторые соотношения теории поверхностей**

1.1. Пусть поверхность  $S$  определяется параметризацией

$$\rho = \rho(\alpha^1, \alpha^2), \quad x_i = x_i(\alpha^1, \alpha^2). \quad (1.1)$$

Величины  $\alpha^i$  будем интерпретировать как декартовы координаты на плоскости, которые изменяются в некоторой плоской области  $\bar{\Omega}$ . Предположим далее, что (1.1) есть гомеоморфизм между  $\bar{\Omega}$  и  $S$  — непрерывное в обе стороны взаимно однозначное соответствие. Отметим, что в дальнейшем будет допускаться конечная связность  $S$  и, значит, соответствующую связность будет иметь и  $\bar{\Omega}$  (рис. 1.1).

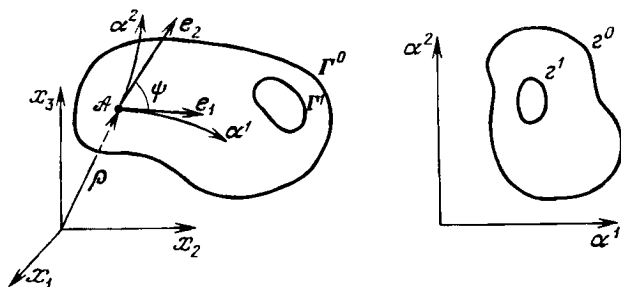


Рис. 1.1

Будем также предполагать, что  $\rho \in C_{\bar{\Omega}}^2$ , т. е. в  $\bar{\Omega}$  все вторые производные  $\rho$  непрерывны. Пусть, далее, во всей области  $\bar{\Omega}$  выполнено условие

$$D^2 = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(\alpha^1, \alpha^2)} \right|^2 \geq \alpha^2 > 0, \quad (1.2)$$

которое само по себе обеспечивает лишь локальный гомеоморфизм  $S$  и  $\bar{\Omega}$ . Поверхность  $S \in C_{\bar{\Omega}}^2$ , для которой выполнено (1.2), будем называть регулярной. Ниже будут приведены некоторые соотношения теории поверхностей, которые можно найти в любом из следующих источников [10, 39, 41, 55, 58, 62, 64, 70]. ■

Введем  $e_k = \rho_{\alpha^k}$ ,  $k = 1, 2$ , касательный базис в некоторой точке  $\mathcal{A}$  поверхности (рис. 1.1). Введем коэффициенты первой и второй

квадратичной форм

$$A_{ij} = \rho_{\alpha i} \cdot \rho_{\alpha j}, \quad B_{ij} = [\rho_{\alpha i \alpha j} \cdot \rho_{\alpha i} \cdot \rho_{\alpha j}] D^{-1}; \quad i, j = 1, 2. \quad (1.3)$$

Легко устанавливается равенство

$$D^2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|^2. \quad (1.4)$$

Как известно,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  — ковариантные составляющие тензоров второго ранга [37, 39, 43, 46, 50, 61, 63, 66, 67]. Их смешанные и контравариантные составляющие определяются соотношениями

$$A_i^j = \delta_i^j, \quad B_i^j = A^{jk} B_{ki}, \quad B^{ij} = A^{it} A^{jh} B_{ht}, \quad (1.5)$$

$$A^{11} = A_{22} D^{-2}, \quad A^{12} = A^{21} = -A_{12} D^{-2}, \quad A^{22} = A_{11} D^{-2}. \quad (1.6)$$

Введем также орт  $\mathbf{n}$  нормали к  $S$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_3 = D^{-1}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2). \quad (1.7)$$

При этом образуется правый треугольник  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{n}$ . Введем взаимный базис  $\mathbf{e}^i$  на  $S$ :

$$\mathbf{e}^i = A^{ik} \mathbf{e}_k; \quad i, k = 1, 2; \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}. \quad (1.8)$$

Угол  $\psi$  между  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  дается соотношением

$$\sin \psi = D(A_{11}A_{22})^{-1/2}. \quad (1.9)$$

**Лемма 1.1.** Существуют такие две положительные постоянные  $m$  и  $M$ , что в  $\bar{\Omega}$  имеют место неравенства

$$m \leq |A_{ii}| \leq M, \quad (1.10)$$

$$|A_{12}| \leq M, \quad (1.11)$$

$$D \leq M. \quad (1.12)$$

Правые неравенства (1.10), (1.11) вытекают из того, что  $S \in C_{\Omega}^2$ , левое (1.10) следует из правого (1.10) и соотношения

$$A_{11}A_{22} > A_{12}^2 + \alpha^2, \quad (1.13)$$

вытекающего из (1.2), (1.4). Неравенство (1.12) вытекает из (1.10).

Заметим, что в дальнейшем нам придется часто вводить некоторые постоянные, причем будет существен лишь факт их существования, но не конкретные их значения. В этом случае они всегда будут обозначаться  $m$  и  $M$ , ибо в книге их будет введено конечное число.

**Лемма 1.2.** Пусть  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  — произвольные точки  $S$ ;  $a$ ,  $b$  — их образы в  $\Omega$ . Пусть, далее,  $L$  — произвольная линия  $S$ , соединяющая  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , а  $d$  — ее образ в  $\Omega$ . Тогда

$$m \leq \frac{\mathcal{D}_L}{\mathcal{D}_d} \leq M, \quad (1.14)$$

где  $\mathcal{D}$  — длина соответствующей кривой.

Действительно, пусть  $ds$  и  $d\sigma$  — соответственно элементы дуг на  $L$  и  $\bar{d}$ :

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = A_{ij} \frac{d\alpha^i}{d\sigma} \frac{d\alpha^j}{d\sigma}. \quad (1.15)$$

Поскольку в силу (1.2), (1.4)  $A_{ij}$  — положительно определенная форма относительно  $\frac{d\alpha^i}{d\sigma}$  и  $\left(\frac{d\alpha^1}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{d\sigma}\right)^2 = 1$ , то

$$m \leq \frac{ds}{d\sigma} \leq M \quad (1.16)$$

и (1.14) вытекает из (1.16).

**Лемма 1.3.** Пусть в  $\bar{\Omega}$  заданы две кривые  $\alpha_i^1(\sigma)$  и  $\alpha_i^2(\sigma)$ , выходящие из какой-либо точки. Пусть  $\rho_1(s)$ ,  $\rho_2(s)$  — их образы на  $\bar{S}$ . Тогда, если угол между кривыми в  $\bar{\Omega}$  отличен от нуля или  $\pi$ , то и угол между  $\rho_1$  и  $\rho_2$  также отличен от нуля и  $\pi$ , и наоборот.

**Лемма 1.3** вытекает из 1.2.

**Лемма 1.4.** Две координатные линии одного семейства на  $S$  не касаются и не пересекаются.

**Лемма 1.4** вытекает из гомеоморфизма  $\bar{S}$  и  $\bar{\Omega}$ .

Пусть, далее, поверхность  $S$  ограничена контуром  $\Gamma$ . Будем говорить, что  $\Gamma$  есть контур  $C^1$ , если в каждой точке  $\mathcal{A}$  на  $\Gamma$  имеется такая окрестность, что его уравнение представимо в виде

$$\rho_\Gamma = \rho_\Gamma(s), \quad (1.17)$$

где  $\rho_\Gamma$  — непрерывно дифференцируемый вектор, и весь контур  $\Gamma$  содержит конечное число таких окрестностей. Пусть, далее, контуру  $\Gamma$  соответствует контур  $g$  в плоскости  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$ . Тогда очевидно, если  $\Gamma \in C_\Gamma^1$ , то и  $g \in C_g^1$ , и наоборот. Предположим, далее, что  $\Gamma$  состоит из конечного числа дуг  $\Gamma_i \in C_{\Gamma_i}^1$ . Будем в этом случае говорить, что  $\Gamma$  — кусочно-гладкий контур (КГК) класса  $C_\Gamma^1$ . Очевидно, если  $\Gamma$  — КГК класса  $C_\Gamma^1$ , то и  $g$  — КГК класса  $C_g^1$ .

**Лемма 1.5.** Пусть  $\Gamma$  — КГК класса  $C_\Gamma^1$ , тогда углы  $\Gamma$  суть образы углов  $g$ , и если  $\Gamma$  не имеет выходящих нулевых углов и входящих углов, равных  $\pi$ , то эти факты справедливы и для  $g$ .

**Лемма** вытекает из леммы 1.3.

**Лемма 1.6.** Координатные линии на  $S$  не имеют ни самопересечений, ни самокасаний.

**Лемма 1.7.** Координатные линии на  $S$  из разных семейств пересекаются не более чем в одной точке.

**Леммы 1.6, 1.7** вытекают из гомеоморфизма  $\bar{S}$  и  $\bar{\Omega}$ . ■

**1.2.** В ряде случаев поверхность  $S$  такова, что невозможен гомеоморфизм  $\bar{S}$  и ограниченной связной области  $\bar{\Omega}$  на плоскости. Например, практическое значение имеют случаи, когда  $S$  — замкнутая поверхность, гомеоморфная сфере, или когда  $S$  — кусок замкнутой

цилиндрической поверхности, гомеоморфной части кругового цилиндра (рис. 1.2). В этом случае мы прибегнем к методу разрезов [2]. Пусть, например,  $S$  гомеоморфна сфере (рис. 1.3). Разрежем  $S$  некоторой замкнутой кривой  $\mathcal{L}$  на две части:  $S = S_1 + S_2$ . При этом  $S_1$  уже будет гомеоморфна своей области  $\Omega_1$  с границей  $g^1$ , а  $S_2$

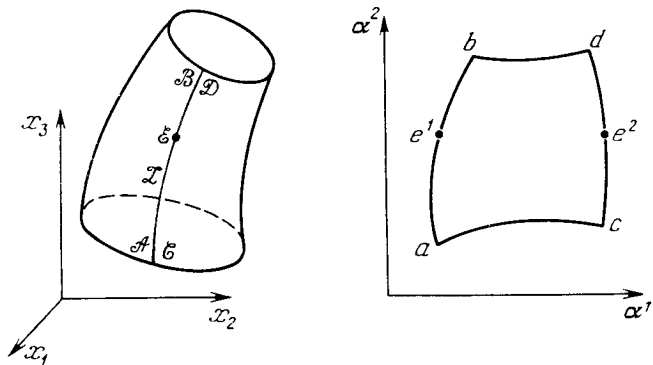


Рис. 1.2

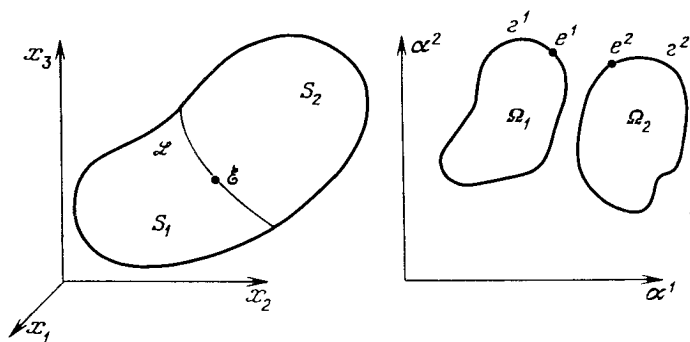


Рис. 1.3

гомеоморфна  $\Omega_2$  с границей  $g^2$ . При этом между контурами  $g^i$  автоматически образуется гомеоморфизм: соответствующими точками на  $g^i$  мы считаем те, которым соответствует одна и та же точка на  $\mathcal{L}$ . В каждой из областей  $\Omega_{1,2}$  может быть введена своя параметризация  $\alpha_1^i, \alpha_2^i$  с обязательным выполнением условий:

$$\rho(\alpha_1^i)|_{\mathcal{L}} = \rho(\alpha_2^i)|_{\mathcal{L}}, \quad (1.18)$$

и, кроме того, в каждой точке  $\mathcal{L}$  поверхности  $S_1$  и  $S_2$  должны иметь совпадающие касательные плоскости, равные значения главной кривизны и одинаковые направления линий кривизны. При введении теперь на  $S$  некоторых гладких функциональных или векторных полей мы должны также удовлетворять условиям сопряжения на

$\mathcal{L}$ , которые включают равенство самих элементов и нескольких их производных в зависимости от гладкости поля.

Если поверхность  $S$  гомеоморфна куску цилиндра (рис. 1.2), то необходимо провести разрез  $\mathcal{L}$  вдоль образующей, и тогда разрезанный цилиндр окажется гомеоморфным прямоугольнику  $abcd$ , у которого отождествлены соответствующие точки  $ab$  и  $cd$ . При этом в соответствующих точках должны быть выполнены условия сопряжения параметризации  $\rho(\alpha^i)$  и условия сопряжения соответствующих скалярных и векторных полей. Если поверхность  $S$  гомеоморфна тору (рис. 1.4), то гомеоморфизм с плоской областью  $\Omega$  можно

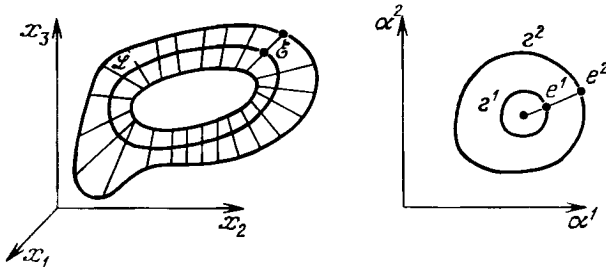


Рис. 1.4

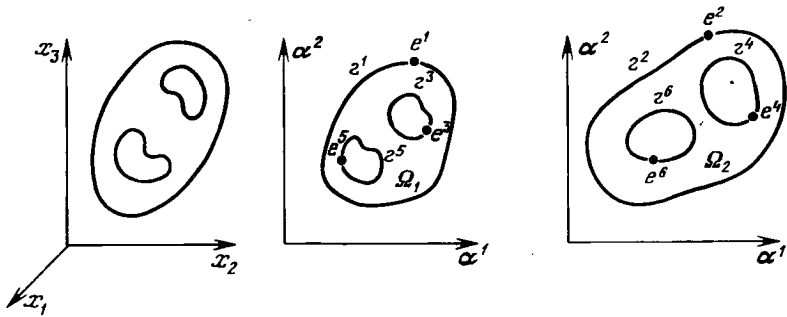


Рис. 1.5

произвести так: разрежем тор вдоль образующей  $\mathcal{L}$  и развернем полученную поверхность на кольцо в плоскости  $\alpha^1, \alpha^2$ . При этом превращение этой поверхности в кольцо возможно, очевидно, так, чтобы соответствующими точками оказались точки, лежащие на одном радиусе (рис. 1.4). В заключение поясним построение параметризации  $\alpha^1, \alpha^2$  и построение соответствующего гомеоморфизма для поверхности  $S$ , гомеоморфной сфере с двумя ручками (рис. 1.5). Разрежем поверхность некоторой плоскостью, проходящей через обе ручки, и развернем получившиеся поверхности  $S_1, S_2$  на плоскость  $\alpha^1, \alpha^2$ . При этом области  $\Omega_1, \Omega_2$  уже будут трехсвязными. При этом следует отождествить соответствующие точки контуров  $z^1$  и  $z^2, z^3$  и  $z^4, z^5$  и  $z^6$  и подобрать параметризацию  $\rho(\alpha^i)$  так, чтобы были выполнены условия сопряжения в соответствующих точках

контуров. Вводимые функциональные и векторные поля на  $S_1, S_2$  также должны удовлетворять соответствующим условиям сопряжения.

После всего вышеизложенного совершенно очевидно, что для реальных оболочек мы всегда имеем возможность осуществить го-

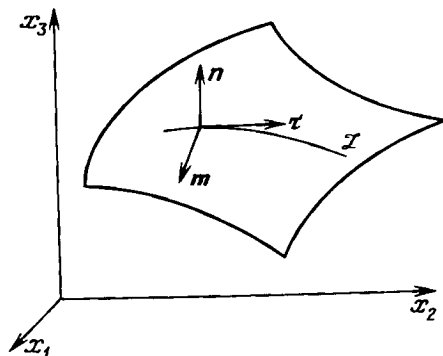


Рис. 1.6

меоморфизм  $S$  и некоторой многосвязной области  $\Omega$  с отождествлением точек некоторых кусков границы  $g$ . Важный класс задач составляют также случаи, когда область  $\Omega$  — многосвязная область без отождествления каких-либо точек  $g$ . Отметим также, что существенное значение имеют практические способы параметризации поверхностей. Причем здесь важно найти такую параметризацию, которая наиболее адекватно соответствовала бы структу-

ре поверхности  $S$  и приводила бы к простым аналитическим и численным алгоритмам при дальнейшей обработке задач [35, 60]. ■

1.3. Пусть на поверхности  $S$  параметрически задана линия  $\mathcal{L}$

$$\alpha^i = \alpha^i(t), \quad \rho = \rho(\alpha^i(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.19)$$

Будем предполагать, что  $\mathcal{L}$  — КГК класса  $C^1_{\mathcal{L}}$ . Очевидно, если  $s$  — длина дуги на  $\mathcal{L}$ , то

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{A_{ij}(t) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt}}; \quad (1.20)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2}, \quad (1.21)$$

причем здесь принято, что дуги  $s$  и  $\sigma$  возрастают вслед за параметром  $t$ .

Пусть, далее,  $\tau$  — орт касательной к  $\mathcal{L}$ ,  $m$  — орт нормали к  $\mathcal{L}$ , лежащий в  $S$ , и  $n = e_3 = e^3 = D^{-1}(e_1 \times e_2)$  — орт нормали к  $S$  (рис. 1.6). Имеем

$$\tau = \frac{d\rho}{ds} = \tau^h e_h, \quad \tau^h = \frac{d\alpha^h}{ds} = \frac{d\alpha^h}{dt} \left( A_{ij}(t) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt} \right)^{-1/2}, \quad (1.22)$$

$$\tau_h = A_{hp} \tau^p = A_{hp} \frac{d\alpha^p}{dt} \left( A_{ij}(t) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt} \right)^{-1/2}. \quad (1.23)$$

Для определения составляющих вектора  $m$  учтем, что

$$m = m^h e_h, \quad m^h = \frac{d\alpha^h}{dm} \quad (1.24)$$

и, далее,

$$m^2 = 1, \quad m \cdot \tau = 0,$$

что дает

$$m_k \tau^k = 0, \quad A^{ij} m_i m_j = 1,$$

откуда

$$m_1 = -D \frac{d\alpha^2}{ds} = -D\tau^2, \quad m_2 = D \frac{d\alpha^1}{ds} = D\tau^1. \quad \blacksquare \quad (1.25)$$

Введем дискриминантный тензор поверхности  $S$ , определяемый соотношениями

$$C_{12} = -C_{21} = -D, \quad C^{12} = -C^{21} = -D^{-1}, \quad C^{ii} = C_{ii} = 0. \quad (1.26)$$

Тогда получаем

$$m_k = C_{kj} \frac{d\alpha^j}{ds} = C_{kj} \tau^j \quad (1.27)$$

и соответственно

$$m^k = A^{kp} C_{pj} \frac{d\alpha^j}{ds} = C_j^k \frac{d\alpha^j}{ds}, \quad m^1 = \frac{d\alpha^1}{dm} = -\frac{\tau_2}{D}, \quad m^2 = \frac{d\alpha^2}{dm} = \frac{\tau_1}{D}. \quad (1.28)$$

Отметим полезные формулы, вытекающие из (1.28):

$$\begin{aligned} m^k &= C_j^k \frac{d\alpha^j}{ds} = C_j^k \tau^j = C^{kj} \tau_j, \quad \tau^k = C^{kj} m_j, \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha^k} &= \tau_k = A_{kp} \frac{d\alpha^p}{ds}, \quad \frac{\partial m}{\partial \alpha^k} = m_k = C_{kj} \frac{d\alpha^j}{ds}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.29)$$

Если на отдельных частях контур  $\Gamma$  и его образ  $g$  на  $\Omega$  даются соотношением

$$\Phi(\alpha^1, \alpha^2) = 0, \quad (1.30)$$

то имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^1}{ds} &= \frac{d\alpha^1}{\sqrt{A_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A_{11} + 2A_{12} \frac{d\alpha^2}{d\alpha^1} + A_{22} \left(\frac{d\alpha^2}{d\alpha^1}\right)^2}} = \\ &= \pm \frac{\Phi_{\alpha^2}}{\sqrt{A_{11} \Phi_{\alpha^2}^2 - 2A_{12} \Phi_{\alpha^1} \Phi_{\alpha^2} + A_{22} \Phi_{\alpha^1}^2}}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^2}{ds} &= \frac{d\alpha^2}{\sqrt{A_{ij} d\alpha^i d\alpha^j}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A_{11} + 2A_{12} \frac{d\alpha^2}{d\alpha^1} + A_{22} \left(\frac{d\alpha^2}{d\alpha^1}\right)^2}} = \\ &= \pm \frac{\Phi_{\alpha^1}}{\sqrt{A_{11} \Phi_{\alpha^2}^2 - 2A_{12} \Phi_{\alpha^1} \Phi_{\alpha^2} + A_{22} \Phi_{\alpha^1}^2}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Знаки  $\pm$  в (1.31), (1.32) должны быть согласованы со знаками  $d\alpha^k/ds$  и  $\Phi_{\alpha^k}$ . ■

Как известно, векторы  $\tau$ ,  $m$ ,  $n$  удовлетворяют на  $\mathcal{L}$  системе дифференциальных уравнений Серре — Френе [10, 64, 69]

$$\frac{d\tau}{ds} = \kappa_1 n - \kappa_2 m, \quad \frac{dm}{ds} = \kappa_2 \tau - \kappa_3 n, \quad \frac{dn}{ds} = \kappa_3 m - \kappa_1 \tau, \quad (1.33)$$

где  $\kappa_1$  — нормальная кривизна сечения  $S$  в направлении  $\tau$  (кривизна на геодезической),  $\kappa_2$  — геодезическая кривизна  $\mathcal{L}$  на  $S$ ,  $\kappa_3$  — геодезическое кручение, определяемые соотношениями [10, 64, 70]

$$\kappa_1 = B_{ij} \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds}, \quad \kappa_2 = -C_{ij} \frac{d\alpha^i}{ds} \left( \frac{d^2\alpha^j}{ds^2} + G_{\beta\gamma}^i \frac{d\alpha^\beta}{ds} \frac{d\alpha^\gamma}{ds} \right), \quad (1.34)$$

$$\kappa_3 = -C_{ij} B_\mu^i \frac{d\alpha^j}{ds} \frac{d\alpha^\mu}{ds}; \quad B_\mu^i = A^{it} B_{t\mu}, \quad (1.35)$$

$G_{\beta\gamma}^i$  будут определены соотношениями (1.46). ■

Приведем соотношения, связывающие производные  $u_{\alpha^i}$ ,  $u_s$ ,  $u_m$  некоторой функции  $u$ , заданной на  $\mathcal{L}$ . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_{\alpha^k} \frac{d\alpha^k}{ds} = u_{\alpha^k} \tau^k = u_{\alpha^k} C^{kj} m_j = D^{-1} (u_{\alpha^1} m_2 - u_{\alpha^2} m_1), \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u_{\alpha^k} \frac{d\alpha^k}{dm} = u_{\alpha^k} m^k = u_{\alpha^k} C^{kj} \tau_j = D^{-1} (-u_{\alpha^1} \tau_2 + u_{\alpha^2} \tau_1), \quad (1.37)$$

$$u_{\alpha^1} = \frac{\partial u}{\partial s} \tau_1 + \frac{\partial u}{\partial m} m_1, \quad u_{\alpha^2} = \frac{\partial u}{\partial s} \tau_2 + \frac{\partial u}{\partial m} m_2. \quad (1.38)$$

В заключение отметим, что все формулы данного раздела целиком и полностью относятся к тому случаю, когда  $\mathcal{L}$  есть граничный контур  $\Gamma$ . ■

1.4. Предположим, что в некоторой точке  $\mathcal{A}$  поверхности  $S$  имеется прямоугольная система координат  $x_1$ ,  $x_2$ , ориентированная так,

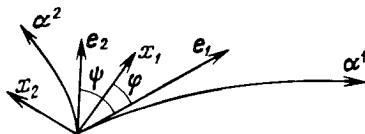


Рис. 1.7

что оси  $e_1$ ,  $x_1$  образуют угол  $\varphi$  (рис. 1.7). На основе элементарных соотношений имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^1}{\partial x_1} &= \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{A_{11}} \sin \psi}, & \frac{\partial \alpha^1}{\partial x_2} &= -\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sqrt{A_{11}} \sin \psi}, \\ \frac{\partial \alpha^2}{\partial x_1} &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{A_{22}} \sin \psi}, & \frac{\partial \alpha^2}{\partial x_2} &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{A_{22}} \sin \psi}; \end{aligned} \quad (1.39)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_1} &= C^{pk} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^p}, & \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_2} &= -C^{pk} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^p}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^l} &= -C_{hl} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^l} &= C_{hl} \frac{\partial \alpha^k}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Пусть на поверхности  $S$  задана дифференцируемая функция от  $\alpha^k$ . Тогда

$$u_{x_1} = u_{\alpha^1} \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{A_{11}} \sin \psi} + u_{\alpha^2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{A_{22}} \sin \psi}, \quad (1.41)$$

$$u_{x_2} = -u_{\alpha^1} \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\sqrt{A_{11}} \sin \psi} + u_{\alpha^2} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{A_{22}} \sin \psi}, \quad (1.42)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_{11}}} u_{\alpha^1} = u_{x_1} \cos \varphi - u_{x_2} \sin \varphi, \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_{22}}} u_{\alpha^2} = u_{x_1} \sin(\psi - \varphi) + u_{x_2} \cos(\psi - \varphi). \quad \blacksquare \quad (1.44)$$

1.5. Приведем формулы дифференцирования векторов  $e_k$ ,  $e^k$  [10, 39, 41, 58, 62, 64]

$$\begin{aligned} e_{k\alpha^p} &= G_{kp}^q e_q + B_{kp} n, & e^k_{\alpha^p} &= -G_{pq}^k e^q + B_p^k n, \\ e_{3\alpha^p} &= e^3_{\alpha^p} = -B_p^q e_q = B_{pq} e^q; & k, p, q &= 1, 2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В (1.45)  $G_{kp}^q$  — символы Кристоффеля второго рода, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \frac{A_{11\alpha^1} A_{22} + A_{11\alpha^2} A_{12} - 2A_{12} A_{12\alpha^1}}{2D^2}, \\ G_{22}^1 &= \frac{A_{22} (2A_{12\alpha^2} - A_{22\alpha^1}) - A_{12} A_{22\alpha^2}}{2D^2}, \\ G_{12}^1 &= G_{21}^1 = \frac{A_{22} A_{11\alpha^2} - A_{12} A_{22\alpha^1}}{2D^2}, \quad 1 \Leftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Пусть, далее,  $u$  — произвольный дифференцируемый вектор на  $S$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{\alpha^k} &= \nabla_k u^p e_p = \nabla_k u_p e^p, \\ \nabla_k u^p &= u_{\alpha^k}^p + G_{ks}^p u^s - B_k^p u^3; \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\nabla_k u_p = u_{p\alpha^k} - G_{kp}^s u_s - B_{kp} u^3, \quad (1.48)$$

$$\nabla_k u_3 = \nabla_k u^3 = u_{\alpha^k}^3 + B_{ks} u^s = u_{\alpha^k}^3 + B_{ks} u_s; \quad k, p, s = 1, 2.$$

Формулы (1.46) нам потребуются в некоторых специальных системах координат. В первую очередь рассмотрим ортогональные

координаты:  $A_{12} = 0$ ,

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \frac{A_{11}\alpha^1}{2A_{11}}, & G_{12}^1 &= G_{21}^1 = \frac{A_{11}\alpha^2}{2A_{11}}, & G_{22}^1 &= -\frac{A_{22}\alpha^1}{2A_{11}}, \\ G_{11}^2 &= -\frac{A_{11}\alpha^2}{2A_{22}}, & G_{12}^2 &= G_{21}^2 = \frac{A_{22}\alpha^1}{2A_{22}}, & G_{22}^2 &= \frac{A_{22}\alpha^2}{2A_{22}}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Предположим, далее, что  $\alpha^i$  — изотермическая (конформная) параметризация:

$$A_{11} = A_{22} = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2), \quad A_{12} = 0. \quad (1.50)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \frac{\Lambda_{\alpha^1}}{2\Lambda}, & G_{12}^1 &= G_{21}^1 = \frac{\Lambda_{\alpha^2}}{2\Lambda}, & G_{22}^1 &= -\frac{\Lambda_{\alpha^1}}{2\Lambda}, \\ G_{11}^2 &= -\frac{\Lambda_{\alpha^2}}{2\Lambda}, & G_{12}^2 &= G_{21}^2 = \frac{\Lambda_{\alpha^1}}{2\Lambda}, & G_{22}^2 &= \frac{\Lambda_{\alpha^2}}{2\Lambda}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Условия существования изотермической параметризации дает

**Теорема 1.1** [12]. Пусть поверхность  $S$  допускает параметризацию  $\alpha^h$  такую, что  $\rho_{\alpha^i\alpha^j}$  удовлетворяют в  $\bar{\Omega}$  условию Гёльдера с показателем  $0 < \lambda \leq 1$ . В этом случае для всей поверхности  $S$  может быть введена единая изотермическая параметризация

$$ds^2 = \Lambda[(d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2], \quad (1.52)$$

причем  $\Lambda$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\lambda^1$ , где  $\lambda^1 = \lambda$ , если  $0 < \lambda < 1$  и  $\lambda^1$  может быть взято сколь угодно близким к 1, но меньше 1, если  $\lambda = 1$ .

**Теорема 1.2** [12]. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и, кроме того,

$$B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = 0, \quad (1.53)$$

т. е.  $S$  — поверхность нулевой гауссовой кривизны. В этом случае на  $S$  существует единая евклидова параметризация  $\alpha^h$ , для которой

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2, \quad A_{11} = A_{22} = 1, \quad A_{12} = 0. \quad \blacksquare \quad (1.54)$$

**1.6.** Ниже мы будем использовать формулы двукратного дифференцирования на  $S$ . Имеем [30]

$$\tau^h \tau^l \nabla_{kl} \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} - \kappa_2 \frac{\partial \Psi}{\partial m}, \quad (1.55)$$

$$\tau^h m^l \nabla_{kl} \Psi = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Psi}{\partial m} - \kappa_2 \frac{\partial \Psi}{\partial s}. \quad (1.56)$$

В (1.55), (1.56)

$$\nabla_{kl} \Psi = \nabla_{lk} \Psi = \Psi_{\alpha^h \alpha^l} - G_{kl}^i \Psi_{\alpha^i}. \quad \blacksquare \quad (1.57)$$

1.7. Приведем также соотношения Гаусса и Петерсона — Кодацци [10, 55, 58, 64, 69]

$$B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = A_{12\alpha^1\alpha^2} - \frac{1}{2}(A_{11\alpha^2\alpha^2} + A_{22\alpha^1\alpha^1}) + \\ + A_{\gamma\delta}G_{12}^{\gamma\delta} - A_{\alpha\beta}G_{11}^{\alpha\beta}G_{22}^{\beta\alpha}, \quad (1.58)$$

$$B_{i1\alpha^2} - B_{i2\alpha^1} = G_{i2}^h B_{h1} - G_{i1}^h B_{h2}. \quad \blacksquare$$

Нам потребуются и некоторые менее известные соотношения для производных  $G_{ij}^h$ . Имеем

$$\mathbf{r}_{\alpha^i\alpha^j} = G_{ij}^h \mathbf{e}_h + B_{ij}\mathbf{n}, \quad (1.59)$$

откуда

$$G_{i1}^p = \mathbf{e}_{i\alpha^1} \cdot \mathbf{e}^p = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1}^p, \quad (1.60)$$

$$G_{i2}^p = \mathbf{e}_{i\alpha^2} \cdot \mathbf{e}^p = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{\alpha^2}^p. \quad (1.61)$$

Из (1.60), (1.61) следует

$$G_{i1\alpha^2}^p - G_{i2\alpha^1}^p = -\mathbf{e}_{i\alpha^2} \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1}^p - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1\alpha^2}^p + \mathbf{e}_{i\alpha^1} \cdot \mathbf{e}_{\alpha^2}^p + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1\alpha^2}^p = \\ = -\mathbf{e}_{i\alpha^2} \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1}^p + \mathbf{e}_{i\alpha^1} \cdot \mathbf{e}_{\alpha^2}^p = -(\mathbf{e}_{i2}^h \mathbf{e}_h + B_{i2}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_{\alpha^1}^p + \\ + (\mathbf{e}_{i1}^h \mathbf{e}_h + B_{i1}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_{\alpha^2}^p. \quad (1.62)$$

И из (1.61), (1.62) вытекает [71]

$$G_{i1\alpha^2}^p - G_{i2\alpha^1}^p = -G_{i1}^h G_{2h}^p + G_{i2}^h G_{1h}^p + B_{i1}B_{2h}^p - B_{i2}B_{1h}^p. \quad (1.63)$$

Соотношения (1.63) аналогичны (1.58) и будут ниже использованы, как и формулы Фосса — Вейля [41]

$$D_{\alpha^i}^{-1} + G_{ih}^i D^{-1} = 0, \quad (1.64)$$

которые легко устанавливаются непосредственной проверкой на основе формул (1.4), (1.46).  $\blacksquare$

1.8. Пусть на  $S$  заданы две произвольные дифференцируемые функции  $A(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $B(\alpha^1, \alpha^2)$ . Ниже будут использоваться очевидные соотношения

$$\int_{\Omega} AB_{\alpha^1} D d\alpha^1 d\alpha^2 = \int_{\Gamma} ABD d\alpha^2 - \int_{\Omega} (AD)_{\alpha^1} B d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = \int_{\Gamma} ABD \frac{d\alpha^2}{ds} ds - \int_{\Omega} (AD)_{\alpha^1} B d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (1.65)$$

$$\int_{\Omega} AB_{\alpha^2} D d\alpha^1 d\alpha^2 = - \int_{\Gamma} ABD d\alpha^1 - \int_{\Omega} (AD)_{\alpha^2} B d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = - \int_{\Gamma} ABD \frac{d\alpha^1}{ds} ds - \int_{\Omega} (AD)_{\alpha^2} B d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (1.66)$$

В (1.65), (1.66) при интегрировании по  $s$  обход  $\Gamma$  производится так, что  $\Omega$  оказывается слева. Формулы (1.65), (1.66) остаются в силе и для многосвязной области. ■

§ 2.  $S$ -координаты в пространстве. Образование оболочки.  
Компоненты конечной деформации в  $S$ -координатах.  
Система их упрощений

2.1. Положение произвольной точки  $\mathcal{B}$  из некоторой окрестности  $S$  определим радиусом-вектором

$$\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \rho(\alpha^1, \alpha^2) + \alpha^3 \mathbf{n}(\alpha^1, \alpha^2). \quad (2.1)$$

Таким образом, для определения координат точки  $\mathcal{B}$  необходимо из нее опустить перпендикуляр на  $S$  (рис. 2.1). Координаты  $\alpha^i$  точки  $\mathcal{A}$  его пересечения с  $S$  и расстояние  $\alpha^3$  по нормали от  $\mathcal{B}$  до  $\mathcal{A}$ , взятое с соответствующим знаком, и будут ниже именоваться  $S$ -координатами точки  $\mathcal{B}$  [28, 29, 31]. Очевидно, если  $S \in C_{\Omega}^2$ , то  $S$ -координаты могут быть введены по крайней мере в некоторой окрестности  $S$ .

$S$ -параметризация (2.1) порождает в каждой точке трехмерного пространства трехгранник

$$\gamma_k = \mathbf{r}_{\alpha^k}. \quad (2.2)$$

Однако в теории оболочек более целесообразно использовать другой базис, полученный параллельным переносом вдоль  $\mathbf{n}$  в точку  $\mathcal{B}$  трехгранника  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ . Этот трехгранник ниже будет называться  $\mathbf{e}$ -трехгранником. В  $\mathbf{e}$ -трехграннике для элемента дуги имеем

$$ds^2 = A_{ji} d\alpha^i d\alpha^j + (d\alpha^3)^2; \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Формулы дифференцирования векторов  $\mathbf{e}$ -трехгранника получим, если к (1.48) добавить соотношения

$$\mathbf{e}_{h\alpha^3} = \mathbf{e}_{\alpha^3}^h = 0; \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

При этом будем иметь

$$\mathbf{e}_{h\alpha^p} = \Gamma_{kp}^s \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{e}_{\alpha^p}^h = G_{ps}^h \mathbf{e}^s, \quad (2.5)$$

где

$$\Gamma_{kp}^q = G_{kp}^q, \quad \Gamma_{k3}^q = -B_k^q, \quad \Gamma_{kp}^3 = B_{kp}, \quad \Gamma_{k3}^3 = 0; \quad p, q, k = 1, 2. \quad (2.6)$$

В соответствии с (2.5) получим для произвольного вектора  $\mathbf{u}$

$$u_{\alpha^k} = \nabla_k u^p \mathbf{e}_p = \nabla_k u_p \mathbf{e}^p, \quad (2.7)$$

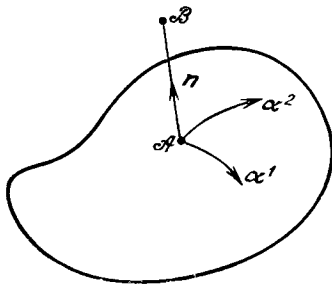


Рис. 2.1

где

$$\begin{aligned} \nabla_k u^p &= u_{\alpha k}^p + G_{kq}^p u^q - B_k^p u^3; & \nabla_k u^3 &= u_{\alpha k}^3 + B_{kq} u^q, \\ \nabla_3 u^t &= u_{\alpha 3}^t; & p, k, q &= 1, 2; \quad t = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k u_p &= u_{p\alpha k} - G_{kp}^q u_q - B_{kp} u_3; & \nabla_k u_3 &= u_{3\alpha k} + B_{kp}^q u_q, \\ \nabla_3 u^t &= u_{t\alpha 3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следует иметь в виду, что в е-трехграннике не всегда выполняются соотношения  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , например  $\Gamma_{13}^1 \neq \Gamma_{31}^1$ . Это свидетельствует о том, что е-трехграннику не соответствует никакая  $\alpha$ -параметризация трехмерного пространства. Иными словами, мы здесь имеем дело с параметризацией аффинной связности с кручением. ■

**2.2.** Для образования оболочки отложим по обе стороны по нормали к  $S$  в точке  $\mathcal{A}$  достаточно малые отрезки  $h^\pm(\alpha^1, \alpha^2)$ . Если теперь  $\mathcal{A}$  обегит всю поверхность  $S$ , то нормаль с отложенными отрезками  $h^+(\alpha^1, \alpha^2)$  и  $h^-(\alpha^1, \alpha^2)$  ометет некоторый объем  $V$ . Таким образом, мы получаем геометрическую оболочку. Если  $V$  заполнен деформируемым телом, мы получаем физические оболочки. Граничные поверхности оболочки, даваемые соотношениями

$$\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \mathbf{p}(\alpha^1, \alpha^2) \pm h^\pm(\alpha^1, \alpha^2) \mathbf{n}(\alpha^1, \alpha^2), \quad (2.10)$$

ниже будут обозначаться  $S^\pm$ . Наконец, боковую поверхность оболочки  $V$ , определяемую формулой  $\Gamma \times (-h^-(\alpha^1, \alpha^2) \leq \alpha^3 \leq +h^+(\alpha^1, \alpha^2))$ , будем обозначать  $S^0$  (см. рис. 5.1). Будем предполагать, что весь объем  $V$  погружен в область действия  $S$ -параметризации. Поверхность  $S$  в дальнейшем будет именоваться срединной. ■

**2.3.** В данном разделе мы получим формулы для компонент тензора конечной деформации в е-трехграннике. Здесь же будет развита последовательная система упрощений основных соотношений, учитывающая некоторые особенности работы тонкой оболочки. Для конечной деформации имеем [29, 42, 47, 49, 56, 59, 65, 84]

$$\begin{aligned} 2e_{ij} &= 2e_{ij} + \mathbf{u}_{\alpha i} \cdot \mathbf{u}_{\alpha j}, & 2e_{ij} &= \mathbf{r}_{\alpha i} \cdot \mathbf{u}_{\alpha j} + \mathbf{r}_{\alpha j} \cdot \mathbf{u}_{\alpha i} = \\ &= \mathbf{e}_i \nabla_j \cdot \mathbf{u}_k \mathbf{e}^k + \mathbf{e}_j \nabla_i \cdot \mathbf{u}_k \mathbf{e}^k = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В (2.11)  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  — вектор перемещений точек оболочки  $V$ .

Рассмотрим выходящее из произвольной точки  $\mathcal{B}$  волокно  $\alpha^k(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Для его относительного удлинения  $\varepsilon$  имеем [29, 42, 47, 49, 56, 65]

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon_j \frac{d\alpha^j}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds}. \quad (2.12)$$

Будем ниже рассматривать случай малых удлинений, в связи с чем

введем предположение 1:

$$|\varepsilon| \ll 1. \quad (2.13)$$

Из (2.12), (2.13) получаем

$$\varepsilon \approx \varepsilon_{ij} \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds}. \quad (2.14)$$

Поскольку в (2.14)  $d\alpha^k/ds$  связаны лишь одним соотношением

$$\sum_{k=1}^3 \left( \frac{d\alpha^k}{ds} \right)^2 = 1,$$

а в остальном произвольны, то из (2.14) вытекает

$$|\varepsilon_{ij}| \ll 1. \quad (2.15)$$

Несложными выкладками убеждаемся, что из (2.15) следует

$$|\delta_{ij}| \ll 1, \quad (2.16)$$

где  $\delta_{ij}$  — искажения углов между  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$  в ходе деформации. ■

**2.4.** Чтобы провести дальнейшие упрощения, в некоторую систему введем  $\boldsymbol{\omega}_i$  — характеристику углов поворота  $\mathbf{e}_i$  при деформации оболочки

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_i + \mathbf{u}_{\alpha i})}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_i + \mathbf{u}_{\alpha i})} = \frac{\mathbf{e}_i \times \mathbf{u}_{\alpha i}}{A_{ii} + e_{ii}}. \quad (2.17)$$

Очевидно, вектор  $\boldsymbol{\omega}_i$  перпендикулярен исходному и деформированному положениям  $\mathbf{e}_i$ , а  $|\boldsymbol{\omega}_i|$  есть тангенс угла поворота  $\mathbf{e}_i$  в ходе деформации.

Используя известное соотношение [43] векторного исчисления

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}),$$

получаем

$$|\boldsymbol{\omega}_i|^2 = \frac{A_{ii} |\mathbf{u}_{\alpha i}|^2 - e_{ii}^2}{(A_{ii} + e_{ii})^2}. \quad (2.18)$$

Далее, из (2.11) имеем

$$e_{ii} = e_{ii} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_{\alpha i}|^2, \quad 1 + \frac{2e_{ii}}{A_{ii}} = 1 + \frac{2e_{ii}}{A_{ii}} + \frac{1}{A_{ii}} |\mathbf{u}_{\alpha i}|^2. \quad (2.19)$$

Найдя из (2.19)  $|\mathbf{u}_{\alpha i}|^2$  и подставив в (2.18), находим

$$1 + \frac{2e_{ii}}{A_{ii}} = (1 + |\boldsymbol{\omega}_i|^2) \left( 1 + \frac{e_{ii}}{A_{ii}} \right)^2. \quad (2.20)$$

См. также: Мамай В. И. Взаимодействие пластин и оболочек.— М.: Издательство МГУ, 1984. Формула (2.20) показывает, что

выполнение условия малости деформации (2.13) само по себе не влечет малости углов поворота и  $e_{ii}$ , поэтому требуются дополнительные гипотезы относительно  $|\omega_i|$  и  $e_{ii}$ .

Самая простая из них сводится к предположению

$$|\omega_i| \sim \varepsilon \ll 1. \quad (2.21)$$

При его последовательном использовании мы придем к линейной теории оболочек. Следующий класс задач можно охарактеризовать соотношением (предположение 2)

$$|\omega_i|^2 \sim \varepsilon \ll 1, \quad (2.22)$$

и его естественно назвать средним изгибом (деформацией со средними углами поворота). Этим выделяется довольно широкий класс деформаций трехмерного континуума, имеющий большую область приложений, по крайней мере в теории оболочек.

При принятии (2.22) из (2.20) имеем

$$1 + \frac{e_{ii}}{A_{ii}} \approx \sqrt{1 + \frac{2e_{ii}}{A_{ii}}}, \quad e_{ii} \sim \varepsilon \ll 1, \quad (2.23)$$

и тогда

$$\omega_i \approx \frac{e_i \times \mathbf{u}_{\alpha i}}{A_{ii}}. \quad (2.24)$$

Пусть, далее,  $\omega_{ik}$  — ковариантные составляющие вектора  $\omega_i$ . Из (2.24) получаем

$$\omega_{11} = 0, \quad \omega_{12} = -\nabla_1 u^3 \frac{D}{A_{11}}, \quad \omega_{13} = \nabla_1 u^1 \frac{D}{A_{11}}, \quad (2.25)$$

$$\omega_{21} = \nabla_2 u^3 \frac{D}{A_{22}}, \quad \omega_{22} = 0, \quad \omega_{23} = -\nabla_2 u^1 \frac{D}{A_{22}}, \quad (2.26)$$

$$\omega_{31} = -\nabla_3 u^2 \frac{D}{A_{33}}, \quad \omega_{32} = \nabla_3 u^1 \frac{D}{A_{33}}, \quad \omega_{33} = 0. \quad (2.27)$$

Соотношения (2.25)–(2.27) разъясняют геометрический смысл величин  $\nabla_p u^k$ . Из этих формул видно, что  $\nabla_p u^k$  есть приближенное значение проекции угла поворота оси  $e_p$  на ось  $e_k$ . Это соображение подсказывает путь дальнейших упрощений. ■

**2.5.** Имея в виду в дальнейшем приложить наши рассуждения к изучению деформаций оболочек, учтем имеющуюся здесь специфику. Вследствие малой толщины оболочки повороты около осей  $e_1, e_2$ , лежащих в касательной плоскости к срединной поверхности, будут значительно больше, чем поворот около оси  $e_3 = \mathbf{n}$ , если, разумеется, отвлекаться от жестких поворотов. В силу этого обстоятельства становится рациональным следующее предположение

о соотношениях между  $\omega_{ik}$  (предположение 3):

$$\omega_{13}, \omega_{23} \sim \omega_{12}^2, \omega_{21}^2, \omega_{31}^2, \omega_{32}^2 \sim \varepsilon \ll 1. \quad (2.28)$$

Из (2.25) — (2.28) следует

$$\nabla_1 u^2, \nabla_2 u^1 \sim (\nabla_1 u^3)^2, (\nabla_2 u^3)^2; (\nabla_3 u^2)^2, (\nabla_3 u^1)^2 \sim \varepsilon \ll 1. \quad (2.29)$$

Эти соотношения справедливы во всем объеме оболочки.

Для определения порядка  $\nabla_i u^i$  учтем соотношения (2.23), из которых получаем

$$e_{ii} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla_i u^k \mathbf{e}_k) = A_{ik} \nabla_i u^k, \quad (2.30)$$

откуда

$$\nabla_i u^i \sim \varepsilon \ll 1; \quad i = 1, 2. \quad (2.31)$$

Соотношения (2.29) — (2.31) дают возможность произвести дальнейшее упрощение (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\alpha i} \cdot \mathbf{u}_{\alpha j} = e_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_i u^k \mathbf{e}_k) \cdot (\nabla_j u^p \mathbf{e}_p) = \\ &= e_{ij} + \frac{1}{2} A_{pk} \cdot \nabla_i u^k \nabla_j u^p + \frac{1}{2} \nabla_i u^3 \cdot \nabla_j u^3; \quad i, j = 1, 2; \\ \varepsilon_{ij} &\approx e_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_i u^3 \cdot \nabla_j u^3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Заниматься упрощением  $\varepsilon_{33}$  мы не будем, поскольку при построении теории оболочек эта компонента исключается из рассмотрения. Что касается величины  $\varepsilon_{i3}$ , то следует заметить, что использованная здесь система упрощений не дает пока результата. Действительно,

$$\varepsilon_{i3} = e_{i3} + \frac{1}{2} \nabla_i u^t \mathbf{e}_t \cdot \nabla_3 u^y \mathbf{e}_y = e_{i3} + \frac{1}{2} A_{ty} \nabla_i u^t \nabla_3 u^y + \nabla_i u^3 \nabla_3 u^3 \quad (2.33)$$

и второй член в правой части (2.33) имеет порядок  $\varepsilon^{3/2}$ , как это следует из (2.29), а последний член вообще пока не оценивается. Дальнейшее упрощение  $\varepsilon_{i3}$  возможно только с привлечением дополнительных гипотез и будет произведено в § 3.

Отметим, что данная схема упрощений может быть продолжена, если вместо (2.22) использовать гипотезу

$$|\omega_i|^m \sim \varepsilon \ll 1. \quad (2.34)$$

В ряде исследований [3, 79, 82—86, 87—91, 92, 93, 94] предложены краевые задачи, свободные от (2.22). Естественно, что при этом соответствующий теоретический и численный анализ существенно усложняются. ■



**§ 3. Гипотезы Кирхгофа — Лява. Их математическое и механическое содержание. Расчет деформаций пологой оболочки на основе гипотез Кирхгофа — Лява**

3.1. Гипотезы Кирхгофа — Лява будут использоваться ниже в следующем виде:

вектор  $\mathbf{u}(u_1(\alpha^i), u_2(\alpha^i), u_3(\alpha^i))$  перемещений точек оболочки имеет структуру

$$\mathbf{u}(u_1(\alpha^i), u_2(\alpha^i), u_3(\alpha^i)) = a(w_1(\alpha^1, \alpha^2), w_2(\alpha^1, \alpha^2), w(\alpha^1, \alpha^2)) + \alpha^3 a_1(v_1(\alpha^1, \alpha^2), v_2(\alpha^1, \alpha^2)); \quad (3.1)$$

$$u_i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = w_i(\alpha^1, \alpha^2) + \alpha^3 v_i(\alpha^1, \alpha^2); \quad i = 1, 2; \quad u_3 = w(\alpha^1, \alpha^2) \quad (3.2)$$

(предположение 4);

поперечные сдвиги  $\varepsilon_{i3}$ ,  $i = 1, 2$ , и поперечная деформация малы по сравнению с другими компонентами тензора деформации (предположение 5) и принимаются равными нулю;

напряжение  $\sigma_{33}$  пренебрежимо мало по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений (предположение 6) и принимается равным нулю.

Гипотезы Кирхгофа — Лява являются обобщением на случай оболочки известной гипотезы Бернулли — Эйлера для стержней. С момента возникновения теории пластин и оболочек ее математическое обоснование неизменно привлекало внимание исследователей. Здесь мы находим имена Коши и Пуассона, Сен-Венана, Галеркина и Краусса, Власова, Кильчевского, Доселла, Лурье, Маргерра, Муштари, Новожилова и других исследователей. История этого периода в развитии проблемы достаточно подробно освещена в [21, 22, 44].

Новый этап в проблеме обоснования гипотез Кирхгофа — Лява наступил уже в послевоенные годы и начался с работ Фридрихса и Дресслера [76]. Общий подход к проблеме обоснования гипотез Кирхгофа — Лява был развит в исследованиях А. Л. Гольденвейзера и его учеников [36]. Другой общий подход предложен И. И. Воровичем и развит в работах О. К. Аксэнтян и И. И. Воровича, Н. А. Базаренко и И. И. Воровича. Этот подход оказался эффективным и с точки зрения численного анализа проблемы. Во всех работах этого цикла мы находим построение алгоритмов вскрытия асимптотической природы решений трехмерных упругих тонких тел. Параллельно проблема исследовалась и в чисто математическом плане. Из последних работ этого направления отметим исследования Дестуиндера и Сьярле [74].

3.2. Разъясним основные выводы относительно характера напряженно-деформированного состояния изотропных тонких тел — оболочек, которые получены на базе описанных выше математических

исследований. Геометрия весьма тонкой оболочки характеризуется двумя безразмерными параметрами  $\lambda = h/R$ ,  $\mu = h/\mathcal{L}$ , где  $h$  — ее толщина,  $R$  — характерный радиус кривизны,  $\mathcal{L}$  — характерный линейный размер срединной поверхности  $S$  (может быть и минимальный радиус кривизны граничного контура).

1) При  $h \rightarrow 0$  и фиксированных  $R$  и  $\mathcal{L}$  мы имеем качественно разный характер напряженно-деформированного состояния оболочки в окрестности границы  $S^0$  и внутри объема  $V$ .

Во внутренних точках  $V$  напряженно-деформированное состояние меняется плавно и дается так называемым первым итерационным процессом [36]. Иными словами, любая характеристика  $\theta$  напряженно-деформированного состояния оболочки внутри  $V$  дается асимптотическим рядом

$$\theta = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \dots, \quad (3.3)$$

причем  $\theta_0$  дается решением соответствующей задачи теории оболочек, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява. Таким образом, во внутренних подобластях  $V$  поправки к теории Кирхгофа — Лява несут первый порядок малости по отношению к  $\mu = h/\mathcal{L}$ .

Иная картина имеет место в окрестности границы  $S^0$ . Здесь в общем случае напряженно-деформированное состояние носит быстро меняющийся характер, и мы его опишем в самых общих чертах. Оно складывается из так называемых погранслоевых напряженных состояний. Они могут быть разделены на две группы. К первой группе погранслоев мы относим напряженно-деформированные состояния вида

$$\theta \sim M \exp\left(-\sqrt{\frac{R}{h}} \kappa_i\right), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.4)$$

Эти напряженно-деформированные погранслоевые состояния первой группы свойственны и теориям, основанным на гипотезах Кирхгофа — Лява. Их всего четыре. ■

2) Принципиально новыми компонентами трехмерных напряженно-деформированных состояний, не улавливаемых теориями Кирхгофа — Лява, являются погранслои второй группы. Здесь любая характеристика содержит компоненты вида

$$\theta_k \sim M \exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{h} \kappa_k\right), \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.5)$$

где  $\kappa_k$  — корни некоторого трансцендентного уравнения, определяемого условиями закрепления оболочки на граничных поверхностях,  $\mathcal{L}$  — характерный радиус кривизны  $\Gamma$ . В общем случае они входят в напряженно-деформированное состояние оболочки в окрестности  $S^0$ , но в прикладных теориях они отсутствуют. Хотя эти погранслои убывают быстро, быстрее, чем погранслои (3.4), тем не менее они могут оказать решающее влияние на напряженно-деформированное состояние в окрестности  $S^0$ . В частности, они могут оказать решающее влияние на концентрацию напряжений. Способы определения

трехмерного напряженного состояния как суммы напряженных состояний типа (3.3) — (3.5) развиты в [1, 7, 8, 13—14, 18—27].

3) Отметим одно принципиальное отличие асимптотики напряженно-деформированного состояния тонкой оболочки в окрестности  $S^0$  от известных асимптотических решений Люстерника — Вишика — наличие бесконечного счетного множества погранслоев. Это создает значительные трудности как вычислительного плана, так и в проблеме математического обоснования.

4) Приведем для характеристики механического содержания и гипотез Кирхгофа — Лява результаты, касающиеся концентрации напряжений непосредственно на  $S^0$ . Показано, что на  $S^0$  любая характеристика напряженно-деформированного состояния оболочки дается асимптотическим рядом

$$\theta = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \dots, \quad (3.6)$$

и здесь естественно было бы ожидать, что главный член разложения  $\theta_0$  должен определяться на базе гипотез Кирхгофа — Лява. Однако подробное исследование предельного перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерным, построенным на базе гипотез Кирхгофа — Лява, показало, что это далеко не всегда так, и в

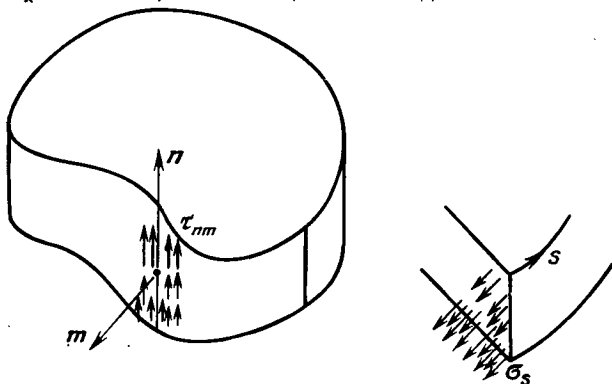


Рис. 3.1

этом основной смысл этих исследований. Например, если оболочка на  $S^0$  заделана, т. е. выполнены условия

$$a|_{S^0} = 0, \quad (3.7)$$

то разложение (3.6) для тангенциального напряжения  $\sigma_s$  (рис. 3.1) дает

$$\sigma_s|_{S^0} = \sigma_{s0} + \mu\sigma_{s1} + \mu^2\sigma_{s2} + \dots, \quad (3.8)$$

однако  $\sigma_{s0}$  не совпадает со значением, которое мы получаем из теории Кирхгофа — Лява. Напротив, если край  $S^0$  свободен, то  $\sigma_{s0}$  совпадает со значением, получаемым из теории Кирхгофа — Лява. Однако уже поперечное касательное напряжение  $\tau_{nm}$  (рис. 3.1),

определяемое разложением

$$\tau_{nm}|_{S^0} = \tau_{nm0} + \mu\tau_{nm1} + \mu^2\tau_{nm2} + \dots, \quad (3.9)$$

находится асимптотически неточно. Иными словами,  $\tau_{nm0}$  не совпадает с тем, что мы имеем в теории Кирхгофа — Лява.

Вышеперечисленные примеры разъясняют в какой-то мере механическое содержание гипотез Кирхгофа — Лява. Более детальный анализ вопроса имеется в вышеупомянутых работах [1, 7, 8, 9, 13, 14, 18—27]. ■

3.3. Вычислим компоненты конечной деформации оболочки в предположениях 1) — 6) гипотез Кирхгофа — Лява. Начнем с  $\varepsilon_{i3}$ . Из (3.1), (3.2) и (2.11) получаем

$$e_{i3} = e_{i3}^0 + \alpha^3 e_{i3}^1, \quad i = 1, 2, \quad (3.10)$$

где

$$e_{i3}^0 = \nabla_i w + \nabla_3 w_i = \nabla_i w + v_i, \quad e_{i3}^1 = 0. \quad (3.11)$$

Из (2.33), далее, имеем

$$\varepsilon_{i3} = e_{i3}^0 + \frac{1}{2} A_{kj} \nabla_i w^k \nabla_3 w^j + \nabla_i w \nabla_3 w. \quad (3.12)$$

Используя (2.8), (2.9), выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3} &= v_i + \nabla_i w + \frac{1}{2} A_{kj} \nabla_j w^k \nabla_3 w^j = v_i + \nabla_i w + \frac{1}{2} v_j \nabla_i w^j = \\ &= v_i + \nabla_i w + \frac{1}{2} v_j \nabla_j w^j, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее, в силу предположения 4 гипотез Кирхгофа — Лява, из (3.13) получаем два уравнения

$$\begin{aligned} v_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \nabla_1 w^1 \right) + \frac{1}{2} v_2 \nabla_1 w^2 v_2 &= -\nabla_1 w, \\ v_1 \frac{1}{2} \nabla_2 w^1 + v_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \nabla_2 w^2 \right) &= -\nabla_2 w. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учтя оценки (2.29), получаем из (3.14) важные соотношения

$$v_i = -\nabla_i w. \quad (3.15)$$

Рассмотрим теперь соотношения для  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Из (2.32) следует

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}^0 + \alpha^3 e_{ij}^1 + \frac{1}{2} \nabla_i w^3 \nabla_j w^3, \quad (3.16)$$

где

$$2e_{ij}^0 = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i = w_{i\alpha j} + w_{j\alpha i} - 2B_{ijw} - 2G_{ij}^k w_k, \quad (3.17)$$

$$2e_{ij}^1 = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i. \quad (3.18)$$

Имеем, далее, из (2.8) и (3.15)

$$\begin{aligned} \nabla_i w^3 &= \nabla_i w = w_{\alpha i} + B_{iq} w^q = w_{\alpha i} + B_{iq} (w^i + \alpha^3 v^q) = \\ &= w_{\alpha i} + B_{iq} (w^q - \alpha^3 \nabla_q w) = \nabla_i w - \alpha^3 B_{iq} \nabla_q w. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.19)$$

Введем теперь *предположение 7* тонкостенности оболочки

$$|h^* B_{ik}| \ll 1, \quad (3.20)$$

с помощью которого получаем

$$\nabla_i w^3 \approx \nabla_i w, \quad i = 1, 2. \quad (3.21)$$

Наконец, подставив (3.15) в (3.18), будем иметь

$$e_{ij}^1 = -\nabla_{ij} w. \quad (3.22)$$

Дальнейший цикл упрощений проведем в *предположении 8* о пологости оболочки. В широком классе задач можно принять

$$\nabla_i w = w_{\alpha i} + B_{ik} w^k \approx w_{\alpha i}, \quad (3.23)$$

и тогда, подставив (3.17), (3.18), (3.22) в (3.16), окончательно получаем

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}^0 + \alpha^3 e_{ij}^1, \quad 2e_{ij}^0 = 2e_{ij}^0 + \nabla_i w \cdot \nabla_j w = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w \cdot \nabla_j w = \\ &= w_{j\alpha i} + w_{i\alpha j} - 2B_{ij} w - 2G_{ij}^k w_k + w_{\alpha i} w_{\alpha j}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$e_{ij}^1 = e_{ij}^1 = -\nabla_{ij} w. \quad \blacksquare \quad (3.25)$$

**3.4.** Вернемся к более детальному разъяснению понятия пологости, обусловленного упрощением (3.23), которое равносильно предположению

$$|w_{\alpha i}| \gg |B_{ij}| \cdot |w|. \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) может выполняться за счет двух факторов: малости кривизны  $B_{ij}$  и слабого возрастания  $w$  при дифференцировании. Вообще говоря, оба фактора действуют одновременно. Чтобы придать (3.23), (3.26) количественный смысл, поступают по-разному. В некоторых источниках, например [36], вводится так называемый показатель изменяемости напряженно-деформированного состояния оболочки: рассматривается наиболее характерное отношение  $|w|$ :  $|w_{\alpha i}| \sim \delta$  и подбирается число  $m$  такое, что  $\delta \sim (h/\mathcal{L})^m$ , где  $\mathcal{L}$  — характерный размер срединной поверхности,  $h$  — толщина оболочки. Показатель  $m$  и характеризует порядок возрастания  $w$  при дифференцировании. Однако, на наш взгляд, комплексный характер условия (3.26) может быть разъяснен следующим образом. Какова бы ни была достаточно гладкая функция  $w(\alpha^1, \alpha^2)$  в  $\Omega$ , она

может быть продолжена нулем вне  $\Omega$ , и можно произвести преобразование Фурье продолженной функции

$$\tilde{w}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha^1, \alpha^2) \exp i(\lambda_1 \alpha^1 + \lambda_2 \alpha^2) d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (3.27)$$

Как правило, мы имеем здесь такую ситуацию, когда  $\tilde{w}$  существенно отлична от нуля лишь в некоторой области изменения параметров  $\lambda_1, \lambda_2$ . Пусть характерная (центральная) точка этой области есть  $\lambda_i^0$ . Иными словами, пусть носитель  $w$  сосредоточен в окрестности  $\lambda_i^0$ . Тогда очевидно

$$|w_{\alpha^k}| \sim |\lambda^0| \cdot |w|, \quad (3.28)$$

и условие пологости (3.26) приобретает вид

$$\frac{|\lambda^0|}{|B_{is}|} \gg 1. \quad (3.29)$$

На наш взгляд, соотношение (3.29), записанное, кстати, в безразмерной форме, наиболее полно вскрывает взаимообусловленность малости кривизны оболочки и характерного рисунка ее напряженно-деформированного состояния, которые слиты в фундаментальном представлении «пологость». ■

3.5. Приведем в окончательной форме соотношения для компонент конечной деформации, полученные на основе гипотез Кирхгофа — Лява. Имеем

$$\varepsilon_{11}^0 = w_{1\alpha^1} - B_{11}w - G_{11}^k w_k + \frac{1}{2} w_{\alpha^1}^2, \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = w_{2\alpha^2} - B_{22}w - G_{22}^k w_k + \frac{1}{2} w_{\alpha^2}^2, \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2}(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) - B_{12}w - G_{12}^k w_k + \frac{1}{2} w_{\alpha^1} w_{\alpha^2}, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_{13}^0 = \varepsilon_{23}^0 = 0. \quad (3.33)$$

Часто вместо  $\varepsilon_{ij}^0$  мы будем использовать величины  $\gamma_{ij}^0$ , определяемые соотношениями

$$\gamma_{11}^0 = \varepsilon_{11}^0 = w_{1\alpha^1} - B_{11}w - G_{11}^k w_k + \frac{1}{2} w_{\alpha^1}^2, \quad (3.34)$$

$$\gamma_{22}^0 = \varepsilon_{22}^0 = w_{2\alpha^2} - B_{22}w - G_{22}^k w_k + \frac{1}{2} w_{\alpha^2}^2, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{12}^0 = 2\varepsilon_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w - 2G_{12}^k w_k + w_{\alpha^1} w_{\alpha^2}. \quad (3.36)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^1 &= e_{11}^1 = -\nabla_{11}w = -w_{\alpha^1\alpha^1} + G_{11}^h w_{\alpha^h}, \\ \varepsilon_{22}^1 &= e_{22}^1 = -\nabla_{22}w = -w_{\alpha^2\alpha^2} + G_{22}^h w_{\alpha^h}, \\ \varepsilon_{12}^1 &= e_{12}^1 = -\nabla_{12}w = -w_{\alpha^1\alpha^2} + G_{12}^h w_{\alpha^h},\end{aligned}\quad (3.37)$$

и, наконец, введем  $\gamma_{ij}^1$  соотношениями

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^1 &= \varepsilon_{11}^1 = e_{11}^1 = -\nabla_{11}w = -w_{\alpha^1\alpha^1} + G_{11}^h w_{\alpha^h}, \\ \gamma_{22}^1 &= \varepsilon_{22}^1 = e_{22}^1 = -\nabla_{22}w = -w_{\alpha^2\alpha^2} + G_{22}^h w_{\alpha^h}, \\ \gamma_{12}^1 &= 2\varepsilon_{12}^1 = 2e_{12}^1 = -2\nabla_{12}w = 2(-w_{\alpha^1\alpha^2} + G_{12}^h w_{\alpha^h}).\end{aligned}\quad (3.38)$$

#### § 4. Потенциальная энергия деформации пологих оболочек в условиях закона Гука

4.1. Опишем более детально механические свойства материала оболочки. Будем считать, что оболочка ортотропна, причем одна из осей ортотропии  $\alpha^3$ . Пусть, далее, в срединной поверхности  $S$  существует ортогональная параметризация  $x^1, x^2$ , являющаяся параметризацией ортотропии. Иными словами, в каждой точке  $S$  оси ортотропии совпадают с  $x^1, x^2$ . На эквидистантных поверхностях  $\alpha^3 = \text{const}$  оси ортотропии получаются параллельным перенесением по нормали  $n$  осей ортотропии с поверхности  $S$  в соответствующих точках. В главных осях ортотропии закон Гука запишется в следующем виде [6, 48, 57]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{13}\sigma_{33}}{E_3}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1). \quad (4.1)$$

Полагая оболочку неоднородной, будем считать, что упругие постоянные  $E(x, \alpha^3)$ ,  $G(x, \alpha^3)$  зависят от  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ . Будем также предполагать, что выполнены условия:

- 1)  $E, G$  — кусочно-гладкие функции  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ ;
- 2)  $E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$  ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ );
- 3) квадратичная форма

$$\begin{aligned}2\Pi &= \left( \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{13}\sigma_{33}}{E_3} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{21}\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{23}\sigma_{33}}{E_3} \right) \sigma_{22} + \\ &+ \left( \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \frac{\nu_{31}\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{32}\sigma_{22}}{E_2} \right) \sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{13}^2}{2G_{13}} + \frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{E_3} - \left( \frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} - \left( \frac{\nu_{13}}{E_3} + \frac{\nu_{31}}{E_1} \right) \sigma_{11}\sigma_{33} - \\
&\quad - \left( \frac{\nu_{23}}{E_3} + \frac{\nu_{32}}{E_2} \right) \sigma_{22}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{13}^2}{2G_{13}} + \frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

равномерно-положительно определена во всем объеме  $V$ , занятом оболочкой, т. е. имеет место неравенство [6, 36, 48, 49, 57]

$$2\Pi \geq m (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}^2). \quad (4.4)$$

Условия (4.2) — (4.4) будем называть условиями регулярности материала (*предположение 9*). Отметим еще полезные соотношения

$$G_{12} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + E_1 \nu_{12} + E_2 \nu_{21}} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\nu_{12} E_1} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2\nu_{21} E_2}. \quad (4.5)$$

В соответствии с гипотезами Кирхгофа — Лява имеем

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{12} = 2G_{12} \cdot \varepsilon_{12} \quad (1 \rightleftharpoons 2). \quad \blacksquare \quad (4.6)$$

Для объемной плотности потенциальной энергии деформации оболочки  $\Pi$  имеем

$$2\Pi = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} = \sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{12}\gamma_{12}, \quad (4.7)$$

где  $\gamma_{11} = \varepsilon_{11}$ ,  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$  ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ). Учтя (4.6), для  $2\Pi$  получаем соотношение

$$2\Pi = B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) \gamma_{\lambda\mu}(\mathbf{x}, \alpha^3) \gamma_{qs}(\mathbf{x}, \alpha^3), \quad \lambda \leq \mu, \quad q \leq s, \quad (4.8)$$

где  $B^{\lambda\mu qs}$  — упругие постоянные в ортогональных осях ортотропии, определяемые соотношениями

$$B^{1111}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B^{1122}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \frac{E_1 \nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2 \nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.9)$$

а  $\gamma_{\lambda\mu}(\mathbf{x}, \alpha^3)$  — компоненты деформации в тех же осях. В силу соотношений (3.16) можно записать

$$\gamma_{\lambda\mu}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \overset{0}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}, \alpha^3) + \alpha^3 \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}, \alpha^3), \quad (4.10)$$

что для  $\Pi$  дает

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{\Pi} + \Pi^*, \quad (4.11)$$

где  $2\Pi_p = B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) \overset{0}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{0}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x})$ ,

$$2\Pi_{\Pi} = (\alpha^3)^2 B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

$$2\Pi^* = \alpha^3 B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) [\overset{0}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{1}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x}) + \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{0}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x})].$$



Для потенциальной энергии  $U$ , накопленной во всем объеме оболочки  $V$ , будем иметь

$$U = \int_V \Pi D^*(\mathbf{x}, \alpha^3) d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \quad (4.13)$$

где  $D^*(\mathbf{x}, \alpha^3)$  — элемент объема в координатах  $x^1, x^2, x^3$ . Если учесть соотношение тонкостенности оболочки (3.20), то можно принять

$$D^*(\mathbf{x}, \alpha^3) \approx D(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}. \quad \blacksquare \quad (4.14)$$

**4.2.** При дальнейшем построении теории нам придется принять *предположение 10* о симметричном по толщине строении оболочки. Именно, будем считать, что упругие постоянные  $E_i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ ,  $G_{ij}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  суть четные функции  $\alpha^3$  и, кроме того,

$$h^+ = h = h^-.$$

Из (4.11), (4.13) при этом получаем

$$U = U_p + U_n, \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} 2U_p &= \int_V 2\Pi_p D d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 = \\ &= \int_S \int_{-h}^h B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) \overset{0}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{0}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x}) D d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 = \int_S Q_p D d\alpha^1 d\alpha^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

причем

$$Q_p = D_p^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}) \overset{0}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{0}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x}), \quad D_p^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) d\alpha^3. \quad (4.17)$$

Для  $U_n$  имеем

$$\begin{aligned} 2U_n &= \int_V 2\Pi_n D dx^1 dx^2 d\alpha^3 = \int_S \int_{-h}^h B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) (\alpha^3)^2 \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{1}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x}) d\alpha^3 = \\ &= \int_S Q_n D d\alpha^1 d\alpha^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$Q_n = D_n^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}) \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) \overset{1}{\gamma}_{qs}(\mathbf{x}),$$

$$D_n^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h B^{\lambda\mu qs}(\mathbf{x}, \alpha^3) (\alpha^3)^2 d\alpha^3. \quad \blacksquare$$

Получим теперь выражения для потенциальной энергии в произ-

вольных  $S$ -координатах  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ . Очевидно,

$$2U_p = \int_S Q_p D d\alpha^1 d\alpha^2, \quad 2U_n = \int_S Q_n D d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (4.19)$$

$$Q_p = D_p^{\lambda\mu q s}(\alpha) \gamma_{\lambda\mu}^0(\alpha), \quad Q_n = D_n^{\lambda\mu q s} \gamma_{\lambda\mu}^1(\alpha) \gamma_{qs}(\alpha), \quad \alpha^i(\alpha^1, \alpha^2), \quad (4.20)$$

где  $D_{p,n}^{\lambda\mu q s}(\alpha)$  выражаются через  $D_{p,n}^{\lambda\mu q s}(x)$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} D_{p,n}^{1111}(\alpha) &= \frac{1}{A_{11}^2 \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin^4(\psi - \varphi) + D_{p,n}^{2222}(x) \cos^4(\psi - \varphi) + \\ &\quad + 2 \sin^2(\psi - \varphi) \cos^2(\psi - \varphi) (2D_{p,n}^{1212}(x) + D_{p,n}^{1222}(x)) \}, \\ D_{p,n}^{2222}(\alpha) &= \frac{1}{A_{22}^2 \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin^4 \varphi + D_{p,n}^{2222}(x) \cos^4 \varphi + \\ &\quad + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (2D_{p,n}^{1212}(x) + D_{p,n}^{1222}(x)) \}, \\ D_{p,n}^{1212}(\alpha) &= \frac{1}{A_{11} A_{22} \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin^2(\psi - \varphi) \sin^2 \varphi + \\ &\quad + D_{p,n}^{2222}(x) \cos^2(\psi - \varphi) \cos^2 \varphi + D_{p,n}^{1212}(x) \sin^2(\psi - 2\varphi) - \\ &\quad - 2D_{p,n}^{1122}(x) \sin \varphi \cos \varphi \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \}, \\ D_{p,n}^{1122}(\alpha) &= \frac{1}{A_{11} A_{22} \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin^2 \varphi \sin^2(\psi - \varphi) + \\ &\quad + D_{p,n}^{2222}(x) \cos^2 \varphi \cos^2(\psi - \varphi) - 4D_{p,n}^{1212}(x) \sin \varphi \cos \varphi \sin(\psi - \varphi) \times \\ &\quad \times \cos(\psi - \varphi) + D_{p,n}^{1122}(x) [\sin^2(\psi - \varphi) \cos^2 \varphi + \cos^2(\psi - \varphi) \sin^2 \varphi] \}, \\ D_{p,n}^{1112}(\alpha) &= \\ &= \frac{1}{A_{11}^3 A_{22}^2 \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin^3(\psi - \varphi) \sin \varphi - D_{p,n}^{2222}(x) \cos^3(\psi - \varphi) \cos \varphi + \\ &\quad + (D_{p,n}^{1122}(x) + 2D_{p,n}^{1212}(x)) \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \sin(2\varphi - \psi) \}, \\ D_{p,n}^{2212}(\alpha) &= \\ &= \frac{1}{A_{11}^{1/2} A_{22}^3 \sin^4 \psi} \{ D_{p,n}^{1111}(x) \sin(\psi - \varphi) \sin^3 \varphi - D_{p,n}^{2222}(x) \cos(\psi - \varphi) \cos^3 \varphi + \\ &\quad + (D_{p,n}^{1122}(x) + 2D_{p,n}^{1212}(x)) \sin \varphi \cos \varphi \sin(\psi - 2\varphi) \} \quad (4.21) \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} 2Q_p &= D_p^{1111}(x) \gamma_{11}^0(x) + D_p^{2222}(x) \gamma_{22}^0(x) + D_p^{1212} \gamma_{12}^0(x) + \\ &\quad + 2D_p^{1122} \gamma_{11}^0(x) \gamma_{22}(x) = D_p^{1111}(\alpha) \gamma_{11}^0(\alpha) + D_p^{2222}(\alpha) \gamma_{22}^0(\alpha) + \\ &\quad + D_p^{1212}(\alpha) \gamma_{12}^0(\alpha) + 2D_p^{1122}(\alpha) \gamma_{11}^0(\alpha) \gamma_{22}^0(\alpha) + \\ &\quad + 2D_p^{1112}(\alpha) \gamma_{11}^0(\alpha) \gamma_{12}^0(\alpha) + 2D_p^{2212}(\alpha) \gamma_{22}^0(\alpha) \gamma_{12}^0(\alpha), \quad (4.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2Q_{II} = & D_{II}^{1111}(\mathbf{x}) \gamma_{11}^2(\mathbf{x}) + D_{II}^{2222}(\mathbf{x}) \gamma_{22}^2(\mathbf{x}) + D_{II}^{1212} \gamma_{12}^2 + \\
 & + 2D_{II}^{1112} \gamma_{11}^1(\mathbf{x}) \gamma_{22}^1(\mathbf{x}) = D_{II}^{1111}(\alpha) \gamma_{11}^2(\alpha) + D_{II}^{2222}(\alpha) \gamma_{22}^2(\alpha) + \\
 & + D_{II}^{1212}(\alpha) \gamma_{12}^2(\alpha) + 2D_{II}^{1122} \gamma_{11}^1(\alpha) \gamma_{22}^1(\alpha) + 2D_{II}^{1112} \gamma_{11}^1(\alpha) \gamma_{12}^1(\alpha) + \\
 & + 2D_{II}^{2212}(\alpha) \gamma_{22}^1(\alpha) \gamma_{12}^1(\alpha). \blacksquare \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

4.3. Составим выражения потенциальной энергии, взаимные к (4.20). Для этого введем усилия  $T^{ij}$  и моменты  $M^{ij}$  посредством соотношений

$$T^{ij} = \frac{\partial Q_p}{\partial \gamma_{ij}} = D_p^{ijkl0} \gamma_{kl}, \quad M^{ij} = \frac{\partial Q_p}{\partial \gamma_{ij}^1} = D_p^{ijkl1} \gamma_{kl}. \quad (4.24)$$

Формулы (4.24) можно записать в виде

$$T^{ij} = D_p^{ijkl0} \varepsilon_{kl}, \quad M^{ij} = D_p^{ijkl1} \varepsilon_{kl}, \quad (4.25)$$

однако в (4.24), если  $k \neq l$ , то  $k = 1, l = 2$ . В то же время в (4.25) попеременно  $k = 1, l = 2; k = 2, l = 1$ . Из (4.24) можно найти

$$\gamma_{kl}^0 = C_{klij,p} T^{ij}, \quad \gamma_{kl}^1 = C_{klij,u} M^{ij}. \quad (4.26)$$

Разрешимость (4.24) относительно  $\gamma_{kl}^0, \gamma_{kl}^1$  гарантируется неравенством (4.4). С помощью (4.26) можно для  $Q_p$  и  $Q_{II}$  получить следующие соотношения:

$$Q_p = C_p^{\lambda\mu\alpha\beta} T_{\lambda\mu} T_{\alpha\beta}, \quad Q_{II} = C_{II}^{\lambda\mu\alpha\beta} M_{\lambda\mu} M_{\alpha\beta}. \quad (4.27)$$

В силу положительной определенности  $\Pi$  и неравенства (4.4) имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
 Q_p \geq m (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{12}^2), \quad Q_{II} \geq m (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{12}^2), \\
 Q_p \geq m (T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{12}^2), \quad Q_{II} \geq m (M_{11}^2 + M_{22}^2 + M_{12}^2).
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Таким образом, тензоры  $D_{p,II}^{ijkl}$  и  $C_{p,II}^{ijkl}$  — положительно определенные, что является следствием регулярности материала (4.4).  $\blacksquare$

4.4. Рассмотрим детально случай изотропной оболочки. Здесь из (4.9) получаем

$$B^{1111}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B^{1122}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad B^{1212}(\mathbf{x}, \alpha^3) = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (4.29)$$

при этом

$$2Q_p = D_{p1} \overset{0}{Y}_1^2 + 2 \frac{D_{p2}}{D^2} \left( \frac{\overset{0}{\gamma}_{12}^2}{4} - \overset{0}{\gamma}_{11} \overset{0}{\gamma}_{22} \right) z \quad (4.30)$$

$$2Q_n = D_{n1} \overset{1}{Y}_1^2 + 2 \frac{D_{n2}}{D^2} \left( \frac{\overset{1}{\gamma}_{12}^2}{4} - \overset{1}{\gamma}_{11} \overset{1}{\gamma}_{22} \right);$$

$$D_{p1} = \int_{-h}^h \frac{E d\alpha^3}{1 - \nu^2}, \quad D_{p2} = \int_{-h}^h \frac{E d\alpha^3}{1 + \nu}, \quad (4.31)$$

$$D_{n1} = \int_{-h}^h \frac{E (\alpha^3)^2 d\alpha^3}{1 - \nu^2}, \quad D_{n2} = \int_{-h}^h \frac{E (\alpha^3)^2 d\alpha^3}{1 + \nu}.$$

В (4.30)

$$\overset{0}{Y}_1 = A^{ij} \overset{0}{\gamma}_{ij} = A^{11} \overset{0}{\gamma}_{11} + A^{22} \overset{0}{\gamma}_{22} + A^{12} \overset{0}{\gamma}_{12}, \quad (4.32)$$

$$\overset{1}{Y}_1 = A^{ij} \overset{1}{\gamma}_{ij} = A^{11} \overset{1}{\gamma}_{11} + A^{22} \overset{1}{\gamma}_{22} + A^{12} \overset{1}{\gamma}_{12}. \quad \blacksquare$$

Соотношения (4.29) — (4.32) можно рассматривать в произвольной параметризации  $\alpha^1, \alpha^2$ , и тогда из них получаем

$$T^{11} = D_{p1} \overset{0}{Y}_1 A^{11} - \frac{D_{p2}}{D^2} \overset{0}{\gamma}_{22} = D_{p3} \overset{0}{Y}_1 A^{11} + D_{p2} \overset{0}{\varepsilon}^{11}, \quad (4.33)$$

$$T^{12} = D_{p1} \overset{0}{Y}_1 A^{12} + \frac{D_{p2}}{2} \frac{\overset{0}{\gamma}_{12}}{D^2} = D_{p3} \overset{0}{Y}_1 A^{12} + D_{p2} \overset{0}{\varepsilon}^{12},$$

где

$$D_{p3} = \int_{-h}^h \frac{E\nu}{1 - \nu^2} d\alpha^3 = D_{p1} - D_{p2}. \quad (4.34)$$

Соотношения (4.33) соответствуют следующему представлению тензоров:

$$D_p^{1111} = D_{p1} (A^{11})^2 = D^{-4} D_{p1} (A^{22})^2, \quad (4.35)$$

$$D_p^{1122} = D_{p1} A^{11} A^{22} - D_{p2} D^{-2} = D^{-4} (D_{p3} A_{11} A_{22} + D_{p2} A_{12}^2),$$

$$D_p^{1112} = D_{p1} A^{11} A^{12} = -D^{-4} D_{p1} A_{22} A_{12}; \quad D_p^{1222} = D_{p1} A^{22} A^{12} = -D^4 D_{p1} A_{11} A_{12},$$

$$D_p^{1212} = D_{p1} A^{12} A^{12} + \frac{D_{p2}}{2} D^{-2} = \left( D_{p1} A_{12}^2 + \frac{D_{p2}}{2} D^2 \right) D^{-4} \quad (1 \neq 2).$$

Аналогично для изотропной оболочки имеем

$$M^{11} = D_{n1} \overset{1}{Y}_1 A^{11} - \frac{D_{n2}}{D^2} \overset{1}{\gamma}_{22} = D_{n3} \overset{1}{Y}_1 A^{11} + D_{n2} \overset{1}{\varepsilon}^{11} \quad (1 \neq 2), \quad (4.36)$$

$$M^{12} = D_{n1} \overset{1}{Y}_1 A^{12} + \frac{D_{n2}}{2D^2} \overset{1}{\gamma}_{12} = D_{n3} \overset{1}{Y}_1 A^{12} + D_{n2} \overset{1}{\varepsilon}^{12}.$$

Для  $D_{\Pi}^{ijkl}$  мы имеем соотношения (4.34), в которых индекс «р» заменен на «и». Из (4.35), (4.36) можно получить

$$D_{p_2}^0 \varepsilon^{ij} = T^{ij} - \frac{D_{p_3} A^{ij}}{2D_{p_1} - D_{p_2}} T, \quad T = T^{ij} A_{ij} = T^{11} A_{11} + T^{22} A_{22} + 2T^{12} A_{12}, \quad (4.37)$$

$$D_{\Pi 2}^1 \varepsilon^{ij} = M^{ij} - \frac{D_{p_3} A^{ij}}{2D_{p_1} - D_{p_2}} M, \quad M = M^{ij} A_{ij} = M^{11} A_{11} + M^{22} A_{22} + 2M^{12} A_{12}. \quad (4.38)$$

Для потенциальной энергии соответственно получаем

$$Q_p = \frac{D_{p_1} T^2}{2D_{p_2} (2D_{p_1} - D_{p_2})} + \frac{D^2}{D_{p_2}} (T^{12} T^{21} - T^{11} T^{22}), \quad (4.39)$$

$$Q_{\Pi} = \frac{D_{\Pi 1} M^2}{2D_{\Pi 2} (2D_{\Pi 1} - D_{\Pi 2})} + \frac{D^2}{D_{\Pi 2}} (M^{12} M^{21} - M^{11} M^{22}).$$

Формулам (4.39) соответствуют следующие значения  $C_{p,\Pi}^{ijkl}$ :

$$C_{1111p} = \frac{D_{p_1} A_{11}^2}{(2D_{p_1} - D_{p_2}) D_{p_2}}, \quad C_{1122p} = \frac{D_{p_1} A_{11} A_{22}}{(2D_{p_1} - D_{p_2}) D_{p_2}} - \frac{D^2}{D_p^2},$$

$$C_{1112p} = \frac{D_{p_1} A_{11} A_{12}}{(2D_{p_1} - D_{p_2}) D_{p_2}} \quad (1 \Leftrightarrow 2). \quad (4.40)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для  $C_{i,jk,\Pi}$  с заменой индекса «р» на «и». ■

Если упругие свойства оболочки не зависят от  $\alpha^3$ , то

$$Q_p = \frac{1}{4Eh} [T^2 + 2D^2 (1 + \nu) (T^{12} T^{21} - T^{11} T^{22})], \quad (4.41)$$

$$Q_{\Pi} = \frac{3}{4Eh^3} [M^2 + 2D^2 (1 + \nu) (M^{12} M^{21} - M^{11} M^{22})];$$

$$C_{1111,p} = \frac{A_{11}^2}{2Eh}, \quad C_{1122,p} = \frac{1}{2Eh} (A_{12}^2 - D^2 \nu),$$

$$C_{1212,p} = \frac{1}{Eh} (2A_{12}^2 + D^2 (1 + \nu)); \quad (4.42)$$

$$C_{1111,\Pi} = \frac{3A_{11}^2}{2Eh^3}, \quad C_{1122,\Pi} = \frac{3}{2Eh} (A_{12}^2 - D^2 \nu),$$

$$C_{1112,\Pi} = \frac{3A_{11} A_{12}}{2Eh}, \quad C_{1212,\Pi} = \frac{3}{Eh} (2A_{12}^2 + D^2 (1 + \nu)). \quad (4.43)$$

### § 5. Независимые перемещения, обобщенные усилия и элементарная работа внешних сил в условиях гипотез Кирхгофа — Лява

5.1. В условиях гипотез Кирхгофа — Лява напряженно-деформированное состояние оболочки в силу (3.1), (3.2), (3.15) выражается через  $w^k(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , — перемещения точек срединной поверхности  $S$ . На границе  $S^0$  сами перемещения, в силу (3.1), (3.2), (3.15), не могут быть заданы произвольно. Если вектор перемещений  $u|_{S^0}$  не имеет структуры (3.1), (3.2), (3.15), то его для решения задачи в рамках гипотез Кирхгофа — Лява необходимо оптимально приблизить соотношением типа (3.1), (3.2), (3.15). Однако легко видеть, что не все величины  $w^k(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;  $v_i = -\nabla_i w$  независимы на  $\Gamma$ . Действительно, мы можем произвольно задать  $w^k(s)$ . Однако тогда, в силу (1.37),  $w_{\alpha^1}^3$  и  $w_{\alpha^2}^3$  будут связаны линейным соотношением и, вообще говоря, возможно задание лишь одной из двух величин  $w_{\alpha^i}^3$ . Таким образом, при выполнении гипотез Кирхгофа — Лява мы имеем на  $\Gamma$  три независимых перемещения  $w^k(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и одну из величин  $w_{\alpha^i}^3$ . Однако из физико-геометрических соображений более рационально на  $\Gamma$  вводить угол наклона нормали к деформированной срединной поверхности  $S$  в граничной точке  $S^0$ , равный  $\partial w / \partial t$ . При этом (1.36), (1.37) определяют  $w_{\alpha^i}^3$ . Таким образом, в условиях Кирхгофа — Лява задание перемещений на  $S^0$  определяется четырьмя независимыми на  $\Gamma$  параметрами  $w^k(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и  $\partial w / \partial t = w_4(s)$ .

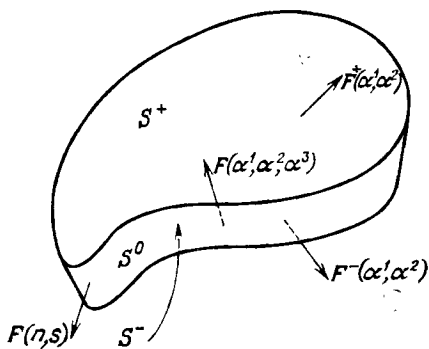


Рис. 5.1

5.2. Вычислим работу внешних приложенных к оболочке сил на возможных перемещениях в условиях гипотез Кирхгофа — Лява (3.1), (3.2), (3.15), (3.20). Будем предполагать, что по граням  $S^\pm$  оболочки приложены усилия  $F^\pm(\alpha^1, \alpha^2)$ . Кроме того, пусть действуют массовые силы  $F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  и, наконец, на  $S^0$  действуют поверхностные силы  $F(s, \alpha^3)$  (рис. 5.1).

Для элементарной работы  $\delta A_1$  массовых сил  $p$  сил, приложенных к  $S^\pm$ , получаем

$$\delta A_1 = \int_{S^+} F^+(\alpha^1, \alpha^2) \delta u(\alpha^1, \alpha^2) |_{S^+} D^+ d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{S^-} F^-(\alpha^1, \alpha^2) \delta u(\alpha^1, \alpha^2) |_{S^-} \times \\ \times D^- d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{S^0} F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \delta u(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3. \quad (5.1)$$

В (5.1)  $D^+$ ,  $D^-$  — элементы площади на  $S^+$  и  $S^-$ , а  $D^*$  — элемент объема в  $S$ -координатах  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ . Легко показать, что при выполнении предположения 7 (3.20) будем иметь

$$D^+ \approx D^- \approx D^* \approx D, \quad (5.2)$$

и тогда

$$\delta A_1 = \int_{\bar{S}} [F^+(\alpha^1, \alpha^2) (\delta a_0 + h \delta a_1) + F^-(\alpha^1, \alpha^2) (\delta a_0 - h \delta a_1) + \\ + \int_{-h}^h F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) (\delta a_0 + \alpha^3 \delta a_1) d\alpha^3] d\Omega \quad (5.3)$$

и, далее,

$$\delta A_1 = \int_{\bar{S}} \left[ F^+(\alpha^1, \alpha^2) + F^-(\alpha^1, \alpha^2) + \int_{-h}^h F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \right] \delta a_0 d\Omega + \\ + \int_{\bar{S}} \left[ F^+(\alpha^1, \alpha^2) h(\alpha^1, \alpha^3) - F^-(\alpha^1, \alpha^2) h(\alpha^1, \alpha^2) + \right. \\ \left. + \int_{-h}^h F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \alpha^3 d\alpha^3 \right] \delta a_1 d\Omega. \quad (5.4)$$

Преобразуя (5.4) и используя (1.65), (1.66) и (3.15), получим

$$\delta A_1 = \int_{\bar{S}} R^k \delta w_k |_{h=1,2,3} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{L}_1 \delta w ds, \quad (5.5)$$

где

$$R^i = F^{+i} + F^{-i} + \int_{-h}^h F^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) d\alpha^3, \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

$$R^3 = F^{+3} + F^{-3} + \int_{-h}^h F^3(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) d\alpha^3 + D^{-1}(\mathcal{L}^i D)_{\alpha^i}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}^i = (F^{+i} - F^{-i}) h + \int_{-h}^h F^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \alpha^3 d\alpha^3, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_1 = \left[ (F^{+2} - F^{-2}) h + \int_{-h}^h F^2 \alpha^3 d\alpha^3 \right] m_2 + \left[ \left( (F^{+1} - F^{-1}) h + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-h}^h F^1 \alpha^3 d\alpha^3 \right) m_1 = \left( (F^+ - F^-) h + \int_{-h}^h F \alpha^3 d\alpha^3 \right) m. \quad (5.9)$$

При получении (5.7), (5.9) предполагалось, что  $\delta a_1$  — достаточно гладкая функция, отличная от нуля лишь на некотором куске  $\Gamma$ , что всегда возможно допустить. ■

**5.3.** Рассмотрим работу  $A_2$  усилий, приложенных к  $S^0$ . Имеем

$$\delta A_2 = \int_{S^0} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\alpha^3 \, ds = \int_{\Gamma} \int_{-h}^h \mathbf{F} \cdot (\delta \mathbf{a}_0 + \alpha^3 \delta \mathbf{a}_1) \, d\alpha^3 \, ds. \quad (5.10)$$

Из (5.10) имеем

$$\delta A_2 = \int_{\Gamma} \int_{-h}^h \mathbf{F} d\alpha^3 \cdot (\delta w_m \mathbf{m} + \delta w_\tau \boldsymbol{\tau} + \delta w_n \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Gamma} \int_{-h}^h \mathbf{F} \alpha^3 d\alpha^3 \cdot \delta v_i \mathbf{e}^i \, ds. \quad (5.11)$$

В (5.11)

$$\delta w_m = \delta w^k m_k, \quad \delta w_\tau = \delta w^k \tau_k, \quad \delta v_i = -\delta w_{\alpha^i}. \quad (5.12)$$

Преобразуя (5.11) интегрированием по частям и снова считая, что  $\delta w$  — достаточно гладкая функция, отличная от нуля лишь на некотором куске  $\Gamma$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta A_2 &= \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}^m \delta w_m + \tilde{T}^\tau \delta w_\tau + \mathcal{L}_2 \delta w + \tilde{M}^m \cdot \delta \frac{\partial w}{\partial m} \right) ds = \\ &= \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}^k \delta w_k + \mathcal{L}_2 \cdot \delta w + \tilde{M}^m \delta w_4 \right) ds, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где

$$\tilde{T}^m = \int_{-h}^h \mathbf{F} \cdot \mathbf{m} \, d\alpha^3 = \int_{-h}^h F^i \mathbf{e}_i \cdot m_k \mathbf{e}^k \, d\alpha^3 = \int_{-h}^h F^k \, d\alpha^3 \cdot m_k = \tilde{T}^k m_k, \quad (5.14)$$

$$\tilde{T}^k = \int_{-h}^h F^k \, d\alpha^3;$$

$$\tilde{T}^\tau = \int_{-h}^h \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\alpha^3 = \int_{-h}^h F^i \mathbf{e}_i \cdot \tau_k \mathbf{e}^k \, d\alpha^3 = \int_{-h}^h F^k \, d\alpha^3 \tau_k = \tilde{T}^k \tau_k; \quad (5.15)$$

$$\tilde{M}^m = \int_{-h}^h \mathbf{F} \alpha^3 \, d\alpha^3 \cdot \mathbf{m} = \int_{-h}^h F^k \alpha^3 \, d\alpha^3 m_k; \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_2 = \int_{-h}^h F^3 \, d\alpha^3 + \frac{\partial \tilde{M}^s}{\partial s}, \quad \tilde{M}^s = \int_{-h}^h \mathbf{F} \alpha^3 \, d\alpha^3 \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_{-h}^h F^k \alpha^3 \, d\alpha^3 \tau_k. \quad \blacksquare \quad (5.17)$$

**5.4.** Запишем теперь выражение для общей работы внешних усилий, приложенных к оболочке. Имеем

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A_1 + \delta A_2 = \int_S R^h \delta w_h |_{h=1,2,3} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}^m \delta w_m + \tilde{T}^s \delta w_s + \tilde{Q} \delta w + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{M}^m \delta w_4 \right) ds = \int_S R^h \delta w_h |_{h=1,2,3} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}^i \delta w_i + \tilde{Q} \delta w + \tilde{M}^m \delta w_4 \right) ds. \end{aligned} \quad (5.18)$$



Здесь  $R^k$  даются соотношениями (5.6), (5.7),  $T^m$ ,  $T^s$ ,  $M^m$  — соотношениями (5.14) — (5.16). Далее,

$$Q = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (5.19)$$

где  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  даются соответственно (5.9), (5.17).

## § 6. Краевые задачи теории среднего изгиба полых оболочек в перемещениях

**6.1.** Для описания условий закрепления оболочки предположим, что имеется два разбиения граничного контура  $\Gamma$ :  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7 + \Gamma_8$ , при этом  $\Gamma_i$  могут быть несвязными множествами, но всегда содержащими конечное число компонент.

Первое разбиение будет использоваться для характеристики изгибных граничных условий, второе — тангенциальных. Будем различать четыре варианта изгибных условий заделки.

1) На  $\Gamma_1$  — жесткая заделка:

$$w|_{\Gamma_1} = \tilde{w}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma_1} = \tilde{w}_4. \quad (6.2)$$

2) На  $\Gamma_2$  — упругое опирание в отношении углов поворота и

$$w|_{\Gamma_2} = \tilde{w}; \quad (6.3)$$

кроме того, предполагается, что в упругой опоре накапливается при деформации энергия

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_2} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} k_n^{44} w_4^2 ds, \quad w_4 = \frac{\partial w}{\partial m}. \quad (6.4)$$

В (6.4)  $k_n^{44}(s) \geq 0$  — кусочно-непрерывный коэффициент упругости опоры,  $w_4$  — угол поворота.

3) На  $\Gamma_3$  — упругое опирание по отношению к поперечным прогибам и

$$w_4|_{\Gamma_3} \equiv \frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma_3} = \tilde{w}_4 \quad (6.5)$$

и в опоре накапливается энергия

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_3} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_3} k_n^{33} w^2 ds, \quad (6.6)$$

где  $k_n^{33}$  — кусочно-непрерывная неотрицательная функция  $s$ .

4) На  $\Gamma_4$  предполагается общее упругое опирание, причем в опоре накапливается энергия

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_4} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_i w_j |_{i,j=3,4} ds. \quad (6.7)$$

Матрица  $k_{ij}^{ij}(s)$  предполагается кусочно-непрерывной и по меньшей мере положительной, т. е. при любых  $w_i, w_j$

$$k_{ij}^{ij}(s) w_i w_j |_{i,j=3,4} \geq 0. \quad \blacksquare \quad (6.8)$$

Тангенциальные условия закрепления оболочки будем характеризовать четырьмя вариантами в соответствии со вторым разбиением.

1) На  $\Gamma_5$  имеем заделку оболочки по отношению к тангенциальным перемещениям

$$w_1|_{\Gamma_5} = \tilde{w}_1, \quad w_2|_{\Gamma_5} = \tilde{w}_2. \quad (6.9)$$

2) На  $\Gamma_6$  предполагаются смешанные условия закрепления: задано нормальное перемещение  $w_m$ , а в касательном направлении предполагается упругая заделка. При этом

$$w_m|_{\Gamma_6} = w_k m^k|_{\Gamma_6} = w^k m_k|_{\Gamma_6} = w \cdot m, \quad (6.10)$$

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_6} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds. \quad (6.11)$$

Здесь заметим, что везде ниже в формулах, содержащих  $k_p^{\tau\tau}$ ,  $k_p^{\tau m}$ ,  $k_p^{mm}$ , суммирование по индексам не производится.

Далее, имеем

$$w_\tau = w_k \tau^k = w^k \tau_k. \quad (6.12)$$

В соотношениях (6.10), (6.11), (6.12)  $w_k$ ,  $w^k$  — ко- и контравариантные составляющие тангенциального перемещения  $w$ ;  $m_k$  и  $m^k$ ,  $\tau_k$  и  $\tau^k$  — соответственно ко- и контравариантные составляющие орта нормали к  $\Gamma$ , лежащей в  $S$ , и орта касательной  $\tau$  к  $\Gamma$ . Коэффициент  $k_p^{\tau\tau}(s)$  предполагается кусочно-непрерывным и неотрицательным.

3) На  $\Gamma_7$  также предполагаются смешанные условия закрепления: задано касательное перемещение  $w_\tau$ , а в нормальном направлении оболочка упруго опирается. При этом

$$w_\tau|_{\Gamma_7} = \tilde{w}_\tau, \quad (6.13)$$

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_7} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds. \quad (6.14)$$

В (6.14)  $k_p^{mm}(s)$  неотрицательна и кусочно-непрерывна, по  $m$  нет суммирования.

4) В этом варианте мы имеем упругое опирание по всем тангенциальным перемещениям, причём

$$U_{\text{оп}}|_{\Gamma_8} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_8} k_p^{ij}(s) w_i w_j |_{i,j=1,2} ds. \quad (6.15)$$

Матрица опирания  $\Gamma_8$  положительна и кусочно-непрерывна. ■

6.2. Для вывода уравнения равновесия оболочки используем вариационный принцип Лагранжа, в соответствии с которым

$$\delta U_p + \delta U_\pi + \delta U_{\text{оп}} = \delta A_1 + \delta A_2. \quad (6.16)$$

К сравнению в (6.16) допускаются достаточно гладкие векторы  $(w_1, w_2, w)$ , удовлетворяющие геометрическим условиям опирания (6.1)–(6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.13).

Раскрывая традиционными рассуждениями вариационное соотношение (6.16), приходим к уравнениям равновесия вида

$$\tilde{\nabla}_j(DT^{ij}) + DR^i = 0, \quad \tilde{\nabla}_j(DT^{ij}) = (DT^{ij})_{\alpha j} + DT^{st}G_{st}^i, \quad T^{ij} = \partial U_p / \partial \varepsilon_{ij}, \quad (6.17)$$

$$\tilde{\nabla}_{ij}(DM^{ij}) + (DT^{ij}w_{\alpha i})_{\alpha j} + DT^{ij}B_{ij} + DR^3 = 0, \quad (6.18)$$

$$M^{ij} = \partial U_\pi / \partial \varepsilon_{ij}, \quad \tilde{\nabla}_{ij}DM^{ij} = (DM^{ij})_{\alpha i \alpha j} + (DM^{ij}G_{ij}^s)_{\alpha s} \quad (6.19)$$

и статическим граничным условиям вида

$$-D_{ii}^{ijkl}\nabla_{kl}w_m m_j |_{\Gamma_2} = (k_{ii}^{44}w + \tilde{M}^m) |_{\Gamma_2}, \quad (6.20)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} (DD_{ii}^{ijkl}\nabla_{kl}w) \tau_j m_i D^{-1} + \frac{\partial}{\partial m} (DD_{ii}^{ijkl}\nabla_{kl}w) m_j m_i D^{-1} + \frac{\partial}{\partial s} (D_{ii}^{ijkl}\nabla_{kl}w) \tau_j m_i + \right. \\ \left. + D_{ii}^{ijkl}\nabla_{kl}w G_{ij}^s m_s - \frac{\partial}{\partial s} (D_p^{ijkl} \varepsilon_{kl} m_i \tau_j) \right\} |_{\Gamma_3} = (k^{3j}w_j + \tilde{Q}) |_{\Gamma_3}, \quad (6.21)$$

$$(-D_{ii}^{ijkl}\nabla_{ij}w m_k m_l) |_{\Gamma_4} = (k_{ii}^{4j}w_j |_{j=3,4} + \tilde{M}^m) |_{\Gamma_4}, \quad (6.22)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} (DD_{ii}^{ijkl}\nabla_{ij}w) \frac{\tau_k m_l}{D} + \frac{\partial}{\partial m} (DD_{ii}^{ijkl}\nabla_{ij}w) \frac{m_k m_l}{D} + \frac{\partial}{\partial s} (D_{ii}^{ijkl}\nabla_{ij}w m_k \tau_l) + \right. \\ \left. + D_{ii}^{ijkl}\nabla_{ij}w G_{kl}^s w_s - \frac{\partial}{\partial s} (D_p^{ijkl} \varepsilon_{kl} m_i \tau_j) \right\} |_{\Gamma_4} = (k^{3j}w_j + \tilde{Q}) |_{\Gamma_4}, \quad (6.23)$$

$$T_{\Gamma_6}^\tau = T^{ij} m_i \tau_j |_{\Gamma_6} = D_p^{ijkl} \gamma_{kl} m_i \tau_j |_{\Gamma_6} = (k_p^{\tau\tau} w_\tau + \tilde{T}^s) |_{\Gamma_6}, \quad (6.24)$$

$$T^m |_{\Gamma_7} = T^{ij} m_i m_j |_{\Gamma_7} = D_p^{ijkl} \gamma_{kl} m_i m_j |_{\Gamma_7} = (k_p^{mm} w_m + \tilde{T}^m) |_{\Gamma_7}, \quad (6.25)$$

$$T^\tau |_{\Gamma_8} = T^{ij} m_i \tau_j |_{\Gamma_8} = D_p^{ijkl} \gamma_{kl} m_i \tau_j |_{\Gamma_8} = (k_p^{\tau\tau} w_\tau + k_p^{tm} w_m + \tilde{T}^s) |_{\Gamma_8}, \quad (6.26)$$

$$T^m |_{\Gamma_8} = T^{ij} m_i m_j |_{\Gamma_8} = D_p^{ijkl} \gamma_{kl} m_i m_j |_{\Gamma_8} = (k^{m\tau} w_\tau + k^{mm} w_m + \tilde{T}^m) |_{\Gamma_8}. \quad (6.27)$$

В соотношениях (6.20) — (6.27)  $\bar{M}^m$ ,  $\bar{Q}$  — изгибающий момент и поперечное усилие, приложенные соответственно на  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$ ;  $\bar{T}^\tau$ ,  $\bar{T}^m$  — внешние касательное и нормальное к  $\Gamma$  усилия, приложенные соответственно на  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$ ,  $\Gamma_8$ . Для них мы имеем соотношения (5.14). Формулы (6.24) — (6.27), имея в виду их последующее использование, запишем в виде

$$\left( D_p^{ijkl} e_{kl} m_i \tau_j - k^{\tau\tau} w_\tau \right) \Big|_{\Gamma_6} = \left( -\frac{1}{2} m_i \tau_j D_p^{ijkl} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} + \bar{T}^\tau \right) \Big|_{\Gamma_6}, \quad (6.28)$$

$$\left( D_p^{ijkl} e_{kl} m_i m_j - k^{mm} w_m \right) \Big|_{\Gamma_7} = \left( -\frac{1}{2} m_i m_j D_p^{ijkl} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} + \bar{T}^m \right) \Big|_{\Gamma_7}, \quad (6.29)$$

$$\left( D_p^{ijkl} e_{kl} m_i \tau_j - k^{\tau\tau} w_\tau - k^{\tau m} w_m \right) \Big|_{\Gamma_8} = \left( -\frac{1}{2} m_i \tau_j D_p^{ijkl} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} + \bar{T}^\tau \right) \Big|_{\Gamma_8}, \quad (6.30)$$

$$\left( D_p^{ijkl} e_{kl} m_i m_j - k^{\tau\tau} w_\tau - k^{mm} w_m \right) \Big|_{\Gamma_8} = \left( -\frac{1}{2} m_i m_j D_p^{ijkl} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} + \bar{T}^m \right) \Big|_{\Gamma_8}. \quad \blacksquare \quad (6.31)$$

Далее, уравнение (6.18) может быть преобразовано, если учесть (6.17). Имеем

$$\begin{aligned} (DT^{ij} w_{\alpha^i})_{\alpha^j} &= (DT^{ij})_{\alpha^j} w_{\alpha^i} + DT^{ij} w_{\alpha^i \alpha^j} = -D(T^{st} G_{st}^i + R^i) w_{\alpha^i} + \\ &+ DT^{ij} w_{\alpha^i \alpha^j}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Подставляя (6.32) в (6.18), получим

$$\tilde{\nabla}_{ij} D M^{ij} + DT^{ij} (B_{ij} + w_{\alpha^i \alpha^j}) - DT^{ij} G_{ij}^s w_{\alpha^s} + D(R^3 - R^s w_{\alpha^s}) = 0$$

и, далее,

$$\tilde{\nabla}_{ij} D M^{ij} + DT^{ij} (B_{ij} + \nabla_{ij} w) + D(R^3 - R^s w_{\alpha^s}) = 0. \quad (6.33)$$

В уравнениях (6.17), (6.18), (6.33) все силовые факторы  $M^i$ ,  $T^i$  можно выразить через  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w$  (соотношения (3.30) — (3.32), (3.37), (4.24)). В результате получаем систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_j (DD_p^{ijkl} \nabla_h w_l) &= DG_{st}^i D_p^{stkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} \right) + \\ &+ \left[ DD_p^{ijkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} \right) \right]_{\alpha^j} - DR^i = \\ &= \tilde{\nabla}_j \left[ DD_p^{ijkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} \right) \right] - DR^i, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\nabla_{ij} (DD_p^{ijkl} \nabla_{kl} w) = DD_p^{ijkl} e_{kl} (B_{ij} + \nabla_{ij} w) + D(R^3 - R^s w_{\alpha^s}). \quad (6.35)$$

Система (6.34), (6.35) вместе с геометрическими граничными ус-

ловиями (6.1), (6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.13) и статическими (6.20)–(6.23), (6.28)–(6.31) описывает широкий класс задач теории тонкостенных конструкций. Характерная их особенность заключается в существенной нелинейности, в которой и сокрыты все важнейшие механические эффекты работы таких конструкций. Вместе с этим можно отметить, что система (6.34) линейна относительно  $w_1, w_2$ . ■

Для удобства дальнейших рассмотрений систему (6.34), (6.35) запишем в следующей форме:

$$\mathcal{P}^i(w_1, w_2) = f_0^i(w) + f_{\alpha j}^{ij}(w) - DR^i = f^i(w) - DR^i, \quad (6.36)$$

где

$$\mathcal{P}^i(w_1, w_2) = \tilde{\nabla}_j (DD_p^{ijkl} \nabla_k w_e), \quad (6.37)$$

$f^i(w) =$

$$\begin{aligned} &= DG_{st}^i D_p^{stkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) + \left[ DD_p^{ijkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) \right]_{\alpha j} = \\ &= \tilde{\nabla}_j \left[ DD_p^{ijkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) \right], \quad (6.38) \end{aligned}$$

$$f_0^i(w) = DG_{st}^i D_p^{stkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right), \quad (6.39)$$

$$f^{ij}(w) = DD_p^{ijkl} \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right). \quad (6.40)$$

Введем далее обозначения

$$\mathcal{P}^3(w) = \tilde{\nabla}_{ij} (DD_n^{ijkl} \nabla_{kl} w), \quad (6.41)$$

$$f^3(w_1, w_2, w) = DD_p^{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 (B_{ij} + \nabla_{ij} w). \quad (6.42)$$

Тогда уравнение (6.35) можно записать в виде

$$\mathcal{P}^3(w) = f^3(w_1, w_2, w) + D(R^3 - R^s w_{\alpha s}). \quad (6.43) \quad \blacksquare$$

6.3. При формулировке общих краевых задач для системы (6.34), (6.36) мы можем комбинировать любой вариант изгибных граничных условий и любой вариант тангенциальных граничных условий. Таким образом, при нашей достаточно общей постановке проблемы мы приходим к 16 краевым задачам для (6.34), (6.35). В соответствии с этим будем различать задачи  $t\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, 4$ ;  $t = 5, 6, 7, 8$ . Например, задача 25 заключается в определении вектора  $a(w_1, w_2, w)$  из (6.34), (6.35) при изгибных граничных условиях на  $\Gamma_2$ —(6.3), (6.20) и тангенциальных граничных условиях на  $\Gamma_5$ —(6.9). Разумеется, наше рассмотрение будет распространяться и на тот случай, когда какие-либо из участков отсутствуют.

При анализе сформулированных краевых задач существенную роль будет играть функционал полной энергии системы оболочка — внешние силы. На основе предыдущих рассмотрений имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{тк}}(\mathbf{a}) = & \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \left[ D_{\text{н}}^{ijkl1} \varepsilon_{ij}^1(w) \varepsilon_{kl}^1(w) + D_{\text{п}}^{ijkl0} \varepsilon_{ij}^0(\omega) \varepsilon_{kl}^0(\omega) \right] D d\alpha^1 d\alpha^2 + \right. \\ & + \int_{\Gamma_2} k_{\text{н}}^{44} w_4^2 ds + \int_{\Gamma_3} k_{\text{н}}^{33} w^2 ds + \int_{\Gamma_4} k_{\text{н}}^{ij} w_i w_j |_{ij=3,4} ds + \int_{\Gamma_6} k_{\text{п}}^{\tau\nu} w_{\tau}^2 ds + \\ & \left. + \int_{\Gamma_7} k_{\text{п}}^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_{\text{п}}^{ij} w_i w_j |_{i,j=1,2} ds \right\} - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m w_4 ds - \\ & - \int_{\Gamma_8} \tilde{Q} w ds - \int_{\Gamma_4} (\tilde{M}^m w_4 + \tilde{Q} w) ds - \int_{\Gamma_6} \tilde{T}^{\tau\nu} w_{\tau} ds - \int_{\Gamma_7} \tilde{T}^m w_m ds - \\ & - \int_{\Gamma_8} (\tilde{T}^m w_m + \tilde{T}^{\tau\nu} w_{\tau}) ds - \int_{\Omega} (R^3 w + R^4 w_i) d\Omega. \quad (6.44) \end{aligned}$$

В (6.44)  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$  — полный вектор перемещений точек срединной поверхности  $S$ ;  $\omega(w_1, w_2)$  — вектор тангенциальных перемещений точек срединной поверхности  $S$ .

## § 7. Краевые задачи теории среднего изгиба пологих оболочек с функцией усилий

7.1. Рассмотрим вначале однородную систему (6.17), положив  $R^i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что она будет приближенно удовлетворяться, если положить [34, 53]

$$T^{ij} = C^{ik} C^{jl} \nabla_k \tilde{\Psi}, \quad (7.1)$$

где  $C^{ik}$  — контравариантные составляющие дискриминантного тензора, определяемые соотношением (1.17),  $\tilde{\Psi}$  — некоторая функция переменных  $\alpha^i$ . В развернутом виде формулы (7.1) запишутся следующим образом:

$$D^2 T^{11} = \nabla_{22} \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_{\alpha^2 \alpha^2} - G_{22}^s \tilde{\Psi}_{\alpha^s}, \quad (7.2)$$

$$D^2 T^{12} = -\nabla_{12} \tilde{\Psi} = -\tilde{\Psi}_{\alpha^1 \alpha^2} + G_{12}^s \tilde{\Psi}_{\alpha^s} \quad (1 \neq 2).$$

Подставив (7.1), (7.2) в однородные уравнения (6.17), получим

$$(DT^{ht})_{\alpha^t}^{\alpha^t} + DT^{ij} G_{ij}^k = K D \tilde{\Psi}_{\alpha^k}, \quad (7.3)$$

где  $K$  — гауссова кривизна  $S$ :

$$K = (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) D^{-2}. \quad (7.4)$$

При выводе (7.3) использовались формулы (1.58), (1.63), (1.64). Соотношения (7.3) показывают, что если поверхность  $S$  разверты-

вающаяся, т. е.  $K=0$ , то (7.2) дают точное решение однородной системы (6.17). Если же  $K \neq 0$ , то в ряде случаев (7.1) дают приближенное решение системы (6.17). ■

Чтобы охарактеризовать область применимости (7.1), целесообразно привлечь заключительные рассуждения § 3. Пусть  $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$  — фурье-образ  $\tilde{\Psi}(\alpha^1, \alpha^2)$ . В естественных случаях область существенных значений  $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$  концентрируется в некоторой части плоскости  $\lambda_1, \lambda_2$ ; пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — её характерная (центральная) точка. Тогда область применимости (7.2) характеризуется соотношением

$$|\lambda|/K \gg 1. \quad (7.5)$$

Практически часто поступают так: метрику на  $S$  считают метрикой некоторой близкой к  $S$  развертывающейся поверхности. Например, если  $S$  близка к плоскости, то выбирают на  $S$  метрику плоскости. При таком подходе (7.1), (7.2) дают точное решение однородных уравнений равновесия на близкой к  $S$  развертывающейся поверхности. В неоднородном случае введем частное решение  $T^ij$  системы (6.17), и тогда

$$T^{ij} = C^{ik}C^{jl}\nabla_{kl}\tilde{\Psi} + T^ij_{\text{ч}}. \quad (7.6)$$

Введение функции напряжений  $\tilde{\Psi}$  дает возможность свести краевую задачу теории полых оболочек к двум уравнениям с двумя неизвестными функциями  $w, \tilde{\Psi}$ . Естественно, при этом несколько сужается область рационального использования полученных краевых задач. Именно, мы рассмотрим случай, когда на всей границе  $\Gamma$  заданы усилия  $T^m, T^s$ :

$$T^m|_{\Gamma} = T^ij m_i m_j|_{\Gamma} = \tilde{T}^m, \quad T^s|_{\Gamma} = T^ij m_i \tau_j|_{\Gamma} = \tilde{T}^s. \quad (7.7)$$

Для поперечных условий будет принято

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (7.8)$$

и, таким образом, на всем контуре  $\Gamma$

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w}. \quad (7.9)$$

В соответствии с (7.8) должны выполняться граничные условия (6.2), (6.20).

Рассмотрим граничные условия для  $\tilde{\Psi}$ . В силу (7.6), (7.7) имеем

$$T^m|_{\Gamma} = (\tau^k \tau^l \nabla_{kl} \tilde{\Psi})|_{\Gamma} + \overset{0}{N}, \quad \overset{0}{N} = T^st_{\text{ч}} m_s m_t, \quad (7.10)$$

$$T^s|_{\Gamma} = (m^k \tau^l \nabla_{kl} \tilde{\Psi})|_{\Gamma} + \overset{0}{S}, \quad \overset{0}{S} = T^st_{\text{ч}} m_s \tau_t. \quad (7.11)$$

Используя (1.56), (1.57), придадим (7.10), (7.11) следующий вид:

$$T^m \Big|_{\Gamma} = \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial s^2} + \kappa_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} + \overset{0}{N} \right) \Big|_{\Gamma} = \tilde{T}^m, \quad (7.12)$$

$$T^s \Big|_{\Gamma} = \left( -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} + \kappa_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} + \overset{0}{S} \right) \Big|_{\Gamma} = \tilde{T}^s. \quad (7.13)$$

Напомним, что в (7.12), (7.13)  $\kappa_2$  — геодезическая кривизна  $\Gamma$ , определяемая соотношением (1.38). Формулы (7.12), (7.13) дают возможность определить на  $\Gamma$   $\tilde{\Psi}$ ,  $\partial \tilde{\Psi} / \partial s$ ,  $\partial \tilde{\Psi} / \partial m$ . Действительно,

$$\left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial s^2} + \kappa_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} \right) \Big|_{\Gamma} = -\overset{0}{N} + \tilde{T}^m, \quad (7.14)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} - \kappa_2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} \right) \Big|_{\Gamma} = \overset{0}{S} - \tilde{T}^s, \quad (7.15)$$

откуда

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} + i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} \right) - i \kappa_2 \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} + i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} \right) \right\} \Big|_{\Gamma} = \\ = \tilde{T}^m - \overset{0}{N} - i(\tilde{T}^s - \overset{0}{S}), \quad i^2 = -1, \quad (7.16)$$

и далее

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} + i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} \right) \Big|_{\Gamma} = \int_0^s \left[ \tilde{T}^m - \overset{0}{N} - i(\tilde{T}^s - \overset{0}{S}) \right] \exp i \int_0^{\mu} \kappa_2(\sigma) d\sigma d\mu. \quad (7.17)$$

Из (7.17) имеем

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} \Big|_{\Gamma} = \int_0^s \left[ \left( \tilde{T}^m - \overset{0}{N} \right) \cos \int_0^{\mu} \kappa_2(\sigma) d\sigma + \left( \tilde{T}^s - \overset{0}{S} \right) \sin \int_0^{\mu} \kappa_2(\sigma) d\sigma \right] d\mu, \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial m} \Big|_{\Gamma} = \int_0^s \left[ \left( \tilde{T}^m - \overset{0}{N} \right) \sin \int_0^{\mu} \kappa_2(\sigma) d\sigma - \left( \tilde{T}^s - \overset{0}{S} \right) \cos \int_0^{\mu} \kappa_2(\sigma) d\sigma \right] d\mu \quad (7.19)$$

и, наконец,

$$\tilde{\Psi} = \int_0^s \tilde{\Psi}_s ds. \quad (7.20)$$

Таким образом, нами получены значения  $\tilde{\Psi}$ ,  $\partial \tilde{\Psi} / \partial m$ ,  $\partial \tilde{\Psi} / \partial s$  на  $\Gamma$ . ■



Более детально следует обсудить две проблемы. Первая из них связана с тем, что правые части (7.18) — (7.20) не всегда будут однозначными функциями на односвязном контуре  $\Gamma$ . Это будет тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_0^L \left[ \left( \tilde{T}^m - \overset{\circ}{N} \right) \cos \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma + \left( \tilde{T}^\tau - \overset{\circ}{S} \right) \sin \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma \right] d\mu = 0, \quad (7.21)$$

$$\int_0^L \left[ \left( \tilde{T}^m - \overset{\circ}{N} \right) \sin \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma - \left( \tilde{T}^\tau - \overset{\circ}{S} \right) \cos \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma \right] d\mu = 0, \quad (7.22)$$

$$\int_0^L \int_0^s \left[ \left( \tilde{T}^m - \overset{\circ}{N} \right) \cos \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma + \left( \tilde{T}^\tau - \overset{\circ}{S} \right) \sin \int_0^\mu \kappa_2(\sigma) d\sigma \right] d\mu ds = 0.$$

(7.23)

В (7.21) — (7.23)  $L$  — длина контура  $\Gamma$ . Соотношения (7.21) — (7.23) выражают факт самоуравновешенности нагрузок, приложенных к оболочке. Если  $S$  односвязна, то самоуравновешенность нагрузок и определяет однозначность граничных значений  $\tilde{\Psi}$ ,  $\partial\tilde{\Psi}/\partial t$ ,  $\partial\tilde{\Psi}/\partial s$  на  $\Gamma$ . В случае, если оболочка многосвязна и  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma^i$ , то физически осмысленны и такие задачи, когда усилия на каждом контуре не уравновешены, а уравновешиваются в целом на всей оболочке. Для разбора этого случая отметим, что здесь  $\tilde{\Psi}$ ,  $\partial\tilde{\Psi}/\partial t$  и  $\partial\tilde{\Psi}/\partial s$  не будут однозначными на каждом из контуров  $\Gamma^i$ . Построим функцию  $\tilde{\Psi}_i$ , однозначную на всех контурах, кроме  $\Gamma^i$ , и такую, что  $\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_i$  однозначна на  $\Gamma^i$  вместе с функцией  $\partial(\tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_i)/\partial t$ . Конкретным построением такой функции здесь мы заниматься не будем. Введем функцию  $\tilde{\Psi}_0$  соотношением

$$\tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_i + \tilde{\Psi}_0, \quad (7.24)$$

где  $\tilde{\Psi}_0$  уже однозначна на всем контуре  $\Gamma$ . При этом, очевидно,

$$\tilde{\Psi}_0|_{\Gamma} = \Phi_0(s), \quad \frac{\partial\tilde{\Psi}_0}{\partial t}|_{\Gamma} = \Phi_1(s). \quad (7.25)$$

Наконец, положив

$$\tilde{\Psi}_0 = \Psi + \tilde{\Psi}_{00}, \quad (7.26)$$

где  $\tilde{\Psi}_{00}$  удовлетворяет (7.25), мы для  $\Psi$  получаем однородные граничные условия

$$\Psi|_{\Gamma} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}|_{\Gamma} = 0. \quad (7.27)$$

При этом из (7.1), (7.24), (7.26) следует

$$\begin{aligned} T^{ij} &= C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\Psi + T_{\frac{1}{4}}^{ij} + S^{ij}, \\ S^{ij} &= C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\left(\sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_i + \tilde{\Psi}_{00}\right), \\ T^{ij} &= C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\Psi + \tilde{T}^{ij}, \quad \tilde{T}^{ij} = \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} + S^{ij}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (7.28)$$

Вторая проблема связана с произволом в граничных условиях на  $\tilde{\Psi}$  и  $\Psi$ . Из (7.12), (7.13) вытекает, что при однородных граничных условиях справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} + i\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right) - i\kappa_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} + i\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right) = 0, \quad (7.29)$$

откуда

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} + i\frac{\partial\Psi}{\partial m} = (\gamma_1 + i\gamma_2)\exp\left(-\int_0^s \kappa_2(\sigma) d\sigma\right). \quad (7.30)$$

Таким образом, произвол в определении  $\partial\Psi/\partial m$  и  $\partial\Psi/\partial s$  обусловлен двумя постоянными  $\gamma_1, \gamma_2$ . При определении  $\Psi$  из (7.20) войдет третья постоянная. В конечном итоге получается произвол в три постоянных, которые в (7.18) — (7.20) выбраны равными нулю.  $\blacksquare$

В целях упрощения технической стороны вопроса мы примем в дальнейшем следующее предположение:  $\tilde{T}^m = \overset{0}{N}$ ,  $\tilde{T}^s = \overset{0}{S}$ . Из (7.17) — (7.20) при этом получаем  $\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial s}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial m}\Big|_{\Gamma} = \tilde{\Psi}\Big|_{\Gamma} = 0$ . Очевидно, далее,  $\tilde{\Psi}_i \equiv 0$  и  $\tilde{\Psi} \equiv \tilde{\Psi}_0$ , причем в (7.25)  $\Phi_0(s) \equiv \Phi_1(s) \equiv 0$ , откуда следует  $\tilde{\Psi}_{00} = 0$  и  $\tilde{\Psi} = \Psi$ ,  $S^{ij} \equiv 0$ ,  $\tilde{T}^i = \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}$ .

7.2. Для вывода уравнений, связывающих  $w$ ,  $\tilde{\Psi}$ , используем вариационный смешанный принцип Алумяэ [4, 5]. В соответствии с этим принципом пара функций  $w, \Psi$  описывает реальное напряженно-деформированное состояние оболочки тогда и только тогда, когда она придает экстремум функционалу

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [D_{\frac{1}{4}}^{ijkl}\nabla_i w \cdot \nabla_{kl}w - 2w(C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij})B_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + (C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij})w_{\alpha i}w_{\alpha j} - C_{ij}{}_{l,p}(C^{hk}C^{lm}\nabla_{lm}\Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{hl}) \times \right. \\ &\quad \left. \times (C^{is}C^{jt}\nabla_{st}\Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij})] d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{\frac{1}{4}}^{44}w_4^2 ds \right\} - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m w_4 ds - \int_{\Omega} R^3 w d\Omega. \quad (7.31) \end{aligned}$$

К сравнению в функционале  $\mathcal{J}$  допускаются функции  $w$ , удовлетворяющие геометрическим граничным условиям (7.9) и (6.2), (6.3),

и функции  $\Psi$ , для которых заданы  $\Psi|_{\Gamma}$ ,  $\partial\Psi/\partial m|_{\Gamma}$ , (7.27). Таким образом, для вариаций  $\delta w$ ,  $\delta\Psi$  имеем

$$\delta w|_{\Gamma} = \frac{\partial\delta w}{\partial m}\Big|_{\Gamma_1} = \delta\Psi|_{\Gamma} = \frac{\partial\delta\Psi}{\partial m}\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7.32)$$

Перед тем как перейти к традиционному выводу уравнений равновесия и совместности для  $w$ ,  $\Psi$ , приведем некоторые вспомогательные соотношения. ■

**Лемма 7.1.** Пусть  $S \in C_{\Omega}^3$ ;  $a(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $b(\alpha^1, \alpha^2) \in C_{\Omega}^2$  и выполнены условия

$$b|_{\Gamma} = \frac{\partial b}{\partial m}\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7.33)$$

В этом случае имеет место соотношение

$$\int_{\Omega} aB_{ij}C^{ih}C^{jl}\nabla_{hl}b \, d\Omega = \int_{\Omega} bB_{ij}C^{ih}C^{jl}\nabla_{hl}a \, d\Omega. \quad (7.34)$$

Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} aB_{ij}C^{ih}C^{jl}\nabla_{hl}b \, d\Omega &= \int_{\Omega} (B_{11}\nabla_{22}b + B_{22}\nabla_{11}b - 2B_{12}\nabla_{12}b)aD^{-1}d\alpha^1d\alpha^2 = \\ &= \int_{\Omega} [B_{11}(b_{\alpha^2\alpha^2} - G_{22}^s b_{\alpha^s}) + B_{22}(b_{\alpha^1\alpha^1} - G_{11}^s b_{\alpha^s}) - \\ &- 2B_{12}(b_{\alpha^1\alpha^2} - G_{12}^s b_{\alpha^s})] aD^{-1}d\alpha^1d\alpha^2 = \int_{\Omega} (\lambda_1 b_{\alpha^1} + \lambda_2 b_{\alpha^2}) d\alpha^1d\alpha^2, \end{aligned} \quad (7.35)$$

где

$$\lambda_1 = -aD \cdot C^{ih}C^{jl}G_{ij}^2B_{hl} - (B_{22}aD^{-1})_{\alpha^1} + (B_{12}aD^{-1})_{\alpha^2} \quad (1 \neq 2). \quad (7.36)$$

Учтя далее формулы Петерсона — Кодацци (1.58) и (1.64), из (7.36) получаем

$$\lambda_1 = D^{-1}(a_{\alpha^2}B_{12} - a_{\alpha^1}B_{22}) \quad (1 \neq 2). \quad (7.37)$$

Далее из (7.35) при повторном использовании (1.58), (1.64) получаем, учтя (7.33),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} aB_{ij}C^{ih}C^{jl}\nabla_{hl}b \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\lambda_1 b_{\alpha^1} + \lambda_2 b_{\alpha^2}) d\alpha^1d\alpha^2 = \\ &= \int_{\Omega} D^{-1}[(a_{\alpha^2}B_{12} - a_{\alpha^1}B_{22})b_{\alpha^1} + (a_{\alpha^1}B_{12} - a_{\alpha^2}B_{11})b_{\alpha^2}] d\alpha^1d\alpha^2 = \\ &= - \int_{\Omega} b \left\{ [D^{-1}(a_{\alpha^2}B_{12} - a_{\alpha^1}B_{22})]_{\alpha^1} + [D^{-1}(a_{\alpha^1}B_{12} - a_{\alpha^2}B_{11})]_{\alpha^2} \right\} \times \\ &\times d\alpha^1d\alpha^2 = - \int_{\Omega} b [D_{\alpha^1}^{-1}(a_{\alpha^2}B_{12} - a_{\alpha^1}B_{22}) + D_{\alpha^2}^{-1}(a_{\alpha^1}B_{12} - a_{\alpha^2}B_{11}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D^{-1} (2a_{\alpha^1 \alpha^2} B_{12} - a_{\alpha^2 \alpha^1} B_{22} - a_{\alpha^2 \alpha^2} B_{11}) + D^{-1} a_{\alpha^2} (B_{12 \alpha^1} - B_{11 \alpha^2}) + \\
& + D^{-1} a_{\alpha^1} (B_{12 \alpha^2} - B_{22 \alpha^1}) \Big] d\alpha^1 d\alpha^2 = - \int_{\Omega} b \Big[ (G_{11}^1 + G_{12}^2) D^{-1} (a_{\alpha^1} B_{22} - \\
& - a_{\alpha^2} B_{12}) + (G_{21}^1 + G_{22}^2) (a_{\alpha^2} B_{11} - a_{\alpha^1} B_{12}) + \\
& + D^{-1} (2a_{\alpha^1 \alpha^2} B_{12} - a_{\alpha^1 \alpha^2} B_{22} - a_{\alpha^2 \alpha^2} B_{11}) + D^{-1} a_{\alpha^2} (G_{11}^h B_{k2} - G_{12}^h B_{k1}) + \\
& + D^{-1} a_{\alpha^1} (G_{22}^h B_{k1} - G_{21}^h B_{k2}) \Big] d\alpha^1 d\alpha^2 = \\
& = \int_{\Omega} b (B_{22} \nabla_{11} a + B_{11} \nabla_{22} a - 2B_{12} \nabla_{12} a) D^{-1} d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (7.38)
\end{aligned}$$

что совпадает с (7.34). Лемма 7.1 доказана. ■

Введем обозначения для произвольных функций  $a, b, c$ :

$$(a, b, c) = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} a_{\alpha^i} b_{\alpha^j} \nabla_{kl} c \, d\Omega, \quad (7.39)$$

$$[a, b, c] = \int_{\Omega} a C^{ih} C^{jl} \nabla_{ij} b \nabla_{kl} c \, d\Omega. \quad (7.40)$$

Лемма 7.2. Пусть  $S, a, b \in C_{\Omega}^3, c \in C_{\Omega}^2$  и для  $c$  выполнены условия (7.33). В этом случае имеют место соотношения

$$(a, b, c) = (c, a, b) = (b, a, c) = (c, b, a). \quad (7.41)$$

Для доказательства первого соотношения (7.41) учтем, что

$$\begin{aligned}
(a, b, c) &= \int_{\Omega} (\nabla_{11} c a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} + \nabla_{22} c a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} - \nabla_{12} c a_{\alpha^1} b_{\alpha^2} - \nabla_{21} c a_{\alpha^2} b_{\alpha^1}) \times \\
&\times D^{-1} d\alpha^1 d\alpha^2 = \int_{\Omega} \left\{ c_{\alpha^1} \left[ - (a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} D^{-1})_{\alpha^1} - G_{11}^1 a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} D^{-1} - G_{22}^1 a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} D^{-1} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. (D^{-1} a_{\alpha^1} b_{\alpha^1})_{\alpha^2} + G_{22}^1 a_{\alpha^1} b_{\alpha^2} D^{-1} + G_{21}^1 a_{\alpha^2} b_{\alpha^1} D^{-1} \right] + \right. \\
&+ c_{\alpha^2} \left[ \left( - a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} D^{-1} \right)_{\alpha^2} - G_{22}^2 a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} D^{-1} - G_{11}^2 a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} D^{-1} + \right. \\
&+ \left. \left. (D^{-1} a_{\alpha^2} b_{\alpha^2})_{\alpha^1} + G_{12}^2 a_{\alpha^2} b_{\alpha^1} D^{-1} + G_{12}^2 a_{\alpha^1} b_{\alpha^2} D^{-1} \right] \right\} d\alpha^1 d\alpha^2 = \\
&= \int_{\Omega} (c_{\alpha^1} \mu_1 + c_{\alpha^2} \mu_2) d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (7.42)
\end{aligned}$$

Используя (1.64), будем иметь

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= - (a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} D^{-1})_{\alpha^1} - G_{11}^1 a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} D^{-1} - G_{22}^1 a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} D^{-1} + (D^{-1} a_{\alpha^1} b_{\alpha^2})_{\alpha^2} + \\
&+ G_{12}^1 a_{\alpha^1} b_{\alpha^2} D^{-1} + G_{21}^1 a_{\alpha^2} b_{\alpha^1} D^{-1} = D^{-1} (a_{\alpha^1} \nabla_{22} b - a_{\alpha^2} \nabla_{12} b) \quad (7.43)
\end{aligned}$$

и соответственно

$$\mu_2 = D^{-1}(a_{\alpha^2} \nabla_{11} b - a_{\alpha^1} \nabla_{21} b). \quad (7.44)$$

Из (7.39), (7.42) — (7.44) получаем

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle &= \int_{\Omega} [c_{\alpha^1} a_{\alpha^1} \nabla_{22} b + c_{\alpha^2} a_{\alpha^2} \nabla_{11} b - (c_{\alpha^1} a_{\alpha^2} + c_{\alpha^2} a_{\alpha^1}) \nabla_{12} b] D^{-1} d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ &= \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} c_{\alpha^i} a_{\alpha^j} \nabla_{kl} b \, d\Omega = (c, a, b). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Второе и третье соотношения (7.41) вытекают из симметрии символа  $(a, b, c)$  относительно  $a, b$ .

**Лемма 7.3.** Пусть  $a \in C_{\Omega}^1$  и удовлетворяет первому из соотношений (7.33),  $b \in C_{\Omega}^2$ ;  $S, c \in C_{\Omega}^3$ . В этом случае справедливо соотношение

$$(a, b, c) = -[a, b, c] + \int_{\Omega} a K b_{\alpha^i} c_{\alpha^k} A^{ik} d\Omega, \quad (7.46)$$

где  $K$  — кривизна  $S$ , определяемая формулой (7.4).

Для доказательства (7.46) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} a_{\alpha^i} b_{\alpha^j} \nabla_{kl} c \, d\Omega &= \int_{\Omega} D^{-1} (a_{\alpha^1} b_{\alpha^1} \nabla_{22} c + a_{\alpha^2} b_{\alpha^2} \nabla_{11} c - \\ &- a_{\alpha^1} b_{\alpha^2} \nabla_{12} c - a_{\alpha^2} b_{\alpha^1} \nabla_{21} c) d\alpha^1 d\alpha^2 = \int_{\Omega} [a_{\alpha^1} D^{-1} (b_{\alpha^1} \nabla_{22} c - b_{\alpha^2} \nabla_{11} c) + \\ &+ a_{\alpha^2} D^{-1} (b_{\alpha^2} \nabla_{11} c - \nabla_{21} c b_{\alpha^1})] d\alpha^1 d\alpha^2 = - \int_{\Omega} a (L_{1\alpha^1} + L_{2\alpha^2}) d\alpha^1 d\alpha^2, \end{aligned} \quad (7.47)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = D^{-1} (b_{\alpha^1} \nabla_{22} c - b_{\alpha^2} \nabla_{12} c), \quad \mathcal{L}_2 = D^{-1} (b_{\alpha^2} \nabla_{11} c - b_{\alpha^1} \nabla_{21} c)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\alpha^1} &= D^{-1} \left[ \nabla_{22} c (b_{\alpha^1 \alpha^1} - G_{1k}^k b_{\alpha^1}) - \nabla_{12} c (b_{\alpha^1 \alpha^2} - G_{1k}^k b_{\alpha^2}) \right] + \\ &+ D^{-1} b_{\alpha^1} (c_{\alpha^1 \alpha^2 \alpha^2} - G_{22\alpha^1}^k c_{\alpha^k} - G_{22}^k c_{\alpha^k \alpha^1}) - D^{-1} (c_{\alpha^1 \alpha^1 \alpha^2} - \\ &- G_{12\alpha^1}^k c_{\alpha^k} - G_{12}^k c_{\alpha^k \alpha^1}) \quad (1 \neq 2). \end{aligned} \quad (7.48)$$

При выводе (7.48) использовались формулы (1.62).

Из (7.48) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\alpha^1} + \mathcal{L}_{2\alpha^2} = & D^{-1} \left[ \nabla_{11} c \left( b_{\alpha^2 \alpha^2} - G_{2k}^h b_{\alpha^2} \right) + \nabla_{22} c \left( b_{\alpha^1 \alpha^1} - G_{1k}^h b_{\alpha^1} \right) + \right. \\ & \left. + \nabla_{12} c \left( -2b_{\alpha^1 \alpha^2} + G_{1k}^h b_{\alpha^2} + G_{2k}^h b_{\alpha^1} \right) \right] + D^{-1} b_{\alpha^1} \left[ -G_{22}^h c_{k\alpha^1} + \right. \\ & \left. + G_{12}^h c_{k\alpha^2} + \left( G_{12\alpha^2}^h - G_{22\alpha^1}^h \right) c_{\alpha^k} \right] + D^{-1} b_{\alpha^2} \left[ -G_{11}^h c_{k\alpha^2} + G_{12}^h c_{k\alpha^1} + \right. \\ & \left. + \left( G_{12\alpha^1}^h - G_{11\alpha^2}^h \right) c_{\alpha^k} \right]. \quad (7.49) \end{aligned}$$

Применяя формулы для производных  $G_{ij}^h$  из (7.49), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\alpha^1} + \mathcal{L}_{2\alpha^2} = & DC^{ih} C^{jl} \nabla_{ij} c \nabla_{kl} b + D^{-1} \left\{ \nabla_{11} c \left( G_{22}^1 b_{\alpha^1} - G_{21}^1 b_{\alpha^2} \right) + \right. \\ & \left. + \nabla_{22} c \left( G_{11}^2 b_{\alpha^2} - G_{12}^2 b_{\alpha^1} \right) + \nabla_{12} c \left[ \left( G_{11}^1 - G_{21}^2 \right) b_{\alpha^2} - \left( G_{12}^1 - G_{22}^2 \right) b_{\alpha^1} \right] \right\} + \\ & + D^{-1} b_{\alpha^1} \left[ -G_{22}^h c_{\alpha^1 \alpha^k} + G_{12}^h c_{\alpha^2 \alpha^k} + \left( -G_{21}^t G_{2t}^h + G_{22}^t G_{1t}^h \right) c_{\alpha^k} + \right. \\ & \left. + \left( B_{21}^2 - B_{11} B_{22} \right) A^{1h} c_{\alpha^k} \right] + D^{-1} b_{\alpha^2} \left[ -G_{11}^h c_{\alpha^2 \alpha^k} + G_{12}^h c_{\alpha^1 \alpha^k} + \right. \\ & \left. + \left( G_{11}^t G_{2t}^h - G_{12}^t G_{1t}^h \right) c_{\alpha^k} + \left( B_{12}^2 - B_{11} B_{22} \right) A^{2h} c_{\alpha^k} \right]. \quad (7.50) \end{aligned}$$

После элементарных упрощений из (7.50) следует

$$\mathcal{L}_{1\alpha^1} + \mathcal{L}_{2\alpha^2} = DC^{ih} C^{jl} \nabla_{ij} c \nabla_{kl} b + D^{-1} b_{\alpha^t} A^{th} c_{\alpha^k} \left( B_{12}^2 - B_{11} B_{22} \right) \quad (7.51)$$

и из (7.47), (7.51) получаем

$$\int_{\Omega} \left( \mathcal{L}_{1\alpha^1} + \mathcal{L}_{2\alpha^2} \right) a \, d\alpha^1 d\alpha^2 = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} \nabla_{ij} c \nabla_{kl} b a \, d\Omega - \int_{\Omega} a K b_{\alpha^t} c_{\alpha^k} A^{th} d\Omega$$

и, далее,

$$(a, b, c) = -[a, b, c] + \int_{\Omega} a K b_{\alpha^t} c_{\alpha^k} A^{th} d\Omega, \quad (7.52)$$

что совпадает с (7.46). Лемма 7.3 доказана. ■

7.3. Вернемся к вариационной обработке функционала  $\mathcal{J}$ . Имеем

$$\delta \mathcal{J} = \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2, \quad (7.53)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}_1 = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ D_{\Pi}^{ijkl} \left( \nabla_{ij} w \nabla_{kl} \delta w + \nabla_{ij} \delta w \nabla_{kl} w \right) - \right. \\ & \left. - 2\delta w \left( C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\Pi}^{ij} B_{ij} \right) + \left( C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\Pi}^{ij} \right) \left( \delta w_{\alpha^i} w_{\alpha^j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + w_{\alpha^i} \delta w_{\alpha^j} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{\Pi}^{44} w_4 \delta w_4 ds - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \delta w_4 dS - \int_{\Omega} R^3 \delta w d\Omega, \quad (7.54) \end{aligned}$$

$$\delta \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ -2w C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \delta \Psi B_{ij} + C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \delta \Psi w_{\alpha^i} w_{\alpha^j} - \right. \\ \left. - C_{ijkl,p} C^{kl} C^{lm} \nabla_{\lambda\mu} \delta \Psi (C^{is} C^{jt} \nabla_{st} \Psi + \tilde{T}_q^{ij}) - \right. \\ \left. - C_{ijkl,p} (C^{kl} C^{lm} \nabla_{\lambda\mu} \Psi + \tilde{T}_q^{kl}) C^{is} C^{jt} \nabla_{st} \delta \Psi \right] d\Omega. \quad (7.55)$$

Обрабатывая правую часть (7.54) традиционной переборской производных с  $\delta w$  на остальные члены, мы получаем

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} D_n^{ijkl} (\nabla_{ij} w \nabla_{kl} \delta w + \nabla_{ij} \delta w \nabla_{kl} w) d\Omega = \int_{\Omega} D_n^{ijkl} \nabla_{ij} w \nabla_{kl} \delta w d\Omega = \\ = \int_{\Omega} D_n^{ijkl} \nabla_{ij} \delta w \nabla_{kl} w d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_{ij} (D D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w) \delta w d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_2} D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w m_i m_j \delta w_4 ds. \quad (7.56)$$

Оператор  $\tilde{\nabla}_{ij}$ , стоящий в правой части (7.56), дается соотношением

$$\tilde{\nabla}_{ij} \Theta = \Theta_{\alpha^i \alpha^j} + (\Theta G_{ij}^s)_{\alpha^s}. \quad (7.57)$$

Далее, если в (7.46) положить

$$a = \delta w, \quad b = w, \quad c = \Psi, \quad (7.58)$$

то получим

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \delta w_{\alpha^i} w_{\alpha^j} \nabla_{kl} \Psi d\Omega = \\ = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi \nabla w \delta w d\Omega + \int_{\Omega} K w_{\alpha^k} \Psi_{\alpha^i} A^{tk} \delta w d\Omega. \quad (7.59)$$

Учтя теперь уже использовавшееся предположение пологости (7.5), из (7.59) будем иметь

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \delta w_{\alpha^i} w_{\alpha^j} \nabla_{kl} \Psi d\Omega \approx - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi \nabla_{ij} w \delta w d\Omega. \quad (7.60)$$

Теперь учтем, что, поскольку  $\tilde{T}_q^{ij}$  удовлетворяет (6.17), то справедливы формулы

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_q^{ij} \delta w_{\alpha^i} w_{\alpha^j} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{T}_q^{ij} \delta w_{\alpha^j} w_{\alpha^i} d\Omega = - \int_{\Omega} (\tilde{T}_q^{ij} D w_{\alpha^i})_{\alpha^j} \delta w d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = - \int_{\Omega} (\tilde{T}_q^{ij} D)_{\alpha^j} w_{\alpha^i} \delta w d\alpha^1 d\alpha^2 - \int_{\Omega} \tilde{T}_q^{ij} D w_{\alpha^i} \alpha^j \delta w d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (7.61)$$

Наконец из (7.61) имеем

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_{\alpha}^{ij} \delta w_{\alpha}{}^i w_{\alpha}{}^j d\Omega = \int_{\Omega} D \tilde{T}_{\alpha}^{ij} G_{ij}^k w_{\alpha}{}^k \delta w d\alpha^1 d\alpha^2 - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\alpha}^{ij} D w_{\alpha}{}^i w_{\alpha}{}^j \delta w d\alpha^1 d\alpha^2 + \\ + \int_{\Omega} R^s w_{\alpha}{}^s w d\Omega = - \int_{\Omega} (\tilde{T}_{\alpha}^{ij} \nabla_{ij} w - R^s w_{\alpha}{}^s) \delta w d\Omega. \quad (7.62)$$

Подставив (7.56), (7.60)–(7.62) в (7.54), получим

$$\delta \mathcal{J}_1 = \int_{\Omega} [D^{-1} \tilde{\nabla}_{ij} (DD_p^{ijkl} \nabla_{kl} w) - (C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\alpha}^{ij}) (B_{ij} + \nabla_{ij} w) + \\ + R^s w_{\alpha}{}^s - R^3] \delta w d\Omega + \int_{\Gamma_2} (D_{\alpha}^{ijkl} \nabla_{kl} w m_j m_j + k_p^{44} w_{\alpha} - \tilde{M}^m) \delta w_{\alpha} ds. \quad (7.63)$$

В силу вариационного принципа Алумяз [4, 5]

$$\delta \mathcal{J}_1 = 0 \quad (7.64)$$

при любых  $\delta w$ , удовлетворяющих однородным геометрическим граничным условиям на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Поэтому из (7.63), (7.64) следует

$$\tilde{\nabla}_{ij} (DD_{\alpha}^{ijkl} \nabla_{kl} w) = D [(C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\alpha}^{ij}) (B_{ij} + \nabla_{ij} w) + R^3 - R^s w_{\alpha}{}^s]. \quad (7.65)$$

Статическое граничное условие из (7.63) получается в форме (6.20). Уравнение (7.65) является первым уравнением нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий  $\Psi$ .

Для получения второго уравнения обработаем правую часть (7.55), перебросив производные с  $\delta \Psi$  на соседние члены. Положив в (7.34)

$$b = \delta \Psi, \quad a = w, \quad (7.66)$$

получаем

$$\int_{\Omega} w C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \delta \Psi B_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} w B_{ij} \delta \Psi d\Omega. \quad (7.67)$$

Далее, если в (7.41) положить

$$c = \delta \Psi, \quad a = b = w, \quad (7.68)$$

то будем иметь

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} w_{\alpha}{}^i w_{\alpha}{}^j \nabla_{kl} \delta \Psi d\Omega = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \delta \Psi w_{\alpha}{}^i w_{\alpha}{}^j \nabla_{kl} w d\Omega, \quad (7.69)$$

и если далее применить (7.46), положив

$$a = \delta \Psi, \quad b = w, \quad c = w, \quad (7.70)$$



то для правой части (7.69) будем иметь

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \delta \Psi_{\alpha^i w_{\alpha^j}} \nabla_{kl} w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \delta \Psi C^{ik} C^{jl} \nabla_{ij} w \nabla_{kl} w \, d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \delta \Psi K w_{\alpha^i} w_{\alpha^k} A^{ik} \, d\Omega. \quad (7.71)$$

Снова, учитывая условие пологости (7.5), можно (7.71) записать в виде

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \delta \Psi_{\alpha^i \alpha^j} \nabla_{kl} w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \delta \Psi C^{ik} C^{jl} \nabla_{ij} w \nabla_{kl} w \, d\Omega. \quad (7.72)$$

Наконец,

$$\int_{\Omega} C_{ijhl, p} C^{hk} C^{lm} C^{is} C^{jt} \nabla_{\lambda\mu} \delta \Psi \nabla_{st} \Psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} D C_{*}^{\lambda\mu st} \nabla_{st} \Psi \delta \Psi \, d\alpha^1 d\alpha^2, \\ C_{*}^{\lambda\mu st} = C_{ijhl, p} C^{hk} C^{lm} C^{is} C^{jt}, \quad (7.73)$$

$$\int_{\Omega} C_{ijhl, p} C^{hk} C^{lm} \nabla_{\lambda\mu} \delta \Psi \tilde{T}_{\square}^{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} (C_{*ij}^{\lambda\mu} D \tilde{T}_{\square}^{ij}) \delta \Psi \, d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (7.74)$$

Подставив (7.67), (7.69), (7.72)–(7.74) в (7.55), будем иметь

$$\delta \mathcal{J}_2 = \int_{\Omega} \left[ - D C^{ik} C^{jl} B_{ij} \nabla_{kl} w - \frac{1}{2} C^{ik} C^{jl} \nabla_{ij} w \nabla_{kl} w D - \right. \\ \left. - \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} D C_{*}^{\lambda\mu st} \nabla_{st} \Psi - \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} (C_{*ij}^{\lambda\mu} D \tilde{T}_{\square}^{ij}) \right] \delta \Psi \, d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (7.75)$$

и в силу смешанного вариационного принципа Алумяэ

$$\delta \mathcal{J}_2 = 0 \quad (7.76)$$

при любом  $\delta \Psi$ , удовлетворяющем (7.27). Из (7.76) получаем

$$\tilde{\nabla}_{\lambda\mu} D C_{*}^{\lambda\mu st} \nabla_{st} \Psi = - D C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} w \left( B_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_{ij} w \right) - \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} (C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\square}^{ij}). \quad (7.77)$$

Уравнение (7.77) и есть второе уравнение нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий  $\Psi$ . ■

Система (7.65), (7.77) с граничными условиями (7.9), (6.2), (6.20), (7.27) и определяет краевую задачу теории пологих оболочек с функцией усилий  $\Psi$ .

Отметим два обстоятельства. Уравнение (7.77) с граничными условиями (7.27) линейно относительно  $\Psi$ , что облегчает и исследование задачи, и ее приближенное решение. Необходимо далее учитывать, что полученная краевая задача не вполне соответствует смешанному вариационному принципу Алумяэ, ибо мы неоднократно использовали условие пологости оболочки (7.5).

Абсолютное соответствие будет иметь место, если  $S$  — развертывающаяся поверхность, т. е.  $K \equiv 0$ , или если с необходимой точностью на ней может быть введена метрика развертывающейся поверхности.

## § 8. Некоторые замечания к нелинейной теории пологих оболочек. Исторический очерк

8.1. Дадим сводку всех предположений, которые использовались при выводе основных краевых задач (6.17), (6.33) — (6.35), (6.1) — (6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.12) — (6.19), (6.20) — (6.23), (6.28) — (6.31) и (7.65), (7.77), (7.27), (7.1), (7.2), (7.7), (7.9).

Предположение 1 — малость относительных удлинений (2.13);

предположение 2 — «средний изгиб» (2.22);

предположение 3 — о превалирующем значении углов поворота  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$ ,  $\omega_{32}$  (2.28);

предположение 4 — гипотезы Кирхгофа (3.1), (3.2);

предположение 5 — гипотезы Кирхгофа — малость поперечных сдвигов  $\epsilon_{i3}$ ,  $i = 1, 2$ , по сравнению с другими компонентами тензора деформации  $\epsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ;

предположение 6 — гипотезы Кирхгофа — напряжение  $\sigma_{33}$  пренебрежимо мало по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений;

предположение 7 — тонкостенность оболочки (3.20);

предположение 8 — пологость оболочки (3.23), (3.26);

предположение 9 — регулярность материала оболочки (4.4);

предположение 10 — симметричная структура оболочки по оси  $\alpha^3$ : четность зависимостей упругих модулей по  $\alpha^3$ ;  $h^+ = h^- = h$ .

Естественно, что при решении каждой конкретной задачи встает вопрос о возможности использования теории пологих оболочек. Его решение мыслимо на двух путях. Можно решить поставленную задачу в рамках более точной теории, лишенной предположений теории пологих оболочек, и потом произвести сравнение. Разумеется, этот способ весьма трудоемок, и его можно использовать лишь в отдельных контрольных вариантах.

Другой путь заключается в том, чтобы по результатам решения задачи в рамках теории пологих оболочек оценить значение произведенных приближений. Эта оценка может быть сделана параллельно с решением задачи, но связана со значительным увеличением вычислительной работы, практически вполне надежна, однако не совсем убедительна с точки зрения строгого логического анализа задачи. Некоторые соображения по этому вопросу будут приведены в гл. III. ■

8.2. Отметим важную особенность основных соотношений теории пологих оболочек: предположение (2.22) среднего изгиба не инвариантно ни относительно малых перемещений, ни относительно больших. Действительно, путем наложения перемещений оболочки

как твердого тела углам поворота  $\omega_i$  можно придать произвольное значение. Поэтому, строго говоря, соотношения (2.22), (2.28) не имеют смысла, ибо относительные удлинения инвариантны относительно движений оболочки как твердого тела. С этим связан и тот факт, что формулы (3.30)—(3.36) не инвариантны ни по отношению к малым перемещениям, что имеет место для формул для  $\varepsilon_{ij}$ , ни по отношению к конечным поворотам, что справедливо для точных соотношений (2.11) для  $\varepsilon_{ij}$ . Поэтому соотношения (2.22), (2.28) нужно понимать во вполне определенном смысле. Именно, мы с самого начала должны предполагать, что оболочка работает в условиях, исключаяющих ее движение как твердого тела. С другой стороны, при возможности движения оболочки как твердого тела соотношения (2.22), (2.28) следует понимать в том смысле, что существует такое положение деформированной оболочки в пространстве, при котором углы поворота  $\omega_i$  имеют значения, соответствующие (2.22), (2.28). ■

8.3. Представляется целесообразным обсудить более детально само понятие «пологая оболочка», и это мы сделаем в первую очередь для задач  $tm$  в перемещениях. Критерий пологости (3.29), предложенный в § 3, представляется достаточно универсальным и адекватным. Из него видно, что соотношения теории пологих

оболочек могут выполняться за счет больших значений  $|\lambda|$  при больших же значениях  $B_{ij}$  и, значит, больших кривизнах. При этом метрика  $A_{ij}$  срединной поверхности  $S$  не обязательно должна быть евклидовой. Более того, она может существенно от нее отличаться. Такие оболочки можно выделить в отдельный класс, и их естественно назвать физически пологими оболочками.

С другой стороны, соотношения (3.29) могут выполняться при достаточно малых величинах  $|B_{ij}|$ . Этот факт можно интерпретировать и в том смысле, что срединная поверхность  $S$  оболочки по форме должна мало отличаться от плоскости. В частности, В. З. Власов [15, 16], один из основателей теории пологих оболочек, предлагал считать полой оболочку, для которой отношение ее подъема  $\mathcal{H}$  к линейному размеру  $\mathcal{L}$  имеет порядок  $1/10—1/15$ . Разумеется, при этом имелись в виду оболочки с плавным изменением кривизны, что характерно для многих типов строительных конструкций. В общем же случае и величина  $\mathcal{H}/\mathcal{L}$  не может быть исчерпывающим критерием пологости оболочки, и для окончательного решения вопроса надо обращаться к оценке  $|B_{ij}|$  или к оценкам (3.29). Чен Вей-Цанг [72, 73] предлагает считать оболочку полой, если мало отношение размеров ее плана к минимальному радиусу кривизны. И здесь можно сказать, что этот критерий применим лишь в случае мало меняющейся кривизны, но в этом случае критерии Власова и Чен Вей-Цанга совпадают.

В дальнейшем оболочки, для которых (3.29) будет выполняться при малых  $B_{ij}$ , будем называть геометрически пологими. ■

Отметим также, что немаловажным фактором в использовании того или иного варианта теории оболочек является возможность введения евклидовой метрики. Условия такой возможности даются теоремой 1.2. Метрику на  $S$  можно также считать евклидовой, если она близка к развертывающейся. В этом случае уравнения (7.65), (7.77) есть точное следствие смешанного вариационного принципа Алумяз [4, 5], как это установлено в § 7. Очевидно, такие пологие оболочки целесообразно называть развертывающимися. В качестве критерия принадлежности оболочки к типу развертывающихся можно использовать неравенство

$$A_{12\alpha^1\alpha^2} - \frac{1}{2}(A_{11\alpha^2\alpha^2} + A_{22\alpha^1\alpha^1}) + A_{\gamma\delta}G_{12}^\gamma G_{12}^\delta - A_{\alpha\beta}G_{11}^\alpha G_{22}^\beta \gg B_{11}B_{22} - B_{12}^2, \quad (8.1)$$

вытекающее из уравнения Гаусса (1.58).

Оболочки, пологие в смысле В. З. Власова, Чен Вей-Цанга, для которых срединная поверхность близка к плоскости, естественно назвать собственно пологими. Собственно пологие оболочки есть частный случай развертывающихся. Теория таких оболочек в настоящее время широко используется. ■

**8.4.** В развитии нелинейной теории пологих оболочек можно отметить несколько этапов. Ее основы восходят к трудам И. Г. Бубнова [11] и Т. Кармана [78]. И. Г. Бубновым впервые была поставлена задача о хлопке искривленной пластины и введен сам термин «хлопок». Т. Карманом были впервые составлены уравнения «среднего изгиба» для пластины. Здесь в явной форме сформулировано предположение (2.22), введена для пластины функция усилий  $\Psi$ . Эта работа послужила источником для многих исследований технического плана. Работы И. Г. Бубнова и Т. Кармана составляют исходный этап в развитии нелинейной теории пологих оболочек.

Позднее, уже в 30-е годы, мы находим у Л. Доннела [75, 76] первую формулировку идеи пологости, выраженную в предположении о возможности пренебречь в уравнениях тангенциального напряженного состояния оболочки перерезывающими усилиями. Последнее, очевидно, эквивалентно предположению 8, определяемому соотношениями (3.26), (3.29). В работах Х. М. Муштари [51—54], относящихся к 1938 г., эта идея получила широкое развитие, и ее использованием были решены многие задачи устойчивости оболочек. В работах Л. Доннела и Х. М. Муштари идея пологости использовалась лишь в линейных задачах теории оболочек.

Третий этап связан с именами К. Маргерра, В. З. Власова, Чен Вей-Цанга, В. И. Феодосьева и др. авторов. Основной труд К. Маргерра вышел в 1938 г. В нем идея Т. Кармана распространена на случай собственно пологой оболочки, сами уравнения К. Маргерра записаны в декартовых координатах на плоскости. В середине сороковых годов появились исследования В. З. Власова [15, 16] и Чен Вей-Цанга [72, 73]. В них краевые задачи теории собственно

пологих оболочек были записаны в произвольных криволинейных координатах на плоскости. В 1946 г. В. И. Феодосьевым был предложен вариант нелинейной теории пологих оболочек вращения [69]. Уравнения В. И. Феодосьева получили широкое распространение при решении практических задач.

В работах К. Маргерра, В. З. Власова, Чен Вей-Цанга, В. И. Феодосьева использовались предположение 2 «среднего изгиба» (2.22) и предположение 8 пологости (3.23), (3.26).

Важное значение для развития нелинейной теории пологих оболочек имеет монография В. В. Новожилова [57], в которой содержится последовательный вывод уравнений Т. Кармана с анализом их погрешностей и пределов применимости.

В работах К. З. Галимова [28—35], базирующихся на исследованиях этого автора по общей нелинейной трехмерной теории упругости, широко использовались методы современной дифференциальной геометрии поверхностей, тензорный анализ.

Новый этап в развитии теории связан уже с работами Э. Рейсснера [87—91] и Н. А. Алумяэ [3], в которых основные краевые задачи выводились без предположения «среднего изгиба» (2.22), а углы поворотов считались конечными. В середине шестидесятых годов в этом же направлении появились труды В. Т. Койтера [79], И. Сандерса [92], И. Саймондса, Д. Даниельсона [93, 94], где разрабатывалась нелинейная теория оболочек, свободная от предположения «среднего изгиба». В связи с этим отметим также важный цикл работ В. Петрашкевича [82—86], где проблема рассматривается с большой общностью. Обзор работ В. Петрашкевича содержится в [85]. Асимптотический вывод краевых задач нелинейной теории пластин дан в работах П. Дестундера и Ф. Сьярле [68, 74]. Отметим также работу Л. А. Шаповалова\*).

В ближайшем будущем внимание исследователей, видимо, привлекут проблемы построения нелинейной теории оболочек, базирующиеся лишь на предположении 7 (3.20) о тонкостенности оболочки. Приведенная здесь схема последовательного анализа основных предположений нелинейной теории оболочек и вывод краевых задач принадлежит автору.

---

\*) Шаповалов Л. А. Уравнения эластики тонкой оболочки при несимметричной деформации // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 3.

## § 9. Некоторые общие математические факты

9.1. Пусть на некотором замкнутом множестве  $\pi$  рассматриваются непрерывные функции с производными порядка  $k$  включительно. Определив на этом множестве норму

$$\|f\|_{C_{\pi}^k} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^i \max_{\alpha} \left| \frac{\partial^i f}{\partial \alpha_1^j \partial \alpha_2^{i-j}} \right|, \quad (9.1)$$

превращаем его в банахово пространство  $C_{\pi}^k$ .

Вектор  $\mathbf{f}(f_1, \dots, f_n)$  принадлежит  $C_{\pi}^k$ , если  $f_i \in C_{\pi}^k$  и

$$\|\mathbf{f}\|_{C_{\pi}^k} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{C_{\pi}^k}. \quad \blacksquare \quad (9.2)$$

Введем пространство  $H_{\pi}^{k,\lambda}$  функций, имеющих в  $\pi$  все непрерывные производные порядка  $k$ , причем каждая из этих производных удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\lambda$ . При этом

$$\|f\|_{H_{\pi}^{k,\lambda}} = \|f\|_{C_{\pi}^k} + \sum_{|k|} \max_{\mathcal{P}, Q \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^k f(\mathcal{P}) - \partial^k f(Q)}{r_{\mathcal{P}, Q}^{\lambda}} \right|, \quad r_{\mathcal{P}, Q} = |\mathcal{P} - Q|. \quad (9.3)$$

В правой части (9.3) стоит сумма гельдеровых разностей всех производных  $f$  порядка  $k$ .

Вектор  $\mathbf{f}(f_1, \dots, f_n)$  принадлежит  $H_{\pi}^{k,\lambda}$ , если  $f_i \in H_{\pi}^{k,\lambda}$  и

$$\|\mathbf{f}\|_{H_{\pi}^{k,\lambda}} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{H_{\pi}^{k,\lambda}}. \quad \blacksquare \quad (9.4)$$

Пространство  $L_{p\pi}$  содержит функции  $f$ , суммируемые в  $\pi$  со степенью  $p$ , причем

$$\|f\|_{L_{p\pi}} = \left( \int_{\pi} |f|^p d\pi \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (9.5)$$

соответственно

$$\|\mathbf{f}\|_{L_{p\pi}} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_{p\pi}}. \quad (9.6)$$

В качестве  $\pi$  у нас будет выступать или область  $\Omega$ , или какая-нибудь ее часть, или контур  $\Gamma$ , или какая-нибудь его часть. Если  $\pi$  есть  $\Omega$ , то

$$\|f\|_{L_p\Omega} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\Omega \right)^{1/p}. \quad (9.7)$$

При  $p = 2$  мы имеем пространство Гильберта  $H$

$$(f_1 \cdot f_2)_H = \int_{\Omega} f_1 f_2 d\Omega. \quad (9.8)$$

Если  $f_1, f_2$  — векторы, то

$$(f_1 \cdot f_2)_H = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_{1i} f_{2i} d\Omega. \quad \blacksquare \quad (9.9)$$

9.2. Пусть вектор-функция  $\rho(s)$ , представляющая контур  $\Gamma$ , такова, что для любой точки  $\Gamma$  есть окрестность  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ , где  $\rho(s) \in C_{\tilde{\Gamma}}^k$ . Будем в этом случае говорить, что  $\Gamma \in C_{\Gamma}^k$ . Если  $\Gamma$  состоит из конечного числа кусков  $\Gamma_i$ , на каждом из которых  $\rho(s) \in C_{\Gamma_i}^k$ , то будем говорить, что  $\Gamma$  — кусочно-гладкий контур (КГК), принадлежащий  $C_{\Gamma}^k$ . Аналогично вводятся и контуры  $\Gamma \in H_{\Gamma}^{k,\lambda}$  и КГК  $\Gamma \in H_{\Gamma}^{k,\lambda}$ . Эти же определения приложимы к границе области  $\Omega$  — контуру  $g(\sigma)$ . Далее, вводим поверхности  $S$  классов  $C_{\Omega}^k$  и  $H_{\Omega}^{k,\lambda}$ . Легко видеть, что если  $S \in C_{\Omega}^k (H_{\Omega}^{k,\lambda})$  и КГК  $\Gamma \in C_{\Gamma}^k (H_{\Gamma}^{k,\lambda})$ , то КГК  $g$  класса  $C_g^k (H_g^{k,\lambda})$ .

9.3. Напомним читателю некоторые факты и определения из теории действительных банаховых пространств.

Множество элементов  $\varphi$ , каждый из которых удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi - \varphi_0\|_B \leq R, \quad (9.10)$$

называется замкнутым шаром с центром в  $\varphi_0$  и радиуса  $R$ . При выполнении строгого неравенства в (9.10) будем иметь открытый шар.

Если все элементы множества банахова пространства принадлежат одному шару, то это множество будем называть ограниченным.

Оператор  $G$ , действующий из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$ , называется линейным, если для двух любых элементов  $\varphi_1, \varphi_2 \in B_1$  и любых действительных чисел  $c_1, c_2$  имеет место соотношение

$$G(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1G\varphi_1 + c_2G\varphi_2. \quad (9.11)$$

Оператор  $G$  (не обязательно линейный) называется ограниченным, если он любое ограниченное множество в  $B_1$  переводит в ограниченное множество в  $B_2$ .

**Лемма 9.1.** Для того чтобы линейный оператор  $G$  был ограниченным, необходимо и достаточно существование такой постоянной  $m$ , что

$$\|G\varphi\|_{B_2} \leq m \|\varphi\|_{B_1} \quad (9.12)$$

для любого  $\varphi \in B_1$ .

Действительно, достаточность (9.12) для ограниченности  $G$  очевидна. Пусть теперь  $G$  — ограниченный оператор, и (9.12) не имеет места. Тогда должна существовать последовательность такая, что

$$\|\varphi_n\|_{B_1} = 1, \quad (9.13)$$

$$\|G\varphi_n\|_{B_2} \rightarrow \infty, \quad (9.14)$$

что противоречит определению ограниченности  $G$ .

Нижняя грань возможных значений  $m$  в (9.12) называется нормой оператора  $G$ , для нее примем ниже обозначение  $\|G\|$ . ■

Оператор  $G$  называется непрерывным, если из

$$\varphi_n \Rightarrow \varphi_0 \text{ в } B_1 \quad (9.15)$$

следует

$$G\varphi_n \Rightarrow G\varphi_0 \text{ в } B_2. \quad (9.16)$$

Здесь и ниже двойная стрелка всегда обозначает сильную сходимость последовательности.

В частном случае, если  $B_2$  есть действительная ось, мы получаем действительные функционалы, к которым, таким образом, относятся все предыдущие определения и факты.

**Теорема Рисса.** Всякий линейный и ограниченный функционал в пространстве Гильберта представим в виде

$$\Phi(\varphi) = (\varphi_\Phi \cdot \varphi), \quad (9.17)$$

где  $\varphi_\Phi$  — некоторый фиксированный и однозначно определяемый для данного функционала  $\Phi(\varphi)$  элемент. ■

Последовательность элементов  $\varphi_n$  пространства называется слабо сходящейся к элементу  $\varphi_0$ , если для любого линейного и ограниченного функционала  $\Phi(\varphi)$  имеет место соотношение

$$\Phi(\varphi_n) \rightarrow \Phi(\varphi_0). \quad (9.18)$$

Для слабой сходимости последовательности  $\varphi_n$  ниже используем обозначение  $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ . Легко видеть, что если  $\varphi_n \Rightarrow \varphi_0$ , то и  $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ . Обратное неверно. ■

Множество элементов  $\varphi$  пространства  $B$  называется сильно (слабо) компактным, если из любой его бесконечной части можно выделить сильно (слабо) сходящуюся подпоследовательность.

Оператор  $G$  называется компактным, если любое ограниченное множество из  $B_1$  он переводит в компактное множество в  $B_2$ .

Оператор  $G$  назовем вполне непрерывным, если он компактен и непрерывен.



Оператор  $G$  будем называть усиленно непрерывным, если он всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся. ■

Множество элементов пространства Банаха называется сильно (слабо) замкнутым, если оно содержит все сильно (слабо) предельные точки своих элементов.

Определение (9.10) соответствует приведенному здесь. ■

**9.4. Теорема 9.1.** Всякое ограниченное бесконечное множество пространства Гильберта слабо компактно.

**Теорема 9.2.** Замкнутый шар пространства Гильберта слабо компактен и слабо замкнут.

**Теорема 9.3.** Пусть для последовательности элементов  $\varphi_n$  пространства Гильберта выполнены условия

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_0, \quad \|\varphi_n\| \rightarrow \|\varphi_0\|. \quad (9.19)$$

В этом случае

$$\varphi_n \Rightarrow \varphi_0. \quad (9.20)$$

**Теорема 9.4.** Всякий слабо непрерывный функционал принимает максимальное значение на любом слабо замкнутом множестве.

**Теорема 9.5.** Пусть оператор  $G$  действует усиленно непрерывно из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$ . При этом шар в  $B_1$  слабо компактен. В этом случае  $G$  действует вполне непрерывно.

Для доказательства заметим, что если  $G$  усиленно непрерывен, то он подавно непрерывен. Установим теперь, что он будет и компактным. Пусть  $\omega$  — некоторое ограниченное множество в  $B_1$ . Покажем, что  $G\omega$  будет компактным. Пусть  $G\tilde{\omega}$  — некоторая бесконечная часть  $G\omega$ . Очевидно, множество  $\tilde{\omega}$  как часть  $\omega$  также ограничено и, значит, в силу условия, наложенного на  $B_1$ , содержит слабо сходящуюся в  $B_1$  последовательность  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Очевидно,  $G\omega_1, \dots, G\omega_2, \dots$  — сильно сходящаяся последовательность. Таким образом,  $G\tilde{\omega}$  содержит сильно сходящуюся последовательность. Теорема 9.5 доказана.

**Теорема 9.6.** Пусть линейный оператор  $G$  действует вполне непрерывно из рефлексивного банахова пространства  $B_1$  в рефлексивное банахово пространство  $B_2$ . В этом случае  $G$  является усиленно непрерывным оператором. Последнее означает, что из

$$\omega_n \rightarrow \omega_0 \text{ в } B_1 \quad (9.21)$$

вытекает

$$G\omega_n \Rightarrow G\omega_0. \quad (9.22)$$

Доказательство этой теоремы приводиться не будет.

Теорема имеет важные приложения. В частности, из нее вытекает, что во всех теоремах вложения соболевских пространств оператор вложения не только вполне непрерывен, как это формулируется обычно, но и усиленно непрерывен. Этот факт является следствием рефлексивности пространств Соболева и линейности оператора вложения.

Нами приведены необходимые для дальнейшего факты и понятия из функционального анализа. Более обстоятельно читатель может ознакомиться с ними в [9, 10, 25, 28, 29]. ■

9.5. Перейдем к разъяснению важной топологической характеристики — вращению векторного поля, которая будет ниже существенно использоваться. Начнем с простейшего случая — векторного поля на плоскости. Пусть в каждой точке некоторой плоской области  $\Sigma$  задан вектор  $\Pi$ , непрерывно зависящий от координат  $x_1, x_2$  (рис. 9.1). В этом случае будем говорить, что в  $\Sigma$  задано непрерывное векторное поле  $\Pi$ . Точки, где

$$\Pi(x_1, x_2) = 0, \quad (9.23)$$

будем называть особыми. Пусть в  $\Sigma$  проведена некоторая гладкая кривая  $d$  (рис. 9.1), и проследим, как меняется угол  $\varphi$  между вектором  $\Pi$  и осью  $x_1$  при перемещении из точки  $A$  в точку

Б, для чего введем величину

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} (\varphi_B - \varphi_A), \quad (9.24)$$

которую назовем *вращением векторного поля  $\Pi$  на  $d$* . При этом, естественно, предполагается, что  $d$  не содержит особых точек  $\Pi$ . Очевидно, если  $d$  — замкнутая кривая, то  $\gamma$  — целое число (либо положительное, либо отрицательное, либо нуль). ■

Впервые роль вращения плоского векторного поля как важной характеристики краевых задач была, видимо, выявлена в задачах Римана и сингулярных интегральных уравнениях [5, 20]. В случае плоского векторного поля его вращение на замкнутой кривой может быть вычислено по формуле [6, 12]

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_d \frac{\Pi'_2 \Pi_1 - \Pi'_1 \Pi_2}{\Pi_1^2 + \Pi_2^2} d\sigma, \quad (9.25)$$

где  $\Pi_i(\sigma)$  — составляющие вектора  $\Pi$ , выраженные как функции  $\sigma$  — дуги кривой  $d$ .

Формула (9.25) была предложена Пуанкаре [11, 22, 23]. Естественно, предполагается, что  $d \in C_d^1$ .

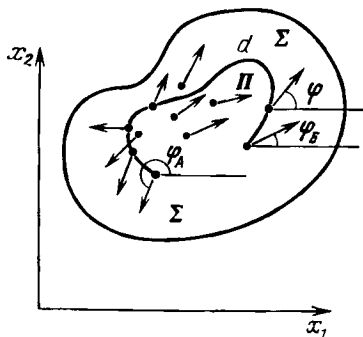


Рис. 9.1

Теорема 9.7 [12, 22, 23]. Если вращение  $\gamma$  некоторого векторного поля на замкнутой кривой  $d$  отлично от нуля, то внутри  $d$  имеется по крайней мере одна особая точка. ■

Теорема 9.7 может использоваться для доказательства разрешимости уравнений на плоскости. В самом деле, пусть требуется выяснить, имеются ли внутри  $d$  корни системы

$$x_i = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (9.26)$$

Вводим векторное поле

$$P_i(x_1, x_2) = f_i(x_1, x_2) - x_i \quad (9.27)$$

и вычисляем вращение этого поля на  $d$  по формуле Пуанкаре [22] (рис. 9.2).

Отметим, что использование формулы (9.25) в значительной мере облегчается тем, что  $\gamma$  — целое число. Отметим также, что

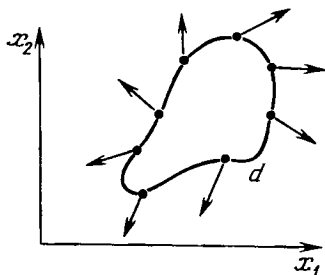


Рис. 9.2

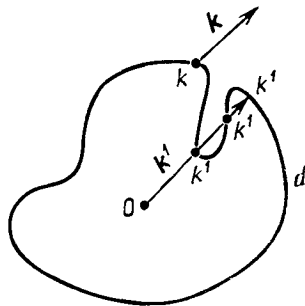


Рис. 9.3

представление о плоском векторном поле есть обобщение понятия аналитической функции, а формула (9.25) обобщает известную формулу теории функций комплексного переменного

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \oint_d \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (9.28)$$

справедливую, если внутри и на  $d$  функция  $f(z)$  не имеет полюсов [18]. ■

Изложенные здесь обстоятельства с несомненностью свидетельствуют о пользе вращения векторного поля как средства доказательства разрешимости систем на плоскости. Чтобы использовать заложенные здесь возможности, требуется далеко идущее обобщение понятия вращения векторного поля на случай операторных уравнений и полей в бесконечномерных пространствах. Исходным и определяющим пунктом здесь был перенос понятия вращения векторного поля на поля в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Такой перенос был осуществлен Брауэром и Хопфом [1, 36, 38] на

базе некоторой топологической характеристики — степени отображения [1, 11, 12]. Канву их рассуждений мы здесь изложим. На первом этапе покажем на примере плоского векторного поля, как можно по-другому определить вращение поля на кривой  $d$ . Для этого заметим, что всякое непрерывное векторное поле на замкнутом контуре  $d$  порождает некоторое отображение  $\mathcal{O}$  этого контура в себя или в свою часть. Отображение  $\mathcal{O}$  можно сконструировать следующим образом. Выберем внутри  $d$  произвольную точку  $o$  (рис. 9.3) и проведем из  $o$  вектор  $k^1$ , параллельный вектору  $k$  поля  $\Pi$  в точке  $k$  (рис. 9.3). Вектор  $k^1$  пересечет контур  $d$  в точке  $k^1$  (рис. 9.3). Точка  $k^1$  и ставится в соответствие точке  $k$ . Таким образом,  $\mathcal{O}$  сконструировано. Отметим, что вектор  $k^1$  может пересечь  $d$  в нескольких точках  $k^1$  и все эти точки ставятся в соответствие точке  $k$ . Отображение  $\mathcal{O}$ , таким образом, может оказаться

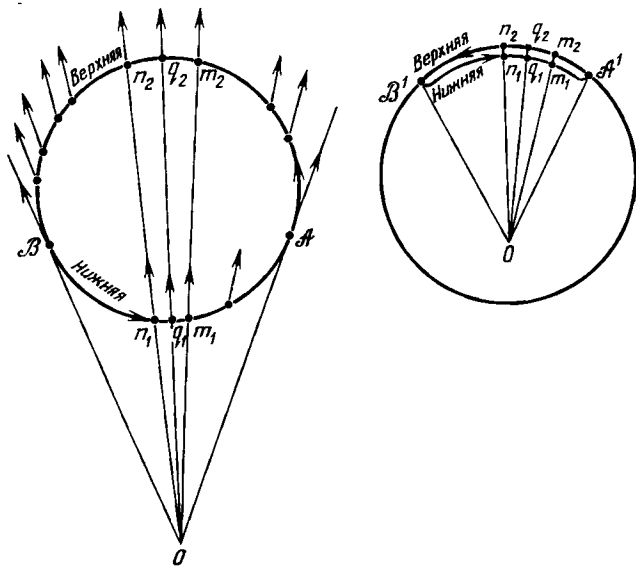


Рис. 9.4

неоднозначным. Наоборот, векторы  $k$  могут оказаться параллельными в нескольких точках  $k$ , и тогда несколько точек  $k$  перейдут в одну или несколько точек  $k^1$ . Таким образом, отображение  $\mathcal{O}$  может оказаться неоднозначным в обе стороны.

Чтобы составить представление о возможных здесь ситуациях, рассмотрим для примера векторное поле, изображенное на рис. 9.4. Оно образовано единичными векторами, идущими из каждой точки некоторой окружности  $d$  по лучам, исходящим из некоторой внешней точки  $o$ . Легко подсчитать вращение рассматриваемого векторного поля на  $d$  и убедиться, что оно равно нулю. Действительно,

при движении по верхней части  $d$  от  $\mathcal{A}$  к  $\mathcal{B}$  так, чтобы круг  $d$  оставался по левую руку, вектор поля  $\Pi$  вращается против часовой стрелки, а при дальнейшем движении по нижней части  $d$  он вращается по часовой стрелке и при подходе к  $\mathcal{A}$  вновь возвращается к исходному положению, не совершив ни одного полного оборота. Отображение  $\mathcal{O}$ , как легко видеть, превращает в данном случае окружность  $d$  в двухслойную дугу  $\mathcal{A}^1\mathcal{B}^1$ . Действительно, каждой внутренней точке  $q^1$  этой дуги соответствуют две точки  $q_1, q_2$  окружности  $d$ . Однако можно отметить одно качественное отличие точек  $q_1, q_2$  по отношению к отображению  $\mathcal{O}$ . При движении от  $\mathcal{A}^1$  к  $\mathcal{B}^1$  мы проходим выбранные точки в таком порядке:  $m^1 \rightarrow q^1 \rightarrow n^1$ . В таком же порядке они проходятся на верхней дуге  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  окружности  $d$ :  $m_2 \rightarrow q_2 \rightarrow n_2$ . При движении же от  $\mathcal{B}$  к  $\mathcal{A}$  порядок прохождения меняется:  $n_1 \rightarrow q_1 \rightarrow m_1$ . Это качественное отличие позволяет приписать разные характеристики точкам  $q_1, q_2$ , которые соответствуют одной и той же точке на  $\mathcal{A}^1\mathcal{B}^1$ . Если в некоторой точке  $q$  обход при отображении сохраняется, то будем считать, что  $q$  имеет характеристику  $+1$ , в противоположном случае — характеристику  $-1$ . В точках вырождения  $\mathcal{A}^1$  и  $\mathcal{B}^1$  характеристику будем считать равной нулю. При таком отнесении характеристик получается замечательная картина: возьмем любую точку  $q^1$  на образе  $d^1$  окружности  $d$  при нашем отображении  $\mathcal{O}$ . Если  $q^1$  лежит вне  $\mathcal{A}^1\mathcal{B}^1$ , то этой точке не соответствует ни одна точка  $q$ , и мы приписываем ей индекс  $\text{ind}$  ноль. Если  $q$  принадлежит отрезку  $\mathcal{A}^1\mathcal{B}^1$ , то припишем ей  $\text{ind}$ , равный сумме характеристик всех точек, соответствующих  $q^1$ . Очевидно, снова получаем ноль. Таким образом, в рассматриваемом элементарном примере  $\text{ind}$  любой точки  $q^1$  не зависит от ее положения на  $d$  и равен вращению  $\gamma$  поля  $\Pi$  на  $d$ . Легко также видеть, что наше построение не зависит от выбора точки  $o$ . Такая картина не является случайной, а есть общий факт.

**Теорема 9.8 [12].** Пусть на плоской кривой  $d$  класса  $C_d^1$  задано непрерывное векторное поле  $\Pi$ , имеющее вращение  $\gamma$ . Пусть, далее, это векторное поле порождает отображение  $\mathcal{O}: d \rightarrow d^1$ . Тогда сумма характеристик всех точек  $d$ , соответствующих какой-либо точке  $d^1$ , есть инвариант, не зависящий от положения точки на  $d$ , и этот инвариант в точности равен  $\gamma$ .

Этот инвариант имеет существенное значение во многих топологических рассуждениях, может быть введен для произвольных достаточно гладких отображений и носит наименование топологической степени отображения. Именно его введение дало возможность Брауэру и Хопфу обобщить понятие вращения векторного поля для размерностей пространства, больших чем 2.

Рассмотрим теперь трехмерное векторное поле  $\Pi$  на замкнутой поверхности  $d$  в трехмерном пространстве (рис. 9.5). И здесь поле  $\Pi$  порождает некоторое отображение  $d$  в себя или в свою часть. Поэтому будем интересоваться отображениями  $d$  и рассмотрим не-

которые примеры, разъясняющие ситуацию в данном случае. Для наглядности отображение  $d$  будем представлять как некоторую физическую деформацию этой поверхности и деформированную поверхность обозначим  $d^1$ . В общем случае эта деформация может

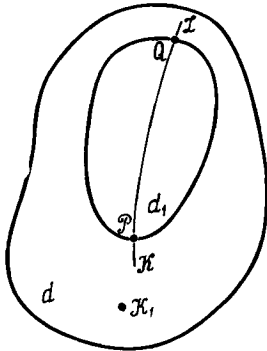


Рис. 9.5

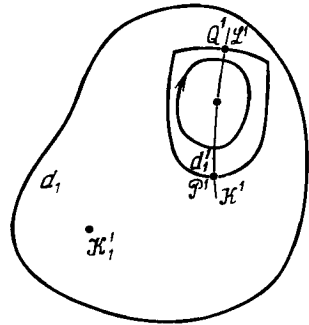


Рис. 9.6

происходить со складками (рис. 9.6). Пусть складке  $d_1^1$  соответствует на поверхности  $d$  ее часть  $d_1$ . Будем рассматривать простейший случай, когда  $d_1^1$  содержит три листа: верхний  $d_{1в}^1$ , средний  $d_{1с}^1$  и нижний  $d_{1н}^1$ . Таким образом, каждой точке  $k_1$  поверхности  $d_1$  ставится в соответствие одна точка  $k_1^1$ , если  $k_1$  лежит вне  $d_1$ ; две точки  $k_2^1$ , если  $k_2$  лежит на границе  $d_1$ , и три точки  $k_3^1$ , если  $k_3$  лежит внутри  $d_1$ . Для иллюстрации создавшейся здесь ситуации проведем сечение  $\mathcal{H}\mathcal{L}$  поверхности  $d$ , тогда этому сечению будет соответствовать кривая  $\mathcal{K}^1\mathcal{L}^1$  (рис. 9.7). При этом  $\mathcal{K}^1\mathcal{L}^1$  пересечет складку на многослойном отрезке  $\mathcal{P}^1\mathcal{Q}^1$ . Покажем, как каждой точке  $d$  отнести некоторую геометрическую характеристику, которую по-прежнему назовем индексом (ind). Для этого отнесем каждой точке  $d^1$  ее характеристику (хар.). Если  $k_1^1$  лежит вне  $d_1^1$  и, значит, ей соответствует одна точка  $k^1$  поверхности  $d_1$ , то мы припишем ей в качестве характеристики  $+1$ . Такую же характеристику припишем точке  $k_{1н}^1$ , лежащей на нижнем листе. Совпадающим же точкам на  $k_{2в}^1$  и  $k_{2с}^1$  припишем характеристику  $0$ . Рассмотрим точки  $k_{3н}^1, k_{3с}^1, k_{3в}^1$ , лежащие соответственно на нижнем, среднем и верхнем листах. Для определения их характеристик рассмотрим на  $d_1$  круг малого радиуса с центром в точке  $k_3$  (рис. 9.8). Выберем на нем положительный обход, так чтобы внутренность этого круга при обходе оказалась слева (см. рис. 9.4). Тогда этот круг при деформации перейдет в некоторую замкнутую кривую на нижнем листе, не меняя направления обхода. Переход на верхний лист также произойдет без перемены направления об-

хода. Лишь при переходе на средний лист ориентация, как легко видеть, изменится на обратную. Поэтому, естественно, точкам  $k_{3н}^1$ ,  $k_{3в}^1$  отнести характеристику  $+1$ , а  $k_{3с}^1$  — характеристику  $-1$ . Индексом же исходной точки  $k_3$  естественно назвать сумму характеристик  $k_{3н}^1, k_{3с}^1, k_{3в}^1$ . При этом мы снова получаем замечательный

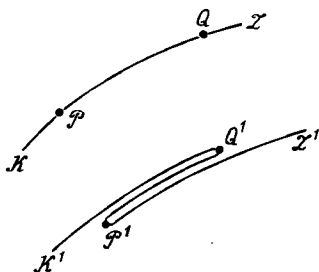


Рис. 9.7

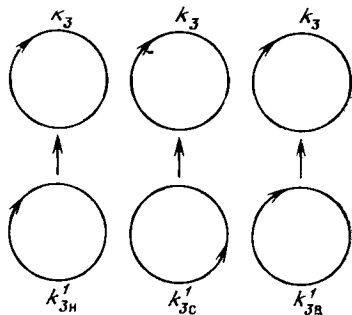


Рис. 9.8

факт: индекс любой точки  $k$  поверхности  $d$  при отображении оказывается одним и тем же и не зависит от ее положения на  $d$ . Этот факт оказывается общим: при любой достаточно гладкой деформации достаточно гладкой поверхности индекс каждой точки поверхности не зависит от ее положения на ней. Если деформация  $d$  будет конструироваться на основе некоторого векторного поля  $\Pi$  на  $d$ , то этот индекс  $\gamma$  и будет вращением поля  $\Pi$ .

Перенос наших рассуждений на случай векторных полей в  $n$ -мерном пространстве может быть сделан непосредственно на основе аналогичных геометрических рассуждений. Однако мы предпочтем здесь другой аналитический, более простой для формулировки и более конструктивный способ определения  $\text{ind } k$ . Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $R_n(x_1, \dots, x_n)$  задано достаточно гладкое векторное поле  $\Pi$ , составляющие которого  $\Pi_i(x)$ . Пусть имеется некоторая достаточно гладкая замкнутая гиперповерхность  $d$ . Отображение  $\mathcal{O}$  в данном случае конструируется следующим образом: берем внутри  $d$  точку  $o$  и проводим вектор  $k^1$ , параллельный вектору  $k$  поля  $\Pi$  в заданной точке  $k$  поверхности  $d$ . Этот вектор пересекает  $d$  в одной или нескольких точках, которые ставим в соответствие  $k$ . Пусть одна из этих точек есть  $k^1$  и ее координаты суть  $x_i^1$ . Введем для данной точки якобиан  $\mathcal{J}$  отображения

$$\mathcal{J} = \left\| \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j} \right\|.$$

Теперь можно ввести характеристику каждой точки  $k^1$  деформированной поверхности  $d^1$ : если  $k^1$  есть единственный образ точки  $k$ , то будем считать ее характеристику хар.  $k^1$  равной  $+1$ . Если  $k^1$  —

не единственный образ  $k$  и в этой точке  $\mathcal{J} \neq 0$ , то характеристика  $k^1 = \text{sign } \mathcal{J}$ . Наконец, если  $k^1$  — не единственный образ  $k$  и  $\mathcal{J} = 0$ , то примем характеристику  $k^1$  равной нулю. Определим теперь индекс  $k$  по-прежнему соотношением

$$\text{ind } k = \sum \text{хар. } k^1.$$

Оказывается, что при достаточной гладкости  $\Pi$  и  $d$   $\text{ind } k$  не зависит от положения точки  $k$  на  $d$ . Его и рационально назвать вращением векторного поля  $\Pi$  на  $d$ . Вышеприведенные рассуждения могут быть проведены для любого достаточно гладкого отображения, и тогда мы получаем инвариант-топологическую степень отображения. В случае  $\mathcal{O}$ -отображения мы получаем вращение  $\gamma$  векторного поля  $\Pi$  на  $d$ .

9.6. В конкретных случаях вращение  $\gamma$  можно определить путем непосредственного вычисления характеристик всех точек и их суммирования. Однако для конечномерных векторных полей Кронекером [39] была предложена формула для определения вращения. Пусть имеется векторное поле  $\Pi_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и требуется вычислить его вращение на поверхности  $d$ , уравнение которой дается соотношением

$$\mathcal{F}^0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (9.29)$$

Образуем величины

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \mathcal{F}^0 & \mathcal{F}_{x_1}^0 & \dots & \mathcal{F}_{x_n}^0 \\ \Pi_1 & \Pi_{1x_1} & \dots & \Pi_{1x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_n & \Pi_{nx_1} & \dots & \Pi_{nx_n} \end{vmatrix}, \quad (9.30)$$

$$R = \|\Pi\|, \quad Q^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial x_i} \right|^2. \quad (9.31)$$

Тогда

$$\gamma = - \mathcal{X}^n \int_V \frac{\mathcal{D}}{R^n Q} dv. \quad (9.32)$$

В (9.32) интеграл берется по  $n-1$ -мерной сфере,  $\mathcal{X}^n$  — объем этой сферы. Более детально о формуле Кронекера и методах вычисления вращения см. в [33]. ■

Теорема 9.9. Пусть в области  $\Sigma_n$   $n$ -мерного пространства задано  $n$ -мерное векторное поле  $\Pi$ , вращение которого  $\gamma$  отлично от нуля на некоторой гиперповерхности  $d$ , диффеоморфной сфере в  $R_n$ . В этом случае внутри  $d$  имеется по крайней мере одна особая точка  $\Pi$ , т. е. точка, где

$$\Pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.33)$$



Если приложить эту теорему к полям вида

$$\Pi_i = x_i - f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.34)$$

то часто, используя (9.32), можно получить теорему существования корней для систем уравнений вида

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.35)$$

Несмотря на то, что при достаточно больших  $n$  вычисления по формулам (9.32) сильно затруднены, они все же достаточно эффективны, так как  $\gamma$  всегда — целое число или ноль. ■

9.7. Перенос понятия вращения векторного поля на бесконечномерные пространства был произведен Лере и Шаудером [14], которые исходили из основополагающих работ Биркгофа и Келлога [35]. Дальнейшие рассмотрения степени отображения получили существенное развитие у Роте [40] и в особенности в работах М. А. Красносельского [11], у которого мы находим многочисленные приложения.

Основные идеи мы разъясним на примере вычисления вращения векторного поля, заданного на сферах сепарабельного гильбертова пространства  $H$ .

Пусть в каждой точке сферы некоторого гильбертова пространства  $H$  задан элемент вида

$$w - Gw \neq 0, \quad (9.36)$$

где  $G$  — вполне непрерывный оператор, действующий в  $H$  и в общем случае нелинейный. Полагая пространство сепарабельным, введем в нем ортонормированный базис  $\varphi_n$  и аппроксимируем поле (9.36) с помощью  $\varphi_n$ . Для этого положим

$$w \approx x^i \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad (9.37)$$

$$G_{\mathcal{N}}(w) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} (G(x^i \varphi_i) \cdot \varphi_k)_H \varphi_k, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}.$$

В (9.37) и ниже по повторяющимся сверху и снизу одинаковым индексам происходит суммирование. И тогда, очевидно, поле (9.36) аппроксимируется конечномерным полем

$$x^k - (G(x^i \varphi_i) \cdot \varphi_k)_H, \quad i, k = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (9.38)$$

для которого вращение  $\gamma_{\mathcal{N}}$  может быть вычислено по формуле (9.32).

**Теорема 9.10.** Для конечномерных векторных полей вида (9.38) вращение  $\gamma_{\mathcal{N}}$ , начиная с некоторого достаточно большого  $\mathcal{N}$ , принимает постоянное конечное значение. Это значение мы и называем вращением векторного поля  $w - Gw$ .

Предположение о сепарабельности пространства  $H$  использовалось нами для простоты изложения. Вращение векторного поля для

полей вида  $w - Gw$ , где  $G$  — вполне непрерывный оператор, может быть введено в произвольных банаховых пространствах [11, 13]. ■

**Теорема 9.11.** Пусть в некотором гильбертовом пространстве  $H$  задано векторное поле  $\Pi$  вида

$$\Pi(w) = w - Gw, \quad (9.39)$$

где  $G$  — вполне непрерывный оператор. И пусть на некоторой сфере

$$\|w\| = R \quad (9.40)$$

вращение этого векторного поля  $\gamma$  не равно нулю. В этом случае внутри этой сферы имеется по крайней мере одна особая точка этого поля, где

$$w - Gw = 0. \quad (9.41)$$

Сформулированная теорема открывает большие возможности для доказательства разрешимости широкого класса операторных уравнений. Естественно, наиболее трудным этапом в такого рода доказательствах является вычисление вращения векторного поля  $\gamma$ . ■

**9.8.** Как уже указывалось, если  $G$  — вполне непрерывный оператор, то вычисление вращения векторного поля  $w - Gw$  на сферах гильбертова пространства сводится к вычислению вращения конечномерных векторных полей достаточно большой размерности, что можно вполне выполнить на ЭВМ. Однако этот путь, хотя и вполне осуществимый и эффективный, все же относится к частным задачам. Общий метод определения вращения векторных полей базируется на теореме о гомотопности.

**О п р е д е л е н и е 9.1.** Пусть  $\Pi(w, t)$  — поле вида

$$\Pi(w, t) = w - G(w, t), \quad (9.42)$$

где  $G(w, t)$  — вполне непрерывный в  $H$  оператор при каждом  $0 \leq t \leq 1$ . Пусть, далее, на некоторой сфере  $\Sigma$  пространства  $H$ , определяемой соотношением

$$\|w\|_H = R, \quad (9.43)$$

оператор  $G(w, t)$  непрерывен по  $t$  равномерно относительно  $w$ , принадлежащего замкнутому шару радиуса  $R$ . Пусть, далее,  $G(w, 0) = G_0(w)$ ,  $G(w, 1) = G_1(w)$  и  $G(w, t) \neq 0$ , если  $w \in \Sigma$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . В этом случае будем говорить, что  $G_1(w)$  и  $G_2(w)$  связаны вполне непрерывной деформацией.

Два вполне непрерывных векторных поля  $G_0(w)$ ,  $G_1(w)$ , связанных вполне непрерывной деформацией, называются гомотопными.

**Теорема 9.12** [1, 11, 13]. Два гомотопных векторных поля  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  на  $\Sigma$  имеют одинаковое вращение.

Эта теорема и будет нами использоваться в дальнейшем. ■

9.9. Знание вращения векторного поля дает возможность в ряде случаев устанавливать неединственность решения соответствующих операторных уравнений и вообще давать оценку числа решений.

Теорема 9.13. Пусть  $w_0$  — изолированное решение [11] операторного уравнения

$$w_0 - Gw_0 = 0, \quad (9.44)$$

где  $G$  — вполне непрерывный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве  $H$ . В этом случае вращение векторного поля  $w - Gw$  на сферах  $\Sigma(r, w_0)$  с центром в  $w_0$  и достаточно малого радиуса  $r$  не зависит от  $r$ .

Определение 9.2. Вращение поля  $w - Gw$  на  $\Sigma(r, w_0)$  при достаточно малом  $r$  называется индексом  $w_0$  ( $\text{ind } w_0$ ).

Теорема 9.14. Пусть на некоторой сфере пространства Гильберта  $\Sigma(R, 0)$  вращение векторного поля есть  $\gamma$ , внутри  $\Sigma(R, 0)$  располагается конечное число изолированных особых точек  $w_1, w_2, \dots, w_p$ . Тогда

$$\gamma = \sum_{k=1}^p \text{ind } w_k. \quad (9.45)$$

## § 10. Некоторые общие математические факты (продолжение)

10.1. В данном параграфе приведем необходимые в дальнейшем сведения из теории пространств Соболева [2, 3, 9, 21, 26]. Рассмотрим ограниченную измеримую область  $\Omega_n$   $n$ -мерного пространства  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ . Пусть  $C_{\Omega_n}^0$  — множество финитных функций  $\psi$  в  $\Omega_n$ , т. е. множество бесконечно дифференцируемых в  $\Omega_n$  функций, каждая из которых обращается в ноль в некоторой своей пограничной полосе. Пусть, далее, для данной функции  $f(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  имеется функция  $\phi(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  такая, что

$$\int_{\Omega_n} f \frac{\partial^h \phi}{\partial \alpha_1^{h_1} \dots \partial \alpha_n^{h_n}} d\Omega_n = (-1)^h \int_{\Omega} \phi \psi d\Omega_n \quad (10.1)$$

для любой  $\psi \in C_{\Omega_n}^\infty$ . В этом случае будем говорить, что  $\phi$  есть обобщенная производная по Соболеву. Соотношение между производными по Соболеву и классическими вскрывает следующая важная теорема С. М. Никольского.

Теорема 10.1. Пусть несмешанная обобщенная производная  $\phi$  функции  $f$  суммируема в  $\Omega_n$  с некоторой степенью  $p > 1$ . В этом случае  $f$  имеет обычную производную соответствующего порядка, почти всюду совпадающую с  $\phi$  [21].

Смешанная обобщенная производная может существовать и тогда, когда классическая производная не существует. ■

Для образования пространства Соболева  $W_{p, \Omega_n}^{(l)}$  рассмотрим в  $\Omega_n$  множество функций  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in C_{\Omega_n}^l$ . В отличие от нормы

(9.1), зададим на  $C_{\Omega_n}^l$  норму

$$\|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}} = \left( \int_{\Omega} \sum_{k=0}^l \left| \frac{\partial^k f}{\partial \alpha_1^{k_1} \dots \partial \alpha_n^{k_n}} \right|^p d\Omega_n \right)^{1/p}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = k. \quad (10.2)$$

Замыкание  $C_{\Omega_n}^l$  в норме (10.2) назовем пространством Соболева  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$ .

Таким образом,  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  содержит все функции  $C_{\Omega_n}^l$  и все возможные пределы последовательностей из  $C_{\Omega_n}^l$  в норме (10.2).

Вместо (10.2) можно взять норму

$$\|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}} = \sum_{k=0}^l \left( \int_{\Omega_n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial \alpha_1^{k_1} \dots \partial \alpha_n^{k_n}} \right|^p d\Omega_n \right)^{1/p} = \sum_{k=0}^l \left\| \frac{\partial^k f}{\partial \alpha_1^{k_1} \dots \partial \alpha_n^{k_n}} \right\|_{L_{p\Omega_n}}, \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n. \quad (10.3)$$

Легко видеть, что нормы (10.2), (10.3) эквивалентны. Если имеется вектор  $\mathbf{f}$  с составляющими  $f_1, \dots, f_m$ , то

$$\|\mathbf{f}\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}} = \sum_{k=0}^m \|f_k\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}}.$$

**Теорема 10.2.** Всякая функция  $f \in W_{p\Omega_n}^{(l)}$  имеет в  $\Omega_n$  все обобщенные производные до порядка  $l$  включительно, суммируемые со степенью  $p$ . ■

Функции из  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  обладают рядом специфических свойств, которые даются теоремами вложения [26]. В первоначальном виде они были открыты С. Л. Соболевым и В. И. Кондрашевым. Впоследствии они получили развитие в целом ряде исследований, более подробно см. [2, 3, 7, 8, 16, 17, 31, 32, 34, 37]. В теоремах вложения каждая функция из  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  рассматривается в других классах и пространствах и устанавливаются общие свойства таких классов и пространств, в которые «вкладываются»  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$ . Поскольку известно, что шар пространства  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  слабо компактен [26], то, как это следует из теорем 9.5, 9.6, можно в равной мере говорить и о полной непрерывности оператора вложения, и об его усиленной непрерывности. В наших приложениях нам будет более удобно использовать свойство усиленной непрерывности оператора вложения, и оно будет ниже формулироваться при изложении теорем вложе-

ния. Для формулировки этих теорем введем число

$$\alpha = l - \frac{n}{p} = k + \lambda, \quad (10.4)$$

где  $k$  — целая часть  $\alpha$ ,  $1 > \lambda \geq 0$  — его дробная часть.

Теорема 10.3. 1) Пусть  $n < lp$ . В этом случае, если  $f \in W_{p\Omega_n}^{(l)}$ , то  $f \in H_{\Omega_n}^{k_1, \lambda_1}$ , если только

$$k_1 + \lambda_1 \leq \alpha. \quad (10.5)$$

При этом оператор вложения  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  в  $H_{\Omega_n}^{k_1, \lambda_1}$  ограничен, т. е. для любой функции имеет место неравенство

$$\|f\|_{H_{\Omega_n}^{k_1, \lambda_1}} \leq m \|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}} \quad (10.6)$$

с одной и той же постоянной для всех  $f$  из  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$ . Если в (10.5) имеет место строгое неравенство, то оператор вложения является усиленно непрерывным. Иными словами, из соотношения  $f_n \rightarrow f_0$  в  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  следует  $f_n \Rightarrow f_0$  в  $H_{\Omega_n}^{k_1, \lambda_1}$ .

2) Пусть  $n < lp$  и

$$\alpha = l - \frac{n}{p} \quad (10.7)$$

есть целое число. В этом случае  $f \in H_{\Omega_n}^{\alpha-1, \lambda^1}$ , где  $\lambda^1 < 1$  — число, сколь угодно близкое к единице. При этом вложение всегда усиленно непрерывно:

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{p\Omega_n}^{(l)} \text{ следует } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } H_{\Omega_n}^{\alpha-1, \lambda^1} \quad (10.8)$$

и, тем более, справедливо неравенство

$$\|f\|_{H_{\Omega_n}^{\alpha-1, \lambda^1}} \leq m \|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}}. \quad (10.9)$$

3) Пусть  $n = lp$ . В этом случае, если  $f \in W_{p\Omega_n}^{(l)}$ , то  $f \in L_{q\Omega_n}$  при любом  $q \geq 1$  и, кроме того, оператор вложения усиленно непрерывен. Иными словами, из  $f_n \rightarrow f_0$  в  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  следует  $f_n \Rightarrow f_0$  в  $L_{q\Omega_n}$ . Разумеется, справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{q\Omega_n}} \leq m \|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}}. \quad (10.10)$$

Пусть, далее, в  $\Omega_n$  имеется некоторое гладкое множество  $\Omega_r$  размерности  $r < n$ . В этом случае  $f \in L_{q\Omega_r}$  и оператор вложения усиленно непрерывен:

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{p\Omega_n}^{(l)} \text{ следует } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } L_{p\Omega_r} \quad (10.11)$$

и, кроме того,

$$\|f\|_{L_{q\Omega_r}} \leq m \|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}}. \quad (10.12)$$

4) Пусть  $n > lp$ . Для характеристики свойств элементов из  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  образуем в этом случае число  $q^*$  посредством соотношения

$$q^* = \frac{pr}{n - lp}. \quad (10.13)$$

В этом случае, если  $f \in W_{p\Omega_n}^{(l)}$ , то  $f \in L_{q\Omega_n}$  при всех  $1 \leq q \leq q^*$ , причем

$$\|f\|_{L_{q\Omega_n}} \leq m \|f\|_{W_{p\Omega_n}^{(l)}}. \quad (10.14)$$

Для всех  $1 \leq q < q^*$  оператор вложения  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  в  $L_{q\Omega_r}$  усиленно непрерывен:

из  $f_n \rightarrow f_0$  в  $W_{p\Omega_n}^{(l)}$  следует  $f_n \Rightarrow f_0$  в  $L_{q\Omega_r}$ .

Теорема 10.3 справедлива, если  $\Omega_n$  удовлетворяет некоторым условиям. Первые достаточные условия были сформулированы С. Л. Соболевым в терминах звездности. Область  $\Omega_n$  называется звездной относительно точки  $o$ , если любой луч из  $o$  пересекает

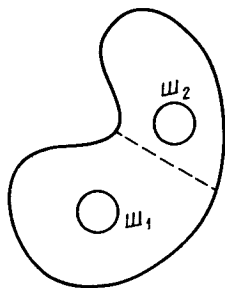


Рис. 10.1

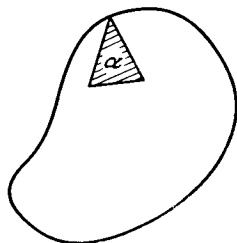


Рис. 10.2

границу  $\Gamma$  области  $\Omega_n$  только один раз. Область  $\Omega_n$  будет звездной относительно некоторого шара  $\mathbb{H} \in \Omega_n$ , если она звезда относительно любой точки  $\mathbb{H}$ . Условие Соболева [26] возможности применения теорем вложения заключается в том, что  $\Omega_n$  должна быть объединением конечного числа областей  $\Omega_{n_i}$ , каждая из которых звезда относительно своего шара  $\mathbb{H}_i$  (рис. 10.1). Впоследствии было введено условие конуса: существует  $n$ -мерный конус  $\mathcal{K}$  раствора  $\alpha$  такой, что его вершиной  $k$  можно коснуться любой точки  $\Omega_n$  так, чтобы некоторая фиксированная часть  $\mathcal{K}$ , примыкающая к  $k$ , принадлежала  $\Omega_n$  (рис. 10.2). В случае плоской области  $\Omega_n$  усло-

вие конуса будет, безусловно, выполнено, если  $g$  есть КГК класса  $C_2^1$ , не имеющий внутренних нулевых углов. Ниже области  $\Omega_n$ , для которых имеет место теорема вложения 10.3, будем называть соболевскими класса  $(p, l, n)$ . Таким образом, условие звездности, условие конуса и принадлежность КГК  $\Gamma$  классу  $C_2^1$  без внутренних нулевых углов суть достаточные условия для того, чтобы  $\Omega_n$  была соболевской областью. Более тонкие условия (иногда и необходимые), обеспечивающие принадлежность  $\Omega_n$  к классу соболевских, даны в [16, 17]. ■

10.2. Наиболее часто теоремы вложения будут нами использоваться в следующих случаях.

А. Пространство  $W_{2\Omega}^{(1)}$  с нормой

$$\|f\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}^2 = \int_{\Omega} (f^2 + f_{\alpha^1}^2 + f_{\alpha^2}^2) d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (10.15)$$

Иногда будет употребляться эквивалентная норма

$$\|f\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}^2 = \int_{\Omega} (f^2 + f_{\alpha^1}^2 + f_{\alpha^2}^2) d\Omega. \quad (10.16)$$

В данном случае  $n = 2$ ,  $p = 2$ ,  $l = 1$  и  $n = lp$ , и мы имеем вариант 3 теоремы вложения 10.3, из которого вытекают следующие факты.

Теорема 10.4. 1) Если  $f \in W_{2\Omega}^{(1)}$ , то  $f \in L_{q\Omega}$  при  $q \geq 1$  и оператор вложения усиленно непрерывен. Таким образом, в данном случае, если

$$f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(1)}, \text{ то } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в любом } L_{q\Omega}, \quad q \geq 1, \quad (10.17)$$

и, кроме того,

$$\|f\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|f\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}. \quad (10.18)$$

2) Пусть КГК  $d \in C_d^1$  (может частями совпадать с  $g$ ). Тогда  $f \in L_{qd}$  при любом  $q \geq 1$ . При этом оператор вложения также усиленно непрерывен и, значит,

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(1)} \text{ вытекает } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в любом } L_{qd}, \quad q \geq 1,$$

и, кроме того,

$$\|f\|_{L_{qd}} \leq m \|f\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}. \quad \blacksquare \quad (10.19)$$

Б. Пространства  $W_{2\Omega}^{(2)}$  с нормой

$$\|f\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}^2 = \int_{\Omega} \left( f^2 + f_{\alpha^1}^2 + f_{\alpha^2}^2 + \sum_{i,j=1}^2 f_{\alpha^i \alpha^j}^2 \right) d\alpha^1 d\alpha^2 \quad (10.20)$$

или эквивалентной нормой

$$\|f\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} = \int_{\Omega} \left( f^2 + f_{\alpha 1}^2 + f_{\alpha 2}^2 + \sum_{i,j=1}^2 f_{\alpha i \alpha j}^2 \right) d\Omega. \quad (10.21)$$

В этом случае  $n = 2$ ,  $l = 2$ ,  $p = 2$  и  $n < lp$  и

$$\alpha = 2 - \frac{2}{2} = 1, \quad (10.22)$$

и мы имеем случай 2 теоремы вложения, из которого следует

**Теорема 10.5.** 1) Если  $f \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , то  $f \in H_{\Omega}^{0,\lambda'}$ , т. е. удовлетворяет условию Гельдера с показателем, сколь угодно близким к 1, при этом оператор вложения усиленно непрерывен и, значит,

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(1)} \text{ следует } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } H_{\Omega}^{0,\lambda'} \quad (10.23)$$

и, кроме того,

$$\|f\|_{H_{\Omega}^{0,\lambda'}} \leq m \|f\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}. \quad (10.24)$$

2) Если  $f \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , то  $f_{\alpha i} \in L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$ . При этом оператор вложения является усиленно непрерывным и

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(2)} \text{ следует } f_{n\alpha i} \Rightarrow f_{0\alpha i} \quad (10.25)$$

в  $L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$

и, кроме того,

$$\|f_{\alpha i}\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|f\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}. \quad (10.26)$$

3) Пусть КГК  $d \in C_d^1$  (может частями совпадать с  $\varrho$ ). Тогда, если  $f \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , то  $f_{\alpha i} \in L_{qd}$  при любом  $q \geq 1$ . Оператор вложения усиленно непрерывен, из

$$f_n \rightarrow f_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(2)} \text{ следует } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } L_{qd} \text{ при любом } q \geq 1$$

и, кроме того,

$$\|f_{\alpha i}\|_{L_{qd}} \leq m(q) \|f\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}, \quad i = 1, 2. \quad \blacksquare \quad (10.27)$$

**10.3.** В дальнейшем нам будет важно знать условия, при которых заданная на  $\Gamma$  функция  $u(s)$  может быть продолжена внутрь  $\Omega$  как функция из  $W_{2\Omega}^{(1)}$ . Для их формулировки введем пространство  $W_{2\Gamma}^{(1/2)}$ , определяемое как замыкание множества  $u \in C_{\Gamma}^1$  в норме

$$\|u\|_{W_{2\Gamma}^{(1/2)}} = \|u\|_{L_{2\Gamma}} + \left( \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(\mathcal{P}) - u(\mathcal{Q})|^2}{r_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}^2} d\mathcal{P} d\mathcal{Q} \right)^{1/2}. \quad (10.28)$$

Пространства  $W_{2\Gamma}^{(l)}$  при нецелых  $l$  были введены в работах Л. Н. Слободянского [24], см. более подробно в [2—4, 31, 32].  $\blacksquare$



**Теорема 10.6.** Пусть  $\Gamma \in C_\Gamma^1$ . В этом случае, для того чтобы  $u \in W_{2\Omega}^{(1)}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $u \in W_{2\Gamma}^{(1/2)}$ . При этом имеют место неравенства

$$m \|u\|_{W_{2\Gamma}^{(1/2)}} \leq \|u\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq M \|u\|_{W_{2\Gamma}^{(1/2)}}. \quad (10.29)$$

Введем, далее, пространство  $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ , определяемое как замыкание множества  $u \in C_\Gamma^2$  в норме

$$\begin{aligned} \|u\|_{2\Gamma}^{(3/2)} = & \|u\|_{L_2\Gamma} + \sum_{i=1}^2 \|u_{\alpha_i}\|_{L_2\Gamma} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u_{\alpha_i}(\mathcal{P}) - u_{\alpha_i}(\mathcal{Q})|^2}{r_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}^2} d\mathcal{P} d\mathcal{Q} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

**Теорема 10.7.** Пусть  $\Gamma \in C_\Gamma^2$ . В этом случае, для того чтобы  $u \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $u \in W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ . При этом имеют место неравенства

$$m \|u\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}} \leq \|u\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \leq M \|u\|_{W_{2\Gamma}^{(3/2)}}. \quad (10.31)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \text{из } u_n \rightarrow u_0 \text{ в } W_{2\Gamma}^{(1/2)} \text{ следует } u_n \Rightarrow u_0 \text{ в любом } L_{q\Gamma}, \quad q \geq 1, \\ \text{из } u_n \rightarrow u_0 \text{ в } W_{2\Gamma}^{(3/2)} \text{ следует } u_{n\alpha_i} \Rightarrow u_{0\alpha_i} \text{ в любом } L_{q\Gamma}, \quad q \geq 1 \end{aligned} \quad (10.32)$$

и, кроме того,

$$u_n \Rightarrow u_0 \text{ в } H_{\Gamma}^{0,\lambda}.$$

Достаточность в теоремах 10.6, 10.7 следует понимать в том смысле, что если  $u \in W_{2\Gamma}^{(1/2)}$  (соответственно  $W_{2\Gamma}^{(3/2)}$ ), то существует ее продолжение внутрь  $\Omega$ , такое, что  $u \in W_{2\Omega}^{(1)}$  ( $W_{2\Omega}^{(2)}$ ). ■

**10.4. Теорема 10.8.** Пусть двумерная плоская область  $\Omega$  является соболевской класса  $(2, l, 2)$ . Пусть задан квадратичный функционал  $W_{2\Omega}^{(l)}$  следующей структуры:

$$\mathcal{R}(w) = \int_{\Omega} \left[ \mathcal{P}_2 \left( \frac{\partial^l w}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right) + \mathcal{P}_1 \left( \frac{\partial^l w}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right) \right] d\Omega + \mathcal{P}_0(w), \quad (10.33)$$

где  $w$  — двумерный вектор,  $\mathcal{P}_2$  — квадратичная форма своих переменных с непрерывными в  $\Omega$  коэффициентами. Пусть, далее,  $\mathcal{P}_1$  есть линейная форма производных порядка  $l$  с коэффициентами, являющимися линейными формами производных порядка ниже, чем  $l$ , и  $\mathcal{P}_0$ , таким образом, есть квадратичный функционал в  $W_{2\Omega}^{(l)}$ . Наконец, предположим, что  $\mathcal{P}_0(w)$  — слабо непрерывный в  $W_{2\Omega}^{(l)}$

Функционал. Пусть, далее, выполнены условия:

$$1) \mathcal{R}(\mathbf{w}) \geq 0 \text{ и из } \mathcal{R}(\mathbf{w}) = 0 \text{ вытекает } \mathbf{w} = 0 \text{ в } \Omega; \quad (10.34)$$

$$2) \text{ если } \mathbf{w}_n \rightarrow 0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(l)} \text{ и } \mathcal{R}(\mathbf{w}_n) \rightarrow 0, \text{ то } \left\| \frac{\partial^l \mathbf{w}}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right\|_{L_2\Omega} \rightarrow 0,$$

$$k_1 + k_2 = l, \quad k_1, k_2 \text{ — любые.} \quad (10.35)$$

В этом случае

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}) \geq m \|\mathbf{w}\|_{W_{2\Omega}^{(l)}}^2. \quad (10.36)$$

Для доказательства предположим, что (10.36) не имеет места, и тогда должна существовать последовательность  $\mathbf{w}_n$ , опровергающая (10.36), такая, что

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}_n) \rightarrow 0, \quad (10.37)$$

$$\|\mathbf{w}_n\|_{W_{2\Omega}^{(l)}} = 1. \quad (10.38)$$

Поскольку  $W_{2\Omega}^{(l)}$  может рассматриваться как пространство Гильберта, то можно считать, что  $\mathbf{w}_n$  слабо сходится в  $W_{2\Omega}^{(l)}$  и, таким образом,

$$\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}_0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(l)}; \quad \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_0 + \mathbf{v}_n; \quad \mathbf{v}_n \rightarrow 0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(l)}. \quad (10.39)$$

Далее, в силу структуры функционала  $\mathcal{R}\mathbf{w}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{w}_0 + \mathbf{v}) &= \mathcal{R}(\mathbf{w}_0) + \mathcal{R}(\mathbf{v}) + 2\mathcal{P}_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{v}) + \\ &+ \mathcal{P}_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{v}) + \mathcal{P}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}_0) + \mathcal{P}_0(\mathbf{w}_0 + \mathbf{v}) - \mathcal{P}_0(\mathbf{w}_0). \end{aligned} \quad (10.40)$$

Здесь функционалы  $\mathcal{P}_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{v})$ ,  $\mathcal{P}_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{v})$ ,  $\mathcal{P}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}_0)$  полностью определяются строением  $\mathcal{P}(w)$ . Для нас важно, что  $\mathcal{P}_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{v})$ ,  $\mathcal{P}_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{v})$ ,  $\mathcal{P}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}_0)$  являются линейными ограниченными функционалами в  $W_{2\Omega}^{(l)}$  по  $\mathbf{v}$  при фиксированном  $\mathbf{w}_0 \in W_{2\Omega}^{(l)}$ . В самом деле, легко видеть, что  $\mathcal{P}_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{v})$  содержит члены вида

$$\int_{\Omega} Q(\alpha^1, \alpha^2) \frac{\partial^l w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \frac{\partial^l v_j}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} d\Omega, \quad k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = l, \quad (10.41)$$

где  $w_{0i}$ ,  $v_j$  — составляющие векторов  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{v}$ ;  $i, j = 1, 2$ ;  $Q \in C_{\alpha}$ . Линейность этого функционала относительно  $\mathbf{v}$  очевидна. В силу неравенства Коши — Буняковского — Шварца имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} Q(\alpha^1, \alpha^2) \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \frac{\partial^2 v_j}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} d\Omega \right| &\leq m \left\| \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right\|_{L_2\Omega} \left\| \frac{\partial^2 v_j}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} \right\|_{L_2\Omega} \leq \\ &\leq m \|\mathbf{v}\|_{W_{2\Omega}^{(l)}}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Последний переход в (10.42) совершен на основе того, что  $w_0 \in W_{2\Omega}^{(l)}$ . Ограниченность  $\mathcal{P}_2(w_0, v)$  как функционала по  $v$  установлена. Функционал  $\mathcal{P}_1(v, w_0)$  есть линейная комбинация членов вида

$$\int_{\Omega} Q(\alpha^1, \alpha^2) \frac{\partial^l v_j}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \frac{\partial^n w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} d\Omega, \quad k_1 + k_2 = l, k_3 + k_4 = n < l. \quad (10.43)$$

В силу теоремы вложения 10.3  $\frac{\partial^n w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} \in L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$ ;

$n < l$ . Если же  $n < l - 2$ , то  $\frac{\partial^n w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} \in C_{\Omega}$ . Во всяком случае, имеем

$$\left| \int_{\Omega} Q(\alpha^1, \alpha^2) \frac{\partial^l v_j}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \frac{\partial^n w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} \right| \leq m \left\| \frac{\partial^l v_j}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right\|_{L_{2\Omega}} \left\| \frac{\partial^n w_{0i}}{\partial \alpha_1^{k_3} \partial \alpha_2^{k_4}} \right\|_{L_{2\Omega}} \leq \leq m_2 \|v\|_{W_{2\Omega}^{(l)}}, \quad (10.44)$$

и ограниченность  $\mathcal{P}_1(v_1, w_0)$  как функционал по  $v$  установлена. Линейность очевидна. Совершенно аналогичными рассуждениями устанавливается, что и  $\mathcal{P}_1(w_0, v)$  — линейный и ограниченный функционал в  $W_{2\Omega}^{(l)}$  по  $v$ . Поскольку  $\mathcal{P}_0(w)$  слабо непрерывен в  $W_{2\Omega}^{(l)}$ , то из (10.37), (10.39), (10.40) следует

$$\mathcal{R}(w_0) + \mathcal{R}(v_n) + \mathcal{P}_2(w_0, v_n) + \mathcal{P}_2(v_n, w_0) + + \mathcal{P}_1(w_0, v_n) + \mathcal{P}_1(v_n, w_0) \rightarrow 0, \quad (10.45)$$

и из (10.45) вытекает

$$\mathcal{R}(w_0) + \mathcal{R}(v_n) \rightarrow 0. \quad (10.46)$$

В силу условия (10.34) из (10.35) следует

$$\mathcal{R}(w_0) = 0, \quad (10.47) \quad w_0 \equiv 0 \text{ в } \Omega, \quad (10.48) \quad \mathcal{R}(v_n) \rightarrow 0. \quad (10.49)$$

Таким образом,

$$w_n = v_n, \quad w_n \rightarrow 0 \text{ в } W_{2\Omega}^{(l)}. \quad (10.50)$$

Но тогда, в силу теоремы вложения 10.3,

$$\|w_n\|_{W_{2\Omega}^{(l-1)}} \rightarrow 0. \quad (10.51)$$

Из (10.50) вытекает, в силу условия 2 теоремы 10.5,

$$\left\| \frac{\partial^l w_n}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2}} \right\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (10.52)$$

Из (10.51), (10.52) получаем

$$\|w_n\|_{W_2\Omega}^{(l)} \rightarrow 0, \quad (10.53)$$

что противоречит (10.38). Теорема 10.8 доказана. ■

Заметим, что если  $\mathcal{P}_2$  — положительно определенная квадратичная форма старших производных, то условие 2) (10.35) выполнено автоматически, однако в наших задачах это условие выполняется не всегда.

Неравенство (10.36) устанавливает так называемое свойство коэрцитивности формы  $\mathcal{R}(w)$ . Метод доказательства коэрцитивности, использованный здесь, дает основу для некоторых обобщений. В частности, не имеет значения размерность  $\Omega$ , некоторые функционалы могут быть нелинейными. Более подробно о других неравенствах коэрцитивности см. в [2, 3, 32].

### § 11. Специальные функциональные пространства $H_t, t = 5, 6, 7, 8$ . Свойства их элементов

11.1. Во всех последующих рассмотрениях будет предполагаться, что  $\Gamma$  — КГК класса  $C_\Gamma^2$ ;  $\Omega$  — соболевская область класса (2, 1, 2),  $S \in C_\Omega^2$ . Будем в дальнейшем различать существенно упругие продольные связи, для которых

$$k_p^{rr} \geq M > 0, \quad (11.1)$$

$$k_p^{mm} \geq M > 0, \quad (11.2)$$

$$k_p^{ij} w_i w_j \geq M > 0, \quad w_1^2 + w_2^2 = 1. \quad (11.3)$$

Напомним, что все  $k_p^{\beta\gamma}$  кусочно-непрерывны. Если связи не являются существенно упругими, то в (11.1) — (11.3) постоянная  $M$  равна нулю. Введем множество вектор-функций  $\omega(w_1, w_2) \in \overset{0}{C}_\Omega^1$ , удовлетворяющих всем продольным однородным геометрическим условиям (6.9), (6.10), (6.13).

На  $\overset{0}{C}_\Omega^1$  зададим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\omega_1 \cdot \omega_2)_{H_t} = & \int_{\Omega} D_p^{ijkl}(\alpha) \overset{\sim}{\gamma}_{ij}(\omega_1) \overset{\sim}{\gamma}_{kl}(\omega_2) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{rr} w_{r1} w_{r2} ds + \\ & + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m1} w_{m2} ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{i1} w_{j2} |_{i,j=1,2} ds, \quad t = 5, 6, 7, \end{aligned} \quad (11.4)$$

которому соответствует норма

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H_t}^2 = & \int_{\Omega} D_p^{ijkl}(\alpha^1, \alpha^2) \overset{\sim}{\gamma}_{ij}(\omega) \overset{\sim}{\gamma}_{kl}(\omega) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{rr} w_r^2 ds + \\ & + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds, \quad t = 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Напомним, что в соотношениях (11.4), (11.5) суммирование по  $m$  и  $\tau$  не производится,

$$\tilde{\gamma}_{11}^0 = w_{1\alpha^1} - G_{11}^h w_h, \quad \tilde{\gamma}_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - G_{12}^h w_h \quad (1 \neq 2).$$

Пространство  $H_5$  вводится, если  $\Gamma_5 > 0$ . При этом  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  могут и отсутствовать. При их существовании связи на них не обязательно существенно упругие, так что постоянная  $M$  в (11.1) — (11.3) может быть равна нулю. Введем множество вектор-функций  $\overset{0}{C}_{5\Omega}^1$  — непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и удовлетворяющих геометрическим однородным условиям (6.9), (6.10), (6.13) при обязательном условии  $\Gamma_5 > 0$ . Замыкание  $\overset{0}{C}_{5\Omega}^1$  в норме (11.5) назовем  $H_{5\Omega}$ . ■

Пространство  $H_{6\Omega}$  вводится, если  $\Gamma_6 > 0$ . При этом остальные части  $\Gamma_5, \Gamma_7, \Gamma_8$  могут и отсутствовать. При их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. Однако связь на  $\Gamma_6$  должна быть существенно упругой.

Пусть, далее,  $\overset{0}{C}_{6\Omega}^1$  — множество непрерывно дифференцируемых функций  $\omega(w_1, w_2)$  в  $\Omega$ , удовлетворяющих всем однородным геометрическим условиям (6.9), (6.10), (6.13), и при обязательном наличии  $\Gamma_6$ . Замыкание  $\overset{0}{C}_{6\Omega}^1$  в норме (11.5) назовем  $H_6$ . ■

Пространство  $H_7$  образуется при обязательном условии  $\Gamma_7 > 0$ .

При этом связь на  $\Gamma_7$  должна быть обязательно существенно упругой, т. е. должно выполняться (11.2). Остальные части  $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_8$  могут и отсутствовать, а при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. Если ввести множество  $\overset{0}{C}_{7\Omega}^1$  непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  вектор-функций  $\omega(w_1, w_2)$ , удовлетворяющих геометрическим условиям (6.9), (6.10), (6.13), замкнуть его в норме (11.8), то мы получим  $H_{7\Omega}$ . ■

Наконец, пространство  $H_8$  образуется при обязательном наличии  $\Gamma_8$  замыканием  $\overset{0}{C}_{8\Omega}^1$  в норме (11.5). При этом связь на  $\Gamma_8$  предполагается существенно упругой, т. е. должно выполняться (11.3). Остальные части контура  $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$  могут вообще отсутствовать, а при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие.

Формула для скалярного произведения (11.4) удовлетворяет всем требованиям к скалярному произведению. Подлежит доказательству лишь факт:

$$\text{из } \|\omega\|_{H_t} = 0 \text{ должно следовать } \omega \equiv 0. \quad (11.6)$$

Проверкой этого факта мы и займемся в первую очередь.

11.2. Введем еще два вспомогательных пространства

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)_{W_{2t\Omega}}^0 = \int_{\Omega} (\omega_{1\alpha^1} \cdot \omega_{2\alpha^1} + \omega_{1\alpha^2} \cdot \omega_{2\alpha^2} + \omega_1 \cdot \omega_2) d\Omega, \quad (11.7)$$

$$\|\omega\|_{W_{2t\Omega}}^0 = \int_{\Omega} (\omega_{\alpha^1}^2 + \omega_{\alpha^2}^2 + \omega^2) d\Omega, \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} (\omega_1 \cdot \omega_2)_{W_{2t\Omega}}^{\sim 0(1)} = & \int_{\Omega} (\omega_{1\alpha^1} \cdot \omega_{2\alpha^1} + \omega_{1\alpha^2} \cdot \omega_{2\alpha^2}) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau_1} w_{\tau_2} ds + \\ & + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m_1} w_{m_2} ds + \int_{\Gamma_5} k_p^{ij} w_{i_1} w_{j_2} ds, \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{W_{2t\Omega}}^{\sim 0(1)} = & \int_{\Omega} (\omega_{\alpha^1}^2 + \omega_{\alpha^2}^2) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \\ & + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds |_{i,j=1,2}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Пространства  $\overset{\sim}{W}_{2t\Omega}^{0(1)}$  и  $\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  образуются замыканием  $\overset{0}{C}_{t\Omega}^1$  при тех же условиях на коэффициенты упругости, что и пространства  $H_l$ . Разница лишь в нормах замыкания. Так же напомним, что в (11.9), (11.10) суммирование по индексам « $\tau$ » и « $m$ » не производится.

Лемма 11.1. Для любой функции  $\omega \in \overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  имеет место неравенство

$$\|\omega\|_{W_{2t\Omega}}^{\sim 0(1)} \geq m \|\omega\|_{W_{2t\Omega}}^0, \quad (11.11)$$

если  $\Omega$  есть соболевская область класса  $(2, 1, 2)$ .

Для доказательства заметим, что  $\|\omega\|_{W_{2t\Omega}}^{\sim 0(1)}$  имеет точно такую структуру, которую мы предусмотрели для  $\mathcal{R}(\omega)$  в теореме 10.8. В данном случае  $l = 1$

$$\mathcal{P}_2(\omega) = \int_{\Omega} (\omega_{\alpha^1}^2 + \omega_{\alpha^2}^2) d\Omega, \quad \mathcal{P}_1(\omega) \equiv 0, \quad (11.12)$$

$$\mathcal{P}_0(\omega) = \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds. \quad (11.13)$$

Слабая непрерывность  $\mathcal{P}_0(\omega)$  в  $\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  вытекает из теоремы вложения 10.4. Далее, для нашего случая легко проверяется выполнение условия 1 теоремы 10.8 (10.34) для всех  $\omega \in \overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$ . Пусть теперь  $\omega_n \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  и  $\mathcal{R}(\omega_n) \rightarrow 0$ .

В силу слабой непрерывности  $\mathcal{P}_0(\omega)$  из  $\mathcal{R}(\omega_n) \rightarrow 0$  вытекает

$$\mathcal{P}_2(\omega) \rightarrow 0, \quad \|\omega_{\alpha i}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (11.14)$$

Таким образом, выполнено и условие 2 теоремы 10.8 (10.35).

Поскольку все условия теоремы 10.8 выполнены, то лемму 11.1 можно считать доказанной.

**Теорема 11.1.** Пространства  $\tilde{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  и  $\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$  эквивалентны и содержат одни и те же элементы.

Из (11.11) следует, что  $\tilde{W}_{2t\Omega}^{(1)} \subset \overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$ . Далее, из (11.10) и теоремы вложения 10.4 (соотношения (10.19)) имеем

$$\|\omega\|_{\tilde{W}_{2t\Omega}^{(1)}} \leq M \|\omega\|_{\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}}. \quad (11.15)$$

Из (11.11) и (11.15) следует эквивалентность норм  $\tilde{W}_{2\Omega}^{(1)}$ ,  $\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(1)}$ , и поскольку эти пространства получены замыканием одного и того же множества  $\overset{0}{C}_{\Omega}^1$ , то они содержат одни и те же элементы. Теорема 11.1 доказана.

**Примечание 11.1.** В определении  $\|\omega\|_{\tilde{W}_{2t\Omega}^{(1)}}$  в правой части (11.10) можно отбросить некоторые контурные интегралы. Однако при этом надо следить, чтобы геометрические однородные граничные условия (6.9), (6.10), (6.13) плюс условие равенства нулю удержанных в (11.10) контурных интегралов приводили бы к соотношению (11.6). ■

Введем обозначение

$$D(\omega, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (w_{i\alpha j} + w_{j\alpha i})(v_{i\alpha j} + v_{j\alpha i}) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k^{\tau\tau} w_{\tau} v_{\tau} ds + \\ + \int_{\Gamma_7} k^{mm} w_m v_m ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i v_j ds. \quad (11.16)$$

**Лемма 11.2.** Имеет место неравенство

$$D(\omega, \omega) \geq m \|\omega\|_{\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}}^2, \quad (11.17)$$

если условие

$$D(\omega, \omega) = 0$$

совместно с геометрическими однородными граничными условиями (6.9), (6.10), (6.13) влечет соотношение

$$\omega \equiv 0 \text{ в } \Omega. \quad (11.18)$$

Для доказательства заметим, что  $\mathcal{D}(\omega, \omega)$  имеет структуру, предусмотренную теоремой 10.8 для  $\mathcal{R}(\mathbf{w})$ . Здесь  $l=1$ ,

$$\mathcal{P}_2(\omega) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (w_{i\alpha j} + w_{j\alpha i})(w_{i\alpha j} + w_{j\alpha i}) d\Omega, \quad \mathcal{P}_1(\omega) \equiv 0; \quad (11.19)$$

$\mathcal{P}_0(\omega)$  дается (11.13) и есть слабо непрерывный в  $\overset{0}{W}_{2i\Omega}^{(1)}$  функционал в силу теоремы 10.4. Выполнение условия 1 теоремы 10.8 гарантируется условием леммы 11.2. Условие 2 теоремы 10.8 также выполнено, поскольку если  $\omega_n \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2i\Omega}^{(1)}$  и, кроме того,  $\mathcal{R}(\omega_n) \rightarrow 0$ , то из неравенства

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (w_{i\alpha i} + w_{j\alpha i})^2 d\Omega \geq m \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 w_{i\alpha j}^2 d\Omega, \quad (11.20)$$

безусловно справедливого в наших условиях [19], вытекает

$$\|\omega_{\alpha i}\|_{L_2\Omega} \rightarrow 0. \quad (11.21)$$

Таким образом, все условия теоремы 10.8 выполнены, и неравенство (11.17) установлено. ■

Лемма 11.3. Пусть контур  $\Gamma \in \mathcal{C}_{\Gamma}$  содержит кусок  $\tilde{\Gamma}$ , на котором

$$\omega|_{\tilde{\Gamma}} = 0 \quad (11.22)$$

и, кроме того, в  $\Omega$  выполнены условия

$$\omega \in W_{2\Omega}^{(1)}, \quad w_{i\alpha i} = G_{i\alpha}^k w_k, \text{ по } i \text{ не суммируется.} \quad (11.23)$$

В этом случае в  $\Omega$  содержится некоторая окрестность  $\tilde{\Gamma}$ , где

$$\omega \equiv 0, \quad w_1 \equiv w_2 \equiv 0. \quad (11.24)$$

Для доказательства вначале предположим, что  $\tilde{\Gamma}$  не есть прямой линейный отрезок, параллельный какой-либо из осей  $\alpha^i$ , и  $\tilde{\Gamma}$  дается одним из уравнений

$$\alpha^1 = \alpha^1(\alpha^2), \quad \alpha^2 = \alpha^2(\alpha^1). \quad (11.25)$$

В силу нашего предположения по крайней мере в одной точке  $\alpha_0^i$ ,  $\Gamma$  имеет место одно из соотношений

$$\frac{d\alpha^2}{d\alpha^1} \neq 0, \quad \frac{d\alpha^1}{d\alpha^2} \neq 0. \quad (11.26)$$



Предположим для определенности, что справедливо первое из соотношений (11.26), причем  $d\alpha^2/d\alpha^1 > 0$  (рис. 11.1). Проведем из  $\alpha_0^i$  (точка  $B$ ) прямую, параллельную оси  $\alpha^1$ , внутрь контура. Продвинемся по ней до некоторой точки  $A$  и проведем прямую  $AE$ , параллельную оси  $\alpha^2$ . Таким образом, образуется треугольник  $ABE$ . Очевидно, если отрезок  $BA$  взять достаточно малых размеров, то весь треугольник  $ABE$  впишется в круг сколь угодно малого диаметра. Далее, если  $\omega \in W_{2\Omega}^{(1)}$  и  $w_i$  удовлетворяет (11.23), то, как это легко следует из теоремы 10.4 (п. 2),  $w_i \in L_{qa}$ . При этом из (11.23) вследствие (11.26) имеем соотношения

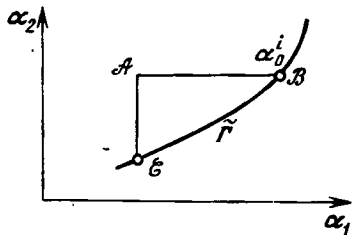


Рис. 11.1

$$w_1 = \int_B^A G_{11}^h w_h ds_1, \quad w_2 = \int_E^B G_{22}^h w_h ds_2, \quad (11.27)$$

которые перепишем в виде

$$w_1 = \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} G_{11}^h w_h ds_1, \quad w_2 = \int_{\alpha^2(\alpha^1)}^{\alpha^2} G_{22}^h w_h ds_2. \quad (11.28)$$

Из (11.28) в силу неравенства Коши — Буняковского — Шварца

$$w_1^2 \leq 2 \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} |G_{11}^h|^2 ds_1 \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} |w_h|^2 ds_1, \quad (11.29)$$

$$w_2^2 \leq 2 \int_{\alpha^2(\alpha^1)}^{\alpha^2} |G_{22}^h|^2 ds_2 \int_{\alpha^2(\alpha^1)}^{\alpha^2} |w_h|^2 ds_2.$$

Пусть, далее,

$$m = 2 \max \left\{ \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} |G_{11}^h|^2 ds_1, \int_{\alpha^2(\alpha^1)}^{\alpha^2} |G_{22}^h|^2 ds_2 \right\}. \quad (11.30)$$

В (11.30) мах берется по всем  $\alpha^1, \alpha^2 \in \bar{\Omega}$ ,  $k = 1, 2$ . Соотношения (11.27) — (11.30) имеют смысл для всех  $\omega \in W_{2\Omega}^{(1)}$ , ибо в силу теоремы вложения 10.4  $\omega \in L_{qa}$  при любом  $q \geq 1$  и на любой кривой  $d$ , в том числе на отрезках интегрирования в интегралах (11.27) — (11.30). Из (11.30) следует

$$w_1^2 \leq m \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} (w_1^2 + w_2^2) ds_1, \quad w_2^2 \leq m \int_{\alpha^2(\alpha^1)}^{\alpha^2} (w_1^2 + w_2^2) ds_2. \quad (11.31)$$

Проинтегрировав (11.31) по площади треугольника  $\mathcal{ABE}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{ABE}} w_1^2 d\alpha^1 d\alpha^2 &\leq m \int_{\mathcal{ABE}} \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} (w_1^2 + w_2^2) ds_1 d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ &= m \int_{\mathcal{E}} \int_{\alpha^1(\mathcal{M}'')}^{\alpha^1(\mathcal{A})} \int_{\alpha^1(\alpha^2)}^{\alpha^1} (w_1^2 + w_2^2) ds_1 d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ &= m \int_{\mathcal{E}} \int_{\alpha^1(\mathcal{M}'')}^{\alpha^1(\mathcal{A})} (\alpha^1(\mathcal{A}) - s_1) (w_1^2 + w_2^2) ds_1 d\alpha^2. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Из (11.32) следует

$$\int_{\mathcal{ABE}} w_1^2 d\alpha^1 d\alpha^2 \leq m\delta_1 \int_{\mathcal{ABE}} (w_1^2 + w_2^2) d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (11.33)$$

где  $\delta_1 = \max|\alpha'(\mathcal{P}) - \alpha'(\mathcal{Q})|$ , а  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  — произвольные точки  $\mathcal{ABE}$ . Совершенно аналогично получаем

$$\int_{\mathcal{ABE}} w_2^2 d\alpha^1 d\alpha^2 \leq m\delta_2 \int_{\mathcal{ABE}} (w_1^2 + w_2^2) d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (11.34)$$

где  $\delta_2 = \max|\alpha^2(\mathcal{P}) - \alpha^2(\mathcal{Q})|$ , а  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  — произвольные точки  $\mathcal{ABE}$ . Из (11.33), (11.34) получаем

$$\int_{\mathcal{ABE}} (w_1^2 + w_2^2) d\alpha^1 d\alpha^2 \leq m(\delta_1 + \delta_2) \int_{\mathcal{ABE}} (w_1^2 + w_2^2) d\alpha^1 d\alpha^2. \quad (11.35)$$

Треугольник  $\mathcal{ABE}$  можно выбрать столь малым, чтобы

$$m(\delta_1 + \delta_2) < 1, \quad (11.36)$$

и тогда из (11.36) получаем, что в треугольнике

$$w_1 \equiv w_2 \equiv 0, \quad (11.37)$$

и лемма 11.3 в данном случае доказана.

Если  $\tilde{\Gamma}$  представляет собою отрезок, параллельный оси  $\alpha^1$  (рис. 11.2), то можно перейти к повернутым на  $45^\circ$  осям  $\xi$ . Соответствующая норма при повороте осей инвариантна. В этих осях можно построить равнобедренный прямоугольный треугольник  $\mathcal{ABE}$ , гипотенуза которого лежит на  $\tilde{\Gamma}$  и в отношении которого можно повторить предыдущие рассуждения. В результате получаем, что в достаточно малом прямоугольном равнобедренном треугольнике будет выполнено (11.37), и, значит, для этого случая лемма 11.3 установлена. Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и в случае, если  $\tilde{\Gamma}$  идет вдоль координатной линии  $\alpha^2$  (рис. 11.3). В результате получаем, что (11.37) имеет место

и в равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ABC$ , ориентированном, как показано на рис. 11.3. Лемма 11.3 полностью доказана.

Важно отметить, что во всех рассуждениях, участвовавших в доказательстве леммы 11.3, размеры всех равнобедренных прямоугольных треугольников могут быть выбраны независимо от их положения в  $\Omega$ , с тем чтобы было выполнено (11.36). ■

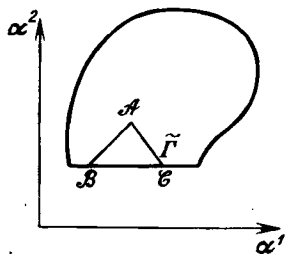


Рис. 11.2

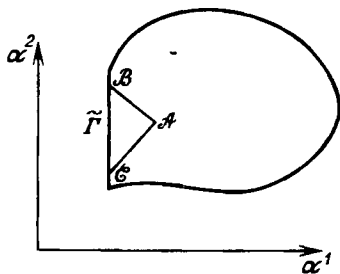


Рис. 11.3

Теорема 11.2. Пусть выполнены все условия леммы 11.3. В этом случае (11.24) будет иметь место во всей области  $\Omega$ .

Для доказательства заметим, что в силу леммы 11.3 соотношения (11.24) будут выполнены в некоторой окрестности  $\tilde{\Gamma}$ , которую

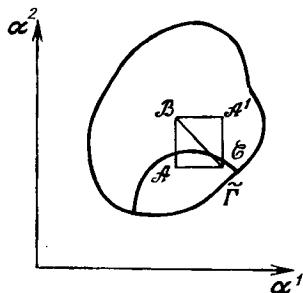


Рис. 11.4

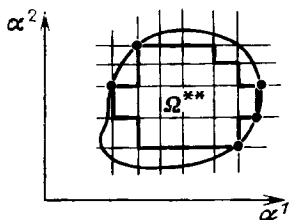


Рис. 11.5

обозначим  $\Omega^*$ . Но тогда можно применить продолжения по равнобедренным прямоугольным треугольникам (рис. 11.4). Действительно, из  $\Omega^*$  соотношения (11.24) можно распространить на треугольник  $ABC$ , катет которого  $AC$  лежит целиком в  $\Omega^*$ . После этого по лемме 11.3 соотношения (11.24) распространяются на треугольник  $BCA'$  и, значит, на квадрат  $ABCA'$ . Очевидно, таким путем (11.24) устанавливается в любой подобласти  $\Omega^{**}$  области  $\Omega^*$ , составленной из квадратов (рис. 11.5). Наконец, поскольку в наших рассуждениях стороны квадратов  $ABCA'$  могут быть сколь угодно малыми, а область  $\Omega$  измерима, то можно построить такую подобласть  $\Omega''$ , в которую войдет любая внутренняя точка  $\Omega$ .

Теорема 11.2, таким образом, доказана. ■

Лемма 11.4. Пусть  $\omega \in W_{2\Omega}^{(1)}$  и  $\Gamma_t \in C_{\Gamma_t}^1$  ( $t = 5, 6, 7, 8$ ). В этом случае из соотношения

$$\|\omega\|_{H_t} = 0 \quad (11.38)$$

вытекает

$$\omega \equiv 0 \text{ в } \Omega. \quad (11.39)$$

Мы разберем последовательно ситуацию в каждом из пространств  $H_t$ .

Из (11.38) и (11.5) в силу положительной определенности тензора  $D_p^{ijkl}(\alpha)$  и условий на связи получаем (11.23). Далее, в случае  $H_5$  обязательно  $\Gamma_5 > 0$ , и тогда, приняв  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_5$ , мы оказываемся в условиях теоремы 11.2, откуда следует (11.39). В случае  $H_6$   $\Gamma_6 > 0$  и выполнено (11.1). Поэтому из (11.38), помимо (11.23), вытекает

$$w_\tau |_{\Gamma_6} = 0. \quad (11.40)$$

Учитывая, что при образовании  $H_6$  также предполагалось выполнение однородного условия (6.10), имеем

$$\omega |_{\Gamma_6} = 0. \quad (11.41)$$

Таким образом, мы снова оказываемся в условиях теоремы 11.2, приняв  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_6$ .

Для  $H_7$   $\Gamma_7 > 0$  и выполнено (11.2). Поэтому из (11.38), помимо (11.23), имеем

$$w_m |_{\Gamma_7} = 0. \quad (11.42)$$

Поскольку при образовании  $H_7$  предполагалось выполнение однородного условия (6.13), то имеем

$$\omega |_{\Gamma_7} = 0 \quad (11.43)$$

и, приняв  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_7$ , получаем из леммы 11.3 соотношение (11.39). Наконец, в случае  $H_8$   $\Gamma_8 > 0$  и  $k_p^{ij}$  — существенно упругая связь. Из (11.38) в силу этого получаем (11.37) и

$$\omega |_{\Gamma_8} = 0; \quad (11.44)$$

в данном случае  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_8$ , и снова получаем (11.39). Таким образом, лемма 11.4 доказана. ■

Лемма обосновывает законность введения норм (11.5).

Лемма 11.5. Имеет место неравенство

$$\|\omega\|_{H_t} \geq m \|\omega\|_{W_{2t\Omega}^{(1)}}. \quad (11.45)$$

Для доказательства рассмотрим  $R(\omega) = \|\omega\|_{H_1}^2$ . Имеем

$$\mathcal{R}(\omega) = \int_{\Omega} [\mathcal{P}_2(w_{k\alpha^l}) + \mathcal{P}_1(w_{k\alpha^l})] d\Omega + \mathcal{P}_0(\omega), \quad (11.46)$$

где

$$\mathcal{P}_2(\omega) = \frac{1}{4} D_p^{hlst} (w_{k\alpha^l} + w_{l\alpha^k}) (w_{s\alpha^t} + w_{t\alpha^s}), \quad (11.47)$$

$$\mathcal{P}_1(\omega) = \frac{1}{2} D_p^{hlst} G_{st}^\gamma w_\gamma (w_{k\alpha^l} + w_{l\alpha^k}), \quad (11.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(\omega) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} D_p^{hlst} G_{hi}^\gamma G_{st}^\delta w_\gamma w_\delta d\Omega + \int_{\Gamma_6} k^{rr} w_r^2 ds + \\ + \int_{\Gamma_7} k^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k^{ij} w_i w_j ds. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Имея в виду использовать теорему 10.8, проверим выполнение ее условий. Структура  $\mathcal{P}_2(\omega)$ ,  $\mathcal{P}_1(\omega)$  с очевидностью удовлетворяет требованиям этой теоремы при  $l=1$ . Из теоремы вложения 1.4 также непосредственно вытекает, что  $\mathcal{P}_0(\omega)$  — слабо непрерывный в  $\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(1)}$  функционал. Условие 1 теоремы 10.8 выполняется автоматически вследствие леммы 11.4. Остается проверить выполнение условия 2 теоремы 10.8 (10.35). Пусть  $\omega_n \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(1)}$ . Докажем, что  $\mathcal{P}_1(\omega_n) \rightarrow 0$ . Последнее вытекает из элементарного факта: если  $f_n$ ,  $\varphi_n$  — две последовательности пространства  $L_{2\Omega}$ , причем

$$f_n \Rightarrow f_0 \text{ и } \varphi_n \rightarrow \varphi_0 \text{ в } L_{2\Omega}, \quad (11.50)$$

то

$$\int_{\Omega} f_n \varphi_n d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} f_0 \varphi_0 d\Omega. \quad (11.51)$$

В нашем случае

$$\varphi_n = w_{n k \alpha^l} + w_{n l \alpha^k} \rightarrow 0 \text{ в } L_{2\Omega}, \quad f_n = w_{n i} \Rightarrow 0 \text{ в } L_{2\Omega}. \quad (11.52)$$

Таким образом, из  $\mathcal{P}_1(\omega_n) \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(1)}$  и  $\mathcal{R}(\omega_n) \rightarrow 0$  получаем

$$\int_{\Omega} [\mathcal{P}_2(w_{k\alpha^l}) + \mathcal{P}_0(\omega_n)] d\Omega \rightarrow 0. \quad (11.53)$$

Далее, в силу теоремы вложения 10.4, получаем

$$\int_{\Omega} D_p^{hlst} G_{hi}^\gamma G_{st}^\delta w_{n\gamma} w_{n\delta} d\Omega \rightarrow 0 \quad (11.54)$$

и из (11.53), (11.54) вытекает

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}_2(w_{n\alpha^l}) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k^{\tau\tau} w_{\tau}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k^{ij} w_i w_j ds \rightarrow 0$$

(i, j = 1, 2). (11.55)

Поскольку  $\mathcal{P}_2(w_{n\alpha^h})$  есть положительно определенная квадратичная форма  $w_{h\alpha^l} + w_{l\alpha^h}$ , то из (11.55) следует

$$\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^2 (w_{h\alpha^l} + w_{l\alpha^h})^2 d\Omega + \int_{\Gamma_6} k^{\tau\tau} w_{\tau}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k^{ij} w_i w_j ds \rightarrow 0, \quad (11.56)$$

и из неравенства (11.21) получаем

$$\|\omega\|_{W_{2l\Omega}^0(1)} \rightarrow 0. \quad (11.57)$$

и, значит,

$$\|w_{l\alpha^h}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (11.58)$$

Таким образом, условие 2 теоремы 10.8 выполнено, и неравенство (11.45) доказано. ■

**Теорема 11.3.** Пространства  $H_t$ ,  $t = 5, 6, 7, 8$ , эквивалентны соответствующим пространствам  $\overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}$ , полученным замыканием тех же множеств  $\overset{0}{C}_{l\Omega}^1$ .

Для доказательства заметим, что из (11.45) вытекает, что  $H_t \subset \overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}$ . Далее, имеем очевидное неравенство

$$\|\omega\|_{H_t} \leq M \|\omega\|_{\overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}}. \quad (11.59)$$

Таким образом, имеем

$$m \|\omega\|_{\overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}} \leq \|\omega\|_{H_t} \leq M \|\omega\|_{\overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}}, \quad (11.60)$$

что свидетельствует об эквивалентности норм  $\overset{0}{W}_{2l\Omega}^{(1)}$  и  $H_t$ . Если они к тому же образованы из одного и того же множества  $\overset{0}{C}_{l\Omega}^1$ , то, значит, содержат одни и те же элементы. Теорема 11.3 доказана.

Из теоремы 11.3 мы получаем важнейшее следствие: для элементов всех пространств  $H_t$  справедлива теорема вложения 10.4 при  $l = 1$ ,  $p = 2$ ,  $n = 2$ . Поскольку этот вывод будет нами непрерывно использоваться, мы запишем все вытекающие из него следствия.

**Теорема 11.4.** Пусть  $\omega(w_1, w_2) \in H_t$ ,  $t = 5, 6, 7, 8$ . В этом случае

1)  $w_{i\alpha j} \in L_{2\Omega}$ ,  $\nabla_i w_j \in L_{2\Omega}$  и  $\|w_{i\alpha j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_i w_j\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|\omega\|_{H_t}$ ;

2)  $w_i \in L_{q\alpha}$ ,  $L_{qd}$  при любом  $q \geq 1$ . Здесь  $d$  — любой КГК класса  $S_d^1$ . При этом справедливы неравенства

$$\|w_i\|_{L_{q\Omega}}, \|w_i\|_{L_{qd}} \leq m \|\omega\|_{H_t}; \tag{11.62}$$

3) оператор вложения  $H_t$  в  $L_{q\alpha}$  и  $L_{qd}$  является усиленно непрерывным, т. е. имеют место соотношения:

из  $\omega_n \rightarrow \omega_0$  в  $H_t$  следует  $\omega_n \Rightarrow \omega_0$  в любом  $L_{q\alpha}$ ,

$$\omega_n \Rightarrow \omega_0 \text{ в любом } L_{qd} \text{ при любом } q \geq 1. \tag{11.63}$$

Отметим, что контур  $d$  может частями или целиком выходить на  $\Gamma$ .

**Лемма 11.6.** Для всех элементов  $\omega \in \overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)} \sim \overset{\sim}{W}_{2t\Omega}^{(1)} \sim H_t$  однородные граничные условия (6.9), (6.10), (6.13) выполняются почти всюду.

Действительно, если  $\omega \in \overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$ , то существует последовательность  $\omega_n \in C_\Omega^1$ , для которой эти условия выполняются поточечно и, кроме того,

$$\|\omega - \omega_n\|_{\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}} \rightarrow 0. \tag{11.64}$$

В силу теоремы вложения 10.4 и неравенств (11.62) имеем

$$\|\omega\|_{L_{2\Gamma_5}}, \|w_m\|_{L_{2\Gamma_6}}, \|w_\tau\|_{L_{2\Gamma_7}} = 0. \blacksquare \tag{11.65}$$

**11.3. Лемма 11.7.** Пусть некоторый кусок  $\tilde{\Gamma}$  контура  $\Gamma$  принадлежит  $S_\Gamma^1$ , а на куске  $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ , целиком лежащем внутри  $\tilde{\Gamma}$ , задана функция  $w_i \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$ . В этом случае  $w_i$  можно продолжить с  $\tilde{\tilde{\Gamma}}$  на  $\tilde{\Gamma}$  так, чтобы  $w_i$  было вне  $\tilde{\Gamma}$  равным нулю,  $w_i \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$  и, кроме того,

$$\|w_i\|_{W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}} \leq m \|w_i\|_{W_{2\tilde{\tilde{\Gamma}}}^{(1/2)}}, \tag{11.66}$$

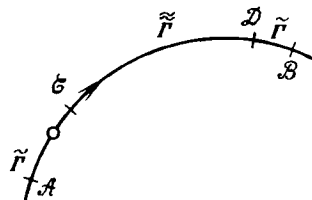


Рис. 11.6

где  $m$  не зависит от  $w_i$ .

Для доказательства леммы установим вначале, что вообще возможно продолжение  $w_i \subset W_{2\tilde{\tilde{\Gamma}}}^{(1/2)}$  на  $W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$  с осуществлением (11.66) (без обращения в нуль вне  $\tilde{\Gamma}$ ). На рис. 11.6 концы  $\tilde{\tilde{\Gamma}}$  суть  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$ , а  $\tilde{\Gamma}$  суть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

Далее, известно, что если  $w_i \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$ , то существует такая функция  $f_i \in L_{2\tilde{\Gamma}}$ , что

$$w_i = \int_C^s \frac{f_i(\sigma)}{\sqrt{\sigma-s}} d\sigma, \quad C \leq s \leq D. \quad (11.67)$$

Обычно представление (11.67) используется, если  $\Gamma$  — отрезок прямой. Однако оно справедливо, если  $\Gamma$  — контур класса  $C_\Gamma^1$ . Функцию  $f_i(\sigma)$  можно продолжить на отрезок  $DB$ , а также и на отрезок  $CA$ , так чтобы продолженная функция принадлежала  $L_{2\tilde{\Gamma}}$ , причем это можно сделать с выполнением неравенства

$$\|f_i\|_{L_{2AB}} \leq m \|f_i\|_{L_{2CD}}. \quad (11.68)$$

Таким образом, функция

$$w_i = \int_A^s \frac{f_i(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sigma-s}} \in W_{2AB}^{(1/2)}, \quad (11.69)$$

но она пока еще не равна нулю вне  $\tilde{\Gamma}$ . Достичь этой цели можно введением срезающих функций, тип которых показан на рис. 11.7.

При этом такую срезающую функцию  $\chi_1(s)$  можно ввести на  $DB$ , и тогда

$$w_i(s) \chi_1(s) \quad (11.70)$$

будет равна нулю при  $s \geq CB$ . Такую же срезающую функцию  $\chi_2(s)$  можно ввести на  $CA$ , и тогда

$$\chi_2(s) w_i(s) \chi_1(s) \quad (11.71)$$

будет удовлетворять поставленным условиям леммы 11.7.

**Лемма 11.8.** Пусть  $\Gamma$  есть контур класса  $C_\Gamma^1$  и, кроме того, существует кусок  $\tilde{\Gamma} \in C_\Gamma^3$  (быть может, и несвязный), содержащий  $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ . В этом случае для существования вектор-функции  $\overset{0}{\omega} \in W_{2\Omega}^{(1)}$  такой, что

$$w_i|_{\Gamma_5} = \tilde{w}_i \quad (i = 1, 2), \quad w_m|_{\Gamma_6} = \tilde{w}_m, \quad w_\tau|_{\Gamma_7} = \tilde{w}_\tau, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad (11.72)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{w}_i|_{\Gamma_5} \in W_{2\Gamma_5}^{(1/2)}, \quad \tilde{w}_m|_{\Gamma_6} \in W_{2\Gamma_6}^{(1/2)}, \quad \tilde{w}_\tau|_{\Gamma_7} \in W_{2\Gamma_7}^{(1/2)}. \quad (11.73)$$



Наметим в общих чертах доказательство. По условию  $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$  не имеют общих точек. Примем, что  $\Gamma_5 \equiv \tilde{\Gamma}$ , и здесь имеет место соотношение  $w_i \in W_{2\Gamma_5}^{(1/2)}$ . По лемме 11.7 можно считать, что существует отрезок  $\tilde{\Gamma}$ , содержащий  $\Gamma_5 \equiv \tilde{\Gamma}$  и такой, что  $w_i \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$  и обращается в нуль вне  $\tilde{\Gamma}$ . Поэтому можно считать, что  $w_i \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$ , в том числе

$$w_i|_{\Gamma_6} \equiv 0, \quad w_i|_{\Gamma_i} \equiv 0. \quad (11.74)$$

При этом должна существовать вектор-функция  $\tilde{\omega}_1 \in W_{2\Omega}^{(1)}$  и

$$\|\omega_1\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq m \|\tilde{\omega}\|_{W_2^{(1/2)}\Gamma_5}. \quad (11.75)$$

Аналогично продолжаем  $\tilde{w}_m$  с  $\Gamma_6$  на  $\tilde{\Gamma}_6$  так, чтобы  $\tilde{w}_m \in W_{2\tilde{\Gamma}_6}^{(1/2)}$  и вне  $\tilde{\Gamma}_6$   $\tilde{w}_m = 0$ , в частности

$$\tilde{w}_m|_{\Gamma_5} \equiv \tilde{w}_m|_{\Gamma_7} \equiv 0.$$

При этом будет существовать функция  $\tilde{w}_m \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(1/2)}$  и ей будет соответствовать такая вектор-функция  $\omega_2 \in W_{2\Omega}^{(1)}$ , что  $\omega_{2m}|_{\Gamma_6} = \tilde{w}_m$ ,  $\omega_{2\tau}|_{\Gamma_6} \equiv 0$  и

$$\|\omega_2\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq m \|\omega_m\|_{W_{2\tilde{\Gamma}_6}^{(1/2)}}. \quad (11.76)$$

Аналогично продолжаем  $\tilde{w}_\tau$  с  $\Gamma_7$  на  $\tilde{\Gamma}_7$  так, чтобы  $\tilde{w}_\tau \in W_{2\tilde{\Gamma}_7}^{(1)}$ , а вне  $\tilde{\Gamma}_7$   $w_\tau = 0$ , в частности

$$\tilde{w}_\tau|_{\Gamma_5} \equiv \tilde{w}_\tau|_{\Gamma_6} = 0.$$

При этом будет существовать функция  $\omega_3 \in W_{2\Omega}^{(1)}$ . Очевидно, вектор-функция

$$\tilde{\omega} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{\omega}\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq m \left( \|\tilde{\omega}\|_{W_{2\tilde{\Gamma}_5}^{(1/2)}} + \|\tilde{w}_m\|_{W_2^{(1/2)}\Gamma_6} + \|\tilde{w}_\tau\|_{W_2^{(1/2)}\Gamma_7} \right). \quad (11.77)$$

Граничные задания  $\tilde{\omega}|_{\Gamma_5}$ ,  $\tilde{\omega}_m|_{\Gamma_6}$ ,  $\tilde{\omega}_\tau|_{\Gamma_7}$ , удовлетворяющие (11.73), будем ниже называть допустимыми.

Необходимость вытекает из [24], см. также [2, 3, 15, 32, 33]. ■

**11.4.** В данном разделе введем некоторые функциональные пространства, с помощью которых будем характеризовать действующие

на оболочку продольные усилия. Рассмотрим агрегат

$$\int_{\Omega} R^i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^\tau w_\tau ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m w_m ds, \quad (11.78)$$

и множество  $\bar{H}_i$  таких продольных нагрузок  $[R^s, \tilde{T}^\tau, \tilde{T}^m]$ , что (11.78) есть ограниченный функционал в  $H_i$ . Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная такая, что

$$\sup_{\omega} \frac{\left| \int_{\Omega} R^s w_s d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^\tau w_\tau ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m w_m ds \right|}{\|\omega\|_{H_i}} \leq m < \infty \quad (11.79)$$

для всех  $\omega \in H_i$ . Далее, если выполнено (11.79), то существует в силу теоремы Рисса элемент  $\omega_{\Pi}$  такой, что

$$\int_{\Omega} R^s w_s d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^\tau w_\tau ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m w_m ds = (\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_i}. \quad (11.80)$$

Соотношение (11.80) дает возможность превратить  $\bar{H}_i$  в гильбертово пространство. Для этого предположим, что  $[R_1^s, \tilde{T}_1^\tau, \tilde{T}_1^m]$  и  $[R_2^s, \tilde{T}_2^\tau, \tilde{T}_2^m]$  — два элемента  $\bar{H}_i$ , и примем

$$([R_1^s, \tilde{T}_1^\tau, \tilde{T}_1^m] \cdot [R_2^s, \tilde{T}_2^\tau, \tilde{T}_2^m])_{\bar{H}_i} = (\omega_{\Pi 1} \cdot \omega_{\Pi 2})_{H_i}, \quad (11.81)$$

где  $\omega_{\Pi i}$  — элемент  $H_i$ , соответствующий  $[R_i^s, \tilde{T}_i^\tau, \tilde{T}_i^m]_i$ . Из (11.81) имеем

$$\|[R^s, \tilde{T}^\tau, \tilde{T}^m]\|_{\bar{H}_i} = \|\omega_{\Pi}\|_{H_i}. \quad (11.82)$$

При этом в (11.79) вместо  $\sup$  в левой части можно поставить  $\max$ , а вместо  $m$  в правой части —  $\|\omega_{\Pi}\|$ . Отсюда вытекает, что если  $\omega_{\Pi} = 0$  и  $\|[R^s, \tilde{T}^\tau, \tilde{T}^m]\|_{\bar{H}_i} = 0$ , то и  $R^s \equiv \tilde{T}^\tau \equiv \tilde{T}^m \equiv 0$ .

## § 12. Специальные функциональные пространства $H_{\kappa}$ , $\kappa = 1, 2, 3, 4$ . Свойства их элементов

**12.1.** Во всех последующих рассмотрениях этого параграфа будет предполагаться, что  $\Gamma$  — КГК класса  $C_{\Gamma, \Omega}^3$  — соболевская область класса  $(2, 2, 2)$ , материал оболочки регулярен,  $S \in C_{\Omega}^2$ .

**Определение 12.1.** Назовем существенно упругими изгибными связями такие связи, для которых

$$k_{\Pi}^{44} \geq m > 0, \quad (12.1)$$

$$k_4^{33} \geq m > 0, \quad (12.2)$$

$$k_{\Pi}^{ij} w_i w_j |_{i,j=3,4} \geq m > 0 \text{ при } w_3^2 + w_4^2 = 1. \quad (12.3)$$

Если связи не являются существенно упругими, то  $m$  в (12.1) — (12.3) есть ноль.

Рассмотрим множество функций  $w \in \overset{0}{C}_{\Omega}^2$ , удовлетворяющих однородным условиям (6.1) — (6.3), (6.5), на котором зададим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (w_1, w_2)_{H_{\kappa}} = & \int_{\Omega} D_{ij}^{ijkl} \gamma_{ij}^1(w_1) \gamma_{kl}^1(w_2) d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{ii}^{44} w_{i4} w_{i4} ds + \\ & + \int_{\Gamma_3} k_{ii}^{33} w_{i3} w_{i3} ds + \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_{ij} w_{ij} |_{i,j=3,4} ds, \quad w_{i3} = w_{i3}, w_{i4} = \frac{\partial w_i}{\partial m}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Соотношению (12.4) соответствует норма

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_{\kappa}}^2 = & \int_{\Omega} D_{ij}^{ijkl} \gamma_{ij}^1(w) \gamma_{kl}^1(w) d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{ii}^{44} w_{i4}^2 ds + \\ & + \int_{\Gamma_3} k_{ii}^{33} w_{i3}^2 ds + \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_{ij} w_{ij} |_{i,j=3,4} ds. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Формула (12.4) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скалярному произведению в гильбертовом пространстве [9, 10, 25, 28]. Подлежит доказательству лишь тот факт, что из

$$\|w\|_{H_{\kappa}} = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, 4, \quad (12.6)$$

вытекает

$$w \equiv 0 \text{ в } \bar{\Omega}, \quad (12.7)$$

и этот вопрос будет разрешен в лемме 12.4. ■

Для образования пространства  $H_1$  предположим, что  $\Gamma_1 > 0$ . Ниже знак  $\Gamma_i > 0$  будет означать, что  $\Gamma_i$  содержит связный кусок положительной длины. Замкнем теперь  $C_{\Omega}^2$  в норме (12.5). Здесь  $C_{\Omega}^2$

есть  $\overset{0}{C}_{\Omega}^2$ , но при обязательном выполнении  $\Gamma_1 > 0$ . При этом  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  могут вообще отсутствовать, а при их наличии не требуется, чтобы связи были существенно упругими. Достаточно выполнения (12.1) — (12.3) при  $m = 0$ . ■

В случае пространства  $H_2$  предполагается, что  $\Gamma_2 > 0$ , и здесь будем различать два подварианта. В подварианте а) считаем, что хотя бы в одной точке  $\Gamma_2$  выполнено условие

$$\kappa_2 \neq 0, \quad (12.8)$$

где  $\kappa_2$  — геодезическая кривизна  $\Gamma_2$ . Замыкание  $\overset{0}{C}_{2\Omega}^2$  в норме (12.5) назовем  $H_{2a}$ . Здесь  $\overset{0}{C}_{2\Omega}^2$  есть  $\overset{0}{C}_{\Omega}^2$ , но при обязательном выполнении условия  $\Gamma_2 > 0$ . В этом подварианте связи могут быть и не существенно упругими. Достаточно выполнения (12.1) — (12.3) при

$m = 0$ . В подварианте б) (12.8) может не выполняться, но связь на  $\Gamma_2$  должна быть существенно упругой, т. е. должно выполняться (12.1). Остальные связи не обязательно существенно упругие.

Замыкание  $\overset{0}{C}_{2\Omega}^2$  при обязательном наличии  $\Gamma_2$  и выполнении (12.1) назовем  $H_{2b}$ . Как и в варианте а), в случае б) участки  $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$  могут вообще отсутствовать. ■

При образовании  $H_3$  предполагается  $\Gamma_3 > 0$  и связь на  $\Gamma_3$  — существенно упругой. Замыкание  $\overset{0}{C}_{3\Omega}^2$  в норме (12.5) назовем  $H_3$ . При этом  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$  вообще могут отсутствовать, а при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. ■

Наконец,  $H_4$  образуется при  $\Gamma_4 > 0$  и в том случае, если матрица  $k_{ij}^{ij}$  положительно определенная, т. е. связь на  $\Gamma_4$  существенно упругая. Все остальные участки  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  могут и отсутствовать, однако при их наличии связи на них не обязательно существенно упругие. Пусть  $\overset{0}{C}_{4\Omega}^2$  есть  $\overset{0}{C}_{2\Omega}^2$ , но при обязательном наличии  $\Gamma_4$ ;  $H_4$  есть замыкание  $\overset{0}{C}_{4\Omega}^2$  в норме (12.5). ■

Введем еще два вспомогательных пространства со скалярными произведениями

$$(w_1 \cdot w_2)_{\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(2)}} = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^2 w_{1\alpha^i \alpha^j} w_{2\alpha^i \alpha^j} + \sum_{i=1}^2 w_{1\alpha^i} w_{2\alpha^i} + w_1 w_2 \right) d\Omega, \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned} (w_1 \cdot w_2)_{\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(2)}} \sim &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 w_{1\alpha^i \alpha^j} w_{2\alpha^i \alpha^j} d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{ii}^{44} w_{14} w_{24} ds + \\ &+ \int_{\Gamma_3} k_{ii}^{33} w_1 w_2 ds + \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_{1i} w_{2j} ds |_{i,j=3,4}, \quad (12.10) \end{aligned}$$

$$w_{i3} \equiv w_i, \quad w_{i4} \equiv \frac{\partial w_i}{\partial m}.$$

Им соответствуют нормы

$$\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(2)}} = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^2 w_{\alpha^i \alpha^j}^2 + \sum_{i=1}^2 w_{\alpha^i}^2 + w^2 \right) d\Omega, \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(2)}} \sim &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 w_{\alpha^i \alpha^j}^2 d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{ii}^{44} w_4^2 ds + \int_{\Gamma_3} k_{ii}^{33} w^2 ds + \\ &+ \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_i w_j |_{i,j=3,4} ds. \quad (12.12) \end{aligned}$$

При этом предполагается, что сочетание изгибных граничных условий таково, что из

$$\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega}^{(2)}} \sim 0 \quad (12.13)$$

для каждого  $\kappa$  вытекает

$$w \equiv 0 \text{ в } \Omega. \quad \blacksquare \quad (12.14)$$

Основная цель настоящего параграфа будет заключаться в изучении свойств  $H_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, 4$ .

**12.2. Лемма 12.1.** Для любой функции  $w \in \overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$  имеет место неравенство

$$\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}} \geq m \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}}. \quad (12.15)$$

Для доказательства мы воспользуемся теоремой 10.8, здесь  $l = 2$ . Введем  $\mathcal{R}(w) = \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}}^2$  и в соответствии с (12.12) имеем

$$\mathcal{P}_2(w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 w_{\alpha^i \alpha^j}^2 d\Omega, \quad \mathcal{P}_1(w) \equiv 0, \quad (12.16)$$

$$\mathcal{P}_0(w) = \int_{\Gamma_2} k^{44} w_4^2 ds + \int_{\Gamma_3} k^{33} w_3^2 ds + \int_{\Gamma_4} k_{ij}^{ij} w_i w_j |_{i,j=3,4} ds. \quad (12.17)$$

Структура  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы 10.8. Функционал  $\mathcal{P}_0(w)$  слабо непрерывен в  $\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$ , что вытекает из теоремы 10.5. Далее учтем, что из соотношения

$$\mathcal{R}(w) = \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}}^2 = 0 \quad (12.18)$$

вследствие граничных условий, использованных при образовании  $H_\kappa$ , получаем

$$w \equiv 0 \text{ в } \Omega, \quad (12.19)$$

и таким образом, условие 1 теоремы 10.8 (10.34) выполнено для всех  $\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$ . Пусть теперь  $w_n \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$ . Тогда в силу слабой непрерывности  $\mathcal{P}_0(w)$  в  $\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$  имеем

$$\mathcal{P}_0(w_n) \rightarrow 0 \quad (12.20)$$

и из  $\mathcal{R}(w_n) \rightarrow 0$  получаем

$$\mathcal{P}_2(w_n) \rightarrow 0, \quad (12.21)$$

откуда

$$\|w_n \alpha^i \alpha^j\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (12.22)$$

Таким образом, условие 2 теоремы 10.8 (10.35) также выполнено и лемма 12.1 доказана.

**Теорема 12.1.** Пространства  $\overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}$ ,  $\widetilde{W}_{2\times\Omega}^{(2)}$  эквивалентны и содержат одни и те же элементы.

Из (12.15) вытекает, что  $\widetilde{W}_{2\times\Omega}^{(2)} \subset \overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}$ . Из (12.15), (12.11) и теоремы вложения 10.5 (соотношения (10.24), (10.26), (10.27)) получаем очевидное неравенство

$$\|w\|_{\widetilde{W}_{2\times\Omega}^{(2)}} \leq M \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}}. \quad (12.23)$$

Из (12.15), (12.23) вытекает эквивалентность норм  $\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}}$  и

$\|w\|_{\widetilde{W}_{2\times\Omega}^{(2)}}$ . Поскольку оба пространства получены замыканием одного

и того же множества  $\overset{0}{C}_{2\times\Omega}$  в эквивалентных нормах, то они совпадают. ■

**Примечание 12.1.** В определении  $\|w\|_{\widetilde{W}_{2\times\Omega}^{(2)}}$  в правой части

(12.12) могут быть отброшены некоторые интегралы в зависимости от  $\kappa$ . При этом лишь надо следить, чтобы геометрические граничные условия (6.1)—(6.3), (6.5) плюс условие равенства нулю всех удержанных в (12.12) контурных интегралов вместе с

$$\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}} = 0 \quad (12.24)$$

приводили бы к соотношению (12.19). ■

**Лемма 12.2.** Пусть  $w \in \overset{0}{W}_{2\times\Omega}^{(2)}$ , КГК  $\Gamma \in C_{\Gamma}^1$ , почти всюду выполняется условие

$$-e_{ij}^1(w) = \nabla_{\alpha^i \alpha^j} w = w_{\alpha^i \alpha^j} - G_{ij}^h w_{\alpha^h} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (12.25)$$

и, кроме того, существует кусок  $\widetilde{\Gamma}$  контура  $\Gamma$  такой, что

$$w_{\alpha^i}|_{\widetilde{\Gamma}} = 0. \quad (12.26)$$

Тогда

$$w = \text{const} \text{ в } \Omega. \quad (12.27)$$

Для доказательства обозначим

$$w_i = w_{\alpha^i}. \quad (12.28)$$

Тогда (12.25) запишется в виде

$$w_{i\alpha^j} + w_{j\alpha^i} = 2G_{ij}^h w_h, \quad (12.29)$$

и мы, в сущности, получили систему (11.23). Условие (12.26) соответствует (11.22), и мы полностью находимся в условиях леммы 11.3, из которой и вытекает (12.27).

**Лемма 12.3.** Пусть КГК  $\Gamma \in C_\Gamma^1$  и  $\Gamma_1 > 0$ . В этом случае из соотношения

$$\|w\|_{H_1} = 0 \quad (12.30)$$

следует

$$w \equiv 0. \quad (12.31)$$

В случае  $H_1$  из (12.30) получаем (12.25). Поскольку  $\Gamma_1 > 0$ , то можно принять  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1$ . Таким образом, мы оказываемся в условиях леммы 12.2, откуда следует (12.31). Лемма 12.3 доказана.

**Лемма 12.4.** Пусть КГК  $\Gamma \in C_\Gamma^1$ ,  $\Gamma_2 > 0$  и на  $\Gamma_2$  имеется кусок  $\tilde{\Gamma}_2 \in C_{\tilde{\Gamma}_2}^2$  на котором есть точка, где выполнено условие (12.8). В этом случае из

$$\|w\|_{H_2} = 0$$

следует (12.31).

Для доказательства леммы учтем, что из  $\|w\|_{H_2} = 0$  следует почти всюду (12.25). Естественно, что мы снова можем исходить из того, что  $w \in \overset{\circ}{W}_{2\kappa\Omega}$ . Но тогда в силу теоремы вложения 10.5 (формула (10.26))  $w_{\alpha^i} \in L_{q\Omega}$ ,  $i = 1, 2$ , при любом  $q \geq 1$ . При этом из (12.25) получаем, что  $w_{\alpha^i\alpha^j} \in L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$ . Используя теперь теорему вложения 10.3 при  $n = 2$ ,  $q \geq 2$  и  $l = 2$  (случай 2), будем иметь  $w_{\alpha^i} \in H_\Omega^{1-2/q}$ . Из этого факта и (12.25) следует, что  $w \in C_\Omega^2$ , если для некоторой функции  $w \in \overset{\circ}{W}_{2\kappa\Omega}$  имеют место (12.25). Но тогда на  $\Gamma_2$  из (6.3) имеем

$$\frac{dw}{ds} = w_{\alpha^i} \frac{d\alpha^i}{ds} = 0, \quad (12.32)$$

$$\left. \frac{d^2 w}{ds^2} \right|_{\Gamma_2} = w_{\alpha^i\alpha^j} \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds} + w_{\alpha^k} \frac{d^2 \alpha^k}{ds^2} = 0. \quad (12.33)$$

Подставив в (12.33)  $w_{\alpha^i\alpha^j}$  из (12.25), получим

$$\left. \frac{d^2 w}{ds^2} \right|_{\tilde{\Gamma}_2} \equiv w_{\alpha^k} \left( \frac{d^2 \alpha^k}{ds^2} + G_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds} \right) = 0. \quad (12.34)$$

Уравнения (12.32), (12.34) можно рассматривать как систему относительно  $w_{\alpha^k}$ . Легко убеждаемся, что детерминант этой системы есть  $\chi_2$  в полном соответствии с (1.34). По условиям леммы 12.4 на  $\tilde{\Gamma}_2$  есть точка, где  $\chi_2 \neq 0$ , и значит, в силу того, что  $\tilde{\Gamma}_2 \in C_{\tilde{\Gamma}_2}^2$ ,

есть целый кусок  $\tilde{\Gamma}_2 \in \tilde{\Gamma}_2 \in \Gamma_2$  такой, что  $\chi_2 \neq 0$ . Тогда на  $\tilde{\Gamma}_2$  из (12.34) следует (12.26), и мы снова в условиях леммы 12.2, откуда и вытекает лемма 12.4.

**Лемма 12.5.** Пусть  $\Gamma_2 > 0$ , КГК  $\Gamma \in C_\Gamma$  и на  $\Gamma_2$  имеется кусок  $\tilde{\Gamma}_2$ , где связь существенно упругая. В этом случае из  $\|w\|_{H_2} = 0$  следует (12.31).

Для доказательства учтем, что поскольку на  $\tilde{\Gamma}_2$  связь существенно упругая, то из  $\|w\|_{H_2} = 0$  следует (12.25)

$$\frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\tilde{\Gamma}_2} \equiv w_4 \Big|_{\tilde{\Gamma}_2} = 0. \quad (12.35)$$

Кроме того, выполнено (6.3), откуда вытекает (12.26). И мы снова находимся в условиях леммы 12.2. Лемма 12.5 доказана. ■

**Лемма 12.6.** Пусть КГК  $\Gamma \in C_\Gamma^1$ ,  $\Gamma_3 > 0$  и существует кусок  $\tilde{\Gamma}_3$ , на котором связь существенно упругая. В этом случае из

$$\|w\|_{H_3} = 0 \quad (12.36)$$

вытекает (12.31).

В силу (12.36) имеем (12.25) и, кроме того,

$$w \Big|_{\tilde{\Gamma}_3} = 0. \quad (12.37)$$

Учтем, далее, что для всех  $w \in H_{3\Omega}$  обязательно выполнение (6.5), и тогда из (12.37) следует (12.26). Мы снова находимся в условиях леммы 12.2. Лемма 12.6 доказана. ■

**Лемма 12.7.** Пусть КГК  $\Gamma \in C_\Gamma^1$ ,  $\Gamma_4 > 0$  и существует кусок  $\tilde{\Gamma}_4 \in \Gamma_4$ , на котором связь существенно упругая. В этом случае из

$$\|w\|_{H_4} = 0 \quad (12.38)$$

вытекает (12.31).

Из (12.38) вытекает (12.25) и

$$w \Big|_{\tilde{\Gamma}_4} = \frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\tilde{\Gamma}_4} = w_4 \Big|_{\tilde{\Gamma}_4} = 0,$$

откуда следует (12.26). Мы снова находимся в условиях леммы 12.2. Отсюда следует (12.31), лемма 12.7 доказана. ■

**Лемма 12.8.** Для всех элементов  $w \in H_\kappa$  имеет место неравенство

$$\|w\|_{H_\kappa} \geq m \|w\|_{W_{2\Omega\kappa}^{(2)}}. \quad (12.39)$$

Доказательство леммы 12.8 проведем на основе теоремы 10.8. Введем  $\mathcal{R}(w) = \|w\|_{H_\kappa}^2$ . Имеем в силу (12.5)

$$\mathcal{R}(w) = \int_{\Omega} [\mathcal{P}_2(w_{\alpha^k \alpha^l}) + \mathcal{P}_1(w_{\alpha^k \alpha^l})] d\Omega + \mathcal{P}_0(w), \quad (12.40)$$



где

$$\mathcal{P}_2(w_{\alpha^k \alpha^l}) = D_{\alpha}^{ijkl} w_{\alpha^i \alpha^j} w_{\alpha^k \alpha^l}, \quad (12.41)$$

$$\mathcal{P}_1(w_{\alpha^k \alpha^l}) = -D_{\alpha}^{ijkl} (w_{\alpha^i \alpha^j} G_{kl}^t + w_{\alpha^k \alpha^l} G_{ij}^t) w_{\alpha^t}, \quad (12.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(w) = & \int_{\Omega} D_{\alpha}^{ijkl} G_{kl}^s w_{\alpha^i} w_{\alpha^s} d\Omega + \int_{\Gamma_2} k_{\alpha}^{44} w_4^2 ds + \\ & + \int_{\Gamma_3} k_{\alpha}^{33}(s) w^2 ds + \int_{\Gamma_4} k_{\alpha}^{ij} \tilde{w}_i w_j |_{i,j=3,4} ds. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Таким образом, в данном случае  $l=2$ . Структура  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_1$  соответствует теореме 10.8. Функционал  $\mathcal{P}_0(w)$  слабо непрерывен в силу теоремы 10.5. Проверим, далее, выполнение остальных условий теоремы 10.8. Условие 1 (10.34) есть прямое следствие леммы 12.3.

Для проверки условия 2 предположим, что  $w_n \rightarrow 0$  в  $\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$ . Тогда, очевидно, в силу слабой непрерывности  $\mathcal{P}_0(w)$

$$\mathcal{P}_0(w_n) \rightarrow 0. \quad (12.44)$$

Далее, поскольку  $w_{n\alpha^i \alpha^j} \rightarrow 0$  в  $L_{2\Omega}$ , а  $w_{n\alpha^i} \rightharpoonup 0$  в  $L_{2\Omega}$ , то

$$\mathcal{P}_1(w_n) \rightarrow 0 \quad (12.45)$$

и из  $\mathcal{P}_1(w_n) \rightarrow 0$  вытекает  $\mathcal{P}_2(w_{n\alpha^i \alpha^j}) \rightarrow 0$ , и в силу положительной определенности  $D_{\alpha}^{ijkl}$  получаем

$$\|w_{n\alpha^k \alpha^l}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (12.46)$$

Таким образом, условие 2 (10.35) выполнено, и этим доказано неравенство (12.39). ■

Теорема 12.2. Пространства  $H_\kappa$  и соответствующие пространства  $\overset{0}{W}_{2\kappa\Omega}^{(2)}$  эквивалентны и содержат одни и те же элементы.

Для доказательства заметим, что из (12.39) следует, что  $H_\kappa \subset \overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}$ . Далее, после этого учтем очевидное неравенство

$$\|w\|_{H_\kappa} \leq M \|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}}. \quad (12.47)$$

Неравенства (12.39), (12.47) показывают, что нормы  $\|w\|_{H_\kappa}$  и  $\|w\|_{\overset{0}{W}_{2\Omega\kappa}^{(2)}}$  эквивалентны. Поскольку же оба эти пространства обра-

зованы замыканием одного и того же множества  $\overset{0}{C}_{\kappa\Omega}^2$  в эквивалентных нормах, то они совпадают. Теорема 12.2 доказана.

Теорема 12.2 устанавливает весьма важный для дальнейшего факт: для всех элементов  $w \in H_\kappa$  справедлива теорема вложения 10.7. ■

Теорема 12.3. Пусть  $w \in H_*$ . В этом случае

$$1) \quad w_{\alpha^i \alpha^j}, \nabla_{ij} w \in L_{2\Omega} \text{ и } \|w_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_{ij} w\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|w\|_{H_*}; \quad (12.48)$$

$$2) \quad w_{\alpha^i} \in L_{q\Omega} \text{ при любом } q \geq 1 \text{ и } \|w_{\alpha^i}\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|w\|_{H_*}; \quad (12.49)$$

$$3) \quad w_{\alpha^j} \in L_{qd} \text{ при любом } q \geq 1 \text{ и } \|w_{\alpha^j}\|_{L_{qd}} \leq m \|w\|_{H_*}. \quad (12.50)$$

Напомним читателю, что здесь  $d$  — кусочно-гладкий контур класса  $C_d^1$ , который частями может выходить на границу  $\Gamma$ .

$$4) \quad w \in H_{\Omega}^{0,\lambda^1} \text{ и } \|w\|_{H_{\Omega}^{0,\lambda^1}} \leq m \|w\|_{H_*}. \quad (12.51)$$

Таким образом,  $H_*$  вложено в  $W_{2\Omega}^{(2)}, W_{2\Omega}^{(1)}, L_{qd}, H_{\Omega}^{0,\lambda^1}$ . При этом оператор вложения  $H_*$  в  $W_{2\Omega}^{(1)}, L_{qd}, H_{\Omega}^{0,\lambda^1}$  усиленно непрерывен и, значит,

$$\text{из } f_n \rightarrow f_0 \text{ в } H_* \text{ следует } f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } W_{q\Omega}^{(1)}, f_n \Rightarrow f_0 \text{ в } L_{qd}, f_1 \Rightarrow f_0 \text{ в } H_{\Omega}^{0,\lambda^1}, q \geq 1. \quad (12.52)$$

12.4. Пусть  $C_{\Omega}^{00}$  — множество функций  $\Psi$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$\Psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \Psi}{\partial m} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (12.53)$$

Зададим на  $C_{\Omega}^{00}$  скалярное произведение

$$(\Psi_1, \Psi_2)_{H_0} = \int_{\Omega} C_{ijkl,p} C^{ik} C^{jm} C^{hs} C^{lt} \nabla_{\lambda\mu} \Psi_1 \cdot \nabla_t \Psi_2 d\Omega, \quad (12.54)$$

которому соответствует

$$\|\Psi\|_{H_0}^2 = \int_{\Omega} C_{ijkl,p} C^{ik} C^{jm} C^{hs} C^{lt} \nabla_{\lambda\mu} \Psi \nabla_{st} \Psi d\Omega, \quad (12.55)$$

где  $C_{ijkl,p}$  — упруго-геометрические постоянные, определяемые соотношением (4.26),  $C^{70}$  — составляющие дискриминантного тензора поверхности  $S$ .

Легко видеть, что в силу условия (4.28) регулярности материала квадратичная форма относительно  $\nabla_{\lambda\mu} \Psi$  в подынтегральном выражении (12.55) положительно определена. Действительно, в силу (7.1) имеем

$$\|\Psi\|_{H_0}^2 = \int_{\Omega} C_{ijkl,p} T^{ij} T^{kl} d\Omega, \quad (12.56)$$

и тензор  $C_{ijkl,p}$  положительно определен, а (7.1) тривиальным образом обратимо. Замыкание  $C_{\Omega}^{00}$  в норме (12.55) назовем  $H_{9\Omega}$ . Оче-

видно, имеем неравенства

$$m \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (\nabla_{ij}\Psi)^2 d\Omega \leq \| \Psi \|_{H_9}^2 \leq M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (\nabla_{ij}\Psi)^2 d\Omega. \quad (12.57)$$

При граничных условиях (12.53) в формулах (12.4), (12.5) контурные интегралы пропадают, и мы имеем

$$\| w \|_{H_1}^2 = \int_{\Omega} D_n^{ijkl} (\alpha^1, \alpha^2) \gamma_{ij}^1(w) \gamma_{kl}^1(\tilde{w}) d\Omega. \quad (12.58)$$

В силу положительной определенности  $D_n^{ijkl}$  имеем

$$m \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (\nabla_{ij}w)^2 d\Omega \leq \| w \|_{H_1}^2 \leq M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (\nabla_{ij}w)^2 d\Omega. \quad (12.59)$$

Из (12.58), (12.59) вытекает эквивалентность  $H_1$  и  $H_9$  в том случае, когда  $\Gamma_1 = \Gamma$ . В силу этой эквивалентности, если  $\Psi \in H_9$ , то (12.53) для  $\Psi$  выполняется поточечно, для  $\partial\Psi/\partial t$  — почти всюду на  $\Gamma$ , для всех  $\Psi \in H_9$  справедлива теорема вложения 10.5. ■

12.5. Для анализа краевых задач в перемещениях (6.34), (6.35) и соответствующих граничных условий нам потребуются пространства вектор-функций  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$ , у которых  $w \in H_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, 4$ ; вектор  $\omega(w_1, w_2) \in H_t$ ,  $t = 5, 6, 7, 8$ . Скалярное произведение в этих пространствах определим следующим образом. Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  имеют составляющие  $\omega_1(w_{11}, w_{12}), \omega_2(w_{21}, w_{22}), w_1, w_2$ , и тогда

$$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)_{H_{\kappa t}} = (w_1 \cdot w_2)_{H_\kappa} + (\omega_1 \cdot \omega_2)_{H_t}. \quad (12.60)$$

Для анализа задач в усилиях (7.65), (7.77) и соответствующих граничных условий нам потребуются пространства пар функций  $(\Psi, w)$ , где  $\Psi \in H_9$ ,  $w \in H_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, 3, 4$ ) со скалярным произведением

$$[(w_1, \Psi_1) \cdot (w_2, \Psi_2)]_{H_{\kappa 9}} = (w_1 \cdot w_2)_{H_\kappa} + (\Psi_1 \cdot \Psi_2)_{H_9}. \quad (12.61)$$

Свойства элементов пространств  $H_{\kappa t}$ ,  $H_{\kappa 9}$  ( $\kappa = 1, 2, 3, 4$ ;  $t = 5, 6, 7, 8$ ) непосредственно определяются свойствами элементов из  $H_\kappa$ ,  $H_t$ ,  $H_9$ . ■

12.6. Ниже нам потребуются некоторые факты относительно возможности продолжения функции  $w$  с границы  $\gamma$  внутрь  $\Omega$ .

Лемма 12.9. Пусть некоторый кусок  $\tilde{\Gamma}$  контура  $\Gamma$  принадлежит  $C_{\tilde{\Gamma}}^2$ , а на куске  $\tilde{\Gamma}$ , целиком лежащем внутри  $\tilde{\Gamma}$ , задана функция  $w \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(3/2)}$ . В этом случае  $w$  можно продолжить с  $\tilde{\Gamma}$  на  $\tilde{\Gamma}$  так, чтобы  $w$  было бы вне  $\tilde{\Gamma}$  равным нулю,  $w \in W_{2\tilde{\Gamma}}^{(3/2)}$  и, кроме того,

$$\| w \|_{W_{2\tilde{\Gamma}}^{(3/2)}} \leq m \| w \|_{W_{2\tilde{\Gamma}}^{(3/2)}}. \quad (12.62)$$

Доказательство леммы 12.9 проводится так же, как и леммы 11.7, с той лишь разницей, что вместо (11.69) используется соотношение

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s f(\sigma) \sqrt{s-\sigma} d\sigma, \quad f(\sigma) \in L_{2\Gamma}. \quad (12.63)$$

Лемма 12.10. Пусть  $\Gamma$  есть контур класса  $C_\Gamma^1$  и, кроме того, существует кусок  $\tilde{\Gamma} \in C_\Gamma^4$  (быть может, и несвязный), содержащий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ . В этом случае для существования функции  $\overset{0}{w} \in W_{2\Omega}^{(2)}$  такой, что

$$\overset{0}{w}|_{\Gamma_1+\Gamma_2} = \tilde{w}, \quad \overset{0}{w}_4|_{\Gamma_1+\Gamma_2} = \frac{\partial \tilde{w}_4}{\partial m}|_{\Gamma_1+\Gamma_3} = \tilde{w}_4, \quad (12.64)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{w}|_{\Gamma_1} \in W_{2\Gamma_1}^{(3/2)}, \quad \tilde{w}_4|_{\Gamma_1} \in W_{2\Gamma_1}^{(1/2)}, \quad \tilde{w}|_{\Gamma_2} \in W_{2\Gamma_2}^{(3/2)}, \quad \tilde{w}_4|_{\Gamma_3} \in W_{2\Gamma_3}^{(1/2)}. \quad (12.65)$$

В случае, если  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (или  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ ) имеют общую граничную точку, то соответственно должно быть

$$\tilde{w}|_{\Gamma_1+\Gamma_2} \in W_{2, \Gamma_1+\Gamma_2}^{(3/2)} \quad (\tilde{w}_4|_{\Gamma_1+\Gamma_3} \in W_{2, \Gamma_1+\Gamma_3}^{(1/2)}). \quad (12.66)$$

При этом  $\overset{0}{w}$  может быть построено всегда таким образом, что будет выполняться неравенство

$$\|\overset{0}{w}\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \leq m \left( \|\tilde{w}\|_{W_{2, \Gamma_1+\Gamma_2}^{(3/2)}} + \|\tilde{w}_4\|_{W_{2, \Gamma_1+\Gamma_3}^{(1/2)}} \right) \quad (12.67)$$

с некоторой постоянной  $m$ .

Обоснование здесь приводиться не будет. Граничные задания  $\tilde{w}|_{\Gamma_1+\Gamma_2}$ ,  $\tilde{w}_4|_{\Gamma_1+\Gamma_3}$ , удовлетворяющие условиям (12.65), (12.66) леммы 12.10, ниже будем называть допустимыми.

**12.7.** В данном разделе введем некоторые функциональные пространства, с помощью которых охарактеризуем действующие на оболочку поперечные нагрузки  $R^3, \tilde{M}^m, \tilde{Q}$ . Рассмотрим агрегат

$$\int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2+\Gamma_4} \tilde{M}^m w_4 ds + \int_{\Gamma_3+\Gamma_4} \tilde{Q} w ds \quad (12.68)$$

и множество  $\bar{H}_*$  таких поперечных комплексов  $[R^3, \tilde{M}^m, \tilde{Q}]$ , что (12.68) есть ограниченный в  $H_*$  функционал. Очевидно, для того чтобы (12.68) был ограниченным функционалом в  $H_*$ , необходимо

и достаточно существование такой постоянной  $m$ , что

$$\sup \frac{\left| \int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \widetilde{M}^m w_4 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \widetilde{Q} w ds \right|}{\|w\|_{H_{\kappa}}} = m < \infty \quad (12.69)$$

для всех  $w \in H_{\kappa}$ . Из (12.69) вытекает существование такого элемента  $w_{\Pi} \in H_{\kappa}$ , что

$$\int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \widetilde{M}^m w_4 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \widetilde{Q} w ds = (w_{\Pi} \cdot w)_{H_{\kappa}}. \quad (12.70)$$

Соотношение (12.70) дает возможность превратить  $\overline{H}_{\kappa}$  в гильбертово пространство. Для этого предположим, что  $[R^3, \widetilde{M}_i^m, \widetilde{Q}_i]$ ,  $i = 1, 2$ , — два элемента  $\overline{H}_{\kappa}$ , и примем

$$([R_1^3, \widetilde{M}_1^m, \widetilde{Q}_1] \cdot [R_2^3, \widetilde{M}_2^m, \widetilde{Q}_2])_{\overline{H}_{\kappa}} = (w_{\Pi 1} \cdot w_{\Pi 2})_{H_{\kappa}}, \quad (12.74)$$

где  $w_{\Pi i}$  — элементы  $H_{\kappa}$ , соответствующие  $[R_i^3, \widetilde{M}_i^m, \widetilde{Q}_i]$ . Из (12.74) имеем

$$\|[R^3, \widetilde{M}^m, \widetilde{Q}]\|_{\overline{H}_{\kappa}} = \|w_{\Pi}\|_{H_{\kappa}}. \quad (12.72)$$

При этом в (12.69) в левой части вместо  $\sup$  можно поставить  $\max$ , а вместо  $m$  в правой части  $\|w_{\Pi}\|_{H_{\kappa}}$ . Отсюда вытекает, что если  $w_{\Pi} = 0$ , то и  $\|R^3, \widetilde{M}^m, \widetilde{Q}\|_{\overline{H}_{\kappa}} = 0$ , т. е.  $R^3 \equiv \widetilde{M}^m \equiv \widetilde{Q} \equiv 0$ .

12.8. Пространства  $\overline{H}_i$  и  $\overline{H}_{\kappa}$  позволяют для всего нагруженного комплекса  $R^s, \widetilde{T}^r, \widetilde{T}^m, R^3, \widetilde{M}^m, \widetilde{Q}$  ввести общее пространство Гильберта посредством соотношений

$$([R^s, \widetilde{T}_1^r, \widetilde{T}_1^m, R_1^3, \widetilde{M}_1^m, \widetilde{Q}_1] \cdot [R_2^s, \widetilde{T}_2^r, \widetilde{T}_2^m, R_2^3, \widetilde{M}_2^m, \widetilde{Q}_2])_{\overline{H}_{i\kappa}} = (w_{\Pi 1} \cdot w_{\Pi 2})_{H_{\kappa}} + (\omega_{\Pi 1} \cdot \omega_{\Pi 2})_{H_i}. \quad (12.73)$$

Нагрузки, принадлежащие  $\overline{H}_{i\kappa}$ , в дальнейшем будем называть допустимыми.

12.9. Введем нагруженный комплекс  $[\widetilde{T}_q^{ij}, R^3, \widetilde{M}^m]$  и рассмотрим агрегат

$$\int_{\Omega} (\widetilde{T}_q^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2} \widetilde{M}^m \varphi_4 ds, \quad \varphi_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial m}. \quad (12.74)$$

Пусть комплекс  $[\widetilde{T}^{ij}, R^3, \widetilde{M}^m]$  таков, что (12.74) есть линейный и ограниченный функционал в  $H_0$ . Тогда

$$\int_{\Omega} (\widetilde{T}^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2} \widetilde{M}^m \varphi_4 ds = (w_{\Pi} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}. \quad (12.75)$$

Можно ввести на комплексах  $[\tilde{T}_q^{ij}, R^3, \tilde{M}^m]$  скалярное произведение

$$([\tilde{T}_{q1}^{ij}, R_1^3, \tilde{M}_1^m] \cdot [\tilde{T}_{q2}^{ij}, R_2^3, \tilde{M}_2^m])_{\bar{H}_\kappa} = (w_{\Pi_1} \cdot w_{\Pi_2})_{H_\kappa}, \quad (12.76)$$

превратив его в гильбертово пространство  $\bar{H}_\kappa$ .

**12.10.** Используя (11.84), (12.5), (12.70), можно преобразовать выражение (6.44) для  $\mathcal{J}_{i\kappa}$ , придав этой формуле вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{i\kappa} = & \frac{1}{2} \left( \|w\|_{H_\kappa}^2 + \int_{\Omega} D_p^{ijk} \varepsilon_{ij}^0(\omega) \varepsilon_{kl}^0(\omega) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{jj} w_i w_j |_{i,j=1,2} ds \right) - (w_{\Pi} \cdot w)_{H_\kappa} - (\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_t}. \end{aligned} \quad (12.77)$$

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

**§ 13. Обобщенная постановка краевых задач в перемещениях. Сведение к операторным уравнениям. Физическое содержание обобщенных решений**

**13.1.** Будем предполагать выполненными следующие условия:

1)  $S \in C^2_\Omega$  является регулярной поверхностью;  
2)  $\Omega$  — допустимая область, т. е. соболевская область, одновременно принадлежащая классам (2, 1, 2) и (2, 2, 2). Достаточные условия для этого даны в § 10;

3)  $\Gamma$  — КГК класса  $C^1_\Gamma$ ;

4) материал оболочки регулярен, т. е. выполнены условия (4.4) и  $D_{p,i}^{ijkl}$  кусочно-непрерывны в  $\Omega$ ;

5) сочетание тангенциальных граничных условий на  $\Gamma$  и коэффициенты упругости опор должны быть таковы, что возможно образование одного из пространств  $H_t$ . Иными словами, должны выполняться условия леммы 11.4. Коэффициенты упругости опор  $k_r^{rr}, k_r^{mn}, k_r^{ij}$  кусочно-непрерывны соответственно на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$ ;

6) сочетание изгибных граничных условий на  $\Gamma$  и коэффициенты упругости опор таковы, что возможно образование одного из пространств  $H_n$ , т. е. должны выполняться условия лемм 12.3—12.7. Коэффициенты упругости опор  $k_n^{44}, k_n^{33}, k_n^{ij}$  соответственно на  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  должны быть кусочно-непрерывны;  $\Gamma_1 + \Gamma_2 > 0$ ;

7) нагрузки  $R^s, T^r, T^m, R^3, M^m, Q$  являются допустимыми, что означает

$$[R^s, T^r, T^m] \in \bar{H}_t, [R^3, M^m, Q] \in \bar{H}_n, [R^s, T^r, T^m, R^3, M^m, Q] \in \bar{H}_{t_n}.$$

Пространства  $\bar{H}_t, \bar{H}_n, \bar{H}_{t_n}$  введены в § 11, 12;

8) перемещения  $\tilde{w} \equiv \tilde{w}_3, \tilde{w}_4, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_m, \tilde{w}_r$  являются допустимыми, что означает существование вектор-функции  $a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (w_1, w_2, w) \in W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(2)}$ , удовлетворяющей граничным условиям

$$w \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \tilde{w}_3, \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_3} = w_4 \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_3} = \tilde{w}_4, \quad (13.2)$$

$$w_m \Big|_{\Gamma_5 + \Gamma_6} = \tilde{w}_m, \quad (13.3)$$

$$w_r \Big|_{\Gamma_5 + \Gamma_7} = \tilde{w}_r. \quad \blacksquare \quad (13.4)$$

**13.2.** Классическая постановка краевых задач (6.34), (6.35) и (6.1)–(6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.13), (6.20)–(6.23), (6.28)–(6.31) предполагает, что решение  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$  обладает таким количеством непрерывных производных, которое определяется порядком системы. В нашем случае вектор-функция  $\omega(w_1, w_2)$  должна обладать непрерывными производными вплоть до второго порядка, а  $w$  — непрерывными производными четвертого порядка. Как сами уравнения, так и граничные условия должны выполняться поточечно. На границе исключением будут лишь точки смены типа граничных условий. Известно, что даже при бесконечной гладкости исходных данных в точках смены типа граничных условий имеется нерегулярность того или иного порядка.

К более детальному анализу условий существования классических решений мы вернемся в § 20. Здесь же отметим, что классическая постановка сопряжена со значительными требованиями к исходным данным задачи. Так, при этом необходимо требовать, чтобы  $S \in C_\Omega^3$ ,  $D_p^{ijkl} \in C_\Omega^1$ ,  $D_p^{ijkl} \in C_\Omega^2$ . Внешние нагрузки должны быть по меньшей мере непрерывными. Весьма жесткие требования приходится налагать и на контур  $\Gamma$ .

Легко видеть, что сами по себе основные соотношения упругости (4.24) содержат лишь производные первого порядка  $w_1, w_2$  и второго порядка  $w$ . Удвоение порядка производных происходит, как можно заметить, за счет того, что уравнения равновесия элемента записываются с помощью методов геометрической статики [36, 57], гл. I.

С выдающихся работ С. Л. Соболева в математическую физику вошло представление об обобщенной постановке краевых задач и обобщенных решениях. Возникнув на почве чисто математических соображений, связанных со стремлением расширить постановку задач, оно вместе с тем оказалось и весьма физичным. Вначале обобщенное решение для задач  $\mathbf{t}_k$  будет введено чисто математически, а потом будет дана механическая трактовка. ■

**Определение 13.1.** Обобщенным решением краевой задачи  $\mathbf{t}_k$  в перемещениях назовем вектор-функцию  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$ , у которой  $\omega(w_1, w_2) \in W_{2\Omega}^{(1)}$ ,  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , принимающую граничные значения (6.1)–(6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.12) и удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{H_{\mathbf{t}_k}} = & \int_{\Omega} \left[ (B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l}) D_p^{ijkl} \nabla_j \varphi_i + R^i \varphi_i + R^3 \varphi + \right. \\
 & + T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) \Big] d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \tilde{M}^m \varphi_4 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \tilde{Q} \varphi ds + \\
 & + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^\tau \varphi_\tau ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m \varphi_m ds, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial m} \Big|_{\Gamma_2 + \Gamma_4} = \varphi_4 \quad (13.5)
 \end{aligned}$$

для любой вектор-функции  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) \in H_{\mathbf{t}_k}$ .



Соотношение (13.5) может быть заменено двумя эквивалентными интегральными тождествами. Положим в (13.5)  $\varphi \equiv 0$ , это возможно, так как  $\varphi \equiv 0 \in H_t$ . В результате получаем

$$(\omega(w_1, w_2) \cdot \chi(\varphi_1, \varphi_2))_{H_t} = \int_{\Omega} \left[ (B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l}) D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j + R^i \varphi_i \right] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^r \varphi_r ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m \varphi_m ds. \quad (13.6)$$

Далее, положим в (13.5)  $\chi(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 0$ . В результате имеем

$$(w \cdot \varphi)_{H_x} = \int_{\Omega} [T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) + R^3 \varphi] d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \tilde{M}^m \varphi_3 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \tilde{Q} \varphi ds. \quad (13.7)$$

**13.3.** Рассмотрим вектор  $\omega_{\Pi}(w_{1\Pi}, w_{2\Pi}) \in H_t$ , определяемый соотношением

$$(\omega_{\Pi} \cdot \chi)_{H_t} = \int_{\Omega} R^i \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^r \varphi_r ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m \varphi_m ds. \quad (13.8)$$

В силу условия 5 п. 13.1 справа в (13.8) мы имеем линейный функционал по  $\chi$ , и в силу теоремы Рисса существует элемент  $\omega_{\Pi}$ , реализующий этот функционал. Пусть, далее,  $\overset{0}{\omega}(w_1, w_2)$  дается условием 6 п. 13.1, причем выполнены соотношения (13.3), (13.4) и, кроме того,  $\overset{0}{\omega} \in W_{2\Omega}^{(1)}$ . Наконец, введем вектор-функцию

$$\omega^* = \omega_{\Pi} + \overset{0}{\omega} \quad (13.9)$$

и совершим замену

$$\omega \rightarrow \omega^* + \omega, \quad (13.10)$$

оставив для новой неизвестной вектор-функции то же обозначение  $\omega$ , однако в правой части (13.10)  $\omega$  теперь уже принадлежит  $H_t$ . Рассмотрим теперь функцию  $w_{\Pi} \in H_x$ , определяемую соотношением

$$(w_{\Pi} \cdot \varphi)_{H_x} = \int_{\Omega} R^3 \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \tilde{M}^m \varphi_3 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \tilde{Q} \varphi ds. \quad (13.11)$$

Существование  $w_{\Pi}$  вытекает из теоремы Рисса и из условий 5 п. 13.1.

Пусть, далее,  $w \in W_2^{(2)}$  дается условием 6 п. 13.1, причем выполнены соотношения (13.1), (13.2). Наконец, введем функцию

$$w^* = w_{\Pi} + \overset{0}{w} \quad (13.12)$$

и совершим замену

$$w \Rightarrow w^* + w, \quad (13.13)$$

оставив для новой переменной  $w$  старое обозначение.

Подставив (13.10), (13.12) в (13.5)–(13.7), будем иметь

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{H_{t\kappa}} = & -(\overset{0}{\mathbf{a}} \cdot \overset{0}{\mathbf{b}})_{H_{t\kappa}} + \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (w_{\alpha^k} + w_{\alpha^k}^*) (w_{\alpha^l} + w_{\alpha^l}^*) \right] D_{\mathbf{p}}^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi - (w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}] d\Omega \quad (13.14)
 \end{aligned}$$

и соответственно

$$\begin{aligned}
 (\omega(w_1, w_2) \cdot \chi(\varphi_1, \varphi_2))_{H_t} = & -(\overset{0}{\omega}(w_1, w_2) \cdot \overset{0}{\chi}(\varphi_1, \varphi_2))_{H_t} + \\
 & + \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha^k} (w + w^*)_{\alpha^l} \right] D_{\mathbf{p}}^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \quad (13.15)
 \end{aligned}$$

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = -(\overset{0}{w} \cdot \overset{0}{\varphi})_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi - (w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}] d\Omega. \quad (13.16)$$

Таким образом, обобщенное решение задачи  $t\kappa$  в нашем понимании дается соотношениями (13.10), (13.13), где  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w) \equiv \equiv \mathbf{a}(\omega, w)$  принадлежит  $H_{t\kappa}$  и удовлетворяет интегральным тождествам (13.14)–(13.16) для любой вектор-функции  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) \equiv \equiv H_{t\kappa}$ . ■

13.4. Анализ приведенного определения обобщенного решения начнем с доказательства его корректности.

Лемма 13.1. Пусть выполнены все условия 1–8 п. 13.1. В этом случае, если  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$ ,  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) \in H_{t\kappa}$ , то все члены в правых частях (13.5)–(13.7), (13.14)–(13.16) имеют смысл. При этом правые части (13.5)–(13.7), (13.14)–(13.16) суть линейные ограниченные функционалы соответственно в  $H_t$ ,  $H_{\kappa}$ ,  $H_{t\kappa}$  относительно  $\chi(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$  при фиксированной вектор-функции  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w) \in H_{t\kappa}$ .

Для доказательства леммы 13.1 учтем, что, в силу условий 7–8 п. 13.1 и теорем вложения 10.4, 11.3, имеем

$$w_{i\alpha^j}^*, \nabla_j w_i^* \in L_{2\Omega}, \quad w_i^* \in L_{q\Omega}, \quad \forall q \geq 1, \quad (13.17)$$

$$\|w_{i\alpha^j}^*\|_{L_{2\Omega}}, \quad \|\nabla_j w_i^*\|_{L_{2\Omega}}, \quad \|w_i^*\|_{L_{2\Omega}} \leq m \| \omega^* \|_{W_{2\Omega}^{(1)}}. \quad (13.18)$$

Кроме того,

$$w_{\alpha^i \alpha^j}^*, \nabla_j w^* \in L_{2\Omega}; \quad w_{\alpha^i}^* \in L_{q\Omega}, \quad \forall q \geq 1, \quad w^* \in H^{0, \lambda^1}, \quad \lambda^1 < 1 \quad (13.19)$$

причем

$$\|w_{\alpha^i \alpha^j}^*\|_{L_{2\Omega}}, \quad \|w_{\alpha^i}^*\|_{L_{q\Omega}}, \quad \|w^*\|_{H^{0, \lambda^1}} \leq m \|w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}, \quad (13.20)$$

и, далее,

$$w_{i\alpha j}, \varphi_{i\alpha j}; \nabla_j w_i, \nabla_j \varphi_i \in L_{2\Omega}; w_i, \varphi_i \in L_{q\Omega}, \forall q \geq 1,$$

причем

$$\|w_{i\alpha j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_j w_i\|_{L_{2\Omega}}, \|w_i\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|\mathfrak{a}\|_{H_t}, \quad m \|\mathfrak{a}\|_{H_{t\kappa}}, \quad (13.21)$$

$$\|\varphi_{i\alpha j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_j \varphi_i\|_{L_{2\Omega}}, \|\varphi_i\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|\chi\|_{H_t}, \quad m \|\mathfrak{b}\|_{H_{t\kappa}}, \quad (13.22)$$

$$w_{\alpha^i \alpha^j}, \nabla_{ij} w; \varphi_{\alpha^i \alpha^j}, \nabla_{ij} \varphi \in L_{2\Omega}, w_{\alpha^i}, \varphi_{\alpha^i} \in L_{q\bar{\Omega}}, \forall q \geq 1;$$

$$w, \varphi \in H_{\Omega}^{0,\lambda^1}; \lambda^1 < 1, \lambda^1 \text{ сколь угодно близко к } 1, \quad (13.23)$$

причем

$$\|w_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_{ij} w\|_{L_{2\Omega}}, \|w_{\alpha^i}\|_{L_{q\Omega}}, \|w\|_{H_{\Omega}^{0,\lambda^1}} \leq m \|w\|_{H_{\kappa}}, m \|\mathfrak{a}\|_{H_{t\kappa}}, \quad (13.24)$$

$$\|\varphi_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}}, \|\nabla_{ij} \varphi\|_{L_{2\Omega}}, \|\varphi_{\alpha^i}\|_{L_{q\Omega}}, \|\varphi\|_{H_{\Omega}^{0,\lambda^1}} \leq m \|\varphi\|_{H_{\kappa}}, m \|\mathfrak{b}\|_{H_{t\kappa}}. \quad (13.25)$$

Вначале установим утверждения леммы 13.1 в отношении (13.15) и рассмотрим последовательно два члена, стоящих в правой части этого соотношения. Из (13.20), (13.23) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha^k}(w + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijkl} \right\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ & \leq \|B_{kl} D_p^{ijkl}\|_{L_{2\Omega}} \|w + w^*\|_{L_{2\Omega}} + \\ & + \frac{1}{2} \|D_p^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} \|(w + w^*)_{\alpha^k}\|_{L_{4\Omega}} \|(w + w^*)_{\alpha^l}\|_{L_{4\Omega}} \leq \\ & \leq m \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}); \quad (13.26) \end{aligned}$$

$D_{p,u}^{ijkl}$  по условию кусочно-непрерывны и везде далее  $\|D_{p,u}^{ijkl}\|_{C_{\Omega}}$  означает  $\max |D_{p,u}^{ijkl}|$ . Далее, из (13.22) следует

$$\begin{aligned} \|\nabla_i \varphi_j\|_{L_{2\Omega}} &= \|\varphi_{i\alpha j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda}\|_{L_{2\Omega}} \leq \|\varphi_{i\alpha j}\|_{L_{2\Omega}} + \\ & + \|G_{ij}^{\lambda}\|_{C_{\Omega}} \|\varphi_{\lambda}\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|\chi\|_{H_t} \leq m \|\mathfrak{b}\|_{H_{t\kappa}}. \quad (13.27) \end{aligned}$$

Из (13.26), (13.27) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha^k}(w + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega \right| \leq \\ & \leq \left\| \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha^k}(w + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijkl} \right\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_i \varphi_j\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ & \leq m \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \|\chi\|_{H_t} \leq \\ & \leq m \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \|\mathfrak{b}\|_{H_{t\kappa}}. \quad (13.28) \end{aligned}$$

Из (13.28) вытекает

$$\begin{aligned} |(\overset{0}{\mathbf{w}} \cdot \chi)_{H_t}| + \left| \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha^k} (w + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijkl} V_i \varphi_j d\Omega \right| &\leq \\ &\leq m \left[ \|\overset{0}{\mathbf{w}}\|_{H_t} + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \right] \|\chi\|_{H_t} \leq \\ &\leq m \left[ \|\overset{0}{\mathbf{w}}\|_{H_t} + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \right] \|\mathbf{b}\|_{H_{t\kappa}}, \quad (13.29) \end{aligned}$$

откуда вытекает справедливость леммы 13.1 в отношении правой части (13.15). ■

Кроме того, если  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \in H_{t\kappa}$ , то, как это видно из (3.24),  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \in L_{2\Omega}$ , из (4.24) при этом вытекает, что  $T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \in L_{2\Omega}$ . Наконец, из (13.20), (13.24), (13.25)

$$\begin{aligned} \|B_{ij}\varphi - (w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} &\leq m \|B_{ij}\|_{C_{\Omega}} \|\varphi\|_{L_{2\Omega}} + \|(w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ &\leq m \|B_{ij}\|_{C_{\Omega}} \|\varphi\|_{L_{2\Omega}} + \|w + w^*\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi_{\alpha^j}\|_{L_{4\Omega}} \leq \\ &\leq m (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \|\varphi\|_{H_{\kappa}} \leq m (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \|\mathbf{b}\|_{H_{t\kappa}}. \quad (13.30) \end{aligned}$$

Из (13.16) и (13.30) для правой части (13.16) получаем

$$\left| -(\overset{0}{w} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} \right| \leq \|\overset{0}{w}\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \|\varphi\|_{H_{\kappa}}, \quad (13.31)$$

и для всей правой части из (13.30), (13.31) следует

$$\begin{aligned} \left| -(\overset{0}{w} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij}\varphi - (w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}] d\Omega \right| &\leq \\ &\leq \|\overset{0}{w}\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \|\varphi\|_{H_{\kappa}} + \|T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)\|_{L_{2\Omega}} \|B_{ij}\varphi - (w + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ &\leq m \left[ \|\overset{0}{w}\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} + \|T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)\|_{L_{2\Omega}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \right] \|\varphi\|_{H_{\kappa}} \leq \\ &\leq m \left[ \|\overset{0}{w}\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} + \|T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)\|_{L_{2\Omega}} (1 + \|w + w^*\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}) \right] \|\mathbf{b}\|_{H_{t\kappa}}. \quad (13.32) \end{aligned}$$

Соотношение (13.32) доказывает лемму 13.1 и в отношении правой части (13.16). Таким образом, лемма 13.1 доказана и в отношении правой части (13.14), т. е. полностью. ■

**13.5.** В данном разделе сведем краевые задачи  $t\kappa$  к некоторым операторным уравнениям в  $H_t, H_{\kappa}, H_{t\kappa}$ . Для этого рассмотрим интегральное тождество (13.14). В силу леммы 13.1 правая часть (13.14) есть линейный и ограниченный в  $H_{t\kappa}$  функционал относительно  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ . В силу теоремы Рисса должен существовать

элемент  $G_{tx} \in H_{tx}$ , который реализует этот функционал в виде скалярного произведения

$$- (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})_{H_{tx}} + \int_{\Omega} \left\{ \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j + \right. \\ \left. + T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi - (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}] \right\} d\Omega = (G_{tx} \cdot \mathbf{b})_{H_{tx}}. \quad (13.33)$$

При этом элемент  $G_{tx}$  будет, очевидно, зависеть от  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}^*$ ,  $\overset{0}{\mathbf{a}}$ . Сравнивая (13.33) и (13.14), получаем соотношение

$$\mathbf{a} = G_{tx}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \overset{0}{\mathbf{a}}), \quad (13.34)$$

которое и есть искомое нелинейное операторное уравнение (НОУ). НОУ (13.34) эквивалентно трем интегро-дифференциальным уравнениям, которые можно записать, введя соответствующие функции Грина. Очевидно, справедлива

Лемма 13.2. Для того чтобы вектор-функция  $\mathbf{a} \in H_{tx}$  была обобщенным решением задачи  $tx$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathbf{a}$  удовлетворяла (13.34).

Действительно, поскольку правая часть (13.15) есть линейный ограниченный в  $H_{tx}$  функционал относительно  $\chi$ , то существует, в силу теоремы Рисса, элемент  $\mathbf{K}_{tx} \in H_t$ , который реализует этот функционал в виде скалярного произведения

$$- (\overset{0}{\omega} \cdot \chi)_{H_t} + \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega = \\ = (\mathbf{K}_{tx} \cdot \chi)_{H_t}. \quad (13.35)$$

При этом, очевидно,  $\mathbf{K}_{tx}$  зависит от  $w$ ,  $w^*$ ,  $\overset{0}{\omega}$ . Сравнивая (13.15) и (13.35), получаем

$$\omega = \mathbf{K}_{tx}(w, w^*, \overset{0}{\omega}). \quad (13.36)$$

Наконец, поскольку в силу леммы 13.1 и правая часть (13.16) есть линейный функционал в  $H_x$  относительно  $\varphi$ , то по теореме Рисса должен существовать элемент  $G_{xx} \in H_x$  такой, что

$$- (\overset{0}{w} \cdot \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi - (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}] d\Omega = (G_{xx} \cdot \varphi)_{H_x}. \quad (13.37)$$

Сравнивая (13.16) и (13.37), получаем

$$w = G_{xx}(w, \overset{0}{\omega}, \mathbf{a}^*, w). \quad (13.38)$$

Из соотношения (13.37), определяющего  $G_{\text{жж}}$ , видно, что этот элемент зависит от  $a, a^*, w$  или от  $w, \omega, a^*, w$ . НОУ (13.36) и (13.38) образуют систему операторных уравнений, эквивалентную (13.34).

Лемма 13.3. Для того чтобы вектор-функция  $a(\omega, w)$  была обобщенным решением задачи  $t_{\text{ж}}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $w$  и  $\omega$  удовлетворяли НОУ (13.36), (13.38).

Этот результат можно толковать в том смысле, что обобщенное решение  $a(\omega, w)$  задачи  $t_{\text{ж}}$  лежит на некоторой гиперповерхности  $\Pi_1$  пространства  $H_{t_{\text{ж}}}$ , определяемой соотношением (13.36). Очевидно, если (13.36) подставить в (13.38), то получим операторное уравнение относительно  $w$ :

$$w = G_{\text{жж}}(w, K_{t_{\text{ж}}}(w, w^*, \omega), a^*, w) = G_{\text{жж}}(w, a^*, a). \quad \blacksquare \quad (13.39)$$

Сформулируем основной результат данного раздела.

Теорема 13.1. Для того чтобы вектор-функция  $a(w_1, w_2, w) \in H_{t_{\text{ж}}}$  была обобщенным решением задачи  $t_{\text{ж}}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $w$  было определено из НОУ (13.39), а  $\omega$  определялось соотношением (13.36). ■

13.6. Вернемся к анализу предложенного здесь способа введения обобщенного решения (13.5)–(13.7), корректность которого дается леммой 13.1. Введение обобщенных решений довольно затруднительно для нелинейных краевых задач. Дело в том, что основным критерием корректности расширения понятия решения является сохранение типичных ситуаций: однозначной разрешимости, фредгольмовости, нетеровости. Однако при переходе к нелинейным задачам сохранение фредгольмовости нетеровости невозможно. Критерий сохранения однозначности решений также не подходит, ибо в рассматриваемом круге задач однозначность далеко не всегда имеет место по природе вещей. Более того, наиболее интересные эффекты в нелинейной теории оболочек связаны именно с неединственностью решения. Поэтому наиболее рациональным является способ введения обобщенного решения, вытекающий из какого-либо механического принципа. Легко видеть, что (13.5)–(13.7) выражают принцип возможных перемещений Лагранжа для системы оболочка — внешние силы. При этом  $b(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$  суть возможные перемещения для системы, удовлетворяющие по самому построению всем однородным геометрическим условиям задачи. Важным является тот факт, что при наложении дополнительных условий гладкости на исходные данные задачи всякое обобщенное во введенном смысле решение будет и классическим. Вместе с тем обратим внимание читателя на то, что само определение 13.1 обобщенного решения требует выполнения минимальных условий гладкости исходных данных задачи. ■

§ 14. Некоторые свойства операторов  $K_{t\kappa}$ ,  $G_{\mu\kappa}$ 

14.1. Лемма 14.1. Операторы  $K_{t\kappa}$ ,  $G_{\mu\kappa}$  представимы в виде

$$K_{t\kappa}(w) = K_{t\kappa 0} + K_{t\kappa 1}(w) + K_{t\kappa 2}(w), \quad (14.1)$$

$$G_{\mu\kappa}(w) = G_{\mu\kappa 0} + G_{\mu\kappa 1}(w) + G_{\mu\kappa 2}(w) + G_{\mu\kappa 3}(w), \quad (14.2)$$

где  $K_{t\kappa\mu}$ ,  $G_{\mu\kappa\mu}$  — однородные операторы относительно  $w$  порядка  $\mu$ . При этом справедливы оценки

$$\|K_{t\kappa\mu}(w)\|_{H_t} \leq m \|w\|_{H_\kappa}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (14.3)$$

$$\|G_{\mu\kappa\mu}(w)\|_{H_\kappa} \leq m \|w\|_{H_\kappa}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (14.4)$$

Для доказательства (14.1) рассмотрим соотношение (13.35), определяющее  $K_{t\kappa}$ . Из (13.35) следует, что  $K_{t\kappa\mu}$  определяются соотношениями

$$(K_{t\kappa 0} \cdot \chi)_{H_t} = -(\omega^* \cdot \chi)_{H_t} + \int_{\Omega} \left( B_{kl} w^* - \frac{1}{2} w_{\alpha^k}^* w_{\alpha^l}^* \right) D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \quad (14.5)$$

$$(K_{t\kappa 1} \cdot \chi)_{H_t} = \int_{\Omega} \left[ B_{kl} w - \frac{1}{2} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \quad (14.6)$$

$$(K_{t\kappa 2} \cdot \chi)_{H_t} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega. \quad (14.7)$$

Оценки (14.3) непосредственно следуют из (13.20), (13.22). Рассмотрим, например, случай  $\mu = 1$ . Из (14.6), (13.30) следует

$$\begin{aligned} |(K_{t\kappa 1}(w) \cdot \chi)_{H_t}| &\leq \left| \int_{\Omega} D_p^{stkl} \left[ B_{kl} w - \frac{1}{2} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right] \nabla_s \varphi_t d\Omega \right| \leq \\ &\leq \|D_p^{stkl} [B_{kl} w - \frac{1}{2} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*)]\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_s \varphi_t\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ &\leq \left( \|D_p^{stkl} B_{kl}\|_{C_{\Omega}} 1_{st} \|w\|_{L_{2\Omega}} + \frac{1}{2} \|D_p^{stkl} w_{\alpha^l}^*\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha^k}\|_{L_{4\Omega}} 1_{st} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|D_p^{spkl} w_{\alpha^k}^*\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha^l}\|_{L_{4\Omega}} 1_{sp} \right) m \|\chi\|_{H_t} \leq \\ &\leq m \left( \|D_p^{spkl} B_{kl}\|_{C_{\Omega}} 1_{sp} + \|D_p^{spkl} w_{\alpha^l}^*\|_{L_{4\Omega}} 1_{spkl} \right) \|\chi\|_{H_t} \|w\|_{H_\kappa}. \quad (14.8) \end{aligned}$$

В (14.8) принята система обозначений

$$M^{spkl} 1_s = \sum_s M^{spkl}, \quad M^{spkl} 1_{sp} = \sum_{s,p} M^{spkl},$$

$$M^{spkl} 1_{spk} = \sum_{spk} M^{spkl}, \quad M^{spkl} 1_{spkl} = \sum_{s,p,k,l} M^{spkl}.$$

Из (14.8) в силу произвольности  $\chi \in H_t$  получаем

$$\|K_{t \times 1}(w)\|_{H_t} \leq m \left( \|D_p^{spkl} B_{kl}\|_{C_\Omega} 1_{s\rho} + \|D_p^{spkl} w_{\alpha l}^*\|_{L_{4\Omega}} 1_{s\rho k} \right) \|w\|_{H_\chi}. \quad \blacksquare \quad (14.9)$$

Аналогично из (14.7), (13.30) следует

$$\begin{aligned} (K_{t \times 2}(w) \cdot \chi)_{H_t} &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} D_p^{spkl} \nabla_s \varphi_\rho w_{\alpha k} w_{\alpha l} d\Omega \right| \leq \\ &\leq \|D_p^{spkl}\|_{C_\Omega} \|\nabla_\rho \varphi_s\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha k} w_{\alpha l}\|_{L_{2\Omega}} \leq \\ &\leq m \|D_p^{spkl}\|_{C_\Omega} 1_{\rho s} \|\chi\|_{H_t} \|w_{\alpha k}\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha l}\|_{L_{4\Omega}} \leq \\ &\leq m \|D_p^{spkl}\|_{C_\Omega} 1_{s\rho kl} \|\chi\|_{H_t} \|w\|_{H_\chi}^2. \quad (14.10) \end{aligned}$$

Из (14.10) в силу произвольности  $\chi$  вытекает (14.3) при  $\mu = 2$ . При  $\mu = 0$  (14.3) устанавливается совершенно аналогично. Таким образом, лемма 14.1 в отношении операторов  $K_\mu$  установлена.  $\blacksquare$

Из (13.36), (14.1) получаем

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_\mu = K_{t \times \mu}(w), \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (14.11)$$

и значит,

$$w_k = w_{k0} + w_{k1}(w) + w_{k2}(w), \quad k = 1, 2. \quad (14.12)$$

В (14.11), (14.12)  $\omega_k$ ,  $w_{k\mu}$  — однородные операторы от  $w$  порядка  $\mu$ . Наконец, из (14.11) — (14.12), (3.30), (3.32), (4.24) имеем

$$\varepsilon_{ij}^0(a) \rightarrow \varepsilon_{ij}^0(w) = \varepsilon_{ij0}^0 + \varepsilon_{ij1}^0 + \varepsilon_{ij2}^0, \quad (14.13)$$

$$T^{ij}(a) \rightarrow T^{ij}(w) = T_0^{ij} + T_1^{ij} + T_2^{ij}, \quad (14.14)$$

$$T^{ij}(a + a^*) = T^{ij}(a) + T^{ij}(a^*) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{\alpha k} w_{\alpha l}^* + w_{\alpha l} w_{\alpha k}^*), \quad (14.15)$$

где  $\varepsilon_{ij\mu}^0$ ,  $T_\mu^{ij}$  даются соотношениями

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij0}^0 &= w_{i0\alpha j} + w_{j0\alpha i} - 2G_i^h w_{h0} - 2B_{ij} w^* + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^*, \\ 2\varepsilon_{ij1}^0 &= w_{i1\alpha j} + w_{j1\alpha i} - 2G_{ij}^h w_{h1} - 2B_{ij} w + (w_{\alpha i}^* w_{\alpha j} + w_{\alpha j}^* w_{\alpha i}), \\ 2\varepsilon_{ij2}^0 &= w_{i2\alpha j} + w_{j2\alpha i} - 2G_{ij}^h w_{h2} + w_{\alpha i} w_{\alpha j}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Для  $T_\mu^{ij}$  из (4.24) получим

$$T_\mu^{ij} = D_p^{ijkl} \varepsilon_{kl\mu}^0. \quad (14.17)$$



Очевидно,  $\varepsilon_{ij\mu}^0$ ,  $T_\mu^{ij}$  представляют собой однородные относительно  $w$  операторы порядка  $\mu = 0, 1, 2$  и действующие из  $H_k$  в  $H_l$ . Отметим неравенства

$$\|\varepsilon_{ij\mu}^0\|_{L_{2\Omega}}, \quad \|T_\mu^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|w\|_{H_k}^\mu. \quad \blacksquare \quad (14.18)$$

**14.2.** Обратимся к операторам  $G_{kk\mu}$ . Для доказательства (14.2) учтем соотношения, их определяющие. Из (14.14) и (14.37) получаем, что следует принять

$$\begin{aligned} (G_{kk0}(w) \cdot \varphi)_{H_k} &= -(w^* \cdot \varphi)_{H_k} + \int_{\Omega} [T_0^{ij} + T^{ij}(a^*)] (B_{ij}\varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j}) d\Omega, \\ (G_{kk1}(w) \cdot \varphi)_{H_k} &= \int_{\Omega} \left\{ \left[ T_1^{ij} + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right] (B_{ij}\varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - [T_0^{ij} + T^{ij}(a^*)] w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} \right\} d\Omega, \quad (14.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (G_{kk2}(w) \cdot \varphi)_{H_k} &= \int_{\Omega} \left\{ \left[ T_2^{ij} (B_{ij}\varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[ T_1^{ij} + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right] w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} \right\} d\Omega, \quad (14.20) \end{aligned}$$

$$(G_{kk3}(w) \cdot \varphi)_{H_k} = - \int_{\Omega} T_2^{ij} w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} d\Omega. \quad \blacksquare \quad (14.21)$$

Легко видеть, что правые части в (14.19)–(14.21) суть линейные функционалы относительно  $\varphi$  в  $H_k$ , и поэтому  $G_{kk\mu}$  определяются по теореме Рисса. Легко также видеть, что

$$G_{kk} = \sum_{\mu=0}^3 G_{kk\mu}, \quad (14.22)$$

и остается доказать (14.4). Приведем вспомогательные неравенства. Из (13.19), (13.20), (13.23)–(13.25) имеем

$$\begin{aligned} \|w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^*\|_{L_{2\Omega}} &\leq \|w_{\alpha^k}\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha^l}^*\|_{L_{4\Omega}} \leq m \|w\|_{H_k}, \\ \|w_{\alpha^k} \varphi_{\alpha^l}\|_{L_{2\Omega}} &\leq \|w_{\alpha^k}\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi_{\alpha^l}\|_{L_{4\Omega}} \leq m \|w\|_{H_k} \|\varphi\|_{H_k}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Приведем, например, оценку для  $G_{kk1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left\| T_1^{ij} + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right\|_{L_{2\Omega}} &\leq \|T_1^{ij}\|_{L_{2\Omega}} + \\ &+ \frac{1}{2} \|D_p^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} (\|w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^*\|_{L_{2\Omega}} + \|w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*\|_{L_{2\Omega}}) \leq m \|w\|_{H_k}. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Неравенство (14.24) вытекает из (14.18), (14.23). Из (14.19)

получаем

$$\begin{aligned} |(G_{\kappa\kappa 1}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| &\leq \\ &\leq \left\| T_1^{ij} + \frac{1}{2} D_P^{ijkl} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right\|_{L_2\Omega} \times \\ &\times \left\| B_{ij} \varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j} \right\|_{L_2\Omega} + \left\| T_0^{ij} + T^{ij}(a^*) \right\|_{L_2\Omega} \left\| w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} \right\|_{L_2\Omega}, \quad (14.25) \end{aligned}$$

и используя (14.23), (14.24) и (13.28) при  $w^* \equiv 0$ , будем из (14.25) иметь

$$|(G_{\kappa\kappa 1}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| \leq m \|w\|_{H_\kappa} \|\varphi\|_{H_\kappa}. \quad (14.26)$$

В силу произвольности  $\varphi$  из (14.26) вытекает (14.2) при  $\mu = 1$ .  
Для  $G_{\kappa\kappa 2}(w)$  из (14.20) следует

$$\begin{aligned} |(G_{\kappa\kappa 2}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| &\leq \left\| T_2^{ij} \right\|_{L_2\Omega} \left\| B_{ij} \varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j} \right\|_{L_2\Omega} + \\ &+ \left\| T_1^{ij} + \frac{1}{2} D_P^{ijkl} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right\|_{L_2\Omega} \left\| w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} \right\|_{L_2\Omega}. \quad (14.27) \end{aligned}$$

Из (14.18) при  $\mu = 2$ , (13.28) при  $w \equiv 0$ , (14.23), (14.24), (14.27) получаем

$$|(G_{\kappa\kappa 2}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| \leq m \|\varphi\|_{H_\kappa} \|w\|_{H_\kappa}^2, \quad (14.28)$$

и (14.4) доказано при  $\mu = 2$ .

Накопец, для  $G_{\kappa\kappa 3}$  из (14.21) следует

$$|(G_{\kappa\kappa 3}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| \leq \left\| T_2^{ij} \right\|_{L_2\Omega} \|w_{\alpha^i}\|_{L_4\Omega} \|\varphi_{\alpha^j}\|_{L_4\Omega}. \quad (14.29)$$

Из (14.18) при  $\mu = 3$  и из (13.23) — (13.25) вытекает

$$|(G_{\kappa\kappa 3}(w) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| \leq m \|w\|_{H_\kappa}^3 \|\varphi\|_{H_\kappa}. \quad (14.30)$$

В силу произвольности  $\varphi$  из (14.30) вытекает (14.4) при  $\mu = 3$ .  
Лемма 14.1 доказана полностью. ■

**14.3. Теорема 14.1.** Каждый из операторов  $K_{t\kappa}$ ,  $K_{t\kappa n}$  действует из  $H_\kappa$  в  $H_t$  усиленно непрерывно.

Для доказательства учтем, что в силу усиленной непрерывности оператора вложения  $H_t$  в  $C_\Omega$  и  $W_{q\Omega}^{(1)}$  (теорема 12.3, соотношение (12.52)) из  $w_n \rightarrow w_0$  в  $H_\kappa$  имеют место соотношения

$$w_n \Rightarrow w_0 \quad \text{в } L_2\Omega, \quad w_{n\alpha^k} \Rightarrow w_{0\alpha^k} \quad \text{в } L_{q\Omega} \quad (14.31)$$

при любом  $q \geq 1$ . Из (14.6) легко устанавливаем, что при этом

$$\begin{aligned} ((K_{t\kappa 1}(w) - K_{t\kappa 1}(w_n)) \cdot \chi)_{H_t} &= \int_\Omega \left[ B_{kl} (w - w_n) - \frac{1}{2} w_{\alpha^l}^* (w_{\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} w_{\alpha^k}^* (w_{\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) \right] D_P^{ijkl} \nabla_i \varphi_j \, d\Omega, \quad (14.32) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |((K_{tk1}(w) - K_{tk1}(w_n)) \cdot \chi)_{H_t}| \leq m \left\| B_{kl}(w - w_n) - \frac{1}{2} w_{\alpha^k}^* (w_{\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} w_{\alpha^k}^* (w_{\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) \right\|_{L_2\Omega} \|D_p^{ijkl}\|_{C\Omega} 1_{ij} \|\chi\|_{H_t}. \quad (14.33) \end{aligned}$$

При выводе (14.33) использовалось неравенство (13.27).

Из (14.31), (14.33) вытекает

$$|((K_{tk1}(w) - K_{tk1}(w_n)) \cdot \chi)_{H_t}| \leq \varepsilon_n \|\chi\|_{H_t} \quad (14.34)$$

и отсюда в силу произвольности  $\chi$

$$\|K_{tk1}(w) - K_{tk1}(w_n)\|_{H_t} \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14.35)$$

Усиленная непрерывность  $K_{tk1}(w)$  установлена.

Для  $K_{tk2}$  из (14.7) имеем

$$\begin{aligned} |((K_{tk2}(w) - K_{tk2}(w_n)) \cdot \chi)_{H_t}| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} (w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} - w_{n\alpha^k} w_{n\alpha^l}) D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega \right| \leq \\ \leq m \|w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} - w_{n\alpha^k} w_{n\alpha^l}\|_{L_2\Omega} \|\chi\|_{H_t}. \quad (14.36) \end{aligned}$$

В силу (14.31) и произвольности  $\chi$  из (14.36) получаем

$$\|K_{tk2}(w) - K_{tk2}(w_n)\|_{H_t} \leq \varepsilon_n^1, \quad \varepsilon_n^1 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (14.37)$$

и усиленная непрерывность  $K_{tk2}(w)$  установлена, а вместе установлена и усиленная непрерывность  $K_{tk}(w)$ . ■

Рассмотрим теперь  $T_{\mu}^{ij}$ , определяемые (14.13)–(14.17). Покажем, что из  $w_n \rightarrow w_0$  следует

$$T_{\mu}^{ij}(w_n) \Rightarrow T_{\mu}^{ij}(w_0) \text{ в } L_2\Omega. \quad (14.38)$$

Для доказательства учтем, что в силу теоремы 14.1 мы имеем

$$K_{t\mu}(w_n) \Rightarrow K_{t\mu}(w_0) \text{ в } H_t. \quad (14.39)$$

Если учесть еще и (14.30), (14.26), (14.28), то из (14.16) получим

$$\varepsilon_{ij\mu}^0(w_n) \Rightarrow \varepsilon_{ij\mu}^0(w_0) \text{ в } L_2\Omega, \quad (14.40)$$

из (14.17), (14.40) вытекает (14.38). ■

**14.4. Теорема 14.2.** Каждый из операторов  $G_{t\mu}(w)$  является усиленно непрерывным.

Для доказательства заметим, что из (14.19)

$$\begin{aligned} |((G_{\mu k1}(w_0) - G_{\mu k1}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_{\mu}}| \leq \\ \leq \left\| T_1^{ij}(w_0) - T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} \left[ w_{\alpha^l}^* (w_{0\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) + \right. \right. \\ \left. \left. + w_{\alpha^k}^* (w_{0\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) \right] \right\|_{L_2\Omega} \|B_{ij}\varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j}\|_{L_2\Omega} + \\ + \|T_0^{ij} + T^{ij}(a^*)\|_{L_2\Omega} \|\varphi_{\alpha^j}\|_{L_4\Omega} \|w_{0\alpha^i} - w_{n\alpha^i}\|_{L_4\Omega}. \quad (14.41) \end{aligned}$$

Из (14.31), (14.38), (14.41) и (13.28) при  $w = 0$  вытекает, что если  $w_n \rightarrow w_0$  в  $H_1$ , то

$$|((G_{\kappa\kappa 1}(w_0) - G_{\kappa\kappa 1}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_\kappa}| \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_\kappa}, \quad (14.42)$$

откуда получаем в силу произвольности  $\varphi$

$$G_{\kappa\kappa 1}(w_n) \Rightarrow G_{\kappa\kappa 1}(w_0) \text{ в } H_\kappa, \quad (14.43)$$

и усиленная непрерывность  $G_{\kappa\kappa 1}(w)$  установлена.

Для изучения  $G_{\kappa\kappa 2}(w)$  рассмотрим первый член части (14.20). Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} [T_2^{ij}(w_0) - T_2^{ij}(w_n)] (B_{ij}\varphi - w_{\alpha^i}^* \varphi_{\alpha^j}) d\Omega \right| \leq \\ & \leq \|T_2^{ij}(w_0) - T_2^{ij}(w_n)\|_{L_{2\Omega} m} \|\varphi\|_{H_\kappa} \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_\kappa}. \end{aligned} \quad (14.44)$$

При выводе (14.44) использовались соотношения (14.38). Далее, для второго члена правой части (14.20) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ T_1^{ij}(w_0) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{n\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{0\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right\} w_{0\alpha^i} - \\ & - \left\{ T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{n\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{n\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right\} w_{n\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} d\Omega \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} \left[ T_1^{ij}(w_0) - T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) w_{\alpha^l}^* + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) w_{\alpha^k}^* \right] w_{0\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} d\Omega \right| + \\ & + \left| \int_{\Omega} \left[ T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{n\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{n\alpha^l} w_{\alpha^k}^*) \right] (w_{0\alpha^i} - w_{n\alpha^i}) \varphi_{\alpha^j} d\Omega \right| \leq \\ & \leq \|T_1^{ij}(w_0) - T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) w_{\alpha^l}^* + \\ & + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) w_{\alpha^k}^*\|_{L_{2\Omega}} \|w_{0\alpha^i}\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi_{\alpha^j}\|_{L_{4\Omega}} + \\ & + \|T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{n\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{n\alpha^l} w_{\alpha^k}^*)\|_{L_{2\Omega}} \|w_{0\alpha^i} - \\ & - w_{n\alpha^i}\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi_{\alpha^j}\|_{L_{4\Omega}} \leq m \left( \|T_1^{ij}(w_0) - T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^k} - w_{n\alpha^k}) w_{\alpha^l}^* + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{0\alpha^l} - w_{n\alpha^l}) w_{\alpha^k}^*\|_{L_{2\Omega}} \|w_{0\alpha^i}\|_{L_{4\Omega}} + \right. \\ & \left. + \|T_1^{ij}(w_n) + \frac{1}{2} D_p^{ijkl} (w_{n\alpha^k} w_{\alpha^l}^* + w_{n\alpha^l} w_{\alpha^k}^*)\|_{L_{2\Omega}} \|w_{0\alpha^i} - w_{n\alpha^i}\|_{L_{4\Omega}} \right) \|\varphi\|_{H_\kappa}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Из (14.20), (14.44), (14.45) с учетом (14.38) и усиленной непрерывности оператора вложения  $H_\kappa$  в  $W_{2\Omega}^{(1)}$  (соотношения (14.31)) получаем

$$((G_{\kappa\kappa 2}(w_0) - G_{\kappa\kappa 2}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_\kappa} \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_\kappa}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (14.46)$$

откуда

$$\|G_{\kappa\kappa 2}(w_0) - G_{\kappa\kappa 2}(w_n)\|_{H_\kappa} \leq \varepsilon_n, \quad (14.47)$$

и усиленная непрерывность  $G_{\kappa\kappa 2}(w)$  установлена.

Для  $G_{\kappa\kappa 3}(w)$  из (14.21) получаем

$$\begin{aligned} & ((G_{\kappa\kappa 3}(w_0) - G_{\kappa\kappa 3}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_\kappa} \leq \left| \int_{\Omega} [T_2^{ij}(w_0) w_{0\alpha i} - T_2^{ij}(w_n) w_{n\alpha i}] \varphi_{\alpha j} d\Omega \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} [T_2^{ij}(w_0) - T_2^{ij}(w_n)] w_{0\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} T_2^{ij}(w_n) (w_{0\alpha i} - w_{n\alpha i}) \varphi_{\alpha j} d\Omega \right|. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Из (14.31), (14.38) и (14.48) следует усиленная непрерывность  $G_{\kappa\kappa 3}(w)$ . Из усиленной непрерывности  $G_{\kappa\kappa \mu}(w)$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , следует и усиленная непрерывность  $G_{\kappa\kappa}(w)$ . Теорема 14.2 полностью доказана. ■

### § 15. Вычисление вращения векторного поля $w - G_{\kappa\kappa}(w)$ на сферах большого радиуса в $H_\kappa$ . Предварительные леммы

**15.1.** В дальнейшем нам потребуется некоторое разбиение сферы  $\Sigma_{H_\kappa}(R, 0)$  гильбертова пространства  $H_\kappa$  радиуса  $R$  с центром в начале координат. Для его построения рассмотрим сферу единичного радиуса  $\Sigma_{H_\kappa}(1, 0)$  и выделим на ней подмножество  $\Sigma'_{H_\kappa}(1, 0)$ , элементы которого  $v$  удовлетворяют неравенству

$$\|v\|_{H_\kappa}^2 - \frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}v - v_{\alpha i} w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 - c \|\omega_2(v)\|_{L_{2\Omega}} < \frac{1}{2}, \quad (15.1)$$

где  $\varepsilon, c$  — некоторые фиксированные положительные постоянные,  $\|v\|_{H_\kappa} = 1$  и вектор-функция  $\omega_2(v)$  дается разбиением (14.1), (14.11).

Множество  $\Sigma'_{H_\kappa}(R, 0)$  есть центральная проекция  $\Sigma'_{H_\kappa}(1, 0)$  с единичной сферы  $\Sigma_{H_\kappa}(1, 0)$  на сферу  $\Sigma_{H_\kappa}(R, 0)$ . Пусть, далее,  $\Sigma''_{H_\kappa}(1, 0)$  есть множество тех элементов  $v \in \Sigma_{H_\kappa}(1, 0)$ , для которых

$$\|v\|_{H_\kappa}^2 - \frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}v - v_{\alpha i} w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 - c \|\omega_2(v)\|_{L_{2\Omega}} \geq \frac{1}{2}. \quad (15.2)$$

Очевидно,  $\Sigma''_{H_\kappa}(1, 0)$  дополняет  $\Sigma'_{H_\kappa}(1, 0)$  до полной сферы  $\Sigma_{H_\kappa}(1, 0)$ . Пусть, далее,  $\Sigma''_{H_\kappa}(R, 0)$  есть центральная проекция  $\Sigma''_{H_\kappa}(1, 0)$  со сферы  $\Sigma_{H_\kappa}(1, 0)$  на сферу  $\Sigma_{H_\kappa}(R, 0)$ . Очевидно,  $\Sigma''_{H_\kappa}(R, 0)$  дополняет

от  $\Sigma'_{H_*}(R, 0)$  до полной сферы  $\Sigma_{H_*}(R, 0)$ , и значит,

$$\Sigma_{H_*}(R, 0) = \Sigma'_{H_*}(R, 0) \cup \Sigma''_{H_*}(R, 0).$$

Вообще говоря, множество  $\Sigma'_{H_*}(1, 0)$  (и соответственно множество  $\Sigma''_{H_*}(R, 0)$ ) может оказаться пустым, и это лишь упростит наши дальнейшие рассмотрения.

Введем, наконец,  $\bar{\Sigma}'_{H_*}(R, 0)$  — слабое замыкание  $\Sigma'_{H_*}(R, 0)$  в  $H_*$ . Множество  $\bar{\Sigma}'_{H_*}(R, 0)$  содержит, таким образом,  $\Sigma'_{H_*}(R, 0)$  и все его слабые пределы, которые  $\Sigma'_{H_*}(R, 0)$  могут и не принадлежать. В дальнейшем, если нет особой оговорки, будем считать выполненными условия 1 — 9 § 13. ■

Лемма 15.1. Множество  $\bar{\Sigma}'_{H_*}(1, 0)$  не содержит нуля.

Для доказательства учтем, что  $\Sigma'_{H_*}(1, 0)$  не содержит нуля. Пусть, далее,  $v_n \in \Sigma'_{H_*}(1, 0)$  и  $v_n \rightarrow 0$  в  $H_*$ . В силу усиленной непрерывности и однородности оператора  $\omega_2 = \mathbf{K}_{L_2}(w)$  (теорема 14.1) имеем

$$\|\mathbf{K}_{L_2}(v_n)\|_{H_*} \rightarrow 0. \quad (15.3)$$

В силу усиленной непрерывности оператора вложения  $H_*$  в  $L_2$  и  $W^2_2$  (теорема 11.3, соотношение (11.65)) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}v_n - v_n \alpha^i w_{\alpha j}^*\|_{L_2} - c \|\omega_2(v_n)\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad (15.4)$$

и (15.4) становится невозможным. Полученное противоречие и доказывает лемму 15.1.

Лемма 15.2. Пусть срединная поверхность  $S$  принадлежит  $H^2_\Omega$ , а  $(w_1, w_2, w) \in H_{L_2}$  и выполнены условия:  $\Gamma_1 + \Gamma_2 > 0$ ,

$$2\varepsilon_{ij}(w) = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i + w_{\alpha i} w_{\alpha j} \equiv 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (15.5)$$

$$\omega|_\Gamma = 0. \quad (15.6)$$

В этом случае

$$\omega \equiv 0, \quad w \equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (15.7)$$

Для доказательства заметим, что в условиях леммы 15.2 мы можем перейти к изотермическим координатам (1.51), в которых соотношения (15.5) запишутся в виде

$$w_{1\alpha^1} + \frac{\lambda_{\alpha^1}}{2\lambda} w_1 - \frac{\lambda_{\alpha^2}}{2\lambda} w_2 + \frac{1}{2} w_{\alpha^1}^2 = 0, \quad (15.8)$$

$$w_{2\alpha^2} - \frac{\lambda_{\alpha^1}}{2\lambda} w_1 + \frac{\lambda_{\alpha^2}}{2\lambda} w_2 + \frac{1}{2} w_{\alpha^2}^2 = 0, \quad (15.9)$$

$$w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + \frac{\lambda_{\alpha^2}}{2\lambda} w_1 + \frac{\lambda_{\alpha^1}}{2\lambda} w_1 + w_{\alpha^1} w_{\alpha^2} = 0, \quad (15.10)$$

откуда имеем

$$w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2} + \frac{1}{2} (w_{\alpha^1}^2 + w_{\alpha^2}^2) = 0. \quad (15.11)$$

Учтя (15.6), из (15.8), (15.9) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) d\alpha^1 d\alpha^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_{\alpha^1}^2 + w_{\alpha^2}^2) d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_{\alpha^1}^2 + w_{\alpha^2}^2) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \end{aligned} \quad (15.12)$$

откуда

$$w_{\alpha^i} \equiv 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad w = \text{const}. \quad (15.13)$$

Подставив (15.13) в (15.8)–(15.10), мы приходим к (11.23) и тогда на основе леммы 11.3 приходим к (15.7). Лемма 15.2 доказана. ■

**Лемма 15.3.** Пусть для развертывающейся оболочки выполнены условия (15.5), (15.6). В этом случае имеют место соотношения (15.7), если  $\Gamma_1 + \Gamma_2 > 0$ .

Для доказательства учтем, что для развертывающихся оболочек метрика срединной поверхности является евклидовой. Поэтому параметризация  $\alpha^1, \alpha^2$  может быть выбрана так, что

$$G_{ij}^h \equiv 0, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (15.14)$$

и соотношения (15.5) принимают вид

$$w_{i\alpha^i} + \frac{1}{2} w_{\alpha^i}^2 = 0, \quad (15.15)$$

откуда вследствие (15.6)

$$\int_{\Omega} w_{i\alpha^i} d\alpha^1 d\alpha^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\alpha^i}^2 d\alpha^1 d\alpha^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\alpha^i}^2 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad (15.16)$$

откуда

$$w_{\alpha^i} \equiv 0, \quad w_{i\alpha^i} \equiv 0, \quad (15.17)$$

и далее, рассуждая по схеме леммы 15.2, приходим к (15.7). Лемма 15.3 доказана. ■

Подчеркнем различие условий лемм 15.2 и 15.3. В лемме 15.2 оболочка может быть и физически пологой, т. е. не требуется, чтобы метрика  $A_{ij}$  была евклидовой, но при этом предполагается, что  $S \in H_{\Omega}^{2,\lambda}$ . В лемме 15.3 это требование отсутствует, но метрика  $S$  предполагается евклидовой, ибо оболочка развертывающаяся.

**Лемма 15.4.** Пусть  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$  и, кроме того, выполнены условия

$$w|_{\Gamma} = 0 \quad (15.18)$$

и почти всюду

$$w_{\alpha^1\alpha^1} w_{\alpha^2\alpha^2} - w_{\alpha^1\alpha^2}^2 = 0. \quad (15.19)$$

В этом случае

$$w \equiv 0. \quad (15.20)$$

Если бы  $w \in C_{\Omega}^2$ , то доказательство леммы было бы очевидным. Из (15.19) следовало бы, что  $w = w(\alpha^1, \alpha^2)$  есть гладкая развертывающаяся поверхность, содержащая плоский контур  $\Gamma$ , и тогда должно выполняться (15.20). Если  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , то должна существовать последовательность  $w_n \in C_{\Omega}^2$  такая, что  $w_n \Rightarrow w$  в  $W_{2\Omega}^{(2)}$ . При этом

$$w_{n\alpha^i\alpha^j} \Rightarrow w_{\alpha^i\alpha^j} \quad \text{в } L_2\Omega, \quad (15.21)$$

и тогда имеем из (15.21)

$$\|w_{n\alpha^1\alpha^1}w_{n\alpha^2\alpha^2} - w_{n\alpha^1\alpha^2}^2\|_{L_1\Omega} \leq \delta_n \rightarrow 0. \quad (15.22)$$

Далее, гауссова кривизна шапочки  $w_n(\alpha^1, \alpha^2)$  определяется соотношением

$$K_n = \frac{w_{n\alpha^1\alpha^2}w_{n\alpha^2\alpha^2} - w_{n\alpha^1\alpha^2}^2}{(1 + w_{n\alpha^1}^2 + w_{n\alpha^2}^2)^2}, \quad (15.23)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |K_n| d\Omega &= \int_{\Omega} |w_{n\alpha^1\alpha^1}w_{n\alpha^2\alpha^2} - w_{n\alpha^1\alpha^2}^2| (1 + w_{n\alpha^1}^2 + w_{n\alpha^2}^2)^{-2} \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |w_{n\alpha^1\alpha^1}w_{n\alpha^2\alpha^2} - w_{n\alpha^1\alpha^2}^2| d\Omega \leq \delta_n \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Соотношение (15.24) показывает, что площадь сферического отображения шапочки  $w_n(\alpha^1, \alpha^2)$  с учетом перекрытий не превосходит  $\delta_n$ . Поскольку  $w_n(\alpha^1, \alpha^2)$  есть непрерывная функция, то в  $\bar{\Omega}$  имеется точка  $\alpha_n^1, \alpha_n^2$ , которой соответствует максимальное значение  $w_n(\alpha^1, \alpha^2)$ . При этом можно считать, что  $w_n(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ . Проведем теперь в

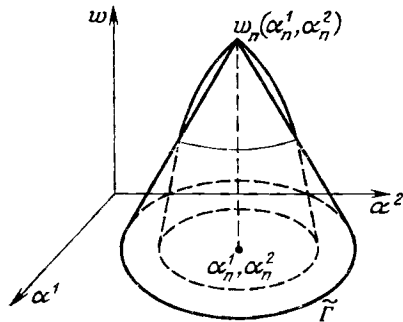


Рис. 15.1

плоскости  $\alpha^1, \alpha^2$  (рис. 15.1) круг  $\tilde{\Gamma}$  с центром в  $\alpha_n^i$  и радиусом  $d$ , где  $d$  — диаметр области  $\Omega$ . Построим, далее, круговой конус, опирающийся на  $\tilde{\Gamma}$ , с вершиной в точке  $\alpha_n^i$ . Легко видеть, что площадь сферического отображения построенного конуса не превосходит  $\delta_n$ . Элементарным подсчетом показывается, что площадь сферического отображения конуса высотой  $w_n(\alpha_n^i)$  и с радиусом основания  $d$  дается соотношением

$$2\pi \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + w_n^2(\alpha_n^i)}} \right), \quad (15.25)$$



и поэтому

$$2\pi \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + w_n^2(\alpha_n^i)}} \right) \leq \delta_n. \quad (15.26)$$

Из (15.26) получаем

$$w_n(\alpha_n^i) \leq d \frac{\sqrt{\frac{\delta_n}{2\pi} - \frac{\delta_n}{4\pi^2}}}{1 - \delta_n/(2\pi)}. \quad (15.27)$$

Аналогичное заключение справедливо и для  $w_{n \min}$ . Поскольку  $\delta_n \rightarrow 0$ , то

$$\|w_n(\alpha^i)\|_{C_\Omega} \rightarrow 0. \quad (15.28)$$

Далее, в силу теоремы вложения 10.6

$$\|w(\alpha^i) - w_n(\alpha^i)\|_{C_\Omega} \rightarrow 0. \quad (15.29)$$

Из (15.28), (15.29) получаем (15.20). Лемма 15.4 доказана. ■

**Лемма 15.5.** Пусть для развертывающейся оболочки вектор перемещений  $a(w_1, w_2, w)$  принадлежит  $H_{ix}$  и имеют место соотношения (15.5) и, кроме того, выполнено условие (15.18). В этом случае справедливо (15.20).

Для доказательства леммы запишем соотношения (15.5) в евклидовых координатах, которые для срединной поверхности  $S$  геометрически пологой оболочки всегда существуют,

$$w_{i\alpha^i} + \frac{1}{2} w_{\alpha^i}^2 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{\alpha^1} w_{\alpha^2} \equiv 0. \quad (15.30)$$

Если бы  $w \in C_\Omega^4$ ,  $w_i \in C_\Omega^3$ , то из (15.30) мы бы имели

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (w_{1\alpha^1})_{\alpha^2\alpha^2} + \frac{1}{2} (w_{2\alpha^2})_{\alpha^1\alpha^1} - (w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1})_{\alpha^1\alpha^2} &\equiv 0 \\ &\equiv w_{\alpha^1\alpha^2}^2 - w_{\alpha^1\alpha^1} w_{\alpha^2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Следовательно,  $w(\alpha^1, \alpha^2)$  — развертывающаяся поверхность и в силу (15.18) сразу получаем (15.20). Но в нашем случае  $w_{i\alpha^j} \in L_{2\Omega}$  и  $w_{\alpha^i} \in L_{q\Omega}$ ,  $\forall q \geq 1$ , и поэтому нам придется произвести некоторое дополнительное рассмотрение. Пусть  $\psi(\alpha^1, \alpha^2)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль в некоторой пограничной полосе  $\Gamma$ . Из (15.30) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \left( w_{1\alpha^1} + \frac{1}{2} w_{\alpha^1}^2 \right) \psi_{\alpha^2\alpha^2} + \left( w_{2\alpha^2} + \frac{1}{2} w_{\alpha^2}^2 \right) \psi_{\alpha^1\alpha^1} - \right. \\ \left. - (w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{\alpha^1} w_{\alpha^2}) \psi_{\alpha^1\alpha^2} \right] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Покажем, что

$$\int_{\Omega} [w_{1\alpha^1} \psi_{\alpha^2 \alpha^2} + w_{2\alpha^2} \psi_{\alpha^1 \alpha^1} - (w_{2\alpha^1} + w_{1\alpha^2}) \psi_{\alpha^1 \alpha^2}] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0 \quad (15.33)$$

при любой функции  $\psi$ . Поскольку  $\omega(w_1, w_2) \in H_t$ , то существует последовательность  $\omega_n(w_{n1}, w_{n2}) \in C_{\Omega}^1$  такая, что

$$\|\omega - \omega_n\|_{H_t} \rightarrow 0 \quad (15.34)$$

и, значит,

$$\|w_{i\alpha^j} - w_{ni\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (15.35)$$

Далее, поскольку теперь  $\omega_n$  — вектор из  $C_{\Omega}^1$ , можно построить последовательность векторов  $\omega_{nk} \in C_{\Omega}^3$  такую, что

$$\|w_{ni\alpha^j} - w_{nk i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0 \quad (15.36)$$

и, значит,

$$\|w_{i\alpha^j} - w_{nk i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (15.37)$$

Однако в силу того, что  $w_{nki} \in C_{\Omega}^3$ , перебрасывая в левой части (15.33) производные с  $\psi$  на  $w_{nki}$ , убеждаемся в справедливости соотношения

$$\int_{\Omega} [w_{nk1\alpha^1} \psi_{\alpha^2 \alpha^2} + w_{nk2\alpha^2} \psi_{\alpha^1 \alpha^1} - (w_{nk2\alpha^1} + w_{nk1\alpha^2}) \psi_{\alpha^1 \alpha^2}] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \quad (15.38)$$

Но из (15.37), (15.38) легко получаем (15.33). Но тогда из (15.32) вытекает

$$\int_{\Omega} [w_{\alpha^1}^2 \psi_{\alpha^2 \alpha^2} + w_{\alpha^2}^2 \psi_{\alpha^1 \alpha^1} - 2w_{\alpha^1} w_{\alpha^2} \psi_{\alpha^1 \alpha^2}] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \quad (15.39)$$

Поскольку  $w \in H_{\mathcal{X}}$ , существует последовательность  $w_n \in C_{\Omega}^2$  такая, что

$$\|w - w_n\|_{H_{\mathcal{X}}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (15.40)$$

и, очевидно, существует последовательность  $w_{nk} \in C_{\Omega}^3$  такая, что

$$\|w_n - w_{nk}\|_{H_{\mathcal{X}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (15.41)$$

Из (15.40), (15.41) следует

$$\|w - w_{nk}\|_{H_{\mathcal{X}}} \rightarrow 0 \quad (15.42)$$

и, далее,

$$\|w_{\alpha^i} - w_{nk\alpha^i}\|_{L_{q\Omega}} \rightarrow 0 \quad \text{при } q \geq 1. \quad (15.43)$$

Наконец, учтем, что в силу гладкости  $w_{,nh}$  получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( w_{nh\alpha}^2 \Psi_{\alpha^2\alpha^2} + w_{nh\alpha}^2 \Psi_{\alpha^1\alpha^1} - 2w_{nh\alpha} w_{nh\alpha^2} \Psi_{\alpha^1\alpha^2} \right) d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = 2 \int_{\Omega} \left( w_{nh\alpha^1\alpha^2}^2 - w_{nh\alpha^1\alpha^1} w_{nh\alpha^2\alpha^2} \right) \Psi d\alpha^1 d\alpha^2. \end{aligned} \quad (15.44)$$

Соотношение (15.44) доказывается переборкой производных с  $\Psi$  на смежные члены. Из (15.41)–(15.44), используя предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( w_{\alpha^1\alpha^2}^2 \Psi_{\alpha^2\alpha^2} + w_{\alpha^2}^2 \Psi_{\alpha^1\alpha^1} - 2w_{\alpha^1} w_{\alpha^2} \Psi_{\alpha^1\alpha^2} \right) d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ = 2 \int_{\Omega} \left( w_{\alpha^1\alpha^2}^2 - w_{\alpha^1\alpha^2} w_{\alpha^2\alpha^2} \right) \Psi d\alpha^1 d\alpha^2 \end{aligned} \quad (15.45)$$

и из (15.39), (15.45) получаем, что при любом  $\Psi$

$$\int_{\Omega} \left( w_{\alpha^1\alpha^2}^2 - w_{\alpha^1\alpha^1} w_{\alpha^2\alpha^2} \right) \Psi d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \quad (15.46)$$

Поскольку  $w_{\alpha^1\alpha^2}^2 - w_{\alpha^1\alpha^1} w_{\alpha^2\alpha^2} \in L_{1\Omega}$ , то из (15.46) вытекает (15.19). Из (15.18), (15.19) в силу леммы 15.4 приходим к (15.20). Лемма 15.5 доказана. ■

## § 16. Вычисление вращения векторного поля $w - G_{\kappa\kappa}(w)$ на сферах большого радиуса в $H_{\kappa}$ . Разрешимость основных краевых задач в перемещениях

16.1. Рассмотрим функционал  $\Phi(w, t)$  вида

$$\Phi(w, t) = ((w - tG_{\kappa\kappa}(w)) \cdot w)_{H_{\kappa}} = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - t(G_{\kappa\kappa}(w) \cdot w)_{H_{\kappa}}, \quad (16.1)$$

определенный на  $H_{\kappa} \times [0; 1]$ .

В силу (13.37) из (16.1) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 + t({}^0w \cdot w)_{H_{\kappa}} - \\ - t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij}w - (w + w^*)_{\alpha^i} w_{\alpha^j}] d\Omega. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Лемма 16.1. Функционалу  $\Phi(w, t)$  можно придать следующую форму:

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 + t({}^0w, w)_{H_{\kappa}} + 2t \int_{\Omega} Q_p d\Omega + \\ + t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij}(w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha^i} w_{\alpha^j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*] d\Omega - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2t (\omega_n \cdot \omega)_{H_t} + 2t \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^*) w_\tau ds + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*) w_m ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) w_j ds \right). \quad (16.3)
\end{aligned}$$

В (16.3)  $Q_p$  дается формулой (4.22).

Для вывода (16.3) произведем некоторые тождественные преобразования. Из (16.2) имеем

$$\begin{aligned}
\Phi(w, t) &= \|w\|_{H_\chi}^2 + t (w \cdot w)_{H_\chi} - \\
& - t \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} (w + w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j}] d\Omega + \\
& + t \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} w^* - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^*] d\Omega = \|w\|_{H_\chi}^2 + t (w \cdot w)_{H_\chi} - \\
& - 2t \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ B_{ij} (w + w^*) - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} (w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^*] d\Omega. \quad (16.4)
\end{aligned}$$

Отметим, далее, что если перенести второй член правой части (13.15) в левую, будем иметь при  $\chi = \omega$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \nabla_i w_j d\Omega &= (\omega_n \cdot \omega)_{H_t} - \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^*) w_\tau ds - \\
& - \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*) w_m ds - \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) w_j ds. \quad (16.5)
\end{aligned}$$

Из (16.5) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \nabla_j (w_i + w_i^*) d\Omega &= (\omega_n \cdot \omega)_{H_t} - \\
& - \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^*) w_\tau ds - \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*) w_m ds - \\
& - \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) w_j ds + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \nabla_j w_i ds \quad (16.6)
\end{aligned}$$

и, далее, из (16.4), (16.6) получаем

$$\begin{aligned}
\Phi(w, t) &= \|w\|_{H_\chi}^2 + t (w \cdot w)_{H_\chi} - \\
& - 2t \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ B_{ij} (w + w^*) - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \nabla_j (w_i + w_i^*)] d\Omega + t \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} (w + 2w^*) - \\
 & - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j} - 2\nabla_i w_j^*] d\Omega - 2t (\boldsymbol{\omega}_n \cdot \boldsymbol{\omega})_{H_t} + \\
 & + 2t \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^*) w_\tau ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*) w_m ds + \right. \\
 & \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) w_j ds. \right) \quad (16.7)
 \end{aligned}$$

Учтем теперь соотношения

$$\begin{aligned}
 B_{ij} (w + w^*) - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - \\
 - \frac{1}{2} [\nabla_i (w_j + w_j^*) + \nabla_j (w_i + w_i^*)] = - \overset{0}{\epsilon}_{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \quad (16.8)
 \end{aligned}$$

и, подставив (16.8) в (16.7), получим (16.3), так как

$$\begin{aligned}
 Q_p = T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \overset{0}{\gamma}_{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) = D_p^{ijkl} \overset{0}{\gamma}_{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \overset{0}{\gamma}_{kl} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) = \\
 = C_p^{\lambda\mu qs} T_{\lambda\mu} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) T_{qs} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*). \quad (16.9)
 \end{aligned}$$

При этом использовано (4.27). ■

16.2. Рассмотрим функционал  $\Pi(w)$ , определяемый соотношением

$$\begin{aligned}
 \Pi(w) = \int_{\Omega} Q_p d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds = \\
 = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \overset{0}{\gamma}_{ij} (w) \overset{0}{\gamma}_{kl} (w) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \\
 + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds. \quad (16.10)
 \end{aligned}$$

В (16.10) вектор-функция  $\boldsymbol{\omega}(w_1, w_2)$  выражена через  $w$  посредством (13.36) и (14.1).

Лемма 16.2. Имеет место представление

$$\Pi(w) = \sum_{\mu=0}^4 \Pi_\mu(w), \quad (16.11)$$

где  $\Pi_\mu(w)$  — однородные порядка  $\mu$  слабо непрерывные функционалы от  $w$  в  $H_n$  и, следовательно, имеют место неравенства

$$|\Pi_\mu(w)| \leq m \|w\|_{H_n}^\mu. \quad (16.12)$$

Для доказательства леммы учтем соотношения (14.1), (14.11) — (14.13), (14.16), из которых следует

$$\Pi_0 = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \gamma_{klo}^0 \gamma_{ij0}^0 d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau 0}^2 ds + \\ + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m0}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{i0} w_{j0} ds, \quad (16.13)$$

$$\Pi_1(w) = 2 \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \gamma_{klo}^0 \gamma_{ij1}^0 d\Omega + 2 \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau 0} w_{\tau 1} ds + \\ + 2 \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m0} w_{m1} ds + 2 \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{i1} w_{j0} ds, \quad (16.14)$$

$$\Pi_2(w) = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} [\gamma_{ij1}^0(w) \gamma_{kl1}^0(w) + 2\gamma_{ij0}^0 \gamma_{kl2}^0(w)] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (2w_{\tau 0} w_{\tau 2} + w_{\tau 1}^2) ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (2w_{m0} w_{m2} + w_{m1}^2) ds + \\ + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_{i0} w_{j2} + w_{i1} w_{j1}) ds, \quad (16.15)$$

$$\Pi_3(w) = 2 \left\{ \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \gamma_{ij1}^0(w) \gamma_{kl2}^0(w) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau 1} w_{\tau 2} ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m1} w_{m2} ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{i1} w_{j2} ds \right\}, \quad (16.16)$$

$$\Pi_4(w) = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \gamma_{ij2}^0(w) \gamma_{kl2}^0(w) d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau 2}^2 ds + \\ + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{m2}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{i2} w_{j2} ds. \quad (16.17)$$

Слабая непрерывность всех функционалов  $\Pi_\mu(w)$  в  $H_*$  вытекает из теоремы 14.1 об усиленной непрерывности операторов  $K_{t^* \mu}(w)$ , действующих из  $H_t$  в  $H_*$ , и теоремы вложения 11.3 (соотношение (11.59)). Оценки (16.12) следуют из (14.3), (14.18). Лемма 16.2 доказана. ■

**Лемма 16.3.** Пусть выполнены условия 2—6, 8 § 13,  $S \in H_{\Omega}^{2,\lambda}$ , связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие. В этом случае на  $\Sigma'_{H_*}(R, 0)$  имеет место неравенство

$$\Pi_4(w) \geq mR^4, \quad m > 0. \quad (16.18)$$

Вначале установим, что на  $\Sigma'_{H_*}(1, 0)$  справедливо неравенство

$$\Pi_4(w) \geq m > 0. \quad (16.19)$$

В самом деле, если бы (16.19) не имело места, то существовала бы последовательность  $w_n \in \bar{\Sigma}'_{H_x}(1, 0)$  такая, что

$$\Pi_4(w_n) \rightarrow 0. \quad (16.20)$$

Очевидно, ее можно считать слабо сходящейся, и пусть  $w_n \rightarrow w_0$  в  $H_x$ . Очевидно,  $w_0 \in \bar{\Sigma}'_{H_x}(1, 0)$ , и, поскольку  $\Pi_4(w_n)$  — слабо непрерывный функционал, то

$$\Pi_4(w_0) = 0. \quad (16.21)$$

Из (16.17), (16.21) имеем

$$2\varepsilon_{ij2}(w_0) = w_{0i2\alpha i} + w_{0j2\alpha i} + w_{0\alpha i}w_{0\alpha j} = 0, \quad (16.22)$$

$$w_{0t2}|_{\Gamma_6} = w_{0m2}|_{\Gamma_7} = w_{0i}|_{\Gamma_8} = 0. \quad (16.23)$$

Учтя теперь однородные граничные условия (6.10), (6.13), характерные для  $H_i$ , из (16.23) получаем

$$\omega_0|_{\Gamma} = 0. \quad (16.24)$$

В силу леммы 15.2 из (16.22), (16.24) получаем

$$w_0 \equiv 0, \quad (16.25)$$

что противоречит лемме 15.1. Таким образом, (16.19) доказано. Переход к (16.18) очевиден из соображений однородности. ■

Лемма 16.4. Пусть для развертывающейся оболочки выполнены условия 1—6 § 13 и связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие. В этом случае на  $\bar{\Sigma}'_{H_x}(1, 0)$  имеет место неравенство (16.18).

Лемма 16.5. Пусть для развертывающейся оболочки выполнены условия 1—6 § 13 и имеет место соотношение

$$w|_{\Gamma} = 0. \quad (16.26)$$

В этом случае справедливо (16.18).

Доказательство лемм 16.4, 16.5, в сущности, повторяет доказательство леммы 16.3. При этом из (16.21) мы получаем (16.22), (16.23), и переход к (16.25) совершается соответственно на основе лемм 15.3, 15.5. ■

16.3. Вернемся к оценке  $\Phi(w, t)$ .

Теорема 16.1. Пусть выполнены условия 2—8 § 13 и, кроме того,

$$S \in H_x^{2,\lambda}. \quad (16.27)$$

Пусть, далее, связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие. В этом случае имеет место неравенство

$$\Phi(w, t) \geq mR^2, \quad m > 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (16.28)$$

на сферах достаточно большого радиуса в  $H_x$ .

Оценим вначале  $\Phi(w, t)$  на  $\Sigma'_{H_\kappa}(R, 0)$ . Из (16.3) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_\kappa}^2 + t\Pi(w) + t \int_{\Omega} Q_p d\Omega - \\ & - t \left| \int_{\Omega} T^{ij}(a + a^*) [B_{ij}(w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - 2\nabla_j w_i^*] d\Omega \right| - \\ & - 2t |(\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_t}| - 2t \left| \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau}^* w_{\tau} ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^* w_m ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i^* w_j ds \right| + t \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds \right) - \\ & - t \left| (w \cdot w)_{H_\kappa} \right|. \quad (16.29) \end{aligned}$$

Из (16.29), учитывая положительность  $k_p^{\tau\tau}$ ,  $k_p^{mm}$  и формы  $k^{ij} w_i w_j$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_\kappa}^2 + t\Pi(w) + t \int_{\Omega} Q_p d\Omega - \\ & - t \left| \int_{\Omega} T^{ij}(a + a^*) [B_{ij}(w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*] d\Omega \right| - \\ & - 2t |(\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_t}| - 2 \left| \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau}^* w_{\tau} ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^* w_m ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i^* w_j ds \right| - \left| (w \cdot w)_{H_\kappa} \right|. \quad (16.30) \end{aligned}$$

Запишем очевидное неравенство, справедливое при любом  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} T^{ij}(a + a^*) [B_{ij}(w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*] d\Omega \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|T^{ij}(a + a^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} + \frac{1}{2\varepsilon} \|B_{ij}(w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - \\ & - \nabla_j w_i^* - \nabla_i w_j^*\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}^{ij} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|T^{ij}(a + a^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \|B_{ij}w - w_{\alpha i} w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}} + \|B_{ij}2w^* - w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*\|_{L_{2\Omega}} \right\}^2 \mathbf{1}^{ij} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|T^{ij}(a + a^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} + \frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}w - w_{\alpha i} w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}^{ij} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}2w^* - w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*\|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}^{ij}. \quad (16.31) \end{aligned}$$

В (16.31) использовано условное обозначение суммирования

$$\mathbf{1}_{ijhl\dots s} Q^{ijkl\dots s} = \sum_{i,j,h,l,\dots,s} Q^{ijkl\dots s},$$



где сумма в правой части распространяется на все множество пробегаемых значений для  $i, j, k, l, \dots, s$ .

Учтем, далее, что представление (14.1) и вытекающие из него (14.11), (14.12) дают

$$w_\tau = w_{\tau 0} + w_{\tau 1}(w) + w_{\tau 2}(w), \quad w_m = w_{m 0} + w_{m 1}(w) + w_{m 2}(w), \quad (16.32)$$

и вследствие (14.3) и теоремы вложения 11.4 (соотношение 2, формула (11.61)) имеем

$$\|w_{\tau k}\|_{L_{qd}}, \quad \|w_{mk}\|_{L_{qd}}, \quad \|\omega_k\|_{L_{qd}} \leq m \|\omega_k(w)\|_{H_t} \leq m \|w\|_{H_\kappa}^k, \quad (16.33)$$

где  $d$  — любая часть контура  $\Gamma$ . Из (16.32), (16.33) и условия 8 § 13 получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^* w_\tau ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^* w_m ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j^* ds \right| \leq \\ & \leq \left( \|k_p^{\tau\tau} w_\tau^*\|_{L_{2\Omega}} + \|k_p^{mm} w_m^*\|_{L_{2\Omega}} + \|k_p^{ij} w_j^*\|_{L_{2\Omega}} \right) (\|\omega_0\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_1\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_2\|_{L_{2\Omega}}) \leq \\ & \leq m (\|\omega_0\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_1\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_2\|_{L_{2\Omega}}) \leq m (1 + \|w\|_{H_\kappa} + \|w\|_{H_\kappa}^2). \end{aligned} \quad (16.34)$$

Наконец, отметим неравенства

$$\begin{aligned} |(\omega_n \cdot \omega)_{H_t}| & \leq \|\omega_n\|_{H_t} m (\|\omega_0\|_{H_t} + \|\omega_1\|_{H_t} + \|\omega_2\|_{H_t}) \leq \\ & \leq m (1 + \|w\|_{H_\kappa} + \|w\|_{H_\kappa}^2), \end{aligned} \quad (16.35)$$

$$|({}^0 w \cdot w)_{H_\kappa}| \leq \|{}^0 w\|_{H_\kappa} \|w\|_{H_\kappa}. \quad (16.36)$$

Из (16.30) — (16.36) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) & \geq \|w\|_{H_\kappa}^2 + t\Pi(w) + t \left( \int_{\Omega} \left[ Q_p - \frac{\varepsilon}{2} (T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)) 1_{ij} \right]^2 d\Omega \right) - \\ & - \frac{t}{\varepsilon} \|B_{ij} w - w_{\alpha^i} w_{\alpha^j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 1^{ij} - \frac{t}{\varepsilon} \mathcal{A} - \|{}^0 w\|_{H_\kappa} \|w\|_{H_\kappa} - \\ & - 2tm (\|\omega_0\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_1\|_{L_{2\Omega}} + \|\omega_2\|_{L_{2\Omega}}), \end{aligned} \quad (16.37)$$

где

$$\mathcal{A} = \|2B_{ij} w^* - w_{\alpha^i}^* w_{\alpha^j}^* - \nabla_i w_j^* - \nabla_j w_i^*\|_{L_{2\Omega}}^2 1^{ij}.$$

Далее, поскольку  $Q_p$  в силу условия 1 § 13 регулярности материала (условие 4.28) положительно определенная форма переменных  $T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$ , то  $\varepsilon$  можно выбрать столь малым, что будет выполняться условие

$$\int_{\Omega} \left[ Q_p - \frac{\varepsilon}{2} (T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)) 1_{ij} \right]^2 d\Omega > 0. \quad (16.38)$$

Кроме того, из (12.49), (12.51) вытекает

$$\|B_{ij}w - w_{\alpha_i} w_{\alpha_j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 1^{ij} < m \|w\|_{H_{\kappa}}^2. \quad (16.39)$$

Наконец, учтем соотношения (6.10) — (6.12) и основной результат леммы 16.3 — неравенство (16.18). Сама лемма 16.3 в условиях теоремы 16.1 справедлива. При этом получим на  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$

$$\Pi(w) \geq \Pi_4(w) - \sum_{\mu=0}^3 |\Pi_{\mu}(w)| \geq m \left( \|w\|_{H_{\kappa}}^4 - \sum_{\mu=0}^3 \|w\|_{H_{\kappa}}^{\mu} \right). \quad (16.40)$$

Из (16.37) — (16.40) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_{\kappa}}^2 + tm \left( \|w\|_{H_{\kappa}}^4 - \sum_{\mu=0}^3 \|w\|_{H_{\kappa}}^{\mu} \right) - \frac{t}{\varepsilon} \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - \\ & - t \|w\|_{H_{\kappa}}^0 \|w\|_{H_{\kappa}} - 2tm(1 + \|w\|_{H_{\kappa}}^2) - \frac{t}{\varepsilon} \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (16.41)$$

Учтем теперь, что в правой части (16.41)  $\varepsilon$  уже фиксировано, и объединим все члены в правой части при  $t$ . Получим полином четвертой степени с положительным при старшем члене коэффициентом. Таким образом, при достаточно большом  $\|w\|_{H_{\kappa}}$  члены с  $t$  в правой части (16.41) положительны, и мы на  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  при достаточно больших  $R$  будем иметь

$$\Phi(w, t) \geq \|w\|_{H_{\kappa}}^2 = R^2. \quad (16.42)$$

Для  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  из (16.37) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - \left( \frac{1}{\varepsilon} \|B_{ij}w - w_{\alpha_i} w_{\alpha_j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 1^{ij} + 2m \|w\|_{L_{2\Omega}} \right) - \\ & - \mathcal{A} \frac{1}{\varepsilon} \|w\|_{H_{\kappa}}^0 \|w\|_{H_{\kappa}} - 2m(1 + \|w\|_{H_{\kappa}}) \end{aligned} \quad (16.43)$$

и в силу (15.2) на  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  получаем, положив  $c = 2m$ , неравенство

$$\Phi(w, t) \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - \frac{\mathcal{A}}{\varepsilon} - \|w\|_{H_{\kappa}}^0 \|w\|_{H_{\kappa}} - 2m(1 + \|w\|_{H_{\kappa}}). \quad (16.44)$$

Из (16.44) с очевидностью вытекает, что на  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  при достаточно больших  $R$  имеет место неравенство

$$\Phi(w, t) \geq \frac{1}{3} \|w\|_{H_{\kappa}}^2. \quad (16.45)$$

Из (16.42), (16.45) следует, что теорема 16.1 доказана полностью. ■

**Теорема 16.2.** Пусть выполнены условия 1—8 § 13 и, кроме того, связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие, а оболочка — развертывающаяся. В этом случае на сферах большого радиуса  $H_x$  имеет место неравенство (16.28).

Доказательство теоремы 16.2 производится в той же схеме, что и теоремы 16.1, более того, мы имеем здесь некоторые упрощения, связанные с тем, что для развертывающейся оболочки можно ввести евклидову параметризацию и использовать лемму 16.4. ■

**Теорема 16.3.** Пусть для развертывающейся оболочки выполнены условия 1—8 § 13 и, кроме того, условие (16.26). В этом случае имеет место неравенство (16.28).

Доказательство теоремы 16.3 производится в той же схеме, что и теоремы 16.1, однако вместо леммы 16.3 используется лемма 16.5.

**Теорема 16.4.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.1. В этом случае поле  $w - G_{xx}w$  гомотопно полю  $w$  на сферах достаточно большого радиуса  $R$ , и, следовательно, его вращение на этих сферах есть  $+1$ .

Для доказательства сконструируем поле  $\Pi(w, t) = w - tG_{xx}w$ . Очевидно,  $\Pi(w, 0) = w$ ,  $\Pi(w, 1) = w - G_{xx}w$ . Докажем теперь, что

$$\Pi(w, t) = w - tG_{xx}w \neq 0 \quad \text{при} \quad \|w\|_{H_x} = R, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (16.46)$$

если  $R$  достаточно велико. Действительно, если при некотором  $0 \leq t_0 \leq 1$  и  $w_0$  имеет место соотношение

$$\Pi(w_0, t_0) = w_0 - t_0G_{xx}w_0 = 0, \quad (16.47)$$

то выполняется равенство

$$(\Pi(w_0, t_0) \cdot w_0)_{H_x} = \|w_0\|_{H_x}^2 - t_0(G_{xx}w_0 \cdot w_0)_{H_x} = \Phi(w_0, t) = 0, \quad (16.48)$$

что противоречит теореме 16.1. Теорема 16.4 доказана. ■

**Теорема 16.5.** Пусть выполнены условия: 1)  $S \in H_\Omega^{2,\lambda}$ ; 2) связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие и, кроме того, выполнены условия 2—6 § 13. В этом случае для разрешимости краевой задачи  $tx$  необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 7—8 из § 13. При этом для заданного решения  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w^3) \in W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(2)}$ ,  $\omega_p, w_p$  (а значит, и нагруженный комплекс  $[R^s, \mathcal{T}, \mathcal{T}^m, R^3, \mathcal{M}^m, \mathcal{Q}]$ ) определяются однозначно.

Доказательство достаточности условий теоремы 16.5 немедленно вытекает из того факта, что в этих условиях в силу теоремы 16.4 вращение поля  $w - G_{xx}w$  на сферах большого радиуса в  $H_x$  есть  $+1$ . Покажем необходимость условий 7, 8 § 13 при выполнении остальных условий теоремы 16.5. Учтем, что при существовании решения  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w^3)$  эта вектор-функция принадлежит  $W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(2)}$  (определение (13.5) — (13.7)). При этом выполнены условия (6.1) — (6.3), (6.5), (6.9), (6.10), (6.13). Но в силу известных результатов (см. например, [3, 4, 35]) граничные геометрические задания  $\tilde{w}, \tilde{w}_4, \tilde{w}_m, \tilde{w}_r$  при этом обязательно должны

быть допустимыми, т. е. должны выполняться (11.75), (11.76), (12.65), (12.66). Необходимость условия 8 § 13 доказана. Обратимся к необходимости условия 7. Пусть существует обобщенное решение  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$  задачи  $tx$ , причем  $\omega(w_1, w_2) \in H_t$ ,  $w \in H_x$ . Из (13.6), (13.7) имеем

$$\begin{aligned} (\omega_{\Pi} \cdot \chi)_{H_t} &= \int_{\Omega} R^i \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^r \varphi_r ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m \varphi_m ds = \\ &= (\omega \cdot \chi)_{H_t} - \int_{\Omega} \left[ \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (16.49)$$

$$\begin{aligned} (w_{\Pi} \cdot \varphi)_{H_x} &= \int_{\Omega} R^3 \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \tilde{M}^m \varphi_4 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \tilde{Q} \varphi ds = \\ &= (w \cdot \varphi)_{H_x} - \int_{\Omega} T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) d\Omega. \end{aligned} \quad (16.50)$$

Из (16.49), которое должно выполняться при любой вектор-функции  $\chi(\varphi_1, \varphi_2) \in H_t$ , имеем

$$\begin{aligned} |(\omega_{\Pi} \cdot \chi)_{H_t}| &\leq \left| \int_{\Omega} R^i \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_6 + \Gamma_8} \tilde{T}^r \varphi_r ds + \int_{\Gamma_7 + \Gamma_8} \tilde{T}^m \varphi_m ds \right| \leq \\ &\leq |(\omega \cdot \chi)_{H_t}| + \int_{\Omega} \left| B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right| |D_p^{ijkl} \nabla_j \varphi_i| d\Omega \leq \\ &\leq \|\omega\|_{H_t} \|\chi\|_{H_t} + m \left( 1^{hl} |B_{kl}| \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} + \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}^2 \right) \|\chi\|_{H_t}. \end{aligned} \quad (16.51)$$

Последний переход в (16.51) произведен на основе (13.26) при  $w^* = 0$  и (13.27). Из (16.51) видно, что нагруженный комплекс  $[R^s, T_s, T_m]$  принадлежит  $\bar{H}_t$  согласно определению (12.70), (12.71). Необходимость части условия 7 § 13 установлена.

Для завершения доказательства необходимости 7 § 13 из (16.50) получаем

$$\begin{aligned} |(w_{\Pi} \cdot \varphi)_{H_x}| &= \left| \int_{\Omega} R^3 \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \tilde{M}^m \varphi_4 ds + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_4} \tilde{Q} \varphi ds \right| \leq \\ &\leq \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \|\varphi\|_{H_x} + m \left( 1 + \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \right) \|T^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \|\varphi\|_{H_x} \leq \\ &\leq m \|\varphi\|_{H_x} \left[ \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} + \left( 1 + \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} \right) \|T^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (16.52)$$

Последний переход в (16.52) был сделан на основе (13.32) при  $w^* = 0$ . Из (16.52) видно, что нагруженный комплекс  $[R^3, \tilde{M}^m, \tilde{Q}]$  принадлежит  $\bar{H}_x$  согласно определению (12.70), (12.71). Необходимость условия 7 § 13 полностью доказана. Однозначность определе-

ния всего нагруженного комплекса  $[R^s, T^m, T^r, R^3, M^m, Q]$  очевидна. Теорема 16.5 полностью доказана. ■

**Теорема 16.6.** Пусть выполнены условия теоремы 16.1. В этом случае все решения краевой задачи  $tx$  лежат внутри некоторой сферы  $H_*$  радиуса  $R_0$ .

Теорема 16.6 вытекает из теоремы 16.1.

**Теорема 16.7.** Пусть выполнены условия теоремы 16.2. В этом случае поле  $w - G_{\text{жс}}w$  гомотопно полю  $w$  на сферах достаточно большого радиуса  $R \geq R_0$ , и, следовательно, его вращение на этих сферах есть  $+1$ .

Теорема 16.7 непосредственно вытекает из теоремы 16.2.

**Теорема 16.8.** Пусть выполнены условия 1—6 § 13 и, кроме того, связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие, а оболочка — разворачивающаяся. В этом случае для разрешимости краевой задачи  $tx$  необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 7—8 § 13. При этом нагруженный комплекс  $[R^s, T^m, T^r, R^3, M^m, Q]$  определяется однозначно, если задано решение  $a(w_1, w_2, w) \in W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(2)}$ .

Теорема 16.8 доказывается по такой же схеме, что и теорема 16.5, с той разницей, что достаточность ее условий вытекает из теоремы 16.2.

**Теорема 16.9.** Пусть выполнены условия теоремы 16.2. В этом случае все решения задачи  $tx$  лежат внутри сферы некоторого радиуса  $R_0$ .

Теорема 16.9 вытекает из теоремы 16.7.

**Теорема 16.10.** Пусть выполнены условия теоремы 16.3. В этом случае векторное поле  $w - G_{\text{жс}}w$  гомотопно полю  $w$  на сферах достаточно большого радиуса  $R \geq R_0$  и, следовательно, его вращение на этих сферах есть  $+1$ .

**Теорема 16.11.** Пусть для разворачивающейся оболочки выполнены условия 2—6 § 13 и, кроме того, условие (16.26). В этом случае для разрешимости задачи  $tx$  необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 7—8 § 13. При этом при задании решения  $a(w_1, w_2, w) \in W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(1)} \times W_{2\Omega}^{(2)}$  нагруженный комплекс  $[R^s, T^m, T^r, R^3, M^m, Q]$  определяется однозначно.

Теорема 16.11 вытекает из теоремы 16.3.

**Теорема 16.12.** Пусть для разворачивающейся оболочки выполнены условия 2—6 § 13 и, кроме того, условие (16.26). В этом случае все решения задачи  $tx$  лежат внутри сферы некоторого радиуса  $R_0$ . ■

**Примечание 16.1.** Теоремы разрешимости 16.5, 16.8, 16.11 доказаны без каких бы то ни было предположений о малости деформаций и других факторов, определяющих задачу. Такие предположения использовались лишь при выводе и постановке краевых задач. Математическое рассмотрение полученных нелинейных краевых задач на них не опиралось. Доказанные теоремы разрешимо-

сти охватывают весьма широкий класс задач. Более подробно охарактеризуем граничные условия, входящие в круг доказанных теорем. В теореме 16.5 требуется несколько более сильное условие  $S \in H_{\Omega}^{2,\lambda}$ , впрочем, практически не очень ограничительное. Но при этом оболочка в отношении прогиба  $w$  может быть практически закреплена произвольно, лишь бы были выполнены условия образования пространств  $H_{\kappa}$ . Например, на всем контуре  $\Gamma$  могут быть заданы условия жесткой заделки 6.1, 6.2, т. е.  $\Gamma = \Gamma_1$ . Может быть осуществлено на всем контуре шарнирное опирание, т. е.  $\Gamma = \Gamma_2$ . Может осуществляться смешанное закрепление  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ . Могут существовать участки  $\Gamma_3, \Gamma_4$  упругого описания. При этом, если, например,  $\Gamma_1 > 0$  или  $\Gamma_2 > 0$  с выполнением условий 6.1, 6.2, то на  $\Gamma_3$  или  $\Gamma_4$  связи не обязательно существенно упругие. При всем этом относительно продольных перемещений связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  (если вообще такие участки границы существуют) предполагаются обязательно существенно упругими. В теореме 16.8 условие  $S \in H_{\Omega}^{2,\lambda}$  ослаблено, ибо требуется, чтобы  $S \in C_{\Omega}^2$ . Однако предполагается, что оболочка развертывающаяся. Чтобы оценить степень общности результата, заметим, что теории пологих оболочек К. Маргерра, В. З. Власова, К. З. Галимова, Х. М. Муштари, Вей Цанг Чена относятся к собственно пологим оболочкам, срединная поверхность которых близка к плоскости. Иными словами, они охватывают частный случай развертывающихся оболочек.

В теореме 16.11 отброшено условие существенной упругости продольных связей, но введено условие (16.26), чем охвачен новый класс задач.

Примечание 16.2. Существенным моментом доказательства является установление неравенства (16.19) в теоремах 16.1—16.3. Предложенный здесь способ разбиения сферы  $\Sigma_{H_{\kappa}}(R, 0)$  на два множества  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  и  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  имеет механические истоки. Дело в том, что  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  «отгорожено» от некоторой слабой окрестности нуля. Грубо говоря, здесь старшие производные не столь велики по сравнению с младшими, и потенциальная энергия растяжения играет в процессе деформации существенную роль. Ее учет и обеспечил выполнение (16.29) на  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  в теоремах 16.1—16.3. На  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  выполнение (16.19) обеспечивается за счет превалирующего влияния потенциальной энергии изгиба.

Примечание 16.3. Поясним смысл условия 7 § 13. Из соотношения (11.82), определяющего  $\bar{H}_i$ , следует, что если  $R^s \in L_{p\alpha}$  и  $\tilde{T}^r \in L_{p,\Gamma_6+\Gamma_8}$ ,  $\tilde{T}^m \in L_{p,\Gamma_7+\Gamma_8}$  при некотором  $p > 1$ , то  $[R^s, T^r, T^m] \in \bar{H}_i$ , что легко устанавливается с помощью неравенства Гельдера на основе того, что в силу теоремы 11.3 (см. (11.64))  $w_i \in L_{q\alpha}$  при любом  $q \geq 1$ . При этом, очевидно, для нагрузок допускаются разрывы типа  $r^{-2+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , и  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малым.

Легко также получаем, что  $[R^\varepsilon, T^\varepsilon, T^m] \in \bar{H}_1$ , если на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  имеются разрывы типа  $r^{-1+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$ , и  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малым. Из соотношения (12.70) следует, что  $[R^3, \bar{M}^m, \bar{Q}] \in H_*$ , если  $R^3$  имеет включения типа  $\delta$ -функций. Действительно, имеем

$$\int_{\Omega} \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) w(\xi_1, \xi_2) d\Omega_{\xi} = w(x_1, x_2), \quad (16.53)$$

а в силу теоремы вложения 12.3 (соотношение (12.51)) заключаем, что справа стоит линейный в  $H_*$  функционал. Легко также убеждаемся, что  $[R^3, \bar{M}^m, \bar{Q}] \in \bar{H}_*$ , если  $\bar{M}^m \in L_{p, \Gamma_2 + \Gamma_4}$  при некотором  $p > 1$ . И значит, для  $\bar{M}^m$  допускаются разрывы типа  $r^{-1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , и  $\varepsilon$  сколь угодно мало. Перерезывающая сила  $\bar{Q}$  на  $\Gamma_3 + \Gamma_4$  может иметь разрывы типа  $\delta$ -функций.

**Примечание 16.4.** В соответствии с условиями 8 § 13 геометрические граничные задания должны быть допустимыми. В отношении продольных геометрических заданий смысл этого условия разъяснен в лемме 11.8. Здесь же заметим, что соотношения (11.75), (11.76) будут выполнены, если кусок  $\tilde{\Gamma}$ , содержащий  $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ , принадлежит  $C_{\tilde{\Gamma}}^2$ , а  $\tilde{w}_i \in C_{\Gamma_1}^1$ ,  $\tilde{w}_m \in C_{\Gamma_6}^1$ ,  $\tilde{w}_\tau \in C_{\Gamma_7}^1$ . В отношении поперечных геометрических заданий допустимость разъяснена леммой 12.4. Также заметим, что соотношения (12.65), (12.66) будут выполнены, если кусок  $\tilde{\Gamma}$ , содержащий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , принадлежит  $C_{\tilde{\Gamma}}^3$ , а  $\tilde{w} \in C_{\Gamma_1 + \Gamma_2}^2$ ,  $\tilde{w}_4 \in C_{\Gamma_1 + \Gamma_3}^1$ .

**Примечание 16.5.** Несущественные изменения в наших построениях приводят к теореме разрешимости и в том случае, когда срединная поверхность  $S$  имеет и более сложную топологическую структуру. Если, например,  $S$  гомеоморфна куску замкнутого цилиндра (рис. 1.2), то при образовании пространств  $H_{tx}$  необходимо вводить множество вектор-функций  $a(w_1, w_2, w)$ , которые помимо геометрических граничных условий на  $\mathcal{BD}$  и  $\mathcal{AE}$  должны удовлетворять условиям сопряжения на разрезе  $\mathcal{AB} = \mathcal{CD}$ :

$$\begin{aligned} w_i, w|_{\mathcal{AB}} &\equiv w_i, w|_{\mathcal{CD}}; & w_{i\alpha j}, w_{\alpha i}|_{\mathcal{AB}} &\equiv w_{i\alpha j}, w_{\alpha i}|_{\mathcal{CD}}; \\ w_{\alpha i\alpha j}|_{\mathcal{AB}} &\equiv w_{\alpha i\alpha j}|_{\mathcal{CD}}. \end{aligned} \quad (16.54)$$

В остальном весь ход доказательства разрешимости основных краевых задач переносится и на случай сложной топологической структуры  $S$ . ■

16.4. В данном разделе мы рассмотрим вопрос о существовании решений НОУ\*) (13.15), (13.16) теории пологих оболочек в некоторых классах. Часто встречаются случаи, когда форма оболочки, граничные задания, внешние нагрузки обладают определенной формой симметрии. В этом случае представляет интерес доказатель-

\*) Нелинейные операторные уравнения.

ство существования решения именно с такими свойствами симметрии. Так в [42] при некоторых условиях для круглой пластины при осесимметричной нагрузке и осесимметричных граничных заданиях устанавливается существование осесимметричной формы равновесия (и даже ее единственность). В [40] рассмотрены оболочки, имеющие  $r$  осей симметрии. Здесь мы сформулируем один общий результат, доказательство которого дается развитым в данной главе методом. Предварительно дадим некоторые пояснения. Предположим, что все исходные данные НОУ (13.15), (13.16): форма оболочки, контура  $\Gamma$ , граничных условий, внешней нагрузки — таковы, что существуют такие преобразования

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\rho), \quad (16.55)$$

относительно которых все исходные данные инвариантны. В дальнейшем такие преобразования будут называться автоморфизмами краевой задачи нелинейной теории пологих оболочек, или автоморфизмами  $\mathcal{Z}$  НОУ (13.15), (13.16). Очевидно, автоморфизмы образуют некоторую группу [33]. В соответствии с этим в пространствах  $H_{ix}$  можно выделить подмножества  $H_{ic}$  вектор-функций  $a_c(w_{1c}, w_{2c}, w_c)$ , инвариантных относительно  $\mathcal{Z}$ . Легко видеть, что  $H_{ic}$  суть подпространства  $H_i$ . В самом деле,  $H_{ic}$  — очевидно линейное множество и, кроме того, предельные переходы по норме  $H_i$  последовательностей из  $H_{ic}$  не выводят за пределы этого множества. В соответствии с  $H_{ix}$  вводятся и подпространства  $H_{ic}$  и  $H_{xc}$ . Методика исследования НОУ ((13.15), (13.16)), развитая в данной главе, приводит к следующим результатам.

**Теорема 16.13.** Пусть НОУ (13.15), (13.16) имеют некоторую группу автоморфизмов  $\mathcal{Z}$ . Пусть, далее, выполнены все условия теоремы 16.5 (соответственно, 16.8, 16.11). В этом случае операторы  $\mathbf{G}_{ix}$ ,  $\mathbf{G}_x$ ,  $\mathbf{K}_{ix}$  действуют усиленно непрерывно соответственно в  $H_{ixc}$ ,  $H_{xc}$  и из  $H_{ic}$  в  $H_{xc}$ . При этом векторное поле  $w - \mathbf{G}_{ix}w$  на сферах большого радиуса в  $H_{xc}$  имеет вращение  $+1$ . НОУ (13.15), (13.16) имеют в  $H_{ixc}$  по крайней мере одно решение. Все решения (13.15), (13.16) заключены в сфере некоторого радиуса  $R_0$  пространства  $H_{ixc}$  или соответственно в пространстве  $H_{xc}$ .

Приложения теоремы 16.13 можно найти в [20].



## ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ФУНКЦИЕЙ УСИЛИЙ

**§ 17. Обобщенная постановка краевых задач теории геометрически пологих оболочек в усилиях. Сведение к операторным уравнениям. Физическое содержание обобщенных решений**

В настоящей главе (§ 17, 18, 19) будет установлена разрешимость основных нелинейных краевых задач для уравнений (7.65), (7.77) и граничных условий (6.2), (6.20), (7.9), (7.27). Охарактеризуем в общих чертах ход наших рассуждений. В § 17 будут введены обобщенные решения указанных краевых задач, имеющие вполне определенный физический смысл. Отыскание этих обобщенных решений будет сведено к решению некоторого НОУ (17.19), причем оператор  $G_*$  оказывается усиленно непрерывным в  $H_*$  (теорема 18.1). Таким образом, можно вычислять вращение векторного поля  $w - G_*(w)$  на сферах достаточно большого радиуса в  $H_*$ . Это вычисление основывается на гомотопности поля  $w - G_*(w)$  полю  $w$  на сферах большого радиуса в  $w$ . Гомотопность устанавливается в § 19 на основе неравенства (19.27), теорема 19.1. Таким образом, центральным пунктом доказательства оказывается это неравенство. Само неравенство (19.27) базируется на свойствах некоторого функционала  $\Pi_4(w)$ , введенного в § 19. Функционал  $\Pi_4(w)$  оказывается слабо непрерывным функционалом, и на некоторой части сферы  $\Sigma_{H_*}(R, 0)$  имеет место неравенство (19.21), из которого вытекает (19.27) на этой же части сферы  $\Sigma_{H_*}(R, 0)$ . На остальной части  $\Sigma_{H_*}(R, 0)$  (19.21) получается с помощью некоторых других рассмотрений (теорема 19.1). Таков общий ход доказательства теоремы разрешимости. ■

17.1. Прежде всего сформулируем условия, которые будут считаться выполненными при дальнейшем анализе.

- 1)  $S$  — регулярная поверхность, принадлежащая  $C_2^2$ ;
- 2)  $\Omega$  — соболевская область класса  $(2, 2, 2)$ ;
- 3)  $\Gamma$  — кусочно-гладкий контур класса  $C_1'$ ;
- 4) материал оболочки регулярен и, значит, выполнено условие (4.28), причем  $D_n^{ijkl}$ ,  $C_*^{\lambda\mu\sigma\tau}$  кусочно-непрерывны в  $\bar{\Omega}$ ;
- 5) сочетание граничных условий на  $\Gamma$  и коэффициенты упругости  $k_n^{44}$  таковы, что возможно образование одного из пространств  $H_*$ ,  $\kappa = 1, 2$ .

Таким образом, в силу условия 5 наша теория охватывает случаи, когда  $\Gamma_1 > 0$ , или если  $\Gamma_1 = 0$ , то на  $\Gamma_2$  должны быть точки, где  $\kappa_2 \neq 0$ , или же связи на  $\Gamma_2$  должны быть существенно упругими, т. е.  $k_{ii}^{44}(s) \geq m > 0$ . Иными словами, в наших рассмотренных выполнены условия лемм 12.3—12.5 и  $\kappa = 1, 2$ . При этом всегда будет выполнено условие (7.8). Далее,

6) существует функция  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$  такая, что

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w}; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial m} \right|_{\Gamma_1} = \tilde{w}_4. \quad (17.1)$$

Иными словами,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_4$  считаются допустимыми. Достаточные условия на  $\Gamma$  и необходимые и достаточные условия на  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_4$  даются леммой 12.4 (соотношения (12.65));

7) нагрузочный комплекс  $[\tilde{T}_{\check{4}}^{ij}, R^3, \tilde{M}^m]$  принадлежит  $\bar{H}_{\kappa}$ ;  $T_{\check{4}}^{ij} \in L_{2\Omega}$ ;

8) оболочка развертывающаяся. ■

17.2. При выводе уравнений (7.65), (7.77) и статического граничного условия (6.20) предполагалось, что как решение  $w$ ,  $\Psi$ , так и исходные данные задачи достаточно гладкие. Именно, предполагалось, что  $w, \Psi \in C_{\Omega}^4$  и что это решение удовлетворяет (7.65), (7.77) в каждой внутренней точке  $\Omega$  и граничным условиям (6.2), (6.20), (7.9), (7.27) в каждой точке  $\Gamma$ , за исключением точек смены типа граничных условий;  $D_{ii}^{ijkl}, C_{*}^{\lambda\mu st} \in C_{\Omega}^2$ ;  $T_{\check{4}}^{ij}, R^3, R^s \in C_{\Omega}$ ;  $k_{ii}^{44}, \tilde{M}^m \in C_{\Gamma_2}$ . Столь жесткие требования к исходным данным заставляют и здесь обратиться к постановке задач в обобщенных решениях.

Определение 17.1. Обобщенным решением задачи 9 $\kappa$  будем называть пару функций  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ ,  $\Psi \in H_9$ , удовлетворяющую интегральным тождествам

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\check{4}}^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (\tilde{T}_{\check{4}}^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds, \quad (17.2)$$

$$(\Psi \cdot \theta)_{H_9} = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (w B_{ij} - \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \theta \, d\Omega - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\check{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega. \quad (17.3)$$

Если сравнить (17.2), (17.3) и (7.65), (7.77), то можно заметить их идентичность, положив  $\delta w = \varphi$  и  $\delta \Psi = \theta$ . Таким образом, физический смысл обобщенного решения (17.1) заключается в том, что

$\varphi$  и  $\Psi$  удовлетворяют смешанному вариационному принципу Алуэ, который, как известно, включает в себя уравнения равновесия и совместности. ■

Лемма 17.1. Пусть выполнены условия 1—5, 7 § 17. В этом случае определение 17.1 обобщенного решения (17.2), (17.3) корректно в том смысле, что каждый член в правых частях (17.2) — (17.3) определен, если  $w \in H_x$ ,  $\Psi \in H_\theta$ . При этом правые части являются линейными и ограниченными функционалами соответственно в  $H_x$ ,  $H_\theta$  относительно  $\varphi$ ,  $\theta$ .

Для доказательства леммы 17.1 учтем, что вследствие теоремы 12.3, если  $\varphi$ ,  $w \in H_x$ , то  $\varphi$ ,  $w \in C_\alpha$ ;  $\varphi_{\alpha i}$ ,  $w_{\alpha j} \in L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$  и  $\nabla_{ij} w \in L_{2\Omega}$ . Кроме того, если  $\Psi$ ,  $\theta \in H_\theta$ , то  $\nabla_{kl} \Psi$ ,  $\nabla_{ij} \theta \in L_{2\Omega}$ . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega \right| &\leq \|C^{ik} C^{jl} B_{ij}\|_{C_\Omega} \|\varphi\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} + \\ &+ \|C^{ik} C^{jl} \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|C^{ik} C^{jl} B_{ij}\|_{C_\Omega} \|\varphi\|_{H_x} \|\Psi\|_{H_\theta} 1_{kl} + \\ &+ m 1_{ijkl} \|C^{ik} C^{jl}\|_{C_\Omega} \|\varphi\|_{L_{4\Omega}} \|w\|_{L_{4\Omega}} \|\Psi\|_{H_\theta} \leq m \|\varphi\|_{H_x} \|\Psi\|_{H_\theta} (1 + \|w\|_{H_x}). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Далее, в силу условия 7 и формул (12.14), имеем

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega \right| \leq \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi\|_{L_{4\Omega}}, \quad (17.5)$$

откуда в силу теоремы 12.3 получаем

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega \right| \leq m \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w\|_{H_x} \|\varphi\|_{H_x}. \quad (17.6)$$

Наконец, в силу того же условия 7 получаем

$$\left| \int_{\Omega} (\tilde{T}_4^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds \right| = |(w_\Pi^* \cdot \varphi)_{H_x}| \leq \|w_\Pi^*\|_{H_x} \|\varphi\|_{H_x}. \quad (17.7)$$

Таким образом, все члены правой части (17.2) определены и, кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (\tilde{T}_4^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds \right| \leq m \|\varphi\|_{H_x} [\|\Psi\|_{H_\theta} (1 + \|w\|_{H_x}) + \\ + \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w\|_{H_x} + \|w^*\|_{H_x}]. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Лемма 17.1 в отношении правой части (17.2) доказана.

Аналогичными рассуждениями для первого члена правой части (17.3) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \left( w B_{ij} - \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \right) \nabla_{kl} \theta \, d\Omega \right| &\leq \| C^{ik} C^{jl} B_{ij} \|_{C_{\Omega}} \| w \|_{L_{2\Omega}} \| \nabla_{kl} \theta \|_{L_{2\Omega}} + \\ &+ \frac{1}{2} \| C^{ik} C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \|_{L_{2\Omega}} \| \nabla_{kl} \theta \|_{L_{2\Omega}} \leq m \| \theta \|_{H_9} (1_{kl} \| C^{ik} C^{jl} B_{ij} \|_{C_{\Omega}} \| w \|_{H_{\kappa}} + \\ &+ \| w_{\alpha i} \|_{L_{4\Omega}} \| w_{\alpha j} \|_{L_{4\Omega}} 1^{ij}) \leq m \| \theta \|_{H_9} \| w \|_{H_{\kappa}} (1 + \| w \|_{H_{\kappa}}). \end{aligned} \quad (17.9)$$

Кроме того, в силу условия 7 последний член в правой части (17.3) оценивается так (соотношение (12.75)):

$$\left| \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega \right| \leq m 1_{ij} \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}} \| \theta \|_{H_9}. \quad (17.10)$$

Из (17.9), (17.10) следует

$$\begin{aligned} \left| - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \left( w B_{ij} - \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \right) \nabla_{kl} \theta \, d\Omega - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega \right| &\leq \\ &\leq m \| \theta \|_{H_9} [\| w \|_{H_{\kappa}} (1 + \| w \|_{H_{\kappa}}) + 1_{ij} \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|]. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Таким образом, лемма 17.1 в отношении правой части (17.3) установлена, что и завершает ее доказательство. ■

Для дальнейших рассмотрений целесообразно ввести замену

$$w \sim w^* + w, \quad (17.12)$$

$$w^* = \overset{0}{w} + w_{\Pi}, \quad \Psi \sim \Psi, \quad (17.13)$$

где  $\overset{0}{w}$  дается условием 6 § 17 (соотношение (17.1)), а  $w_{\Pi}$  дается условием 7 (соотношение (12.75)). Таким образом, введя новую функцию прогиба оболочки, мы сохранили за ней старое обозначение, но теперь уже  $w \in H_{\kappa}$ . При этом определение обобщенного решения (17.2), (17.3) примет следующую форму:

$$\begin{aligned} (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = - (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} (w^* + w)_{\alpha j}] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (17.14)$$

$$\begin{aligned} (\Psi \cdot \theta)_{H_9} = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \left[ (w + w^*) B_{ij} - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] \times \\ \times \nabla_{kl} \theta \, d\Omega - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega. \end{aligned} \quad (17.15)$$

**17.3.** Для сведения краевой задачи  $9\kappa$  к операторному уравнению учтем, что правая часть (17.3) и, значит, (17.15) есть линейный функционал относительно  $\theta$  в  $H_9$ . Поэтому, в силу теоремы Рисса, имеем

$$\int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij} (w + w^*) \right] \nabla_{kl} \theta \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\square}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega = (K_{9\kappa}(w, w^*, \tilde{T}_{\square}^{ij}) \cdot \theta)_{H_9}, \quad (17.16)$$

где  $K_{9\kappa}(w, w^*)$  зависит от  $w^* + w$ . Из (17.15), (17.16), в силу произвольности  $\theta$ , имеем

$$\Psi = K_{9\kappa}(w, w^*, \tilde{T}_{\square}^{ij}). \quad (17.17)$$

Подставив (17.17) в правую часть (17.14), снова получаем линейный функционал уже относительно  $\varphi$ , который по теореме Рисса представим в виде

$$- (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} [B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} (w^* + w)_{\alpha j}] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\square}^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega = (G_{\kappa}(w) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}, \quad (17.18)$$

где  $G_{\kappa}(w)$  есть элемент  $H_{\kappa}$ , реализующий указанное представление. Очевидно,  $G_{\kappa}(w)$  зависит от  $w^*, w$ . Поскольку для нас особенно важна зависимость  $G_{\kappa}$  от  $w$ , а  $w^*, w$  фиксированы, то это отразилось и в обозначении. Из (17.14), (17.18) имеем

$$w = G_{\kappa}(w). \quad (17.19)$$

Таким образом, отыскание обобщенного решения задачи  $9\kappa$  сведено нами к определению неподвижной точки отображения, даваемого оператором  $G_{\kappa}$ , и к последующему определению  $\Psi$  из (17.15), (17.17).

Иногда нам будет удобно записывать систему (17.19), (17.17) в виде одного уравнения

$$c = G_{9\kappa}(c), \quad (17.20)$$

где  $c \in H_{9\kappa}$  имеет составляющие  $\Psi$  и  $w$ . Оператор  $G_{9\kappa}$  имеет составляющие  $K_{9\kappa}, G_{\kappa}$ .

На основании вышеизложенного заключаем, что справедлива

**Теорема 17.1.** Для того чтобы пара функций  $w, \Psi \in H_{9\kappa}$  была обобщенным решением задачи  $9\kappa$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла (17.19) и (17.17) или (17.20).

Отметим в заключение, что (17.17) можно трактовать как некоторую гиперповерхность в  $H_{9\kappa}$  (некоторый «параболоид»), которую ниже будем называть ГП2. Таким образом, приходим к выводу, что все обобщенные решения задачи 9 $\kappa$  лежат в  $H_{9\kappa}$  на ГП2.

17.4. Покажем, что определению обобщенного решения (17.2), (17.3) можно придать другую, также весьма полезную форму. Для этого получим некоторые вспомогательные соотношения.

Лемма 17.2. Пусть  $\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \in L_{2\Omega}$ . В этом случае агрегат  $R^s w_{\alpha^s}$  порождает линейный функционал в  $H_{9\kappa}$ . Иными словами, вычислим

$$\int_{\Omega} R^t w_{\alpha^t} \varphi d\Omega, \quad (17.21)$$

причем

$$\left| \int_{\Omega} R^t w_{\alpha^t} \varphi d\Omega \right| \leq m \| \varphi \|_{H_{9\kappa}} \| w \|_{H_{9\kappa}}. \quad (17.22)$$

Для доказательства учтем, что  $\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}$  есть решение неоднородной системы (6.17), и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^j} \varphi_{\alpha^i} d\Omega &= \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^j} D \varphi_{\alpha^i} d\alpha^1 d\alpha^2 = - \int_{\Omega} (\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^j} D)_{\alpha^i} \varphi d\alpha^1 d\alpha^2 = \\ &= - \int_{\Omega} [(\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} D)_{\alpha^i} w_{\alpha^j} + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} D w_{\alpha^i \alpha^j}] \varphi d\alpha^1 d\alpha^2. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Учтя (6.17), имеем

$$(\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} D)_{\alpha^i} = - G_{st}^j \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{st} - DR^j, \quad (17.24)$$

откуда

$$\int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^j} \varphi_{\alpha^i} d\Omega = - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} w \varphi d\Omega + \int_{\Omega} R^t w_{\alpha^t} d\Omega \quad (17.25)$$

и, значит,

$$\left| \int_{\Omega} R^t w_{\alpha^t} \varphi d\Omega \right| = \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} w \varphi d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} d\Omega \right| \leq \quad (17.26)$$

$$\leq \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}} (\| \nabla_{ij} w \|_{L_{2\Omega}} \| \varphi \|_{C_{\Omega}} + \| w_{\alpha^i} \|_{L_{4\Omega}} \| \varphi_{\alpha^j} \|_{L_{4\Omega}}). \quad (17.27)$$

Учтя неравенства теоремы 12.3 (соотношения (12.48), (12.49)), из (17.27) получим

$$\left| \int_{\Omega} R^t w_{\alpha^t} \varphi d\Omega \right| \leq m \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \| w \|_{H_{9\kappa}} \| \varphi \|_{H_{9\kappa}}, \quad (17.28)$$

что доказывает лемму 17.2. ■

**Лемма 17.3.** Пусть

$$\Psi \in H_9, w \in W_{2\Omega}^{(2)}, \varphi \in H_*,$$

оболочка развертывающаяся. В этом случае справедливо соотношение

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi \nabla_{ij} w \varphi d\Omega. \quad (17.29)$$

Для доказательства заметим, что (17.29) для развертывающейся оболочки ( $K \equiv 0$ ) уже доказано в § 7 соотношение (7.60), где надо положить  $\delta w = \varphi$ . Однако при этом предполагалось, что

$$\Psi \in C_{\Omega}^3; \varphi, w \in C_{\Omega}^2.$$

В наших условиях подберем такие последовательности

$$\Psi_n \in C_{\Omega}^4; \varphi_n, w_n \in C_{\Omega}^2,$$

что

$$w_n \Rightarrow w \text{ в } W_{2\Omega}^{(2)};$$

$$\Psi_n \Rightarrow \Psi \text{ в } H_9; \quad (17.30)$$

$$\varphi_n \Rightarrow \varphi \text{ в } H_*.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (\nabla_{ij} w \varphi + w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi d\Omega - \\ & \quad - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (\nabla_{ij} w_n \varphi_n + w_{n\alpha i} \varphi_{n\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi_n d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [(\nabla_{ij} w - \nabla_{ij} w_n) \varphi + \nabla_{ij} w_n (\varphi - \varphi_n)] \nabla_{kl} \Psi d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [(\varphi - \varphi_n) \nabla_{ij} w_n + (\varphi_{\alpha j} - \varphi_{n\alpha j}) w_{n\alpha i}] \nabla_{kl} \Psi d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [(\nabla_{kl} \Psi - \nabla_{kl} \Psi_n) (\nabla_{ij} w_n \varphi_n + w_{n\alpha i} \varphi_{n\alpha j})] d\Omega. \quad (17.31) \end{aligned}$$

При этом из (17.30) в силу теоремы 10.5 для  $w$ , неравенств (10.24), (10.26) и теоремы вложения 12.3 для  $\varphi$ ,  $\Psi$  (формулы (12.48), (12.49), (12.51)) имеем

$$\nabla_{ij} w_n \Rightarrow \nabla_{ij} w, \nabla_{kl} \Psi_n \Rightarrow \nabla_{kl} \Psi \text{ в } L_{2\Omega}, \varphi_n \Rightarrow \varphi \text{ в } C_{\Omega},$$

$$\varphi_{n\alpha i} \Rightarrow \varphi_{\alpha i} \text{ в } L_{q\Omega} \text{ при любом } q \geq 1. \quad (17.32)$$

Из (17.31), (17.32) легко заключаем, что правая часть (17.31) исчезает при  $n \rightarrow \infty$ . Например, для первого члена правой части

(17.35) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [(\nabla_{ij} w - \nabla_{ij} w_n) \varphi + \nabla_{ij} w_n (\varphi - \varphi_n)] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (\nabla_{ij} w - \nabla_{ij} w_n) \varphi \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{ij} w_n (\varphi - \varphi_n) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega \right| \leq \\ & \leq \|C^{ik} C^{jl} \varphi\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{ij} w - \nabla_{ij} w_n\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} + \\ & + \|C^{ik} C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|\varphi - \varphi_n\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{ij} w_n\|_{L_{2\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} \rightarrow 0. \quad (17.33) \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается исчезновение остальных членов правой части (17.31). Учтем теперь, что второй член левой части (17.31) есть нуль в силу (7.60).

Лемма 17.3 доказана. ■

Лемма 17.4. Пусть  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ ,  $\theta \in H_9$ . Тогда

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} w B_{ij} \theta \, d\Omega = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} w B_{ij} \nabla_{kl} \theta \, d\Omega, \quad (17.34)$$

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} w \nabla_{ij} w \theta \, d\Omega = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \nabla_{kl} \theta \, d\Omega. \quad (17.35)$$

Соотношение (17.34) установлено в § 7 (формулы (7.67)), где надо положить  $\delta \Psi \equiv \theta$ . Однако при этом полагалось, что  $w, \theta \in C_{\Omega}^2$ ,  $S \in C_{\Omega}^3$ .

В условиях леммы 17.4 эта формула доказывается путем предельного перехода, как и соотношение (17.29). Далее, (17.35) получается, как и (17.34). Вначале (17.35) доказывается для гладких  $w, \theta$ , а затем производится предельный переход. ■

Лемма 17.5. Пусть  $w + w^* \in W_{2\Omega}^{(2)}$ ,  $\varphi \in H_{\kappa}$ ,  $\Psi \in H_9$ . В этом случае справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j}] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} [C^{ik} C^{jl} [B_{ij} + \nabla_{ij} (w + w^*)] \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} (w + w^*) - R^t w_{\alpha i}] \varphi \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} [C^{ik} C^{jl} [B_{ij} + \nabla_{ij} (w + w^*)] \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} (w + w^*) - \tilde{R}^t w_{\alpha i}] \varphi \, d\Omega, \\ & \qquad \qquad \qquad R^t = R^t. \quad (17.36) \end{aligned}$$

При доказательстве (17.36) использовались соотношения (17.29), (17.25) в предположении  $w \sim w + w^*$ .



**Лемма 17.6.** Пусть выполнены условия леммы 17.4. В этом случае справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ C^{ih} C^{jl} \nabla_{hl} (w + w^*) \left( B_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_{ij} (w + w^*) \right) \theta + C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \right] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ C^{ih} C^{jl} \left[ (w + w^*) B_{ij} - \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] + C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \right\} \nabla_{hl} \theta d\Omega. \end{aligned} \quad (17.37)$$

При выводе (17.37) использовались (17.34), (17.35), где было положено  $w \sim w + w^*$ .

**Теорема 17.2.** Для того чтобы пара функций  $w \in H_{\kappa}$  и  $\Psi \in H_9$  была обобщенным решением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из интегральных тождеств

$$\begin{aligned} (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = - (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} \{ C^{ih} C^{jl} [B_{ij} + \nabla_{ij} (w + w^*)] \nabla_{hl} \Psi + \\ + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} (w + w^*) - R^i w_{\alpha i} \} \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (17.38)$$

$$\begin{aligned} (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = - (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} \{ C^{ih} C^{jl} [B_{ij} + \nabla_{ij} (w + w^*)] \nabla_{hl} \Psi + \\ + \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{ij} (w + w^*) - \tilde{R}^i w_{\alpha i} \} \varphi d\Omega \end{aligned} \quad (17.39)$$

и интегральное тождество

$$\begin{aligned} (\Psi \cdot \theta)_{H_9} = - \int_{\Omega} \left[ C^{ih} C^{jl} \nabla_{hl} (w + w^*) \left( B_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_{ij} (w + w^*) \right) \theta + \right. \\ \left. + C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (17.40)$$

## § 18. Основные свойства операторов $K_{g_{\kappa}}(w)$ , $G_{\kappa}(w)$

**Лемма 18.1.** Имеют место представления

$$K_{g_{\kappa}}(w) = K_{g_{\kappa 0}} + K_{g_{\kappa 1}}(w) + K_{g_{\kappa 2}}(w), \quad (18.1)$$

$$G_{\kappa}(w) = G_{\kappa 0} + G_{\kappa 1}(w) + G_{\kappa 2}(w) + G_{\kappa 3}(w), \quad (18.2)$$

где  $K_{g_{\kappa \mu}}$ ,  $G_{\kappa \mu}$  — однородные операторы порядка  $\mu$ . При этом справедливы оценки

$$\| K_{g_{\kappa \mu}}(w) \|_{H_9} \leq m \| w \|_{H_{\kappa}}^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (18.3)$$

$$\| G_{\kappa \mu}(w) \|_{H_{\kappa}} \leq m \| w \|_{H_{\kappa}}^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (18.4)$$

Для доказательства рассмотрим соотношение (17.16), определяющее  $\mathbf{K}_{9\kappa}(w)$ . Из него непосредственно вытекает

$$\int_{\Omega} \left[ C^{ik} C^{i\mu} \left( \frac{1}{2} w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* - w^* B_{ij} \right) - C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\mu}^{ij} \right] \nabla_{\lambda\mu} \theta \, d\Omega = (\mathbf{K}_{9\kappa 0} \cdot \theta)_{H_9}. \quad (18.5)$$

Соотношение (18.5) и определяет  $\mathbf{K}_{9\kappa 0}$  как некоторый элемент пространства  $H_9$ .

Далее, из (17.15) также получаем

$$(\mathbf{K}_{9\kappa 1} \cdot \theta)_{H_9} = - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (-w B_{ij} + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \theta \, d\Omega. \quad (18.6)$$

Из (18.6) вытекает

$$\| \mathbf{K}_{9\kappa 1}(w) \|_{H_9} \leq m (\| C^{ik} C^{jl} B_{ij} \|_{C_{\Omega}} \mathbf{1}_{kl} + \| C^{ik} C^{jl} \|_{C_{\Omega}} \| w_{\alpha i}^* \|_{L_4} \mathbf{1}_{jkl}) \| w \|_{H_{\kappa 1}}. \quad (18.7)$$

Наконец, получаем

$$(\mathbf{K}_{9\kappa 2}(w) \cdot \theta)_{H_9} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \nabla_{kl} \theta \, d\Omega, \quad (18.8)$$

откуда

$$\| \mathbf{K}_{9\kappa 2}(w) \|_{H_9} \leq m \| C^{ik} C^{jl} \|_{C_{\Omega}} \mathbf{1}_{ijkl} \| w \|_{H_{\kappa}}^2. \quad (18.9)$$

Соотношения (18.1) доказаны. ■

Рассмотрим теперь формулу (17.18), определяющую  $\mathbf{G}_{\kappa}$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{\kappa 0} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = & - (\dot{w} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}^*) \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 0} \, d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \tilde{T}_{\mu}^{ij} w_{\alpha i}^* \varphi_{\alpha j} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Соотношение (18.10) и определяет  $\mathbf{G}_{\kappa 0}$  как элемент  $H_{\kappa}$ .

Из (17.18), утя (18.1), имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{\kappa 1}(w) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = & \int_{\Omega} [C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 1}(w) (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}^*) - \\ & - C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 0} \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j} + \tilde{T}_{\mu}^{ij} w_{\alpha i}^* \varphi_{\alpha j}] \, d\Omega, \end{aligned} \quad (18.11)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} |(\mathbf{G}_{\kappa 1}(w) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}| \leq & \| C^{ik} C^{jl} B_{ij} \|_{C_{\Omega}} \| \varphi \|_{L_{2\Omega}} \| \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 1}(w) \|_{L_{2\Omega}} + \\ & + \| C^{ik} C^{jl} \|_{C_{\Omega}} (\| \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 1}(w) \|_{L_{2\Omega}} \| \varphi_{\alpha i} \|_{L_{4\Omega}} \| w_{\alpha j}^* \|_{L_{4\Omega}} + \\ & + \| \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 0} \|_{L_{2\Omega}} \| \varphi_{\alpha i} \|_{L_{4\Omega}} \| w_{\alpha j}^* \|_{L_{4\Omega}} + \| \nabla_{kl} \mathbf{K}_{9\kappa 0} \|_{L_{2\Omega}} \| \varphi_{\alpha i} \|_{L_{4\Omega}} \| w \|_{L_{4\Omega}}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha i}\|_{L_{4\Omega}} \|\varphi_{\alpha j}\|_{L_{4\Omega}} \leq m \|\varphi\|_{H_{\kappa}} \|w\|_{H_{\kappa}} (1_{kl} \|C^{ik}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} + \\
& + 1_{ikl} \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} + \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl}K_{g_{\kappa 0}}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} + \|\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij}).
\end{aligned} \tag{18.12}$$

Из (18.12) вытекает

$$\begin{aligned}
\|G_{\kappa 1}(w)\|_{H_{\kappa}} & \leq m (1_{kl} \|C^{ik}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} + 1_{ikl} \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} + \\
& + 1_{ij} \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl}K_{g_{\kappa 0}}\|_{L_{2\Omega}} + 1_{ij} \|\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}\|_{L_{2\Omega}}) \|w\|_{H_{\kappa}}.
\end{aligned} \tag{18.13}$$

Таким образом, (18.4) установлено при  $\mu = 1$ .

Для  $\mu = 2$  из (17.18), (18.1) следует

$$\begin{aligned}
(G_{\kappa 2}(w) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} & = \int_{\Omega} [C^{ik}C^{jl} \nabla_{kl} K_{g_{\kappa 2}}(w) (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}^*) - \\
& - C^{ik}C^{jl} \nabla_{kl} K_{g_{\kappa 1}}(w) \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}] d\Omega,
\end{aligned} \tag{18.14}$$

и из (18.14) получаем

$$\begin{aligned}
\|G_{\kappa 2}(w)\|_{H_{\kappa}} & \leq m (\|C^{ik}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl}K_{g_{\kappa 2}}(w)\|_{L_{2\Omega}} + \\
& + \|C^{ik}C^{jl}w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \|\nabla_{kl}K_{g_{\kappa 2}}(w)\|_{L_{2\Omega}} + \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|K_{g_{\kappa 1}}(w)\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha j}\|_{L_{4\Omega}}) \leq \\
& \leq m (\|C^{ik}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} 1_{kl} + \|C^{ik}C^{jl}w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} 1_{ikl} + \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl}) \|w\|_{H_{\kappa}}^2,
\end{aligned} \tag{18.15}$$

и (18.4) установлено для  $\mu = 2$ . Наконец, при  $\mu = 3$  из (17.18), (18.1) следует

$$(G_{\kappa 3}(w) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} = - \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl} \nabla_{kl} K_{g_{\kappa 2}}(w) \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega \tag{18.16}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}
\|G_{\kappa 3}(w)\|_{H_{\kappa}} & \leq m \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl}K_{g_{\kappa 2}}(w)\|_{L_{2\Omega}} \|w\|_{L_{4\Omega}} \leq \\
& \leq m \|C^{ik}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|w\|_{H_{\kappa}}^3.
\end{aligned} \tag{18.17}$$

Лемма 18.1 доказана полностью. ■

Теорема 18.1. Каждый из операторов  $K_{g_{\kappa}}(w)$ ,  $K_{g_{\kappa \mu}}(w)$  действует из  $H_{\kappa}$  в  $H_9$  усиленно непрерывно.

Пусть

$$w_n \rightarrow w \text{ в } H_{\kappa}. \tag{18.18}$$

Из (18.6) имеем

$$\begin{aligned}
((K_{g_{\kappa 1}}(w) - K_{g_{\kappa 1}}(w_n)) \cdot \theta)_{H_9} & = \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl}B_{ij}(w - w_n) \nabla_{kl}\theta d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl}w_{\alpha j}^* \nabla_{kl}\theta (w_{n\alpha j} - w_{\alpha j}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{18.19}$$

откуда

$$\begin{aligned} |((\mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w) - \mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w_n)) \cdot \theta)_{H_\theta})| &\leq \left| \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} B_{ij}(w - w_n) \nabla_{hl} \theta \, d\Omega \right| + \\ + \left| \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} w_{\alpha j}^* (w_{n\alpha i} - w_{\alpha i}) \nabla_{hl} \theta \, d\Omega \right| &\leq m (\|C^{ih} C^{jl} B_{ij}\|_{1kl} \|w - w_n\|_{L_2\Omega} + \\ + \|C^{ih} C^{jl}\|_{C_\Omega} \|w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} \|w_{n\alpha i} - w_{\alpha i}\|_{L_{4\Omega}}) &\|\theta\|_{H_\theta}. \quad (18.20) \end{aligned}$$

В силу усиленной непрерывности оператора вложения (теорема 12.3, соотношение (12.52)) заключаем, что коэффициент при  $\|\theta\|_{H_\theta}$  в правой части (18.20) исчезает при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда

$$\|\mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w) - \mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w_n)\|_{H_\theta} \rightarrow 0. \quad (18.21)$$

Утверждение теоремы 18.1 в отношении  $\mathbf{K}_{\theta \kappa 1}$  доказано. ■

Для  $\mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w)$  из (18.8) следует

$$((\mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w) - \mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w_n)) \cdot \theta)_{H_\theta} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{jh} C^{il} (w_{n\alpha i} w_{n\alpha j} - w_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{hl} \theta \, d\Omega, \quad (18.22)$$

откуда

$$\|\mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w) - \mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w_n)\|_{H_\theta} \leq m \|C^{ih} C^{jl}\|_{C_\Omega} \|w_{n\alpha i} w_{n\alpha j} - w_{\alpha i} w_{\alpha j}\|_{L_2\Omega}. \quad (18.23)$$

Далее, в силу той же теоремы вложения 12.3, соотношения (12.52)

$$w_{n\alpha i} \Rightarrow w_{\alpha i} \quad \text{в любом } L_{q\Omega}, \quad q \geq 1, \quad (18.24)$$

вследствие чего заключаем

$$\|\mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w) - \mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w_n)\|_{H_\theta} \rightarrow 0, \quad (18.25)$$

что и доказывает теорему 18.1 для  $\mathbf{K}_{\theta \kappa 2}(w)$ .

Теорема 18.1 доказана полностью. ■

Теорема 18.2. Все операторы  $\mathbf{G}_{\mu\kappa}$ ,  $\mathbf{G}_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , действуют в  $H_\kappa$  усиленно непрерывно.

Для доказательства рассмотрим соотношение (18.11), определяющее оператор  $\mathbf{G}_{\kappa 1}(w)$ . Имеем

$$\begin{aligned} ((\mathbf{G}_{\kappa 1}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 1}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_\kappa} &= \int_{\Omega} [C^{ih} C^{jl} \nabla_{hl} (\mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w) - \\ - \mathbf{K}_{\theta \kappa 1}(w_n)) (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}^*) - (C^{ih} C^{jl} \nabla_{hl} \mathbf{K}_{\theta \kappa 0} - \tilde{T}_4^{ij}) \varphi_{\alpha i} (w_{\alpha j} - w_{n\alpha j})] &d\Omega, \quad (18.26) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{\kappa 1}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 1}(w_n)\|_{H_{\kappa}} &\leq m [ \|\nabla_{kl}(\mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w) - \\ &- \mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w_n))\|_{L_{2\Omega}} ( \|C^{ih}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} + \|C^{ih}C^{jl}w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} 1_i ) + \\ &+ \|C^{ih}C^{jl}\nabla_{kl}\mathbf{K}_{\theta\kappa 0} + \tilde{T}_4^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \cdot \|w_{\alpha j} - w_{n\alpha j}\|_{L_{4\Omega}} \cdot 1_i ]. \end{aligned} \quad (18.27)$$

В силу теоремы 12.3 о полной непрерывности оператора вложения (соотношение (12.52)), заключаем, что правая часть (18.26) исчезает при  $n \rightarrow \infty$ , и усиленная непрерывность  $\mathbf{G}_{\kappa 1}(w)$  доказана. ■

Для дальнейших рассуждений рассмотрим (18.14), определяющее  $\mathbf{G}_{\kappa 2}(w)$ . Имеем

$$\begin{aligned} ((\mathbf{G}_{\kappa 2}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 2}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} &= \int_{\Omega} C^{ih}C^{jl} [\nabla_{kl}(\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w) - \\ &- \mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w_n)) (B_{ij}\varphi - \varphi_{\alpha i}w_{\alpha j}^*) - \nabla_{kl}(\mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w)w_{\alpha j} - \mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w_n)w_{n\alpha j})\varphi_{\alpha i}] d\Omega, \end{aligned} \quad (18.28)$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{\kappa 2}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 2}(w_n)\|_{H_{\kappa}} &\leq m [ \|\nabla_{kl}(\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w) - \\ &- \mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w_n))\|_{L_{2\Omega}} ( \|C^{ih}C^{jl}B_{ij}\|_{C_{\Omega}} + \|C^{ih}C^{jl}w_{\alpha j}^*\|_{L_{4\Omega}} 1_i ) + \\ &+ \|\mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w)w_{\alpha j} - \mathbf{K}_{\theta\kappa 1}(w_n)w_{n\alpha j}\|_{L_{2\Omega}} \|C^{ih}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ikl} ]. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Поскольку имеет место (18.21), (18.25) и в силу теоремы вложения 12.3  $w_{n\alpha j} \Rightarrow w_{\alpha j}$  в любом  $L_{q\Omega}$ ,  $q \geq 1$ , то правая часть (18.29) исчезает при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,

$$\|\mathbf{G}_{\kappa 2}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 2}(w_n)\|_{H_{\kappa}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \quad (18.30)$$

Наконец, из (18.16) получаем

$$\begin{aligned} ((\mathbf{G}_{\kappa 3}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 3}(w_n)) \cdot \varphi)_{H_{\kappa}} &= \int_{\Omega} C^{ih}C^{jl} [\nabla_{kl}\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w)w_{\alpha j} - \\ &- \nabla_{kl}\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w_n)w_{n\alpha j}] \varphi_{\alpha i} d\Omega, \end{aligned} \quad (18.31)$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{\kappa 3}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 3}(w_n)\|_{H_{\kappa}} &\leq \\ &\leq m \|C^{ih}C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl}\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w)w_{\alpha j} - \nabla_{kl}\mathbf{K}_{\theta\kappa 2}(w_n)w_{n\alpha j}\|_{L_{2\Omega}}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Учтя (18.25) и теорему вложения 12.3, заключаем, что правая часть (18.32) исчезает при  $n \rightarrow \infty$ , и значит,

$$\|\mathbf{G}_{\kappa 3}(w) - \mathbf{G}_{\kappa 3}(w_n)\|_{H_{\kappa}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 18.2 доказана полностью. ■

§ 19. Вычисление вращения векторного поля  $w - G_{\kappa}(w)$  на сферах большого радиуса в  $H_{\kappa}$ . Разрешимость основных краевых задач теории геометрически пологих оболочек с функцией усилий

19.1. Рассмотрим функционал  $\Phi(w, t)$ , заданный в  $H_{\kappa} \times [0, 1]$  соотношением

$$\Phi(w, t) = ((w - tG_{\kappa}w) \cdot w)_{H_{\kappa}} = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - t(G_{\kappa}w \cdot w)_{H_{\kappa}}. \quad (19.1)$$

Лемма 19.1. Функционалу  $\Phi(w, t)$  можно придать вид

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) = & \|w\|_{H_{\kappa}}^2 + t \langle 2\|\Psi\|_{H_9}^2 + (w \cdot w)_{H_{\kappa}} + \\ & + \int_{\Omega} \{C^{ik}C^{jl}[-B_{ij}(w + 2w^*) + w_{\alpha}^*i w_{\alpha}^*j + w_{\alpha}^*i w_{\alpha}^*j + w_{\alpha}^*i w_{\alpha}^*j] + \\ & + 2C_{*ij}^{kl} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}\} \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j} \, d\Omega \rangle. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Для доказательства леммы 19.1 положим в уравнении (17.18), определяющем  $G_{\kappa}$ ,  $\varphi \equiv w$ . При этом получим

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) = & \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - t \left\{ - (w \cdot w)_{H_{\kappa}} + \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl} [B_{ij}w - w_{\alpha i}(w + w^*)_{\alpha j}] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j} \, d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Положим, далее, в уравнении (17.15), определяющем  $\Psi$ ,  $\theta = \Psi$ :

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{H_9}^2 = & \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl} \left[ \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij}(w + w^*) \right] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \Psi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Из (19.4) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega = & 2 \left\{ \|\Psi\|_{H_9}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ik}C^{jl} [w_{\alpha i}^* (w + w^*)_{\alpha j} + \right. \\ & \left. + w_{\alpha j}^* (w + w^*)_{\alpha i} - 2B_{ij}(w + w^*) \right] \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \Psi \, d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Подставив (19.5) в (19.3), получим (19.2). Лемма 19.1 доказана. ■

19.2. Рассмотрим функционал  $\Pi(w) = \|\Psi\|_{H_9}^2$ . Легко видеть, что вследствие (18.1) имеет место представление

$$\Pi(w) = \|\Psi\|_{H_9}^2 = \|\mathbf{K}_{9 \times 0} + \mathbf{K}_{9 \times 1} + \mathbf{K}_{9 \times 2}\|_{H_9}^2 = \sum_{\mu=0}^4 \Pi_{\mu}(w), \quad (19.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_0(w) &= \|\mathbf{K}_{9 \times 0}\|_{H_9}^2, & \Pi_1(w) &= 2(\mathbf{K}_{9 \times 0} \cdot \mathbf{K}_{9 \times 1})_{H_9}, \\ \Pi_2(w) &= \|\mathbf{K}_{9 \times 2}\|_{H_9}^2 + 2(\mathbf{K}_{9 \times 0} \cdot \mathbf{K}_{9 \times 2})_{H_9}, & (19.7) \\ \Pi_3(w) &= 2(\mathbf{K}_{9 \times 1} \cdot \mathbf{K}_{9 \times 2})_{H_9}, & \Pi_4(w) &= \|\mathbf{K}_{9 \times 2}\|_{H_9}^2. \end{aligned}$$

Лемма 19.2. Все функционалы  $\Pi_{\mu}(w)$  слабо непрерывны в  $H_{**}$ .

Для доказательства рассмотрим, например, функционал  $\Pi_2(w)$ , и пусть  $w_n \rightarrow w$ . В силу теоремы 18.1 об усиленной непрерывности  $\mathbf{K}_{9 \times \mu}$  имеем

$$\|\mathbf{K}_{9 \times \mu}(w) - \mathbf{K}_{9 \times \mu}(w_n)\|_{H_9} \rightarrow 0, \quad \mu = 1, 2, \quad (19.8)$$

и из (19.7) имеем

$$\Pi_2(w_n) \rightarrow \Pi_2(w), \quad (19.9)$$

что и доказывает справедливость леммы 19.2 для  $\Pi_2(w)$ . Совершенно аналогично она доказывается и для остальных  $\Pi_{\mu}(w)$ . ■

Следствие. Для всех  $\Pi_{\mu}(w)$  справедливо неравенство

$$|\Pi_{\mu}(w)| \leq m \|w\|_{H_{**}}^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (19.10)$$

Лемма 19.3. Соотношение  $\Pi_4(w) = 0$  в условиях 1, 5 § 17 возможно в том и только том случае, если

$$w = 0, \quad (19.11)$$

Учтем, что если  $\Pi_4(w) = 0$ , то из (19.7) следует

$$\mathbf{K}_{9 \times 2}(w) = 0 \quad (19.12)$$

и из соотношения (18.8), определяющего  $\mathbf{K}_{9 \times 2}$ , находим

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \nabla_{kl} \theta \, d\Omega = 0 \quad (19.13)$$

при любом  $\theta \in H_9$ . Из (17.35) и (19.13) получаем

$$\int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} w \nabla_{ij} w \theta \, d\Omega = 0 \quad (19.14)$$

и, значит,

$$\nabla_{11} w \nabla_{22} w - \nabla_{12}^2 w = 0. \quad (19.15)$$

Поскольку мы рассматриваем геометрически пологие оболочки, то существуют обобщенные координаты, где (19.15) запишется в виде

$$w_{\alpha^1 \alpha^1} w_{\alpha^2 \alpha^2} - w_{\alpha^1 \alpha^2}^2 = 0. \quad (19.16)$$

Далее, поскольку после замены (17.13)  $w \in H_*$ , но при условии (7.8), то на всем  $\Gamma$

$$w|_{\Gamma} = 0. \quad (19.17)$$

В силу (19.16), (19.17) мы находимся в условиях леммы 15.4, из которой следует (19.11). Лемма 19.3 доказана. ■

**19.3.** Как и в § 15, введем на сфере  $\Sigma(1, 0)$  в пространстве  $H_*$  множество  $\Sigma'(1, 0)$  функций таких, что имеет место неравенство

$$\|v\|_{H_*}^2 - \frac{1}{2} \frac{kl}{2} 3m \|C^{ik} C^{jl} (-B_{ij}v + v_{\alpha i} w_{\alpha j}^* + v_{\alpha j} w_{\alpha i}^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 - \int_{\Omega} \tilde{T}_{ij} v_{\alpha i} v_{\alpha j} d\Omega \leq \frac{1}{2}. \quad (19.18)$$

Пусть, далее,  $\bar{\Sigma}'(1, 0)$  есть слабое замыкание  $\Sigma'(1, 0)$  в  $H_*$ . Символом  $\Sigma''(1, 0)$  обозначим дополнение  $\Sigma'(1, 0)$  до всей сферы  $\Sigma(1, 0)$ . Таким образом,

$$\Sigma(1, 0) = \Sigma'(1, 0) \cup \Sigma''(1, 0). \quad (19.19)$$

Очевидно, на  $\Sigma''(1, 0)$  имеем

$$\|v\|_{H_*}^2 - \frac{1}{2} \frac{kl}{2} 3m \|C^{ik} C^{jl} (-B_{ij}v + v_{\alpha i} w_{\alpha j}^* + v_{\alpha j} w_{\alpha i}^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 - \int_{\Omega} \tilde{T}_{ij} v_{\alpha i} v_{\alpha j} d\Omega > \frac{1}{2}. \quad (19.20)$$

В соответствии с разбиением  $\Sigma(1, 0)$  каждая сфера  $\Sigma(R, 0)$  в  $H_*$  также разбивается на две части  $\Sigma'(R, 0)$  и  $\Sigma''(R, 0)$ , являющиеся соответственно центральными проекциями  $\Sigma'(1, 0)$  и  $\Sigma''(1, 0)$  с  $\Sigma(1, 0)$  на  $\Sigma(R, 0)$ . ■

**Лемма 19.4.** Множество  $\bar{\Sigma}'(1, 0)$  не содержит нуля.

**Лемма 19.4** доказывается так же, как и лемма 15.1. ■

**Лемма 19.5.** На  $\Sigma'(R, 0)$  имеет место неравенство

$$\Pi_4(w) \geq mR^4. \quad (19.21)$$

Для доказательства вначале установим, что на  $\Sigma'(1, 0)$  справедливо неравенство

$$\Pi_4(w) \geq m > 0. \quad (19.22)$$

Действительно, если бы (19.22) не имело места, то существовала бы последовательность  $w_n \in \Sigma'(1, 0)$  такая, что

$$\Pi_4(w_n) \rightarrow 0. \quad (19.23)$$

При этом можно считать, что  $w_n$  слабо сходится к  $w_0$  в  $H_*$ :

$$w_n \rightarrow w_0 \quad (19.24)$$



и в силу слабой непрерывности  $\Pi_4(w)$  имеем

$$\Pi_4(w_0) = 0. \quad (19.25)$$

Из леммы 19.3 получаем

$$w_0 = 0. \quad (19.26)$$

Однако это невозможно, так как  $w_0$  должно принадлежать  $\bar{\Sigma}'(1, 0)$ , а в силу леммы 19.4  $\bar{\Sigma}'(1, 0)$  не содержит нуля. Таким образом, (19.22) установлено. Но тогда из однородности  $\Pi_4(w)$  следует (19.21), и лемма 19.5 доказана. ■

19.4. Теорема 19.1. Пусть выполнены все условия 1—8 § 17. В этом случае на сферах большого радиуса  $R$  в  $H_x$  имеет место неравенство

$$\Phi(w, t) \geq \frac{1}{3} R^2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (19.27)$$

Для доказательства (19.27) зафиксируем некоторые неравенства, вытекающие из элементарного неравенства

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad (19.28)$$

справедливого при любых  $a, b$  и  $\varepsilon > 0$ , а также и из неравенства Коши — Буняковского — Шварца и неравенства (12.59)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j} + w_{\alpha j}^* w_{\alpha i}) \nabla_{hl} \Psi \, d\Omega \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon m \|\Psi\|_{H_9}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|C^{ih} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* + w_{\alpha j}^* w_{\alpha i})\|_{L_{2\Omega}}^2 \leq \\ &\leq \varepsilon m \|\Psi\|_{H_9}^2 + \frac{m}{\varepsilon} \|w\|_{H_x}^2, \quad (19.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} (-2B_{ij} w^* + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^*) \nabla_{hl} \Psi \, d\Omega \right| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} 4^{hl} \|\nabla_{hl} \Psi\|_{L_{2\Omega}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|C^{ih} C^{jl} (-2B_{ij} w^* + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^*)\|_{L_{2\Omega}}^2 \leq \\ &\leq \varepsilon m \|\Psi\|_{H_9}^2 + \frac{m}{\varepsilon}, \quad (19.30) \end{aligned}$$

$$|(w \cdot w)|_{H_x} \leq \|w\|_{H_x} \|w\|_{H_x}, \quad (19.31)$$

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_{\Omega} C_{*ij}^{kl} \tilde{T}_{ij}^{ij} \nabla_{hl} \Psi \, d\Omega \right| &\leq \|C_{*ij}^{kl}\|_{C_{\Omega}} \left( \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}}^2 \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon 4^{hl} \|\nabla_{hl} \Psi\|_{L_{2\Omega}}^2 \right) \leq \\ &\leq m \left( \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}}^2 \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \|\Psi\|_{H_9}^2 \right), \quad (19.32) \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{ij}^{ij} w_{\alpha i}^* w_{\alpha j} \, d\Omega \right| \leq \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha i}^*\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha j}\|_{L_{4\Omega}} \leq m \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \|w\|_{H_x} \|w^*\|_{H_x}, \quad (19.33)$$

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{ij}^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \, d\Omega \right| \leq \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha i}\|_{L_{4\Omega}} \|w_{\alpha j}\|_{L_{4\Omega}} \leq m \|\tilde{T}_{ij}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \|w\|_{H_x}^2. \quad (19.34)$$

Наконец, из (19.2), (19.29) — (19.34) следует

$$\begin{aligned}
 \Phi(w, t) &\geq \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ 2 \| \Psi \|_{H_\kappa}^2 - \| \overset{0}{w} \|_{H_\kappa} \| w \|_{H_\kappa} - \right. \\
 &- \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j} + w_{\alpha_j}^* w_{\alpha^i}) \nabla \Psi \cdot d\Omega \right| - 2 \left| \int_{\Omega} C_{*ij}^{kl} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \nabla_{kl} \Psi d\Omega \right| - \\
 &- \left| \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (-2B_{ij} w^* + w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j}^*) \nabla_{kl} \Psi d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i} w_{\alpha_j} d\Omega \right| - \\
 &- \left. \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j}^* d\Omega \right| \right\} \geq \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ 2 \| \Psi \|_{H_0}^2 - \| \overset{0}{w} \|_{H_\kappa} \| w \|_{H_\kappa} - \right. \\
 &- \varepsilon m \| \Psi \|_{H_0}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \| C^{ik} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha^i} w_{\alpha_j}^* + w_{\alpha_j} w_{\alpha^i}^*) \|_{L_{2\Omega}}^2 - \\
 &- m \left( \frac{1}{\varepsilon} \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} + \varepsilon \| \Psi \|_{H_0}^2 \right) - \varepsilon m \| \Psi \|_{H_0}^2 - \frac{m}{\varepsilon} - \\
 &- \left. \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i} w_{\alpha_j} d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j}^* d\Omega \right| \right\} = \\
 &= \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ (2 - 3\varepsilon m) \| \Psi \|_{H_0}^2 - \| \overset{0}{w} \|_{H_\kappa} \| w \|_{H_\kappa} - \right. \\
 &- \frac{1}{2\varepsilon} \| C^{ik} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha^i} w_{\alpha_j}^* + w_{\alpha_j} w_{\alpha^i}^*) \|_{L_{2\Omega}}^2 - \frac{m}{\varepsilon} \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} - \\
 &- \left. \frac{m}{\varepsilon} - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i} w_{\alpha_j} d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j}^* d\Omega \right| \right\}. \quad (19.35)
 \end{aligned}$$

Примем для  $\varepsilon$  соотношение

$$2 - 3\varepsilon m = 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{3m}. \quad (19.36)$$

Подставив (19.36) в (19.35), получим

$$\begin{aligned}
 \Phi(w, t) &\geq \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ \| \Psi \|_{H_0}^2 - \| \overset{0}{w} \|_{H_\kappa} \| w \|_{H_\kappa} - \right. \\
 &- 3m \frac{1}{2} \| C^{ik} C^{jl} (-B_{ij} w + w_{\alpha^i} w_{\alpha_j}^* + w_{\alpha_j} w_{\alpha^i}^*) \|_{L_{2\Omega}}^2 - \\
 &- \left. 3m^2 \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} - 3m^2 - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i} w_{\alpha_j} d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha^i}^* w_{\alpha_j}^* d\Omega \right| \right\}. \quad (19.37)
 \end{aligned}$$

Наконец, из (19.29), (19.33), (19.34) и (19.37) будем иметь

$$\begin{aligned}
 \Phi(w, t) &\geq \\
 &\geq \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ \| \Psi \|_{H_0}^2 - \| \overset{0}{w} \|_{H_\kappa} \| w \|_{H_\kappa} - 3m^2 \| w \|_{H_\kappa}^2 - 3m^2 \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \|_{L_{2\Omega}}^2 \mathbf{1}_{ij} - \right. \\
 &- \left. 3m^2 - m \| \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \| \mathbf{1}_{ij} \| w \|_{H_\kappa} (\| w \|_{H_\kappa} + \| w^* \|_{H_\kappa}) \right\}. \quad \blacksquare \quad (19.38)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\Phi(w, t)$  на  $\Sigma'(R, 0)$ . Из (19.38) вытекает

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_\kappa}^2 + t \left\{ \Pi_4(w) - \sum_{\mu=0}^3 \Pi_\mu(w) - \|w\|_{H_\kappa}^0 \|w\|_{H_\kappa} - \right. \\ & - 3m \|w\|_{H_\kappa}^2 - 3m^2 \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega}^2 1_{ij} - 3m^2 - \\ & \left. - m \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega} 1_{ij} \|w\|_{H_\kappa} (\|w\|_{H_\kappa} + \|w^*\|_{H_\kappa}) \right\}, \end{aligned}$$

и, учтя (19.10), (19.21), из (19.38) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & R^2 + t \{ mR^4 - m(1 + R + R^2 + R^3) - \|w\|_{H_\kappa}^0 R - 3m^2 R^2 - \\ & - 3m^2 \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega}^2 1_{ij} - 3m^2 - m \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega} 1_{ij} R (\|w^*\|_{H_\kappa} + R) \}. \quad (19.39) \end{aligned}$$

При достаточно большом  $R$  фигурная скобка в правой части (19.39) будет положительна, и тогда

$$\Phi(w, t) \geq R^2. \quad (19.40)$$

Таким образом, (19.27) установлена для  $w \in \Sigma'(R, 0)$ . ■

Для точек  $w \in \Sigma''(R, 0)$  из (19.37) выводим

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \|w\|_{H_\kappa}^2 - 3m \frac{1}{2} 1_{kl} \|C^{ih} C^{jl} (-B_{ij}w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* + \\ & + w_{\alpha j} w_{\alpha i}^*)\|_{L_2\Omega}^2 - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega \right| - \|w\|_{H_\kappa}^0 \|w\|_{H_\kappa} - 3m^2 \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega} 1_{ij} - \\ & - 3m^2 - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* d\Omega \right|. \quad (19.41) \end{aligned}$$

Далее, учтя, что  $\Sigma''(R, 0)$  есть центральная проекция  $\Sigma''(1, 0)$  на  $\Sigma(R, 0)$ , и соотношение (19.20), определяющее  $\Sigma''(1, 0)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_\kappa}^2 - \frac{3m}{2} 1_{kl} \|C^{ih} C^{jl} (-B_{ij}w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* + w_{\alpha i}^* w_{\alpha j})\|_{L_2\Omega}^2 - \\ - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega \right| > \frac{R^2}{2}, \quad (19.42) \end{aligned}$$

и тогда из (19.41), (19.42), (19.33) следует

$$\begin{aligned} \Phi(w, t) \geq & \frac{R^2}{2} - \|w\|_{H_\kappa}^0 R - 3m^2 \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2\Omega} 1_{ij} - \\ & - 3m^2 - m \|w^*\|_{H_\kappa} \|T_4^{ij}\|_{L_2\Omega} 1_{ij} R, \quad (19.43) \end{aligned}$$

откуда при больших  $R$  имеем (19.27). Теорема 19.1 доказана полностью. ■

**Теорема 19.2.** Пусть выполнены все условия 1—8 § 17. В этом случае векторное поле  $w - G_\kappa w$  гомотопно полю  $w$  на сфере

достаточно большого радиуса  $R$ , и, следовательно, его вращение на этих сферах есть  $+1$ .

Для доказательства конструируем поле  $\Pi(w, t) = w - tG_x w$ . Очевидно,  $\Pi(w, 0) = w$ ,  $\Pi(w, 1) = w - G_x w$ . Докажем теперь, что

$$\Pi(w, t) = w - tG_x w \neq 0 \quad \text{при} \quad \|w\|_{H_x} = R, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (19.44)$$

если  $R$  достаточно велико. Действительно, если при некотором  $w_0$  и  $0 \leq t_0 \leq 1$  имеет место соотношение

$$\Pi(w_0, t_0) = w_0 - t_0 G_x w_0 = 0, \quad (19.45)$$

то тогда

$$(\Pi(w_0, t_0) \cdot w_0)_{H_x} = \|w_0\|_{H_x}^2 - t_0 (G_x w_0 \cdot w_0)_{H_x} = \Phi(w_0, t_0) = 0, \quad (19.46)$$

что противоречит теореме 19.1. Теорема 19.2 доказана. ■

Теорема 19.3. Пусть выполнены условия 1—5, 8 § 17 и, кроме того,  $\tilde{T}_4^{ij} \in L_{2\Omega}$ . В этом случае для разрешимости краевой задачи  $\mathcal{R}_x$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 6—7 § 17, т. е. необходимо и достаточно, чтобы  $[\tilde{T}_4^{ij}, R^3, \bar{M}^m] \in \in H_x$  и  $\tilde{w}, \tilde{w}_4$  удовлетворяли условию 6 из 17.1, т. е. были бы допустимыми. При этом при задании обобщенного решения  $w, \Psi \in W_{2\Omega}^{(2)} \times H_9$  однозначно определяется  $w^*$ , т. е. комплекс  $[\tilde{T}_4^{ij}, R^3, \bar{M}^m]$ .

Достаточность вытекает из теоремы 19.2. Для доказательства необходимости рассмотрим соотношение (17.2), откуда

$$\begin{aligned} (w_{\Pi} \cdot \varphi)_{H_x} &= \int_{\Omega} (\tilde{T}_4^{ij} B_{ij} + R^3) \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds = \\ &= (w \cdot \varphi)_{H_x} - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (19.47)$$

Легко видеть, что правая часть, если  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ ,  $\varphi \in H_x$ ,  $\Psi \in H_9$ ,  $\tilde{T}_4^{ij} \in L_{2\Omega}$ , есть линейный в  $H_x$  функционал относительно  $\varphi$ . Аддитивность его очевидна. Установим ограниченность:

$$\begin{aligned} \left| (w \cdot \varphi)_{H_x} - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega \right| &\leq \\ &\leq m \left( \|w\|_{H_x} + \|C^{ik} C^{jl} B_{ij}\|_{C_{\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} + \|C^{ik} C^{jl}\|_{C_{\Omega}} \|w_{\alpha j}\|_{L_{4\Omega}} \|\nabla_{kl} \Psi\|_{L_{2\Omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \|w_{\alpha i}\|_{L_{4\Omega}} \right) \|\varphi\|_{H_x}. \end{aligned} \quad (19.48)$$

Наконец, если  $w \in H_x$ , то соответствующее ему полное перемещение  $w$ , равное  $w + w_{\Pi} + w$ , принадлежит  $W_{2\Omega}^{(2)}$ , откуда  $w \in W_{2\Omega}^{(2)}$ , и, значит, необходимо, чтобы  $\tilde{w}, \tilde{w}_4$  удовлетворяли условию 6 из 17.1. Однозначность определения  $w^*$ , т. е. комплекса  $[\tilde{T}_4^{ij} B_{ij} + R^3, \bar{M}^m]$ , очевидна. ■

**Теорема 19.4.** Пусть выполнены условия 1—8 § 17. В этом случае все решения краевой задачи  $\mathcal{R}$  лежат внутри некоторой сферы  $\Sigma_{H_*}(R, 0)$  радиуса  $R$  пространства  $H_*$ .

**Примечание 19.1.** Напомним читателю, что в нашем понимании разворачивающаяся оболочка имеет метрику срединной поверхности, близкую к метрике некоторой разворачивающейся поверхности в смысле (8.1).

Наконец, отметим, что все разъяснения § 16, содержащиеся в примечаниях 16.2—16.5, относятся к фактам, установленным теоремами 19.1—19.4. ■

**19.5.** Предположим, что краевая задача нелинейной теории оболочек имеет некоторую группу автоморфизмов  $\mathcal{R}$ , или, что то же, группу автоморфизмов имеет НОУ (17.14), (17.15). Пусть подпространства  $H_{*c}$ ,  $H_{*c}$  индуцированы этой группой.

**Теорема 19.5.** Пусть выполнены условия 1—8 § 17. Тогда векторное поле (19.44) при  $t=1$  имеет на сферах  $\Sigma_{H_{*c}}(R, 0)$  при достаточно большом  $R$  вращение  $+1$ . Кроме того, НОУ (17.14), (17.15) имеют по крайней мере одно решение. Все решения НОУ (17.14), (17.15) заключены в некоторой сфере подпространства  $H_{*c}$ .

**19.6.** Первые исследования по математическим проблемам нелинейной теории пластин и оболочек относятся к 1955 г. Именно тогда появилась работа автора [12], в которой был использован вариационный метод. При некоторых условиях закрепления для системы уравнений в перемещениях Власова была установлена разрешимость на каждом этапе системы  $n$  уравнений Бубнова — Галеркина и обоснован предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, была доказана и теорема разрешимости краевой задачи. В 1955 г. вышла работа М. Бергера [53], где рассмотрена первая краевая задача для уравнений Кармана. В 1957 г. появилось исследование Н. Ф. Морозова [38], в котором к доказательству разрешимости уравнений была применена теорема Гильдебрандта — Грейвса [60]. Впоследствии к проблеме разрешимости краевых задач для уравнений Кармана для пластин обращались многие авторы: Ю. А. Дубинский [27], I. Hlavaček, I. Naumann [61, 62], O. John, J. Nečas [63], G. H. Knightly [64], G. H. Knightly, D. Sather [65], I. Nečas, I. Naumann [66], P. Rabier [68]. Отметим большой цикл работ Н. Ф. Морозова [39—42], а также монографию Ф. Сьярле, П. Рабье [50]. Исследования указанных авторов базировались на априорной оценке решения в энергетической форме, которая здесь получается непосредственно. Получение априорных оценок в случае оболочек представляет большие трудности. Приведенный в § 16, 19 метод исследования задач для оболочек принадлежит автору и впервые был опубликован в 1957 г. [13]. Впоследствии этот прием был применен к широкому кругу задач [13—24, 36, 66]. Основу метода, как это видно из вышеизложенного, составляют априорные оценки типа (16.28), получение которых и

доставляет обычно наибольшую трудность. Вторая часть доказательств базируется на теории степени отображения в бесконечномерном пространстве Лере — Шаудера [31]. В последующем появились основополагающие работы М. И. Вишика [7—9], Ф. Е. Браудера [5], Ж. Лионса [36] (см. также [25]) и других авторов, в которых даются различные варианты леммы «об остром угле». См. также фундаментальный обзор Ю. А. Дубинского [28]. Лемма «об остром угле» также может быть использована в рассматриваемом круге вопросов. Естественно, что и здесь основу рассмотрений составляют априорные оценки (16.28), (19.27). Однако использование степени отображения (там, где оно вообще возможно) обладает преимуществами. Дело в том, что мы получаем не только теорему разрешимости, но и важную геометрическую характеристику — суммарный индекс всех решений краевой задачи. Знание этой характеристики во многих случаях даст нам возможность ориентироваться в вопросах числа решений. Вместе с этим отметим, что появившаяся впоследствии в работах М. И. Вишика [8, 9], Р. И. Качуровского [29], М. М. Вайнберга [6], G. I. Minty [67], Ф. Е. Браудера [57, 58] (более подробно см вышеупомянутый обзор Ю. А. Дубинского, подробный обзор В. И. Скрышника [46], а также [47]) теория монотонных операторов не может дать в нашем круге вопросов исчерпывающих результатов, ибо в нелинейной теории полых оболочек операторы  $G_{tk}$ ,  $G_{jk}$  в наиболее интересных случаях не являются монотонными. Из последних исследований по проблеме разрешимости основных краевых задач нелинейной теории оболочек отметим работы [52, 55, 59].

## § 20. Дифференциальные свойства обобщенных решений задач $tk$ и $jk$ . Условия существования классических решений

20.1. В данном параграфе будет рассмотрен вопрос о том, в какой мере улучшаются дифференциальные свойства обобщенных решений с повышением требований к исходным данным задачи. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда на всем контуре  $\Gamma$  заданы условия

$$w_i|_{\Gamma} = \tilde{w}_i, \quad (20.1)$$

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w}, \quad (20.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma} = \tilde{w}_4. \quad (20.3)$$

Таким образом, к исходным данным задачи мы здесь должны будем отнести срединную поверхность  $S$ , граничный контур  $\Gamma$ , упругие постоянные  $D_p^{ijkl}$ ,  $D_n^{ijkl}$ , нагрузки  $R^3$ ,  $R^s$  и граничные перемещения  $\tilde{w}_i$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_4$ . Здесь мы, следовательно, имеем задачу 5.1.

Изучение дифференциальных свойств обобщенных решений важно не только само по себе, но еще и в том плане, что с их повы-

шением улучшаются условия аппроксимации решений и тем самым повышается эффективность большинства приближенных методов решения краевых задач.

Общему анализу дифференциальных свойств решений эллиптических систем посвящено большое количество исследований. Отметим здесь работы [1, 2, 45, 48, 49], а также [10, 11, 26, 30]. Основу этих рассмотрений составляют представления об эллиптических по Петровскому системах [44], представления о краевых задачах, удовлетворяющих условию дополнителности и накрывания.

**Определение 20.1.** Система дифференциальных выражений

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{tj} \left( \frac{\partial}{\partial x_p}, x_s \right) u_j, \quad t = 1, \dots, n; \quad p, s = 1, \dots, m, \quad (20.4)$$

называется эллиптической по Петровскому [44] в области  $\Omega$  изменения  $x_p, x_s$ , если алгебраическая система

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{tj}(\xi_p, x_s) u_j = 0 \quad (20.5)$$

имеет при любых  $x_s \in \bar{\Omega}$  лишь нулевые действительные решения относительно  $\xi_p$ .

Широкое обобщение понятия эллиптической системы мы имеем в [1, 48, 49]. В случае однородных дифференциальных систем (20.4), с которыми нам придется иметь дело, оба определения выделяют один и тот же класс систем. ■

**20.2. Лемма 20.1.** Если материал оболочки является регулярным и, значит, удовлетворяет соотношению (4.28), то дифференциальная система  $D_p^{ijkl} w_{i\alpha^h \alpha^j}$  является эллиптической по Петровскому.

Для доказательства рассмотрим упругую пластину с постоянными  $D_p^{ijkl}$  и совершим замену  $w_{i\alpha^h \alpha^j} \rightarrow \xi_h \xi_j w_l$ . В результате получаем полиномы  $D_p^{ijkl} \xi_h \xi_j w_l$  и нарушение эллиптичности означало бы, что система

$$D_p^{ijkl} \xi_h \xi_j w_l = 0, \quad i = 1, 2, \quad (20.6)$$

при некоторых  $\xi_h, \xi_j$  имела бы нетривиальное решение  $w_l$ . Из (20.6) при этом получим

$$D_p^{ijkl} \xi_h \xi_j w_l w_i = 0. \quad (20.7)$$

Предположим теперь, что пластина получает перемещения вида

$$w_l(\alpha^1, \alpha^2) = w_l \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2), \quad w = 0, \quad l = 1, 2, \quad (20.8)$$

где  $\xi_1, \xi_2$  обеспечивают (20.6) существование нетривиальных решений  $w_l$ , и вычислим для (20.8) плотность энергии  $Q_p$  по (4.20).

В результате легко получаем

$$Q_p = D_p^{ijkl} \xi_A \xi_j w_l w_i = 0, \quad (20.9)$$

что противоречит (4.28). Лемма 20.1 доказана. ■

Рассмотрим, далее, однородное дифференциальное выражение

$$D_n^{1111} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 4D_n^{1112} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + 6D_n^{1122} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + \\ + 4D_n^{1222} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + D_n^{2222} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4}, \quad (20.10)$$

определяющее главные члены выражения

$$\tilde{\nabla}_{ij} D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w. \quad (20.11)$$

Лемма 20.2. Если материал оболочки удовлетворяет условию регулярности (4.27), то дифференциальное выражение (20.10) является эллиптическим по Петровскому.

Для доказательства леммы следует установить, что соотношение

$$D^*(\xi_1, \xi_2) = D_n^{1111} \xi_1^4 + 4D_n^{1112} \xi_1^3 \xi_2 + 6D_n^{1122} \xi_1^2 \xi_2^2 + 4D_n^{1222} \xi_1 \xi_2^3 + D_n^{2222} \xi_2^4 = 0 \quad (20.12)$$

возможно лишь при  $\xi_i = 0$ .

Пусть срединная поверхность  $S$  есть плоскость, и, значит, мы рассматриваем пластину; пусть, далее,  $\alpha^1, \alpha^2$  — декартовы координаты на ней. Рассмотрим поперечное перемещение

$$w = \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2). \quad (20.13)$$

Легко видеть, что для этого случая

$$Q_n = D_n^{ijkl} \nabla_{ij} w \nabla_{kl} w = D_n^{ijkl} w_{\alpha^i \alpha^j} w_{\alpha^k \alpha^l} = D^*(\xi_1, \xi_2) \exp 2(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2). \quad (20.14)$$

С другой стороны,

$$\gamma_{11}^1 + \gamma_{22}^1 + \gamma_{12}^1 = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2) \exp 2(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2); \quad (20.15)$$

если  $D^*(\xi_1, \xi_2) = 0$ , то, в силу (4.28), правая часть (20.15) есть нуль, и лемма 20.2 доказана. ■

Условия эллиптичности линейной части рассмотренных краевых задач обеспечивают возможность улучшения дифференциальных свойств решений с повышением гладкости исходных данных.

20.3. Рассмотрим вначале дифференциальное выражение  $\nabla_j D_p^{ijkl} D \nabla_k w_l$ , главная часть которого есть  $D_p^{ijkl} w_{\alpha^i \alpha^k}$ , и соответ-



ствующее ему операторное уравнение вида

$$(\omega \cdot \chi)_{H_5} = \int_{\Omega} \overset{*}{R}^s \varphi_s d\Omega - (\omega \cdot \chi)_{H_5}, \quad (20.16)$$

в котором  $\omega \in H_5$ ,  $\chi \in H_5$  произвольны,  $\overset{*}{R}^s \in \overline{H}_5$ .

**Л е м м а 20.3.** Пусть  $\tilde{\Omega}$  — подобласть  $\Omega$ , целиком лежащая внутри  $\Omega$  (рис. 20.1), и выполнены условия

$$D_p^{ijkl} \in C_{\Omega}^{\rho} (H_{\Omega}^{\lambda+\rho, \lambda}), \quad S \in C_{\Omega}^{\rho} (H_{\Omega}^{\lambda+\rho, \lambda}), \quad (20.17)$$

$$\overset{*}{R}^s \in W_{p\Omega}^{(\rho)} (H_{\Omega}^{\rho, \lambda}), \quad (20.18)$$

$$\overset{\circ}{\omega} \in W_{p\Omega}^{(\rho+2)} (H_{\Omega}^{\rho+2, \lambda}). \quad (20.19)$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$ , для любого решения  $\omega$  операторного уравнения (20.16) имеют место соотношения

$$\omega \in W_{p\Omega'}^{(\rho+2)} (H_{\Omega'}^{\rho+2, \lambda^1}). \quad (20.20)$$

В (20.20), как уже указывалось,  $\lambda^1 = \lambda$ , если  $\lambda < 1$ , и  $\lambda^1$  сколько угодно близко к 1, если  $\lambda = 1$ .

Отметим, что результат леммы 20.3 никак не связан с граничными условиями краевых задач и поэтому относится, собственно, к любым граничным задачам *т.к.* Доказательство леммы см. в [1, 3, 48, 49]. ■

Исследование дифференциальных свойств  $\omega$  в окрестности границы  $\Gamma$  будет основываться на условиях дополнителности, с которыми читатель может ознакомиться по [1, 48, 49]. В этих работах условию дополнителности придан алгебраический характер, однако конкретное использование алгебраических критериев часто бывает затруднено. Поэтому здесь будет применен другой подход к доказательству выполнения условия дополнителности [4] в задачах с граничными условиями (6.9), излагаемый ниже.

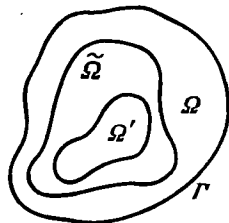


Рис. 20.1

**Л е м м а 20.4.** Дифференциальная система  $\tilde{\nabla}_j D_p^{ijkl} \nabla_k w_l$  вместе с граничными условиями (20.1) удовлетворяет условию дополнителности.

Доказательство леммы 20.4 базируется на том факте, что, в силу теоремы вложения 11.4 (соотношение (11.62)), из (20.16) следует

$$\|\omega\|_{H_5} \leq m \left( \|\overset{*}{R}^s\|_{\overline{H}_5} 1_s + \|\overset{\circ}{\omega}\|_{H_5} \right). \quad (20.21)$$

Предположим теперь, что область  $\tilde{\Omega}$ , где выполнены (20.17) — (20.19), может выходить на некоторый кусок  $\tilde{\Gamma}$  границы  $\Gamma$  (рис. 20.2).

Лемма 20.5. Пусть  $\omega \in H_5$  и удовлетворяет операторному соотношению (20.16). Пусть выполнены (20.17) — (20.20) и, кроме того,

$$\tilde{\Gamma} \in C_{\tilde{\Gamma}}^{(p+2)}(H_{\tilde{\Gamma}}^{p+2,\lambda}). \tag{20.22}$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$ , но граница которой может выходить внутрь  $\tilde{\Gamma}$  (рис. 20.2), имеет место соотношение (20.20).

Лемма непосредственно вытекает из лемм 20.1, 20.4. ■

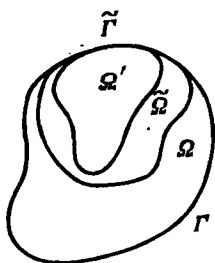


Рис. 20.2

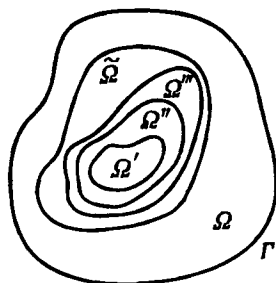


Рис. 20.3

20.4. Перейдем к анализу краевых задач для  $w$ . Рассмотрим дифференциальное выражение  $\tilde{\nabla}_{ij} D_n^{ijkl} DV_{kl} w$ , главная часть которого есть  $DD_n^{ijkl} w_{\alpha^i \alpha^j \alpha^k \alpha^l}$ , и соответствующее операторное уравнение

$$(w \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} \overset{0}{R}^3 \varphi \, d\Omega - (w \cdot \varphi)_{H_1}. \tag{20.23}$$

Здесь  $w, \varphi \in H_1, \overset{0}{R}^3 \in \bar{H}_1$ ;  $\overset{0}{w}$  дается соотношениями (13.1), (13.2), которые в нашем случае примут вид

$$\overset{0}{w}|_{\Gamma} = \tilde{w}, \tag{20.24}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial m} \right|_{\Gamma_1} = \tilde{w}_4. \tag{20.25}$$

Лемма 20.6. Пусть  $\tilde{\Omega}$  — подобласть  $\Omega$ , целиком лежащая внутри  $\Omega$  (рис. 20.3), и выполнены условия

$$D_n^{ijkl} \in C_{\tilde{\Omega}}^{2+p}(H_{\tilde{\Omega}}^{2+p,\lambda}), \quad S \in C_{\tilde{\Omega}}^{4+p}(H_{\tilde{\Omega}}^{4+p,\lambda}), \tag{20.26}$$

$$\overset{*}{R}^3 \in W_{p\tilde{\Omega}}^{(p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{p,\lambda}), \tag{20.27}$$

$$\overset{0}{w} \in W_{\tilde{\Omega}}^{(4+p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{4+p,\lambda}). \tag{20.28}$$

В этом случае для всякой функции  $w \in H_1$ , удовлетворяющей (20.23), имеет место соотношение

$$w \in W_{p\Omega'}^{(4+\rho)}(H_{\Omega'}^{4+\rho,\lambda^1}), \tag{20.29}$$

где  $\Omega'$  — любая подобласть  $\Omega$ , целиком лежащая внутри  $\tilde{\Omega}$  (рис. 20.1).

Лемма 20.6 вытекает из леммы 20.2. ■

Лемма 20.7. Граничные условия (20.24), (20.25) накрывают [3] дифференциальное выражение  $\tilde{\nabla}_{ij} D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w$ .

Лемма 20.7 вытекает из неравенства

$$\|w\|_{H_1} \leq m \left( \|R^3\|_{H_1}^* + \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}}^0 \right), \tag{20.30}$$

которое является, в свою очередь, следствием (12.64) и (20.23). ■

Лемма 20.8. Пусть в некоторой подобласти  $\tilde{\Omega}$ , граница которой может выходить на  $\tilde{\Gamma}$  — некоторый кусок  $\Gamma$ , выполнены условия (20.26) — (20.28) и, кроме того,

$$\tilde{\Gamma} \in C_{\tilde{\Gamma}}^{4+\rho}(H_{\tilde{\Gamma}}^{4+\rho,\lambda}). \tag{20.31}$$

В этом случае имеет место соотношение (20.29) в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$  и граница которой может выходить внутрь  $\tilde{\Gamma}$  (рис. 20.3). ■

20.5. Перейдем к анализу дифференциальных свойств обобщенных решений нелинейных граничных задач при условиях (20.1) — (20.3).

Теорема 20.1. Пусть выполнены условия одной из теорем 16.5, 16.8, 16.11 и, кроме того, имеют место соотношения (20.17), (20.19), (20.26), (20.28). Пусть, далее,

$$R^3, R^s \in W_{p\tilde{\Omega}}^{(\rho)}(H_{\tilde{\Omega}}^{\rho,\lambda}). \tag{20.32}$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$ , для соответствующего обобщенного решения имеют место соотношения (20.20), (20.29).

Для доказательства теоремы 20.1 учтем, что в ее условиях соотношениям (13.6), (13.7), определяющим обобщенное решение, может быть придан следующий вид:

$$\begin{aligned} [\omega(w_1, w_2) \cdot \chi(\varphi_1, \varphi_2)]_{H_1} = & \int_{\Omega} \left\{ \left[ (B_{kll} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l}) D_p^{\lambda j k l} D \right]_{\alpha i} D^{-1} + \right. \\ & \left. + \left( B_{kll} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) D_p^{\lambda j k l} G_{ij}^{\lambda} - R^{\lambda} \right\} \varphi_{\lambda} d\Omega, \tag{20.33} \end{aligned}$$

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\chi}} = \int_{\Omega} [T^{ij}(B_{ij} + V_{ij} w) + R^3 - R^s w_{\alpha s}] \varphi d\Omega, \tag{20.34}$$

где  $\mathbf{h}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) \in H_{15}$  финитны в  $\Omega$ .

Рассмотрим вначале случай  $\rho = 0$  и  $1 < p < 2$ . Сравнивая (20.16) (с учетом (20.13)) и (20.33), устанавливаем их тождественность, если принять

$$\begin{aligned} \tilde{R}^s = & - \left[ \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} \right) D_p^{sjkl} D \right]_{\alpha^j} D^{-1} - \\ & - \left( B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} \right) D_p^{ijkl} G_{ij}^s - R^s. \end{aligned} \quad (20.35)$$

В силу того, что  $w \in H_1$ , а  $p < 2$ , легко заключаем, что  $\tilde{R}^s \in L_{p, \tilde{\Omega}}$ . В этом случае из леммы 20.3 при  $\rho = 0$  будем иметь

$$\omega \in W_{p, \Omega'''}^{(2)}, \quad \Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega \quad (20.36)$$

и по теореме вложения 10.3

$$\omega \in H_{\Omega'''}^{0, 2 - \frac{2}{p}}, \quad W_{\frac{2p}{2-p}, \Omega'''}^{(1)}. \quad (20.37)$$

Но тогда, в соответствии с (4.24), (4.25),  $T^{ij} \in L_{\frac{2p}{2-p}, \Omega''}$ . Далее, сравнивая (20.23) и (20.34), также устанавливаем их тождественность, если принять

$$\tilde{R}^s = T^{ij} (B_{ij} + \nabla_{ij} w) + R^s - R^s w_{\alpha^s}. \quad (20.38)$$

Из (20.38) легко получаем

$$\tilde{R}^s \in L_{p-0, \Omega''}, \quad (20.39)$$

где  $p-0$  — число, меньшее  $p$ , но сколь угодно близкое к нему. Из (20.34) и леммы 20.6 получаем

$$w \in W_{p-0, \Omega''}^{(4)}, \quad \Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega'''. \quad (20.40)$$

Но в этом случае из (20.38) заключаем, что

$$\tilde{R}^s \in L_{p, \Omega''}. \quad (20.41)$$

Из (20.41) и леммы 20.6 получаем

$$w \in W_{p, \Omega''}^{(4)}, \quad \Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega'''. \quad (20.42)$$

Соотношения (20.36), (20.42) и доказывают теорему 20.1 для случая  $\rho = 0$ ,  $1 < p < 2$  в силу произвольности  $\Omega'''$ ,  $\Omega''$ ,  $\Omega'$ . ■

Рассмотрим случай  $\rho = 0$ ,  $p = 2$ . Здесь сразу получаем

$$\omega \in W_{2, \Omega'}^{(2)}, \quad H_{\Omega'}^{0, \lambda}; \quad W_{q_1, \Omega'}^{(1)}; \quad T^{ij} \in L_{q_2, \Omega'} \text{ при любых } q_1, q_2 \geq 1, \quad (20.43)$$

и тогда сохраняются (20.36), (20.42). ■

В силу  $p > 2$  из (20.35) по лемме 20.3 получаем

$$\omega \in W_{2^{-0}, \Omega''}^{(2)}, \quad \Omega' \subset \Omega'' \quad (20.44)$$

и по теореме вложения 10.3

$$\omega \in H_{\Omega''}^{1, 1 - \frac{2}{p}}. \quad (20.45)$$

Но тогда из (20.35), (20.41) и соответственно (20.42), в силу теоремы вложения 10.3,

$$w \in H_{\Omega''}^{3, 1 - \frac{2}{p}} \quad (20.46)$$

и получаем (20.36), (20.42). Таким образом, теорема 20.1 при  $\rho = 0$  доказана полностью. ■

Случай  $k > 0$  анализируется с помощью индукции. Предположим, что теорема 20.1 справедлива при некотором  $\rho > 0$ , и рассмотрим случай  $\rho + 1$ . Тогда из (20.35) заключаем, что  $\dot{R} \in W_{p\Omega''}^{(\rho+1)}$ , и из леммы 20.3 будем иметь

$$\omega \in W_{p\Omega''}^{(\rho+3)}, \quad \Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega'''. \quad (20.47)$$

Но тогда из (4.24), (4.25) получаем

$$T^{ij} \in W_{p\Omega''}^{(\rho+2)}, \quad (20.48)$$

и из (20.38) следует  $\dot{R}^3 \in W_{p\Omega''}^{(\rho+1)}$ ; далее, из леммы 20.5

$$w \in W_{p\Omega''}^{(\rho+5)}, \quad \Omega' \subset \Omega'. \quad (20.49)$$

Если учесть произвол в выборе областей  $\Omega'$ ,  $\Omega''$ ,  $\Omega'''$  (рис. 20.4), то можно заключить, что теорема 20.1 доказана полностью для пространств  $W_{p\Omega}^{(\rho)}$ . ■

В случае пространств  $H_{\Omega}^{k, \lambda}$  теорема 20.1 устанавливается уже на базе доказанного. Действительно, если  $R^s, R^3 \in H_{\Omega''}^{\rho, \lambda}$ , то, очевидно,  $R^3, R^s \in W_{p\Omega''}^{(\rho)}$ , при любом  $p > 1$ . И тогда из теоремы 20.1 для  $W_{p\Omega}^{(\rho)}$  следует, что в некоторой подобласти  $\Omega'' \subset \Omega'''$  справедливо соотношение

$$w \in W_{p\Omega''}^{(\rho+4)}, \quad \omega \in W_{p\Omega''}^{(\rho+2)}, \quad \forall p > 1 \quad (20.50)$$

и из теоремы вложения 10.3 имеем

$$w \in H_{\Omega''}^{\rho+3, \lambda^1}, \quad \omega \in H_{\Omega''}^{\rho+1, \lambda^1}. \quad (20.51)$$

Но в этом случае из (20.35), (20.38) соответственно получаем

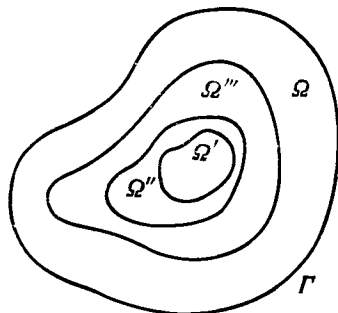


Рис. 20.4

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\lambda \in H_{\Omega'}^{p,\lambda^1}, \tilde{R}^3 \in H_{\Omega'}^{p,\lambda^1} \text{ и по леммам 20.3, 20.6 получаем} \\ w \in H_{\Omega'}^{p+4,\lambda^1}, \omega \in H_{\Omega'}^{p+2,\lambda^1}, \Omega' \subset \Omega'. \end{aligned} \quad (20.52)$$

Теорема 20.1 доказана полностью. ■

**20.6. Теорема 20.2.** Пусть выполнены условия одной из теорем 16.5, 16.8, 16.11 и, кроме того, в некоторой подобласти  $\tilde{\Omega}$ , целиком лежащей внутри  $\Omega$ , но граница которой может выходить на  $\tilde{\Gamma}$  — кусок контура  $\Gamma$ , выполнены условия (20.17), (20.19), (20.26), (20.28),

$$\tilde{\Gamma} \in C_{\tilde{\Gamma}}^{p+4}(H_{\tilde{\Gamma}}^{p+4,\lambda}). \quad (20.53)$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega' \subset \tilde{\Omega}$  (рис. 20.2), граница которой может выходить внутрь  $\tilde{\Gamma}$ , для любого обобщенного решения, даваемого теоремами 16.5, 16.8, 16.11, имеют место соотношения (20.20), (20.29).

Доказательство теоремы 20.2 строится так же, как и теоремы 20.1, с той лишь разницей, что вместе с леммами 20.3, 20.6 используются леммы 20.4, 20.7. Поэтому более детально рассмотрение здесь приводиться не будет. ■

**Теорема 20.3.** Пусть выполнены условия одной из теорем 16.5, 16.8, 16.11 и, кроме того, во всей области  $\tilde{\Omega}$  выполняются (20.17), (20.19), (20.26), (20.28), и пусть, далее,

$$\Gamma \in C_{\Gamma}^{p+4}(H_{\Gamma}^{p+4,\lambda}). \quad (20.54)$$

В этом случае во всей области  $\tilde{\Omega}$  имеют место соотношения (20.20), (20.29).

Теорема 20.3 непосредственно вытекает из теорем 20.1, 20.2. ■

**20.7.** В этом разделе будут рассмотрены дифференциальные свойства решения нелинейных краевых задач с функцией усилий (7.65), (7.77). Граничные условия возьмем в виде (7.27) и, кроме того,

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma} = \tilde{w}_4. \quad (20.55)$$

**Лемма 20.9.** Если материал оболочки регулярен и, значит, выполняется (4.28), то дифференциальная форма  $C_*^{\lambda\mu st} \Psi_{\alpha^{\lambda}\alpha^{\mu}\alpha^s\alpha^t}$  является эллиптической по Петровскому.

Прежде всего, учтем, что вследствие (7.73) имеем

$$C_*^{\lambda\mu st} = C_{ijkl,p}, \quad \lambda + i = \mu + j = s + k = t + l = 3, \quad (20.56)$$

поскольку оболочка развертывающаяся и  $C^{ik} = \pm 1$ .

Таким образом, следует доказать, что дифференциальная форма  $C_{ijkl,p} \Psi_{\alpha^i\alpha^j\alpha^k\alpha^l}$  будет эллиптической по Петровскому. Иными сло-

вами, следует установить, что если

$$C^*(\xi_1, \xi_2) = C_{1111, p} \xi_1^4 + 4C_{1113, p} \xi_1^3 \xi_2 + 6C_{1122, p} \xi_1^2 \xi_2^2 + \\ + 4C_{1222, p} \xi_1 \xi_2^3 + C_{2222, p} \xi_2^4, \quad (20.57)$$

то

$$\xi_1 = \xi_2 = 0. \quad (20.58)$$

Для доказательства (20.58) рассмотрим анизотропную пластину, напряженное состояние которой описывается функцией усилий вида

$$\bar{\Psi} = \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2), \quad (20.59)$$

и тогда для усилий  $T^{ij}$  по формулам (7.2) будем иметь

$$T^{11} = \xi_2^2 \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2), \quad T^{12} = \xi_1 \xi_2 \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2) \quad (1 \neq 2). \quad (20.60)$$

Далее, из (4.26) следует

$$Q_p = C_p^{\lambda\mu st} T_{\lambda\mu} T_{st} = C_{\lambda\mu st} T^{\lambda\mu} T^{st} = C^*(\xi_1, \xi_2) \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2). \quad (20.61)$$

Вследствие (4.27) имеем

$$C^*(\xi_1, \xi_2) \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2) > m (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_1^2 \xi_2^2) \exp(\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2). \quad (20.62)$$

Если имеет место (20.57), то из (20.62) вытекает (20.58), и лемма 20.9 установлена. ■

Рассмотрим дифференциальное выражение  $\tilde{\nabla}_{ij} C_*^{ijklp} \nabla_{kl} \Psi$ , главная часть которого есть  $C_*^{ijklp} \Psi_{\alpha^i \alpha^j \alpha^k \alpha^l}$  и соответствующее операторное уравнение

$$(\Psi \cdot \theta)_{H_9} = \int_{\Omega} \tilde{R} \cdot \theta \, d\Omega. \quad (20.63)$$

Лемма 20.10. Пусть  $\tilde{\Omega}$  — подобласть  $\Omega$ , целиком лежащая внутри  $\Omega$ , и выполнены условия

$$C_*^{ijkl} \in C_{\Omega}^{2+\rho} (H_{\Omega}^{2+\rho, \lambda}), \quad S \in C_{\Omega}^{4+\rho} (H_{\Omega}^{4+\rho, \lambda}), \quad \tilde{R} \in W_{\tilde{\Omega}}^{(\rho)} (H_{\Omega}^{\rho, \lambda}). \quad (20.64)$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\Omega$  (рис. 20.1), и для любого решения (20.63) имеют место соотношения

$$\Psi \in W_{\tilde{\Omega}'}^{(\rho+4)} (H_{\Omega'}^{\rho+4, \lambda^1}). \quad (20.65)$$

Лемма 20.10 непосредственно вытекает из эллиптичности  $C_*^{ijkl} w_{\alpha^i \alpha^j \alpha^k \alpha^l}$  по Петровскому (лемма 20.9).

Лемма 20.11. Граничные задания первой краевой задачи (задание  $\Psi$  и  $\partial\Psi/\partial m$  на  $\Gamma$ ) накрывают дифференциальное выражение  $\tilde{\nabla}_{ij} C_*^{ijkl} \nabla_{kl} \Psi$ .

Лемма доказывается, как и лемма (20.7). ■

Лемма 20.12. Пусть  $\tilde{\Omega}$  — подобласть  $\Omega$ , граница которой может выходить на  $\tilde{\Gamma}$  — кусок контура  $\Gamma$ , пусть в  $\tilde{\Omega}$  выполнены условия (20.64) и, кроме того,

$$\tilde{\Gamma} \in C_{\tilde{\Gamma}}^{p+4}(H_{\tilde{\Gamma}}^{p+4,\lambda}). \quad (20.66)$$

В этом случае в любой подобласти  $\Omega' \subset \tilde{\Omega}$  и для любого решения (20.63) имеет место соотношение (20.65).

Леммы 20.9—20.12 позволяют сформулировать основные результаты о дифференциальных свойствах обобщенных решений задачи 91.

Теорема 20.4. Пусть выполнены условия 1—8 § 17 и, кроме того, в некоторой подобласти  $\tilde{\Omega}$ , лежащей целиком внутри  $\Omega$ , имеют место соотношения

$$\begin{aligned} D_n^{ijkl} &\in C_{\tilde{\Omega}}^{(2+p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{2+p,\lambda}), \quad S_i \in C_{\tilde{\Omega}}^{4+p}(H_{\tilde{\Omega}}^{4+p,\lambda}), \quad \overset{3}{R} \in W_{p\tilde{\Omega}}^{(p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{p,\lambda}), \\ w &\in W_{p\tilde{\Omega}}^{(4+p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{4+p,\lambda}), \quad C_*^{ijkl} \in C_{\tilde{\Omega}}^{2+p}(H_{\tilde{\Omega}}^{2+p}), \\ C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_\mu^{ij} &\in W_{p\tilde{\Omega}}^{(p)}(H_{\tilde{\Omega}}^{p,\lambda}); \quad p > 1. \end{aligned} \quad (20.67)$$

В этом случае для любого обобщенного решения задачи 91 справедливы соотношения

$$w, \Psi \in W_{p\tilde{\Omega}'}^{(p+4)}(H_{\tilde{\Omega}'}^{p,\lambda}) \quad (20.68)$$

в любой области  $\tilde{\Omega}'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$  (рис. 20.1).

Теорема 20.4 вытекает из лемм 20.6, 20.10. ■

Теорема 20.5. Пусть выполнены условия 1—8 § 17 и условия (20.67), но область  $\Omega'$  может выходить на  $\tilde{\Gamma}$  — кусок границы  $\Gamma$ . И пусть, кроме того,

$$\tilde{\Gamma} \in C_{\tilde{\Gamma}}^{p+4}(H_{\tilde{\Gamma}}^{p+4,\lambda}). \quad (20.69)$$

В этом случае (20.68) будет справедливо для любого обобщенного решения задачи 91 в любой подобласти  $\Omega'$ , целиком лежащей внутри  $\tilde{\Omega}$ , граница которой может выходить внутрь  $\tilde{\Gamma}$  (рис. 20.2).

Теорема 20.5 непосредственно вытекает из лемм 20.8, 20.12. ■

Теорема 20.6. Пусть выполнены условия 1—8 § 17, (20.67) выполняются во всей области  $\tilde{\Omega}$ , а (20.69) выполняются для всего контура  $\Gamma$ . В этом случае имеем

$$w, \Psi \in W_{p\tilde{\Omega}}^{p+4}(H_{\tilde{\Omega}}^{p+4,\lambda}). \quad (20.70)$$

Теорема 20.6 вытекает из теоремы 20.5. ■



**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШИМОСТИ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ  
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

**§ 21. Вариационный метод в проблеме разрешимости  
краевых задач нелинейной теории пологих оболочек  
в перемещениях**

21.1. Будем предполагать выполненными условия 1—8 § 13. Введем новый вектор перемещений  $\mathbf{a}(w_1, w_2, w)$  в соответствии с (13.9), (13.10) и рассмотрим функционал полной энергии, даваемый (6.44),

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) &= \frac{1}{2} \|w + w^*\|_{H_x}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \varepsilon_{kl}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) d\Omega + \right. \\ &+ \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^*)^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*)^2 ds + \\ &\left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) (w_j + w_j^*) ds \right\} - (\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_t} - (w_{\Pi} \cdot w)_{H_x}. \end{aligned} \quad (21.1)$$

В (21.1) нами учтено определение (12.5) пространства  $H_x$ . Для дальнейших рассмотрений целесообразно преобразовать (21.1) с учетом (11.5). При этом получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) &= \frac{1}{2} \|w + w^*\|_{H_x}^2 + \frac{1}{2} \|\omega + \omega^*\|_{H_t}^2 + \\ &+ \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \left[ -B_{ij}(w + w^*) + \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] \times \\ &\times \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega - \\ &- (\omega_{\Pi} \cdot \omega)_{H_t} - (w_{\Pi} \cdot w)_{H_x}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

**Лемма 21.1.** Функционал  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  определен в каждой точке функционального пространства  $H_{ix}$ .

Для доказательства учтем, что в силу условий 5, 6 § 13  $\omega^* \in W_{2\Omega}^{(1)}$ ,  $w^* \in W_{2\Omega}^{(2)}$ . Если, кроме того,  $w \in H_\kappa$ , то, как это видно из (3.24),  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \in L_{2\Omega}$ . В силу этих обстоятельств второй поверхностный интеграл в правой части (21.1) существует. Далее, поскольку  $w^* \in W_{2\Omega}^{(2)}$  и  $w \in H_\kappa$ , то  $e_{ij}^1(w + w^*)$  в силу (3.25) принадлежит  $L_{2\Omega}$ , и, значит, определен первый поверхностный интеграл в правой части (21.1). Контурные интегралы в правой части (21.1) определены в силу теорем вложения 11.3, (12.3) и условия 8 § 13. Лемма 21.1 доказана. ■

В дальнейшем нам потребуется некоторое представление функционала  $\mathcal{J}_{t\kappa}$  от аргумента  $\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{b}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) \in H_t$ . Легко видеть, что имеет место представление

$$\mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma\mathbf{b}) = \mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) + \sum_{\mu=1}^4 \gamma^\mu \mathcal{J}_{t\kappa\mu}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b}), \quad (21.3)$$

где  $\mathcal{J}_{t\kappa\mu}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b})$  — некоторые функционалы в  $H_{t\kappa}$  относительно  $\mathbf{a} + \mathbf{a}^*$  и  $\mathbf{b}$ . При этом  $\mathcal{J}_{t\kappa\mu}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b})$  есть однородный функционал порядка  $\mu$  относительно  $\mathbf{b}$  при фиксированном  $\mathbf{a} + \mathbf{a}^*$ . Таким образом,  $\mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b})$  есть полином четвертой степени относительно  $\gamma$ . Соотношение (21.3) вытекает непосредственно из (21.1), если учесть структуру представлений  $e_{ij}^1$ .  $\varepsilon_{ij}$  через перемещения, определяемые (3.24), (3.25). Получим непосредственно выражения для  $\mathcal{J}_{t\kappa\mu}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b})$ . Имеем

$$\mathcal{J}_{t\kappa 1}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b}) = \frac{d}{d\gamma} \mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma\mathbf{b}) \Big|_{\gamma=0}$$

и, далее,

$$\frac{d}{d\gamma} \frac{1}{2} \|w + w^* + \gamma\varphi\|_{H_\kappa}^2 \Big|_{\gamma=0} = ((w + w^*) \cdot \varphi)_{H_\kappa}, \quad (21.4)$$

$$\frac{d}{d\gamma} \frac{1}{2} \|\omega + \omega^* + \gamma\chi\|_{H_t}^2 \Big|_{\gamma=0} = ((\omega + \omega^*) \cdot \chi)_{H_t}. \quad (21.5)$$

Для производной третьего члена правой части (21.2) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\gamma} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{e}_{ij}^0(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma\mathbf{b}) \left[ -B_{kl}(w + w^* + \gamma\varphi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha k} (w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha l} \right] d\Omega \Big|_{\gamma=0} = \\ & = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{e}_{ij}^0(\mathbf{b}) \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega + \\ & \quad + \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{e}_{ij}^0(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ -B_{kl}\varphi + (w + w^*)_{\alpha k} \varphi_{\alpha l} \right] d\Omega. \quad (21.6) \end{aligned}$$

Наконец, для производной четвертого члена правой части (21.2) выводим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\gamma} \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \left[ -B_{ij}(w + w^* + \gamma\varphi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha i} (w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha j} \right] \left[ -B_{kl}(w + w^* + \gamma\varphi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha k} (w + w^* + \gamma\varphi)_{\alpha l} \right] d\tilde{\Omega} \Big|_{\gamma=0} = \\ & = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \left[ -B_{ij}\varphi + \varphi_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega, \quad (21.7) \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\frac{d}{d\gamma} (\omega_{\mathbf{n}} \cdot (\omega + \gamma\chi))_{H_t} \Big|_{\gamma=0} = (\omega_{\mathbf{n}} \cdot \chi)_{H_t}^{\sim}, \quad (21.8)$$

$$\frac{d}{d\gamma} (w_{\mathbf{n}} \cdot (w + \gamma\varphi))_{H_x} \Big|_{\gamma=0} = (w_{\mathbf{n}} \cdot \varphi)_{H_x}. \quad (21.9)$$

Из (21.3)–(21.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{t\kappa 1}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b}) &= ((w + w^*) \cdot \varphi)_{H_x} + ((\omega + \omega^*) \cdot \chi)_{H_t} + \\ &+ \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \left\{ \tilde{e}_{ij}(\mathbf{b}) \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] + \right. \\ &+ \tilde{e}_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ -B_{kl}\varphi + (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \right] - \left[ B_{ij}(w + w^*) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \right] \left[ -B_{kl}\varphi + (w + w^*)_{\alpha k} \varphi_{\alpha l} \right] \Big\} d\Omega - \\ &- (\omega_{\mathbf{n}} \cdot \chi)_{H_t} - (w_{\mathbf{n}} \cdot \varphi)_{H_x}. \quad (21.10) \end{aligned}$$

Используя (3.24) и (13.8), (13.13), соотношению (21.10) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{t\kappa 1} &= (w \cdot \varphi)_{H_x} + (w^0 \cdot \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{kl}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \left[ -B_{kl}\varphi + \varphi_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega + \\ &+ (\omega \cdot \chi)_{H_t} + (\omega^0 \cdot \chi)_{H_t} + \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j \left[ -B_{kl}(w + w^*) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} \right] d\Omega. \quad (21.11) \end{aligned}$$

Наконец, если учесть определение оператора  $\mathbf{G}_{t\kappa}$  формулой (13.33),

то (21.11) запишется в виде

$$\mathcal{J}_{t\kappa 1}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b}) = ((\mathbf{a} - \mathbf{G}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)) \cdot \mathbf{b})_{H_{t\kappa}}. \quad (21.12)$$

Для определения  $\mathcal{J}_{t\kappa 2}$  имеем

$$\mathcal{J}_{t\kappa 2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma \mathbf{b})|_{\gamma=0}$$

и, далее,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\gamma^2} \|w + w^* + \gamma \varphi\|_{H_\kappa}^2 = \|\varphi\|_{H_\kappa}^2, \quad (21.13)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\gamma^2} \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma \mathbf{b}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma \mathbf{b}) d\Omega |_{\gamma=0} &= \\ &= \frac{d}{d\gamma} \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma \mathbf{b}) \frac{d}{d\gamma} \varepsilon_{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^* + \gamma \mathbf{b}) d\Omega |_{\gamma=0} = \\ &= \int_{\Omega} [D_p^{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{b}) + (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}] [\varepsilon_{kl}(\mathbf{b}) + (w + w^*)_{\alpha k} \varphi_{\alpha l}] + \\ &\quad + [T^{ij}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}]] d\Omega. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\gamma^2} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_\tau + w_\tau^* + \gamma \varphi_\tau)^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^* + \gamma \varphi_m)^2 ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^* + \gamma \varphi_i) (w_j + w_j^* + \gamma \varphi_j) ds \right] = \\ = \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} \varphi_\tau^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} \varphi_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} \varphi_i \varphi_j ds. \end{aligned} \quad (21.15)$$

Из (21.13) — (21.15) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{t\kappa 2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*, \mathbf{b}) &= \|\varphi\|_{H_\kappa}^2 + 2 \int_{\Omega} [D_p^{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{b}) (w + w^*)_{\alpha k} \varphi_{\alpha l} + \\ &\quad + (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} \varphi_{\alpha k} \varphi_{\alpha l}] + \\ &\quad + \varepsilon_{kl}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}] d\Omega. \end{aligned} \quad (21.16)$$

Для  $\mathcal{J}_{tx3}(a + a^*, b)$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{tx3}(a + a^*, b) &= \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\gamma^3} \mathcal{J}_{tx}(a + \gamma b)|_{\gamma=0} = \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\gamma^3} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij}^0(a + a^* + \gamma b) \varepsilon_{kl}^0(a + a^* + \gamma b) d\Omega = \\ &= 2 \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \varphi_{\alpha k} (w + w^*)_{\alpha l} d\Omega, \end{aligned} \quad (21.17)$$

$$\mathcal{J}_{tx4} = \frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \varphi_{\alpha k} \varphi_{\alpha l} d\Omega. \quad (21.18)$$

**Лемма 21.2.** Имеют место неравенства

$$|\mathcal{J}_{tx1}(a + a^*, b)| \leq m \left( \|a + a^*\|_{H_{tx}}^2 + \|a + a^*\|_{H_{tx}} + \|\omega_{ii}^*\|_{H_i} + \|w^*\|_{H_{\kappa}} \right) \|b\|_{H_{tx}}, \quad (21.19)$$

$$|\mathcal{J}_{tx2}(a + a^*, b)| \leq m \left( \|w + w^*\|_{L_{4\Omega}} + \|w + w^*\|_{L_{4\Omega}}^2 + \|\varepsilon_{kl}^0(a + a^*)\|_{L_{2\Omega}} \right) \|b\|_{H_{tx}}, \quad (21.20)$$

$$|\mathcal{J}_{tx3}(a + a^*, b)| \leq \|w + w^*\|_{H_{\kappa}} \|b\|_{H_{tx}}^3, \quad (21.21)$$

$$|\mathcal{J}_{tx4}(b)| \leq m \|b\|_{H_{tx}}^4. \quad (21.22)$$

Соотношения (21.19)–(21.22) непосредственно следуют из теоремы вложения 11.3, 12.3 и структуры соотношений (4.24) для  $T^{kl}$ , (3.24) для  $\varepsilon_{kl}^0$  и (3.17) для  $e_{ij}$ . ■

**Лемма 21.3.** Имеет место соотношение

$$\text{grad}_{H_{tx}} \mathcal{J}_{tx}(a + a^*) = a - G_{tx}(a + a^*), \quad (21.23)$$

где оператор  $G_{tx}(a + a^*)$  дается соотношением (13.34).

В (21.23) знак  $\text{grad}$  означает градиент в  $H_{tx}$ .

Для доказательства (21.23) учтем, что из (21.4) при  $\gamma = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{tx}(a + a^* + b) - \mathcal{J}_{tx}(a + a^*) &= \mathcal{J}_{tx1}(a + a^*, b) + \\ &+ \sum_{\mu=2}^4 \mathcal{J}_{tx\mu}(a + a^*, b). \end{aligned} \quad (21.24)$$

Если теперь учесть (21.12) и оценки леммы 21.2, то и приходим к лемме 21.3. ■

Из (21.23) следует важная

**Теорема 21.1.** Множество критических точек функционала  $\mathcal{J}_{tx}(a + a^*)$  в  $H_{tx}$  совпадает с множеством обобщенных решений задачи  $tx$ . ■

**21.2.** Поскольку все критические точки функционала  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  являются обобщенными решениями задачи  $ix$ , то для них имеют место соотношения (13.34) и (13.35), из которых следует, что эти критические точки лежат на некоторой гиперповерхности ГП1 в  $H_{ix}$ , даваемой соотношением (13.36). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  на ГП1, т. е. с учетом (13.36). Таким образом, мы рассматриваем  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  уже в  $H_*$ , так как посредством (13.36)  $\omega$  выражено через  $w$ . В дальнейшем, если учтено (13.36), то для  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  примем обозначение  $\mathcal{J}_{xx}(w)$ .

**Лемма 21.4.** Имеет место представление

$$\mathcal{J}_{xx}(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{H_*}^2 + \tilde{\mathcal{J}}_{xx}(w), \quad (21.25)$$

где  $\tilde{\mathcal{J}}_{xx}(w)$  — слабо непрерывный функционал в  $H_*$ .

Представление (21.25) непосредственно следует из (21.1), причём

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_{xx}(w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_n^{ijst} [e_{ij}^1(w) e_{st}^1(w^*) + e_{ij}^1(w^*) e_{st}^1(w)] d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_n^{ijst} e_{ij}^1(w^*) e_{st}^1(w^*) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_p^{ijst} e_{ij}^0(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) e_{st}^0(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_6} k_p^{\alpha\alpha} w_\alpha^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j |_{i,j=1,2} ds - \\ & - (\omega_n^* \cdot \omega)_{H_t} - (w_n^* \cdot w)_{H_*}. \end{aligned} \quad (21.26)$$

Поясним лишь факт слабой непрерывности  $\tilde{\mathcal{J}}_{xx}$  в  $H_*$ . Пусть

$$w_n \rightarrow w \quad \text{в } H_*. \quad (21.27)$$

Легко видеть, что первый плоский интеграл в правой части (21.26) есть линейный функционал в  $H_*$ , равно как и последний член в правой части (21.26). Далее, в силу усиленной непрерывности  $K_{ix}(w)$  (теорема 14.1) имеем

$$K_{ix}(w_n) \Rightarrow K_{ix}(w) \quad \text{в } H_t, \quad (21.28)$$

что влечет

$$e_{ij}^0(w_n) \Rightarrow e_{ij}^0(w) \quad \text{в } L_{2\Omega} \quad (21.29)$$

на основе (14.40). Из (21.29) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} e_{ij}^0(\mathbf{a}(w_n) + \mathbf{a}^*) e_{kl}^0(\mathbf{a}(w_n) + \mathbf{a}^*) d\Omega \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega} D_p^{ijkl} e_{ij}^0(\mathbf{a}(w) + \mathbf{a}^*) e_{kl}^0(\mathbf{a}(w) + \mathbf{a}^*) d\Omega. \end{aligned} \quad (21.30)$$

Наконец, контурные интегралы в правой части (21.26) суть слабо

непрерывные функционалы, поскольку в силу усиленной непрерывности  $K_{ix}(w)$  и теоремы вложения 11.3 имеем

$$\int_{\Gamma_6} k_p^{tt} w_t^2(w_n) ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2(w_n) ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i(w_n) w_j(w_n) ds \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{\Gamma_6} k_p^{tt} w_t^2(w) ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2(w) ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i(w) w_j(w) ds. \quad (21.31)$$

Соотношения (21.30), (21.31) и завершают доказательство слабой непрерывности  $\tilde{\mathcal{I}}_{ix}(w)$  и, значит, леммы 21.4. ■

Лемма 21.5. Имеет место соотношение

$$\text{grad}_{H_x} \mathcal{I}_{xx}(w) = w - G_{xx}(w), \quad (21.32)$$

где оператор  $G_{xx}(w)$  дается формулой (13.39).

Доказательство леммы 21.5 не приводится из-за полной аналогии с доказательством леммы 21.3. ■

Из леммы 21.5 вытекает важная

**Теорема 21.2.** Для того чтобы вектор-функция  $a(w_1, w_2, w)$  была обобщенным решением задачи  $ix$ , необходимо и достаточно, чтобы  $w$  было критической точкой функционала  $\mathcal{I}_{xx}$  в  $H_x$ , а  $\omega(w_1, w_2)$  определялось соотношением (13.36).

**Теорема 21.3.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.1. В этом случае функционал  $\mathcal{I}_{xx}(w) = \mathcal{I}_{ix}(a(w) + a^*)$ , даваемый формулой (1.25), является растущим в  $H_x$ , иными словами,  $\mathcal{I}_{xx}(w) \rightarrow \infty$  при  $\|w\|_{H_x} \rightarrow \infty$ .

Собственно, мы здесь докажем более сильное утверждение: на сферах достаточно большого радиуса в  $H_x$  имеет место неравенство

$$\mathcal{I}_{xx}(w) \geq mR^2, \quad m > 0. \quad (21.33)$$

Доказательство (21.33) проведем в той же схеме, что и теорем 16.1 и 19.1. Для этого введем разбиение единичной сферы  $\Sigma_{H_x}(1, 0)$  на две части  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  и  $\Sigma''_{H_x}(1, 0)$ . К  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  отнесем точки  $v$ , для которых выполнено неравенство

$$\|v\|_{H_x}^2 - (\omega_p^* \cdot \omega_2(v))_{H_t} < \frac{1}{2}. \quad (21.34)$$

К  $\Sigma''_{H_x}(1, 0)$  отнесем точки  $v$ , для которых

$$\|v\|_{H_x}^2 - (\omega_p^* \cdot \omega_2(v))_{H_t} \geq \frac{1}{2}. \quad (21.35)$$

Разбиение  $\Sigma_{H_x}(1, 0)$  порождает путем центрального проектирования и разбиение  $\Sigma_{H_x}(R, 0) = \Sigma'_{H_x}(R, 0) \cup \Sigma''_{H_x}(R, 0)$ . Причем на  $\Sigma''_{H_x}(R, 0)$  будет иметь место неравенство

$$\|w\|_{H_x}^2 - (\omega_p^* \cdot \omega_2(w))_{H_t} \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_x}^2. \quad (21.36)$$

Лемма 21.6. Слабое замыкание  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(1, 0)$  в  $H_{\kappa}$  не содержит нуля.

Лемма следует из того факта, что если бы слабое замыкание  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(1, 0)$  содержало нуль, то существовала бы последовательность  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(1, 0)$

$$v_n \rightarrow 0 \text{ в } H_{\kappa}.$$

Вследствие теоремы 14.1 об усиленной непрерывности  $K_{t_{\mu}}(w)$  мы имели бы

$$\|\omega_2(v_n)\|_{H_t} \rightarrow 0, \quad (21.37)$$

и (21.34) было бы невозможным, ибо  $\|v\|_{H_{\kappa}} = 1$ . ■

Для оценки  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)$  на  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  учтем, что при условиях теоремы 16.1 имеют место неравенства (16.10)–(16.13), из которых

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w) &\geq \frac{1}{2} \Pi(w) - |(\omega_{\Pi}^* \cdot \omega)_{H_t}| - |(w_{\Pi}^* \cdot w)_{H_{\kappa}}| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ \Pi_1(w) - \sum_{\mu=0}^3 |\Pi_{\mu}(w)| \right] - \|\omega_{\Pi}^*\|_{H_t} \|\omega\|_{H_t} - \|w_{\Pi}^*\|_{H_{\kappa}} \|w\|_{H_{\kappa}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} m \left( \|w\|_{H_{\kappa}}^4 - \sum_{\mu=0}^3 \|w\|_{H_{\kappa}}^{\mu} \right) - \|\omega_{\Pi}^*\|_{H_t} \|\omega\|_{H_t} - \|w^*\|_{H_{\kappa}} \|w\|_{H_{\kappa}}. \end{aligned} \quad (21.38)$$

Если учесть (14.3), то получим

$$\|\omega\|_{H_t} \leq m \left( 1 + \|w\|_{H_{\kappa}} + \|w\|_{H_{\kappa}}^2 \right) \quad (21.39)$$

и из (21.38), (21.39) для элементов  $\Sigma'_{H_{\kappa}}(R, 0)$  — оценку

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w) \geq m \|w\|_{H_{\kappa}}^4, \quad (21.40)$$

справедливую при достаточно больших  $\|w\|_{H_{\kappa}}$ . ■

Для точек  $\Sigma''_{H_{\kappa}}(R, 0)$  имеем из (21.26) отбрасыванием всех неотрицательных членов в правой части

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w) &\geq \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{\Pi}^{ijst} [e_{ij}^1(w) e_{st}^1(w^*) + e_{ij}^1(w^*) e_{st}^1(w)] d\Omega \right| - \\ &- |(\omega_{\Pi}^* \cdot \omega_2(w))_{H_t}| - |(\omega_{\Pi}^* \cdot (\omega_1(w) + \omega_0))_{H_t}| - \|w_{\Pi}^*\|_{H_{\kappa}} \|w\|_{H_{\kappa}}. \end{aligned} \quad (21.41)$$

Учтем теперь неравенство

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{\Pi}^{ijst} [e_{ij}^1(w) e_{st}^1(w^*) + e_{ij}^1(w^*) e_{st}^1(w)] d\Omega \right| \leq m \|w\|_{H_{\kappa}} \quad (21.42)$$

вытекающее из (12.48), (3.25), и очевидное неравенство, вытекаю-



щее из (14.2):

$$|(\omega_1^* \cdot (\omega_1(w) + \omega_0))_{H_t}| \leq m(1 + \|w\|_{H_x}). \quad (21.43)$$

Если, кроме того, принять во внимание (21.36), то из (21.41) — (21.43) получаем на  $\Sigma_{H_x}''(R, 0)$

$$\mathcal{J}_{xx}(w) \geq m \|w\|_{H_x}^2 \quad (21.44)$$

при достаточно больших  $\|w\|_{H_x}$ . Из (21.40), (21.44) и вытекает (21.33). Теорема 21.3 доказана. ■

Теорема 21.4. Пусть выполнены все условия теоремы 16.1. В этом случае краевая задача  $tk$  имеет по меньшей мере одно обобщенное решение  $w$ , придающее функционалу  $\mathcal{J}_{xx}(w)$  абсолютный минимум, причем  $\omega(w_1, w_2)$  определяется по (13.36).

Напомним читателю, что в нашей терминологии, если  $w_0$  реализует абсолютный минимум, то во всем  $H_x$

$$\mathcal{J}_{xx}(w) \geq \mathcal{J}_{xx}(w_0). \quad (21.45)$$

После установления (21.33) перейдем к непосредственному доказательству теоремы 21.4.

Действительно, в силу (21.26), леммы 21.4 и (21.33) заключаем, что  $\mathcal{J}_{xx}(w)$  есть ограниченный снизу в  $H_x$  функционал. Пусть  $d$  есть точная нижняя грань  $\mathcal{J}_{xx}(w)$  и  $w_n$  — последовательность такая, что

$$\mathcal{J}_{xx}(w_n) \rightarrow d. \quad (21.46)$$

Ниже  $w_n$  будем называть *абсолютно минимизирующей последовательностью*.

Легко видеть, что вся последовательность  $w_n$  ограничена. Действительно, если бы  $w_n$  не была таковой, то существовала бы подпоследовательность (мы ее снова будем обозначать через  $w_n$ ) такая, что

$$\|w_n\|_{H_x} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (21.47)$$

но тогда (21.46) будет противоречить теореме 21.3 (соотношение (21.33)). Поскольку  $w_n$  ограничена, то ее можно считать слабо сходящейся к некоторому элементу  $w_0$ . Имеем, далее,

$$\mathcal{J}_{xx}(w_n) = \frac{1}{2} \|w_n\|_{H_x}^2 + \tilde{\mathcal{J}}_{xx}(w_n) \rightarrow d, \quad w_n \rightarrow w_0 \quad (21.48)$$

и, кроме того,

$$\left\| \frac{w_m - w_n}{2} \right\|_{H_x}^2 + \left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_x}^2 = \frac{1}{2} (\|w_m\|_{H_x}^2 + \|w_n\|_{H_x}^2) \quad (21.49)$$

для любых двух членов  $w_m, w_n$  слабо сходящейся подпоследовательности, выделенной из абсолютно минимизирующей последовательности.

Из (21.49) следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_m - w_n}{2} \right\|_{H_\kappa}^2 &= \frac{1}{2} \left( \|w_m\|_{H_\kappa}^2 + \|w_n\|_{H_\kappa}^2 \right) - \left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_\kappa}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_m) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_n) - \mathcal{F}_{\kappa\kappa}\left(\frac{w_m + w_n}{2}\right) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_m) - \\ &- \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_n) + \mathcal{F}_{\kappa\kappa}\left(\frac{w_m + w_n}{2}\right). \end{aligned} \quad (21.50)$$

Далее, поскольку  $w_m, w_n \rightarrow w_0$ , то

$$-\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_m) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_n) + \mathcal{F}_{\kappa\kappa}\left(\frac{w_m + w_n}{2}\right) \rightarrow 0, \quad (21.51)$$

$$\frac{d}{2} \leq \frac{1}{2} \left( \|w_m\|_{H_\kappa}^2 + \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_m) \right) \leq \frac{d}{2} + \varepsilon_m, \quad (21.52)$$

$$\frac{d}{2} \leq \frac{1}{2} \left( \|w_n\|_{H_\kappa}^2 + \mathcal{F}_{\kappa\kappa}(w_n) \right) \leq \frac{d}{2} + \varepsilon_n,$$

$$d \leq \left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_\kappa}^2 + \mathcal{F}_{\kappa\kappa}\left(\frac{w_m + w_n}{2}\right). \quad (21.53)$$

В (21.52), (21.53)  $\varepsilon_m, \varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $m, n \rightarrow \infty$ . Из (21.50) — (21.53) следует

$$\left\| \frac{w_m - w_n}{2} \right\|_{H_\kappa}^2 \leq \frac{d}{2} + \varepsilon_m + \frac{d}{2} + \varepsilon_n - d \leq \varepsilon_m + \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (21.54)$$

Значит,  $w_m$  сильно сходится и

$$w_m \Rightarrow w_0, \quad \mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w_0) = d.$$

Следовательно,  $w_0$  есть элемент, придающий  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)$  абсолютный минимум, и, значит,  $w_0$  порождает, как это следует из леммы 21.5, обобщенное решение задачи  $tx$ . Теорема 21.4 доказана. ■

**Теорема 21.5.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.2. В этом случае краевая задача  $tx$  имеет по крайней мере одно обобщенное решение  $w$ , придающее функционалу  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)$  абсолютный минимум, при этом  $\omega$  определяется по (13.36).

**Теорема 21.6.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.3. В этом случае краевая задача  $tx$  имеет по меньшей мере одно обобщенное решение, придающее функционалу  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)$  абсолютный минимум, при этом  $\omega$  определяется по (13.36). ■

**21.3.** В § 16 нами также была установлена разрешимость краевых задач нелинейной теории палочек в перемещениях. Представляет интерес сравнительная оценка приведенных двух методов доказательства разрешимости. В связи с этим, во-первых, укажем их некоторые общие корни. Читателю уже, видимо, ясно, что в корне этих двух доказательств лежит неравенство (16.19) в лемме 16.3. Вместе с этим оба метода идейно существенно раз-

личны. Более того, несмотря на видимую общность формулировки результатов, они все-таки существенно разнятся дополнительной информацией о решении, которая доставляется каждым методом доказательства. Доказательство § 16 основывается на вычислении вращения векторного поля  $w - G_{xx}w$ . В результате мы получили существование решения с ненулевым индексом. Между тем в § 21 при использовании вариационных принципов мы получили решение, придающее  $\mathcal{I}_{xx}(w)$  абсолютный минимум. Очень часто это даже будет качественно разные решения, и такие случаи будут особенно часты в ситуации неоднозначности решения задачи. Поэтому не имеет смысла противопоставление двух методов. Более того, их совместное использование очень часто будет полезным при оценке числа решений рассматриваемой краевой задачи.

**21.4.** Изучим более детально структуру абсолютно минимизирующих последовательностей. Прежде всего отметим, что в теоремах 21.4—21.6 фактически установлен и такой важный факт.

**Теорема 21.7.** В условиях теорем 16.1—16.3 всякая абсолютно минимизирующая соответствующий функционал  $\mathcal{I}_{xx}(w)$  последовательность  $w_n$  сильно компактна в  $H_x$  и всякий сильный предел этой последовательности  $w_0$  доставляет  $\mathcal{I}_{xx}(w)$  абсолютный минимум.

Примем некоторые определения.

**Определение 21.1.** Пусть во всем пространстве  $H_x$  имеет место соотношение

$$\mathcal{I}_{xx}(w) > \mathcal{I}_{xx}(w_0), \quad w \neq w_0. \quad (21.55)$$

В этом случае назовем  $w_0$  точкой *строгого абсолютного минимума*.

**Теорема 21.8.** Пусть  $w_0$  есть строгий абсолютный минимум  $\mathcal{I}_{xx}(w)$ . В этом случае всякая абсолютно минимизирующая последовательность  $w_n$  сильно сходится к  $w_0$ .

**Теорема 21.8** непосредственно вытекает из теоремы 21.6.

**Теорема 21.9.** Пусть  $w_{01}, \dots, w_{0N}$  — абсолютные минимумы функционала  $\mathcal{I}_{xx}(w)$ , которых предполагаем конечное число, и значит,

$$\mathcal{I}_{xx}(w_{01}) = \mathcal{I}_{xx}(w_{02}) \dots = \mathcal{I}_{xx}(w_{0N}) = d. \quad (21.56)$$

В этом случае любая абсолютно минимизирующая последовательность  $w_n$  может быть разбита на некоторое число (не более  $N$ ) сильно сходящихся последовательностей, каждая из которых сходится к своему элементу из  $w_{0k}$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Для доказательства учтем, что, поскольку число элементов  $w_{0k}$  конечно, то каждый из них можно считать принадлежащим некоторому шару  $\bar{\Pi}_k(\rho, w_{0k})$  радиуса  $\rho$ , причем  $\bar{\Pi}_k$  не имеют общих точек. Легко, далее, видеть, что вне шаров  $\bar{\Pi}_k$  мы будем иметь лишь конечное число элементов из последовательности  $w_n$ . В самом деле, если бы их было бесконечное число, то это бы означало, что вне  $\bar{\Pi}_k$  имеется абсолютно минимизирующая последовательность.

Очевидно, она была бы сильно компактна в  $H_x$  и тогда вне  $\cup \Pi_k$  имела бы еще один элемент, придающий  $\mathcal{I}_{jk}(w)$  абсолютный минимум, что невозможно. Рассмотрим теперь те  $\Pi_k$ , в которые попало бесконечное число элементов  $w_n$ . Очевидно, эти элементы вновь образуют абсолютно минимизирующую последовательность. Она по доказанному сильно компактна, и значит, любая ее предельная точка придает  $\mathcal{I}_{jk}$  абсолютно минимальное значение. Но внутри  $\Pi_k$  такой точкой может быть лишь  $w_{0k}$ , и значит, бесконечная последовательность элементов, попавших в  $\Pi_k$ , образует сильно сходящуюся к  $w_{0k}$  последовательность. Таким образом, вся абсолютно минимизирующая последовательность состоит из конечного числа сходящихся последовательностей и конечного числа элементов, лежащих вне  $\cup \Pi_k$  и внутри некоторых из них. Их можно отнести к любой из сходящихся последовательностей. Теорема 21.9 доказана. ■

**21.5. Определение 21.2.** Пусть на некоторой сфере  $\Sigma_{H_x}(r, w^{**})$  выполнено неравенство

$$\mathcal{I}_{jk}(w) > \mathcal{I}_x(w^{**}) \quad (\text{или } \mathcal{I}_{jk}(w) < \mathcal{I}_{jk}(w^*)), \quad (21.57)$$

где  $w^*$  лежит внутри  $\Sigma_{H_x}(r, w^{**})$ . В этом случае  $\Sigma_{H_x}(r, w^{**})$  будем называть сферой относительного минимума (максимума).

**Определение 21.3.** Пусть для некоторой точки  $w_0$  можно указать шар  $\Pi(r, w_0)$  такой, что в нем справедливо неравенство

$$\mathcal{I}_{jk}(w) \geq \mathcal{I}_{jk}(w_0) \quad (\text{или } \mathcal{I}_{jk}(w) \leq \mathcal{I}_{jk}(w_0), w \in \Pi(r, w_0)). \quad (21.58)$$

В этом случае  $w_0$  будем называть относительным минимумом (максимумом) функционала  $\mathcal{I}_{jk}(w)$ , а  $\Pi(r, w_0)$  — шаром относительного минимума (максимума)  $\mathcal{I}_{jk}(w)$ . Если в (21.58) выполняется строгое неравенство, то  $w_0$  будет строгим относительным минимумом (строгим относительным максимумом). Соответственно  $\Pi(r, w_0)$  будет шаром строгого относительного минимума (максимума).

**Теорема 21.10.** Внутри каждой сферы  $\Sigma_{H_x}(r, w^{**})$  относительного минимума (максимума) имеется по крайней мере одно обобщенное решение  $w_0$  краевой задачи  $tx$ , являющееся относительным минимумом (максимумом)  $\mathcal{I}_{jk}$  для некоторого шара  $\Pi(r_1, w_0)$ ,  $r_1 > r$ .

Для доказательства заметим, что в силу леммы 21.4 функционал  $\mathcal{I}_{jk}(w)$  в  $\Pi(r, w^{**})$  ограничен снизу (сверху). Поэтому существует его нижняя грань  $d_{от}$  (верхняя грань  $\mathcal{D}_{от}$ ) в  $\Pi(r, w^{**})$ , и пусть  $w_n \in \Pi(r, w^{**})$  — последовательность такая, что

$$\mathcal{I}_{jk}(w_n) \rightarrow d_{от} \quad (\text{или } \mathcal{D}_{от}). \quad (21.59)$$

Ее ниже будем называть относительно минимизирующей (максимизирующей). Очевидно,  $w_n$  ограничена и слабо компактна, и пусть  $w_0$  — один из ее слабых пределов.

Повторяя дословно рассуждения теоремы 21.3 для случая относительно минимизирующей последовательности  $w_n$ , приходим к существованию элемента  $w_0$  такого, что

$$\mathcal{J}_{**}(w_0) = d_{от}. \quad (21.60)$$

Очевидно, далее, что в силу неравенства (21.58)  $w_0$  обязательно лежит внутри  $\Sigma_{H_x}(r, w^{**})$  и, значит, является критической точкой  $\mathcal{J}_{**}(w)$  и следовательно обобщенным решением задачи  $ix$ . В том случае, если  $w_n$  — относительно максимизирующая последовательность, то надо перейти к функционалу  $-\mathcal{J}_{**}(w)$ , для которого она уже будет относительно минимизирующей, и мы также приходим к тому, что  $w_0$  есть критическая точка для  $\mathcal{J}_{**}(w)$ . Теорема 21.10 доказана. ■

Параллельно нами установлен ряд факторов, на основе которых может быть сформулирована

Теорема 21.11. В условиях теорем 16.1—16.3 всякая относительно минимизирующая (максимизирующая) последовательность  $w_n$  сильно компактна в  $H_x$  и всякий сильный предел этой последовательности  $w_0$  является точкой относительного минимума (максимума)  $\mathcal{J}_{**}(w)$ .

21.6. В данном разделе мы изучим функционал  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  в пространстве  $H_{ix}$ . Напомним, что ранее функционал  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  рассматривался на ГП1, даваемой (13.36).

Лемма 21.7. Функционал  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  ограничен снизу при произвольном изменении  $a$  в  $H_{ix}$ .

Для доказательства леммы 21.7 запишем  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  в виде

$$\mathcal{J}_{ix}(a + a^*) = \frac{1}{2} \|\omega\|_{H_x}^2 + \mathcal{J}_{1ix} + \mathcal{J}_{0ix}, \quad (21.61)$$

где

$$\mathcal{J}_{1ix} = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^0(\omega) \epsilon_{kl}^0(a^*) d\Omega + (\omega_{\Gamma}^* \cdot \omega)_{H_t}. \quad (21.62)$$

Функционал  $\mathcal{J}_{0ix}$  зависит лишь от  $w$ . Структура (21.61) вытекает непосредственно из (21.1). Легко, далее, видеть, что  $\mathcal{J}_{1ix}$  есть по  $\omega$  линейный в  $H_t$  функционал, если закрепить  $w$ , а  $\mathcal{J}_{ix}$  есть квадратичный по  $\omega$  функционал. В силу известных результатов [9]  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  при фиксированном  $w$  имеет единственный минимум в  $H_t$ . При этом на минимуме, как легко видеть,  $\omega$  и  $w$  связаны соотношением (13.36). Иными словами, минимум  $\mathcal{J}_{ix}$  при фиксированном  $w$  осуществляется на ГП1 (13.36). Однако на ГП1 (13.36)  $\mathcal{J}_{ix}(a + a^*)$  превращается в  $\mathcal{J}_{**}(w)$ , а в силу теорем 21.4—21.6  $\mathcal{J}_{**}(w)$  имеет абсолютный минимум во всем  $H_x$ . Таким образом, справедливо неравенство

$$\mathcal{J}_{ix}(a + a^*) \geq \mathcal{J}_{**}(w) = d, \quad (21.63)$$

которое и доказывает лемму 21.7. ■

**Лемма 21.8.** Всякая абсолютно минимизирующая последовательность  $\mathbf{a}_n$  ограничена в  $H_{ix}$ .

Для доказательства введем последовательность  $\tilde{\mathbf{a}}_n$  с составляющими  $\omega_n = K_{ix}(\tilde{\mathbf{a}}_n)$ ,  $w_n$ . Очевидно, имеем

$$d \leq \mathcal{J}_{ix}(\tilde{\mathbf{a}}_n) = \mathcal{J}_{ix}(w_n) \leq \mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a}_n) \leq \mathcal{D}, \quad (21.64)$$

где  $\mathcal{D}$  — некоторая постоянная. Таким образом,  $\tilde{\mathbf{a}}_n$  есть минимизирующая последовательность на ГП1 (13.36). Но тогда при доказательстве теоремы 21.4 нами получено

$$\|w_n\|_{H_x} \leq R, \quad (21.65)$$

где  $R$  от  $n$  не зависит. При выполнении (21.64) из (21.61) имеем

$$\mathcal{D} \geq \mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a}_n) \geq \frac{1}{2} \|\omega_n\|_{H_t}^2 - m (\|\omega_n\|_{H_t} + 1), \quad (21.66)$$

откуда

$$\|\omega_n\| \leq R. \quad (21.67)$$

Из (21.65), (21.66) вытекает лемма 21.8. ■

**Теорема 21.12.** Пусть выполнены условия теорем 16.1—16.3. В этом случае всякая абсолютно минимизирующая последовательность  $\mathbf{a}_n$  сильно компактна в  $H_{ix}$  и каждый предел последовательности из  $\mathbf{a}_n$  придает  $\mathcal{J}_{ix}$  абсолютный минимум в  $H_{ix}$ .

Для доказательства теоремы 21.12 учтем еще, что функционалу  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)$  можно придать вид

$$\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|_{H_{ix}}^2 + \tilde{\mathcal{J}}_{ix}(\mathbf{a}), \quad (21.68)$$

где  $\tilde{\mathcal{J}}_{ix}(\mathbf{a})$  — слабо непрерывный в  $H_{ix}$  функционал.

Структура (21.68) также непосредственно вытекает из (21.1). Слабая непрерывность  $\tilde{\mathcal{J}}_{ix}(\mathbf{a})$  сразу вытекает из усиленной непрерывности оператора вложения  $H_t$  в  $L_{q\Omega}$ ,  $H_x$  в  $W_{q\Omega}^{(1)}$ ,  $S_a$  при любом  $q \geq 1$ . Далее, по лемме 21.8 все множество  $\mathbf{a}_n$  ограничено, а значит, и слабо компактно. Таким образом, из всякой абсолютно минимизирующей последовательности можно выделить слабо сходящуюся последовательность  $\mathbf{a}_n$ . Однако структура (21.68) позволяет повторить рассуждения теоремы 21.4 и установить сильную сходимость  $\mathbf{a}_n$ , а значит, и сильную компактность любой абсолютно минимизирующей последовательности. Теорема 21.12 доказана. ■

**21.7. Теорема 21.13.** Пусть  $\mathbf{a}_0$  — строгий абсолютный минимум  $\mathcal{J}_{ix}(\mathbf{a})$  в  $H_{ix}$ . В этом случае всякая абсолютно минимизирующая последовательность сильно сходится к  $\mathbf{a}_0$ .

**Теорема 21.14.** Пусть  $\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \dots, \mathbf{a}_{0N}$  — абсолютные минимумы  $\mathcal{J}_{ix}$  в  $H_{ix}$ , которых предполагаем конечное число. В этом случае всякая минимизирующая последовательность может быть разбита на конечное число (максимум  $N$ ) сходящихся последовательностей, каждая из которых сходится к своему абсолютному минимуму  $\mathbf{a}_{0k}$ .

**Теорема 21.15.** Внутри каждой сферы  $\Sigma_{H_{ix}}(r, a^{**})$  относительного минимума (максимума) имеется по крайней мере одно обобщенное решение  $a_0$  краевой задачи  $tx$ , являющееся относительным минимумом (максимумом)  $\mathcal{J}_{ix}$  для некоторого шара  $\Pi(r_1, a_0)$ ,  $r_1 < r$ .

**Теорема 21.16.** В условиях теорем 16.1—16.3 всякая относительно минимизирующая (максимизирующая) последовательность  $a_n$  сильно компактна в  $H_{ix}$  и всякий сильный предел  $a_0$  этой последовательности является обобщенным решением задач  $tx$ , придающим  $\mathcal{J}_{ix}$  относительный минимум (максимум).

Доказательства теорем 21.13—21.16 здесь не приводятся из-за полной аналогии с доказательствами теорем 21.8—21.11.

## § 22. Вариационный метод в проблеме разрешимости краевых задач нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий

**22.1.** Будем предполагать выполненными условия 1—8 § 17 и будем исходить из функционала (7.31), варьированием которого были получены уравнения (7.65), (7.77) — определяющие уравнения в нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий. Из (7.31) с учетом (17.13) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{9x}(\Psi, w + w^*) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [D_n^{ijkl} \nabla_{ij}(w + w^*) \nabla_{kl}(w + w^*) - \right. \\ &- 2(w + w^*)(C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_4^{ij}) B_{ij} + (C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_4^{ij})(w + w^*)_{\alpha i} \times \\ &\quad \times (w + w^*)_{\alpha j} - C_{ijklp} (C^{hk} C^{lm} \nabla_{\lambda\mu} \Psi + \tilde{T}_4^{kl}) (C^{is} C^{jt} \nabla_{st} \Psi + T_4^{ij})] d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_2} k_n^{44} (w_4 + w_4^*)^2 ds - \int_{\Gamma_2} (w_4 + w_4^*) \tilde{M}^m ds - \int_{\Omega} (w + w^*) R^3 d\Omega. \end{aligned} \quad (22.1)$$

**Лемма 22.1.** Функционал  $\mathcal{J}_{9x}$  (22.1) определен в каждой точке функционального пространства  $H_{9x}$ .

Действительно, если  $w, w^* \in H_x$ , то, как уже неоднократно отмечалось,  $\nabla_{ij} w, \nabla_{ij} w^* \in L_{2\Omega}$  и первый интегральный член в правой части (7.31) определен. Далее, в силу  $\nabla_{ij} \Psi \in L_{2\Omega}$  и в силу теоремы вложения 12.3 (соотношение (12.51))  $w, w^* \in L_{2\Omega}$ , по условию 1 § 17  $B_{ij} \in C_\alpha$ , а по условию 7  $\tilde{T}_4^{ij} \in L_{2\Omega}$ . Из всего этого следует, что второй и четвертый член в правой части (7.31) определены. Если учесть, что по теореме вложения 12.3 (соотношение (12.49))  $w_{\alpha i}, w_{\alpha i}^* \in L_{q\Omega}$  при любом  $q \geq 1$ , то можно утверждать, что и третий член в (7.31) определен. Наконец,  $\int_{\Gamma_2} k_n^{44} (w_4 + w_4^*)^2 ds$  вычислим, так как (теорема 12.3, соотношение (12.49))  $w_4, w_4^* \in L_{q\Omega}$  при любом

$q \geq 1$ . Последние два интеграла в (7.31) определены по условию (17.7) на нагрузочные члены. Лемма 22.1 доказана. ■

В дальнейшем нам потребуется некоторое представление функционала  $\mathcal{J}_{9\kappa}$  от аргументов  $\Psi + \gamma\Theta$ ,  $w + w^* + \gamma\varphi$ . Непосредственно из (7.31) получаем

$$\mathcal{J}_{9\kappa}(\Psi + \gamma\Theta, w + w^* + \gamma\varphi) = \mathcal{J}_{9\kappa}(\Psi, w + w^*) + \sum_{\mu=1}^4 \gamma^\mu \mathcal{J}_{9\kappa\mu}(\Psi, w + w^*, \mathbf{d}), \quad (22.2)$$

где вектор  $\mathbf{d}$  имеет составляющие  $\Theta$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{n}$ , далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{9\kappa 1}(\Psi, w + w^*, \mathbf{d}) &= (w \cdot \varphi)_{H_\kappa} - (\Psi \cdot \Theta)_{H_9} + (w^* \cdot \varphi)_{H_\kappa} - \\ &\quad - \int_{\Omega} [(C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_4^{ij}) (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} + R^3 \varphi)] d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \frac{\partial \varphi}{\partial m} ds - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - (w + w^*) B_{ij} \right] \nabla_{kl} \Theta d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_4^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \Theta d\Omega = ((w - \mathbf{G}_{9\kappa} w) \cdot \varphi)_{H_\kappa} + ((\mathbf{K}_{9\kappa} w - \Psi) \cdot \Theta)_{H_9} = \\ &= ((\mathbf{c} - \mathbf{G}_{9\kappa} \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d})_{H_{9\kappa}}. \quad (22.3) \end{aligned}$$

В (22.3) вектор  $\mathbf{c}$  имеет составляющие  $\Psi$ ,  $w$ , оператор  $\mathbf{G}_{9\kappa}$  введен соотношением (17.20). Вектор  $\mathbf{d}$  имеет составляющие  $\Theta$ ,  $\varphi \in H_{9\kappa}$ . Само (22.3) получено на основе (17.16), (17.18). Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{9\kappa 2}(\Psi, w + w^*, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \|\varphi\|_{H_\kappa}^2 - \int_{\Omega} \varphi B_{ij} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Theta d\Omega + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Theta [\varphi_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} + \varphi_{\alpha j} (w + w^*)_{\alpha i}] + \right. \\ &\quad \left. + (C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi + \tilde{T}_4^{ij}) \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \right\} d\Omega - \frac{1}{2} \|\Psi\|_{H_9}^2, \quad (22.4) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{9\kappa 3} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Theta \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega. \quad (22.5)$$

**Теорема 22.1.** Пусть выполнены все условия 1–8 § 17. В этом случае имеет место соотношение

$$\text{grad}_{H_{9\kappa}} \mathcal{J}_{9\kappa}(\Psi, w + w^*) = \mathbf{c} - \mathbf{G}_{9\kappa} \mathbf{c}, \quad (22.6)$$

**и**, следовательно, множество критических точек функционала  $\mathcal{J}_{9\kappa}$  в пространстве  $H_{9\kappa}$  совпадает с множеством обобщенных решений задачи  $9\kappa$  (см. 17.20).

Теорема 22.1 дает строгое обоснование смешанного вариационного принципа Алумяз, который нами использовался при выводе основных уравнений (7.65), (7.77).



После установления (22.3), вытекающего из прямого сравнения его левой части с (17.16), (17.18), доказательство теоремы 22.1 основывается на оценках

$$|\mathcal{J}_{9\kappa 2}| \leq m \|c\|_{H_{9\kappa}}^2, \quad |\mathcal{J}_{9\kappa 3}| \leq m \|c\|_{H_{9\kappa}}^3,$$

которые непосредственно вытекают из (12.59), теоремы вложения 12.3 (соотношения (12.48), (12.51)). ■

Из теоремы 22.1 непосредственно следует

**Теорема 22.2.** Для того чтобы вектор  $c(\Psi, w)$  был обобщенным решением задачи  $9\kappa$ , необходимо и достаточно, чтобы  $c$  был критической точкой функционала  $\mathcal{J}_{9\kappa}$  в  $H_{9\kappa}$ .

**22.2.** Важное значение в вариационном подходе к краевым задачам нелинейной теории пологих оболочек имеет другой функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\kappa(w + w^*) &= \frac{1}{2} \|w + w^*\|_{H_\kappa}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi\|_{H_9}^2 + \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij}(w + w^*) \right] d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m w_4 ds - \int_{\Omega} R^3 w_3 d\Omega, \quad w_3 = w. \end{aligned} \quad (22.7)$$

В (22.7)  $\Psi$  считается выраженным через  $w$  посредством соотношений (17.17), и весь функционал рассматривается на гиперповерхности ГП2, при этом  $w$  пробегает все пространство  $H_\kappa$ .

Из теоремы 22.2 вытекает

**Теорема 22.3.** Имеет место соотношение

$$\text{grad}_{H_\kappa} \mathcal{J}_\kappa(w) = w - G_\kappa w. \quad (22.8)$$

Для доказательства рассмотрим  $\mathcal{J}_\kappa(w + \gamma\varphi)$ . Поскольку, как легко видеть,  $\mathcal{J}_\kappa(w + \gamma\varphi)$  есть полином четвертой степени относительно  $\gamma$ , то имеет место представление

$$\mathcal{J}_\kappa(w + \gamma\varphi) = \mathcal{J}_\kappa(w) + \sum_{\mu=1}^4 \gamma^\mu \mathcal{J}_{\kappa\mu}(w, \varphi), \quad (22.9)$$

где

$$\mathcal{J}_{\kappa\mu}(w, \varphi) = \frac{1}{\mu!} \left. \frac{d^\mu \mathcal{J}_\kappa}{d\gamma^\mu} \right|_{\gamma=0}. \quad (22.10)$$

Из (22.7) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\kappa 1} &= \left. \frac{d\mathcal{J}_\kappa}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = ((w + w^*) \cdot \varphi)_{H_\kappa} + \left( \Psi \cdot \frac{d\Psi}{d\gamma} \right)_{H_9} \Big|_{\gamma=0} + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \tilde{T}_4^{ij} (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij}\varphi \right] d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 ds - \int_{\Omega} R^3 \varphi d\Omega. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Из (17.16), (17.44) имеем

$$\left( \frac{d\Psi}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \cdot \Theta \right)_{H_0} = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} [(w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij} \varphi] \nabla_{hl} \Theta \, d\Omega. \quad (22.12)$$

Соотношение (22.12) получается, если в (17.15) совершить подстановку  $w \rightarrow w + w^* + \gamma\varphi$  и произвести дифференцирование по  $\gamma$ . Положив в (22.12)  $\Theta \equiv \Psi$ , получим

$$\left( \frac{d\Psi}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \cdot \Theta \right)_{H_0} = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} [(w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij} \varphi] \nabla_{hl} \Psi \, d\Omega. \quad (22.13)$$

Из (22.11), (22.13) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{9 \times 1} = \frac{d\mathcal{J}_x}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} &= ((w + w^*) \cdot \varphi)_{H_x} + \\ &+ \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} [(w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij} \varphi] \nabla_{hl} \Psi \, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} [(w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij} \varphi] \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds - \int_{\Omega} R^3 \varphi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (22.14)$$

С другой стороны, в силу (17.18) имеем

$$\begin{aligned} (w - G_x w) \cdot \varphi)_{H_x} &= ((w + w^*) \cdot \varphi)_{H_x} - \\ - \int_{\Omega} [(C^{ih} C^{jl} \nabla_{hl} \Psi + \tilde{T}_4^{ij}) (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} + R^3 \varphi)] \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \varphi_4 \, ds. \end{aligned} \quad (22.15)$$

Чтобы окончательно установить (22.8), требуется для малых  $\|\varphi\|_{H_x}$  доказать оценку

$$\left| \sum_{\mu=2}^4 \mathcal{J}_{9 \times \mu}(w, \varphi) \right| \leq m \|\varphi\|_{H_x}^2. \quad (22.16)$$

Из (22.7), получаем

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} \mathcal{J}_x(w + \gamma\varphi) \Big|_{\gamma=0} = \|\varphi\|_{H_x}^2 + \frac{d}{d\gamma} \left( \Psi \cdot \frac{d\Psi}{d\gamma} \right)_{H_0} \Big|_{\gamma=0} + \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega. \quad (22.17)$$

Вычислим средний член в (22.17)

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \Psi \cdot \frac{d\Psi}{d\gamma} \right)_{H_0} = \left\| \frac{d\Psi}{d\gamma} \right\|_{H_0}^2 + \left( \Psi \cdot \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \right)_{H_0}. \quad (22.18)$$

Далее, из (22.12), поскольку  $\Theta \in H_0$  произвольна и

$$\|\nabla_{hl} \Theta\|_{L_2\Omega} \leq m \|\Theta\|_{H_0}, \quad (22.19)$$

следует неравенство

$$\left\| \frac{d\Psi}{d\gamma} \right\|_{H_9} \Big|_{\gamma=0} \leq \| C^{ih} C^{jl} (w + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} - B_{ij} \varphi \|_{L_2\Omega} 1_{kl} \leq m \| \varphi \|_{H_x}. \quad (22.20)$$

Непосредственно из (17.15), если там положить  $w \rightarrow w + \gamma\varphi$ , будем иметь

$$\left( \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \cdot \Theta \right)_{H_9} \Big|_{\gamma=0} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \nabla_{kl} \Theta \, d\Omega, \quad (22.21)$$

откуда

$$\left\| \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \right\|_{H_9} \Big|_{\gamma=0} \leq m \| \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \|_{L_2\Omega} 1^{ij} \leq m \| \varphi \|_{H_x}^2. \quad (22.22)$$

Последние переходы в (22.20), (22.22) совершены на основе (12.49), (12.51). Из (22.17), (22.18) имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{\kappa 2}(w, \varphi)| &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{d^2}{d\gamma^2} \mathcal{J}_{\kappa}(w + \gamma\varphi) \Big|_{\gamma=0} \right| \leq \frac{1}{2} \| \varphi \|_{H_x}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \left( \frac{d\Psi}{d\gamma} \right)^2 \right\|_{H_9} \Big|_{\gamma=0} + \frac{1}{2} \left\| \left( \Psi \cdot \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \right)_{H_9} \right\|_{\gamma=0} + \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} \varphi_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega \right|. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Наконец, из (22.20), (22.22), (22.23) и в силу того, что  $\tilde{T}_4^{ij} \in L_2\Omega$ , получаем

$$|\mathcal{J}_{\kappa 2}(w, \varphi)| \leq m \| \varphi \|_{H_x}^2. \quad (22.24)$$

Далее, для  $\mathcal{J}_{\kappa 3}(w, \varphi)$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\kappa 3}(w, \varphi) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\gamma^3} \mathcal{J}(w + \gamma\varphi) \Big|_{\gamma=0} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\gamma^3} \| \Psi \|_{H_9}^2 \Big|_{\gamma=0} = \\ &= \left( \frac{d\Psi}{d\gamma} \cdot \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \right)_{H_9} \Big|_{\gamma=0} + \frac{1}{3} \left( \Psi \cdot \frac{d^3\Psi}{d\gamma^3} \right)_{H_9} \Big|_{\gamma=0}. \end{aligned} \quad (22.25)$$

Из (17.16), (17.44) имеем

$$\frac{d^3\Psi}{d\gamma^3} \Big|_{\gamma=0} = 0, \quad (22.26)$$

и тогда из (22.20), (22.22), (22.26) следует

$$|\mathcal{J}_{\kappa 3}(w \cdot \varphi)| \leq m \| \varphi \|_{H_x}^3. \quad (22.27)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{\kappa 4}(w, \varphi) \Big|_{\gamma=0} &= \frac{1}{4!} \left| \frac{d^4}{d\gamma^4} \mathcal{J}_{\kappa}(w + \gamma\varphi) \Big|_{\gamma=0} \right| = \\ &= \frac{1}{48} \left\| \frac{d^4}{d\gamma^4} \| \Psi \|_{H_9}^2 \right\|_{\gamma=0} = \frac{1}{4} \left\| \frac{d^2\Psi}{d\gamma^2} \right\|_{\gamma=0}^2 \leq m \| \varphi \|_{H_x}^4. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Из (22.24), (22.27), (22.28) вытекает (22.16). Теорема 22.3 доказана. ■

Теорема 22.4. Для того чтобы вектор-функция  $c(\Psi, w)$  была обобщенным решением задачи  $\mathcal{R}_x$ , необходимо и достаточно, чтобы точка  $w \in H_x$  была критической точкой функционала  $\mathcal{I}_x(w)$  в  $H_x$ , а  $\Psi$  определялось соотношением (17.17).

22.3. Теорема 22.5. Функционал  $\mathcal{I}_x(w)$  представим в виде

$$\mathcal{I}_x(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{H_x}^2 + \tilde{\mathcal{I}}_x(w), \quad (22.29)$$

где  $\tilde{\mathcal{I}}_x$  — слабо непрерывный в  $H_x$  функционал. Кроме того, имеет место соотношение

$$\tilde{\mathcal{I}}_x(w) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|w\|_{H_x} \rightarrow \infty, \quad (22.30)$$

т. е.  $\mathcal{I}_x(w)$  является растущим.

Для доказательства заметим, что (22.29) непосредственно вытекает из (22.7), причем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_x(w) = & (w \cdot w^*)_{H_x} + \frac{1}{2} \|w^*\|_{H_x}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi\|_{H_9}^2 + \\ & + \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij} (w + w^*) \right] d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} R^3 w d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m w_4 ds. \quad (22.31) \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $\tilde{\mathcal{I}}_x(w)$  есть слабо непрерывный в  $H_x$  функционал. Действительно, первый, пятый и шестой члены в правой части  $\mathcal{I}_x(w)$  (22.31) линейны и ограничены в  $H_x$ . Функционал  $\frac{1}{2} \|\Psi\|_{H_9}^2$  слабо непрерывен вследствие теоремы 18.1. Наконец, слабая непрерывность четвертого члена вытекает из усиленной непрерывности оператора вложения  $H_x$  в  $w_4^{(1)\Omega}$ , теорема 12.3. Таким образом, слабая непрерывность  $\tilde{\mathcal{I}}_x(w)$  установлена.

Докажем теперь справедливость (22.30). Для доказательства используем схему рассуждений леммы 16.5 и теоремы 21.2. Введем на  $\Sigma_{H_x}(1, 0)$  множество  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  элементов  $v$  таких, что

$$\|v\|_{H_x}^2 - 2 \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} v_{\alpha i} v_{\alpha j} d\Omega \right| < 1. \quad (22.32)$$

Дополнение  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  до полной сферы назовем  $\Sigma''_{H_x}(1, 0)$ . Очевидно, на  $\Sigma''_{H_x}(1, 0)$  имеем

$$\|v\|_{H_x}^2 - 2 \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} v_{\alpha i} v_{\alpha j} d\Omega \right| \geq 1. \quad (22.33)$$

Далее, разбиение сферы  $\Sigma_{H_x}(1, 0)$  порождает разбиение сферы  $\Sigma_{H_x}(R, 0)$  с помощью центрального проектирования на части

$\Sigma'_{H_\kappa}(R, 0)$  и  $\Sigma''_{H_\kappa}(R, 0)$ . В силу слабой непрерывности  $\int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} v_{\alpha i} v_{\alpha j} d\Omega$  в  $H_\kappa$   $\bar{\Sigma}_{H_\kappa}$  не содержит нуля. Далее, используем для  $\|\Psi(w)\|_{H_\kappa}^2$  представление (19.6). При этом, очевидно, будут справедливы неравенства (19.10), (19.21). Продолжая рассуждения по схеме теоремы 21.2, получим на  $\Sigma'_{H_\kappa}(R, 0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\kappa(w) \geq & \frac{1}{2} \|w\|_{H_\kappa}^2 + \frac{1}{2} (\Pi_4(w) - |\Pi_3(w)| - |\Pi_2(w)| - \\ & - |\Pi_1(w)| - |\Pi_0(w)|) - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - \right. \right. \\ & \left. \left. - B_{ij}(w + w^*) \right] d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \frac{dw}{dm} ds \right|. \end{aligned} \quad (22.34)$$

Поскольку по условию  $\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \in L_{2\Omega}$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij}(w + w^*) \right] d\Omega \leq \\ & \leq \|\tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \left( \left\| \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \right\|_{L_{2\Omega}} + \left\| \frac{1}{2} (w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* + w_{\alpha j} w_{\alpha i}^*) - B_{ij} w \right\|_{L_{2\Omega}} + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{1}{2} w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* - B_{ij} w^* \right\|_{L_{2\Omega}} \right). \end{aligned} \quad (22.35)$$

В силу неравенств (13.18), (13.21) легко получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_{\frac{1}{4}}^{ij} \left[ \frac{1}{2} (w + w^*)_{\alpha i} (w + w^*)_{\alpha j} - B_{ij}(w + w^*) \right] d\Omega \right| \leq \\ & \leq m (1 + \|w\|_{H_\kappa} + \|w\|_{H_\kappa}^2). \end{aligned} \quad (22.36)$$

Наконец, в силу условия 7 § 17

$$\left| \int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \frac{dw}{dm} ds \right| \leq m \|w\|_{H_\kappa}. \quad (22.37)$$

Учтя (19.10), (19.22), (22.34)–(22.37), для всех  $w$  получаем

$$\mathcal{J}_\kappa(w) \geq \frac{1}{2} R^2 + m (R^4 - R^3 - R^2 - R - 1) \quad (22.38)$$

и при достаточно больших  $R$

$$\mathcal{J}_\kappa(w) \geq \frac{1}{2} R^2. \quad (22.39)$$

Для элементов  $w \in \Sigma''_{H_\kappa}(R, 0)$  будем иметь

$$\|w\|_{H_\kappa}^2 - 2 \left| \int_{\Omega} T_{\frac{1}{4}}^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega \right| \geq R^2. \quad (22.40)$$

Из (22.7) имеем для этих же элементов

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\kappa(w) \geq & \frac{1}{2} \|w\|_{H_\kappa}^2 - \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega \right| - \\ & - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} (w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - B_{ij} w) d\Omega \right| - \left| \int_{\Omega} \tilde{T}_4^{ij} B_{ij} w^* d\Omega \right| - \\ & - \left| \int_{\Omega} R^3 w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m w_4 ds \right| \geq \frac{1}{2} R^2 - m(R+1) \quad (22.41) \end{aligned}$$

и при достаточно больших  $R$  из (22.14)

$$\mathcal{J}_\kappa(w) \geq \frac{1}{4} R^2. \quad (22.42)$$

Наконец, из (22.39), (22.42) получаем при достаточно больших  $R$  на всей сфере

$$\mathcal{J}_\kappa \geq \frac{1}{4} R^2. \quad (22.43)$$

Теорема 22.5 полностью доказана. ■

Теорема 22.6. Пусть выполнены условия 1—8 § 17. В этом случае функционал  $\mathcal{J}_\kappa(w)$  имеет по крайней мере одну точку  $w$  абсолютного минимума, которая вместе с функцией  $\Psi \in H_3$ , определяемой соотношением (17.17), дает обобщенное решение краевой задачи нелинейной теории пологих оболочек с функцией усилий (7.65), (7.77), (7.27), (6.1)—(6.3), (6.20).

Для доказательства заметим, что если  $\Psi$  определяется из (17.17), то этим подтверждается справедливость соотношения (17.15) и соответственно (17.40). Далее, поскольку  $\mathcal{J}_\kappa(w)$  — растущий функционал в  $H_\kappa$ , то существование по крайней мере одной точки абсолютного минимума функционала  $\mathcal{J}_\kappa(w)$  доказывается, как и в теоремах 21.4—21.6. Но в этой точке должно выполняться соотношение

$$\text{grad}_{H_\kappa} \mathcal{J}_\kappa(w) = 0, \quad (22.44)$$

а из (22.8) имеем

$$w = \mathbf{G}_\kappa(w); \quad (22.45)$$

в силу этого выполняется (17.14) и соответственно (17.38) или (17.39). Теорема 22.6 доказана. ■

22.4. Таким образом, теорема существования обобщенного решения задачи  $\mathcal{J}_\kappa$ , определяемой соотношениями (7.65), (7.77), (7.27), (6.1)—(6.3), (6.20),  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , доказана двумя разными методами, приведшими к теоремам 19.3 и 22.6. Однако хотя теоремы и доказаны при соответственно идентичных условиях, но результаты нельзя считать идентичными. Дело в том, что обобщенное решение теоремы 19.3 может не совпадать с решением теоремы 22.6. Это могут быть совершенно разные решения. Кроме того, совокупное применение топологического и вариационного подходов позволит нам в ряде случаев дать оценку числа решений, установить их не-

единственность. Отметим также, что к теореме 22.6 относится и примечание 16.1. ■

22.5. Обобщенное решение  $w$ ,  $\Psi$  задачи  $\mathcal{G}_*$ , даваемое теоремой 22.6 и придающее абсолютный минимум функционалу  $\mathcal{I}_*(w)$  в  $H_{\mathcal{G}_*}$ , будет также, в силу теоремы 22.1, и критической точкой функционала  $\mathcal{I}_{\mathcal{G}_*}(\Psi, w)$  в  $H_{\mathcal{G}_*}$ . Однако далеко не всегда  $w$ ,  $\Psi$  будут придавать минимум  $\mathcal{I}_{\mathcal{G}_*}(\Psi, w)$ . Более того, во всех достаточно хорошо изученных случаях можно утверждать, что  $\Psi$ ,  $w$  — лишь точка экстремума, не являющаяся ни максимумом, ни минимумом. Образно говоря, ситуация с функционалом  $\mathcal{I}_{\mathcal{G}_*}$  в  $H_{\mathcal{G}_*}$  аналогична отысканию критических точек функции  $\mathcal{I}$  на одно-

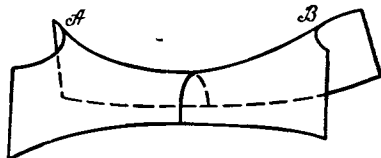


Рис. 22.1

плостном гиперboloиде в трехмерном пространстве (рис. 22.1). Когда мы переходим к ГП2 посредством соотношения (17.17), то на гиперboloиде фиксируется некоторая линия  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и на ней уже функция  $\mathcal{I}$  имеет минимум. И это соответствует теореме 22.6.

22.6. В рассматриваемом случае задач  $\mathcal{G}_*$  справедливы аналогии теорем 21.8—21.11. Из-за полной аналогии доказательств и формулировок они здесь приводиться не будут. Отметим, что фактически в теореме 22.5 содержится

Теорема 22.7. В условиях теоремы 19.3, 22.6 всякая абсолютно минимизирующая функционал  $\mathcal{I}_*(w)$  в  $H_*$  последовательность  $w_n$  сильно компактна и всякий сильный предел  $w_0$  этой последовательности доставляет  $\mathcal{I}_*(w)$  абсолютный минимум.

22.7. Сделаем некоторые общие замечания к гл. V. Впервые вариационные соображения в нелинейной теории оболочек для доказательства разрешимости краевых задач были использованы И. И. Воровичем [4—5]. Впоследствии появилась работа [7]. Применительно к пластинам вариационные соображения находим в [10]. Приведенная в § 21—22 схема рассуждений для функционалов нелинейной теории пологих оболочек публикуется впервые. Основу рассуждений, как, видимо, уже заметил читатель, составляют неравенства (21.33) (теорема 21.3) и (22.42) (теорема 22.5). После их установления теоремы 21.4—21.7, 22.6 о существовании абсолютных минимумов функционала  $\mathcal{I}_{**}(w)$ ,  $\mathcal{I}_*(w)$  немедленно следуют из результатов М. А. Красносельского [8], которому принадлежит понятие растущего функционала, или М. М. Вайнберга и Р. И. Качуровского [1—3]. Заключительная схема рассуждений теорем 21.4—21.7, 22.6, примененная автором, также не лишена самостоятельного интереса. Отметим также, что в задачах нелинейной теории пологих оболочек функционалы  $\mathcal{I}_{**}(a)$ ,  $\mathcal{I}_{\mathcal{G}_*}(e)$ ,  $\mathcal{I}_{**}(w)$ ,  $\mathcal{I}_*(w)$  не являются выпуклыми, поэтому не представляется возможным использовать развитую в последние годы теорию для выпуклых функционалов, обзор которой см. в [3].

**НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

**§ 23. Метод разложения по степеням малого параметра  
(неособое решение)**

23.1. Пусть  $w_0$  есть решение операторного уравнения (13.39)

$$w_0 = \mathbf{G}_{\text{жж}}(w_0). \quad (23.1)$$

В точке  $w_0$  оператор  $\mathbf{G}_{\text{жж}}$  дифференцируем по Фреше [11, гл. II]. Это обстоятельство, собственно, установлено нами в § 14 и более подробно обосновываться не будет. Пусть, далее, для уравнения

$$v = \sigma \operatorname{grad}_{H_{\text{ж}}} \mathbf{G}_{\text{жж}}(w_0)v \quad (23.2)$$

$\sigma = 1$  не есть собственное число. В этом случае  $w_0$  будем называть неособым решением уравнения (23.1).

**Лемма 23.1.** Всякое неособое решение (23.1) является изолированным [31, гл. III—IV].

Действительно, пусть  $w_n$  — последовательность решений

$$w_n = \mathbf{G}_{\text{жж}}(w_n), \quad \text{причем } w_n \Rightarrow w_0, \quad (23.3)$$

тогда для последовательности  $v_n = w_n - w_0$  получаем

$$v_n = \mathbf{G}_{\text{жж}}(w_0 + v_n) - \mathbf{G}_{\text{жж}}(w_0) = \operatorname{grad}_{H_{\text{ж}}} \mathbf{G}_{\text{жж}}(v_n) + \mathbf{R}(w_0, v_n), \quad (23.4)$$

где

$$\frac{\|\mathbf{R}(w_0, v_n)\|_{H_{\text{ж}}}}{\|v_n\|_{H_{\text{ж}}}^2} \leq M. \quad (23.5)$$

Поскольку  $w_0$  — неособое решение, то из (23.4) имеем

$$v_n = \mathbf{KR}(w_0, v_n), \quad (23.6)$$

где

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I} - \operatorname{grad}_{H_{\text{ж}}} \mathbf{G}_{\text{жж}})^{-1}. \quad (23.7)$$

Оператор  $\mathbf{K}$  существует, ограничен, поскольку  $\operatorname{grad}_{H_{\text{ж}}} \mathbf{G}_{\text{жж}}$  является вполне непрерывным оператором. Из (23.6) имеем

$$\|v_n\|_{H_{\text{ж}}} \leq \|\mathbf{K}\| \|\mathbf{R}\|_{H_{\text{ж}}}, \quad (23.8)$$

что невозможно вследствие (23.5). Лемма 23.1 доказана. ■



Поясним на примере механическое содержание понятия «неособое решение». Рассмотрим сферический, жестко заделанный купол, подвергнутый действию отрицательного давления  $p$ . Эта задача изучалась многими авторами, см. [18, 19, 38, 107—108]. Характеристика нагружения купола — зависимость  $p(f)$  давления от стрелы прогиба — при средней величине подъемности показана на рис. 23.1. Все решения этой задачи, кроме точек  $p_i, f_i, i = 1, 2$ , будут неособыми.

23.2. Рассмотрим НОУ (13.39), к которым сведены краевые задачи  $ix$ , и наметим для них некоторую общую схему использования метода малого параметра, включающую все практически применявшиеся в нелинейной теории оболочек случаи. Положим, что  $w_0$  — неособое решение (13.39) и

$$w = w_0 + w_{01}. \quad (23.9)$$

Тогда для  $w_{01}$  получаем

$$w_{01} = G_{жж}(w_0 + w_{01}) - G_{жж}(w_0) + R(w_0 + w_{01}). \quad (23.10)$$

В правой части (23.10) член  $R(w_0 + w_{01})$  представляет возмущение задачи, приведшее к появлению  $w_{01}$ . Он может включать как изменение внешней нагрузки, так и изменение параметров самой оболочки. Выбирая его в том или ином виде, можно охватить широкий класс задач. Исходя из результатов § 14, 17, естественно принять

$$G_{жж}(w_0 + w_{01}) - G_{жж}(w_0) = G_{жж1}(w_0) w_{01} + G_{жж2}(w_0, w_{01}) + G_{жж3}(w_0, w_{01}), \quad (23.11)$$

где  $G_{жж\rho}(w_0, w_{01})$  — однородные операторы над  $w_{01}$  порядка  $\rho$  и действующие в  $H_x$ . Наконец, вместо (23.11) будем рассматривать более общее уравнение с параметром  $\mu$

$$w_{01} = G_{жж1}(w_0) w_{01} + G_{жж2}(w_0, w_{01}) + G_{жж3}(w_0, w_{01}) + \mu R(w_0 + \mu w_{01}). \quad (23.12)$$

Предполагая, что для  $R(w_0 + \mu w_{01})$  имеет место разложение

$$R(w_0 + \mu w_{01}) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(w_0, w_{01}) \mu^k, \quad (23.13)$$

$$\|R_k(w_0, w_{01})\|_{H_x} \leq \|R_k\| \|w_{01}\|_{H_x}^k,$$

сходящееся при  $\mu = 1$  в  $H_x$ , будем искать решение (23.12) в виде

$$w_{01} = \sum_{k=0}^{\infty} w_{1k} \mu^k, \quad (23.14)$$

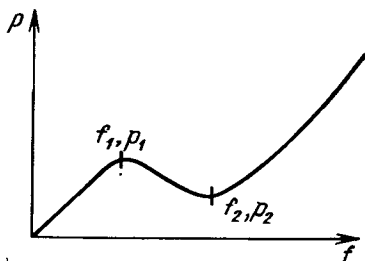


Рис. 23.1

последовательные коэффициенты которого находим из (23.12). Этот метод довольно широко использовался на ранней стадии развития нелинейной теории оболочек. Отметим в связи с этим обзор Цень Вэйчана [76], а также его работы [74, 75], в которых предлагались разложения в ряд вида (23.13) и параметр  $\mu$  считался пропорциональным максимальному прогибу. В ряде работ использовались разложения по степеням нагрузки. Эти соображения получили развитие в работе Е Кайюаня [33], где применялись разложения по степеням максимального прогиба для широкого класса опираемых пластины. Характерной особенностью этой статьи является вычисление большого количества приближений (до трех и более). Следует, однако, заметить, что из-за недостаточной эффективности интерес к разложениям по степеням малого параметра в нелинейной теории оболочек довольно быстро угас. И как будет объяснено ниже, это было не вполне обоснованно, так как модификации метода приводили к повышению его эффективности.

**23.3.** Для обоснования разложений (23.14) в нелинейной теории оболочек учтем, что

$$\mathbf{G}_{\text{кк}1}(w_0, w_{01}) = \text{grad}_{H_{\kappa}} \mathbf{G}_{\text{кк}}(w_{01}) \text{ в точке } w_0, \quad (23.15)$$

и рассмотрим более подробную структуру  $\mathbf{G}_{\text{кк}2}(w_{01})$ ,  $\mathbf{G}_{\text{кк}3}(w_{01})$ .

**Лемма 23.2.** Однородный оператор  $\mathbf{G}_{\text{кк}2}(w_0, w_{01})$  представим в виде

$$\mathbf{G}_{\text{кк}2}(w_0, w_{01}) = \sum_{i=1}^{n_2} \mathcal{B}_i \{ \mathcal{C}_{i1}(w_{01}), \mathcal{C}_{i2}(w_{01}) \}, \quad (23.16)$$

где  $\mathcal{C}_{i1}$ ,  $\mathcal{C}_{i2}$  — аддитивные однородные операторы первого порядка и  $\mathcal{C}_{i1}(w_{01})$ ,  $\mathcal{C}_{i2}(w_{01})$  действуют из  $H_{\kappa}$  в некоторое  $L_{q_1\Omega}$ ,  $q_1 > 1$ , а  $\mathcal{B}_i$  из  $L_{q_2\Omega}$ ,  $q_2 > 1$  в  $H_{\kappa}$ , будучи линейными по каждой из переменных. При этом операторы  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_{i1}$ ,  $\mathcal{C}_{i2}$  ограничены и, значит, имеют место соотношения

$$\| \mathcal{B}_i \{ \mathcal{C}_{i1}(\varphi), \mathcal{C}_{i2}(\psi) \} \|_{H_{\kappa}} \leq m \| \varphi \|_{H_{\kappa}} \| \psi \|_{H_{\kappa}}, \quad (23.17)$$

если  $\varphi, \psi \in H_{\kappa}$ .

**Лемма 23.3.** Однородный оператор  $\mathbf{G}_{\text{кк}3}(w_{01})$  представим в виде

$$\mathbf{G}_{\text{кк}3}(w_0, w_{01}) = \sum_{i=1}^{n_3} \mathcal{E}_i \{ \mathcal{M}_{i1}(w_{01}), \mathcal{M}_{i2}(w_{01}), \mathcal{M}_{i3}(w_{01}) \}, \quad (23.18)$$

где  $\mathcal{M}_{i1}$ ,  $\mathcal{M}_{i2}$ ,  $\mathcal{M}_{i3}$  — аддитивные однородные операторы первого порядка и  $\mathcal{M}_{i\theta}(w_{01})$  действуют из  $H_{\kappa}$  в некоторые  $L_{q\Omega}$ ,  $q > 1$ , а  $\mathcal{E}_i$  — однородный аддитивный оператор, действующий из  $L_{q\Omega}$  в  $H_{\kappa}$ . При этом операторы  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{M}_{i\theta}$  ограничены, и имеют место неравенства

$$\| \mathcal{E}_i \{ \mathcal{M}_{i1}(\varphi), \mathcal{M}_{i2}(\psi), \mathcal{M}_{i3}(\theta) \} \| \leq m \| \varphi \|_{H_{\kappa}} \| \psi \|_{H_{\kappa}} \| \theta \|_{H_{\kappa}}. \quad (23.19)$$

Леммы 23.2, 23.3 легко устанавливаются из структуры операторов  $\mathbf{K}_{i\kappa}(w)$ ,  $\mathbf{G}_{\text{кк}}(w)$ , подробно изученной в § 14, 17, и более под-

робно здесь обосновываться не будут. Переходя к обоснованию (23.14), отметим, что (23.12) можно записать в следующем виде:

$$w_{01} = \mathbf{K}\mathbf{G}_{\text{жк}2}(w_0, w_{01}) + \mathbf{K}\mathbf{G}_{\text{жк}3}(w_0, w_{01}) + \mu\mathbf{K}\mathbf{R}(w_0 + \mu w_{01}), \quad (23.20)$$

где  $\mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0))^{-1}$  существует и ограничен, поскольку  $w_0$  — неособое решение и  $\mathbf{G}_{\text{жк}1}$  действует в  $H_n$  усиленно непрерывно. Ряд (23.14) может быть построен, если (23.14) подставить в (23.20) и учесть (23.13). Легко, далее, видеть, что если ряд (23.14) сходится при некотором  $\mu_0$ , то он сходится при всех  $\mu$ , для которых

$$|\mu| \leq |\mu_0|, \quad (23.21)$$

и удовлетворяет (23.20) и, значит, и (23.12). Для оценки радиуса сходимости ряда (23.14) введем, как это обычно делается, мажорирующее алгебраическое уравнение

$$x = \|\mathbf{K}\| m (x^2 + x^3) + \mu \|\mathbf{K}\| \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{R}_k\| x^k \mu^k, \quad (23.22)$$

где  $m$  определяется постоянными в неравенствах (23.17), (23.19). Решение (23.22) также разыскивается в виде ряда

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k, \quad (23.23)$$

причем  $x_k$  определяются из (23.22). В силу того, что (23.22) мажорирует (23.20), радиус сходимости (23.14) не меньше, чем (23.23). Последний определяется тем значением  $\mu$ , при котором уравнение (23.22) имеет кратный корень.

Таким образом, нами установлена

**Теорема 23.1.** Пусть выполнены условия теорем 16.1 (соответственно теорем 16.2, 16.3), а  $w_0$  есть неособое решение. В этом случае ряд (23.14) имеет конечный радиус сходимости в  $H_n$ , определяемый  $\|\mathbf{K}\|$ ,  $\|\mathbf{R}_k\|$ ,  $\|w_0\|$ ,  $m$ .

Отметим здесь важную особенность разложений (23.14): они не столь чувствительны к гладкости исходных данных. Так, они сходятся даже в том случае, если  $R^3$  содержит компоненты в виде  $\delta$ -функций, т. е. сосредоточенные силы при достаточно малой величине их интенсивности. Вместе с этим столь же быстрая сходимость ряда (23.14) будет иметь место и при равномерной нагрузке  $p$ , если она достаточно мала. Принципиальной разницы здесь нет. При использовании других приближенных методов (Бубнова — Галеркина, Рунге, конечных разностей, конечных элементов) налицо большое различие в эффективности, сильно зависящей от гладкости нагрузки. Некоторые же методы (конечные разности, конечные элементы) вообще не могут непосредственно использоваться, если нагрузка содержит разрывы типа сосредоточенных сил. Приходится предварительно производить численно-аналитическую обработку

задачи. Многочисленные примеры использования метода малого параметра в механике читатель может найти в [7, 17, 38, 70].

**23.4.** Причиной слабой эффективности метода малого параметра является наличие особенностей у решения  $w_{01}$ , если  $w_{01}$  рассматривать как функцию  $\mu$ . Знание этих особенностей открыло бы широкие возможности для расширения области применения этого метода. И несмотря на бурное развитие других методов решения задач нелинейной теории пологих оболочек, это имело бы большое значение. Тем более, что налицо серьезные возможности автоматизации самого метода малого параметра. Таким образом, возникает

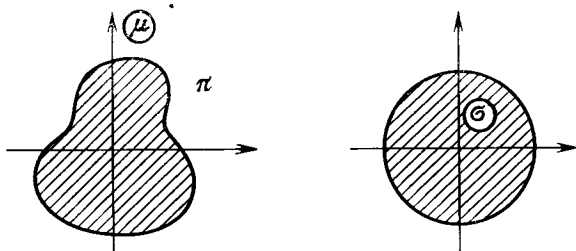


Рис. 23.2

проблема априорного определения особенностей решений НОУ (23.12) как аналитических функций параметров нагрузки. Трудности ее решения очевидны, и пока приходится действовать в рамках возникшей неопределенности. И здесь имеются два пути. Возможно продвигаться в обход имеющихся препятствий (т. е. особых точек решения) путем переразложения решения в новые ряды Тейлора по параметру  $\mu$ . Этот путь весьма эффективно использовался в работах Я. Ф. Каюка и его сотрудников [2, 3, 38—44]. Естественно при этом при переразложениях двигаться вдоль действительной оси  $\mu$ . В указанных работах Я. Ф. Каюка на основе этой методики решен ряд задач нелинейной теории пластин и оболочек.

**23.5.** Если нам известна область  $\pi$  аналитической зависимости  $w$  от параметра  $\mu$  (рис. 23.2), то для усиления сходимости разложений можно поступить следующим образом. Пусть  $\sigma = \sigma(\mu)$  есть отображение  $\pi$  на внутренность единичного круга, причем

$$\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \mu_h \sigma^h. \quad (23.24)$$

В этом случае естественно искать  $w_{01}$  в виде

$$w_{01} = \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{w}_{1h} \sigma^h. \quad (23.25)$$

Очевидно, ряд (23.25) будет сходиться в единичном круге и даст решение (13.39) во всей области аналитичности  $w_{01}(\mu)$ . Фактическое же построение (23.25) можно производить путем элементар-

ного пересчета разложения (23.14) с помощью (23.24). Однако определение области аналитичности  $\pi$  крайне затруднительно. Вместе с этим даже приблизительное представление о  $\pi$  может быть очень полезным. Например, если известно, что какая-либо область  $\tilde{\pi}$  не содержит особых точек  $w_{01}(\mu)$  и, значит,  $\tilde{\pi} \subset \pi$ . Пусть, далее,  $\sigma = \sigma(\mu)$  отображает  $\tilde{\pi}$  в единичный круг плоскости  $\sigma$ . Тогда, очевидно,  $w_{01}$  имеет смысл разлагать по целым положительным степеням  $\sigma$ . При этом мы получим возможность получать сходящиеся разложения для всех  $\mu \in \tilde{\pi}$ . Эффективность этого приема зависит от того, насколько близко  $\tilde{\pi}$  к  $\pi$ . Фактическое разложение  $w_{01}$  по степеням  $\sigma$  легко строится, если построено разложение  $w_{01}$  по степеням  $\mu$  и разложение  $\sigma$  по степеням  $\mu$  или обратное разложение. Этот прием использован еще Эйлером, более подробно см. [38, 47].

23.6. Однако и такой подход не исчерпывает всей проблемы в целом. Например, в ряде случаев характеристика нагружения оболочки  $f = f(p)$  (кривая «прогиб в центре — нагрузка»), как известно, не является однозначной (рис. 23.1). Поэтому уже на действительной оси будут особые точки типа точек ветвления. Таким образом, волей-неволей мы приходим к другому пути анализа — учету особенностей решения в аппарате его аппроксимации. Здесь имеется определенный опыт, например в использовании аппроксимации Раде [85]. Суть подхода заключается в том, что если заранее известна структура функции  $f(p)$ , например мероморфность, то ее можно аппроксимировать с помощью соотношения

$$f(p) \sim \frac{\sum_{k=0}^N a_k p^k}{\sum_{k=0}^N b_k p^k}, \quad (23.26)$$

подбирая  $a_k, b_k$  из условия равенства максимального числа коэффициентов ряда Тейлора в нуле для  $p(f)$  и аппроксимирующей рациональной функции (23.26). Свойства аппроксимации (23.26) изучались в ряде исследований [13, 27—29, 59]. Она, по-видимому, может оказаться эффективной для случая, когда характеристика нагружения оболочки  $f = f(p)$  является монотонной. В случае немонотонной характеристики оболочки  $f(p)$  — явно не мероморфная функция. Она уже на действительной оси имеет по меньшей мере две точки ветвления:  $f_1, p_1; f_2, p_2$  (рис. 23.1). В общем случае в окрестности каждой из этих точек возможно представление

$$f - f_i \approx \pm (p - p_i)^m. \quad (23.27)$$

Чаще всего следует ожидать, что  $m = 1/2$ . В связи с этим вместо соотношения (23.26) следует в случае немонотонной характеристики

использовать аппроксимацию

$$f(p) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k p^k}{\sum_{k=0}^N b_k p^k g(p)}, \quad (23.28)$$

где  $g(p)$  — функция, определяемая соотношением

$$p = g^3 + \mathcal{A}g^2 + \mathcal{B}g + \mathcal{C}. \quad (23.29)$$

Постоянные  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  определяются из условия равенства определенного числа коэффициентов разложения  $f(p)$  в ряд Тейлора в окрестности  $p = a$ . Сами же эти коэффициенты непосредственно определяются из (23.12), (23.20). В ряде случаев немонотонность  $p(f)$  может носить и более сложный характер [6, 14, 18], и тогда в правой части (23.29) приходится брать полиномы более высокого порядка. ■

Таким образом, возможности повышения эффективности метода малого параметра, на наш взгляд, далеко не исчерпаны. Большие перспективы здесь открываются, если учесть большое количество глубоких результатов в теории аналитических функций, где устанавливаются их глобальные свойства по коэффициентам ряда Тейлора и возможности автоматизации алгебраических и других выкладок на ЭВМ. Аппроксимации типа (23.26) оказываются весьма полезными и при обработке результатов экспериментов с тонкостенными конструкциями. С их использованием могут быть разработаны прецизионные методы предсказания величины верхнего критического давления оболочки.

## § 24. Метод разложения по степеням малого параметра (особое решение). Метод Ляпунова — Шмидта

24.1. Пусть  $w_0$  есть особое решение. Иными словами, примем, что операторное уравнение (23.2) имеет  $\sigma = 1$  своим собственным значением. Общий анализ этих проблем заложен в фундаментальных трудах А. М. Ляпунова [49, 99], Э. Шмидта [104], Пуанкаре [101]. Подробное изложение вопроса мы находим в [16]. Применение метода малого параметра к широкому кругу задач механики сплошной среды для особого решения можно найти в [45, 46, 53]. В краевых задачах нелинейной теории пластин метод ветвления впервые был использован в работе П. Я. Полубариновой-Кочиной [59] в 1936 г., где рассматривалось послекритическое поведение прямоугольной шарнирно опертой пластины. В 1939 г. Фридрихс и Стокер рассмотрели послекритическое поведение сжатой пластины [89].

Новый этап в использовании методов ветвления начался с фундаментальной работы Койтера [92]. Послекритическое поведение

круглой пластины рассматривалось Боднером [86], Э. И. Григолюком (методом Бубнова — Галеркина) [22]. Детальное исследование задачи при одновременном действии продольно-поперечной нагрузки дано в работе И. И. Воровича [20].

Вначале рассмотрим некоторые общие соображения в применении к операторному уравнению (13.39). Прежде всего отметим, что операторное уравнение

$$w - \mathbf{G}_{\text{жк1}}(w_0)w = f \quad (24.1)$$

в нашем случае при  $f=0$  в силу полной непрерывности  $\mathbf{G}_{\text{жк1}}$  имеет конечное число  $r$  решений — собственных элементов оператора  $\mathbf{G}_{\text{жк1}}$ , которое будем далее называть рангом  $w_0$ . Они образуют собственное подпространство  $H_{\text{ж}}^+$ , и их можно считать ортонормированными в  $H_{\text{ж}}$ . Ортогональное дополнение  $[H_{\text{ж}}^+]$  ко всему пространству  $H_{\text{ж}}$  обозначим  $H_{\text{ж}}^-$ , и значит,

$$H_{\text{ж}} = H_{\text{ж}}^- \oplus H_{\text{ж}}^+. \quad (24.2)$$

Как известно [16], существует ограниченный оператор

$$\mathbf{K} = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\text{жк1}}(w_0)]^{-1}, \quad (24.3)$$

действующий в  $H_{\text{ж}}^-$ . ■

Рассмотрим операторное уравнение (23.10). Очевидно, его решение  $w_{01}$  в силу сказанного имеет смысл искать в таком множестве элементов  $H_{\text{ж}}$ , для которых

$$\mathbf{G}_{\text{жк2}}(w_{01}) + \mathbf{G}_{\text{жк3}}(w_{01}) + \mu \mathbf{R}(w_0 + \mu w_{01}) \in H_{\text{ж}}^-, \quad (24.4)$$

и тогда

$$w_{01} = w_{01}^+ + w_{01}^-, \quad w_{01}^+ = l\theta, \quad w_{01}^- = \mathbf{K}(\mathbf{G}_{\text{жк2}}(w_{01}) + \mathbf{G}_{\text{жк3}}(w_{01}) + \mu \mathbf{R}(w_0 + \mu w_{01})), \quad (24.5)$$

где

$$\theta \in H_{\text{ж}}^+, \quad \|\theta\|_{H_{\text{ж}}} = 1 \text{ и } l - \text{некоторая постоянная.} \quad (24.6)$$

Таким образом, проблема свелась к операторному уравнению (24.5) в  $H_{\text{ж}}^-$  и конечномерной задаче определения  $l$  и  $\theta$ . Она может быть явно записана, если учесть (24.4), и значит,

$$((\mathbf{G}_{\text{жк2}}(w_{01}) + \mathbf{G}_{\text{жк3}}(w_{01}) + \mu \mathbf{R}(w_0 + \mu w_{01})) \cdot \theta_k) = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad (24.7)$$

где  $\theta_k$  — собственные элементы оператора  $\mathbf{G}_{\text{жк1}}$ . Решение системы (24.5) — (24.7) может быть построено следующим образом. Имеем

$$w_{01}^- = \mathbf{K}(\mathbf{G}_{\text{жк2}}(w_{01}^- + l\theta) + \mathbf{G}_{\text{жк3}}(w_{01}^- + l\theta) + \mu \mathbf{R}(w_0 + \mu w_{01}^- + \mu l\theta)), \quad (24.8)$$

и  $w_{01}^-$  может быть найдено из (24.8) при заданных  $l$ ,  $\theta$  в виде ряда

$$w_{01}^- = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{01qn}^- \mu^q l^n, \quad w_{0100}^- = 0. \quad (24.9)$$

Его сходимость при достаточно малых  $l$  и  $\mu$  легко устанавливается на основе того, что алгебраическое уравнение

$$x = m \|K\| (x^2 + |l|x + |l|^2 + x^3 + |l|^2 x + |l|x^2 + |l|^3) + \mu \|K\| \sum_{k=1}^{\infty} \|R_k\| (\mu x + |l|)^k, \quad (24.10)$$

где постоянная  $m$  берется из неравенств (23.17), (23.19), является мажорирующим по отношению к (24.8). Таким образом, на основе (24.8) устанавливается отображение

$$\theta \rightarrow w_{01}^-, \quad (24.11)$$

действующее из некоторой окрестности нуля  $H_{\alpha}^+$  в некоторую окрестность нуля  $H_{\alpha}^-$ . Подставив в (24.7) отображение (24.11), получаем  $r$  уравнений, которые должны определить постоянную  $l$  и постоянные разложения  $\theta$  по какому-либо базису в  $H_{\alpha}^+$ , например  $\theta_k$ .

Весь смысл приведенных здесь рассуждений заключается в том, что описание множества решений операторного уравнения (23.10) в окрестности особого решения  $w_0$  сведено к исследованию некоторой нелинейной конечномерной задачи. Однако эта задача и оказывается наиболее сложной. Разные способы составления уравнения ветвления в общей операторной обстановке и анализ возможных здесь вариантов можно найти в [16]. Случаев, когда бы такой

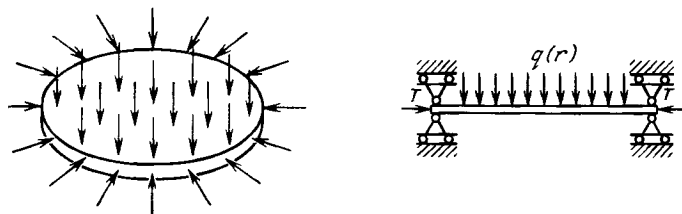


Рис. 24.1

анализ был сделан без априорных предположений о коэффициентах уравнения ветвления, весьма немного (см., например, [20]). Как правило, такой анализ делается на основе некоторых априорных предположений, проверяемых впоследствии вычислениями.

24.2. В качестве примера рассмотрим задачу о послекритическом осесимметричном поведении круглой плиты радиуса  $a$ , шарнирно опертой по контуру. Будем предполагать, что плита сжимается на контуре постоянной продольной нагрузкой  $T$  и действует поперечная нагрузка  $q(r)$  (рис. 24.1). Пусть, далее, плита опирается на нелинейное упругое основание с реакцией, определяемой соотношением

$$Q = -\lambda w^3. \quad (24.12)$$



Основные уравнения и граничные условия задачи имеют вид

$$D_{\text{нп}} \nabla^4 w = q(r) - \lambda w^3 + \frac{2h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\Psi}{dr} \right), \quad (24.13)$$

$$\nabla^4 \Psi = -E \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}. \quad (24.14)$$

В (24.14)  $D_{\text{нп}} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$  — жесткость пластины на изгиб,  $2h$  — ее толщина,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Для уравнений (24.13), (24.14) имеем граничные условия

$$w(a) = \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (24.15)$$

$$\Psi(a) = 0, \quad \left( \frac{d\Psi}{dr} \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{T}{2h}. \quad (24.16)$$

Мы не будем в данной задаче исключать из рассмотрения  $\Psi$  и переходить к операторному уравнению относительно  $w$ , а все рассмотрения проведем на системе (24.13) — (24.16). Будем предполагать, что в (24.16)

$$T = T_0 + T_1, \quad (24.17)$$

где  $T_0$  — критическое продольное усилие сжатия пластины, и положим далее

$$\Psi = \Psi^* + \frac{T_0}{4h} (a^2 - r^2). \quad (24.18)$$

В этом случае система (24.13) — (24.16) примет вид

$$D_{\text{нп}} \nabla^4 w + T_0 \nabla^2 w = \mu \left[ q(r) - \lambda w^3 + \frac{2h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{d\Psi^*}{dr} \right) \right], \quad (24.19)$$

$$\nabla^4 \Psi^* = -\frac{E}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad (24.20)$$

$$\Psi^*(a) = 0, \quad (24.21)$$

$$\left( \frac{d\Psi^*}{dr} \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{T_1}{2h}. \quad (24.22)$$

В (24.19)  $\mu$  — параметр разложения, для которого впоследствии примем  $\mu = 1$ . Граничные условия (24.15) для  $w$  останутся без изменений.

Положим далее

$$w = w_0 + \mu w_1 + \dots, \quad \Psi^* = \Psi_0^* + \mu \Psi_1^* + \dots \quad (24.23)$$

Подставив (24.23) в (24.19) — (24.22), будем иметь

$$D_{a1}\nabla^4 w_0 + T_0\nabla^2 w_0 = 0, \quad (24.24)$$

$$w_0(a) = \left( \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_0}{dr} \right)_{r=a} = 0, \quad (24.25)$$

$$\nabla^4 \Psi_0^* = - \frac{E}{r} \frac{dw_0}{dr} \frac{d^2 w_0}{dr^2}, \quad (24.26)$$

$$\Psi_0^*(a) = 0, \quad \left( \frac{d\Psi_0^*}{dr} \frac{1}{r} \right)_{r=a} = - \frac{T_1}{2h}, \quad (24.27)$$

$$D_{a1}\nabla^4 w_1 + T_0\nabla^2 w_1 = q(r) - \lambda w^3 + \frac{2h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw_0}{dr} \frac{d\Psi_0^*}{dr} \right) \quad (24.28)$$

и т. д. Из (24.24) — (24.25) видно, что эта система соответствует уравнению (24.1) при  $\mu = 1$ . Решение (24.18) будет особым, если краевая задача «сидит на спектре» и имеет, следовательно, нетривиальное решение. Эта задача легко анализируется, причем, оказывается,  $p = 1$ , и мы имеем одно собственное решение

$$w_{01}^{\dagger} = l\theta + \dots, \quad \theta = \mathcal{J}_0(\kappa) - \mathcal{J}_0\left(\kappa \frac{r}{a}\right), \quad T_0 = \frac{\kappa D}{a^2}, \quad \kappa = 2,050. \quad (24.29)$$

Поэтому система уравнений ветвления (24.7) будет состоять из одного уравнения. Для его составления следует найти  $\Psi_0^*$  из (24.26), (24.27). Легко видеть, что при этом получаем

$$\Psi_0^* = Z + \frac{T_1}{4h} (a^2 - r^2) + \dots, \quad (24.30)$$

где  $Z$  — прогиб жестко зацементированной плиты под нагрузкой

$$- \frac{El^3}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{d^2\theta}{dr^2}.$$

Уравнение ветвления (24.7) в нашем случае примет вид

$$\int_0^a \left\{ q(r) - \lambda l^3 \theta^3 + \frac{2h}{r} \frac{d}{dr} \left[ l \frac{d\theta}{dr} \left( l^2 \frac{dZ}{dr} - \frac{T_1 r}{2h} \right) \right] \right\} \theta r dr = 0. \quad (24.31)$$

Легко убедиться в том, что в рассматриваемом приближении (24.31) означает ортогональность правой части (24.28) собственной функции  $\theta(r)$ . Соотношение (24.31) легко записывается в виде

$$\sigma_1 + \sigma_2 l T_1 = \sigma_3 l^3 \dots, \quad (24.32)$$

где

$$\sigma_1 = \int_0^a q(r) \theta(r) r dr, \quad (24.33)$$

$$\sigma_2 = \int_0^a r \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 dr, \quad (24.34)$$

$$\sigma_3 = \int_0^a \left[ \lambda \theta^4 r + 2h \frac{dZ}{dr} \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] dr. \quad (24.35)$$

Лемма 24.1. Все  $\sigma_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Для  $\sigma_1, \sigma_2$  это очевидно, поскольку  $\theta \geq 0$ .

Очевидно, лемма будет доказана, если установить неравенство

$$\frac{dZ}{dr} \geq 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (24.36)$$

Как видно из (24.30), (24.26),  $Z$  определяется краевой задачей

$$\nabla^4 Z = -\frac{El^2}{r} \frac{d\theta}{dr} \frac{dr\theta}{dr^2}, \quad Z|_{r=a} = \frac{dZ}{dr}|_{r=a} = 0. \quad (24.37)$$

Далее, из (24.29) следует, что

$$\frac{d\theta}{dr} \geq 0, \quad \frac{d^2\theta}{dr^2} \geq 0, \quad \text{если } 0 \leq r \leq a. \quad (24.38)$$

Таким образом, соотношения (24.37) — (24.38) показывают, что  $Z$  можно рассматривать как прогиб плиты единичной жесткости

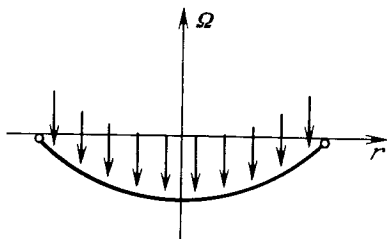


Рис. 24.2

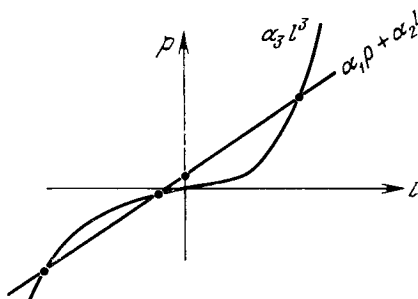


Рис. 24.3

при отрицательной осесимметричной нагрузке. При этом, очевидно (рис. 24.2), будет справедливо (24.36). Все это рассуждение позволяет установить количество корней (24.32) при различных соотношениях между  $T_1$  и  $\sigma_i$ . Именно, оказывается, что при

$$T_1 < \frac{\sigma_1^{2/3} \sigma_3^{1/3}}{\sigma_2} 1,895 \quad (24.39)$$

пластина будет иметь единственную форму равновесия. Если

$$T_1 > \frac{\sigma_1^{2/3} \sigma_3^{1/3}}{\sigma_2} 1,895, \quad (24.40)$$

то налицо три формы равновесия: одна с положительным прогибом, вторая и третья — с отрицательным (рис. 24.3). При этом наибольший по модулю корень будет положительным. Более детальное исследование показывает, что среднему по модулю корню (24.32) будет соответствовать неустойчивая форма равновесия, остальные формы устойчивы.

Если

$$T_1 = \frac{\sigma_1^{2/3} \sigma_3^{1/3}}{\sigma_2} 1,895, \quad (24.41)$$

то два отрицательных корня сливаются в один, и пластина будет иметь две формы равновесия, причем отрицательному двойному корню уравнения (24.32) будет соответствовать неустойчивая форма равновесия. ■

Задача о круглой пластине в послекритической стадии изучалась многими авторами. Однако приведенное здесь исследование (теорема 24.2) позволяет утверждать, что кроме полученных трех случаев ничего другого в окрестности особого решения (24.24), (24.25) быть не может. Рис. 24.3 дает наглядное представление о возможных здесь ситуациях. Эта же задача рассмотрена в [16].

24.3. Исследование Койтера [92], посвященное влиянию начальных несовершенств, вызвало большой поток работ, в которых теория ветвления развивалась применительно к задачам нелинейной теории оболочек. Здесь прежде всего отметим работы самого Койтера [92—98], Будянского [87], Будянского, Хатчисона [11, 88], Хатчисона и Койтера [73, 92] и других авторов [46]. В это же время началось интенсивное развитие приложений методов ветвлений к анализу конкретных задач. Весьма подробно исследовались случаи ветвления при  $p=2$ , т. е. при наличии двукратного спектра. Здесь следует отметить работы Л. С. Срубщика [64—67], И. М. Бермуса [8], И. М. Бермуса и Л. С. Срубщика [9, 10]. Более подробно читатель может ознакомиться с этим кругом вопросов по монографии [66]. Этой же проблеме посвящены исследования [90, 102].

Разумеется, было бы весьма желательным в достаточно общих случаях получить какие-либо строгие результаты относительно структуры уравнений разветвления (24.7), опирающиеся лишь на свойства операторного уравнения (13.39). Однако эта проблема является общей. К ней сводится большое количество задач естествознания и техники, объединенных единым термином «теория катастроф». Необходимо отметить, что основные представления этой теории, ее общие методы и выводы складывались под воздействием задач устойчивости упругих систем, и едва ли не первой катастро-

фой, которую математически осознал человек, была эйлерова потеря устойчивости стержня. В настоящее время в теории катастроф складываются общие методы, и здесь следует указать работы В. И. Арнольда, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде [4, 5], а также большой цикл исследований Томсона [106—108], о котором еще будет сказано в § 25. ■

24.4. В последние годы произошло весьма результативное соединение теории ветвления и методов машинной математики. При этом удается построить машинные алгоритмы нахождения основного решения, определения его типа (особое, неособое). В случае, если  $w_0$  — особое решение, то строится набор собственных элементов  $\theta_n$ , уравнение ветвления, а также последующее продвижение по параметру вплоть до следующего особого решения. В связи с этим отметим работы Э. И. Григолюка и В. И. Шалашилина [23—26], В. И. Шалашилина [77—83], Д. В. Вайнберга, В. И. Гуляева, Г. И. Мельниченко [15], В. И. Гуляева [30], В. И. Гуляева, В. А. Баженова, Е. А. Гоцуляка [31], В. И. Гуляева, Г. И. Мельниченко [32], Рандгамана [103], В. Ю. Бутенко [12], В. В. Кузнецова [48], Т. У. На и С. Е. Турски [100]. Отметим также, что уравнения ветвления (24.7) упрощаются, если задача имеет симметрию. В этом случае исследование ветвления можно свести к системе уравнений размерности, меньшей  $p$  — числа независимых решений уравнения 24.2. Более подробно об этом см. в [50—52, 84].

## § 25. Метод Ньютона — Канторовича

25.1. Истоки метода Ньютона — Канторовича восходят к методу малого параметра, рассмотренному в § 23, 24.

Изложим вначале общую схему метода Ньютона — Канторовича (в дальнейшем НК) [34]. Рассматривается операторное уравнение вида

$$\mathcal{P}(w) = 0, \quad (25.1)$$

которое решается по следующей схеме последовательных приближений:

$$w_{n+1} = w_n - [\mathcal{P}'(w_n)]^{-1} \mathcal{P}(w_n). \quad (25.2)$$

Основная трудность при практическом использовании метода НК заключается в построении оператора  $[\mathcal{P}'(w_n)]^{-1}$ . Его в теории оболочек и пластин приходится строить численно на базе какого-либо приближенного метода, чаще всего метода конечных разностей или конечного элемента. Схема (25.2) может быть упрощена:

$$w_{n+1} = w_n - [\mathcal{P}'(w_0)]^{-1} \mathcal{P}(w_n) \quad (25.3)$$

и в таком виде носит наименование модифицированного метода НК. ■

Теорема 25.1 (Л. В. Канторович [34]). Пусть оператор  $\mathcal{P}$  действует в некотором пространстве Банаха, причем выполнены условия:

1) в некотором шаре  $\mathbb{H}(r, w_0)$  он имеет вторую непрерывную производную Гаго [16, 34];

2) оператор  $\mathcal{P}'(w_0)$  обратим;

3) выполнено неравенство

$$\eta_1 \eta_2 < 1/2, \quad (25.4)$$

где

$$\eta_1 = \|\mathcal{P}'(w_0)^{-1} \mathcal{P}(w_0)\|, \quad \eta_2 = \|\mathcal{P}'(w_0)^{-1} \mathcal{P}''(w_0)\|. \quad (25.5)$$

В этом случае существует решение  $w_*$  такое, что

$$\|w_0 - w_*\| \leq r_0, \quad (25.6)$$

где

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\eta_1 \eta_2}}{\eta_2}. \quad (25.7)$$

При этом  $w_*$  единственно в шаре

$$\|w_* - w\| < \frac{1 + \sqrt{1 - 2\eta_1 \eta_2}}{\eta_2}, \quad (25.8)$$

если выполнено (25.4), и в замкнутом шаре (25.8), если  $\eta_1 \eta_2 = 1/2$ . Быстрота сходимости для основного процесса характеризуется соотношением

$$\|w_* - w_n\| \leq 2^{2^n - n} (\eta_1 \eta_2)^{2^n} \eta_2^{-1}, \quad (25.9)$$

а для модифицированного при  $\eta_1 \eta_2 < 1/2$  — соотношением

$$\|w_* - w_n\| \leq (1 - \sqrt{1 - 2\eta_1 \eta_2})^{a+1} \eta_2^{-1}. \quad \blacksquare \quad (25.10)$$

По самому построению метода НК видно, что он может быть использован, если искомое решение  $w_*$  не является особым. Модифицированный метод НК требует, чтобы  $w_0$  не являлось особым решением. Из (25.4), (25.5), (25.9), (25.10) видно, что быстрота сходимости метода НК и его модификации определяется величинами  $\mathcal{P}(w_0)$ ,  $\mathcal{P}''(w_0)$  и  $\mathcal{P}'(w_0)^{-1}$ . При этом, очевидно, чем ближе выбрано  $w_0$  к искомому решению  $w_*$ , тем будет меньше  $\eta_1$  и быстрее сходимость процесса. Однако это верно, если решение  $w_*$  неособое или не близко к особому. Если же  $w_*$  близко к особому, то при приближении  $w_0$  к  $w_*$  будут бороться две противоречивые тенденции

$$\|\mathcal{P}'(w_0)^{-1}\| \rightarrow \infty, \quad \mathcal{P}(w_0) \rightarrow 0, \quad (25.11)$$

и сходимость как самого метода НК, так и его модификации может резко ухудшиться, что часто и наблюдается на практике. Поэтому для обхода особых решений (см. § 23, рис. 23.1) требуются особые приемы, о которых речь шла в § 23, 24. ■

25.2. Для иллюстрации возникающих здесь ситуаций рассмотрим задачу 51 ( $t=5$ ;  $\varkappa=1$ ), которой соответствуют граничные условия (28.5). Кроме того, рассмотрим изотропную пластину, на которую действует лишь  $R^3$ . НОУ (13.6), (13.7) примет вид

$$(\omega \cdot \chi)_{H_5} = -\frac{D_{p1}}{2} \int_{\Omega} [(w_{\alpha^2 1}^2 + \nu w_{\alpha^2}^2) \varphi_{1\alpha^1} + (1-\nu) w_{\alpha^1} w_{\alpha^2} (\varphi_{1\alpha^2} + \varphi_{2\alpha^1}) + (w_{\alpha^2}^2 + \nu w_{\alpha^1}^2) \varphi_{2\alpha^2}] d\Omega, \quad (25.12)$$

$$(w \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} (T^{ij} w_{\alpha^i \alpha^j} + R^3) \varphi d\Omega, \quad (25.13)$$

$$T^{11} = D_{p1} \left[ w_{1\alpha^1} + \nu w_{2\alpha^2} + \frac{1}{2} (w_{\alpha^1}^2 + \nu w_{\alpha^2}^2) \right], \quad 1 \rightleftharpoons 2;$$

$$T^{12} = \frac{D_{p1}}{2} (1-\nu) (w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{\alpha^1} w_{\alpha^2}). \quad (25.14)$$

Оператор  $\mathcal{P}(w)$  определим соотношением

$$(\mathcal{P}(w) \cdot \varphi)_{H_1} = (w \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} (T^{ij} w_{\alpha^i \alpha^j} + R^3) \varphi d\Omega. \quad \blacksquare \quad (25.15)$$

Придадим оператору  $\mathcal{P}(w_0)$ , где  $w_0$  — некоторое начальное приближение, более наглядную форму. Для этого подставим  $w_0$  в правую часть (25.12) и, решив соответствующую линейную задачу, найдем  $\omega_0$ , затем по (25.14)  $T^{ij}(w_0)$ , а по (25.13) можно найти соответствующую нагрузку  $R_0^3$ . Тогда, очевидно, будут иметь место соотношения

$$(\mathcal{P}(w_0) \cdot \varphi)_{H_1} = (w_0 \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} (T^{ij}(w_0) w_{0\alpha^i \alpha^j} + R_0^3) \varphi d\Omega, \quad (25.16)$$

$$(w_0 \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} (T^{ij}(w_0) w_{0\alpha^i \alpha^j} + R_0^3) \varphi d\Omega = 0; \quad (25.17)$$

из (25.16), (25.17) имеем

$$(\mathcal{P}(w_0) \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} (R_0^3 - R^3) \varphi d\Omega. \quad (25.18)$$

Пусть теперь  $w_{**}$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} (R_0^3 - R^3) \varphi d\Omega = (w_{**} \cdot \varphi)_{H_1}. \quad (25.19)$$

Тогда, очевидно,

$$\mathcal{P}(w_0) = w_{**}. \quad (25.20)$$

Легко усмотреть физический смысл  $w_{**}$ . Из (25.19) видно, что  $w_{**}$  есть разность прогибов линейной изотропной пластины с теми

же упругими постоянными и той же формы  $\Omega$ , что и рассматриваемая нелинейная пластина. Таким образом,  $w_{**}$  характеризует близость исходной точки  $w_0$  к искомому решению  $w$ . ■

Чтобы определить условия сходимости (25.4) применительно к нашей задаче, необходимо оценить  $\eta_1, \eta_2$ , для чего в первую очередь требуется построение  $\mathcal{P}'(w_0)$ . Из соотношения (25.16), определяющего  $\mathcal{P}$ , будем иметь

$$((\mathcal{P}'(w_0)\tilde{\varphi}) \cdot \varphi)_{H_1} = (\tilde{\varphi} \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} [T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi}) w_{0\alpha^i\alpha^j} + T^{ij}(w_0)\tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j}] \varphi d\Omega, \quad (25.21)$$

где  $\tilde{\varphi}$  определяет направление дифференцирования, а для определения  $T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi})$  продифференцируем (25.12). При этом получаем

$$\begin{aligned} (\omega' \cdot \chi)_{H_5} = & -D_{P1} \int_{\Omega} [(w_{0\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1} + \nu w_{0\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2}) \varphi_{1\alpha^1} + \\ & + (1-\nu)(w_{0\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^2} + w_{0\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^1})(\varphi_{1\alpha^2} + \varphi_{2\alpha^1}) + \\ & + (w_{0\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2} + \nu w_{0\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1}) \varphi_{2\alpha^2}] d\Omega. \end{aligned} \quad (25.22)$$

Соотношение (25.22) определяет  $\omega'$  через  $w_0, \tilde{\varphi}$ . При этом  $w_0$  считается фиксированным элементом  $H_1$ . Далее,  $\chi(\varphi_1, \varphi_2)$  в (25.22) — произвольный элемент  $H_5$ . Таким образом, из (25.22) следует

$$\omega' = \omega'(w_0, \tilde{\varphi}). \quad (25.23)$$

Но тогда из (25.14) получаем

$$T^{11'} = D_{P1} (w'_{1\alpha^1} + \nu w'_{2\alpha^2} + w_{0\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1} + \nu w_{0\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2}), \quad (25.24)$$

и аналогичные соотношения могут быть получены для  $T^{22'}, T^{12'}$ . В (25.24)  $w'_i$  — составляющие  $\omega'$ . Таким образом, оператор  $\mathcal{P}'(w_0)\tilde{\varphi}$  построен, так как в (25.21) все элементы выражены через  $\varphi$ ;  $w_0$  входит параметрически.

Рассмотрим вторую производную  $\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})$ , где  $\tilde{\varphi}$  определяет направление второго дифференцирования. Из (25.21) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \cdot \varphi)_{H_1} = & - \int_{\Omega} [T^{ij''}(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) w_{0\alpha^i\alpha^j} + \\ & + T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi}) \tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j} + T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi}) \tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j}] \varphi d\Omega. \end{aligned} \quad (25.25)$$

Чтобы определить  $T^{ij''}$ , продифференцируем еще раз (25.22) и (25.24):

$$\begin{aligned} (\omega'' \cdot \chi)_{H_5} = & -D_{P1} \int_{\Omega} [(\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1} + \nu \tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2}) \varphi_{1\alpha^1} + (1-\nu)(\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^2} + \\ & + \tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^1})(\varphi_{1\alpha^2} + \varphi_{2\alpha^1}) + (\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2} + \nu \tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1}) \varphi_{2\alpha^2}] d\Omega, \end{aligned} \quad (25.26)$$

$$T^{11''} = D_{P1} (w''_{1\alpha^1} + \nu w''_{2\alpha^2} + \tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^1}\tilde{\varphi}_{\alpha^1} + \nu \tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^2}\tilde{\varphi}_{\alpha^2}). \quad (25.27)$$



В (25.27)  $w_i''$  суть составляющие  $\omega''$ , аналогичные формулы могут быть получены для  $T^{22''}$  и  $T^{12''}$ . ■

Приступим к оценкам параметров  $\eta_1, \eta_2$ . Из выражения (25.5) легко усматриваем, что для оценки  $\eta_1$  необходимо оценить решение ЛОУ (линейного операторного уравнения)

$$(\tilde{\varphi} \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} [T^{ij''}(w_0, \tilde{\varphi}) w_{0\alpha i \alpha j} + T^{ij}(w_0) \tilde{\varphi}_{\alpha i \alpha j}] \varphi d\Omega = (w_{**} \cdot \varphi)_{H_1}. \quad (25.28)$$

Из (25.28) следует оценить  $\tilde{\varphi}$  через  $w_{**}$ . Заметим, что второй член левой части (25.17) является, как легко видеть, усиленно непрерывным самосопряженным оператором над  $\tilde{\varphi}$ , действующим в  $H_1$ . Поэтому можно ввести слабо непрерывный в  $H_1$  функционал

$$\mathcal{E}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi}) w_{0\alpha i \alpha j} + T^{ij}(w_0) \tilde{\varphi}_{\alpha i \alpha j}] \tilde{\varphi} d\Omega.$$

Пусть, далее,  $\lambda_1(w_0)$  есть максимум  $\mathcal{E}(\tilde{\varphi})$  на сфере  $\|\tilde{\varphi}\|_{H_1} = 1$ . Этот максимум существует в силу теоремы 9.4.

Будем различать два случая:

$$1) \lambda_1(w_0) < 1, \quad 2) \lambda_1(w_0) \geq 1. \quad (25.29)$$

В первом случае, очевидно, имеем из (25.28)

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_1}^2 (1 - \lambda_1(w_0)) \leq \|w_{**}\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \quad \text{и} \quad \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \leq \frac{\|w_{**}\|_{H_1}}{1 - \lambda_1(w_0)}, \quad (25.30)$$

и, значит, можно принять

$$\eta_1 \leq \frac{\|w_{**}\|_{H_1}}{1 - \lambda_1(w_0)}. \quad (25.31)$$

Несколько детализируем соотношение (25.31). Для определенности положим, что  $R_0^3 - R^3 \in L_{p\Omega}$ . Тогда из (25.19) легко находим

$$\|w_{**}\|_{H_1} \leq m(\nu, \Gamma) \mathcal{L}^{3-2/p} D_{H_1}^{-1/2} \|R_0^3 - R^3\|_{L_{p\Omega}}, \quad (25.32)$$

где  $\mathcal{L}$  — характерный линейный размер оболочки в срединной поверхности. В правой части (25.32) постоянная  $m$  безразмерна и зависит лишь от коэффициента Пуассона  $\nu$  и формы области  $\Omega$ . Последнее символически отражено в обозначении  $m$  введением контура  $\Gamma$ . В соответствии с (25.32) для  $\eta_1$  в рассматриваемом случае получим

$$\eta_1 = \frac{m(\nu, \Gamma) \mathcal{L}^{3-2/p}}{1 - \lambda_1(w_0, \nu)} D_{H_1}^{-1/2} \|R_0^3 - R^3\|_{L_{p\Omega}}. \quad (25.33)$$

Приступим к оценке  $\eta_2$ . Ее можно получить, рассмотрев операторное уравнение (25.28), но в правой части его должно стоять

$(\mathcal{P}''(w_0) \cdot \varphi)_{H_1}$ . Тогда для  $\eta_2$  получаем

$$\eta_2 \leq \frac{\|\mathcal{P}''(w_0)\|_{H_1}}{1 - \lambda_1(w_0, v)}, \quad (25.34)$$

и, следовательно, необходимо оценить  $\|\mathcal{P}''(w_0)\|_{H_1}$ , что можно сделать из (25.25), (25.26), (25.28). Действительно, из (25.25) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \varphi)_{H_1} \leq & (\|T^{ij''}(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_{2\Omega}} \|w_{0\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} + \\ & + \|T^{ij'}(w_0, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_{2\Omega}} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} + \|T^{ij'}(w_0, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_{2\Omega}} \|\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}}) \|\varphi\|_{C_\Omega}. \end{aligned} \quad (25.35)$$

Чтобы извлечь из (25.35) необходимую оценку для  $\|\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{H_1}$ , получим некоторые предварительные неравенства. Из (25.26) легко получаем

$$\|\omega''\|_{H_5} \leq m(v, \Gamma) D_{p1}^{1/2} D_{n1}^{-1} \mathcal{L} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1}. \quad (25.36)$$

Из (25.36) следует

$$\|T^{ij''}(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_{2\Omega}} \leq m(v, \Gamma) D_{p1} D_{n1}^{-1} \mathcal{L} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1}. \quad (25.37)$$

Совершенно аналогично из (25.22) следует

$$\|\omega'\|_{H_5} \leq m(v, \Gamma) D_{p1}^{1/2} D_{n1}^{-1/2} \mathcal{L} \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \quad (25.38)$$

и

$$\|T^{ij'}(w_0, \tilde{\varphi})\|_{L_{2\Omega}} \leq m(v, \Gamma) D_{p1} D_{n1}^{-1} \mathcal{L} \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}, \quad (25.39)$$

а также

$$\|T^{ij'}(w_0, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_{2\Omega}} \leq m(v, \Gamma) D_p D_{n1}^{-1} \mathcal{L} \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1}. \quad (25.40)$$

Из (25.35), (25.37), (25.39), (25.40) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \varphi)_{H_1} \leq & m(v, \Gamma) D_{p1} D_{n1}^{-1} \mathcal{L} (\|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1} \|w_{0\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} 1^{ij} + \\ & + \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1} + \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j}\|_{H_1} 1^{ij}) \|\varphi\|_{C_\Omega}. \end{aligned} \quad (25.41)$$

Учтем теперь соотношения

$$\begin{aligned} \|w_{0\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} 1^{ij} & \leq m(v, \Gamma) D_{n1}^{-1/2} \|w_0\|_{H_1}, \\ \|\tilde{\varphi}_{\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} 1^{ij} & \leq m(v, \Gamma) D_{n1}^{-1/2} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}, \end{aligned} \quad (25.42)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^i\alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} 1^{ij} & \leq m(v, \Gamma) D_{n1}^{-1/2} \|\tilde{\tilde{\varphi}}\|_{H_1}, \\ \|\varphi\|_{C_\Omega} & \leq m(v, \Gamma) D_{n1}^{-1/2} \|\varphi\|_{H_1}. \end{aligned} \quad (25.43)$$

Из (25.41) — (25.43) получаем

$$(\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \cdot \varphi)_{H_1} \leq m(v, \Gamma) D_{p_1} D_{H_1}^{-2} \mathcal{L}^2 \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} \|\varphi\|_{H_1}, \quad (25.44)$$

откуда

$$\|\mathcal{P}''\|_{H_1} \leq m(v, \Gamma) D_{p_1} D_{H_1}^{-2} \mathcal{L}^2 \|w_0\|_{H_1}, \quad (25.45)$$

и для  $\eta_2$  из (25.34), (25.35) имеем неравенство

$$\eta_2 \leq m(v, \Gamma) D_{p_1} D_{H_1}^{-2} \mathcal{L}^2 \frac{\|w_0\|_{H_1}}{1 - \lambda_1(w_0, v)}. \quad (25.46)$$

Наконец, из (25.33), (25.46) вытекает

$$\eta_1 \eta_2 \leq m(v, \Gamma) \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6, \quad (25.47)$$

где безразмерные параметры  $\eta$  даются формулами

$$\eta_3 = \left(\frac{\mathcal{L}}{h}\right)^5, \quad \eta_4 = D_{H_1}^{-1/2} \|w_0\|_{H_1}, \quad \eta_5 = \mathcal{L}^{-2/p} E^{-1} \|R_0^3 - R^3\|_{L_{q\Omega}},$$

$$\eta_6 = \frac{1}{[1 - \lambda_1(w_0, v)]^2}. \quad (25.48)$$

Соотношения (25.47), (25.48) показывают влияние разных факторов на сходимость метода НК. Удачный выбор  $w_0$ , его близость к искомому решению  $w$  определяют величину  $\eta_5$ . Параметр  $\eta_3$  показывает, что метод НК весьма чувствителен к параметру тонкостенности конструкции, а  $\eta_6$  учитывает близость решения к особому. При практическом применении НК строится зависимость решения  $w$  от нагрузки по шагам, и в качестве  $w_0$  на очередном шаге берется значение  $w$  на предыдущем.

В случае 2 для оценки  $\tilde{\varphi}$  из (25.28) учтем, что  $w_0$  по условию невырожденное решение и, значит,

$$\tilde{\varphi} = T_1 w_{**}, \quad (25.49)$$

где  $T_1$  — ограниченный оператор, действующий в  $H_1$ . Легко видеть, что  $T_1$  зависит лишь от  $w_0, v$  и, значит,

$$\eta_1 \leq \|T_1\| \cdot \|w_{**}\|_{H_1} \leq m(v, \Gamma) \|T_1(w_0, v)\| \mathcal{L}^{3-2/p} D_H^{-1/2} \|R_0^3 - R^3\|_{L_{p\Omega}}. \quad (25.50)$$

Соответственно для  $\eta_2$  из (25.28), где в правой части стоит  $(\mathcal{P}'' \cdot \varphi)_{H_1}$ , имеем

$$\eta_2 \leq \|T_1(w_0, v)\| \cdot \|\mathcal{P}''\|_{H_1} \leq m(v, \Gamma) \|T_1(w_0, v)\| D_{p_1} D_H^{-2} \mathcal{L}^2 \|w_0\|_H. \quad (25.51)$$

Наконец, из (25.50), (25.51) следует

$$\eta_1 \eta_2 \leq m(v, \Gamma) \|T_1(w_0, v)\|^2 \eta_3 \eta_4 \eta_5. \quad (25.52)$$

Соотношение (25.52) и в данном случае 2 вскрывает влияние различных факторов на быстроту сходимости метода НК. Постоянные  $m(v, \Gamma)$ ,  $\|T_1(w_0, v)\|$ ,  $\lambda_1(w_0, v)$  могут быть в каждом конкретном случае оценены на основе численных методов.

В результате нами получена

**Теорема 25.2.** Пусть для однородной изотропной пластины выполнены условия 2, 3 § 13 и, кроме того, на всем контуре выполнены однородные граничные условия 20.1—20.3. Пусть, далее, на пластину действует лишь поперечная нагрузка  $R^3$ . В этом случае, если имеют место условия (25.4), где  $\eta_1\eta_2$  дается формулой (25.47) или (25.52), то краевая задача 51 в шаре (25.8) имеет единственное решение. Если  $\eta_1\eta_2 = 1/2$ , то краевая задача 51 имеет единственное решение в замкнутом шаре (25.8). При этом, если  $\eta_1\eta_2 < 1/2$ , то это решение может быть найдено как методом НК, так и модифицированным методом НК. Таким образом, быстрота сходимости оценивается формулами (25.9), (25.10). ■

**25.3.** Рассмотрим для изотропной однородной пластины задачу 91 при однородных условиях. Предположим также, что действует лишь нагрузка  $R^3$ , иными словами, положим

$$\tilde{R}_i \equiv \tilde{T}_\alpha^{ij} \equiv 0. \quad (25.53)$$

В этих предположениях соотношения (17.2), (17.3) примут вид

$$(w \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} [1, \Psi, w] \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} R^3 \varphi \, d\Omega, \quad (25.54)$$

$$(\Psi \cdot \Theta)_{H_0} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [1, w, w] \Theta \, d\Omega, \quad (25.55)$$

где символ  $[a, b, c]$  введен соотношением (7.40).

Оператор  $\mathcal{P}(w)$  определяется в данном случае формулой

$$(\mathcal{P}(w) \cdot \varphi)_{H_1} = (w \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} ([1, \Psi, w] + R^3) \varphi \, d\Omega, \quad (25.56)$$

где  $\Psi$  выражается через  $w$  соотношением (25.55). И здесь оператору  $\mathcal{P}(w_0)$ , где  $w_0$  — некоторое начальное приближение, можно придать более наглядную форму. Для этого подставим  $w_0$  в правую часть (25.55) и, найдя  $\Psi(w_0)$ , подставим все полученное в (25.56). Отсюда

$$(\mathcal{P}(w_0) \cdot \varphi)_{H_1} = (w_0 \cdot \varphi)_{H_1} - \int_{\Omega} ([1, \Psi, w] + R_0^3) \varphi \, d\Omega, \quad (25.57)$$

откуда найдем соответствующую нагрузку  $R_0^3$ .

Из (25.56), (25.57) получаем (25.18) и посредством (25.19) находим соответствующий прогиб  $w_{**}$ . Из (25.49) следует

$$(\mathcal{P}(w_0, \tilde{\varphi}) \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} \{ [1, \Psi'(w_0, \tilde{\varphi}), w_0] + \Psi(w_0) \tilde{\varphi} \} \varphi \, d\Omega, \quad (25.58)$$

$$(\Psi'(w_0, \tilde{\varphi}) \cdot \Theta)_{H_0} = \int_{\Omega} [1, w_0, \tilde{\varphi}] \Theta \, d\Omega, \quad (25.59)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \Phi)_{H_1} = & \int_{\Omega} \{ [1, \Psi''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}), w_0] + \\ & + [1, \Psi'(w_0, \tilde{\varphi}), \tilde{\tilde{\varphi}}] + [1, \Psi'(w_0, \tilde{\tilde{\varphi}}), \tilde{\varphi}] \} \Phi \, d\Omega, \end{aligned} \quad (25.60)$$

$$(\Psi''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \Theta)_{H_0} = \int_{\Omega} [1, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\varphi}] \Theta \, d\Omega. \quad (25.61)$$

Для оценки  $\eta_1$  в данном случае требуется рассмотреть

$$(\tilde{\varphi} \cdot \Phi)_{H_1} - \int_{\Omega} \{ [1, \Psi'(w_0, \tilde{\varphi}), w_0] + \Psi(w_0) \tilde{\varphi} \} \Phi \, d\Omega = (w_{**} \cdot \Phi)_{H_1}. \quad (25.62)$$

В (25.54)  $\tilde{\varphi}$  — искомая функция, относительно которой (25.54) линейно, а второй член симметричен относительно  $\tilde{\varphi}$ ,  $\Phi$  и, кроме того, усиленно непрерывен по  $\tilde{\varphi}$ . Поэтому можно ввести функционал

$$\mathcal{E}(\tilde{\varphi}) = \int_{\Omega} \{ [1, \Psi'(w_0, \tilde{\varphi}), w_0] + \Psi(w_0) \tilde{\varphi} \} \tilde{\varphi} \, d\Omega, \quad (25.63)$$

который оказывается слабо непрерывным в  $H_1$ . Пусть, далее,  $\lambda_1$  есть максимум  $\mathcal{E}(\tilde{\varphi})$  на сфере  $\|\tilde{\varphi}\|_{H_1}^2 = 1$ . Легко видеть, что в рассматриваемом случае  $\lambda_1$  будет зависеть только от  $w_0$ :  $\lambda_1 = \lambda_1(w_0)$ . Будем, далее, различать два случая (25.29). В случае 1 для  $\eta_1$  из (25.62) получаем оценку (25.31) и соответственно (25.33). В этих условиях будет справедливо также неравенство (25.34), и нам теперь необходимо детализировать оценку  $\|\mathcal{P}''\|_{H_1}$ . Для этого заметим, что из (25.60) следует

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \Phi)_{H_1}| \leq & \left\{ \|\Psi''_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_2\Omega} \|w_{0\alpha^k \alpha^l}\|_{L_2\Omega} + \right. \\ & \left. + \|\Psi'_{\alpha^i \alpha^j}(w_0, \tilde{\varphi})\|_{L_2\Omega} \|\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_2\Omega} + \|\Psi'_{\alpha^i \alpha^j}(w_0, \tilde{\tilde{\varphi}})\|_{L_2\Omega} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_2\Omega} \right\} 1^{ijkl} \|\Phi\|_{C\Omega}. \end{aligned} \quad (25.64)$$

Учтем, далее, соотношение, вытекающее из (25.61):

$$\begin{aligned} |(\Psi''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\tilde{\varphi}}) \cdot \Theta)_{H_0}| \leq & \left| \int_{\Omega} [1, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\varphi}] \Theta \, d\Omega \right| \leq \\ & \leq \|\tilde{\tilde{\varphi}}_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_2\Omega} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_2\Omega} 1^{ijkl} \|\Theta\|_{C\Omega} \end{aligned} \quad (25.65)$$

и, кроме того,

$$\|\Theta\|_{C\Omega} \leq m(\Gamma) C^{-1/2} \mathcal{E} \|\Theta\|_{H_0}, \quad C = \frac{1}{2Eh}. \quad (25.66)$$

Обратим внимание на то, что постоянная  $m(\Gamma)$  в (25.66) может

считаться зависящей лишь от формы области  $\Omega$ , что отражено в ее обозначении введением контура  $\Gamma$ . Кроме того, имеем

$$\|\tilde{\varphi}_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \leq m(\nu, \Gamma) D_{\Pi}^{-1/2} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}, \quad (25.67)$$

$$\|\tilde{\varphi}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_{2\Omega}} \leq m(\nu, \Gamma) D_{\Pi}^{-1/2} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}. \quad (25.68)$$

Из (25.65) — (25.67) получаем

$$\|\Psi''(w_0, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})\|_{H_0} \leq m(\nu, \Gamma) C^{-1/2} \mathcal{L} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} \|\tilde{\varphi}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_{2\Omega}} 1^{ijkl}. \quad (25.69)$$

Учтем, далее, неравенства

$$\begin{aligned} \|\Psi''_{\alpha^r \alpha^t}\|_{L_{2\Omega}} &\leq m(\Gamma) C^{-1/2} \|\Psi\|_{H_0}, \\ \|\tilde{\varphi}_{\alpha^i \alpha^j}\|_{L_{2\Omega}} &\leq m(\nu, \Gamma) \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} D_{\Pi}^{-1/2}, \\ \|\tilde{\varphi}_{\alpha^k \alpha^l}\|_{L_{2\Omega}} &\leq m(\nu, \Gamma) \|\tilde{\varphi}\|_{H_1} D_{\Pi}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (25.70)$$

Из (25.69), (25.70) в конечном итоге выводим

$$\|\Psi''_{\alpha^r \alpha^t}\|_{L_{2\Omega}} \leq m(\nu, \Gamma) C^{-1} D_{\Pi}^{-1} \mathcal{L} \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}. \quad \blacksquare \quad (25.71)$$

Оценим теперь  $\|\Psi'_{\alpha^i \alpha^j}(w_0, \tilde{\varphi})\|_{L_{2\Omega}}$ . Из (25.59), повторяя выкладки, аналогичные (25.65) — (25.71), получаем

$$\|\Psi'_{\alpha^r \alpha^t}\|_{L_{2\Omega}} \leq m(\nu, \Gamma) C^{-1} D_{\Pi}^{-1} \mathcal{L} \|w_0\|_{H_1} \|\tilde{\varphi}\|_{H_1}. \quad (25.72)$$

Наконец, из (25.64), (25.71), (25.72), учтя неравенство (25.43), выводим (25.44), откуда следует (25.45) — (25.48). В случае 2 (25.29) для задачи 91 можно почти дословно повторять рассуждения (25.49) — (25.52) и получить оценки (25.52). Таким образом, для задачи 91 оказываются справедливыми все выводы о влиянии различных факторов на быстроту сходимости метода НК.

**Теорема 25.3.** Пусть для однородной изотропной пластины выполнены условия 2, 3 § 17;  $\tilde{T}_4^{ij} \equiv 0$ , и она подвергнута действию только поперечной нагрузки  $R^3 \in \bar{H}_1$ . Пусть, далее, на всем контуре  $\Gamma$  заданы однородные граничные условия. В этом случае для краевой задачи 91 имеют место все факты, перечисленные в теореме 25.2 для задачи 51.  $\blacksquare$

**25.4.** Метод Ньютона — Канторовича довольно широко использовался в нелинейной теории оболочек [61, 105, 72]\*). Большое развитие получил близкий метод «последовательных нагружений». Первые исследования в этом направлении принадлежат В. В. Петрову [55—58]. Впоследствии метод развивался и использовался для решения задач нелинейной теории оболочек в работах [1, 2, 35—37, 54, 68]. К нему же примыкает метод частичной линеаризации.

\*). См. также [42] списка литературы к гл. III, IV.— с. 104—106.

## ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

§ 26. Вариационные методы приближенного решения задач  $t_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ;  $t=5, 6, 7, 8$ ). Вариант П. Ф. Папковича

26.1. Основы метода Бубнова — Галеркина были заложены в классических трудах И. Г. Бубнова [6] и Б. Г. Галеркина [33] в начале 20-го столетия. В это же время В. Ритц предложил известный прямой метод приближенного отыскания экстремума функционалов [98, 99]. Этим методам было суждено сыграть исключительную роль в математическом естествознании и, в частности, в механике.

В нелинейной теории пологих оболочек известно несколько вариантов применения этих методов. Большое распространение получила схема, впервые предложенная П. Ф. Папковичем [76]. Эта схема широко использовалась в работах Д. Ю. Панова, В. И. Феодосьева и других исследователей, где с ее помощью решены важные инженерные задачи. Многочисленные применения этого варианта приведены в монографиях А. С. Вольмира, Х. М. Муштари и К. З. Галимова, В. И. Феодосьева [9, 72, 91]. Схема П. Ф. Папковича [76] заключается в следующем. Приближенное решение  $w_n$  отыскивается в виде

$$w_n = \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k(\mathcal{P}), \quad (26.1)$$

где  $D_{nk}$  — неизвестные постоянные,  $\varphi_k(\mathcal{P})$  — ортонормированный базис в  $H_k$ . Подставив (26.1) в (13.6) или в (13.36), будем иметь

$$\omega_n = \mathbf{K}(w_n, w^*, \omega) \quad (26.2)$$

и, далее, подставив (26.1), (26.2) в (13.16) и положив там последовательно  $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , получим

$$D_{nk} = - (w \cdot \varphi_k)_{H_k} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{k\alpha^j}] d\Omega. \quad (26.3)$$

В (26.3) предполагается, что компонентами  $a_n$  являются  $\omega_n$  из (26.2) и  $w_n$ . Таким образом, (26.3) в силу соотношений (4.25), определяющих  $T^{ij}$  через  $\varepsilon_{ij}$ , и соотношений (3.24), определяющих  $\varepsilon_{ij}$  через  $w_i$  и, наконец, (26.2), будет некоторой системой кубических

уравнений относительно  $D_{nk}$ . Решив ее, получаем приближенное решение краевой задачи  $тж$ . Разумеется, явное определение  $\omega$  через  $w_n$  из (26.2) есть также в общем случае хоть и линейная, но, как правило, непростая задача. Однако, предполагая, что она решена, можно считать проблему составления системы (26.3) также решенной. Естественно возникает вопрос о характере поведения  $w_n$  при  $n \rightarrow \infty$  и соотношения этого предела с решениями краевой задачи  $w$ .

По методу Ритца [98, 99] для определения  $D_{nk}$  подставим (26.2) и  $w_n$  в соотношения для  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и, далее, в (21.1) и положим

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{kk}}{\partial D_{nk}} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (26.4)$$

Система (26.4) также является кубической относительно  $D_{nk}$ .

Лемма 26.1. Системы (26.3), (26.4) совпадают.

Для доказательства заметим, что легко устанавливается соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{kk}}{\partial D_{nk}} = \left( \text{grad}_{H_k} \mathcal{J}_{kk} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial D_{nk}} \right)_{H_k} = (\text{grad}_{H_k} \mathcal{J}_{kk} \cdot \varphi_k)_{H_k}. \quad (26.5)$$

Из леммы 21.3 (соотношение (21.23)) и (26.5) получим

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{kk}}{\partial D_{nk}} = ((w_n - G_{kk}(w_n)) \cdot \varphi_k)_{H_k}. \quad (26.6)$$

Наконец, учтя определение оператора  $G_{kk}$  (соотношение (13.37)), из (26.6) получаем (26.3). Лемма 26.1 доказана. ■

Рассмотрим в  $n$ -мерном действительном евклидовом пространстве  $R_n$  коэффициентов  $D_{nk}$  векторное поле

$$\mathcal{N}_{nk}(D_{n1}, \dots, D_{nn}) = D_{nk} + (w \cdot \varphi_k)_{H_k} - \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{k\alpha^j}] d\Omega. \quad (26.7)$$

Поскольку правая часть (26.7) есть полином третьей степени, то поле  $\mathcal{N}_n$  ( $\mathcal{N}_{n1}, \mathcal{N}_{n2}, \dots, \mathcal{N}_{nn}$ ) является непрерывным.

Будем считать выполненными условия теорем 16.1—16.3.

Лемма 26.2. Имеют место следующие факты [11—13, 16, 17]:

1) векторное поле  $\mathcal{N}_n$  на сферах большого радиуса в  $R_n$  гомотопно тождественному полю  $\mathbf{I}$ ;

2) система (26.7) имеет при каждом  $n$  по крайней мере одно действительное решение;

3) все решения (26.7) таковы, что соответствующие элементы  $w_n$ , даваемые (26.1), лежат внутри некоторой сферы

$$\|w_n\|_{H_k} = R, \quad (26.8)$$

причем  $R$  не зависит от  $n$ .



Для доказательства рассмотрим поле  $\tilde{\mathcal{N}}_n(D_{nk}, t)$ , определяемое формулой

$$\tilde{\mathcal{N}}_{nk} = D_{nk} + t(w \cdot \varphi)_{H_{\mathcal{X}}} - t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha} i \varphi_{k\alpha j}] d\Omega,$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{nk}(D_{nk}, 0) = D_{nk}, \quad \tilde{\mathcal{N}}_{nk}(D_{nk}, 1) = \mathcal{N}_{nk}, \quad (26.9)$$

и докажем, что на сферах большого радиуса в  $R_n$

$$\tilde{\mathcal{N}}_n(D_{nk}, t) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (26.10)$$

Предположив обратное, мы должны принять, что при некотором  $0 \leq t_0 \leq 1$

$$\tilde{\mathcal{N}}_n(D_{nk}, t_0) = 0. \quad (26.11)$$

Умножив (26.11) скалярно на  $\mathbf{I}$ , получим

$$\sum_{k=1}^n D_{nk}^2 + t_0 \sum_{k=1}^n D_{nk} \left( (w \cdot \varphi_k)_{H_{\mathcal{X}}} - \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha} i \varphi_{k\alpha j}] d\Omega \right) = 0. \quad (26.12)$$

Соотношение (26.12) можно записать в виде

$$w_n \frac{2}{H_{\mathcal{X}}} + t_0 \left( (w \cdot w_n)_{H_{\mathcal{X}}} - \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} w_n - (w_n + w^*)_{\alpha} i w_{n\alpha j}] d\Omega \right) = 0 \quad (26.13)$$

или, в соответствии с (13.37), (19.1),

$$\|w_n\|_{H_{\mathcal{X}}}^2 - t_0 (\mathbf{G}_{\mathcal{X}\mathcal{X}}(w_n) \cdot w_n)_{H_{\mathcal{X}}} = \Phi(w_n, t_0) = 0, \quad (26.14)$$

что в силу теоремы 16.1 невозможно, если

$$\|w_n\|_{H_{\mathcal{X}}} \geq R_0, \quad (26.15)$$

причем  $R_0$  не зависит от  $n$  по смыслу самого результата этой теоремы. Таким образом, пункт 1 леммы 26.2 установлен. Отсюда вытекают пункты 2, 3. Лемма 26.2 доказана. ■

Ниже все множество приближенных решений уравнений (26.3), (26.4) будет обозначаться  $\{w_n\}$ . В силу леммы 26.2  $\{w_n\}$  есть слабо компактное множество.

*Примечание 26.1.* В связи с леммой 26.2 отметим, что после установления того, что  $\mathcal{J}_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  есть растуший в  $H_{\mathcal{X}}$  функционал (теорема 24.3), существование действительных решений у (26.7) вытекает из этого факта [7, 60]. Однако предложенный в лемме 26.2 способ дает более полную информацию: существование решения с ненулевым индексом, а также вычисление общего индекса всех решений. С другой стороны, вариационный метод [11, 13] обнаруживает существование решения, придающего  $\mathcal{J}_{\mathcal{X}\mathcal{X}}$  минимум на линеале (26.1). ■

Л е м м а 26.3. Всякий слабый предел  $w_0$  элементов из  $\{w_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $tx$ .

Для доказательства требуется установить, что выполнено соотношение

$$(w_0 \cdot \varphi)_{H_x} = - (w \cdot \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij}\varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha^i \varphi_{\alpha^j}}] d\Omega \quad (26.16)$$

для произвольного  $\varphi \in H_x$ . Пусть  $w_n$  — подпоследовательность из  $\{w_n\}$  и  $w_n \rightarrow w_0$ . В этом случае из (14.38) вытекает, что

$$T^{ij} (a_n + a^*) \Rightarrow T^{ij} (a_0 + a^*) \quad \text{в } L_{2\Omega}, \quad (26.17)$$

и из теоремы 12.3 имеем

$$w_n + w^* \Rightarrow w_0 + w^* \quad \text{в } W_{q\Omega}^{(1)} \quad \text{при любом } q \geq 1. \quad (26.18)$$

Далее, система уравнений (26.3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & ((w_n + w) \cdot \varphi_k)_{H_x} - \\ & - \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) [B_{ij}\varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i \varphi_{k\alpha^j}}] d\Omega = 0, \quad k \leq n. \end{aligned} \quad (26.19)$$

В соотношении (26.19) можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , и, поскольку первый член левой части (26.19) есть линейный в  $H_x$  функционал и верны (26.17), (26.18), то сразу получаем (26.16) при каждом  $\varphi = \varphi_k$ ;  $k = 1, \dots, \infty$ . В общем случае

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \varphi^n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \quad R_n \varphi = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \Rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (26.20)$$

и

$$\begin{aligned} & ((w_0 + w) \cdot \varphi)_{H_x} - \int_{\Omega} T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij}\varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha^i \varphi_{\alpha^j}}] d\Omega = \\ & = ((w_0 + w) \cdot R_n \varphi)_{H_x} - \int_{\Omega} T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij}R_n \varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha^i R_n \varphi_{\alpha^j}}] d\Omega \end{aligned} \quad (26.21)$$

при любом  $n$ , поскольку (26.16) уже доказано при  $\varphi = \varphi_k$ , где  $k$  любое. Далее,

$$|((w_0 + w) \cdot R_n \varphi)_{H_x}| \leq \|w_0 + w\|_{H_x} \|R_n \varphi\|_{H_x} \quad (26.22)$$

и, в силу теоремы вложения 12.3 (соотношения (12.49), (12.51)),

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij}R_n \varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha^i (R_n \varphi)_{\alpha^j}}] d\Omega \right| \leq \\ & \leq m (\|T^{ij} (a_0 + a^*) B_{ij}\|_{L_{2\Omega}} + \|T^{ij} (a_0 + a^*) (w_0 + w^*)_{\alpha^i}\|_{L_{2-\varepsilon, \Omega}}) \|R_n \varphi\|_{H_x}. \end{aligned} \quad (26.23)$$

Из (26.22), (26.23) соотношение (26.16) вытекает для любого  $\varphi \in H_n$ . Лемма 26.3 доказана. ■

**Лемма 26.4.** Всякая слабо сходящаяся последовательность элементов  $\{w_n\}$  сходится сильно в  $H_n$ , и все множество приближенных решений  $\{w_n\}$  сильно компактно в  $H_n$ .

Для доказательства учтем, что из (26.3) и (26.13) при  $\gamma_0 = 1$  получаем

$$\|w_n\|_{H_n}^2 = - (w \cdot w_n)_{H_n} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) [B_{ij} w_n - (w_n + w^*)_{\alpha i} w_{n\alpha j}] d\Omega. \quad (26.24)$$

Вместе с этим, положив в (13.16)  $\varphi = w_0$ , будем иметь

$$\|w_0\|_{H_n}^2 - (w \cdot w_0)_{H_n} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij} w_0 - (w_0 + w^*)_{\alpha i} w_{0\alpha j}] d\Omega. \quad (26.25)$$

Из (26.24), (26.25) следует

$$\begin{aligned} \|w_0\|_{H_n}^2 - \|w_n\|_{H_n}^2 = & (w \cdot (w_0 - w_n))_{H_n} + \int_{\Omega} [T^{ij} (a_0 + a^*) [B_{ij} w_0 - (w_0 + w^*)_{\alpha i} w_{0\alpha j}] - \\ & - T^{ij} (a_n + a^*) [B_{ij} w_n - (w_n + w^*)_{\alpha i} w_{n\alpha j}]] d\Omega. \end{aligned} \quad (26.26)$$

В силу того, что  $w_n \rightarrow w_0$  в  $H_n$ , первый член правой части (26.26) исчезает. Кроме того, в силу (26.17) и (12.52) заключаем, что и второй член правой части (26.26) также исчезает. Поэтому из (26.26) вытекает

$$\|w_n\|_{H_n} \rightarrow \|w_0\|_{H_n}, \quad (26.27)$$

и, значит, вследствие теоремы 9.3

$$w_n \Rightarrow w_0. \quad (26.28)$$

**Лемма 26.4** доказана. ■

**Лемма 26.5.** Множество  $\{w_n\}$  содержит по крайней мере одну абсолютно минимизирующую последовательность функционала  $\mathcal{J}_{jk}(w)$ .

Для доказательства заметим, что если  $w_0$  — один из абсолютных минимумов функционала  $\mathcal{J}_{jk}$  и  $w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varphi_k$ , то последователь-

ность  $w_{0n} = \sum_{k=1}^n D_k \varphi_k$  будет для  $\mathcal{J}_{jk}$  абсолютно минимизирующей.

Последнее сразу вытекает из сильной непрерывности  $\mathcal{J}_{jk}$  в  $H_n$ , что, в свою очередь, вытекает из леммы 21.4. При этом будем иметь

очевидную последовательность неравенств

$$\mathcal{I}_{\text{жж}}(w_{0n}) \geq \mathcal{I}_{\text{жж}}(w_n) \geq d. \quad (26.29)$$

Последовательность же приближенных решений  $w_n$  строится на каждом этапе посредством (26.4), и значит, содержит такие  $w_n$ , которые минимизируют  $\mathcal{I}_{\text{жж}}$  на линейале (26.1) и для которых

$$\mathcal{I}_{\text{жж}}(w_{0n})|_{n \rightarrow \infty} = d. \quad (26.30)$$

Соотношения (26.29), (26.30) и доказывают лемму 26.5. ■

Таким образом, множество  $\{w_n\}$  содержит обязательно последовательность, сходящуюся к какому-либо абсолютному минимуму  $\mathcal{I}_{\text{жж}}(w)$ . Если же функционал  $\mathcal{I}_{\text{жж}}(w)$  имеет единственный минимум, то последовательность приближений, полученная по методу БГР в форме П. Ф. Папковича, к нему сходится. ■

**Лемма 26.6.** Пусть  $w_0$  — изолированное решение задачи  $tx$ , имеющее ненулевой индекс. В этом случае  $w_0$  принадлежит множеству предельных точек  $\{w_n\}$ , и, значит, для каждого из этих решений  $w_0$  и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (26.3) (соответственно (26.4)) имеет для  $D_{n_k}$  действительные решения такие, что  $w_n \in \text{Ш}_{H_x}(r, w_0)$ .

Для доказательства учтем, что определяющей системе (26.3) можно придать такой вид:

$$D_{n_k} = (G_{\text{жж}}(w_n) \cdot \varphi_k)_{H_x} \quad (26.31)$$

или

$$w_n = P_n G_{\text{жж}}(w_n), \quad (26.32)$$

где  $P_n$  — оператор проектирования на конечномерное подпространство  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ . Иными словами, примененная здесь схема метода Бубнова — Галеркина — Ритца эквивалентна схеме, рассмотренной в [60]. Поэтому лемма 26.6 вытекает из результатов [60]. ■

**Лемма 26.7.** Пусть  $w_0$  — обобщенное решение задачи  $tx$ , придающее в  $H_x$  функционалу  $\mathcal{I}_{\text{жж}}(w)$  строгий относительный минимум (максимум). В этом случае  $w_0$  принадлежит множеству предельных точек  $\{w_n\}$ , и, значит, для любого такого решения и любого сколь угодно малого числа  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (26.3) (соответственно (26.4)) имеет для  $D_{n_k}$  действительные решения такие, что  $w_n \in \text{Ш}_{H_x}(r, w_0)$ ,

$$\mathcal{I}_{\text{жж}}(w_n) \geq \mathcal{I}_{\text{жж}}(w_0) + 3\delta, \quad (26.33)$$

где  $\delta$  — некоторая фиксированная постоянная.

В самом деле, если бы (26.33) было несправедливым, то существовала бы последовательность  $w_k \in \text{Ш}_{H_x}(r, w_0)$  такая, что

$$\lim \mathcal{I}_{\text{жж}}(w_k)|_{k \rightarrow \infty} = \mathcal{I}_{\text{жж}}(w_0). \quad (26.34)$$

Но тогда  $w_k$  будет относительно минимизирующей последовательностью и в силу теоремы 21.9  $w_k$  будет сильно компактна. В силу

спильной непрерывности  $\mathcal{J}_{xx}(w)$  имеем

$$\mathcal{J}_{xx}(w_0) = \mathcal{J}_{xx}(w_{00}), \quad (26.35)$$

где  $w_{00}$  — какая-либо предельная точка  $w_k$ . Но  $w_{00}$  обязательно принадлежит  $\Sigma_{H_x}(r, w_0)$ , что невозможно по определению 2 § 21. Таким образом, (26.33) установлено. ■

Далее, легко видеть, что в силу сильной непрерывности  $\mathcal{J}_{xx}(w)$  в  $H_x$  можно найти такое число  $\Delta r < 0,5r$ , что в замкнутом шаре  $\overline{\Pi}_{H_x}(r, w_0)$  будет иметь место неравенство

$$|\mathcal{J}_{xx}(w_1) - \mathcal{J}_{xx}(w_2)| \leq \delta, \quad (26.36)$$

если  $\|w_1 - w_2\|_{H_x} \leq \Delta r$  для любых  $w_1, w_2 \in \overline{\Pi}_{H_x}(r, w_0)$ . образуем теперь в  $H_x$  шаровой слой, заключенный между сферами  $\Sigma_{H_x}(r, w_0)$  и  $\Sigma_{H_x}(r - 2\Delta r, w_0)$ . Очевидно, в этом слое в силу (26.33), (26.36) будет справедливо соотношение

$$\mathcal{J}_{xx}(w) \geq \mathcal{J}_{xx}(w_0) + 2\delta. \quad (26.37)$$

Рассмотрим, далее, для  $w_0$  разложения (26.20) и выберем  $n$  таким, чтобы имело место неравенство

$$\|w - w_{0n}\|_{H_x} \leq \Delta r, \quad w_{0n} = \sum_{k=1}^n D_{nk}^* \varphi_k. \quad (26.38)$$

Введем теперь в пространстве  $R_n$  коэффициентов  $D_{nk}$  сферу  $\Sigma_n(r - \Delta r, w_{0n})$ , определяемую соотношением

$$\left\| \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k - w_{0n} \right\|_{H_x}^2 = \sum_{k=1}^n (D_{nk} - D_{nk}^*)^2 = (r - \Delta r)^2, \quad (26.39)$$

и оценим значение функционала  $\mathcal{J}_{xx}$  на этой сфере. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| w_0 - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_x} &\leq \|w_0 - w_{0n}\|_{H_x} + \left\| w_{0n} - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_x} \leq \\ &\leq \Delta r + r - \Delta r = r. \end{aligned} \quad (26.40)$$

Одновременно запишем неравенство

$$\begin{aligned} \left\| w_0 - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_x} &= \left\| w_0 - w_{0n} + w_{0n} - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_x} \geq \\ &\geq \left\| w_{0n} - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_x} - \|w_0 - w_{0n}\|_{H_x} \geq r - \Delta r - \Delta r = r - 2\Delta r. \end{aligned} \quad (26.41)$$

Из (26.39) — (26.41) следует, что когда  $D_{n1}, \dots, D_{nn} \in \Sigma_{R_n}(r - \Delta r, w_{0n})$ , элемент  $\sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k$  лежит в слое между сферами  $\Sigma_{H_x}(r, w_0)$  и

$\Sigma_{H_x}(r - 2\Delta r, w_0)$ , и, значит, в силу (26.37)

$$\mathcal{I}_{xx} \left( \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right) \geq \mathcal{I}_{xx}(w_0) + 2\delta. \quad (26.42)$$

Далее, в силу (26.34), (26.36) получаем

$$\mathcal{I}_{xx}(w_{0n}) \geq \mathcal{I}_{xx}(w_0) \geq \mathcal{I}_{xx}(w_{0n}) - \delta. \quad (26.43)$$

И, наконец, из (26.37), (26.42)

$$\mathcal{I}_{xx} \left( \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right) \geq \mathcal{I}_{xx}(w_{0n}) + \delta. \quad (26.44)$$

Следовательно, на сфере (26.39) значение  $\mathcal{I}_{xx}(w)$  всюду больше, чем в центре. Поэтому в некоторой внутренней точке  $\Sigma_{R_n}(r - \Delta r, w_{0n})$  осуществляется минимум  $\mathcal{I}_{xx}(w)$  на линеале (26.1). В этой точке и будут выполнены (26.3), (26.4).

Аналогично рассматривается случай строгого относительного максимума. Лемма 26.7 доказана. ■

**26.2.** Опыт численных расчетов показал, что в ряде случаев значительные выгоды представляет переход к итерированной последовательности  $\tilde{w}_n$ , определяемой соотношением

$$\tilde{w}_n = \mathbf{G}_{xx}(w_n). \quad (26.45)$$

При этом  $\tilde{w}_n$  обнаруживает всегда более сильную сходимость, чем  $w_n$ . Более того, в ряде случаев последовательности  $\tilde{w}_n$  оказываются пригодными для расчета напряжений в оболочке, и это тогда, когда прямое вычисление напряжений по  $w_n$  затруднительно. Ниже дается обоснование этой схемы.

**Лемма 26.8.** Множество итерированных решений  $\{\tilde{w}_n\}$  сильно компактно в  $H_x$ , и каждый сильный предел  $\tilde{w}_n$  в  $H_x$  есть обобщенное решение задачи  $tx$ . Кроме того, имеет место соотношение

$$\|\tilde{w}_n - w_n\|_{H_x} \rightarrow 0 \quad (26.46)$$

для каждой сильно сходящейся последовательности  $w_n$ .

Для доказательства рассмотрим соотношение, определяющее  $\tilde{w}_n$ . Имеем из (13.16)

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_n \cdot \varphi)_{H_x} &= - (w \cdot \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi - (w_n + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}] d\Omega = \\ &= - (w \cdot \varphi_n)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_n - (w_n + w^*)_{\alpha i} \varphi_{n \alpha j}] d\Omega - \\ &- (w \cdot R_n \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} R_n \varphi - (w_n + w^*)_{\alpha i} (R_n \varphi)_{\alpha j}] d\Omega. \end{aligned} \quad (26.47)$$

Учтя теперь соотношения (26.3), определяющие приближенные решения  $w_n$ , из (26.47) получаем

$$\begin{aligned} ((\tilde{w}_n - w_n) \cdot \varphi)_{H_x} = & - (w \cdot R_n \varphi)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) \times \\ & \times [B_{ij} R_n \varphi - (w_n + w^*)_{\alpha^i} (R_n \varphi)_{\alpha^j}] d\Omega. \end{aligned} \quad (26.48)$$

Далее, легко видеть, что последовательность элементов  $R_n \varphi$ , где  $\varphi \in \Sigma_{H_x}(1, 0)$ , сходится слабо к нулю равномерно относительно  $\varphi$ . Последнее означает, что для любого элемента  $w^{**}$  скалярное произведение  $(w^{**} \cdot R_n \varphi)_{H_x}$  может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом  $n$  для всех  $\varphi \in \Sigma_{H_x}(1, 0)$  одновременно. Действительно,

$$|(w^{**} \cdot R_n \varphi)_{H_x}| \leq \left| \sum_{h=n}^{\infty} w_h^{**} \alpha_h \right| \leq \left( \sum_{h=n}^{\infty} |w_h^{**}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad \alpha_h = (\varphi \cdot \varphi_h)_{H_x} \quad (26.49)$$

независимо от  $\varphi$ . Из (26.49) сразу вытекают соотношения

$$(w \cdot R_n \varphi)_{H_x} \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_x}, \quad (26.50)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) B_{ij} R_n \varphi d\Omega \right| & \leq \frac{\|R_n \varphi\|_{C_{\Omega}}}{\|\varphi\|_{H_x}} \|\varphi\|_{H_x} \int_{\Omega} |T^{ij} (a_n + a^*) B_{ij}| d\Omega \leq \\ & \leq m \left\| \frac{R_n \varphi}{\|\varphi\|_{H_x}} \right\|_{C_{\Omega}} \|\varphi\|_{H_x} \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_x}, \end{aligned} \quad (26.51)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) (w_n + w^*)_{\alpha^i} (R_n \varphi)_{\alpha^j} d\Omega \right| & \leq \\ & \leq \frac{\|(R_n \varphi)_{\alpha^j}\|_{L_{p\Omega}} \|\varphi\|_{H_x}}{\|\varphi\|_{H_x}} \int_{\Omega} |T^{ij} (a_n + a^*) (w_n + w^*)_{\alpha^i}| d\Omega \leq \\ & \leq m \left\| \frac{(R_n \varphi)_{\alpha^j}}{\|\varphi\|_{H_x}} \right\|_{L_{p\Omega}} \|\varphi\|_{H_x} \leq \varepsilon_n \|\varphi\|_{H_x}, \quad p > 2. \end{aligned} \quad (26.52)$$

При этом в (26.50)–(26.52)  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Неравенства (26.51), (26.52) являются следствием усиленной непрерывности оператора вложения  $H_x$  в  $C_{\Omega}$  и  $L_{p\Omega}$  при любом  $p > 1$  (теорема 12.3, соотношения (12.52)). Из (26.47), (26.49)–(26.52) имеем

$$((\tilde{w}_n - w_n) \cdot \varphi)_{H_x} \leq 3\varepsilon_n \|\varphi\|_{H_x} \quad (26.53)$$

и из (26.53)

$$\|\tilde{w}_n - w_n\|_{H_x} \rightarrow 0, \quad (26.54)$$

что и требовалось доказать. ■

**26.3.** Сведем все доказанные здесь факты воедино.

Теорема 26.1. Пусть выполнены все условия теорем 16.1—16.3, а  $\varphi_k$  образуют базис в  $H_k$ . Пусть, далее, приближенное представление для  $w_n$  ищется в виде (26.1) с использованием схемы П. Ф. Папковича, причем  $\omega$  определяется через  $w_n$  посредством (26.2), а  $D_{nk}$  определяется из (26.53). В этом случае:

1) уравнения методов Бубнова — Галеркина (26.3) и Рунта (26.4) образуют одну и ту же систему;

2) при каждом  $n$  конечномерное векторное поле  $\mathcal{N}_n(D_{n1}, \dots, \dots, D_{nn})$  (26.7) на сферах большого радиуса в  $R_n$  имеет вращение, равное  $+1$ , вследствие чего системы (26.3), (26.4) при каждом  $n$  имеют по крайней мере одно действительное решение  $D_{nk}$ , и все решения лежат в некоторой сфере радиуса  $R$ , не зависящего от  $n$ ;

3) все множество приближенных решений  $\{w_n\}$  сильно компактно в  $H_k$ . При этом всякая слабо сходящаяся последовательность из  $\{w_n\}$  сходится сильно, и всякая предельная точка из  $\{w_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $tk$ ;

4) множество приближенных решений  $\{w_n\}$  содержит по крайней мере одну абсолютно минимизирующую последовательность. Любая предельная точка любой абсолютно минимизирующей последовательности является точкой абсолютного минимума функционала  $\mathcal{I}_{jk}$ . Если  $\mathcal{I}_{jk}$  имеет единственную точку абсолютного минимума, то всякая абсолютно минимизирующая  $\mathcal{I}_{jk}$  последовательность является сходящейся;

5) всякая последовательность, относительно минимизирующая (соответственно относительно максимизирующая) функционал  $\mathcal{I}_{jk}$ , сильно компактна в  $H_k$ , и каждый сильный предел элементов этих последовательностей порождает обобщенное решение задачи  $tk$ , придающее функционалу  $\mathcal{I}_{jk}$  относительный минимум (соответственно относительный максимум);

6) всякое изолированное обобщенное решение  $w_0$  задачи  $tk$ , имеющее в  $H_k$  ненулевой индекс, принадлежит множеству предельных в  $H_k$  точек  $\{w_n\}$ , и значит, для любого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  системы (26.3), (26.4) будут иметь действительные решения для  $D_{nk}$ , лежащие в шаре  $\Pi_{H_k}(r, w_0)$ ;

7) всякое обобщенное решение  $w_0$  задачи  $tk$ , придающее функционалу  $\mathcal{I}_{jk}(w)$  строгий минимум (максимум), принадлежит множеству предельных в  $H_k$  точек  $\{w_n\}$ , и значит, для любого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  системы (26.3), (26.4) будут иметь действительные решения для  $D_{nk}$ , лежащие в шаре  $\Pi_{H_k}(r, w_0)$ ;

8) множество итерированных решений  $\tilde{w}_n$  сильно компактно в  $H_k$ , и каждый сильный предел  $\{\tilde{w}_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $tk$ . Имеет место соотношение (26.54). ■



26.4. Весь цикл рассуждений в пунктах 26.1—26.3, который обосновывает использование метода БГР в схеме П. Ф. Папковича в задачах  $t\kappa$  в перемещениях, почти дословно переносится на задачи 9ж с функцией усилий. Приближенное решение задачи ищется в виде (26.1). Для определения  $D_{nk}$  подставляем  $w_n$  в одно из соотношений (17.15), (17.40), из которых функция усилий  $\Psi(w_n)$  выражается через  $w_n$ . При этом, естественно, предполагается, что такое определение в той или иной замкнутой или численной форме возможно и эффективно. Подставим теперь (26.1) и  $\Psi(w_n)$ , выраженное через  $D_{nk}$ , в одно из соотношений (17.14), (17.38), (17.39), где после этого надо последовательно положить  $\varphi = \varphi_k$ . При этом получаем, если, например, использовать соотношение (17.14):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{nk}(D_{n1}, \dots, D_{nn}) = D_{nk} + (w \cdot \varphi_k)_{H_x} - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} [B_i \varphi_k - \\ - ((w_n + w^*)_{\alpha j} \cdot \varphi_{k\alpha i})] \nabla_{kl} \Psi(w_n) d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{T}_c^{ij} (w_n + w^*)_{\alpha i} \varphi_{k\alpha j} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (26.55)$$

К составлению системы (26.55) можно подойти и иначе. Выражение (26.1) для  $w_n$  и  $\Psi(w_n)$  подставляем в функционал (7.31) и записываем условие экстремума по  $D_{nk}$ .

**Теорема 26.2.** Пусть выполнены условия 1—8 § 17, а  $\varphi_k$  образуют базис в  $H_x$ . Пусть, далее, приближенное решение  $w_n$  ищется в виде (26.1) с использованием схемы П. Ф. Папковича, причем  $\Psi$  выражается через  $w_n$  посредством (17.17), а  $D_{nk}$  определяются из (26.55) или

$$\frac{\partial \mathcal{J}_x(w_n)}{\partial D_{nk}} = 0, \quad (26.56)$$

где  $\mathcal{J}_x(w)$  есть функционал  $\mathcal{J}_{9x}$ , а  $\Psi$  выражено через  $w$  посредством (17.17). В этом случае уравнения (26.55) методов Бубнова — Галеркина и (26.56) Ритца совпадают и справедливы все остальные утверждения теоремы 26.1. ■

26.5. На последующих этапах развития этой схемы был выполнен значительный цикл исследований, в которых решались конкретные задачи. В цикле работ [15, 18, 19, 20—30, 43—46] эта схема использовалась в высоких приближениях. ■

## § 27. Метод Бубнова — Галеркина — Ритца для приближенного решения задач $t\kappa$ ( $\kappa=1, 2, 3, 4$ ; $t=5, 6, 7, 8$ ).

Варианты Х. М. Муштари и В. З. Власова

27.1. Рассмотренный в § 26 вариант метода Бубнова — Галеркина — Ритца основан на точном интегрировании уравнений тангенциального напряженного состояния. Несмотря на то, что в данной теории эти уравнения оказываются линейными, их решение далеко

не всегда просто. Поэтому весьма полезными могут оказаться на практике способы решения задач  $tx$ , основанные на приближенном удовлетворении всем уравнениям системы (13.14) — (13.16). Такой способ был впервые применен Х. М. Муштари [71], см. также [72]. ■

Будем искать приближенное решение задачи  $tx$  в виде

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n C_{nk} \chi_k, \quad w_n = \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k, \quad \chi_k(\varphi_{ik}), \quad (27.1)$$

где  $\chi_k$  — ортонормированный базис в  $H_t$ ,  $\varphi_k$  — ортонормированный базис в  $H_x$ . Легко видеть, что  $\chi_k, \varphi_k$  образуют в совокупности ортонормированный базис в  $H_{tx}$ . И здесь отметим, что ортонормированность  $\chi_k, \varphi_k$  не обязательна, однако и в численном практическом анализе всегда выгодно иметь дело с ортонормированным базисом.

Для определения  $C_{nk}$  и  $D_{nk}$  используем (13.15), (13.16), куда подставим (27.1) и положим последовательно  $\chi = \chi_k, \varphi = \varphi_k, k = 1, \dots, n$ . При этом получим

$$C_{nk} = -(\omega \cdot \chi_k)_{H_t} + \int_{\Omega} \left[ B_{sl}(w_n + w^*) - \frac{1}{2}(w_n + w^*)_{\alpha^s} (w_n + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijsl} (\varphi_{ik\alpha^j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega_x, \quad (27.2)$$

$$D_{nk} = -(\omega \cdot \varphi_k)_{H_x} + \int_{\Omega} T^{ij} (a_n + a^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{k\alpha^j}] d\Omega. \quad (27.3)$$

В соотношениях (27.3)  $T^{ij}(a_n + a^*)$  вычисляются по формулам (4.25), где  $\varepsilon_{nij}$  выражены формулами (3.24), в которых  $\omega_n$  и  $w_n$  взяты по (27.1).

Второй путь для получения системы для определения  $C_{nk}, D_{nk}$  состоит в том, чтобы подставить (27.1) в  $\mathcal{J}_{tx}(a)$  и потребовать выполнения условий его экстремальности на линеале (27.1):

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{tx}(a_n)}{\partial C_{nk}} = 0, \quad (27.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{tx}(a_n)}{\partial D_{nk}} = 0. \quad (27.5)$$

**Лемма 27.1.** Уравнения (27.2), (27.3) и (27.4), (27.5) совпадают.

Для доказательства заметим, что

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{tx}(a_n)}{\partial C_{nk}} = \left( \text{grad}_{H_t} \mathcal{J}_{tx}(a_n) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial C_{nk}} \right)_{H_t} = (\omega_n - K_{tx}(a_n + a^*)) \cdot \chi_k)_{H_t}. \quad (27.6)$$

Последний переход в (27.6) произведен на основе (13.15).

Наконец, по определению  $G_{tk}$  (соотношение (13.33)) имеем

$$[(\omega_n - K_{tk}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*)) \cdot \chi_k]_{H_t} = C_{nk} + (\overset{0}{\omega} \cdot \chi_k)_{H_t} + \int_{\Omega} \left[ B_{sl} (w_n + w^*) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (w_n + w^*)_{\alpha^s} (w_n + w^*)_{\alpha^l} \right] D_p^{ijkl} (\varphi_{ik\alpha^j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega. \quad (27.7)$$

На основе (27.7) заключаем, что (27.2) и (27.4) тождественны. Далее, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{tk}(\mathbf{a}_n)}{\partial D_{nh}} = \left( \text{grad}_{H_{\kappa}} \mathcal{J}_{tk}(\mathbf{a}_n) \cdot \frac{\partial w_n}{\partial D_{nh}} \right)_{H_{\kappa}} = (\text{grad}_{H_{\kappa}} \mathcal{J}_{tk}(\mathbf{a}_n) \cdot \varphi_k)_{H_{\kappa}} = \\ = D_{nk} + (\overset{0}{w} \cdot \varphi_k)_{H_{\kappa}} - \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{k\alpha^j}] d\Omega. \quad (27.8)$$

Последний переход в (27.8) совершен на основе (13.16). Из (27.8) видно, что (27.3) и (27.5) эквивалентны. Лемма 27.1 доказана. ■

**27.2.** В первую очередь мы займемся изучением системы (27.2), (27.3). Подставим (27.2) в (27.3) и, введя параметр  $t$ , получим систему, содержащую лишь  $D_{nh}$ , которую запишем в виде

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{nh}(D_{nh}, t) = D_{nh} - t (\overset{0}{w} \cdot \varphi_k)_{H_{\kappa}} - t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - \\ - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \varphi_{k\alpha^j}] d\Omega = 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad (27.9)$$

$\widetilde{\mathcal{N}}_{nh}(D_{nh}, t)$  можно рассматривать как векторное поле в  $R_n$ . При этом в соответствии с (27.9) при  $t=0$  получаем тождественное поле, а при  $t=1$  получаем поле, соответствующее уравнению (27.3). Таким образом, открывается путь к доказательству разрешимости системы (27.3) путем установления гомотопности полей  $\mathcal{N}_{nh}(D_{nh}, 0)$  и  $\mathcal{N}_{nh}(D_{nh}, 1)$ . Для этого рассмотрим функционал  $\Phi_n(w_n, t)$ , определяемый соотношением

$$\Phi_n(w_n, t) = \sum_{h=1}^n D_{nh} \widetilde{\mathcal{N}}_{nh}(D_{nh}, t) = \sum_{h=1}^n D_{nh}^2 + t \left( \overset{0}{w} \cdot \sum_{h=1}^n D_{nh} \varphi_k \right)_{H_{\kappa}} - \\ - t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) \left[ B_{ij} \sum_{k=1}^n D_{nh} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha^i} \sum_{k=1}^n D_{nh} \varphi_{k\alpha^j} \right] d\Omega = \\ = \|w_n\|_{H_{\kappa}}^2 + t (\overset{0}{w} \cdot w_n)_{H_{\kappa}} - t \int_{\Omega} T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} w_n - (w_n + w^*)_{\alpha^i} w_{n\alpha^j}] d\Omega. \quad (27.10)$$

**Лемма 27.2.** Функционалу  $\Phi_n(w_n, t)$  можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_n(w_n, t) = & \|w_n\|_{H_n}^2 + t(w \cdot w_n)_{H_n} + 2t \int_{\Omega} Q_p(T^{ij}(a_n + a^*)) d\Omega + \\ & + t \int_{\Omega} T^{ij}(a_n + a^*) [B_{ij}(w_n + 2w^*) - (w_n + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - \\ & - 2(w_{i\alpha j}^* - G_{ij}^{\lambda} w_{\lambda}^*)] d\Omega - 2t(\omega_n \cdot \omega)_{H_t} + 2t \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_{n\tau} + w_{\tau}^*) w_{n\tau} ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_{nm} + w_m^*) w_m ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_{ni} + w_{ni}^*) w_{nj} ds \right). \quad (27.11) \end{aligned}$$

Доказательство леммы 27.2 повторяет, в сущности, доказательство леммы 16.1 и здесь приводиться не будет. ■

Введем в рассмотрение счетную последовательность операторов  $K^n$ , действующих из  $H_n$  в  $n$ -мерное пространство  $R_n$  коэффициентов  $C_{nk}$  и соответственно конечномерных подпространств  $H_{nk}^n$ , определяемых соотношениями (27.2). Пусть

$$\begin{aligned} (K^n(w) \cdot \chi_k)_{H_t} = & -(\omega^* \cdot \chi_k)_{H_t} + \int_{\Omega} [B_{sl}(w + w^*) - \\ & - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha s} (w + w^*)_{\alpha l}] D_p^{ijsl} (\varphi_{ikhj} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega, \quad \chi_k \in H_{nk}^n. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Соотношение (27.12) определяет оператор  $K^n$ , осуществляющий отображение  $H_n \rightarrow C_{nk}$ . Оператор  $K^n$  представим в виде

$$K^n = K_0^n + K_1^n + K_2^n, \quad (27.13)$$

где  $K_{\mu}^n$  — однородный оператор порядка  $\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ , определяемый соотношениями

$$(K_0^n \cdot \chi_k)_{H_t} = -(\omega^* \cdot \chi_k)_{H_t} + \int_{\Omega} \left( B_{sl} w^* - \frac{1}{2} w_{\alpha s}^* w_{\alpha l}^* \right) D_p^{ijsl} (\varphi_{ikhj} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega, \quad (27.14)$$

$$(K_1^n(w) \cdot \chi_k)_{H_t} = \int_{\Omega} \left[ B_{sl} w - \frac{1}{2} (w_{\alpha s} w_{\alpha l}^* + w_{\alpha l} w_{\alpha s}^*) \right] D_p^{ijsl} (\varphi_{ikhj} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega, \quad (27.15)$$

$$(K_2^n(w) \cdot \chi_k)_{H_t} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\alpha s} w_{\alpha l} D_p^{ijsl} (\varphi_{ikhj} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda k}) d\Omega. \quad (27.16)$$

**Лемма 27.3.** Пусть  $\mathcal{S}(f)$  — линейный и ограниченный функционал в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве  $f$ . Тогда

имеет место неравенство

$$|\mathcal{J}(f_n)| \leq \varepsilon_n \|f\|, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (27.17)$$

В (27.17)  $f_n$  — бесконечный отрезок ряда Фурье  $f$  по некоторому базису  $\varphi_k$ :

$$f_n = \sum_{k=n}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad (27.18)$$

а  $\varepsilon_n$  не зависит от  $f$ .

Для доказательства учтем, что по теореме Рйсса

$$\mathcal{J}(f) = (f \cdot f^*), \quad \mathcal{J}(f_n) = (f_n \cdot f_n^*) \quad (27.19)$$

и

$$|\mathcal{J}(f_n)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k f_k^* \right| \leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} |f_k^*|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\| \varepsilon_n. \quad (27.20)$$

Очевидно, все утверждения леммы 27.3 доказаны. ■

Лемма 27.4. Имеют место соотношения

$$\| \mathbf{K}_\mu^n(w) - \mathbf{K}_\mu(w) \|_{H_t} \leq \varepsilon_n \|w\|_{H_{\mu, \varepsilon}}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (27.21)$$

Рассмотрим, например, функционал

$$((\mathbf{K}_2^n(w) - \mathbf{K}_2(w)) \cdot f)_{H_x} = (\mathbf{K}_2(w) \cdot f_{n+1})_{H_x}. \quad (27.22)$$

В силу (27.17) имеем

$$|((\mathbf{K}_2^n(w) - \mathbf{K}_2(w)) \cdot f)_{H_x}| \leq \varepsilon_{n+1} \| \mathbf{K}_2(w) \|_{H_x} \quad (27.23)$$

и из (14.3) и (27.22) получаем (27.21) для  $\mu = 2$ . Аналогично рассматриваются случаи  $\mu = 0, 1$ . Лемма 27.4 доказана. ■

Пусть далее,

$$\Pi_n(w_n) = \int_{\Omega} Q_p(T^{ij}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ijn}^0(w_n) \varepsilon_{kln}^0(w_n) d\Omega. \quad (27.24)$$

В (27.24) вектор-функция  $\omega_n$  выражена через  $w_n$  посредством (27.2).

Лемма 27.5. Имеет место представление

$$\Pi_n(w_n) = \sum_{\mu=0}^4 \Pi_{n\mu}(w_n), \quad (27.25)$$

где  $\Pi_{n\mu}(w_n)$  — однородный функционал порядка  $\mu$ , и справедливы неравенства

$$| \Pi_{n\mu}(w_n) | \leq m \|w_n\|_{H_x}^\mu, \quad (27.26)$$

где  $m$  не зависит ни от  $n$ , ни от  $w$ .

Лемма 27.5 доказывается по той же схеме, что и лемма 16.2. Однако здесь есть и одно отличие, заключающееся в том, что в пра-

вой части (27.28) постоянная  $m$ , вообще говоря, будет зависеть от  $n$ . Однако, как легко видеть, ее значение, по существу, определяется оценкой вида

$$\|K_\mu^n(w_n)\|_{H_x} \leq m_n \|w_n\|_{H_x}^\mu. \quad (27.27)$$

Из (14.3), (27.21) имеем

$$\begin{aligned} \|K_\mu^n(w_n)\|_{H_x} &\leq \|K_\mu^n(w_n) - K_\mu(w_n) + K_\mu(w_n)\|_{H_x} \leq \\ &\leq \|K_\mu^n(w_n) - K_\mu(w_n)\|_{H_t} + \|K_\mu(w_n)\|_{H_x} \leq (\varepsilon_n + m) \|w_n\|_{H_x}^\mu, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (27.28)$$

что и доказывает тот факт, что постоянная  $m_n$  в (27.27) может считаться не зависящей от  $n$ . Лемма 27.5 полностью доказана. ■

**27.3.** Рассмотрим в пространстве  $D_{n\alpha}$  сферу  $\Sigma_n(1, 0)$  и выделим на ней множество  $\Sigma'_n(1, 0)$  элементов  $v$ , удовлетворяющих соотношению

$$\|v\|_{H_x}^2 - \frac{1}{\varepsilon_1} \|B_{ij}v - v_{\alpha i} w_{\alpha j}^*\|_{L_{2\Omega}}^2 - c \|\omega_2(v)\|_{L_{2\Omega}} \leq \frac{1}{2}, \quad (27.29)$$

где  $\varepsilon_1, c$  — некоторые фиксированные положительные постоянные и вектор-функция  $\omega_{2n} = K_2^n w_n$  дается соотношениями (27.13) — (27.16).

Пусть, далее,  $\Sigma'_{H_x}(1, 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma'_n(1, 0)$  и  $\bar{\Sigma}'_{H_x}(1, 0)$  есть слабое замыкание  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  в  $H_x$ . Дополнение  $\Sigma'_{H_x}(1, 0)$  до полной сферы  $\Sigma_{H_x}(1, 0)$  назовем  $\Sigma''_{H_x}(1, 0)$ .

**Лемма 27.6.** Множество  $\bar{\Sigma}'_{H_x}(1, 0)$  не содержит нуля.

Действительно, в противном случае существовала бы последовательность  $w^m \in \Sigma'_{H_x}(1, 0)$  такая, что  $w^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Здесь могут иметься две возможности. Первая из них заключается в том, что все  $w^m$ , начиная с некоторого большого номера  $m$ , принадлежат одному и тому же множеству  $\Sigma'_n(1, 0)$ . Однако эта возможность исключается сразу, ибо в конечномерном пространстве слабая и сильная сходимость совпадают, и тогда  $w^m$  стремилось бы к нулю по норме, что невозможно, так как  $\|w^m\|_{H_x} = 1$ . Вторая возможность реализуется, когда  $w^m$  принадлежат разным  $\Sigma'_n(1, 0)$ . Однако и она исключается, ибо здесь дословно можно применить рассуждения леммы 15.1. Таким образом, лемма 27.6 доказана. ■

**Лемма 27.7.** Пусть выполнены условия 2—8 § 13,  $S \in H_\Omega^{2,\lambda}$ , связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  существенно упругие. В этом случае на  $\Sigma'_{H_x}(R, 0)$ , имеет место неравенство

$$\Pi_{n4}(w_n) \geq mR^4, \quad (27.30)$$

где постоянная  $m$  в правой части (27.30) от  $n$  не зависит.

Доказательство леммы 27.7, в сущности, повторяет доказательство леммы 16.3. Следует только иметь в виду, что постоянная  $m$  в (27.30) не зависит от  $n$  в силу специфики образования  $\Sigma'_{H_k}(1, 0)$ , вследствие чего само это множество не зависит от  $n$ .

Лемма 27.8. Пусть выполнены условия 1—8 § 13, связи на  $\Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$  — существенно упругие, оболочка геометрически пологая. В этом случае на  $\Sigma'_{H_k}(1, 0)$  имеет место (27.30).

Лемма 27.9. Пусть выполнены условия 1—4, 7 § 13, и для геометрически пологой оболочки имеет место (16.26). В этом случае справедливо (27.30).

Леммы 27.8, 27.9 доказываются так же, как и лемма 27.7. ■

27.4. Перейдем к оценке  $\Phi_n(w_n)$ .

Лемма 27.10. Пусть выполнены условия теорем 16.1—16.3. В этом случае справедливо неравенство

$$\Phi_n(w_n, t) \geq mR^2, \quad m > 0 \text{ не зависит от } n; \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (27.31)$$

Доказательство леммы 27.10 можно провести по той же схеме, что и доказательства теорем 16.1—16.3. Независимость  $m$  от  $n$  в (27.31) следует из независимости от  $n$  констант  $m$  в (27.27), (27.30).

Лемма 27.11. Пусть выполнены условия леммы 27.10. В этом случае векторные поля  $\tilde{\mathcal{N}}_{nk}(D_{nk}, 0)$  и  $\tilde{\mathcal{N}}_{nk}(D_{nk}, 1)$  гомотопны на сферах большого радиуса  $\Sigma_n(R, 0)$  при любом  $n$ .

Лемма 27.11 непосредственно вытекает из (27.31).

Лемма 27.12. Система уравнений (27.10) при выполнении условий леммы 27.10 имеет по меньшей мере одно действительное решение.

Утверждение леммы 27.12 вытекает из леммы 27.11.

Лемма 27.13. При выполнении условий леммы 27.10 все решения уравнений (27.2), (27.3) таковы, что

$$\|a_n(w_{1n}, w_{2n}, w_n)\|_{H_{tk}} \leq R, \quad (27.32)$$

где постоянная  $R$  не зависит от  $n$ . ■

27.5. Лемма 27.14. Каждый слабый предел  $a_0(w_{10}, w_{20}, w_0)$  множества приближений  $\{a_n(w_{1n}, w_{2n}, w_n)\}$  есть обобщенное решение задачи  $tk$ .

Для доказательства рассмотрим интегральные тождества (13.15), (13.16), определяющие обобщенное решение, и пусть  $a_0(w_{10}, w_{20}, w_0)$  есть слабый предел последовательности  $a_n(w_{1n}, w_{2n}, w_n)$  из  $\{a_n\}$ . Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} (\omega_n \cdot \chi_k)_{H_t} + \left( \overset{0}{\omega} \cdot \chi_k \right)_{H_t} - \int_{\Omega} [B_{sl}(w_n + w^*) - \\ - \frac{1}{2}(w_n + w^*)_{\alpha s} (w_n + w^*)_{\alpha l}] D_p^{ijsl} (\varphi_{ikhj} - G_{ij}^k \varphi_{\lambda h}) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (27.33)$$

Оно всегда будет иметь место при фиксированном  $k$  и при  $n \geq k$ . Но в этом соотношении, фиксируя  $k$ , можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда, очевидно, будем иметь

$$\left( (\omega_0 + \overset{0}{\omega}) \cdot \chi_k \right)_{H_t} - \int_{\Omega} \left[ B_{sl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha s} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] \times \\ \times D_p^{jsl} (\varphi_{is\alpha j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda h}) d\Omega = 0. \quad (27.34)$$

Действительно, в первом члене левой части (27.34) предельный переход возможен, поскольку он является линейным функционалом в  $H_t$ . В третьем члене возможность предельного перехода вытекает из соотношений

$$\|w_n - w_0\|_{C_{\Omega}} \rightarrow 0, \quad \|w_n - w_0\|_{W_{q\Omega}^{(1)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (27.35)$$

следующих из теоремы вложения 12.3 (соотношение (12.49)). Пусть  $\chi$  — произвольный элемент  $H_t$ , причем

$$\chi = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \chi_p = \sum_{p=1}^n \alpha_p \chi_p + R_n \chi, \quad (27.36)$$

$$\left( (\omega_0 + \overset{0}{\omega}) \cdot \chi \right)_{H_t} - \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha k} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] \times \\ \times \sum_{s=1}^{\infty} D_p^{ijkl} (\varphi_{ih\alpha j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda h}) d\Omega = (\omega_0 + \overset{0}{\omega}) \cdot R_n \chi \Big|_{H_t} - \\ - \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha k} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] D_p^{ijkl} \times \\ \times \sum_{s=n+1}^{\infty} (\varphi_{is\alpha j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda s}) d\Omega. \quad (27.37)$$

Соотношение (27.37) в силу (27.33) справедливо при любом  $n$ , откуда вытекает (13.15) для любого элемента  $\chi \in H_t$ . Далее, соотношение (27.3), определяющее  $w_n$ , можно записать в виде

$$\left( (w_n + w) \cdot \varphi_k \right)_{H_{\chi}} - \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) [B_{ij} \varphi_k - (w_n + w^*)_{\alpha i} \varphi_{k\alpha j}] d\Omega = 0. \quad (27.38)$$

Легко видеть, что в (27.38) можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно, в отношении первого члена левой части (27.38) это очевидно. Далее, легко видеть, что имеет место соотношение

$$T^{ij} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}^*) \rightarrow T^{ij} (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}^*) \quad \text{в } L_{2\Omega}. \quad (27.39)$$

При фиксированном  $\varphi_k$  второй член левой части (27.38) есть линейный и ограниченный функционал относительно  $T^{ij}$  в  $L_{2\Omega}$ . Вследствие этого возможен предельный переход в (27.38), в результате чего



получаем (13.16) при  $\varphi = \varphi_h$ . Переход к (13.16) при произвольном  $\varphi$  также не представляет труда. Лемма 27.14 установлена. ■

Лемма 27.15. Всякая слабо сходящаяся последовательность  $a_n$  из  $\{a_n\}$  сходится сильно, и поэтому все множество  $\{a_n\}$  сильно компактно.

Для доказательства положим в (13.15)  $\chi = \omega$ , в результате имеем

$$\|\omega\|_{H_\chi}^2 = -(\overset{0}{\omega} \cdot \omega)_{H_\chi} + \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w + w^*) - \frac{1}{2}(w + w_{\alpha^h}^*)(w + w^*)_{\alpha l} \right] \times$$

$$\times D_p^{ijhl} (w_{i\alpha j} - G_{ij}^\lambda w_\lambda) d\Omega \quad (27.40)$$

и, далее, умножив (27.2) на  $C_{nk}$  и просуммировав по  $k$ , будем иметь

$$\|w_n\|_{H_\chi}^2 = -(\overset{0}{\omega} \cdot \omega_n)_{H_\chi} + \int_{\Omega} \left[ B_{kl}(w_n + w^*) - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha^h} (w + w^*)_{\alpha l} \right] \times$$

$$\times D_p^{ijhl} (w_{in\alpha j} - G_{ij}^\lambda w_{n\lambda}) d\Omega. \quad (27.41)$$

Вычтя из (27.40) соотношения (27.41) и учтя (27.35), (27.36), легко получаем

$$\|w_n\|_{H_\chi} \rightarrow \|\omega\|_{H_\chi}. \quad (27.42)$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\|w_n\|_{H_\chi} \rightarrow \|w_0\|_{H_\chi}. \quad (27.43)$$

Учтя слабую сходимость  $w_n \rightarrow w_0$  из (27.42), (27.43), заключаем о справедливости леммы 27.15 (теорема 9.3). ■

Лемма 27.16. Множество  $\{a_n\}$  содержит по крайней мере одну абсолютно минимизирующую  $\mathcal{J}_{ix}$  последовательность  $a_n$ .

Лемма 27.17. Пусть  $a_0$  — изолированное решение задачи  $ix$ , имеющее в  $H_{ix}$  ненулевой индекс. В этом случае  $a_0$  принадлежит множеству предельных в  $H_{ix}$  точек  $\{a_n\}$ , и значит, для любого такого решения и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (27.2), (27.3) (соответственно (27.4), (27.5)) имеет для  $C_{nk}$ ,  $D_{nk}$  действительные решения  $a_n$  такие, что  $a_n \in \Pi(r, a_0)$ .

Лемма 27.18. Пусть  $a_0$  — обобщенное решение задачи  $ix$ , придающее функционалу  $\mathcal{J}_{ix}$  в  $H_{ix}$  строгий относительный минимум (максимум). В этом случае  $a_0$  принадлежит множеству предельных в  $H_{ix}$  точек  $\{a_n\}$ , и значит, для любого такого решения и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (27.2), (27.3) (соответственно (27.4), (27.5)) имеет для  $C_{nk}$ ,  $D_{nk}$  действительные решения  $a_n$  такие, что  $a_n \in \Pi(r, a_0)$ .

Лемма 27.19. Пусть  $\{\tilde{a}_n\}$  есть множество итерированных приближений

$$\tilde{a}_n = G_{ix} a_n. \quad (27.44)$$

Тогда  $\{\tilde{a}_n\}$  сильно компактно в  $H_{tx}$ , и каждый сильный предел  $\{\tilde{a}_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $tx$ . Кроме того, имеет место соотношение

$$\|\tilde{a}_n - a_n\|_{H_{tx}} \rightarrow 0. \quad \blacksquare \quad (27.45)$$

**27.6.** Сведем все полученные результаты воедино.

**Теорема 27.1.** Пусть выполнены все условия теорем 16.1—16.3, а  $\chi_k, \varphi_k$  образуют базис в  $H_{tx}$ . Пусть, далее, приближенное решение ищется в виде (27.1), причем для определения  $C_{nk}, D_{nk}$  используется схема Х. М. Муштари, приводящая к (27.2), (27.3). В этом случае:

1) уравнения методов Бубнова — Галеркина (27.2), (27.3) и Рунца (27.4), (27.5) совпадают;

2) при каждом  $n$  вращение конечномерного векторного поля  $\mathcal{N}_n(D_{nk}, 1)$  (27.9) на сферах большого радиуса в  $\Sigma_n(R, 0)$  равно  $+1$ , вследствие чего система (27.2), (27.3) при каждом  $n$  имеет по крайней мере одно действительное решение;

3) все множество приближенных решений  $\{a_n\}$  сильно компактно в  $H_{tx}$ . При этом всякая слабо сходящаяся последовательность из  $\{a_n\}$  сходится сильно, и всякая предельная точка из  $\{a_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $tx$ ;

4) множество приближенных решений  $\{a_n\}$  содержит по крайней мере одну абсолютно минимизирующую в  $H_{tx}$  последовательность функционала  $\mathcal{I}_{tx}$ . Если точка абсолютного минимума  $\mathcal{I}_{tx}$  единственная, то всякая абсолютно минимизирующая последовательность из  $\{a_n\}$  является сходящейся;

5) всякая последовательность, относительно минимизирующая (соответственно относительно максимизирующая) функционал  $\mathcal{I}_{tx}(a)$ , сильно компактна в  $H_{tx}$ , и каждый сильный предел элементов этих последовательностей порождает обобщенное решение задачи  $tx$ , придающее функционалу  $\mathcal{I}_{tx}$  относительный минимум (соответственно относительный максимум);

6) всякое изолированное решение  $a_0$  задачи  $tx$ , имеющее в  $H_{tx}$  ненулевой индекс, принадлежит множеству предельных в  $H_{tx}$  точек  $\{a_n\}$ , и для каждого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (26.3) (соответственно (26.4)) имеет для  $C_{nk}, D_{nk}$  действительные решения такие, что  $a_n \in \Pi_{tx}(r, a_0)$ ;

7) всякое обобщенное решение  $a_0$  задачи  $tx$ , придающее функционалу  $\mathcal{I}_{tx}$  строгий относительный минимум (максимум) в  $H_{tx}$ , принадлежит множеству предельных точек  $\{a_n\}$ , и для каждого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (26.3) (соответственно (26.4)) имеет для  $C_{nk}, D_{nk}$  действительные решения такие, что  $a_n \in \Pi_{H_{tx}}(r, a_0)$ ;

8) множество итерированных приближений  $\{\tilde{a}_n\}$  сильно компактно в  $H_{t\kappa}$ , и каждый сильный предел  $\{\tilde{a}_n\}$  есть обобщенное решение задачи  $t\kappa$ . При этом справедливо (27.45).

Примечание 27.1. Все утверждения теоремы 27.1 остаются в силе, если  $\Phi_n$  определять не из системы (27.2) и соответственно (27.12) — (27.16), а любой последовательностью операторов  $K^n(w)$ , удовлетворяющей условиям

$$\|K^n(w) - K(w)\|_{H_t} \leq \varepsilon_n (\|w\|_{H_\kappa} + \|w\|_{H_\kappa}^2). \quad \blacksquare \quad (27.46)$$

27.7. В. З. Власов предложил [8] приближенно по методу Бубнова — Галеркина решать оба уравнения с функцией усилий (7.54), (7.63). Эта схема широко использована М. А. Колтуновым [51—56]. В сочетании с другими приемами она получила развитие в работах В. В. Петрова, В. А. Крысько и их учеников [1—4, 5, 65—66, 77—81]. Более конкретно положим

$$w_n = \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k, \quad \Psi_n = \sum_{k=1}^n C_{nk} \theta_k, \quad (27.47)$$

где  $\varphi_k, \theta_k$  — ортонормированные базисы соответственно в  $H_\kappa$  и  $H_\theta$ .

Системы уравнений для  $D_{nk}$  и  $C_{nk}$  можно получить, если подставить (27.47) в (17.14), где надо последовательно положить  $\varphi \sim \varphi_k, \theta \sim \theta_k, k = 1, \dots, n$ . При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{nk1} = D_{nk} + (w \cdot \varphi_k)_{H_\kappa} - \int_{\Omega} C^{is} C^{jl} [B_{ij} \varphi_k - \varphi_{k\alpha i} (w_n + w^*)_{\alpha j}] \nabla_{si} \Psi_n d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \tilde{T}^{ij} (w_n + w^*)_{\alpha i} \varphi_{k\alpha j} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (27.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{nk2} = C_{nk} + \int_{\Omega} C^{is} C^{jl} \left[ (w_n + w^*) B_{ij} - \frac{1}{2} (w_n + w^*)_{\alpha i} (w_n + w^*)_{\alpha j} \right] \times \\ \times \nabla_{si} \theta d\Omega - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta_k d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (27.49)$$

При составлении системы (27.48), (27.49) можно также использовать функционал  $\mathcal{J}_\kappa$  и теорему 22.3. Для этого следует (27.47) подставить в  $\mathcal{J}_\kappa$  и записать условия экстремума, т. е. соотношения Ритца

$$\frac{\partial \mathcal{J}_\kappa}{\partial D_{nk}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\kappa}{\partial C_{nk}} = 0. \quad (27.50)$$

Поскольку анализ описанной схемы В. З. Власова во многом повторяет проведенный в разделах 27.1—27.6 анализ схемы Х. М. Муштари, то приведем лишь окончательный результат.

Теорема 27.2. Пусть выполнены все условия 1—8 § 17. Пусть, далее,  $\theta_k$  образуют ортонормированный базис в  $H_\theta$  и  $\varphi_k$  — ортонор-

мированный базис в  $H_n$ . В этом случае имеют место следующие факты:

- 1) системы (27.47), (27.48) и (27.49), (27.50) совпадают;
- 2) вращение векторного поля  $\mathcal{N}_{nk1}$ ,  $\mathcal{N}_{nk2}$  на сферах достаточно большого радиуса в  $2n$ -мерном пространстве  $R_n \times R_n$  ( $D_{nk}$ ,  $C_{nk}$ ) есть  $+1$ , вследствие чего системы (27.47), (27.48) и (27.49), (27.50) имеют при каждом  $n$  по крайней мере одно действительное решение. Все решения  $c_n(w_n, \Psi_n)$  лежат в некоторой сфере

$$\|c_n\|_{H_{9k}} \leq R; \quad (27.51)$$

3) множество приближенных решений  $\{c_n\}$  является сильно компактным в  $H_{9k}$ , при этом всякая слабо сходящаяся в  $H_{9k}$  последовательность из  $\{c_n\}$  сходится сильно и всякая предельная точка  $\{c_n\}$  является обобщенным решением задачи  $9_k$ ;

4) совокупность приближенных решений  $\{c_n\}$  содержит по крайней мере одну последовательность, абсолютно минимизирующую  $\mathcal{J}_k$  в  $H_k$ . В силу теоремы 22.4 всякая абсолютно минимизирующая  $\mathcal{J}_k$  последовательность  $c_n(w_n, \Psi_n)$  сходится в  $H_{9k}$  к какой-либо точке абсолютного минимума;

5) всякая последовательность, относительно минимизирующая (максимизирующая) функционал  $\mathcal{J}_k$ , сильно компактна в  $H_k$  и каждый сильный предел элементов этих последовательностей порождает обобщенное решение задачи  $9_k$ , придающее функционалу  $\mathcal{J}_k$  относительный минимум (максимум);

6) всякое изолированное решение  $c_0$  задачи  $9_k$ , имеющее в  $H_{9k}$  ненулевой индекс, принадлежит множеству предельных в  $H_{9k}$  точек  $\{c_n\}$ , и, значит, для любого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (27.47), (27.48) (соответственно (27.49), (27.50)) имеет для  $C_{nk}$ ,  $D_{nk}$  действительные решения такие, что  $c_n \in \Pi_{9k}(r, c_0)$ ;

7) всякое обобщенное решение  $c_0$  задачи  $9_k$ , придающее функционалу  $\mathcal{J}_{9k}$  в  $H_{9k}$  строгий относительный минимум (максимум), принадлежит множеству предельных в  $H_{9k}$  точек  $\{c_n\}$ , и значит, для любого из этих решений и любого сколь угодно малого  $r$  можно найти такое число  $N$ , что при всех  $n \geq N$  система (27.47), (27.48) (соответственно (27.49), (27.50)) имеет для  $C_{nk}$ ,  $D_{nk}$  действительные решения такие, что  $c_n \in \Pi_{9k}(r, c_0)$ ;

8) множество итерированных приближений  $\tilde{c}_n$  сильно компактно в  $H_{9k}$ , и каждый сильный предел  $\{\tilde{c}_n\}$  в  $H_{9k}$  есть обобщенное решение задачи  $9_k$ . При этом справедливо соотношение

$$\|c_n - \tilde{c}_n\|_{H_{9k}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (27.52)$$

**Примечание 27.2.** Все утверждения теоремы 27.2 остаются в силе, если  $\Psi_n$  определяются не из (27.49), а системой операторов  $K^n(w)$ , удовлетворяющей (27.49). ■

### § 28. Оценки погрешности метода Бубнова — Галеркина — Ритца (БГР) в некоторых задачах нелинейной теории пологих оболочек

28.1. Основу таких оценок составляет теорема М. А. Красносельского [60, 61] об асимптотической эквивалентности погрешности приближений метода БГ и погрешности приближений рядом Фурье искомого решения. Корни этой идеи восходят к работам Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [64]. Об обосновании метода Бубнова — Галеркина применительно к линейным задачам см. работы М. В. Келдыша [49] и С. Г. Михлина [69].

Имеет место следующая теорема [60]. Пусть уравнение

$$f = Gf, \quad (28.1)$$

где  $G$  — усиленно непрерывный в общем случае нелинейный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве  $B$ , решается по схеме БГ

$$f_n = \sum_{k=1}^n C_{nk} g_{k\epsilon} \quad (28.2)$$

$$C_{nk} = P_k G f_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (28.3)$$

где  $g_k$  — ортонормированный базис в  $B$ ,  $P_k$  — оператор ортогонального проектирования на  $g_k$ . Предположим, что  $f_0$  есть неособое решение (28.1). В этом случае нелинейная система (28.3), начиная с некоторого достаточно большого  $n$ , имеет решение

$$\|f_0 - f_n\| = (1 + \epsilon_n) \left\| f_0 - \sum_{k=1}^n (P_k f_0) g_k \right\|, \quad \epsilon_n \rightarrow 0. \quad (28.4)$$

Таким образом, в силу этой теоремы нам необходимо оценить погрешность ряда Фурье по  $g_k$  для решения  $g_0$ . ■

28.2. Рассмотрим краевую задачу  $t\kappa$ , если выполнены граничные условия

$$w_1|_{\Gamma} = w_2|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (28.5)$$

В соответствии с нашим соглашением (§ 7) этой задаче можно присвоить номер 51, ибо здесь  $t=5$ ,  $\kappa=1$ . Покажем, как для этой задачи построить базис. Очевидно, это должен быть базис в  $H_{51}$ , включающий базисы в  $H_5$  и  $H_1$ . Пусть уравнение контура  $\Gamma$  дается соотношением

$$F(\alpha^1, \alpha^2) = 0. \quad (28.6)$$

Построим множество функций вида

$$w_{k_1 k_2} = F^2(\alpha^1, \alpha^2) (\alpha^1)^{k_1} (\alpha^2)^{k_2} \quad (28.7)$$

и проортонормируем (28.7) в норме  $H_1$  методом Шмидта. Обозначим новое семейство функций  $\varphi_k$ . В дальнейшем нам будет удобно ис-

пользовать следующую систему нумерации для  $\varphi_k$ : объединим в один агрегат  $Q_N^1$  все функции вида (28.7), у которых

$$0 \leq k_1, \quad k_2 \leq N. \quad (28.8)$$

Очевидно, таких функций, как легко подсчитать, будет  $(N+1)^2$ .

Теорема 28.1. Пусть выполнены условия

- 1)  $F(\alpha^1, \alpha^2) \neq 0$  нигде, кроме  $\Gamma$  в некоторой открытой области  $D$ , включающей  $\bar{\Omega}$ ;
- 2)  $|\text{grad } F|_{\Gamma} > 0$ ;
- 3)  $F \in H_{\Omega}^{\rho, \lambda}$ .

В этом случае, если  $w$  принадлежит пересечению  $H_1$  и  $H^{\rho, \lambda}$ , то

$$\left\| w - \sum_{m=0}^{(N+1)^2} (P_m w) \varphi_m \right\|_{H_1} \leq m'(w) N^{-(\rho+\lambda-2)}. \quad (28.9)$$

В формуле (28.9)  $P_m$  — оператор проектирования по базису  $\varphi_k$ .

Доказательство теоремы 28.1 базируется на том факте, что в силу результатов И. Ю. Харрик [93, 94] при выполнении условий 1—3 теоремы 28.1 найдется такой агрегат  $Q_N^1 w$ , что

$$\|w - Q_N^1 w\|_{H_1} \leq m'(w) N^{-(\rho+\lambda-2)}. \quad (28.10)$$

Однако справедливо известное соотношение

$$\left\| w - \sum_{m=0}^{(N+1)^2} P_m(w) \varphi_m \right\|_{H_1} \leq \|w - Q_N^1 w\|_{H_1}. \quad (28.11)$$

Из (28.10), (28.11) вытекает теорема 28.1. ■

28.3. Рассмотрим множество функций вида

$$F(\alpha^1, \alpha^2) (\alpha^1)^{k_1} (\alpha^2)^{k_2} \quad (28.12)$$

и на их основе сконструируем множество векторов вида

$$w_{1k_1 k_2} = F(\alpha^1, \alpha^2) (\alpha^1)^{k_1} (\alpha^2)^{k_2}, \quad w_{2m_1 m_2} = F(\alpha^1, \alpha^2) (\alpha^1)^{m_1} (\alpha^2)^{m_2} \quad (28.13)$$

и проортонормируем (28.13) в метрике  $H_5$ . Полученные вектор-функции обозначим  $\chi_k$ . По-прежнему объединим в один векторный агрегат  $Q_N''$  все вектор-функции (28.13), содержащие в (28.12) степени  $N$  и ниже, для которых выполнено (28.8). Очевидно, в данном случае общее число таких вектор-функций будет  $(N+1)^4$ .

Теорема 28.2. Пусть выполнены условия 1—3 теоремы 28.1. В этом случае, если  $\omega(w_1, w_2)$  принадлежит пересечению  $H_5$  и  $H_{\Omega}^{\rho, \lambda}$ , то

$$\left\| \omega - \sum_{m=0}^{(N+1)^4} P_m(\omega) \omega_m \right\|_{H_5} \leq m\omega N^{-(\rho+\lambda-2)}. \quad (28.14)$$

Доказательство теоремы 28.2 также базируется на результатах И. Ю. Харрик [93, 94]. При выполнении условий 1—3 теоремы 28.1 существует линейный агрегат  $Q_N''\omega$  вектор-функций из (28.13) такой, что

$$\|\omega - Q_N''\omega\|_{H_5} \leq m''(\omega) N^{-(\rho+\lambda-1)}. \quad (28.15)$$

Учтя соотношение

$$\left\| \omega - \sum_{m=0}^{(N+1)^4} P_m(\omega) \omega_m \right\|_{H_5} \leq \|\omega - Q_N''\omega\|_{H_5}, \quad (28.16)$$

получим (28.14), и теорема 28.2 установлена. ■

28.4. Перейдем непосредственно к оценке погрешности метода БГР решения задач нелинейной теории пологих оболочек. Пусть приближенное решение задачи 51 при условиях (28.5) ищется в виде (26.1), причем  $\varphi_k$  образованы из (28.7). Для определения используется метод БГР в форме П. Ф. Папковича для системы уравнений в перемещениях. Таким образом,  $D_{nk}$  определяется из (26.3). Справедлива

Теорема 28.3. Пусть выполнены условия 2—4 § 13, условия 1—3 теоремы 28.1 и, кроме того,

$$R^3, R^s \in W_{\Omega}^{\rho}; \quad \Gamma \in C_{\Omega}^{4+\rho}, \quad S \in C_{\Omega}^{4+\rho}, \quad D_u^{ijkl} \in C_{\Omega}^{2+\rho}, \quad D_p^{ijkl} \in C_{\Omega}^{1+\rho}. \quad (28.17)$$

Наконец, пусть дополнительно выполнено условие

$$F \in H_{\Omega}^{\rho+2, 2(1-1/p)}, \text{ если } p < 2; \quad F \in H_{\Omega}^{\rho+3-0}, \text{ если } p = 2; \\ F \in H_{\Omega}^{\rho+3, 1-2/p}, \text{ если } p > 2. \quad (28.18)$$

В этом случае для всякого неособого решения  $w_0$  операторного уравнения (13.36) найдется такая последовательность  $w_{(N+1)^2}$  приближений метода БГР (26.3), что будет иметь место асимптотическая оценка погрешности

$$\|w_0 - w_{(N+1)^2}\|_{H_1} \leq m(w_0) N^{-\beta}, \quad (28.19)$$

где

$$\beta = \rho + 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ при } p \neq 2; \quad \beta = \rho - 0 \text{ при } p = 2. \quad (28.20)$$

Доказательство теоремы 28.3 базируется на следующих фактах. При выполнении (28.17) решение  $w_0$  в силу теоремы 20.3 (соотношение (20.15)) принадлежит  $W_{\Gamma\Omega}^{(\rho+4)}$  и, следовательно, по теореме вложения 10.6

$$w \in H_{\Omega}^{\rho+2, 2(1-1/p)} \text{ при } p < 2; \quad w \in H_{\Omega}^{\rho+2-0} \text{ при } p = 2; \\ w \in H_{\Omega}^{\rho+3, 1-2/p} \text{ при } p > 2. \quad (28.21)$$

Но в силу теоремы 28.1 (соотношение (28.9)) имеем

$$\left\| w_0 - \sum_{m=0}^{(N+1)^2} P_m(w_0) \varphi_m \right\|_{H_1} \leq m(w_0) N^{-\beta}, \quad (28.22)$$

где  $\beta$  дается (28.20). Но тогда из (28.1), (28.4) вытекает (28.19). Теорема 28.3 доказана. ■

Теорема 28.4. Пусть выполнены условия 2—4 § 13, условия 1—3 теоремы 28.1 и, кроме того,

$$R^z, R^s \in H_{\Omega}^{\rho, \lambda}, \quad \Gamma \in H_{\Omega}^{4+\rho, \lambda}, \quad S \in H_{\Omega}^{4+\rho, \lambda}, \\ D_u^{ijkl} \in H_{\Omega}^{\rho+2, \lambda}, \quad D_p^{ijkl} \in H_{\Omega}^{\rho+1, \lambda}. \quad (28.23)$$

Наконец, пусть дополнительно

$$F \in H_{\Omega}^{\rho+4, \lambda}. \quad (28.24)$$

В этом случае для всякого неособого решения  $w_0$  операторного уравнения (13.36) найдется такая последовательность  $w_{(N+1)^2}$  приближений метода БГР, что будет иметь место асимптотическая оценка погрешности (28.19), где

$$\beta = \rho + 2 + \lambda, \text{ если } \lambda < 1; \quad \beta = \rho + 3 - 0, \text{ если } \lambda = 1. \quad (28.25)$$

Теорема 28.4 доказывается так же, как и теорема 28.3, поэтому ее более подробное рассмотрение производиться не будет.

**П р и м е ч а н и е 28.1.** Теоремы 28.3, 28.4 показывают, что если исходные данные задачи являются аналитическими, то теоретическая оценка (28.19) утверждает, что погрешность решения методом БГР убывает быстрее любой отрицательной степени  $N$ . Это будет иметь место, например, в случае сферической или эллипсоидальной оболочки, если при этом опорный контур  $\Gamma$  есть круг или эллипс, а нагрузка полиномиальная.

Однако при этом надо иметь в виду, что практическая сходимость может оказаться не столь хорошей. С этим более подробно можно ознакомиться в [70].

**П р и м е ч а н и е 28.2.** В случае, если рассматриваются осесимметричные деформации физически и геометрически осесимметричной оболочки, ее напряженно-деформированное состояние зависит только от координаты  $r$  и тогда показатель степени в (28.19) удваивается.

**П р и м е ч а н и е 28.3.** Приближенные значения продольных перемещений  $w_1, w_2$  в данной схеме метода БГР определяются соотношением

$$\omega_{(N+1)^2} = K_{\text{тк}}(w_{(N+1)^2}). \quad (28.26)$$

Поэтому легко устанавливается, что в условиях теорем 28.3, 28.4 имеет место следующая оценка погрешности в определении про-



дольных и общих перемещений:

$$\|\omega_0 - \omega_{(N+1)^2}\|_{H_5} \leq m(\mathbf{a}_0) N^{-\beta}, \quad \|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{(N+1)^2}\|_{H_{51}} \leq m(\mathbf{a}_0) N^{-\beta}. \quad (28.27)$$

**Примечание 28.4.** Отметим, что в рассматриваемых задачах нелинейной теории пологих оболочек разрешимость основных конечномерных уравнений методов БГР в силу лемм 26.2, 27.12 имеет место с первого приближения,  $N=0$ . Между тем по теореме М. А. Красносельского [60] их разрешимость гарантируется лишь при достаточно больших  $N$ . ■

**28.5.** При граничных условиях (28.5) для приближенного решения метод БГР может использоваться и в форме Х. М. Муштари (§ 27). При этом приближенные решения отыскиваются в форме (27.1), где  $w_n$  строятся на основе (28.7), а  $\omega_n$  на основе (28.12). Коэффициенты  $D_{nk}$  и  $C_{nk}$  находятся соответственно из (27.2), (27.3).

Очевидно, общее число вектор-функций, содержащих степень не более  $N$ , в (28.7), (28.12) будет  $(N+1)^6$ .

**Теорема 28.5.** Пусть выполнены все условия теоремы 28.3. В этом случае для всякого неособого решения  $\mathbf{a}_0$  операторного уравнения (13.34) имеется последовательность приближенных решений  $\mathbf{a}_{(N+1)^6}$  такая, что

$$\|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{(N+1)^6}\|_{H_{51}} \leq m(\mathbf{a}_0) N^{-\beta}, \quad (28.28)$$

где  $\beta$  дается (28.20) с заменой  $\rho$  на  $\rho - 1$ .

Доказательство также базируется на соотношении (28.4), и для его использования необходимо иметь оценки приближения  $\mathbf{a}_0$  базисом  $\mathbf{b}_k(\chi_k, \varphi_k)$ . Тогда оценки даются соотношениями (28.9), (28.14). При выполнении условий теоремы 28.5 имеем (28.21) и, кроме того, как это следует из той же теоремы 20.3 (соотношение (20.15)),

$$\begin{aligned} \omega_0 \in H_{\Omega}^{0,2,(1-1/p)} \quad \text{при } p < 2; \quad \omega_0 \in H_{\Omega}^{0,-0} \quad \text{при } p = 2; \\ \omega_0 \in H_{\Omega}^{0+1,1-2/p} \quad \text{при } p > 2. \end{aligned} \quad (28.29)$$

Из (28.9), (28.14) имеем

$$\left\| \mathbf{a}_0 - \sum_{k=1}^{(N+1)^6} (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_k(\chi_k, \varphi_k))_{H_{51}} \mathbf{b}_k(\chi_k, \varphi_k) \right\|_{H_{51}} \leq m(\mathbf{a}_0) N^{-\beta}. \quad (28.30)$$

Из (28.30) имеем (28.26) с заменой  $\rho$  на  $\rho - 1$ . ■

**Теорема 28.6.** Пусть выполнены все условия теоремы 28.4. В этом случае для всякого неособого решения  $\mathbf{a}_0$  операторного уравнения (13.34) имеется последовательность приближенных решений  $\mathbf{a}_{(N+1)^6}$  такая, что

$$\|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{(N+1)^6}\|_{H_{51}} \leq m(\mathbf{a}_0) N^{-\beta}, \quad (28.31)$$

где  $\beta$  дается (28.25) с заменой  $\rho$  на  $\rho - 1$ .

Доказательство (28.31) приводиться не будет из-за полной аналогичности с (28.28). ■

**28.6.** Базис  $\varphi_k$  можно применить и при приближенном уравнении (17.39) для задачи 91 при условии  $\Gamma_1 = \Gamma$ .

При этом используем формулу П. Ф. Панковича (§ 26). Приближенное решение ищем в виде (26.1), а  $D_{nk}$  определяются решением системы (26.55).

**Теорема 28.7.** Пусть выполнены условия 1—4 § 17 и, кроме того,

$$R^3, C_{*ij}^{\lambda\mu} \cdot \tilde{T}_\alpha^{ij} \in W_{\rho\Omega}^{(\rho)}; \Gamma \in C_\Gamma^{\rho+4}, S \in C_\Omega^{\rho+4}, D_{ikl}^{ijkl} \in C_\Omega^{\rho+2}, C_*^{ijkl} \in C_\Omega^{\rho+2}. \quad (28.32)$$

Пусть, далее, выполнены условия (28.18). В этом случае для каждого неособого решения операторного уравнения (17.39) имеется последовательность  $w_{(N+1)^2}$  решений (26.55) метода БГР такая, что имеет место асимптотическая оценка (28.19), где  $\beta$  дается (28.20).

**Теорема 28.8.** Пусть выполнены условия 1—4 § 17 и, кроме того,

$$R^3, C_{*ij}^{\lambda\mu} \cdot \tilde{T}_\alpha^{ij} \in H_\Omega^{\rho,\lambda}; \Gamma \in H_\Gamma^{\rho+4,\lambda}, \\ S \in H_\Omega^{\rho+4,\lambda}, D_{ikl}^{ijkl} \in H_\Omega^{\rho+2,\lambda}, C_*^{ijkl} \in H_\Omega^{\rho+2,\lambda}.$$

Пусть, далее, выполнено условие (28.24). В этом случае, если  $w_0$  — неособое решение операторного уравнения (17.19), то существует последовательность  $w_{(N+1)^2}$  (26.1) решений (26.55) метода БГР такая, что имеет место асимптотическая оценка (28.19), где  $\beta$  даются (28.25). Кроме того, если  $\Psi_{(N+1)^2}$  определяется по формуле

$$\Psi_{(N+1)^2} = K_{91} w_{(N+1)^2},$$

то также справедливы оценки

$$\|c_0 - c_{(N+1)^2}\|_{H_{91}} \leq m(c_0) N^{-\beta},$$

где  $\beta$  дается формулой (28.25).

**28.7.** Будем решать операторное уравнение (17.40) методом БГР в форме В. З. Власова § 27. Используем для определения  $w_{(N+1)^4}$ ,  $\Psi_{(N+1)^4}$  соотношения (27.47), (27.48). В (27.47)  $\varphi_k$  и  $\theta_k$  выбираются из ортонормированной системы (28.7).

**Теорема 28.9.** Пусть выполнены все условия теоремы 28.7. В этом случае для каждого неособого решения  $w_0$ ,  $\Psi_0$  операторного уравнения (17.40) существует последовательность решений (27.47), (27.48)  $w_{(N+1)^4}$ ,  $\Psi_{(N+1)^4}$  такая, что

$$\|c_0 - c_{(N+1)^4}\|_{H_{91}} \leq m(c_0) N^{-\beta}, \quad (28.33)$$

где  $\beta$  дается формулами (28.20).

**Теорема 28.10.** Пусть выполнены все условия теоремы 28.8. В этом случае для каждого неособого решения (17.40) существует последовательность решений (27.47), (27.48)  $w_{(N+1)^4}$ ,  $\Psi_{(N+1)^4}$ , такая, что

$$\|c_0 - c_{(N+1)^4}\|_{H_{\mathbf{a}_1}} \leq m(c_0) N^{-\beta}, \quad (28.34)$$

где  $\beta$  дается формулой (28.25).

Теоремы 28.7—28.10 доказываются по той же схеме, что и теорема 28.3.

Отметим, что примечания 28.1, 28.2 справедливы и в условиях теорем 28.5—28.10. ■

**28.8.** Существенный интерес представляет оценка погрешности метода БГР в случае, если  $f_0$  есть особое решение уравнений (28.1). Для случая, когда  $G$  есть вполне непрерывный полиномиальный оператор, можно высказать следующую гипотезу: асимптотическая оценка погрешности метода БГР дается формулой

$$\|f_0 - f_n\| \leq (1 + \varepsilon_n) \left\| f_0 - \sum_{k=1}^n (P_k f_0) g_k \right\|^\nu, \quad (28.35)$$

где  $\nu$  — положительное рациональное число.

В некоторых случаях оценка (28.35) строго обосновывается. ■

**28.9.** Важное значение имеют условия, при которых в методе БГР обеспечивается равномерная сходимость в  $\bar{\Omega}$  последовательностей  $w_{in\alpha j}$ ,  $w_{n\alpha i\alpha j}$  [14]. При этом будет также обеспечиваться равномерная сходимость тензора напряжений. Здесь возможны разные подходы. Первый из них — использование оценок В. П. Ильина [48]. Здесь будет описана другая возможность построения приближений с равномерно сходящимся в  $\bar{\Omega}$  тензором напряжений. Рассмотрим для простоты случай анизотропной пластины, когда  $B_{ij} = 0$ ,  $A_{ij} = \delta_{ij}$ . В этом случае основные уравнения краевой задачи 51 примут вид

$$(D_P^{ijkl} w_{i\alpha^k})_{\alpha j} = -\frac{1}{2} (D_P^{ijkl} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l})_{\alpha j} - R^i = f^i \{w\}, \quad i = 1, 2, \quad (28.36)$$

$$(D_n^{ijkl} w_{\alpha^h \alpha^l})_{\alpha^i \alpha^j} = T^{ij} w_{\alpha^i \alpha^j} + R^3 - R^s w_{\alpha^s} = f^3 \{w\}. \quad (28.37)$$

Примем также граничные условия (28.5). Соотношения (28.36), (28.37) эквивалентны формулам

$$w_i(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_{ik}(\mathcal{P}, Q) f^k \{w(Q)\} dQ, \quad (28.38)$$

$$w(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathcal{P}, Q) f^3 \{w(Q)\} dQ, \quad (28.39)$$

где  $\mathcal{G}_{ik}(\mathcal{P}, Q)$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{P}, Q)$  — соответственно матрица Грина и функция Грина для операторов левой части (28.36), (28.37). Способы

построения  $\mathcal{G}_{ij}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  для широкого класса задач даны, например, в [62, 63]. Здесь же детально изучены свойства тензоров Грина.

**Теорема 28.11.** Пусть  $\Gamma \in C_{\Gamma}^6$ ,  $S \in C_{\Omega}^4$ ,  $D_p^{ijkl} \in C_{\Omega}^1$ ,  $D_n^{ijkl} \in C_{\Omega}^2$ . Пусть, далее, характеристические многочлены, соответствующие старшим производным в операторах левой части (28.36), (28.37), не имеют кратных корней в замкнутой области  $\tilde{\Omega}$ . В этом случае имеют место оценки [63]

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_{ik}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})| &\leq M(1 + |\ln r_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}|), \quad |\mathcal{G}_{ik\alpha_p^{1,2}}| \leq \\ &\leq Mr_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}^{-1}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(\alpha_p^1, \alpha_p^2), \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\alpha_q^1, \alpha_q^2), \quad (28.40) \\ |\mathcal{G}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})| &\leq M, \quad |\mathcal{G}_{\alpha_p^{1,2}}| \leq M, \quad |\mathcal{G}_{\alpha_p^{1,2}\alpha_q^{1,2}}| \leq M(1 + |\ln r_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}|). \end{aligned}$$

Требования к  $\Gamma$  в данной теореме могут быть, по-видимому, снижены. Можно лишь считать, что  $\Gamma \in H_{\Gamma}^{4,\lambda}$ . ■

Функция Грина может быть введена и другим способом. Рассмотрим операторное уравнение в  $H_1$  вида

$$(\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \cdot \varphi(\mathcal{Q}))_{H_1} = \varphi(\mathcal{P}), \quad (28.41)$$

в котором  $\varphi(\mathcal{P})$  — произвольная функция из  $H_1$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  — искомая функция, принадлежащая  $H_1$  по  $\mathcal{Q}$  и фиксированная. При фиксированном  $\mathcal{P}$  правая часть (28.41) будет линейным и ограниченным функционалом в  $H_1$ . Действительно, аддитивность очевидна, а ограниченность следует из теоремы 12.3 (соотношение (12.51)). Поэтому существование  $\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  как элемента  $H_1$  по аргументу  $\mathcal{Q}$  следует из теоремы Рисса, при этом, естественно, этот элемент будет зависеть от  $\mathcal{P}$ . Пусть, далее,  $\varphi_k$  — некоторый ортонормированный базис в  $H_1$ . Очевидно, имеем

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(\mathcal{Q}), \quad (28.42)$$

где

$$g_k = (\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \cdot \varphi_k(\mathcal{Q}))_{H_1} = \varphi_k(\mathcal{P}). \quad (28.43)$$

Последний переход в (28.43) был совершен на основе (28.41). Из (28.42), (28.43) имеем

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mathcal{P}) \varphi_k(\mathcal{Q}). \quad (28.44)$$

Рассмотрим теперь операторное уравнение в  $H_1$

$$(w \cdot \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} f^3 \varphi \, d\Omega. \quad (28.45)$$

Здесь  $f^3$  дано и принадлежит какому-либо  $L_{p\Omega}$  при  $p > 1$ ,  $w$  — произвольная функция из  $H_1$ . Очевидно, (28.45) разрешимо. Положим  $\varphi = \varphi_k$ , тогда

$$(w \cdot \varphi_k)_{H_1} = \int_{\Omega} f^3 \varphi_k d\Omega. \quad (28.46)$$

Учтя (28.41), из (28.46) имеем

$$w(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{\infty} (w \cdot \varphi_k)_{H_1} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f^3(Q) \varphi_k(Q) dQ \varphi_k(\mathcal{P}). \quad (28.47)$$

Сравнивая (28.39), (28.47), приходим к выводу, что

$$w(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, Q) f^3(Q) dQ = \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathcal{P}, Q) f^3(Q) dQ \quad (28.48)$$

и, значит,

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, Q) \equiv \mathcal{G}(\mathcal{P}, Q). \quad \blacksquare \quad (28.49)$$

Будем, далее, приближенно решать уравнение (28.39) заменой ядра  $\mathcal{G}(\mathcal{P}, Q)$  на вырожденное ядро

$$\mathcal{G}_n(\mathcal{P}, Q) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\mathcal{P}) \varphi_k(Q), \quad (28.50)$$

т. е. положим

$$w_n(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_n(\mathcal{P}, Q) f^3\{w_n(Q)\} dQ. \quad (28.51)$$

Легко видеть, что при этом в рассматриваемом случае для  $D_{n\Omega}$  мы получаем систему (28.3), так как предполагается, что  $\omega$ ,  $T^i$  определяется через точные решения краевой задачи для (28.36). Иными словами, замена ядра  $\mathcal{G}(\mathcal{P}, Q)$  на вырожденное эквивалентна решению краевой задачи 51 методом БГР в форме П. Ф. Папковича (§ 26).  $\blacksquare$

Введем теперь итерированные приближения по схеме

$$\tilde{w}_n(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathcal{P}, Q) f^3\{w_n(Q)\} dQ, \quad (28.52)$$

и пусть  $w_0$  — такое решение интегро-дифференциального уравнения (28.39), что для него существует подпоследовательность  $w_n$  (мы не изменили ее обозначение), что

$$\|w_0 - w_n\|_{H_1} \rightarrow 0. \quad (28.53)$$

Существование подпоследовательности  $w_n$  гарантируется теоремой 26.1. Тогда из (28.39), (28.52) получаем

$$w_0(\mathcal{P}) - \tilde{w}_n(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathcal{P}, Q) [f^3\{w_0\} - f^3\{w_n\}] dQ \quad (28.54)$$

и из (28.37) имеем

$$w_0(\mathcal{P}) - \tilde{w}_n(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) [T^{ij}(w_0) \nabla_{ij} w_0 - T^{ij}(w_n) \nabla_{ij} w_n + R^*(w_{0\alpha^s} - w_{n\alpha^s})] d\mathcal{Q}. \quad (28.55)$$

**Теорема 28.12.** Пусть выполнены условия:

$$\Gamma \in H_{\Gamma}^{2,\lambda}; \quad R^s, \quad R^s \in H_{\Omega}^{0,\lambda}; \quad S \in H_{\Omega}^{2,\lambda}; \quad D_p \in H_{\Omega}^{2,\lambda}; \quad D_{\Pi} \in H_{\Omega}^{1,\lambda}. \quad (28.56)$$

В этом случае

$$\|w_0 - \tilde{w}_n\|_{C_{\Omega}^2}, \quad \|\varepsilon_{ij}(w_0) - \varepsilon_{ij}(\tilde{w}_n)\|_{C_{\Omega}}, \quad \|\varepsilon_{ij}^1(w_0) - \varepsilon_{ij}^1(\tilde{w}_n)\|_{C_{\Omega}}, \\ \|T^{ij}(w_0) - T^{ij}(\tilde{w}_n)\|_{C_{\Omega}}, \quad \|M^{ij}(w_0) - M^{ij}(w_n)\|_{C_{\Omega}} \rightarrow 0. \quad (28.57)$$

Для доказательства теоремы 28.12 учтем, что из (28.36), (28.53) сразу получаем

$$\|f^j(w_0) - f^j(\tilde{w}_n)\|_{L_{2-0,\Omega}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tilde{w}_n \Rightarrow w_n. \quad (28.58)$$

Далее, из (28.38) получаем

$$w_{i\alpha^k}(w_0) - w_{i\alpha^k}(\tilde{w}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_{i\alpha^k}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) [f^j(w_0) - f^j(w_n)] d\mathcal{Q}. \quad (28.59)$$

В силу теоремы 28.11 правую часть (28.59) можно рассматривать как интеграл типа потенциала [68, 87], вследствие чего заключаем:

$$\|w_{i\alpha^k}(w_0) - w_{i\alpha^k}(\tilde{w}_n)\|_{L_{q\Omega}} \leq m \|f^j(w_0) - f^j(\tilde{w}_n)\|_{L_{2-0,\Omega}}. \quad (28.60)$$

В (28.60)  $q \geq 1$  — любое.

Учтем теперь соотношение (28.54), теорему вложения 12.3 (формулы (12.52)) и формулы (4.26) для  $T^{ij}$ . В результате получаем

$$\|T^{ij}(w_0) - T^{ij}(\tilde{w}_n)\|_{L_{q\Omega}} \rightarrow 0, \quad \forall q \geq 1. \quad (28.61)$$

Но тогда из (28.37) имеем

$$\|f^s(w_0) - f^s(\tilde{w}_n)\|_{L_{q\Omega}} \rightarrow 0, \quad \forall q \geq 1. \quad (28.62)$$

В свою очередь, из (28.54) следует в силу (28.40)

$$\|w_0(\mathcal{P}) - \tilde{w}_n(\mathcal{P})\|_{C_{\Omega}} \rightarrow 0, \quad \|w_{0\alpha^i} - \tilde{w}_{n\alpha^i}\|_{C_{\Omega}} \rightarrow 0, \quad (28.63)$$

$$\|w_{0\alpha^i\alpha^j} - w_{n\alpha^i\alpha^j}\|_{C_{\Omega}} \rightarrow 0. \quad (28.64)$$

Таким образом, теорема 28.12 доказана в отношении последователь-

ностей  $\tilde{w}_n$ ,  $\tilde{w}_{n\alpha i}$ ,  $w_{n\alpha^i\alpha^j}$ . Но тогда из (3.25), (4.24) получаем

$$\|\varepsilon_{ij}(w_0) - \varepsilon_{ij}(\tilde{w}_n)\|_{C_\Omega}, \|M_{ij}(w_0) - M_{ij}(\tilde{w}_n)\|_{C_\Omega} \rightarrow 0. \quad (28.65)$$

Далее, из (28.38) и оценок (28.40)

$$\|w_{i\alpha^j}(w_0) - w_{i\alpha^j}(\tilde{w}_n)\|_{C_\Omega} \rightarrow 0 \quad (28.66)$$

и из (3.30) — (3.32), (4.24) следует

$$\|\varepsilon_{ij}^0(w_0) - \varepsilon_{ij}^0(\tilde{w}_n)\|_{C_\Omega}, \|T_{ij}(w_0) - T_{ij}(\tilde{w}_n)\|_{C_\Omega} \rightarrow 0. \quad (28.67)$$

Теорема 28.12 доказана полностью. ■

**Примечание 28.5.** Существенную роль в доказательстве теоремы 28.12 играли оценки (28.40), справедливые, если характеристические многочлены у операторов старших производных в (28.36), (28.37) не имеют кратных корней. На языке механики это означает, что пластина в области  $\Omega$  не имеет точек изотропии. При их наличии оценки (28.40) изменяются, однако общий результат теоремы 28.12 и ее формулировка не изменятся. Приведем теперь без доказательства более общий результат.

**Теорема 28.13.** Пусть  $\Gamma \in H_\Gamma^{p+4, \lambda}$ ;  $D_i^{ijkl} \in H_\Omega^{p+2, \lambda}$ ;  $D_p^{ijkl} \in H_\Omega^{p+1, \lambda}$ ;  $R^s, R^s \in H_\Omega^{p, \lambda}$  и приближенное решение задачи 51 ищется по методу БГР в форме П. Ф. Папковича, и пусть  $w_0$  — некоторое решение, для которого существует последовательность  $w_n$  приближений такая, что

$$\|w_0 - w_n\|_{H_1} \rightarrow 0. \quad (28.68)$$

Тогда имеют место предельные соотношения

$$\|w_0 - \tilde{w}_n\|_{H^{p+4, \lambda}} \rightarrow 0, \quad \|\omega_0 - \omega(\tilde{w}_n)\|_{H^{p+2, \lambda}} \rightarrow 0. \quad (28.69)$$

Здесь

$$\omega(\tilde{w}_n) = K_{51}(\tilde{w}_n). \quad (28.70)$$

**28.10.** Изложенная здесь схема обоснования метода БГР в задачах нелинейной теории оболочек принадлежит автору [10, 11, 12, 13, 14, 21, 31]. Она допускает непосредственный перенос на другие прямые методы: конечных элементов, конечных разностей, сплайн-аппроксимаций [42, 73, 88, 89, 92, 97]. Здесь важно, чтобы были выполнены два основных условия: 1) аппарат аппроксимации должен позволять приблизить сколь угодно точно в норме соответствующего пространства любой элемент, если неограниченно растет число постоянных аппроксимации; 2) уравнения для определения постоянных аппроксимации должны получаться на основе какого-либо вариационного принципа, например Лагранжа, Алумязя. Именно такой путь получения уравнений для определения постоянных

аппроксимации представляется наиболее адекватным. Этот путь конкретно реализован в [32] для теоретического обоснования схемы.

Применение методов БГР в нелинейной теории оболочек имеет важное преимущество: есть возможность при аппроксимации решения учесть интуитивные представления об особенностях решения, данные математического или экспериментального анализа. По этому поводу см., например, [82]. Историю развития методов БГР читатель может найти в обзоре [31]. Первые их применения в нелинейной теории оболочек принадлежат Д. Ю. Панову и В. И. Феодосьеву [75, 90], первые обоснования в этой области — автору [11, 12]. При практическом использовании методов БГР приходится решать системы нелинейных уравнений с большим числом неизвестных. Обзор методов решения таких систем находим в [74]. Эффективным здесь оказался метод перехода к дифференциальным уравнениям Д. Ф. Давиденко [35—40, 67]. Его теоретическое исследование проведено в работах [50, 95—96]. При машинной реализации метода встает проблема препятствий, которая обсуждалась в § 21. Ряд ценных рекомендаций по практическому решению больших систем нелинейных уравнений имеется в [83—85, 58, 59]. В заключение отметим монографию С. Г. Михлина [70], где введено весьма важное понятие сходного оператора и существенно используется свойство минимальности систем функций.

В настоящее время вновь возрос интерес к этой схеме в связи с сильным развитием возможностей ЭВМ для производства аналитических преобразований. При этом оказалось возможным переложить на ЭВМ весь комплекс работ по составлению систем (26.55), (26.56) и по их решению. При этом высокая эффективность получается как за счет роста числа удержанных элементов аппроксимации  $\chi_k$ ,  $\varphi_k$ , так и за счет их подбора в соответствии с характером напряженно-деформированного состояния оболочки. Более подробно об аналитических выкладках на ЭВМ см. в [34, 41, 57, 81, 86, 100].



## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ. ГЛОБАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ. ЖЕСТКОСТЬ ОБОЛОЧЕК. КЛАССЫ КОРРЕКТНОСТИ

### § 29. Постановка задачи устойчивости в нелинейной теории пологих оболочек. Локальная единственность решений. Условия глобальной единственности

29.1. В статической теории устойчивости упругих систем рассматриваются качественные методы определения числа форм равновесия упругой системы при заданной нагрузке и методы оценки степени реальности каждой из этих форм. В современной теории устойчивости упругих систем определенное развитие получила первая проблема — качественное исследование числа форм равновесия системы. Оценка степени реальности каждой формы равновесия производится, как правило, сравнением уровней потенциальной энергии системы.

При решении проблемы числа форм равновесия системы в основном стараются выяснить пределы изменения параметров нагрузки, при которых данная упругая система имеет единственную форму равновесия. Можно было бы предполагать, что эти пределы определяются первой точкой ветвления решений тех нелинейных уравнений, которые описывают деформацию упругой системы, а сама первая точка ветвления определяется как наименьшее собственное значение соответствующей линеаризованной краевой задачи. На пути отождествления этих трех понятий: точки, определяющей область существования единственной формы равновесия упругой системы; точки ветвления решений уравнений деформированного состояния упругой системы и наименьшего собственного числа линеаризованной задачи — и решались задачи устойчивости еще со времени Эйлера [27]. В некоторых случаях такая концепция получила теоретическое обоснование. Эти вопросы рассматривались в известной работе Ф. С. Ясинского [28] и окончательно решены для шарнирно-опертого стержня в работе [1]. Вместе с этим совершенно очевидно, что отождествление всех трех указанных понятий далеко не всегда правомерно, и этот вопрос должен быть рассмотрен в первую очередь. ■

Полное решение первой проблемы устойчивости — определение числа форм равновесия системы можно представить себе на примере задачи  $tx$  следующим образом [6, 7, 10, 11]. В § 16 были установлены необходимые и достаточные условия на нагрузку и  $a(\omega, w)$

для разрешимости краевой задачи  $tx$  (теоремы 16.5, 16.8, 16.11). В связи с этими условиями целесообразно ввести гильбертово пространство  $H$  нагруженных комплексов  $\{R(R^1, R^2, R^3), M_m, Q, T^r, T^m, \tilde{\omega}, \tilde{w}, \tilde{w}_4\}$  со скалярным произведением

$$(\tilde{H} \cdot \tilde{H})_H = (\omega_n \cdot \omega_n)_{H_t} + (w_n \cdot w_n)_{H_x} + (w_1 \cdot w_1)_{H_x} + (\omega_1 \cdot \omega_2)_{H_t}, \quad (29.1)$$

где  $w, \omega_0$  специальным образом подбираются по  $\tilde{\omega}, \tilde{w}, \tilde{w}_4$ .

Теоремы 16.5, 16.8, 16.11 утверждают существование отображения  $H$  в  $H_{tx}$  (в общем случае неоднозначного) и, наоборот, существование отображения  $H_{tx}$  в  $H$ .

Для полного решения первой задачи проблемы устойчивости необходимо произвести разбиение пространства  $H$  на такие множества  $B_q$  ( $\mathcal{Y}$ -разбиения), на каждом из которых задача  $tx$  будет иметь ровно  $q$  решений. Переход от  $B_q$  к  $B_{q+1}$ , очевидно, проходит через пограничные множества между  $B_q$  и  $B_{q+1}$ . В силу теоремы

Смейла [14] все пограничные между  $B_q$  и  $B_{q+1}$  множества («складки») образуют «тощее» множество. В силу чрезвычайной сложности построения  $B_q$  можно несколько упростить проблему. Предположим, что все внешние усилия, действующие на оболочку, описываются конечным числом параметров, которые обозначим  $Y_1, \dots, Y_n$ . Например, в задаче, рассмотренной в § 24, — одновременное воздействие на шарнирно-

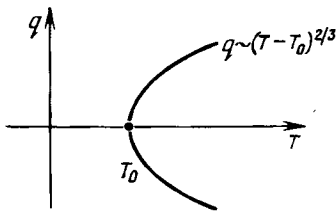


Рис. 29.1

но-опертую круглую пластину поперечной нагрузки и продольного сжатия [5], — имеем:  $Y_1 = q$ ;  $Y_2 = T$ . Предположим теперь, что все  $n$ -мерное пространство параметров  $\mathcal{Y}$  разбито на такие множества, в каждом из которых число решений задачи  $tx$  постоянно. В дальнейшем такое разбиение и будем называть  $\mathcal{Y}$ -разбиением (термин заимствован из теории регулирования). Например, в задаче § 24  $\mathcal{Y}$ -разбиение дается на рис. 29.1 (по крайней мере в окрестности точки  $q = 0$ ;  $T = T_0$ ). Однако и построение  $\mathcal{Y}$ -разбиения также достаточно сложная задача, и ниже мы такие разбиения обсуждаем лишь при  $n = 1$ . ■

Вторая задача — определение наиболее реальной формы равновесия — может быть решена уже на основе более тонкого анализа условий работы оболочки с учетом случайных факторов. При этом потенциальная энергия оболочки выступает уже как весьма частная характеристика степени устойчивости того или иного положения равновесия. В связи с этим в заключение данной главы будет дано построение статистической теории устойчивости оболочек, выполненное автором в середине 50-х годов. Тем не менее мы, имея в виду

уже установившуюся терминологию в статической теории устойчивости упругих систем, будем ниже решение  $\mathbf{a}_0$  и соответственно  $w_0$  задачи  $t\kappa$  называть устойчивым, если ему соответствует строгий (абсолютный или относительный) минимум функционалов  $\mathcal{J}_{t\kappa}(\mathbf{a})$  и соответственно  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)$ . Совершенно аналогично может быть дана общая постановка проблемы устойчивости и в задаче  $9\kappa$ . ■

**29.2.** Прежде всего установим некоторые теоремы о единственности решений задачи  $t\kappa$ .

**Т е о р е м а 29.1** Пусть выполнены условия теоремы 16.5 (соответственно 16.8, 16.11) и пусть нагрузочные члены удовлетворяют условиям

$$\|H\|_H \leq \varepsilon \tag{29.2}$$

при достаточно малом  $\varepsilon$ . В этом случае в пространстве  $H_\kappa$  можно указать такую окрестность нуля

$$\|w\|_{H_\kappa} \leq \delta(\varepsilon), \tag{29.3}$$

где имеется одно решение задачи  $t\kappa$ . При этом  $\delta \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для доказательства вначале установим, что при выполнении (29.2) поле  $w - \mathbf{G}_{\kappa\kappa}w$  будет гомотопно полю  $w$  на сферах достаточно малого радиуса  $r$ . Очевидно, оба поля можно связать деформацией вида  $w - t\mathbf{G}_{\kappa\kappa}w$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , и гомотопность полей будет установлена, если доказать, что

$$\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa}w\|_{H_\kappa} < r < 1 \tag{29.4}$$

на сферах достаточно малого радиуса. Из леммы 14.1 (соотношение (14.2)) следует

$$\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa}w\|_{H_\kappa} \leq \|\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0}\|_{H_\kappa} + \sum_{\mu=1}^3 \|\mathbf{G}_{\kappa\kappa\mu}(w)\|_{H_\kappa} \leq \|\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0}\|_{H_\kappa} + m \sum_{\mu=1}^3 \|w\|_{H_\kappa}^\mu. \tag{29.5}$$

Займемся оценкой  $\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0}\|_{H_\kappa}$ . Из (14.19) имеем

$$\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0}\|_{H_\kappa} \leq \|w^*\|_{H_\kappa} + m 1_{ij} \left( \|T_0^{ij}\|_{L_{2\Omega}} + \|T^{ij}(\mathbf{a}^*)\|_{L_{2\Omega}} \right). \tag{29.6}$$

Из (14.17), (14.16) получаем

$$\|T_0^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \leq m D_p^{ijkl} \|\varepsilon_{kl0}\|_{L_{2\Omega}} \leq \|\mathbf{K}_{t\kappa 0}\|_{H_t}. \tag{29.7}$$

Из (14.5) сразу следует

$$\|\mathbf{K}_{t\kappa 0}\|_{H_t} \leq m \left( \|\omega^*\|_{H_t} + \|w^*\|_{H_\kappa} + \|w^*\|_{H_\kappa}^2 \right) \tag{29.8}$$

и из (29.6) — (29.8) вытекает

$$\|T_0^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \leq m \left( \|\omega^*\|_{H_t} + \|w^*\|_{H_\kappa} + \|w^*\|_{H_\kappa}^2 \right). \tag{29.9}$$

Оценим теперь  $\|T^{ij}(\mathbf{a}^*)\|_{L_2\Omega}$ . Имеем из (4.25) и (3.24)

$$\|T^{ij}(\mathbf{a}^*)\|_{L_2\Omega} \leq 1_{hl} D_p^{ijkl} \|\varepsilon_{ij}(\mathbf{a}^*)\|_{L_2\Omega} \leq m \left( \|\omega^*\|_{H_t} + \|w^*\|_{H_x} + \|w^*\|_{H_x}^2 \right). \quad (29.10)$$

Из (29.5), (29.8) получаем

$$\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0}\|_{H_x} \leq m \left( \|\omega^*\|_{H_t} + \|w^*\|_{H_x} + \|w^*\|_{H_x}^2 \right). \quad (29.11)$$

Наконец, из (29.11), (14.4) имеем

$$\|\mathbf{G}_{\kappa\kappa} w\|_{H_x} \leq m \left( \|\omega^*\|_{H_t} + \|w^*\|_{H_x} + \|w^*\|_{H_x}^2 + \sum_{\mu=1}^3 \|w\|_{H_x}^{\mu} \right). \quad (29.12)$$

Очевидно, из (29.12) следует (29.4) при достаточно малых  $\|\mathbf{a}^*\|_{H_{t\kappa}}$ ,  $\|w\|_{H_x}$ . Таким образом, разрешимость задачи  $t\kappa$  при достаточно малых  $\|\mathbf{a}^*\|_{H_{t\kappa}}$ ,  $\|w\|_{H_x}$  установлена. Покажем теперь, что при достаточно малых  $\varepsilon$  оператор  $[\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(\mathbf{a}^*)]^{-1}$  существует и ограничен. Поскольку по доказанному  $\mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(\mathbf{a}^*)$  — усиленно непрерывный оператор (теорема 14.2), то наше утверждение будет обосновано, если показать, что

$$((w - \mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(\mathbf{a}^*)w) \cdot w)_{H_x} \geq m \|w\|_{H_x}^2. \quad (29.13)$$

Однако легко видеть, что левая часть (29.13) получается из выражения (16.3) для  $\Phi(w, t)$  при  $t=1$  и если в этом выражении учесть лишь члены второго порядка относительно  $w$ . Если  $\mathbf{a}^* = 0$ , то

$$((w - \mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(0)w) \cdot w)_{H_x} = \|\omega\|_{H_t}^2 + \|w\|_{H_x}^2 \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_x}^2. \quad (29.14)$$

Очевидно, неравенство (29.14) сохраняется, если достаточно мала норма  $\|\mathbf{a}^*\|_{H_{t\kappa}}$ , что будет обеспечено неравенством (29.2). Таким образом, устанавливается обратимость  $\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(\mathbf{a}^*)$ . После этих рассуждений возможно основному операторному уравнению (13.39) на основе (14.2) придать вид

$$w = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\kappa\kappa 1}(\mathbf{a}^*)]^{-1} (\mathbf{G}_{\kappa\kappa 0} + \mathbf{G}_{\kappa\kappa 2}(w) + \mathbf{G}_{\kappa\kappa 3}(w)). \quad (29.15)$$

Из (29.15) видно, что в силу структуры (14.20), (14.21) оператор правой части (29.15) при малых  $\|\mathbf{a}^*\|_{H_{t\kappa}}$  действует в некоторой малой сфере с центром в нуле пространства  $H_x$  и будет здесь оператором сближения. Таким образом, при малых  $\|\mathbf{a}^*\|_{H_{t\kappa}}$  в шаре пространства  $H_x$  достаточно малого радиуса не может существовать более одного решения. Существование же одного решения установлено на первом этапе доказательства теоремы 29.1. Теорема 29.1 доказана полностью. ■

Важно отметить, что в условиях теоремы 29.1 единственность решения обеспечивается лишь в некоторой окрестности нуля, и это

не исключает решений с большой нормой. Они легко обнаруживаются при численном анализе задач в очень большом числе случаев. По этому поводу см., например, [2, 3]. Такие решения могут существовать даже при нулевой нагрузке, что будет доказано в § 30. ■

**29.3.** Естественно, возникает вопрос об условиях, гарантирующих однозначную разрешимость задач  $t_{\mathcal{X}}$  во всем пространстве (глобальную единственность), если нагрузочные члены малы. В этом разделе мы докажем теорему о глобальной однозначной разрешимости при некоторых дополнительных условиях на физико-геометрические свойства оболочки. Для этого нам придется получить новую априорную оценку решения. Будем исходить снова из функционала (16.3). Если  $w$  есть решение операторного уравнения (13.39), то очевидно (16.3)

$$\begin{aligned} \Phi(w, 1) = & \|w\|_{H_{\mathcal{X}}}^2 + (w \cdot w)_{H_{\mathcal{X}}} + 2 \int_{\Omega} Q_p d\Omega + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} (w + 2w^*) - \\ & - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - 2\nabla_i w_j^*] d\Omega - 2 (\boldsymbol{\omega}_{\Pi} \cdot \boldsymbol{\omega})_{H_i} + 2 \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_{\tau} + w_{\tau}^*) w_{\tau}^* ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_m + w_m^*) w_m^* ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_i + w_i^*) w_j^* ds \right) = 0. \end{aligned} \quad (29.16)$$

Примем, далее, что имеют место соотношения

$$k_p^{\tau\tau} = k_p^{mm} = k_p^{ij} = 0, \quad (29.17)$$

и тогда из (29.16) следует

$$\begin{aligned} \Phi(w, 1) = & \|w\|_{H_{\mathcal{X}}}^2 + \\ & + 2 \int_{\Omega} Q_p d\Omega + \int_{\Omega} T^{ij} [B_{ij} (w + 2w^*) - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - 2\nabla_i w_j^*] d\Omega - \\ & - 2 (\boldsymbol{\omega}_{\Pi} \cdot \boldsymbol{\omega})_{H_i} + (w \cdot w)_{H_{\mathcal{X}}} = 0. \end{aligned} \quad (29.18)$$

Рассмотрим более подробно второй и третий члены левой части (29.18). Они представляют собой полином второй степени относительно  $T^{ij}$ . Старшие члены этого полинома  $2Q_p$  представляют собой положительно определенную квадратичную форму относительно  $T^{ij}$ . Поэтому весь полином в пространстве  $T^{ij}$  будет иметь минимум, который находится из условия

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT^{ij}} \left( 2 \int_{\Omega} Q_p d\Omega + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) [B_{ij} (w + 2w^*) - \right. \\ \left. - (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - 2\nabla_i w_j^*] d\Omega \right) = 0, \end{aligned} \quad (29.19)$$

откуда

$$2 \frac{\partial Q_p}{\partial T^{ij}} = (w + w^*)_{\alpha i} w_{\alpha j}^* - 2\nabla_i w_j^* - B_{ij}(w + 2w^*) = \varepsilon_{ij}^*. \quad (29.20)$$

Соотношение (29.20) есть линейная система относительно  $T^{ij}$  вида

$$\gamma_{11} = C_{11kl,p} T^{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}^*; \quad \gamma_{12} = C_{12kl,p} T^{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^* \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 1), \quad (29.21)$$

которой можно придать следующую форму:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{**}, \quad \varepsilon_{ii}^{**} = \varepsilon_{ii}^*, \quad \varepsilon_{12}^{**} = 2\varepsilon_{12}^*. \quad (29.22)$$

Введем теперь обозначение

$$\mathfrak{A} = 2Q_p + \int_{\Omega} T^{ij} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)^* \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (29.23)$$

Если подставить в (29.23) соотношение (19.21), то получим

$$\mathfrak{A}_{\min} = -\frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij}^{**} \varepsilon_{kl}^{**} d\Omega. \quad (29.24)$$

Изучим более детально структуру  $\varepsilon_{ij}^{**}$ . Из (29.20) получаем

$$\varepsilon_{ij}^{**} = \varepsilon_{ij1}^{**} + \varepsilon_{ij2}^{**}, \quad (29.25)$$

где

$$\varepsilon_{ij1}^{**} = -B_{ij}w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}^*; \quad \varepsilon_{ij2}^{**} = w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* + 2\nabla_i w_j^* - 2B_{ij}w^*. \quad (29.26)$$

Подставляя (29.24)–(29.25) в (29.23), получим

$$\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}_{\min}^2 + \mathfrak{A}_{\min}^1 + \mathfrak{A}_{\min}^0, \quad (29.27)$$

где  $\mathfrak{A}_{\min}^k$  — однородный функционал относительно  $w$  порядка  $k$ .  
Имеем

$$\mathfrak{A}_{\min}^2 = -\frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij1}^{**} \varepsilon_{kl1}^{**} d\Omega, \quad (29.28)$$

где

$$\mathfrak{A}_{\min}^1 = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij1}^{**} \varepsilon_{kl0}^{**} d\Omega, \quad (29.29)$$

$$\mathfrak{A}_{\min}^0 = -\frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \varepsilon_{ij0}^{**} \varepsilon_{kl0}^{**} d\Omega. \quad (29.30)$$

Оценим (29.28), (29.29). Имеем

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathfrak{E}}_{\min} \leq \frac{1}{8} \int_{\Omega} |D_p^{ijkl}| |w_{\alpha i}^* w_{\alpha j}^* + 2\nabla_i w_j^* - 2B_{ij} w^*| \times \\ \times |w_{\alpha k}^* w_{\alpha l}^* + 2\nabla_k w_l^* - 2B_{kl} w^*| d\Omega. \end{aligned} \quad (29.31)$$

Используя теоремы 12.3 (соотношение (12.48)) и теоремы 11.4 (соотношения (11.63), (11.64)), получаем

$$|\overset{0}{\mathfrak{E}}_{\min}| \leq m \left( \| \mathbf{w}^* \|_{H_t}^2 + \| w^* \|_{H_{\kappa}} + \| w^* \|_{H_{\kappa}}^2 \right). \quad (29.32)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} |\overset{1}{\mathfrak{E}}_{\min}| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |D_p^{ijkl}| | -B_{ij} w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}^* | \times \\ \times | w_{\alpha k}^* w_{\alpha l}^* + 2\nabla_k w_{\alpha l}^* - 2B_{kl} w^* | d\Omega. \end{aligned}$$

И в силу тех же теорем 12.3 и 11.4 имеем

$$|\overset{1}{\mathfrak{E}}_{\min}| \leq m \| w \|_{H_{\kappa}} (1 + \| w \|_{H_{\kappa}}) \left( \| \mathbf{w}^* \|_{H_t} + \| w^* \|_{H_{\kappa}} + \| w^* \|_{H_{\kappa}}^2 \right). \quad (29.33)$$

Подставив неравенства (29.31) в (29.17), получаем

$$\begin{aligned} \| w \|_{H_{\kappa}}^2 + \overset{2}{\mathfrak{E}}_{\min} - |\overset{1}{\mathfrak{E}}_{\min}| - |\overset{0}{\mathfrak{E}}_{\min}| - 2(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_2) - \\ - 2|(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_1)| - 2|(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_0)| - \left| \left( \overset{0}{w} \cdot w \right) \right|_{H_{\kappa}} \leq 0. \end{aligned} \quad (29.34)$$

Здесь нами учтены соотношения (14.11). Имеем, далее,

$$2|(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_1)| \leq m \| \mathbf{w}_{\Pi} \|_{H_t} \| \mathbf{w}_1 \|_{H_t} \leq m \| \mathbf{w}_{\Pi} \|_{H_t} \| w \|_{H_{\kappa}}, \quad (29.35)$$

$$2|(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_0)|_{H_t} \leq m \| \mathbf{w}_{\Pi} \|_{H_t}, \quad \left| \left( \overset{0}{w} \cdot w \right) \right|_{H_{\kappa}} \leq \| \overset{0}{w} \|_{H_{\kappa}} \| w \|_{H_t}. \quad (29.36)$$

Тогда из (29.34) получаем

$$\| w \|_{H_{\kappa}}^2 + \overset{2}{\mathfrak{E}}_{\min} - 2(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_2) \leq A \| w \|_{H_{\kappa}} + B, \quad (29.37)$$

где

$$\begin{aligned} A \leq m \| w \|_{H_{\kappa}} \left[ 1 + \| w^* \|_{H_{\kappa}} \left( \| \mathbf{w}^* \|_{H_t} + \| w^* \|_{H_{\kappa}} + \| w^* \|_{H_{\kappa}}^2 + \| \mathbf{w}_{\Pi} \|_{H_t} + \| \overset{0}{w} \|_{H_{\kappa}} \right) \right], \\ B \leq m \left( \| \mathbf{w}^* \|_{H_t} + \| w^* \|_{H_{\kappa}} + \| w^* \|_{H_{\kappa}}^2 + \| \mathbf{w}_{\Pi} \|_{H_t} \right). \end{aligned} \quad (29.38)$$

Введем параметр  $\mu$ , определяемый соотношением

$$\mu = \max \left( \overset{2}{\mathfrak{E}}_{\min} - 2(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_2)_{H_t} \right) \text{ на сфере } \| w \|_{H_{\kappa}}^2 = 1; \quad (29.39)$$

$\mu$  существует в силу слабой непрерывности  $\overset{0}{\mathfrak{E}}_{\min} - 2(\mathbf{w}_{\Pi} \cdot \mathbf{w}_2)_{H_t}$ .

Тогда из (29.37) получаем

$$\|w\|_{H_\kappa}^2(1 - \mu) \leq A\|w\|_{H_\kappa} + B. \quad (29.40)$$

Пусть теперь выполнено условие

$$\mu < 1. \quad (29.41)$$

Тогда из (29.40) получим

$$\|w\|_{H_\kappa} \leq \frac{A + \sqrt{A^2 + 4(1 - \mu)B}}{2(1 - \mu)}. \quad (29.42)$$

На основании вышеизложенного может быть сформулирована Теорема 29.2. Пусть выполнены условия теоремы 29.1 и неравенство (29.41). В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  в (29.2) задача  $tx$  будет иметь единственное решение во всем  $H_\kappa$ .

Для доказательства учтем, что при выполнении (29.41) все возможные решения заключены в сфере  $H_\kappa$ , определяемой (29.42). Однако при выполнении (29.2) будут малы и  $A$  и  $B$ , что вытекает из (29.38). И, значит, будет иметь место неравенство

$$\|w\|_{H_\kappa} \leq \varepsilon. \quad (29.43)$$

Но при малых  $\varepsilon$  оператор  $G_{\omega_n}(w)$  есть оператор сближения. Таким образом, теорема 29.2 доказана. ■

Рассмотрим частный случай, когда  $\omega_n = 0$ . Тогда

$$\mu = \max \mathfrak{D}_{\min}^2 \text{ на сфере } \|w\|_{H_\kappa}^2 = 1.$$

И при этом

$$\mathfrak{D}_{\min}^2 = -\frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} w^2 d\Omega, \quad (29.44)$$

где  $\tilde{B}_{ii} = B_{ii}$ ,  $\tilde{B}_{12} = 2B_{12}$ . Формула (29.44) показывает, что физико-геометрические свойства оболочки в большой мере определяются инвариантом  $D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}$ . При этом, чем меньше параметры кривизны оболочки  $\tilde{B}_{ij}$ , тем больше проявляется свойство ее жесткости. Более подробно об этом см. § 30.

Таким образом, в силу доказанной теоремы, единственность решений в задаче  $tx$  имеет место при условии (29.43). При его нарушении, как уже говорилось, однозначной разрешимости краевых задач в общем случае не будет, если даже нагрузки по норме (29.1) будут сколь угодно малы. ■

Полученный в теореме 29.2 результат можно интерпретировать в том смысле, что при выполнении (29.43) может быть указана такая малая окрестность нуля гильбертова пространства нагрузок  $H$ , которая принадлежит  $B_1$ .

**29.4.** В данном разделе будут проанализированы краевые задачи  $9\kappa$ . В силу теоремы 19.3 при фиксированном тензоре  $\tilde{T}_{\alpha}^{ij} \in L_{2\Omega}$  каждому решению  $w$ ,  $\Psi$  операторного уравнения (17.20) соответствует единственный комплекс  $[\tilde{T}_{\alpha}^{ij}, R^3, \tilde{M}^m]GH_\kappa$  и граничные



перемещения  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_4$ . Вместе с этим при заданных допустимых комплексах  $[\tilde{T}_q^{ij}, R^3, \tilde{M}^m, \tilde{w}, \tilde{w}_4]$  мы имеем одно или несколько обобщенных решений задачи 9ж.

Для дальнейших рассмотрений введем нагрузочное гильбертово пространство

$$(H_1 \cdot H_2)_H = ([\tilde{T}_q^{ij}, R^3, \tilde{M}^m, \tilde{w}, \tilde{w}_4] \cdot [\tilde{T}_q^{ij}, R^3, \tilde{M}^m, \tilde{w}, \tilde{w}_4]) = \\ = (w_p \cdot w_p)_{H_x} + \int_{\Omega} \tilde{T}_q^{ij} \tilde{T}_{qij} d\Omega + (w_1 \cdot w_2)_{H_x}, \quad (29.45)$$

где  $w_1, w_2$  специальным образом подбираются по  $\tilde{w}, \tilde{w}_4$ .

Очевидно, при полном решении первой задачи проблемы устойчивости необходимо произвести  $U$ -разбиения пространства нагрузок  $H$ . Простейшие свойства  $U$ -разбиений даются теоремами единственности. Мы приведем две из них, аналогичные теоремам 29.1, 29.2. В силу того, что идеи доказательств здесь общие, мы дадим лишь соответствующие формулировки.

**Теорема 29.3.** Пусть выполнены все условия теоремы 19.3 и, кроме того, (29.2). В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  задача 9ж имеет решение в некоторой сфере (29.3) и притом единственное.

Теорема 29.3, однако, не гарантирует отсутствия решений с большими нормами.

Для формулировки условий единственности во всем пространстве  $H_x$  введем число  $\mu$  соотношением

$$\mu = \max_{\Omega} \int_{\Omega} N_{9ж} w^2 d\Omega \quad \text{при} \quad \|w\|_{H_x} = 1; \\ N_{9ж} = C_{pijkl} C^{iq} C^{jr} C^{hs} C^{li} \tilde{B}_{qr} \tilde{B}_{st}. \quad (29.46)$$

Очевидно,  $\mu$  существует в силу слабой непрерывности функционала в правой части (29.46) в пространстве  $H_x$ .

**Теорема 29.4.** Пусть выполнены условия теоремы 29.3 и имеет место неравенство (29.41). В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  в соотношении (29.2) задача 9ж будет иметь единственное решение во всем пространстве  $H_x$  и соответственно в  $H_{9ж}$ . ■

Таким образом, однозначная разрешимость задачи 9ж во всем пространстве  $H_x$  доказана нами лишь при выполнении дополнительного условия (29.41).

Ниже мы приведем пример, когда нарушение (29.41) приведет к неоднозначной разрешимости задачи 9ж.

Полученный в теореме 29.4 результат, как и результат теоремы 29.2, можно интерпретировать в том смысле, что при выполнении (29.41) может быть указана такая малая окрестность нуля гильбертова пространства  $H$ , которая принадлежит  $B_1$ . Здесь  $B_i$  — часть пространства нагрузок  $H$ , которому соответствуют ровно  $i$  решений задачи.

В ряде частных случаев могут быть получены результаты, относящиеся к глобальной единственности. В связи с этим отметим два факта, вытекающие из теорем 29.2, 29.4.

**Теорема 29.5.** В условиях теоремы 29.1 для пластин всегда имеет место глобальная единственность при достаточно малом  $\varepsilon$ .

**Теорема 29.6.** В условиях теоремы 29.3 для пластин всегда имеет место глобальная единственность при достаточно малом  $\varepsilon$ . ■

**29.5.** Существенный интерес представляют теоремы единственности в тех случаях, когда не требуется малость нагрузочных членов. В связи с этим сформулируем некоторый принцип.

**Теорема 29.7.** Пусть выполнены условия теоремы 16.5 (соответственно 16.8, 16.11). Пусть, кроме того, при данной нагрузке в каждой неподвижной точке  $w_0$  оператора  $\mathbf{G}_{\text{жк}}$  имеет место соотношение

$$((w - \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w) \cdot w)_{H_{\text{ж}}} > 0, \quad \text{если } \|w\|_{H_{\text{ж}}} \neq 0. \quad (29.47)$$

В этом случае задача  $t\mathbf{ж}$  имеет единственное решение во всем пространстве  $H_{\text{ж}}$  и соответственно  $H_{t\text{ж}}$ .

Для доказательства теоремы 29.7 покажем, что при выполнении (29.47) индекс любой неподвижной точки  $w_0$  оператора  $\mathbf{G}_{\text{жк}}$  есть  $+1$ . Произведем с этой целью подстановку  $w = w_0 + w_{01}$  и для  $w_{01}$  получаем уравнение

$$w_{01} = \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01} + \mathbf{G}_{\text{жк}2}(w_0, w_{01}) + \mathbf{G}_{\text{жк}3}(w_0, w_{01}), \quad (29.48)$$

где  $\mathbf{G}_{\text{жк}i}(w_0, w_{01})$  — однородные относительно  $w_{01}$  операторы порядка  $\mu$ . Соотношение (29.47) показывает, что  $w_0$  не есть особое решение, ибо в противном случае уравнение

$$w - \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w = 0$$

имело бы не тривиальные решения, на которых левая часть (29.47) обращалась бы в нуль. Но в этом случае из леммы 23.1 вытекает, что  $w_0$  — изолированное решение. Покажем теперь, что поле

$$w_{01} - \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01}$$

на сферах с центром в нуле гомотопно тождественному полю  $w_{01}$ , и значит, его вращение есть  $+1$ . Для установления этого факта свяжем поля  $w_{01}$  и  $w_{01} - \mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01}$  деформацией  $w_{01} - t\mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01}$ . Легко видеть, что ни при каком  $t_0 \in [0, 1]$ ,  $w_{01} \in H_{\text{ж}}$ , невозможно соотношение

$$w_{01} - t_0\mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01} = 0,$$

поскольку из него вытекает

$$t_0 = \frac{\|w_0\|_{H_{\text{ж}}}^2}{(\mathbf{G}_{\text{жк}1}(w_0)w_{01} \cdot w_{01})_{H_{\text{ж}}}},$$

что противоречит (29.47), так как  $t_0 \in [0, 1]$ . Таким образом, гомотопность полей  $w_{01}$  и  $w_{01} - G_{\kappa\kappa 1}(w_0)w_{01}$  установлена, а значит, вращение  $w_{01} - G_{\kappa\kappa 1}(w_0)w_{01}$  есть  $+1$ . Поскольку справедливы неравенства (леммы 23.2, 23.3)

$$\|G_{\kappa\kappa\mu}(w_0, w_{01})\|_{H_\kappa} \leq m \|w_{01}\|_{H_\kappa}^\mu, \quad \mu = 2, 3,$$

то некоторое поле  $w_{01} - G_{\kappa\kappa 1}(w_0)w_{01} - \sum_{\mu=2}^3 G_{\kappa\kappa\mu}(w_0, w_{01})$  гомотопно тождественному полю  $w_{01}$ , и значит, его вращение и индекс неподвижной точки  $w_0$  есть  $+1$ . Но поскольку общий индекс всех неподвижных точек поля  $w - G_{\kappa\kappa}w$  также есть  $+1$ , то этим самым теорема единственности установлена. ■

Аналогичный результат может быть получен и для краевой задачи с функцией усилий. Мы его приведем без доказательств.

**Теорема 29.8.** Пусть в условиях теоремы 19.3 в каждой точке  $w_0$  имеет место неравенство

$$((w_1 - G_{\kappa 1}(w_0)w_1) \cdot w_1) > 0, \text{ если } w_1 \neq 0. \quad (29.49)$$

В этом случае задача  $9\kappa$  имеет единственное решение во всем пространстве  $H_\kappa$  и соответственно  $H_{9\kappa}$ .

Приведем теперь некоторые конкретные результаты. ■

**Теорема 29.9** (Н. Ф. Морозов [16, 17]). Пусть изотропная круглая пластина подвержена действию осесимметричной нормальной нагрузки.

В этом случае при граничных условиях

$$a) \quad w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_\Gamma = \tilde{T}^\tau|_\Gamma = 0, \quad \tilde{T}^m|_\Gamma \geq 0; \quad (29.50)$$

$$б) \quad w|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_\Gamma = w_1|_\Gamma = w_2|_\Gamma = 0; \quad (29.51)$$

$$в) \quad w|_\Gamma = \tilde{M}^m|_\Gamma = \tilde{T}^\tau|_\Gamma = 0, \quad \tilde{T}^m|_\Gamma \geq 0; \quad (29.52)$$

$$г) \quad w|_\Gamma = \tilde{M}^m|_\Gamma = w_1|_\Gamma = w_2|_\Gamma = 0 \quad (29.53)$$

краевая задача равновесия для системы (7.65), (7.77) в классе осесимметричных форм имеет единственное решение при любой нагрузке  $R^3 \in \bar{H}_\kappa$ .

Н. Ф. Морозов установил для граничных условий (29.50), (29.52) соотношение (29.47), а для граничных условий (29.51), (29.53) — соотношение (29.49), после чего теорема 29.9 была им выведена на основе теоремы Гильдербрандта — Грейвса. После установления теорем 16.4, 16.7, 16.10 о том, что вращение векторного поля  $w - G_{\kappa\kappa}w$  на сферах большого радиуса есть  $+1$ , и аналогичной теоремы 19.2 для поля  $w - G_\kappa w$  теорема 29.9 непосредственно вытекает из теорем 29.7, 29.8. Однако необходимо отметить, что само установление неравенств (29.47), (29.49), произведенное впервые Н. Ф. Морозовым, представляет большой интерес. Отметим также,

что у Н. Ф. Морозова [16, 17] требуется нагрузка  $R^3 \in L_{2\alpha}$ , между тем наши рассмотрения значительно расширяют условия на  $R^3$  (включаются разрывы типа  $\delta$ -функции).

В дальнейшем более простое доказательство теорем единственности 29.9 для осесимметричных задач было дано Л. С. Срубщиком \*).

Теорема 29.9 полностью решает проблемы построения  $B$ -множеств в рассматриваемых случаях. Именно, все пространство  $\bar{H}_\kappa$ , которому принадлежит  $R^3$ , относится к  $B_1$ . При этом, конечно, имеются в виду осесимметричные решения. В классе решений, не имеющих осевой симметрии, единственность может нарушаться. По этому поводу см. Chev L. C., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates (Quart. of Appl. Math.—1973, April.—p. 91—95), а также работу Н. В. Валишвили, Д. Ш. Глорхелидзе, А. К. Твалчрелидзе «Об устойчивости оболочек вращения при конечных перемещениях» (Тр. XIII Всесоюзной конф. по теории пластин и оболочек, ч. 1, Таллин.—1983.—С. 151—156), где приведено исследование этого вопроса, правда, численное.

### § 30. Физическая жесткость оболочек. Связь с геометрической жесткостью срединной поверхности

30.1. Результаты § 29 (теоремы 29.2, 29.4) дают основание для введения класса оболочек, которые естественно назвать жесткими.

О п р е д е л е н и е 30.1. Будем называть оболочку *физически жесткой* (в дальнейшем просто *жесткой*), если она при достаточно малых нагрузках (в соотношении (29.2)  $\varepsilon$  должно быть достаточно мало) имеет единственную форму равновесия во всем пространстве  $H_\kappa$ .

Естественно, эта форма равновесия будет иметь соответственно малую норму. Напротив, если оболочка нежесткая, то она при малых нагрузочных членах должна иметь решения с конечной немалой нормой. Более строго, оболочка не является жесткой, если при сколь угодно малом  $\varepsilon$  (включая и нуль) она имеет решения, для которых

$$\|w\|_{H_\kappa} \geq m > 0, \quad (30.1)$$

где  $m$  не зависит от  $\varepsilon$ . Очевидно, нежесткая оболочка при нулевых внешних нагрузках имеет напряженную нетривиальную форму равновесия, поддерживаемую лишь внутренними силами упругости.

Физическая жесткость оболочки есть важное ее свойство. Очевидно, в различных практических случаях применения оболочек важна жесткость или нежесткость оболочек. Так, например, для строительных оболочек жесткость является непременным условием их

\* ) Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины // Сибирск. мат. журнал.— 1963.— Т. 4, № 3.— С. 657—672.

работоспособности. Хлопающие предохранительные мембраны, наоборот, должны быть нежесткими. В каждом конкретном случае вопрос о жесткости оболочки может быть решен на основе численного анализа путем построения кривых нагружения — «нагрузка — прогиб». Многочисленные примеры построения таких характеристик можно найти в [2, 3]. ■

Здесь мы приведем некоторые достаточные признаки жесткости оболочек, основанные на (29.41). Прежде всего рассмотрим случай задачи *тх*. Условие жесткости (29.41) примет вид

$$\mu < 1, \text{ где } \mu = \max \frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} w^2 d\Omega, \|w\|_{H_x}^2 = 1. \quad (30.2)$$

Очевидно,  $\mu$  можно определить как максимальное значение этого параметра, при котором задача на собственное значение

$$\mu (w \cdot \varphi)_{H_x} = \frac{1}{8} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} w \varphi d\Omega \quad (\varphi \in H_x \text{ произвольна}), \quad (30.3)$$

имеет нетривиальное решение.

Соотношение (30.3) можно представить в дифференциальной форме

$$\mu \nabla_{ij} D D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w = \frac{1}{8} D_p^{ijkl} D \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} w, \quad (30.4)$$

$$w|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 0, \quad (30.5)$$

$$\frac{dw}{dm} \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_3} = 0, \quad (30.6)$$

$$(D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w m_i m_j + k_n^{44} w_4) \Big|_{\Gamma_2 + \Gamma_4} = 0, \quad (30.7)$$

$$\{D^{-1} (DD_n^{ijkl} \nabla_{kl} w)_s \tau_i m_j + D^{-1} (DD_n^{ijkl} \nabla_{kl} w)_m m_i m_j + (D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w m_i \tau_j)_s + D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w G_{ij}^k m_k + k^{43} w\} \Big|_{\Gamma_3 + \Gamma_4} = 0. \quad (30.8)$$

Если исходить из краевой задачи *9х*, то  $\mu$  определяется как максимальное значение этого параметра, при котором задача на собственное значение

$$\mu (w, \varphi)_{H_x} = \frac{1}{8} \int_{\Omega} C_{pijkl} C^{it} C^{jq} C^{kr} C^{ls} \tilde{B}_{iq} \tilde{B}_{rs} w \varphi d\Omega, \quad \varphi \in H_x, \quad (30.9)$$

имеет нетривиальное решение. В дифференциальной форме краевая задача (30.9) примет вид

$$\mu \nabla_{ij} D D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w = \frac{1}{8} C_{pijkl} C^{it} C^{jq} C^{kr} C^{ls} \tilde{B}_{iq} \tilde{B}_{rs} w D,$$

$$w|_{\Gamma=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial m} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (D_n^{ijkl} \nabla_{kl} w m_i m_j + k_n^{44} w_4) \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad \blacksquare \quad (30.10)$$

**30.2.** Чтобы физически прояснить представление о жесткой оболочке, рассмотрим случай изотропной однородной оболочки в условиях задачи *тж* [8, 9]. Для изотропной однородной оболочки соотношения (30.4) примут вид

$$\mu D_{\text{пл}} \nabla^4 w = \frac{1}{8} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} w, \quad D_{\text{пл}} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (30.11)$$

При этом также предполагается, что оболочка допускает введение евклидовой системы координат, т. е. что она или развертывающаяся, или существенно полая. В этом случае

$$D_{p1} = D_p^{1111} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} = D_p^{2222}, \quad D_p^{1112} = D_p^{2212} = 0, \quad (30.12)$$

$$D_p^{1122} = \frac{2Eh\nu}{1-\nu^2}, \quad 2D_p^{1212} = \frac{2Eh}{1+\nu} = D_{p2},$$

$$\tilde{B}_{11} = \frac{1}{R_1}, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{1}{R_2}, \quad \tilde{B}_{12} = \frac{2}{R_{12}}, \quad (30.13)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl} = \frac{1}{8} \left( D_p^{1111} \frac{1}{R_1^2} + D_p^{2222} \frac{1}{R_2^2} + 2D_p^{1122} \frac{1}{R_1 R_2} + \right. \\ \left. + 4D_p^{1212} \frac{1}{R_{12}^2} \right) = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + 2\nu \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{2}{R_{12}^2} (1-\nu) \right). \end{aligned} \quad (30.14)$$

Подставив (30.12)–(30.14) в (30.11), получаем

$$\begin{aligned} \mu \nabla^4 w = \frac{3}{4h^2} (2\mathcal{H}^2 - (1-\nu)K) w, \quad 2\mathcal{H} = \\ = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_{12}^2}. \end{aligned} \quad (30.15)$$

Из (30.15) сразу следует, что уменьшение толщины оболочки  $2h$  при неизменных прочих данных влечет за собой нарушение условия жесткости и предрасполагает оболочку к нежесткости. ■

Рассмотрим шарнирно опертую панель двойкой кривизны, длина которой есть  $a$ , ширина  $b$  (рис. 30.1). В этом случае для (30.15) имеем граничные условия

$$\begin{aligned} w = w_{\alpha^1 \alpha^1} = 0, \quad \text{если } \alpha^1 = 0, \quad a; \\ w = w_{\alpha^2 \alpha^2} = 0, \quad \text{если } \alpha^2 = 0, \quad b, \end{aligned} \quad (30.16)$$

и тогда, как легко видеть, условие (29.43) принимает вид

$$\pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 > \frac{3}{4h^2} (2\mathcal{H}^2 - (1-\nu)K). \quad (30.17)$$

Рассмотрим более детально случай цилиндрической круговой панели, длина которой  $a$ , угол раствора  $\theta$ , радиус кривизны  $R$ . В этом случае условие (30.17) принимает вид

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{\theta^2} > \frac{0,0612}{h_1}, \quad a_1 = \frac{a}{R}, \quad h_1 = \frac{h}{R}, \quad \theta = \frac{b}{R}. \quad (30.18)$$

На рис. 30.2 изображена область жесткости оболочки (30.18). Сразу видно, что увеличение какого-либо из параметров  $a_1$ ,  $\theta$  влечет нарушение условия жесткости. Однако для каждого из этих

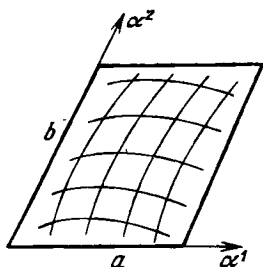


Рис. 30.1

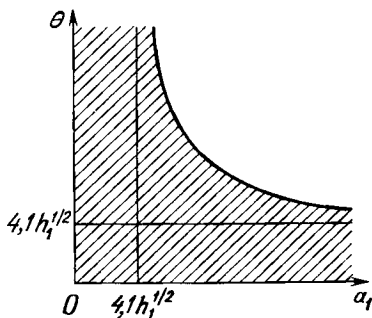


Рис. 30.2

параметров существует такое критическое значение  $a_{1\text{кр}}$ ,  $\theta_{\text{кр}}$ , что если  $a_1 < a_{1\text{кр}}$  или  $\theta_1 < \theta_{\text{кр}}$ , то увеличение  $a_1$  или  $\theta$  до бесконечности уже не может сделать оболочку нежесткой. Из (30.18)

$$\theta_{\text{кр}} = a_{1\text{кр}} \approx 4,01h_1^{1/2}. \quad (30.19)$$

Таким образом, если  $h_1 \sim 10^{-2}$ , то  $\theta_{\text{кр}}$ ,  $a_{1\text{кр}} \sim 0,4$ . Для замкнутой оболочки

$$a_1 < 4,01h_1^{1/2}. \quad (30.20)$$

Из (30.20) следует, что для достаточно длинной замкнутой оболочки условие (30.20) нарушается, и это говорит в пользу того мнения, что замкнутая цилиндрическая оболочка является нежесткой. Этот вопрос требует строгого анализа. ■

Рассмотрим случай сферической прямоугольной в плане шарнирно-опертой оболочки. Тогда (30.17) принимает вид

$$\pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 > \frac{3}{4h^2R^2} (1 + \nu), \quad (30.21)$$

или, в безразмерной форме ( $\nu = 1/3$ ),

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{\theta^2} > \frac{0,0867}{h_1^{1/2}}. \quad (30.22)$$

Сравнивая (30.18) и (30.22), заключаем, что область жесткости

сферической панели больше, чем область жесткости цилиндрической (рис. 30.3). ■

Рассмотрим случай жестко заделанной прямоугольной в плане оболочки, что соответствует условиям

$$w = w_{\alpha^1} = 0; \quad \alpha^1 = 0, a; \quad w = w_{\alpha^2} = 0, \quad \alpha^2 = 0, b. \quad (30.23)$$

В этом случае наибольшее собственное число краевой задачи (30.15)

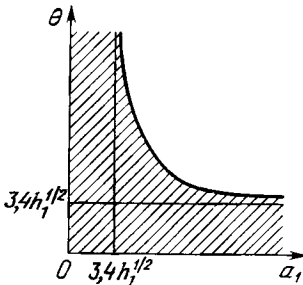


Рис. 30.3

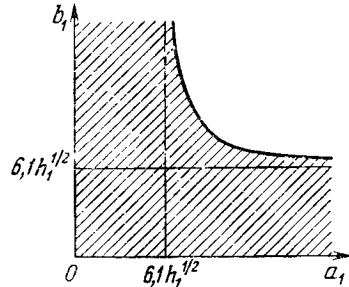


Рис. 30.4

можно приближенно найти вариационным методом, и условие (29.43)

$$520 \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{3} \frac{1}{a^2 b^2} \right) > \frac{3}{4h^2} (2\mathcal{K}^2 - (1 - \nu) K). \quad (30.24)$$

Вначале изучим случай цилиндрической круговой оболочки. Условие (30.24) примет вид ( $\nu = 1/3$ )

$$\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{b_1^4} + \frac{2}{3} \frac{1}{a_1^2 b_1^2} > \frac{1}{1387h_1^2}. \quad (30.25)$$

Сравнивая (30.18) и (30.25), где надо положить  $b_1 = \theta$ , легко замечаем, что переход к граничным условиям (30.23) значительно увеличивает жесткость оболочки. Для замкнутой жестко заделанной оболочки условие жесткости имеет вид

$$a_1 < h_1^{1/2} \cdot 6,103. \quad (30.26)$$

И в случае жестко заделанной оболочки существуют критические значения  $a_{1кр}$ ,  $b_{1кр}$

$$a_{1кр}, b_{1кр} = h_1^{1/2} \cdot 6,103. \quad (30.27)$$

Если  $a_1$  или  $b_1$  меньше критического, что дальнейшее увеличение другого параметра не может привести к нежесткости оболочки. Условие жесткости (30.25) проиллюстрировано на рис. 30.4. ■

Рассмотрим жестко закрепленную сферическую оболочку с прямоугольным контуром опирания. Условие жесткости из (30.15)



получаем в следующем виде:

$$\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{b_1^4} + \frac{2}{3a_1^2 b_1^2} > \frac{1+\nu}{693,3h_1^2}. \quad (30.28)$$

Сравнивая (30.24) и (30.28), замечаем повышение жесткости при переходе от цилиндрической панели к сферической. ■

Рассмотрим теперь сферическую оболочку, опирающуюся на круговой контур радиуса  $a$ . Будем вначале предполагать ее жестко заделанной (рис. 30.5). Условие жесткости принимает здесь вид

$$\frac{a^2}{hR} < 11,9 \sqrt{1+\nu}, \quad a_1 < 3,45h_1^{1/2} \sqrt{1+\nu} \quad (30.29)$$

(рис. 30.6). Поскольку  $a^2/(2R) = H$ , где  $H$  — высота купола, то первое из соотношений (30.29) принимает вид ( $\nu = 1/3$ )

$$H/h < 5,95. \quad (30.30)$$

Таким образом, жесткими будут оболочки невысокого подъема. В случае сферической оболочки, опирающейся на круглый контур



Рис. 30.5

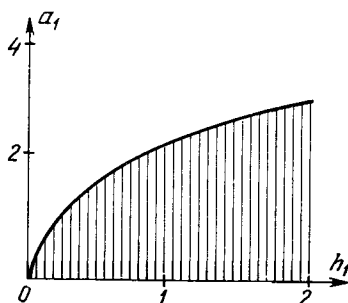


Рис. 30.6

радиуса и имеющей шарнирную опору, получим условие жесткости в виде

$$\frac{a^2}{hR} < 5,02 \quad (30.31)$$

и соответственно

$$\frac{H}{h} < 2,01. \quad \blacksquare \quad (30.32)$$

**30.3.** Рассмотрим цилиндрическую круговую оболочку, жестко соединенную двумя упругими круглыми днищами. Для этой конструкции составлено условие жесткости, при этом соответствующие собственные числа определялись вариационным методом, и поэтому условие носит приближенный вид:

$$\frac{a_1^2 + 2,05a_1 + 0,84}{0,254a_1^2 + 1,106a_1 + 0,337} > \frac{a_1^4}{h_1^2} 0,234, \quad a_1 = \frac{a}{R}, \quad h_1 = \frac{h}{R}. \quad \blacksquare \quad (30.33)$$

**30.4.** Исходя из (30.2), (30.3), (30.9), можно сформулировать некоторые общие положения о физической жесткости оболочек.

**Теорема 30.1.** Пусть выполнены условия 2—6 § 13. В этом случае пластина ( $B_{ij} \equiv 0$ ) является физически жесткой оболочкой для всех задач  $тх$ .

Доказательство немедленно следует из определения  $\mu$  (30.2), (30.3), которое в этом случае есть нуль, и соотношение (30.2) автоматически выполнено.

**Теорема 30.2.** Пусть выполнены условия 2—5 § 17. В этом случае пластина ( $B_{ij} \equiv 0$ ) является физически жесткой оболочкой для задач  $9х$ .

Доказательство немедленно следует из определения  $\mu$  (30.9), которое в этом случае есть нуль, и соотношение (30.9) также выполняется автоматически. ■

**Теорема 30.3.** Пусть выполнены условия теорем 30.1, 30.2. В этом случае наложение дополнительных связей на  $w$  не может нарушить жесткости оболочек, если она имела место до наложения дополнительных связей и выполнялись условия жесткости (30.2) или с использованием (30.9).

Теорема вытекает из принципа Куранта [15]. ■

**30.5.** Известно важное чисто геометрическое свойство поверхностей — однозначная определенность, см., например, [20]. Его можно рассматривать и как некоторую физическую характеристику поверхности. Задачу об однозначной определенности поверхности при заданных условиях закрепления можно трактовать как задачу о числе форм равновесия двумерного континуума, имеющего нулевую жесткость на изгиб и бесконечно большую жесткость на растяжение. При однозначной определенности поверхности число форм равновесия есть 1. Можно расширить постановку задачи, допустив, что континуум имеет нулевую жесткость на изгиб и конечную жесткость на растяжение и энергия, накопленная в континууме, пропорциональна увеличению ее площади. Мы приходим, таким образом, к задаче Плато [18]. В этом случае вместо задачи об однозначной определенности мы уже здесь интересуемся числом решений задачи Плато. Рассмотренное здесь свойство жесткости можно трактовать как развитие того же геометрического понятия однозначной определенности поверхности.

Поскольку анализ однозначной определенности поверхности представляет значительные математические трудности, то введено чисто геометрическое понятие жесткости (см., например, [4, 13, 19]).

Именно, жесткими называют поверхности, для которых линеаризованные уравнения изгиба допускают лишь тривиальные решения, соответствующие малым движениям поверхности как твердого тела.

Естественно сравнить понятия геометрической и физической жесткости. Бесконечно малые изгибания описываются уравнением в частных производных второго порядка. В связи с этим на краю

обычно ставится одно граничное условие. Так, в известной теореме Либмана [4, 12, 19] предполагается, что края усеченной сферы скользят по плоскости, т. е. предполагается, что перемещения точек граничной окружности направлены по меридиану. Введенное же представление о физической жесткости оболочки чувствительно к четырем геометрическим факторам на краю: трем перемещениям и углу поворота. Если говорить о результатах, то напрашивается сравнение с упомянутой теоремой Либмана. По этой теореме всякий сферический сегмент, меньший полусферы, является жестким. Физическая жесткость сегмента, как мы выяснили в данном параграфе, имеет место, если подъем сегмента мал. При этом предельная высота сегмента, когда еще имеет место жесткость, сильно зависит от граничных условий. Она также зависит от упругих свойств оболочки через постоянную  $\nu$ .

Геометрические соображения в проблеме устойчивости тонких оболочек развил и широко использовал А. В. Погорелов [21]. Аналитические методы такого предельного перехода построили В. И. Юдович и Л. С. Срубщик [22]. ■

**30.6.** В пункте 30.2 нами получены конкретные условия, обеспечивающие жесткость оболочек. Так, например, соотношение (30.32) говорит о том, что жесткость шарнирно-опертого сферического купола обеспечена, если его высота  $H$  достаточно мала. Естественно, возникает вопрос о том, какие последствия будет иметь нарушение условия (30.32). Для его разъяснения рассмотрим изотропную пологую однородную эллиптическую оболочку, срединная поверхность  $S$  которой дается соотношением

$$\rho = \alpha^1 \mathbf{i}_1 + \alpha^2 \mathbf{i}_2 + (a - b(\alpha^1)^2 - c(\alpha^2)^2) \mathbf{i}_3, \quad a, b, c > 0. \quad (30.34)$$

Пусть, далее, на ее граничном контуре  $\Gamma$ , определяемом уравнением

$$(b(\alpha^1)^2 + c(\alpha^2)^2) = a, \quad (30.35)$$

оболочка шарнирно оперта, тангенциальные усилия отсутствуют.

**Теорема 30.4.** При сформулированных условиях при достаточно малой толщине  $h$  оболочка при отсутствии нагрузки наряду с тривиальной формой  $w \equiv 0$  будет иметь форму равновесия  $w(\alpha^1, \alpha^2)$ , близкую к симметрично отраженной,

$$\rho = \alpha^1 \mathbf{i}_1 + \alpha^2 \mathbf{i}_2 - (a - b(\alpha^1)^2 - c(\alpha^2)^2) \mathbf{i}_3, \quad (30.36)$$

причем

$$\|w\|_{H_1} \leq m \cdot h.$$

Иными словами, оболочка будет нежесткой.

Эта теорема принадлежит Л. С. Срубщику [25]. См. также [23, 24]. Доказательство теоремы базируется на так называемом асимптотическом методе интегрирования нелинейных уравнений теории

пологих оболочек [22]. С его помощью дается построение приближенного решения, основу которого составляет симметрично отраженная форма оболочки, а затем используется известная теорема Л. В. Канторовича [13].

### § 31. Корректность задач нелинейной теории пологих оболочек, ее соотношение с физической устойчивостью

**31.1.** Для постановки проблемы корректности введем некоторый класс  $O$  оболочек таких, что для каждой оболочки  $o$  класса  $O$  параметризация  $\alpha^1, \alpha^2$  задана в области  $\Omega$ , одной и той же для всех оболочек класса  $O$ , и кроме того, разбиение контура  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7 + \Gamma_8$  — одно и то же для всех  $o$  из  $O$ . Каждая оболочка  $o$  из класса  $O$  имеет комплекс характеристик, которые определяют ее в целом. Для задач  $tx$  это прежде всего нагрузочные комплексы  $H$ , введенные в § 29 и представляющие собою пространства Гильберта со скалярным произведением (29.1). Для полной характеристики оболочки к ним необходимо добавить срединную поверхность  $S$ , упруго-геометрические характеристики  $D_p^{ijkl}, D_n^{ijkl}$ , а также комплексы характеристик упругих опор  $k_p^{\tau\tau}, k_p^{mm}, k_p^{ij}, k_n^{33}, k_n^{44}, k_n$ .

Как и ранее, предполагается, что  $S \in C_{\Omega}^2, D_p^{ijkl}, D_n^{ijkl}$  кусочно-непрерывны в замкнутых областях своих заданий. Введем теперь на классе  $O$  метрику

$$\begin{aligned} \rho(o_1, o_2) = & \|\Delta\rho\|_{C_{\Omega}^2} + \|\Delta D_p^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl} + \|\Delta D_n^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl} + \\ & + \|\Delta k_p^{\tau\tau}\|_{C_{\Gamma_6}} + \|\Delta k_p^{mm}\|_{C_{\Gamma_7}} + \|\Delta k_p^{ij}\|_{C_{\Gamma_8}} 1_{ij} + \|\Delta k_n^{44}\|_{C_{\Gamma_2}} + \\ & + \|\Delta k_n^{33}\|_{C_{\Gamma_3}} + \|\Delta k_n^{ij}\|_{C_{\Gamma_4}} 1_{ij} + \|\Delta H\|_H. \end{aligned} \quad (31.1)$$

Здесь

$$\Delta\rho(\alpha^1, \alpha^2) = \rho^2(\alpha^1, \alpha^2) - \rho^1(\alpha^1, \alpha^2), \quad \|\Delta H\|_H \quad \text{см. (29.45),}$$

$$\Delta D_{p,n}^{ijkl} = D_{p,n}^2{}^{ijkl} - D_{p,n}^1{}^{ijkl}, \quad \Delta k_p^{\tau\tau} = k_p^2{}^{\tau\tau} - k_p^1{}^{\tau\tau},$$

$$\Delta k_p^{mm} = k_p^2{}^{mm} - k_p^1{}^{mm}, \quad \Delta k_p^{ij} = k_p^2{}^{ij} - k_p^1{}^{ij}; \quad i = 1, 2;$$

$$\Delta k_n^{33} = k_n^2{}^{33} - k_n^1{}^{33}, \quad \Delta k_n^{44} = k_n^2{}^{44} - k_n^1{}^{44},$$

$$\Delta k_n^{ij} = k_n^2{}^{ij} - k_n^1{}^{ij}; \quad i, j = 3, 4. \quad (31.2)$$

Метрика (31.1) превращает формально  $O$  в некоторое метрическое пространство. Как видно из условий 1—8 теоремы разрешимости задач  $tx$ , были нами доказаны в предположении, что оболочка принадлежит  $O$ . Поэтому естественно рассматривать проблему корректности в классе оболочек  $O$ . ■

**31.2. Лемма 31.1.** Пусть оболочки  $o_1, o_2$  таковы, что

$$\|\Delta\rho\|_{C_\Omega^2} \leq \varepsilon. \quad (31.3)$$

В этом случае при достаточно малых  $\varepsilon$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\|\Delta A_{ij}\|_{C_\Omega^1}, \|\Delta A^{ij}\|_{C_\Omega^1}, \|\Delta B_{ij}\|_{C_\Omega}, \|\Delta B^{ij}\|_{C_\Omega}, \\ &\|\Delta G_{ij}^h\|_{C_\Omega} \leq m\varepsilon, \quad \frac{1}{D}(1 - m\varepsilon) \leq \frac{1}{D} \leq \frac{1}{D}(1 + m\varepsilon). \end{aligned} \quad (31.4)$$

Здесь  $m$  фиксирована при заданной поверхности  $S_1, \rho(\alpha^1, \alpha^2)$ .

Лемма 31.1 легко получается из соответствующих соотношений (1.2), (1.3), (1.5), (1.46), определяющих характеристики (31.4).

Пусть далее,  $\overset{1}{H}_t, \overset{1}{H}_x, \overset{1}{H}_{tx}$  — пространства, построенные для  $o_1$ , а  $\overset{2}{H}_t, \overset{2}{H}_x, \overset{2}{H}_{tx}$  — пространства, построенные для  $o_2$ . Легко видеть, что пространства  $\overset{1}{H}_t$  и  $\overset{2}{H}_t$  эквивалентны, ибо каждое из них в силу теоремы 11.3 эквивалентно  $\overset{0}{W}_{2t\Omega}^{(1)}$ . Поэтому каждую вектор-функцию  $\omega \in \overset{1}{H}_t$  можно рассматривать как элемент  $\overset{2}{H}_t$  и наоборот. Совершенно аналогично, пространства  $\overset{1}{H}_x$  и  $\overset{2}{H}_x$  эквивалентны, ибо каждое из них в силу теоремы 12.2 эквивалентно  $\overset{0}{W}_{2x\Omega}^2$ . Поэтому каждую функцию  $w \in \overset{1}{H}_x$  можно рассматривать как элемент  $\overset{2}{H}_x$  и наоборот. В силу вышесказанного каждый элемент  $a(\omega, w) \in \overset{1}{H}_{tx}$  принадлежит и  $\overset{2}{H}_{tx}$ , и наоборот.

**Лемма 31.2.** Пусть для  $o_1$  продольные связи существенно упругие (§ 11) и выполнено (31.3) и, кроме того,

$$\|\Delta D_p^{ijkl}\|_{C_\Omega} 1_{ijkl}, \|\Delta k_p^{\tau\tau}\|_{\Gamma_6}, \|\Delta k_p^{mm}\|_{\Gamma_7}, \|\Delta k_p^{ij}\|_{\Gamma_8} 1_{ij} \leq \varepsilon. \quad (31.5)$$

В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  имеют место соотношения

$$(\omega \cdot \chi)_{\overset{1}{H}_t} - m\varepsilon \|\omega\|_{\overset{1}{H}_t} \|\chi\|_{\overset{1}{H}_t} \leq (\omega \cdot \chi)_{\overset{2}{H}_t} \leq (\omega \cdot \chi)_{\overset{1}{H}_t} + m\varepsilon \|\omega\|_{\overset{1}{H}_t} \|\chi\|_{\overset{1}{H}_t}. \quad (31.6)$$

Для доказательства учтем, что если для  $o_1$  связи были существенно упругими, то они таковыми остаются и для  $o_2$ , если  $\varepsilon$  достаточно мало. Далее, из соотношения (11.4), определяющего скалярное произведение в  $H_t$ , имеем

$$\begin{aligned} (\omega \cdot \chi)_{\overset{2}{H}_t} &= (\omega \cdot \chi)_{\overset{1}{H}_t} + \int_{\Omega} \Delta D_p^{ijkl} \overset{\sim}{\gamma}_{ij}(\omega) \overset{\sim}{\gamma}_{kl}(\chi) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_6} \Delta k_p^{\tau\tau} w_\tau \varphi_\tau ds + \int_{\Gamma_7} \Delta k_p^{mm} w_m \varphi_m ds + \int_{\Gamma_8} \Delta k_p^{ij} \varphi_i w_j ds. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Далее, в силу того, что  $\tilde{\omega}^0_{ij} = \nabla_i w_j$ , учтя теорему 11.4 (соотношения (11.63), (11.64)), в которых  $d \sim \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$ , и (30.5), имеем

$$\left| \int_{\Omega} \Delta D_p^{ijkl} \tilde{\gamma}_{ij}^0(\omega) \tilde{\gamma}_{kl}^0(\chi) d\Omega + \int_{\Gamma_6} \Delta k_p^{\tau\tau} w_{\tau} \varphi_{\tau} ds + \int_{\Gamma_7} \Delta k_p^{mm} w_m \varphi_m ds + \int_{\Gamma_8} \Delta k_p^{ij} w_i \varphi_j ds \right| \leq \\ \leq \varepsilon (\| \tilde{\gamma}_{ij}^0(\omega) \|_{L_2\Omega} \| \tilde{\gamma}_{kl}^0(\chi) \|_{L_2\Omega} 1^{ijkl} + \| w_{\tau} \|_{L_2\Gamma_6} \| \varphi_{\tau} \|_{L_2\Gamma_6} + \| w_m \|_{L_2\Gamma_7} \| \varphi_m \|_{L_2\Gamma_7} + \\ + \| w_j \|_{L_2\Gamma_8} \| \varphi_j \|_{L_2\Gamma_8} 1^{ij}) \leq m\varepsilon \| \omega \|_{H_t} \| \chi \|_{H_t}. \quad (31.8)$$

Из (31.8) при малых  $\varepsilon$  получаем (31.6). Напомним, что мы условились обозначать одной и той же буквой  $m$  разные постоянные, если для наших рассуждений важен лишь факт существования  $m$ , а не ее конкретное значение. Отметим также, что в (31.6)  $m$  можно считать зависящей лишь от параметров  $\sigma_1$ .

**Лемма 31.3.** Пусть для  $\sigma_1$  поперечные связи существенно упругие и выполнены условия (31.3) и, кроме того,

$$\| \Delta D_{\Pi}^{ijkl} \|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl}, \quad \| \Delta k_{\Pi}^{33} \|_{C_{\Omega}}, \quad \| \Delta k_{\Pi}^{44} \|_{C_{\Omega}}, \quad \| \Delta k_{\Pi}^{ij} \|_{C_{\Omega}} 1_{ij} \leq \varepsilon. \quad (31.9)$$

В этом случае при достаточно малых  $\varepsilon$  имеют место соотношения

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\chi}}^1 - m\varepsilon \| w \|_{H_{\chi}}^1 \| \varphi \|_{H_{\chi}}^1 \leq (w \cdot \varphi)_{H_{\chi}}^2 \leq (w \cdot \varphi)_{H_{\chi}}^1 + m\varepsilon \| w \|_{H_{\chi}}^1 \| \varphi \|_{H_{\chi}}^1. \quad (31.10)$$

Доказательство леммы 31.3 производится по той же схеме, что и доказательство леммы 31.2, но вместо теоремы 11.4 используется теорема 12.3 (соотношения (12.48), (12.50)). И здесь также  $m$  можно считать зависящей от параметров  $\sigma_1$ . ■

**Лемма 31.4.** Пусть для  $\sigma_1$  продольные и поперечные связи существенно упругие и выполнены (31.3), (31.5) и (31.9). Тогда

$$(a(\omega, w) \cdot b(\chi, \varphi))_{H_{t\chi}}^1 - m\varepsilon \| a \|_{H_{t\chi}}^1 \| b \|_{H_{t\chi}}^1 \leq (a(\omega, w) \cdot b(\chi, \varphi))_{H_{t\chi}}^2 \leq \\ \leq (a(\omega, w) \cdot b(\chi, \varphi))_{H_{t\chi}}^1 + m\varepsilon \| a \|_{H_{t\chi}}^1 \| b \|_{H_{t\chi}}^1. \quad (31.11)$$

Лемма 31.4 есть прямое следствие лемм 31.2, 31.3.

Введем оператор  $A_{\tau}$ , определяемый соотношением

$$(A_{\tau} \omega \cdot \chi)_{H_t}^1 = (\omega \cdot \chi)_{H_t}^2, \quad (31.12)$$

где  $\omega \in \overset{2}{H}_t$  фиксирована,  $\chi \in \overset{2}{H}_t$  произвольна.

**Лемма 31.5.** Оператор  $A_{\tau}$  существует, удовлетворяет неравенствам

$$1 - m\varepsilon \leq \| A_{\tau} \| \leq 1 + m\varepsilon \quad (31.13)$$

и имеет обратный  $A_{\tau}^{-1}$ , удовлетворяющий соотношениям

$$1 - m\varepsilon \leq \|A_{\tau}^{-1}\| \leq 1 + m\varepsilon, \quad (31.14)$$

$m$  зависит от  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  то же, что и в (31.5), (31.6).

Для доказательства приведем соотношение [26]

$$\|A_{\tau}\| = \sup \frac{|(A_{\tau}\omega \cdot \chi)_{H_t^1}|}{\|\omega\|_{H_t^1} \|\chi\|_{H_t^1}} = \sup \frac{|(\omega \cdot \chi)_{H_t^2}|}{\|\omega\|_{H_t^1} \|\chi\|_{H_t^1}}. \quad (31.15)$$

Из (31.6), (31.15) получаем (31.13). ■

Далее, оператор  $A_{\tau}^{-1}$  определяется соотношением

$$(\omega \cdot \chi)_{H_t^1} = (A_{\tau}^{-1}\omega \cdot \chi)_{H_t^2}. \quad (31.16)$$

Учтем теперь, что в силу полной симметрии пространств  $H_t^1$ ,  $H_t^2$  наряду с (31.6) имеет место соотношение

$$(\omega \cdot \chi)_{H_t^2} - m\varepsilon \|\omega\|_{H_t^2} \|\chi\|_{H_t^2} \leq (\omega \cdot \chi)_{H_t^1} \leq (\omega \cdot \chi)_{H_t^2} + m\varepsilon \|\omega\|_{H_t^2} \|\chi\|_{H_t^2}. \quad (31.17)$$

Из (31.16), (31.17) вытекает (31.14).

Введем оператор  $B_{\tau}$ , определяемый соотношением

$$(B_{\tau}w \cdot \varphi)_{H_x^1} = (w \cdot \varphi)_{H_x^2}. \quad (31.18)$$

**Лемма 31.6.** Оператор  $B_{\tau}$  существует, удовлетворяет неравенствам

$$1 - m\varepsilon \leq \|B_{\tau}\| \leq 1 + m\varepsilon \quad (31.19)$$

и имеет обратный, удовлетворяющий соотношениям

$$1 - m\varepsilon \leq \|B_{\tau}^{-1}\| \leq 1 + m\varepsilon. \quad (31.20)$$

Лемма 31.6 устанавливается по той же схеме, что и лемма 31.5, и более детально обосновываться не будет. ■

**Лемма 31.7.** Из соотношения

$$\|\omega^1 - A_{\tau}\omega^2\|_{H_t^1} \leq \varepsilon \quad (31.21)$$

вытекает неравенство

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H_t^1} \leq m\varepsilon (\|\omega^1\|_{H_t^1} + 1), \quad (31.22)$$

и, наоборот, из

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H_t^1} \leq \varepsilon \quad (31.23)$$

вытекает неравенство

$$\|\omega^1 - A_\tau \omega^2\|_{H_t} \leq m\varepsilon (\|\omega^1\|_{H_t} + 1). \quad (31.24)$$

В леммах 31.4—31.7  $\varepsilon$  также достаточно мало.

Для доказательства (31.22) рассмотрим тождество

$$\omega^1 - \omega^2 = A_\tau^{-1}(\omega^1 - A_\tau \omega^2) - (A_\tau^{-1} - I)\omega^1, \quad (31.25)$$

из которого имеем

$$\|\omega^1 - \omega^2\|_{H_t} \leq \|A_\tau^{-1}\| \|(\omega^1 - A_\tau \omega^2)\|_{H_t} + \|A_\tau^{-1} - I\| \|\omega^1\|_{H_t}. \quad (31.26)$$

В силу (31.14) имеем

$$\|A_\tau^{-1} - I\| \leq m\varepsilon \quad (31.27)$$

и из (31.26), (31.27), (31.14) получаем (31.22). Для вывода (31.24) из (31.23) используем тождество

$$\omega^1 - A_\tau \omega^2 = A_\tau(\omega^1 - \omega^2) + (I - A_\tau)\omega^1, \quad (31.28)$$

откуда

$$\|\omega^1 - A_\tau \omega^2\|_{H_t} \leq \|A_\tau\| \|\omega^1 - \omega^2\|_{H_t} + \|I - A_\tau\| \|\omega^1\|_{H_t}. \quad (31.29)$$

В силу (31.13) имеем

$$\|A_\tau - I\| \leq m\varepsilon. \quad (31.30)$$

В силу (31.29), (31.30) и (31.13) получаем (31.24). Лемма 31.7 доказана. ■

**Л е м м а 31.8.** Из соотношения

$$\|w^1 - B_\tau w^2\|_{H_x} \leq \varepsilon \quad (31.31)$$

следует неравенство

$$\|w^1 - w^2\|_{H_x}^1 \leq m\varepsilon (\|w^1\|_{H_x} + 1), \quad (31.32)$$

и, наоборот, из

$$\|w^1 - w^2\|_{H_x}^2 \leq \varepsilon \quad (31.33)$$

вытекает

$$\|w^1 - B_\tau w^2\|_{H_x}^1 \leq m\varepsilon (\|w^1\|_{H_x} + 1). \quad (31.34)$$



Лемма 31.8 доказываться не будет из-за полной аналогии с леммой 31.7. Отметим лишь, что постоянная  $m$  в (31.13), (31.14), (31.22), (31.24), (31.32), (31.34) может считаться зависящей лишь от параметров оболочки  $o_1$ . ■

31.3. Пусть имеются две оболочки  $o_1, o_2 \in O$ , причем

$$\|o_1 - o_2\|_o \leq \varepsilon. \quad (31.35)$$

Рассмотрим для каждой оболочки операторные уравнения (13.35), (13.36), определяющие оператор  $\mathbf{K}_{tx}(w)$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{tx} \cdot \chi)_{H_t}^1 = & -(\omega^* \cdot \chi)_{H_t}^1 + \int_{\Omega} [B_{kl}(w + w^*) - \\ & - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha h} (w + w^*)_{\alpha l}] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \end{aligned} \quad (31.36)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{tx} \cdot \chi)_{H_t}^2 = & -(\omega^* \cdot \chi)_{H_t}^2 + \int_{\Omega} [B_{kl}(w + w^*) - \\ & - \frac{1}{2}(w + w^*)_{\alpha h} (w + w^*)_{\alpha l}] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega. \end{aligned} \quad (31.37)$$

Пусть  $w_0$  — некоторый элемент  $H_*$ , и положим в (31.22), (31.23)  $w = w_0 + v$ . Из (31.22), (31.23) имеем

$$\mathbf{K}_{tx}^1(w_0, v) = \mathbf{K}_{tx_0}^1(w_0) + \mathbf{K}_{tx_1}^1(w_0, v) + \mathbf{K}_{tx_2}^1(w_0, v), \quad (31.38)$$

$$\mathbf{K}_{tx}^2(w_0, v) = \mathbf{K}_{tx_0}^2(w_0) + \mathbf{K}_{tx_1}^2(w_0, v) + \mathbf{K}_{tx_2}^2(w_0, v), \quad (31.39)$$

где  $\mathbf{K}_{tx\mu}^i$  — однородные относительно  $v$  операторы порядка  $\mu = 0, 1, 2$ ;  $i = 1, 2$ . Для их определения из (31.36) — (31.39) имеем интегральные тождества

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{tx_0}^s(w_0) \cdot \chi)_{H_t}^s = & -(\omega^* \cdot \chi)_{H_t}^s + \int_{\Omega} [B_{kl}(w_0 + w^*) - \\ & - \frac{1}{2}(w_0 + w^*)_{\alpha h} (w_0 + w^*)_{\alpha l}] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \end{aligned} \quad (31.40)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{tx_1}^s(w_0, v) \cdot \chi)_{H_t}^s = & \int_{\Omega} [B_{kl}v - \frac{1}{2}v_{\alpha h} (w_0 + w^*)_{\alpha l} - \\ & - \frac{1}{2}v_{\alpha l} (w_0 + w^*)_{\alpha h}] D_p^{ijkl} (\varphi_{i\alpha j} - G_{ij}^{\lambda} \varphi_{\lambda}) d\Omega, \end{aligned} \quad (31.41)$$

$$(\mathbf{K}_{tx_2}^s(w_0, v) \cdot \chi)_{H_t}^s = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} v_{\alpha h} v_{\alpha l} D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega. \quad (31.42)$$

В соотношениях (31.40) — (31.42)  $s = 1, 2$ . Формулы (31.38), (31.39) представляют собою разложения операторов  $\mathbf{K}_{tx}$  в окрестности точки  $w_0$ .

Л е м м а 31.9. Имеют место соотношения

$$\| \mathbf{K}_{t \times 0}^s \|_{H_t}^s \leq m \left( \| \omega^* \|_{H_t}^s + \left\| \left[ \overset{s}{B}_{hl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha h} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] \overset{s}{D}_p^{ijkl} \right\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \right), \quad (31.43)$$

$$\| \mathbf{K}_{t \times}^s \|_{H_t}^s \leq m \left( \| B_{hl} \overset{s}{D}_p^{ijkl} \|_{C_\Omega} 1_{ij} + \| (w_0 + w^*)_{\alpha h} \overset{s}{D}_p^{ijkl} \|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \right) \| v \|_{H_\kappa}^1, \quad (31.44)$$

$$\| \mathbf{K}_{t \times 2}^s \|_{H_t}^s \leq m \| \overset{s}{D}_p^{ijkl} \|_{C_\Omega} 1_{ijkl} \| v \|_{H_\kappa}^2. \quad (31.45)$$

Лемма непосредственно вытекает из (31.40)–(31.42), если учесть теорему вложения 11.4 (соотношение (11.63)) и теорему вложения 12.3 (соотношения (12.49), (12.51)). ■

Т е о р е м а 31.4. Пусть выполнено (31.3) и, кроме того,

$$\| \overset{1}{\omega^*} - \overset{2}{\omega^*} \|_{H_t}^1, \quad \| w^* - w^* \|_{H_\kappa}^1, \quad \| \overset{1}{D}_p^{ijkl} - \overset{2}{D}_p^{ijkl} \|_{C_\Omega} \leq \varepsilon. \quad (31.46)$$

В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  имеют место соотношения

$$\| \overset{1}{\mathbf{K}}_{t \times} - \overset{2}{\mathbf{K}}_{t \times} \|_{H_t}^1 \leq m \varepsilon \left( 1 + \| v \|_{H_\kappa} + \| v \|_{H_\kappa}^2 \right). \quad (31.47)$$

Для доказательства рассмотрим вначале разность  $\overset{1}{\mathbf{K}}_{t \times 0} - \overset{2}{\mathbf{K}}_{t \times 0}$ . Из (31.40) имеем

$$\left( \overset{1}{\mathbf{K}}_{t \times 0} \cdot \chi \right)_{H_t}^1 = \left( \overset{2}{\mathbf{K}}_{t \times 0} \cdot \chi \right)_{H_t}^2 = \left( \overset{2}{\omega^*} \cdot \chi \right)_{H_t}^2 - \left( \overset{1}{\omega^*} \cdot \chi \right)_{H_t}^1 + \Delta \mathcal{D}_0, \quad (31.48)$$

где

$$\Delta \mathcal{D}_0 = \int_{\Omega} \left\{ \left[ \overset{1}{B}_{hl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha h} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] \overset{1}{D}_p^{ijkl} - \left[ \overset{2}{B}_{hl}(w_0 + w^*) - \frac{1}{2} (w_0 + w^*)_{\alpha h} (w_0 + w^*)_{\alpha l} \right] \overset{2}{D}_p^{ijkl} \right\} \nabla_i \varphi_j d\Omega. \quad (31.49)$$

В силу (31.12) соотношение (31.48) можно записать в виде

$$\left( \left( \overset{1}{\mathbf{K}}_{t \times 0} - A_\tau \overset{2}{\mathbf{K}}_{t \times 0} \right) \cdot \chi \right)_{H_t}^1 = \left( \left( -\overset{1}{\omega^*} + A_\tau \overset{2}{\omega^*} \right) \cdot \chi \right)_{H_t}^1 + \Delta D_0. \quad (31.50)$$

Из (31.50), учтя последние два соотношения (31.46) и, кроме того, теоремы вложения 12.3 (соотношения (12.49), (12.51)) и 11.4 (соотношение (11.63)), а также неравенство

$$\| \overset{1}{B}_{hl} - \overset{2}{B}_{hl} \|_{C_\Omega} \leq m \varepsilon, \quad (31.51)$$

вытекающее из (31.3), будем иметь

$$|\Delta \mathcal{D}_0| \leq m\varepsilon \|\chi\|_{H_t}^1, \quad (31.52)$$

откуда

$$\|\overset{1}{K}_{tx0} - A_\tau \overset{2}{K}_{tx0}\|_{H_t}^1 \leq m_1\varepsilon + \|\overset{1}{\omega}^* - A_\tau \overset{2}{\omega}^*\|_{H_t}^1 \leq m\varepsilon. \quad (31.53)$$

Здесь использовалось первое утверждение леммы 31.7 (соотношения (31.21), (31.22)), а также наше соглашение об обозначениях постоянных  $m$ . Наконец, опять же из леммы 31.7 и (31.53) получаем соотношение

$$\|\overset{1}{K}_{tx0} - \overset{2}{K}_{tx0}\|_{H_t}^1 \leq m\varepsilon. \quad (31.54)$$

Рассмотрим, далее, разность  $\overset{1}{K}_{tx1} - \overset{2}{K}_{tx1}$ , для которой из (31.41) следует

$$(\overset{1}{K}_{tx1} \cdot \chi)_{H_t}^1 - (\overset{2}{K}_{tx1} \cdot \chi)_{H_t}^2 = \Delta \mathcal{D}_1,$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{D}_1 = & \int_{\Omega} (\overset{1}{B}_{kl} \overset{1}{D}_p^{ijkl} - B_{kl}^2 \overset{2}{D}_p^{ijkl}) v \nabla_i \varphi_j d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_{\alpha k} [(w_0 + \overset{1}{w}^*)_{\alpha l} \overset{1}{D}_p^{ijkl} - (w_0 + \overset{2}{w}^*)_{\alpha l} \overset{2}{D}_p^{ijkl}] \nabla_i \varphi_j d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_{\alpha l} [(w_0 + \overset{1}{w}^*)_{\alpha k} \overset{1}{D}_p^{ijkl} - (w_0 + \overset{2}{w}^*)_{\alpha k} \overset{2}{D}_p^{ijkl}] \nabla_i \varphi_j d\Omega. \end{aligned} \quad (31.55)$$

Из последних двух соотношений (31.46) и из теорем вложения 12.3 (соотношения (12.49), (12.51)) и 11.4 (соотношение (11.63)), а также (31.51) имеем

$$|\Delta \mathcal{D}_1| \leq m\varepsilon \|\chi\|_{H_t}^1 \|v\|_{H_x}^1. \quad (31.56)$$

Из (31.55), (31.56), повторяя рассуждения этапа, связанного с оценкой  $\overset{1}{K}_{tx0} - \overset{2}{K}_{tx0}$ , получаем

$$\|\overset{1}{K}_{tx1} - \overset{2}{K}_{tx1}\|_{H_t}^1 \leq m\varepsilon \|v\|_{H_x}^1. \quad (31.57)$$

Наконец, совершенно аналогичными рассуждениями из (31.42) получаем

$$\|\overset{1}{K}_{tx2} - \overset{2}{K}_{tx2}\|_{H_t}^1 \leq m\varepsilon \|v\|_{H_x}^2. \quad (31.58)$$

Из (31.54), (31.57), (31.58) получаем (31.47). Теорема 31.1 установлена. ■

**31.4.** Рассмотрим теперь разложение оператора  $\overset{s}{G}_{ix}$ , введенного соотношением (13.37) в окрестности  $w_0$ . Прежде всего отметим, что из (31.38), (31.39) получаем

$$\overset{s}{T}^{ij} = \overset{s}{T}_0^{ij} + \overset{s}{T}_1^{ij}v + \overset{s}{T}_2^{ij}v, \quad (31.59)$$

причем на основе теоремы 31.1 и леммы 31.9 имеем

$$\|\overset{1}{T}_0^{ij} - \overset{2}{T}_0^{ij}\|_{L_{2\Omega}} 1_{ij} \leq m\varepsilon, \quad \|\overset{1}{T}_1^{ij}v - \overset{2}{T}_1^{ij}v\|_{L_{2\Omega}} \leq m\varepsilon \|v\|_{H_{\kappa}}^1, \quad (31.60)$$

$$\|\overset{1}{T}_2^{ij}v - \overset{2}{T}_2^{ij}v\|_{L_{2\Omega}} \leq m\varepsilon \|v\|_{H_{\kappa}}^2, \quad \|\overset{1}{T}_{\mu}^{ij}\|_{L_{2\Omega}} \leq m \|v\|_{H_{\kappa}}^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2.$$

Подставим теперь для каждой оболочки  $o_s$  соотношения (31.59) и  $w = w_0 + v$  в формулу (13.37), определяющую  $G_{\kappa\kappa}$ . При этом получим

$$\overset{s}{G}_{\kappa\kappa}w = \overset{s}{G}_{\kappa\kappa}w_0 + \overset{s}{G}_{\kappa\kappa 1}v + \overset{s}{G}_{\kappa\kappa 2}v + \overset{s}{G}_{\kappa\kappa 3}v, \quad (31.61)$$

и  $\overset{s}{G}_{\kappa\kappa i}$  определяются соотношениями

$$(\overset{s}{G}_{\kappa\kappa 0} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}^s = - (w \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}^s + \int_{\Omega} \overset{s}{T}_0^{ij} [ \overset{s}{B}_{ij} \varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} ] d\Omega, \quad (31.62)$$

$$(\overset{s}{G}_{\kappa\kappa 1} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}^s = - \int_{\Omega} \left\{ \overset{s}{T}_0^{ij} v_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} + \overset{s}{T}_1^{ij} [ \overset{s}{B}_{ij} \varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} ] \right\} d\Omega, \quad (31.63)$$

$$(\overset{s}{G}_{\kappa\kappa 2} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}^s = \int_{\Omega} \left\{ \overset{s}{T}_2^{ij} [ \overset{s}{B}_{ij} \varphi - (w_0 + w^*)_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} ] - \overset{s}{T}_1^{ij} v_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \right\} d\Omega, \quad (31.64)$$

$$(\overset{s}{G}_{\kappa\kappa 3} \cdot \varphi)_{H_{\kappa}}^s = - \int_{\Omega} \overset{s}{T}_2^{ij} v_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega. \quad (31.65)$$

**Т е о р е м а 31.2.** Пусть выполнено условие

$$\|o_1 - o_2\|_o \leq \varepsilon. \quad (31.66)$$

В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  имеют место неравенства

$$\|\overset{s}{G}_{\kappa\kappa\mu}v\| \leq m \|v\|_{H_{\kappa}}^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (31.67)$$

и, кроме того,

$$\|\overset{1}{G}_{\kappa\kappa}w - \overset{2}{G}_{\kappa\kappa}w\|_{H_{\kappa}}^1 \leq m\varepsilon \left( 1 + \|v\|_{H_{\kappa}}^1 + \|v\|_{H_{\kappa}}^2 + \|v\|_{H_{\kappa}}^3 \right), \quad (31.68)$$

где  $m$  можно считать зависящей лишь от параметров  $o_1$ .

Неравенства (31.67) следуют сразу из (31.62) — (31.65) на основе последнего соотношения (31.60) и теоремы вложения 12.3 (соотношения (12.49), (12.51)). Для доказательства (31.68) установим

$$\| \overset{1}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa\mu} v - \overset{2}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa\mu} v \| \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (31.69)$$

причем и здесь  $m$  зависит лишь от  $\sigma_1$ . Рассмотрим для примера случай  $\mu = 1$ . Из (31.63) следует

$$\begin{aligned} (\overset{1}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1} \cdot \varphi)_{H_\kappa} - (\overset{2}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1} \cdot \varphi)_{H_\kappa} &= \int_{\Omega} (\overset{2}{T}_0^{ij} - \overset{1}{T}_0^{ij}) v_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (\overset{2}{T}_1^{ij} \overset{2}{B}_{ij} - \overset{1}{T}_1^{ij} \overset{1}{B}_{ij}) \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \overset{1}{T}_1^{ij} (w_0 + w^*)_{\alpha i} - \overset{2}{T}_1^{ij} (w_0 + w^*)_{\alpha i} \right] \varphi_{\alpha j} d\Omega. \end{aligned} \quad (31.70)$$

Из соотношений (31.60) и (12.49), (12.51), (31.51) легко получаем

$$\left| \int_{\Omega} (\overset{2}{T}_0^{ij} - \overset{1}{T}_0^{ij}) v_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega \right| \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa} \| \varphi \|_{H_\kappa}, \quad (31.71)$$

$$\left| \int_{\Omega} (\overset{2}{T}_1^{ij} \overset{2}{B}_{ij} - \overset{1}{T}_1^{ij} \overset{1}{B}_{ij}) \varphi d\Omega \right| \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa} \| \varphi \|_{H_\kappa}. \quad (31.72)$$

Кроме того, дополнительно учтя (31.66), выводим

$$\left| \int_{\Omega} \left[ \overset{1}{T}_1^{ij} (w_0 + w^*)_{\alpha i} - \overset{2}{T}_1^{ij} (w_0 + w^*)_{\alpha i} \right] \varphi_{\alpha j} d\Omega \right| \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa} \| \varphi \|_{H_\kappa}. \quad (31.73)$$

Из (31.70) — (31.73) имеем

$$\| (\overset{1}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1} - \mathbf{B}_\tau \overset{2}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1}) \cdot \varphi \|_{H_\kappa} \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa} \| \varphi \|_{H_\kappa}, \quad (31.74)$$

и значит,

$$\| \overset{1}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1} - \mathbf{B}_\tau \overset{2}{\mathbf{G}}_{\kappa\kappa 1} \| \leq m\varepsilon \| v \|_{H_\kappa}. \quad (31.75)$$

Из (31.75) и леммы 31.8 получаем (31.69) при  $\mu = 1$ . Аналогично устанавливаются остальные соотношения (31.69). Теорема 31.2 доказана. ■

**Теорема 31.3.** Пусть для оболочки  $\sigma_1 \in O$  выполнены условия 1—8 § 13 и существует неособое решение  $w_0$  операторного уравнения (13.39). Пусть, далее, имеется оболочка  $\sigma_2 \in O$ , причем выполнено условие (31.66). В этом случае при достаточно малом  $\varepsilon$  операторное уравнение (13.39) для  $\sigma_2$  будет иметь неособое

решение  $w_0 + \Delta w_0$ , причем

$$\|\Delta w_0\|_{H_x} \leq \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{если } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (31.76)$$

Далее, в шаре  $\Pi(\delta(\varepsilon), w_0)$  будет находиться по одному решению уравнения (13.39) для  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Для доказательства учтем, что если  $w_0$  — неособое решение (13.39), то оно обязательно изолировано (лемма 23.1) и в некотором шаре  $\Pi(\delta, w_0)$  не будет других решений. Рассмотрим, далее, на сфере  $\Sigma_1(\delta, w_0)$  векторные поля  $\Pi_1 w = w - \overset{1}{G}_{xx} w$  и  $\Pi_2 w = w - \overset{2}{G}_{xx} w$  и покажем, что они гомотопны, если  $\delta$  и  $\varepsilon$  достаточно малы. Попытаемся их связать посредством векторного поля  $\Pi(t)$ , параметрически зависящего от параметра  $t$ ,

$$\Pi(t)w = w - \overset{1}{G}_{xx} w + t(\overset{1}{G}_{xx} w - \overset{2}{G}_{xx} w). \quad (31.77)$$

Очевидно,  $\Pi(0)w = \Pi_1(w)$ ,  $\Pi(1)w = \Pi_2(w)$ . Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|\Pi(t)w\|_{H_x} &= \|w - \overset{1}{G}_{xx} w + t(\overset{1}{G}_{xx}(w) - \overset{2}{G}_{xx}(w))\|_{H_x} = \\ &= \|v - \overset{1}{G}_{xx1}(w_0)v - \overset{1}{G}_{xx2}(w_0)v - \overset{1}{G}_{xx3}(w_0)v + t(\overset{1}{G}_{xx} w - \overset{2}{G}_{xx} w)\|_{H_x} \geq \\ &\geq \|v - \overset{1}{G}_{xx1}(w_0)v\|_{H_x} - \|\overset{1}{G}_{xx2}(w_0)v\|_{H_x} - \|\overset{1}{G}_{xx3}(w_0)v\|_{H_x} - \\ &\quad - \|\overset{1}{G}_{xx} w - \overset{2}{G}_{xx} w\|_{H_x}, \quad w = w_0 + v. \end{aligned} \quad (31.78)$$

Учтем теперь, что, поскольку  $w_0$  — неособое решение, то  $v - \overset{1}{G}_{xx1}(w_0)v$  не имеет собственных векторов, и потому

$$\|v - \overset{1}{G}_{xx1} v\|_{H_x} \geq m \|v\|_{H_x}, \quad m > 0. \quad (31.79)$$

Используя (31.79), (31.68), из (31.78) получаем на

$$\begin{aligned} \|\Pi(t)w\|_{H_x} &\geq m \|v\|_{H_x} - m \left( \|v\|_{H_x}^2 + \|v\|_{H_x}^3 \right) - \\ &- m \cdot \varepsilon \left( 1 + \|v\|_{H_x} + \|v\|_{H_x}^2 + \|v\|_{H_x}^3 \right) = \\ &= m [\delta(1 - \varepsilon) - \varepsilon] - m(1 + \varepsilon)(\delta^2 + \delta^3). \end{aligned} \quad (31.80)$$

Легко видеть, что если в правой части (31.80) положить  $\delta = 2\varepsilon$ ,

то получим при малых  $\varepsilon$

$$\| \Pi(t) w \|_{1, H_x} \geq m(\varepsilon) > 0. \quad (31.81)$$

Таким образом, гомотопность  $\Pi_1(w)$  и  $\Pi_2(w)$  на сферах малого радиуса  $\Sigma_{H_x}(\delta, w_0)$  доказана. Учтем теперь, что на этих сферах вращение  $\Pi_1(w)$  есть  $\pm 1$ , ибо  $w_0$  есть неособое решение. Таким образом, вращение  $\Pi_2(w)$  на  $\Sigma_{H_x}(\delta, w_0)$  также есть  $\pm 1$ , и значит, уравнение

(13.39) внутри  $\Sigma_{H_x}(\delta, w_0)$  имеет решение  $w_0 + \Delta w_0$ , причем выполнено (31.76), и в силу  $\delta = 2\varepsilon$  имеем  $\delta \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Легко также видеть, что  $w_0 + \Delta w_0$  есть также неособое решение уравнения (13.39) для  $o_2$ , а значит, оно есть изолированное решение (13.39). Теорема 31.3 доказана. ■

Отметим, что из соотношений (14.1) сразу получаем

$$\| K_{tx}(w_0) - K_{tx}(w_0 + \Delta w_0) \|_{H_t} \leq \delta(\varepsilon).$$

**Примечание 31.1.** Смысл теоремы 31.3 заключается в установлении классов корректности для задач  $tx$ . Условие (31.66) вследствие (31.1) и (29.1) раскрывает эти классы. Условия на  $\rho$ ,  $D_p^{ijkl}$ ,  $D_n^{ijkl}$  достаточно понятны. Условие на коэффициенты упругости опор говорит о том, что изменение решения в энергетической норме мало, если коэффициенты опор мало изменялись равномерно на замкнутых участках своего задания. Это условие можно ослабить. Именно, практически в рамках наших рассуждений можно показать, что изменение решения в энергетической норме будет мало, если мало изменение коэффициентов упругости в  $L_{p, \Gamma_i}$  при каком-либо  $p > 1$  на участке  $\Gamma_i$  задания коэффициента опоры. Малое изменение оболочки в нагрузочной норме  $\|H\|$  означает вследствие (29.1) малое изменение  $\omega_n$  в  $H_t$  и  $w_n$  в  $H_x$ , а также малое изменение  $\tilde{w}_3, w_4, \tilde{w}_m, \tilde{w}_r$  в соответствующих (29.1) нормах. Малое же изменение  $\omega_n$  будет, например, обеспечено, если мало будут изменяться  $R^s$  в  $L_{p\alpha}$  при любом  $p > 1$  и  $\tilde{T}^r, \tilde{T}^m$  в каких-либо  $L_{p, \Gamma_6 + \Gamma_7}, L_{p, \Gamma_6 + \Gamma_8}$ . Для  $w_n$  малое изменение обеспечивается, если  $R^3$  мало меняется в  $\Omega$  даже в классах с мало меняющимися  $\delta$ -функциями,  $\tilde{Q}$  мало меняется в классах с мало меняющимися  $\delta$ -функциями на  $\Gamma_3 + \Gamma_4$ , а  $\tilde{M}^m$  мало меняется в любом  $L_{p, \Gamma_2 + \Gamma_4}$  при  $p > 1$ .

**31.5.** Теорема 31.3 утверждает корректность обобщенной постановки краевых задач  $tx$  в пространствах  $H_x$ . Большую важность имеет корректность постановки этих задач, но в более сильных пространствах, позволяющих, например, давать равномерную оценку изменения напряжений. Без доказательства приведем один результат такого рода.

Пусть заданы две оболочки  $o_1, o_2 \in O$ . Будем предполагать, что комплексы их определяющих параметров обладают следующими

СВОЙСТВАМИ:

$$\begin{aligned} \rho^s &\in C_{\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda}), & \overset{s}{D}_p^{ijkl} &\in C_{\Omega}^{1+k}(H_{\Omega}^{1+k,\lambda}), \\ \overset{s}{D}_n^{ijrl} &\in C_{\Omega}^{2+k}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda}), & \overset{0}{w} &\in W_{p\Omega}^{(4+k)}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda}), \\ \overset{0}{\omega} &\in W_{p\Omega}^{(2+k)}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda}), & \overset{s}{R^3}, \overset{s}{R^t} &\in W_{p\Omega}^{(k)}(H_{\Omega}^{k,\lambda}). \end{aligned} \quad (31.82)$$

Теорема 31.4. Пусть  $o_1$  при граничных условиях (21.1)–(21.3) имеет неособое решение  $w_0, \omega_0$  операторного уравнения (13.39). В этом случае, если, кроме того,

$$\Gamma \in C_{\Gamma}^{4+k}(H_{\Gamma}^{k+4,\lambda}) \quad (31.83)$$

и при достаточно малых  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\overset{1}{\rho} - \overset{2}{\rho}\|_{C_{\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda})}, & \quad \|\overset{1}{D}_p^{ijrl} - \overset{2}{D}_p^{ijlr}\|_{C_{\Omega}^{1+k}(H_{\Omega}^{1+k,\lambda})}, \\ \|\overset{1}{D}_n^{ijrl} - \overset{2}{D}_n^{ijrl}\|_{C_{\Omega}^{2+k}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda})}, & \quad \|\overset{1}{w} - \overset{2}{w}\|_{W_{p\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda})}, \\ \|\overset{1}{R^3} - \overset{2}{R^3}\|_{W_{p\Omega}^{(k)}} &\leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (31.84)$$

$$\|\overset{1}{\omega} - \overset{2}{\omega}\|_{W_{p\Omega}^{(2+k)}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda})}, \quad \|\overset{1}{R^t} - \overset{2}{R^t}\|_{W_{p\Omega}^{(k)}(H_{\Omega}^{k,\lambda})} \leq \varepsilon, \quad (31.85)$$

то для  $o_2$  операторное уравнение (13.39) также имеет неособое решение  $w_0 + \Delta w, \omega_0 + \Delta \omega$ , причем

$$\begin{aligned} \|\Delta w_0\|_{W_{p\Omega}^{(4+k)}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda'})}, \\ \|\Delta \omega_0\|_{W_{p\Omega}^{(2+k)}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda'})} &\leq \delta(\varepsilon) \end{aligned} \quad (31.86)$$

и  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Очевидно, при  $k=0$  безусловно обеспечены малые изменения напряжений в оболочке. ■

31.6. Приведем без доказательства некоторые результаты, относящиеся к корректности задач 9ж. Класс  $O$  будет содержать здесь оболочки с общей областью параметризации  $\Omega$ , причем контур  $\Gamma$  имеет одно разбиение  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , общее для всех оболочек из  $O$ . Очевидно, для задач 9ж в состав комплексов, определяющих оболочку, входят:  $\rho(\alpha', \alpha^2), D_n^{ijkl}, C_p^{ijkl}, \tilde{T}_4^{ij}, \tilde{M}^m, R^3, w$ . На множестве этих комплексов  $O$  вводим норму

$$\begin{aligned} \|o\|_O = \|\rho\|_{C_{\Omega}^2} + \|D_n^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl} + \|C_p^{ijkl}\|_{C_{\Omega}} 1_{ijkl} + \\ + \|\tilde{T}_4^{ij}\|_{L_2(\Omega)} 1_{ij} + \|w\|_{W_{2\Omega}^{(2)}} + \|w_n^*\|_{H_n}. \end{aligned} \quad (31.87)$$



**Теорема 31.5.** Пусть для каждой из оболочек  $o_1, o_2$  выполнены условия 1—8 § 17 и, кроме того, операторное уравнение (17.19) для  $o_1$  имеет неособое решение  $w_0, \Psi_0$ .

В этом случае, если

$$\|o_1 - o_2\|_0 \leq \varepsilon, \tag{31.88}$$

то при малых  $\varepsilon$  операторное уравнение (17.19) для  $o_2$  также имеет неособое решение  $w_0 + \Delta w_0, \Psi_0 + \Delta \Psi_0$ , причем

$$\|\Delta w_0\|_{H_{\mathfrak{K}}}, \|\Delta \Psi_0\|_{H_9} \leq \delta(\varepsilon), \tag{31.89}$$

$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В (31.89)  $\Delta \Psi_0 = K_{9\mathfrak{K}}(w_0 + \Delta w_0) - K_{9\mathfrak{K}}(w_0)$ . ■

Будем, далее, предполагать, что комплексы параметров для  $o_1, o_2$  в условиях задачи 9ж обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \rho &\in C_{\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda}) \overset{s}{D}_{\mathfrak{K}}^{ijr'l} \in C_{\Omega}^{2+k}(H_{\Omega}^{2+k,\lambda}), \\ R_3 &\in W_{p\Omega}^{(k)}(H_{\Omega}^{k,\lambda}), \quad w \in W_{p\Omega}^{4+k}(C_{\Omega}^{4+k,\lambda}), \\ C_{*ij}^{\lambda\mu} \overset{s}{T}_{\mathfrak{K}}^{ij} &\in W_{p\Omega}^{(k)}(H_{\Omega}^{k,\lambda}). \end{aligned} \tag{31.90}$$

**Теорема 31.6.** Пусть для  $o_1$  при граничных условиях (21.55) имеется неособое решение  $w_0, \Psi_0$  операторного уравнения (17.19). В этом случае, если, кроме того, при малом  $\varepsilon$  выполнено (31.84) и

$$\Gamma \in C_{\Gamma}^{4+k}(H_{\Gamma}^{4+k,\lambda}), \quad \left\| C_{*ij}^{\lambda\mu} \overset{1}{T}_{\mathfrak{K}}^{ij} - C_{*ij}^{\lambda\mu} \overset{2}{T}_{\mathfrak{K}}^{ij} \right\|_{W_{p\Omega}^{(k)}(H_{\Omega}^{k,\lambda})} \leq \varepsilon, \tag{31.91}$$

то операторное уравнение (17.19) для  $o_2$  также имеет неособое решение  $w_0 + \Delta w_0, \Psi_0 + \Delta \Psi_0$ , причем

$$\|\Delta w_0\|_{W_{p\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda})}, \|\Delta \Psi_0\|_{W_{p\Omega}^{4+k}(H_{\Omega}^{4+k,\lambda})} \leq \delta(\varepsilon), \tag{31.92}$$

причем  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

УСТОЙЧИВОСТЬ В БОЛЬШОМ БЕЗМОМЕНТНОГО  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НИЖНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА

§ 32. Безмоментное напряженно-деформированное состояние оболочек. Переход к линеаризованной задаче.  
Спектральные свойства линеаризованной задачи

32.1. Рассмотрим интегральные тождества (13.6), (13.7), определяющие обобщенное решение задачи *тх*. Будем ниже говорить, что оболочка находится в безмоментном напряженно-деформированном состоянии (б. м. н. д. с.), если перемещение  $w$  отсутствует,

$$w \equiv 0. \quad (32.1)$$

В этом случае из (13.6) получаем

$$(\omega_6(w_{16}, w_{26}) \cdot \chi(\varphi_1, \varphi_2))_{H_t} = (\omega_n \cdot \chi)_{H_t}, \quad (32.2)$$

где элемент  $\omega_n \in H_t$  введен соотношением (11.80).

Из (13.7) следует

$$\int_{\Omega} T_6^{ij} B_{ij} \varphi \, d\Omega + (w_n \cdot \varphi)_{H_x} = 0, \quad (32.3)$$

где элемент  $w_n \in H_x$  введен соотношением (12.70). В дальнейшем все величины, относящиеся к б. м. н. д. с., будем снабжать индексом «6», как это и сделано в (32.2), (32.3). Необходимо учесть, что из (32.2) не следует  $\omega_6 \equiv \omega_n$ , поскольку не предполагается, что  $\omega_6$  принадлежит  $H_t$  в силу возможности неоднородных геометрических граничных условий на  $\Gamma_5, \Gamma_6$ . Однако скалярное произведение  $(\omega_6 \cdot \chi)_{H_t}$  имеет смысл, так как  $\omega_6 \in W_{2\Omega}^{(1)}$ .

В данном параграфе всегда будет предполагаться выполнение условий теоремы 16.1 (или соответственно 16.2, 16.3).

**Т е о р е м а 32.1.** Для существования б. м. н. д. с. оболочки необходимо и достаточно выполнения условий

$$\tilde{M}^m|_{\Gamma_3+\Gamma_4} \equiv \tilde{Q}|_{\Gamma_3+\Gamma_4} \equiv 0, \quad (32.4)$$

$$\tilde{w}|_{\Gamma_1+\Gamma_2} \equiv \tilde{w}_4|_{\Gamma_1+\Gamma_3} \equiv 0, \quad (32.5)$$

$$T_6^{ij} B_{ij} + R^3 = 0. \quad (32.6)$$

Для доказательства необходимости отметим, что (32.5) непосредственно вытекают из определения б. м. н. д. с. Соотношение

(32.6) вытекает из (32.3), поскольку здесь можно выбирать  $\varphi$  финитной в  $H_\kappa$ . После установления (32.6) условия (32.4) вытекают из (32.3), где уже надо принять во внимание  $\forall \varphi \in H_\kappa$ . Таким образом, необходимость (32.4) — (32.6) установлена. Переходя к доказательству достаточности, учтем, что при выполнении (32.4) — (32.6) интегральные соотношения (13.6) — (13.7) будут удовлетворяться, если туда подставить  $w \equiv 0$  и  $\omega$ , определенную из (32.2). ■

**Примечание 32.1.** В соотношении (32.6) предполагается, что  $T_\sigma^{ij}$  рассчитаны по формулам

$$T_\sigma^{ij} = D_p^{ijkl} \nabla_i w_{j\sigma}, \quad (32.7)$$

а  $w_{j\sigma}$  определены из (32.2). Таким образом, (32.6) есть в конечном счете условие на продольные нагрузки  $R^i$ ,  $\tilde{T}^\tau|_{\Gamma_6+\Gamma_8}$ ,  $\tilde{T}^m|_{\Gamma_7+\Gamma_8}$ , перемещения  $\tilde{w}_m|_{\Gamma_5+\Gamma_6}$ ,  $\tilde{w}_\tau|_{\Gamma_5+\Gamma_7}$ , а также на  $R^3$ .

Предположим теперь, что нагрузочные члены  $R^i$ ,  $R^3$ ,  $\tilde{T}^\tau$ ,  $\tilde{T}^m$ ,  $\tilde{w}_m$ ,  $\tilde{w}_\tau$ ,  $\tilde{w}_4$  удовлетворяют условиям теоремы 32.1. В этом случае, очевидно, при любом  $\lambda$  нагрузочные члены вида  $-\lambda R^i$ ,  $-\lambda R^3$ ,  $-\lambda \tilde{T}^\tau$ ,  $\lambda \tilde{T}^m$ ,  $\lambda \tilde{w}_m$ ,  $\lambda \tilde{w}_\tau$  вызывают б. м. н. д. с.

$$-\lambda \omega_\sigma(w_{1\sigma}, w_{2\sigma}), \quad w \equiv 0, \quad -\lambda T_\sigma^{ij}. \quad (32.8)$$

Совершим в (13.6), (13.7) замену

$$\omega \sim \omega_M - \lambda \omega_\sigma, \quad T^{ij} \sim T_M^{ij} - \lambda T_\sigma^{ij}. \quad (32.9)$$

В результате получаем

$$(\omega_M \cdot \chi)_{H_t} = \int_\Omega \left( B_{klt} w - \frac{1}{2} w_{\alpha k} w_{\alpha l} \right) D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \quad (32.10)$$

$$(w \cdot \varphi)_{H_\kappa} = \int_\Omega T_M^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) d\Omega + \lambda \int_\Omega T_\sigma^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega. \quad (32.11)$$

В (32.9) — (32.11)  $T_M^{ij}$  определяются по (4.24), (4.25), в которых  $\omega_M(w_{1M}, w_{2M})$  находится из (32.10), и таким образом находятся характеристики моментного напряженно-деформированного состояния (м. н. д. с.). ■

**32.2.** Уравнения (32.10), (32.11) имеют при любом  $\lambda$  очевидное решение

$$\omega_M \equiv w \equiv T_M^{ij} \equiv 0, \quad (32.12)$$

которому соответствует б. м. н. д. с. Наши усилия будут направлены на построение в соответствии с изложенной в § 29 концепцией устойчивости У-разбиения на прямой  $-\infty < \lambda < \infty$ . Важную роль в решении этого вопроса будет играть линеаризованная система операторных уравнений (32.10), (32.11), полученная отбрасыванием нелинейных относительно  $w$  членов. Переход к линеаризованным системам, как известно, был решающим шагом в создании общей  
19\*

теории устойчивости, и его изобретение есть величайшая заслуга Л. Эйлера в математическом естествознании [33]. Более подробно об этом см. в [22]. ■

Из (32.10) имеем в соответствии с (14.6)

$$\omega_M = K_{t \times 1}(w) + K_{t \times 2}(w) = \omega_{1M} + \omega_{2M}, \quad (32.13)$$

где

$$(K_{t \times 1} \cdot \chi)_{H_t} = \int_{\Omega} B_{kl} w D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega, \quad (32.14)$$

$$(K_{t \times 2} \cdot \chi)_{H_t} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\alpha^k} w_{\alpha^l} D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j d\Omega. \quad (32.15)$$

В соответствии с (32.13) — (32.15) при линеаризации (32.10), (32.11) получаем

$$[(w \cdot \varphi)_{H_x}] = \int_{\Omega} T_{1M}^{ij} B_{ij} \varphi d\Omega + \lambda \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha^i} \varphi_{\alpha^j} d\Omega. \quad (32.16)$$

В (32.16) тензор  $T_{1M}^{ij}$  дается формулой (14.17), где  $\varepsilon_{i1M}$  рассчитываются в соответствии со второй формулой (14.16) при  $w^* \equiv 0$ .

Линейное операторное уравнение (ЛОУ) (32.16) имеет при всех  $\lambda$  тривиальное решение  $w \equiv 0$ . Поэтому ниже мы (32.16) будем рассматривать как задачу на собственные значения. ■

**32.3.** Обратимся к б. м. н. д. с. для краевых задач 9ж. Будем считать, что в этом параграфе выполнены условия теоремы 19.3 и, кроме того, (32.1). Но в этом случае из (17.2), (17.3) получаем

$$\int_{\Omega} \{ [ (C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi_6 + \tilde{T}_4^{ij}) ] [ B_{ij} + R^s ] \} \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{M}^m \frac{\partial \varphi}{\partial m} ds = 0, \quad (32.17)$$

$$(\Psi_6 \cdot \theta)_{H_6} = - \int_{\Omega} C_{*ij}^{\lambda\mu} \tilde{T}_4^{ij} \nabla_{\lambda\mu} \theta d\Omega. \quad (32.18)$$

Соотношения (32.17), (32.18) должны выполняться при любых  $\varphi \in H_x$ ,  $\theta \in H_9$ . При этом из (32.17) в силу произвольности  $\varphi$  следует

$$T_6^{ij} B_{ij} + R^s = 0, \quad (32.19)$$

$$T_6^{ij} = C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi_6 + \tilde{T}_4^{ij}, \quad \tilde{M}^m |_{\Gamma_2} \equiv 0. \quad (32.20)$$

Здесь предполагается, что  $\Psi_6$  найдено из (32.18) и подставлено в левую часть (32.19). Таким образом, вся левая часть выражена через нагрузки  $R^s$  и  $T_4^{ij}$ .

Теорема 32.2. Для существования б. м. н. д. с. в задаче 9ж необходимо и достаточно выполнение условий (32.19), (32.20), куда совершена подстановка

$$\Psi_6 \rightarrow \tilde{T}_4^{ij} \quad (32.21)$$

из (32.18).

Необходимость выполнения (32.19), (32.20), собственно, установлена нами в ходе вывода. Достаточность следует из того, что операторные уравнения (17.2), (17.3) имеют решение, для которого  $w \equiv 0$  и  $\Psi$  определяются из (32.16). ■

Легко видеть, что нагрузкам вида  $-\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta}^{ij} - \lambda R^3$  соответствует б. м. н. д. с., определяемое функцией усилий

$$-\lambda \Psi_6. \quad (32.22)$$

Совершим в (17.2), (17.3) подстановку вида

$$\Psi \sim \Psi_M - \lambda \Psi_6. \quad (32.23)$$

При этом получаем

$$(w \cdot \Phi)_{H_{\mathcal{K}}} = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} (B_{ij} \Phi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi_M d\Omega + \lambda \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega, \quad (32.24)$$

$$(\Psi_M \cdot \Theta)_{H_{\Theta}} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} - w B_{ij} \right) C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Theta d\Omega. \quad (32.25)$$

Система (32.24), (32.25) имеет очевидное решение

$$w \equiv 0, \quad \Psi_M \equiv 0. \quad (32.26)$$

Наши усилия будут направлены на то, чтобы выяснить какие-либо факты для  $\mathcal{U}$ -разбиений прямой  $\lambda$ . И в данной проблеме важную роль будет играть линеаризованная задача, получающаяся из (32.24), (32.25) удержанием членов первого порядка относительно  $w$ . Для ее получения необходимо учесть, что из (32.25) следует

$$\Psi_M = \Psi_{1M} + \Psi_{2M}; \quad \Psi_{iM} = K_{9mi} w, \quad (32.27)$$

$$(\Psi_{1M} \cdot \Theta)_{H_{\Theta}} = - \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} w B_{ij} \nabla_{kl} \Theta d\Omega, \quad (32.28)$$

$$(\Psi_{2M} \cdot \Theta)_{H_{\Theta}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \nabla_{kl} \Theta d\Omega. \quad (32.28)$$

Тогда в результате линеаризации имеем

$$(w \cdot \Phi)_{H_{\mathcal{K}}} = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} B_{ij} \Phi \nabla_{kl} \Psi_{1M} d\Omega + \lambda \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} d\Omega. \quad (32.29)$$

В (32.29) следует считать  $\Psi_{1M}$  выраженной через  $w$  из (32.27). При этом мы получаем ЛОУ (32.29), для которого рассмотрим задачу на собственные значения.

32.4. Рассмотрим некоторое абстрактное ЛОУ, которое охватывает как (32.16), так и (32.29). Пусть  $A, B, C$  — аддитивные само-

сопряженные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве  $\overset{0}{H}$ . Пусть, далее,

1)  $\mathbf{A}$  — положительно определенный в  $\overset{0}{H}$  оператор и  $H_{\mathbf{A}}$  — гильбертово пространство со скалярным произведением [23]

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\mathbf{A}}} = (\mathbf{A}w \cdot \varphi)_{\overset{0}{H}}; \quad (32.30)$$

2)  $\mathbf{B}$  — самосопряженный усиленно непрерывный оператор, действующий из  $H_{\mathbf{A}}$  в  $\overset{0}{H}$ , причем

$$(\mathbf{B}w \cdot w)_{\overset{0}{H}} \leq 0; \quad (32.31)$$

3)  $\mathbf{C}$  — самосопряженный усиленно непрерывный оператор, действующий из  $H_{\mathbf{A}}$  в  $\overset{0}{H}$ , причем

$$(\mathbf{C}w \cdot w)_{\overset{0}{H}} \geq 0 \text{ и из } (\mathbf{C}w \cdot w)_{\overset{0}{H}} = 0 \text{ следует } w \equiv 0; \quad (32.32)$$

4) пространство  $\overset{0}{H}$  бесконечномерное. Пусть задано ЛОУ

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \lambda \mathbf{C}. \quad (32.33)$$

**Теорема 32.3.** Пусть выполнены условия 1—4. В этом случае

1) ЛОУ (32.33) имеет множество собственных элементов  $\lambda_k$ ,  $w_k$ , которое является счетным;

2)  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$  и  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , если  $k \rightarrow \infty$ ; (32.34)

3)  $w_k$  образуют ортонормированный базис в пространстве  $H$ , определяемом соотношением

$$(w \cdot \varphi)_H = (w \cdot \varphi)_{H_{\mathbf{A}}} - (\mathbf{B}w \cdot \varphi)_{\overset{0}{H}}; \quad (32.35)$$

4)  $(\mathbf{C}w_k \cdot w_r)_{\overset{0}{H}} = \delta_{kr} \cdot \lambda_k^{-1} = \delta_{kr} \lambda_r^{-1}$ . (32.36)

В дальнейшем будет целесообразно использование гильбертова пространства  $H_{\mathbf{C}}$  со скалярным произведением

$$(w \cdot \varphi)_{H_{\mathbf{C}}} = (\mathbf{C}w \cdot \varphi)_{\overset{0}{H}}, \quad (32.37)$$

и соотношение (32.36) запишется в виде

$$(w_k \cdot w_r)_{H_{\mathbf{C}}} = \delta_{kr} \lambda_k^{-1} = \delta_{kr} \lambda_r^{-1}. \quad (32.38)$$

Приступая к доказательству теоремы 32.3, отметим некоторые необходимые в дальнейшем неравенства. В силу положительной определенности  $\mathbf{A}$

$$\|w\|_{H_{\mathbf{A}}} \geq m \|w\|_{\overset{0}{H}}. \quad (32.39)$$

Л е м м а 32.1. Имеет место неравенство

$$M \|w\|_{H_A} \geq \|w\|_{H_C}. \quad (32.40)$$

Поскольку  $C$  действует из  $H_A$  в  $\overset{0}{H}$  усиленно непрерывно, то функционал  $(Cw \cdot w)_H = \|w\|_{H_C}^2$  слабо непрерывен в  $H_A$ . Поэтому  $(Cw \cdot w)_H$  имеет на сфере  $\|w\|_{H_A}^2 = 1$  максимум, и значит, справедливо неравенство (32.40). ■

Л е м м а 32.2. Пространства  $H_A$  и  $H$  эквивалентны.

Для доказательства учтем, что из (32.31), (32.33) следует

$$\|w\|_H > \|w\|_{H_A}. \quad (32.41)$$

Кроме того, поскольку  $B$  — усиленно непрерывный оператор, то функционал  $(Bw \cdot w)_H$  является слабо непрерывным, а потому в силу теоремы 9.4 на единичной сфере в  $H$

$$|(Bw \cdot w)_H| \leq M \quad (32.42)$$

и во всем  $\overset{0}{H}$

$$|(Bw \cdot w)_H| \leq M \|w\|_H^2. \quad (32.43)$$

Из (32.35), (32.42) получаем

$$\|w\|_H^2 \leq (M + 1) \|w\|_{H_A}^2. \quad (32.44)$$

Из (32.41), (32.44) вытекает лемма 32.2. ■

Л е м м а 32.3. ЛОУ (32.33) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\text{grad } \|w\|_H^2 = \lambda \text{ grad } \|w\|_{H_C}^2. \quad (32.45)$$

Доказательство леммы 32.3 очевидно.

Таким образом, отыскание собственных элементов ЛОУ (32.33) сведено в силу теоремы Л. А. Люстерника [20, 29] к отысканию экстремума  $\|w\|_H^2$  на единичных сферах  $\Sigma_{H_C}(1, 0)$  и с центром в нуле. ■

Л е м м а 32.4. Функционал  $\|w\|_H^2$  на  $\Sigma_{H_C}(1, 0)$  имеет точку абсолютного минимума  $w_1$  и  $\lambda_1 = \|w_1\|_H^2$ .

Для доказательства учтем, что  $\|w\|_H^2$  ограничена снизу на  $\Sigma_{H_C}(1, 0)$ , поэтому имеется минимизирующая последовательность  $w_{1k}$ , которую можно считать слабо сходящейся в  $H$ , а значит, в  $H_A$ .

Рассмотрим числа  $\alpha_{kl}$ , определяемые соотношением

$$\left\| \frac{1}{2} \alpha_{kl} (w_{1k} + w_{1l}) \right\|_{H_C}^2 = 1. \quad (32.46)$$

Числа  $\alpha_{kl}$  из (32.46) определяются, ибо последовательность  $w_{1k}$  является слабо сходящейся в  $H$ , а функционал  $\|w\|_{H_C}$  слабо непрерывен в  $H$ . Более того, при одновременном стремлении

$$k, l \rightarrow \infty \text{ имеем } \alpha_{kl} \rightarrow 1. \quad (32.47)$$

Далее, имеем

$$\left\| \frac{1}{2} (w_{1k} - w_{1l}) \alpha_{kl} \right\|_H^2 = \alpha_{kl}^2 \left( \frac{1}{2} \|w_{1k}\|_H^2 + \frac{1}{2} \|w_{1l}\|_H^2 \right) - \left\| \frac{(w_{1k} + w_{1l})}{2} \alpha_{kl} \right\|_H^2 \quad [(32.48)$$

и при достаточно больших  $k, l$  получаем

$$\frac{1}{2} \alpha_{kl}^2 \|w_{1k}\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_1 + \varepsilon_{kl}, \quad \frac{1}{2} \alpha_{kl}^2 \|w_{1l}\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \lambda_1 + \varepsilon_{kl},$$

$$\left\| \alpha_{kl} \frac{(w_{1k} + w_{1l})}{2} \right\|_H^2 \geq \lambda_1. \quad (32.49)$$

Из (32.48), (32.49) следует

$$\|w_{1k} - w_{1l}\|_H^2 \leq \frac{4}{\alpha_{kl}^2} \left( \frac{1}{2} \lambda_1 + \varepsilon_{kl} + \frac{\lambda_1}{2} + \varepsilon_{kl} - \lambda_1 \right) \leq \frac{8\varepsilon_{kl}}{\alpha_{kl}^2}. \quad (32.50)$$

Из (32.44) следует сильная сходимость  $w_{1k}$ , и пусть  $w_1$  есть сильный предел  $w_{1k}$  в  $H$ . Очевидно,  $w_1$  удовлетворяет (32.45). При этом  $\lambda_1 \neq 0$ , ибо если  $\lambda_1 = 0$ , тогда и  $w_1 \equiv 0$ , и  $w_1 \in \Sigma_{H_C}(1, 0)$ . Также очевидно  $\lambda_1 > 0$ .

Для построения последующих собственных элементов  $\lambda_k, w_k$  предположим, что  $k-1$  собственных элементов построены. Рассмотрим минимум  $\|w\|_H^2$  на множестве элементов

$$\|w\|_{H_C}^2 = 1, \quad (w \cdot w_r)_{H_C} = 0, \quad r = 1, \dots, k-1. \quad (32.51)$$

**Лемма 32.5.** Функционал  $\|w\|_H^2$  имеет на множестве (32.51) точку минимума  $w_k$ , являющуюся решением (32.10) и (32.45), причем  $\lambda_k = \|w_k\|_H^2$ .

Лемма доказывается рассуждениями, аналогичными лемме 32.3. При этом очевидно по построению  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ .

**Лемма 32.6.** Система собственных функций  $w_k, w_l$  может быть построена так, чтобы для любых  $k, l$  выполнялись условия

$$(w_k \cdot w_l)_H = (w_k \cdot w_l)_{H_C} = 0. \quad (32.52)$$

Для доказательства рассмотрим вначале случай, когда  $w_k, w_l$  при-



надлежат различным числам  $\lambda_k, \lambda_l$ . Тогда

$$(w_k \cdot \varphi)_H = \lambda_k (w_k \cdot \varphi)_{H_C}, \quad (32.53)$$

$$(w_l \cdot \varphi)_H = \lambda_l (w_l \cdot \varphi)_{H_C}. \quad (32.54)$$

Положив в (32.53)  $\varphi = w_l$ , а в (32.54)  $\varphi = w_k$ , получим систему уравнений

$$(w_k \cdot w_l)_H = \lambda_l, \quad (w_k \cdot w_l)_H = \lambda_k (w_k \cdot w_l)_{H_C}$$

содержащую два неизвестных  $(w_k \cdot w_l)_H$  и  $(w_k \cdot w_l)_{H_C}$ . Детерминант этой системы есть  $\lambda_k - \lambda_l$ , откуда вытекает (32.52).

Если  $w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+p}$  соответствуют одному собственному числу, то их можно ортонормировать процессом Шмидта [29] в пространстве  $H$ . Но если они окажутся ортогональными в  $H$ , то будут ортогональными в  $H_C$ . Следовательно, и для них будут выполнены (32.52).

Не исключено, что при некотором  $k$  разные минимизирующие последовательности приведут к разным решениям  $w_k$ . Также не исключено, что при построении  $w_{k+1}$  мы придем к тому же значению  $\lambda_k$ . Это явление регулирует

**Лемма 32.7.** Каждому значению  $\lambda_k$  соответствует конечное число независимых собственных функций  $w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+p}$ .

Доказательство проведем рассуждением от противного.

Предположим существование бесконечного множества линейно-независимых  $w_k, w_{k+1}, \dots$ , что возможно в силу условия 4. Пророртонормируем их в норме  $H$ , но тогда они в силу (32.52) окажутся ортогональными в  $H_C$  и, кроме того,

$$\|w_r\|_{H_C} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad r = k; k+1, \dots, \infty. \quad (32.55)$$

Но, с другой стороны,

$$w_k \rightarrow 0 \text{ в } H, \quad (32.56)$$

а в силу усиленной непрерывности

$$w_k \Rightarrow 0 \text{ в } H_C, \quad (32.57)$$

и (32.55) невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

**Лемма 32.8.** Процесс построения  $w_k, \lambda_k$  не может закончиться ни при каком  $k$ .

Действительно, пусть при каком-либо  $k$  мы получили полный набор линейно-независимых решений  $w_k, w_{k+1}, \dots, w_{k+p}$ , которых конечное число по лемме 32.7. Перейдем к построению собственных элементов путем минимизации  $\|w\|_H^2$  на множестве, удовлетворяющем (32.51). Получить то же собственное значение  $\lambda_k$  мы не можем, ибо тогда соответствующая собственная функция  $\tilde{w}_{k+1}$  должна линейно зависеть от  $w_{k+1}, \dots, w_{k+p}$ . Однако этого не может случиться, ибо  $\tilde{w}_{k+1}$  разyksивается на множестве (32.51), ортогональном в  $H_C$  всем  $w_{k+1}, \dots, w_{k+p}$ , и оно не пусто из-за условия 4. ■

**Лемма 32.9.** Множество чисел  $\lambda_k$  не может иметь точки сгущения на конечном расстоянии от начала координат.

Для доказательства допустим противное. Пусть, далее,  $w_k$  — один из собственных элементов, соответствующих  $\lambda_k$ . По лемме 32.6 все  $w_k$  ортонормированы в  $H_C$ . Но тогда в силу ограниченности  $\lambda_k$  они будут ограничены в  $H$  и, значит, слабо компактны. Не ограничивая общности рассуждений будем считать  $w_k$  слабо сходящимися в  $H$ . Рассмотрим теперь агрегат

$$\|w_{r_1} - w_{r_2}\|_{H_C}, \quad (32.58)$$

где  $w_{r_1}, w_{r_2}$  — какие-либо собственные функции, соответствующие большим номерам  $r_1, r_2$ . Очевидно, в силу усиленной непрерывности  $C$  агрегат (32.58) можно сделать сколь угодно малым при больших  $r_1, r_2$ . С другой стороны, вследствие ортонормированности  $w_{r_1}$  и  $w_{r_2}$  в  $H_C$  имеем

$$\|w_{r_1} - w_{r_2}\|_{H_C}^2 = 2. \quad (32.59)$$

Полученное противоречие доказывает лемму 32.9.

**Лемма 32.10.** Все собственные функции  $w_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$  ЛОУ (32.37), (32.45) образуют ортонормированный базис в  $H$ .

Пусть  $\tilde{w} \in H$  и, кроме того,

$$(\tilde{w} \cdot w_k)_H = 0, \quad k = 1, \dots, \infty. \quad (32.60)$$

В силу (32.52)

$$\|\tilde{w}\|_H^2 \geq \lambda_k \|\tilde{w}\|_{H_C}^2 \quad (32.61)$$

при любом  $k$  и, значит, в силу лемм 32.8 и 32.9

$$\|\tilde{w}\|_{H_C} = 0, \quad \tilde{w} \equiv 0. \quad \blacksquare \quad (32.62)$$

**Лемма 32.11.** Никаких других собственных элементов, кроме построенных в данном разделе, ЛОУ (32.37), (32.45) не имеет.

Действительно, положим, что  $\tilde{\lambda}, \tilde{w}$  — новый собственный элемент. Но тогда в силу леммы 32.6 справедливо (32.59), а по лемме 32.10  $\tilde{w} \equiv 0$ , и значит,  $\tilde{w}$  не есть собственная функция. ■

Из лемм 32.1—32.11 вытекает теорема 32.3, если произвести перенормировку  $w_k \sim w_k \lambda_k^{-1/2}$ . Отметим, что доказательства лемм 32.1—32.11, использованных в теореме 32.3, достаточно традиционны [23, 29], однако мы решили их здесь привести для полноты изложения вопроса и в силу некоторой специфики уравнения (32.33), (32.45).

32.5. Вернемся к ЛОУ (32.16). Покажем, что оно удовлетворяет всем условиям теоремы 32.3, если принять

$$H_A \sim H_\kappa, \quad (Bw \cdot \varphi)_H^0 = \int_{\Omega} T_1^{ij}(w) B_{ij} \varphi \, d\Omega, \quad (32.63)$$

$$(w \cdot \varphi)_{H_C} = \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j} \, d\Omega. \quad (32.64)$$

Пространство  $H$  содержит элементы из  $L_{2\Omega}$ , причем

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)_H^0 = \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 \, d\Omega. \quad (32.65)$$

Теорема 32.4. Пусть выполнено условие

$$\int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \, d\Omega \geq 0 \text{ и из } \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \, d\Omega = 0 \text{ вытекает } w = 0. \quad (32.66)$$

В этом случае

1) ЛОУ (32.16) имеет счетное множество собственных элементов  $\lambda_k$ ,  $w_k$ , причем каждому  $\lambda_k$  соответствует конечное число собственных функций  $w_k$ ;

2)  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$  и  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , если  $k \rightarrow \infty$ ;

3)  $w_k$  образуют ортонормированный базис в  $H$  (определение  $H$  дано несколько ниже);

$$4) \quad \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{k\alpha i} w_{r\alpha j} = \delta_{kr}. \quad (32.67)$$

Проверим выполнение всех условий теоремы 32.3. Начнем с условия 3. Имеем

$$(Bw \cdot \varphi)_H^0 = \int_{\Omega} T_1^{ij}(w) B_{ij} \varphi \, d\Omega. \quad (32.68)$$

Из (32.14), определяющего  $K_{i\kappa l}(w)$  и соответственно  $T_1^{ij}$ , следует

$$\int_{\Omega} T_1^{ij}(w) \nabla_i \varphi_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau} \varphi_{\tau} \, ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m \varphi_m \, ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i \varphi_j \, ds = 0. \quad (32.69)$$

Здесь  $w_j$  — решения (32.14), если в правой части стоит  $w$ , а  $\varphi_j$  — решения (32.14), если в правой части стоит  $\varphi$ . Из (32.69) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_1^{ij}(w) \varepsilon_{ij1}(\varphi) \, d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau} \varphi_{\tau} \, ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m \varphi_m \, ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i \varphi_j \, ds = \\ = - \int_{\Omega} T_1^{ij}(w) B_{ij} \varphi \, d\Omega = - (Bw \cdot \varphi)_{H_0}. \end{aligned} \quad (32.70)$$

Левая часть (32.70), как легко видеть, симметрична относительно  $w$ ,

$\varphi$ , что и доказывает самосопряженность оператора  $B$ . Из (32.70):

$$(Bw \cdot w)_H = - \int_{\Omega} T_1^{ij}(w) \varepsilon_{ij1}(w) d\Omega - \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds - \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds - \\ - \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j ds < 0. \quad (32.71)$$

Таким образом, выполнено и (32.31).

Самосопряженность  $C$  видна из (32.64). Его усиленная непрерывность следует из теоремы 12.3 (соотношение 12.52). Таким образом, выполнено условие 4. Наконец, конкретизируем пространство  $H$  в данном случае на основе (32.35). Имеем

$$(w \cdot \varphi)_H = (w \cdot \varphi)_{H_\kappa} - (Bw \cdot \varphi)_H = (w \cdot \varphi)_{H_\kappa} - \int_{\Omega} T_1^{ij} B_{ij} \varphi d\Omega. \quad (32.72)$$

Законность введения  $H$  следует из вышеустановленных свойств оператора  $Bw$  (формулы (32.70), (32.71)). ■

В силу особой важности для проблемы устойчивости оболочек первого собственного числа  $\lambda$  ЛОУ (32.16), оно ниже будет определяться через  $\lambda_{тж}$ . Число  $\lambda_{тж}$  определяет критическую нагрузку, если использовать метод линеаризации Эйлера. Отметим неравенство

$$\|w\|_{H_C}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{тж9}} \|w\|_H^2. \quad (32.73)$$

**32.6.** Рассмотрим ЛОУ (32.29). Покажем, что и оно удовлетворяет всем требованиям теоремы 32.3, если принять

$$H_A \sim H_\kappa, \quad (Bw \cdot \varphi)_H = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jr} \nabla_{kr} \Psi_1(w) B_{ij} \varphi d\Omega; \quad (32.74)$$

для  $C$  имеем то же определение (32.64), поэтому в отношении  $C$  условия теоремы 32.3 будут выполнены, если будет иметь место (32.66), что и будет предполагаться. Для доказательства самосопряженности  $B$  учтем, что из (32.27), (32.74) имеем

$$(Bw \cdot \varphi)_H = \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi_1(w) B_{ij} \varphi d\Omega = - (\Psi_1(w) \cdot \Psi_1(\varphi))_{H_{9\kappa}}. \quad (32.75)$$

Из симметрии правой части (32.75) относительно  $w$  и  $\varphi$  следует самосопряженность  $B$ . Из (32.75) также видно, что выполнено условие 2 теоремы 32.3, т. е. выполнено (32.31). Пространство  $H$  в данном случае определяется соотношением

$$(w \cdot \varphi)_H = (w \cdot \varphi)_{H_\kappa} - \int_{\Omega} C^{ih} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi_1(w) B_{ij} \varphi d\Omega. \quad (32.76)$$

**Теорема 32.5.** Пусть выполнено условие (32.66). В этом случае для ЛОУ (32.29) выполнены все пункты 1—4 теоремы 32.4.

В силу особой важности для проблемы устойчивости оболочек первого собственного числа  $\lambda_1$  ЛОУ (32.29) оно ниже будет обозначаться  $\lambda_{9ж}$ . Число  $\lambda_{9ж}$  определяет критическую нагрузку, если использовать метод линеаризации Эйлера около б. м. н. д. с.

§ 33. Глобальная устойчивость оболочек в задачах  $t_k$ .

Существование нижних критических чисел. Некоторые оценки для У-разбиений

**33.1.** Предположим, что в задаче  $t_k$  нагрузки  $P$ , действующие на оболочку, таковы, что выполнено условие существования б. м. н. д. с. (32.4) — (32.6), и будем рассматривать напряженно-деформированное состояние оболочек под действием нагрузки  $-\lambda P$ . Оно описывается НОУ (32.10), (32.11). Будем говорить, что  $\lambda$  принадлежит спектру НОУ (в дальнейшем СНОУ) (32.10), (32.11), если при этом  $\lambda$  существует решение с отличным от нуля  $w$ . Очевидно при этом, что если  $\lambda \in$  СНОУ (32.10), (32.11), то наряду с б. м. н. д. с. существует при данном  $\lambda$  моментное напряженно-деформированное состояние (м. н. д. с.) и возможен переход в это м. н. д. с., т. е. потеря устойчивости б. м. н. д. с. Все точки прямой  $\lambda$ , где существуют лишь нулевые решения НОУ (32.10), (32.11), ниже будут именоваться регулярными, а множество регулярных точек будет называться РНОУ. ■

Для дальнейших рассмотрений будет целесообразно произвести преобразование функционала полной энергии  $\mathcal{I}_{t_k}$  системы: оболочка — упругие связи — внешние силы, даваемого формулой (12.77) с учетом (32.4) — (32.6). С учетом (32.9) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{kk}^\lambda = & \frac{1}{2} \left( \|w\|_{H_k}^2 + \int_{\Omega} D_p^{ijkl} (\epsilon_{ijM}^0 - \lambda \epsilon_{ij6}^0) (\epsilon_{kIM}^0 - \lambda \epsilon_{kI6}^0) d\Omega + \right. \\ & + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} (w_{\tau M} - \lambda w_{\tau 6})^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} (w_{mM} - \lambda w_{m6})^2 ds + \\ & \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} (w_{iM} - \lambda w_{i6}) (w_{jM} - \lambda w_{j6}) ds \right) + \lambda (w_{\Pi} \cdot w)_{H_k} + \lambda (\omega_{\Pi} \cdot \omega_M)_{H_t}. \end{aligned} \quad (33.1)$$

Раскрывая скобки в правой части (33.1), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{kk}^\lambda = & \frac{1}{2} \left( \|w\|_{H_k}^2 + \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \epsilon_{ijM}^0 \epsilon_{kIM}^0 d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds \right) - \lambda \left[ \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \epsilon_{ijM}^0 \epsilon_{kI6}^0 d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M} w_{\tau 6} ds + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM} w_{m6} ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{j6} ds - (w_{\Pi} \cdot w)_{H_k} - (\omega_{\Pi} \cdot \omega_M)_{H_t} \right]. \end{aligned} \quad (33.2)$$

Здесь отброшены члены, зависящие только от б. м. н. д. с., как не влияющие на дальнейшие рассмотрения. В (33.1)  $\epsilon_{ij6}^0$  определяется

по первым соотношениям (14.16), где следует положить  $w^* = 0$  и  $w_{i0} \sim w_{i6}$ , которые определяются по (32.2). Зная  $w_{i6}$ , находим  $w_{\tau 6}$ ,  $w_{m6}$ , которые представляют собою касательную и нормальную к контуре  $\Gamma$  составляющие вектора тангенциальных перемещений  $\mathfrak{O}_6(w_{16}, w_{26})$  б. м. н. д. с.  $\varepsilon_{ijM}$  находятся из (3.30) — (3.33), где надо положить  $w_i \sim w_{iM}$ . При этом в соответствии с (32.14) — (32.15) имеем

$$\overset{0}{\varepsilon}_{ijM} = \overset{0}{\varepsilon}_{ijM_1} + \overset{0}{\varepsilon}_{ijM_2}, \quad (33.3)$$

где  $\overset{0}{\varepsilon}_{ijM_1}$  находятся, как уже говорилось в § 32, в соответствии со второй формулой (14.16), где надо положить  $w^* = 0$ , а  $w_{i1}$  определить по  $\mathfrak{O}_{1M}$ , которые в свою очередь находятся из (32.14). Компоненты  $\overset{0}{\varepsilon}_{ijM_2}$  находятся по третьей формуле (14.16), причем  $w_{i2}$  определяется по  $\mathfrak{O}_{2M}$ , определяемым по (32.15). ■

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \overset{0}{\varepsilon}_{ijM} \overset{0}{\varepsilon}_{kl6} d\Omega &= \int_{\Omega} T_6^{ij} \overset{0}{\varepsilon}_{ijM} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} T_6^{ij} \left( \nabla_i w_{jM} - B_{ij} w + \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} T_6^{ij} \nabla_i w_{jM} d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} T_6^{ij} B_{ij} w d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega = \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \nabla_i w_{jM} \nabla_k w_{lM} d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} T_6^{ij} B_{ij} w d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_6^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega. \end{aligned} \quad (33.4)$$

Положив в (32.2)  $\chi = \mathfrak{O}_M$  и в (32.3)  $\varphi = w$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \nabla_i w_{j6} \nabla_k w_{l1} d\Omega &= (\mathfrak{O}_\Pi \cdot \mathfrak{O}_M)_{H_1} - \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M} w_{\tau 6} ds - \\ &- \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM} w_{m6} ds - \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{j6} ds, \end{aligned} \quad (33.5)$$

$$\int_{\Omega} T_6^{ij} B_{ij} w d\Omega = - (w_\Pi \cdot w)_{H_\chi}. \quad (33.6)$$

Подставив (33.4) — (33.6) в (33.2), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\chi\chi}^\lambda &= \frac{1}{2} \left( \|w\|_{H_\chi}^2 + \int_{\Omega} D_p^{ijkl} \overset{0}{\varepsilon}_{ijM} \overset{0}{\varepsilon}_{klM} d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M}^2 ds + \right. \\ &\left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds - \lambda \|w\|_{H_C}^2 \right). \quad (33.7) \end{aligned}$$

Напомним, что  $\|w\|_{H_C}^2$  дается соотношением (32.64). Далее, учтя (33.3), имеем из (33.7)

$$\mathcal{J}_{\chi\chi}^\lambda = \mathcal{J}_{\chi\chi 2}^\lambda + \mathcal{J}_{\chi\chi 3}^\lambda + \mathcal{J}_{\chi\chi 4}^\lambda, \quad (33.8)$$

где

$$\mathcal{J}_{\chi\chi 2}^\lambda = \frac{1}{2} \left( \|w\|_{H_\chi}^2 + \int_{\Omega} D_p^{ijkl0} \varepsilon_{ijM_1} \varepsilon_{klM_1} d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M_1}^2 ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM_1}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{jM_1} w_{iM_1} ds - \lambda \|w\|_{H_C}^2 \right), \quad (33.9)$$

$$\mathcal{J}_{\chi\chi 3}^\lambda = \int_{\Omega} D_p^{ijkl0} \varepsilon_{ijM_2} \varepsilon_{klM_1} d\Omega + \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M_2} w_{\tau M_1} ds + \\ + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM_1} \cdot w_{mM_2} ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM_1} w_{jM_2} ds, \quad (33.10)$$

$$\mathcal{J}_{\chi\chi 4}^\lambda = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} D_p^{ijkl0} \varepsilon_{ijM_2} \varepsilon_{klM_2} d\Omega + \int_{\Gamma_4} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M_2}^2 ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM_2}^2 dt + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM_1} w_{jM_2} ds \right). \quad (33.11)$$

Наконец, учтя (32.71), (32.72), из (33.9) для  $\mathcal{J}_{\chi\chi 2}^\lambda$  получим

$$\mathcal{J}_{\chi\chi 2}^\lambda = \frac{1}{2} (\|w\|_H^2 - \lambda \|w\|_{H_C}^2). \quad \blacksquare \quad (33.12)$$

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится соотношение

$$\Phi(w, 1) = 0,$$

составленное с учетом условий б. м. н. д. с. (32.4)–(32.6). Оно может быть получено из формулы (16.3), которой определялся функционал  $\Phi$ , если подставить (32.9). Однако более элементарно оно получается, если в (32.11) положить  $\varphi \equiv w$  и воспользоваться (32.10), где принять  $\chi = \omega_M$ . Имеем цепь преобразований:

$$0 = \|w\|_{H_\chi}^2 - \int_{\Omega} T_M^{ij} (B_{ij}w - w_{\alpha i} w_{\alpha j}) d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 = \|w\|_{H_\chi}^2 + \\ + \int_{\Omega} T_M^{ij} (-2B_{ij}w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}) d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 + \int_{\Omega} T_M^{ij} B_{ij}w d\Omega = \\ = \|w\|_{H_\chi}^2 + \int_{\Omega} T_M^{ij} (\nabla_i w_{jM} + \nabla_j w_{iM} - 2B_{ij}w + w_{\alpha i} w_{\alpha j}) d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 + \\ + \int_{\Omega} T_M^{ij} B_{ij}w d\Omega - \int_{\Omega} T_M^{ij} (\nabla_i w_{jM} + \nabla_j w_{iM}) d\Omega. \quad (33.13)$$

Из (32.10) получаем

$$\int_{\Omega} T_M^{ij} (\nabla_i w_{jM} + \nabla_j w_{iM}) d\Omega = \\ = -2 \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds \right), \quad (33.14)$$

и из (33.13), (33.14) следует

$$\|w\|_{H_{\kappa}}^2 + \int_{\Omega} T_M^{ij} \varepsilon_{ijM} d\Omega + 2 \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_{\tau M}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds \right) + \int_{\Omega} T_M^{ij} B_{ij} w d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 = 0. \quad \blacksquare \quad (33.15)$$

**Л е м м а 33.1.** Пусть выполнено условие (32.66). В этом случае функционал

$$\psi(w) = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 - \int_{\Omega} \tilde{N} w^2 d\Omega, \quad (33.16)$$

где  $\tilde{N} \in C_0$ , имеет конечный минимум на поверхности

$$\|w\|_{H_C}^2 = \int_{\Omega} T_0^{ij} w_{\alpha i} w_{\alpha j} d\Omega = 1. \quad (33.17)$$

Для доказательства предположим обратное. Пусть для последовательности  $w_k$

$$\psi(w_k) \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (33.18)$$

Очевидно, при этом обязательно

$$\|w_k\|_{H_{\kappa}} \rightarrow \infty \quad (33.19)$$

и, кроме того, последовательность  $w_k^* = \|w_k\|_{H_{\kappa}}^{-1} \cdot w_k$  можно в  $H_{\kappa}$  считать слабо сходящейся. Легко видеть, что в  $H_{\kappa}$

$$w_k^* \rightarrow 0, \quad (33.20)$$

иначе не может выполняться (33.17). Действительно, если  $w_k^* \rightarrow w^{**} \neq 0$ , то

$$\|w_k\|_{H_C}^2 = \|w_k\|_{H_{\kappa}}^2 \|w_k^*\|_{H_C}^2 \rightarrow \infty \quad (33.21)$$

в силу слабой непрерывности  $\|w\|_{H_C}^2$  в  $H_{\kappa}$  и условия (32.66). Таким образом,  $w_k^* \rightarrow 0$ . Но имеем из (33.16)

$$\psi(w_k) = \|w_k\|_{H_{\kappa}}^2 \left( 1 - \int_{\Omega} \tilde{N} w_k^{*2} d\Omega \right). \quad (33.22)$$



В силу теоремы 12.3 второй член в правой части (33.22) исчезает и  $\psi(w_k) \rightarrow \infty$ . Полученное противоречие и доказывает лемму 33.1.

**Теорема 33.1.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.1 (соответственно 16.2, 16.3), и кроме того, выполнено условие (32.66). В этом случае СНОУ (32.10), (32.11) расположен справа от некоторой точки  $\lambda_{ix}^*$ . Все точки  $\lambda < \lambda_{ix}^*$  принадлежат РНОУ (32.10), (32.11).

Для доказательства рассмотрим в (33.15) агрегат  $\Theta(T_M^{ij})$ , определяемый соотношением

$$\Theta(T_M^{ij}) = \int_{\Omega} (T_M^{ij0} \varepsilon_{ijM} + T_M^{ij} B_{ij} w) d\Omega.$$

В этом соотношении для  $\Theta$  подынтегральное выражение есть полином второй степени относительно  $T_M^{ij}$ . Его квадратичная форма является положительно определенной формой  $T_M^{ij}$ . Поэтому подынтегральное выражение имеет минимум в трехмерном пространстве  $T_M^{11}$ ,  $T_M^{12}$ ,  $T_M^{22}$ . Его можно найти обычными средствами. В сущности, такие рассмотрения нами были проведены в § 29. Поэтому, не повторяя выкладок, приведем окончательный результат:

$$\Theta(T_M^{ij}) = -\frac{1}{8} \int_{\Omega} \tilde{N}_{\kappa\kappa} w^2 d\Omega, \quad \tilde{N}_{\kappa\kappa} = D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}, \quad \tilde{B}_{ii} = B_{ii}, \quad (33.23)$$

$$\tilde{B}_{ij} = 2B_{ij}, \quad i \neq j.$$

Здесь  $\tilde{N}_{\kappa\kappa}$  — новый упруго-геометрический комплекс — свертка тензора четвертого ранга  $D_p^{ijkl}$  и тензоров второго ранга  $B_{ij}$ ,  $B_{kl}$ , введенная нами в § 29 (соотношение (29.44)).

Из (33.15), (33.23) получаем

$$\|w\|_{H_x}^2 - \frac{1}{8} \int_{\Omega} \tilde{N}_{\kappa\kappa} w^2 d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 \leq 0. \quad (33.24)$$

В силу леммы 33.1 из (33.24) имеем

$$(\lambda_{ix}^* - \lambda) \|w\|_{H_C}^2 \leq 0, \quad (33.25)$$

где  $\lambda_{ix}^*$  есть минимум функционала (33.16) на (33.17) при  $\tilde{N} = \frac{1}{8} N_{\kappa\kappa} = \frac{1}{8} D_p^{ijkl} \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{kl}$ , откуда вследствие (32.66) при  $\lambda < \lambda_{ix}^* w \equiv 0$ . Теорема 33.1 доказана. ■

**С л е д с т в и е.** Вся полупрямая  $\lambda < \lambda_{ix}^*$  принадлежит множеству  $Y_1$ , т. е. здесь имеется лишь б. м. н. д. с. оболочки. Очевидно, по своему определению  $\lambda_{ix}^*$  есть наименьшее собственное число ЛОУ

$$(w \cdot \varphi)_{H_x} - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \tilde{N}_{\kappa\kappa} w \varphi d\Omega - \lambda_{ix} (w \cdot \varphi)_{H_C} = 0, \quad (33.26)$$

которое можно записать в виде

$$\tilde{\nabla}_{ij} DD_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{kl} w - \frac{1}{4} \tilde{N}_{\kappa\kappa} w \cdot D + \lambda_{t\kappa}^* (T_6^{ij} w_{\alpha} D)_{\alpha j} = 0, \quad (33.27)$$

$$w |_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 0, \quad (33.28)$$

$$\frac{dw}{dm} \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_3} = 0, \quad (33.29)$$

$$D_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{ij} w m_k m_l |_{\Gamma_2 + \Gamma_4} = -k_{\Pi}^{44} w_4, \quad (33.30)$$

$$\{D^{-1} (DD_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{kl} w)_s m_i \tau_j + D^{-1} (DD_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{kl} w)_m m_i \tau_j + \\ + (D_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{kl} w m_i \tau_j)_s + D_{\Pi}^{ijhl} \nabla_{kl} w G_{ij}^s m_s\}_{\Gamma_3 + \Gamma_4} = -k_{\Pi}^{43} w_3. \quad (33.31)$$

**33.2. Теорема 33.2.** Пусть выполнены условия теоремы 33.1. В этом случае полупрямая  $\lambda > \lambda_{t\kappa}$  принадлежит СНОУ (33.11), причем в точках спектра наряду с б. м. н. д. с. оболочка будет иметь и м. н. д. с. с более низким уровнем полной энергии системы оболочка — упругие связи — внешние усилия.

Для доказательства рассмотрим формулу (33.8) для  $\mathcal{G}_{\kappa\kappa}^{\lambda}$  — потенциальной энергии этой системы. Пусть далее  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_{t\kappa}$ ,  $w_1$  — первый собственный элемент ЛОУ (32.16) (или соответственно (32.33) или (32.45)). Подставим в (33.8)  $tw_1$  вместо  $w$ ; при соответствующей нормировке получим

$$\mathcal{G}_{\kappa\kappa}^{\lambda} = \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{t\kappa}}\right) + t^3 \mathcal{G}_{\kappa\kappa 3}(w_1) + t^4 \mathcal{G}_{\kappa\kappa 4}(w_1). \quad (33.32)$$

При достаточно малом  $t$  знак  $\mathcal{G}_{\kappa\kappa}^{\lambda}$  будет определяться знаком только первого члена правой части (33.32), а он будет отрицательным при  $\lambda > \lambda_{t\kappa}$ .

Но в силу теоремы 21.4  $\mathcal{G}_{\kappa\kappa}^{\lambda}$  в некоторой точке  $w_{\min}$  будет принимать абсолютный минимум, и тем более в этой точке

$$\mathcal{G}_{\kappa\kappa}^{\lambda}(w_{\min}) < 0. \quad (33.33)$$

Очевидно,  $w_{\min}$  не может быть нулем, и следовательно, существует м. н. с., при этом с уровнем энергии более низким, чем у б. н. д. с.

Теорема 33.2 устанавливает важное свойство  $U$ -разбиений прямой  $\lambda$ . При выполнении ее условий полупрямая  $\lambda > \lambda_{t\kappa}$  принадлежит  $U_k$ ,  $k \geq 2$ . Кроме того, теорема 33.2 показывает важную роль эйлеровой характеристики  $\lambda_{t\kappa}$  при глобальном анализе проблемы устойчивости, заключающуюся в том, что при  $\lambda > \lambda_{t\kappa}$  появляющаяся моментная форма более устойчива, чем существовавшая безмоментная. Наконец, отметим, что локальные методы в некоторых частных случаях дают возможность установить существование при  $\lambda > \lambda_{t\kappa}$  в некоторой малой окрестности трех форм равновесия: безмоментной и двух моментных. ■

**33.3.** Теоремы 33.1 и 33.2 позволяют ввести новую важную характеристику  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  в проблеме устойчивости. Пусть  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  — такая постоянная, что при  $\lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}}$  оболочка имеет единственное б. м. н. д. с. и при этом в любом полуинтервале  $\lambda_{t_{\text{жн}}} \leq \lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}} + \varepsilon$  уже имеется по крайней мере одна моментная форма. Иными словами, полупрямая  $\lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}}$  вся принадлежит РНОУ (31.10), (31.11), а в любом полуинтервале  $\lambda_{t_{\text{жн}}} \leq \lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}} + \varepsilon$  имеется по крайней мере одна точка СНОУ (31.10). В терминологии  $Y$ -множеств полупрямая  $\lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}}$  есть, очевидно,  $Y_1$ -множество, а в любом полуинтервале  $\lambda_{t_{\text{жн}}} \leq \lambda < \lambda_{t_{\text{жн}}} + \varepsilon$  содержатся точки  $Y_k$  при  $k \geq 2$ . В дальнейшем  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  будет называться нижним критическим числом.

**Теорема 33.3.** Пусть выполнены условия теоремы 33.1. В этом случае  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  существует, причем имеют место неравенства

$$\lambda_{t_{\text{ж}}}^* \leq \lambda_{t_{\text{жн}}} \leq \lambda_{t_{\text{жв}}}. \quad (33.34)$$

Теорема 33.3 есть прямое следствие теорем 33.1 и 33.2.

В связи с теоремой 33.3 заметим, что определение нижнего критического числа  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  явилось предметом громадного числа важных работ, где с этой целью использовались численные методы, и список таких работ, никоим образом не претендующий на полноту, дан нами в § 25—26. Значение теоремы 33.3 в том, что существование нижнего критического числа установлено как весьма общий и строго обоснованный факт.

Ввиду важности  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$  как ориентира несущей способности конструкции приведем некоторые оценки этой величины.

**Лемма 33.2.** Пусть существует элемент  $w \in H_x$  такой, что

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}^{\lambda_{t_{\text{жв}}}}(w) < 0. \quad (33.35)$$

В этом случае

$$\lambda_{t_{\text{жн}}} < \lambda_{t_{\text{жв}}}. \quad (33.36)$$

В самом деле, если выполнено (33.35), то при достаточно малом  $\delta$

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}^{\lambda_{t_{\text{жв}}} - \delta}(w) < 0 \quad (33.37)$$

и тогда по теореме 21.2 абсолютный минимум  $\mathcal{J}_{\text{жж}}^{\lambda_{t_{\text{жв}}} - \delta}$  в  $H_x$  существует и также отрицателен.

**Лемма 33.3.** Пусть  $w_1$  — собственный элемент ЛОУ (31.16), принадлежащий  $\lambda_{t_{\text{жв}}}$ , и

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}(w_1) \neq 0. \quad (33.38)$$

В этом случае справедливо (33.36).

Для доказательства учтем соотношение, вытекающее из (33.32):

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}^{\lambda_{t_{\text{жв}}}}(tw_1) = t^3 \mathcal{J}_{\text{жж}}(w_1) + t^4 \mathcal{J}_{\text{жж}}(w_1). \quad (33.39)$$

Легко видеть, что при малых  $t$  знак  $\mathcal{J}_{\text{жж}}^{\lambda_{t_{\text{жв}}}}(tw_1)$  определяется

знаком первого члена, и можно выбрать знак  $t$  так, чтобы  $\mathcal{J}_{\kappa\kappa}^{\lambda_{\kappa\kappa}}(tw_1)$  было отрицательной величиной. Тогда утверждение леммы 33.3 следует из леммы 33.2. Более того, несложное вычисление показывает, что если

$$\delta < \frac{\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}^2(w_1)}{4\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w_1)}, \quad (33.40)$$

то

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa}^{\lambda_{\kappa\kappa} - \delta} < 0, \quad (33.41)$$

и значит, множество  $\lambda > \lambda_{\kappa\kappa} - \delta$  принадлежит СНОУ, точнее,  $У_{\kappa}$ ,  $k \geq 2$ . Таким образом,

$$\lambda_{\kappa\kappa} \leq \lambda_{\kappa\kappa} \left( 1 - \frac{\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}^2(w_1)}{4\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w_1)\lambda_{\kappa\kappa}} \right). \quad (33.42)$$

В (33.40) — (33.42)  $w_1$  нормирована условием  $\|w_1\|_{H_C}^2 = 1$ . ■

Утверждения лемм 33.2, 33.3 важны тем, что дают критерии, при выполнении которых решение задачи устойчивости б. м. н. д. с. невозможно на базе эйлерова принципа линеаризации в окрестности б. м. н. д. с., так как м. н. д. с. появляются при  $\lambda < \lambda_{\kappa\kappa}$  и возможен переход в эти напряженные состояния. ■

Л е м м а 33.4. Пусть выполнено неравенство

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa 2}^{\lambda_{\kappa\kappa}}(w) + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w) \neq 0 \quad (33.43)$$

при любом  $w \in H_{\kappa}$ . В этом случае

$$\lambda_{\kappa\kappa} = \lambda_{\kappa\kappa}. \quad (33.44)$$

Для доказательства заметим, что из (33.43) вытекает

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa 2}^{\lambda_{\kappa\kappa}}(w) + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w) > 0. \quad (33.45)$$

В самом деле, если предположить, что (33.45) не имеет места, то при некотором  $w^{**}$  будем иметь

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa 2}^{\lambda_{\kappa\kappa}}(w^{**}) + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w^{**}) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w^{**}) < 0. \quad (33.46)$$

Но (33.46) может выполняться, если

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w^{**}) < 0, \quad (33.47)$$

ибо остальные члены в (33.44), как легко видеть, положительны. Но тогда

$$\mathcal{J}_{\kappa\kappa 2}^{\lambda_{\kappa\kappa}}(w^{**}) - \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w^{**}) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w^{**}) > 0, \quad (33.48)$$

Рассмотрим теперь функционал вида

$$F(t) = \mathcal{J}_{\kappa\kappa 2}^{\lambda_{\kappa\kappa}}((1-2t)w^{**}) + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}((1-2t)w^{**}) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}((1-2t)w^{**}). \quad (33.49)$$

Очевидно, он представляет собою некоторый полином четвертой степени относительно  $t$ . Кроме того, легко видеть, что выполнены соотношения

$$F(0) < 0, \quad F(1) > 0, \quad (33.50)$$

которые являются следствиями (33.46), (33.47). Значит, между 0 и 1 имеется такое  $t^*$ , при котором левая часть (33.49) есть нуль, что противоречит (33.43). Таким образом, доказано, что (33.43) влечет (33.45).

Переходя к доказательству основного содержания леммы 33.4, предположим, что при некотором  $\lambda < \lambda_{tk3}$  НОУ (32.10), (32.11) имеет нетривиальное решение  $w$ . В этом случае должно быть справедливым (33.15). Но тогда будет иметь место неравенство

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_k}^2 + \int_{\Omega} \Theta(T_M^{ij}) d\Omega + 2 \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{rr} w_{\tau M}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds - \lambda_{tk3} \|w\|_{H_C}^2 < 0, \end{aligned} \quad (33.51)$$

где  $\Theta$  дается в теореме 33.1. Если теперь учесть (32.15), (33.2) и однородность функционалов  $\mathcal{J}_{kk2}^\lambda, \mathcal{J}_{kk3}, \mathcal{J}_{kk4}$ , то (33.51) примет вид

$$\mathcal{J}_{kk2}^{\lambda_{tk3}}(w) + \frac{3}{2} \mathcal{J}_{kk3}(w) + 2\mathcal{J}_{kk4}(w) < 0, \quad (33.52)$$

что противоречит (33.45), вытекающему из (33.44). Значит,  $\lambda_{tk3} < \lambda_{tk3}$  невозможно и, значит, справедливо (33.44). Лемма 33.4 доказана. ■

Ее значение в том, что она дает достаточный критерий возможности использовать эйлеров принцип линеаризации около б. м. н. д. с. при решении задачи устойчивости.

**33.4.** Поскольку нижнее критическое число является важной характеристикой оболочки, то здесь мы рассмотрим дополнительно некоторые оценки для  $\lambda_{tk3}$ . Из (33.15) получаем

$$\lambda = \frac{E(w)}{\|w\|_{H_C}^2}, \quad E(w) = \|w\|_{H_k}^2 + \tilde{E}(w),$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(w) = \int_{\Omega} T_M^{ij} (\varepsilon_{ijM}^0 + B_{ij} w) d\Omega + \\ + 2 \left( \int_{\Gamma_6} k_p^{rr} w_{\tau M}^2 ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_{mM}^2 ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_{iM} w_{jM} ds \right). \end{aligned} \quad (33.53)$$

В (33.53)  $w_{\tau M}, w_{mM}, w_{iM}$  определяются из (32.10) через  $w$ , и  $\tilde{E}(w)$  можно рассматривать как некоторый неквадратичный функционал в  $H_k$ .

**Теорема 33.4.** Пусть выполнены условия теоремы 16.1 (соответственно 16.2, 16.3). Пусть тензор  $T_0^{ij}$  непрерывен в  $\bar{\Omega}$  и

положительно определен, т. е. выполняются неравенства

$$m(w_{\alpha_1}^2 + w_{\alpha_2}^2) \leq |T_{\beta}^{ij} w_{\alpha_i} w_{\alpha_j}| \leq M(w_{\alpha_1}^2 + w_{\alpha_2}^2), \quad m, M > 0. \quad (33.54)$$

В этом случае функционал  $\lambda$ , даваемый соотношением (33.53), имеет минимум  $\lambda_{\min}$  в некоторой точке  $w_{\min}$  (их может быть и несколько).

Для доказательства заметим, что  $\tilde{E}$  фактически совпадает с функционалом  $\Phi(w, 1)$ , если в нем принять

$$w \equiv 0, \quad a^* \equiv \omega_{\Pi} \equiv 0.$$

В силу теоремы 16.1 (соответственно 16.2, 16.3) соотношение (16.28) и соотношения (32.40) будем иметь при достаточно большой норме  $\|w\|_{H_x} = R$

$$\tilde{E} \geq m \|w\|_{H_x}^2,$$

и тогда для  $\lambda$  получаем при  $\|w\|_{H_x} \geq R$

$$\lambda \geq m.$$

Таким образом, необходимо рассмотреть  $\lambda$  при  $\|w\|_{H_x} \leq R$ . В силу структуры  $\lambda$  (33.53) имеем

$$\lambda \geq \|w\|_{H_C}^{-2} \left( \|w\|_{H_x}^2 + \int_{\Omega} (T_M^{ij} \varepsilon_{ijM}^0 + T_M^{ij} B_{ij} w) d\Omega \right).$$

Здесь отброшены положительные контурные интегралы. Далее, имеем

$$\lambda \geq \tilde{\lambda} + \|w\|_{H_C}^{-2} \left( \int_{\Omega} C_{ijk} T_M^{ij} T_M^{kl} d\Omega - \int_{\Omega} |T_M^{ij} B_{ij}| |w| d\Omega \right),$$

$$\tilde{\lambda} = \min \|w\|_{H_x}^2 \cdot \|w\|_{H_C}^{-2}.$$

В правой части  $\lambda_1$  дается соотношением (32.34) теоремы 32.3,  $C_{ijk}$  — положительно определенный тензор, введенный формулой (4.26). Далее, при любом  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |T_M^{ij} B_{ij}| \cdot |w| d\Omega \leq \frac{1}{2} \left( \varepsilon \int_{\Omega} |T_M^{ij} B_{ij}|^2 d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |w|^2 d\Omega \right),$$

и тогда

$$\lambda \geq \tilde{\lambda} + \|w\|_{H_C}^{-2} \left( \int_{\Omega} (C_{ijkl} T_M^{ij} T_M^{kl} - \frac{\varepsilon}{2} |T_M^{ij} B_{ij}|^2) d\Omega - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |w|^2 d\Omega \right).$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  имеем

$$\lambda \geq \tilde{\lambda} - \frac{\|w\|_{L_2\Omega}^2}{2\varepsilon \|w\|_{H_C}^2} \geq \lambda_1 - \frac{m}{2\varepsilon} \frac{\|w\|_{L_2\Omega}^2}{\|w\|_{W_2(1)\Omega}^2}.$$

Здесь учтено неравенство

$$m \|w\|_{H_C}^2 \geq \|w\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}^2, \quad (33.55)$$

которое является следствием теоремы 10.8 (соотношение (10.36)), если принять  $R(w) = \|w\|_{H_C}^2$ . При этом условие 2 теоремы 10.8 (соотношение (10.35)) будет выполнено вследствие (33.54). Наконец, учтем, что  $\|w\|_{L_{2\Omega}^2}$  имеет на сфере  $\|w\|_{W_{2\Omega}^{(1)}}$  максимум  $m_1$ , и тогда получаем

$$\lambda > \tilde{\lambda} - \frac{mm_1}{2\varepsilon}. \quad (33.56)$$

Таким образом, функционал  $\lambda$  ограничен снизу во всем пространстве  $H_*$ , откуда вытекает существование нижней грани  $\lambda(w)$  в  $H_*$ , которую обозначим  $\lambda_{\text{тк min}}$ .

Покажем, что существует хотя бы один элемент  $w_{\text{min}} \in H_*$  такой, что  $\lambda_{\text{тк min}} = \frac{E(w_{\text{min}})}{\|w_{\text{min}}\|_{H_C}^2}$ . Рассуждения повторяют во многом доказательство теоремы 21.4 и будут изложены в общих чертах. Пусть  $w_k$  — минимизирующая  $\lambda(w)$  последовательность. По доказанному  $w_k$  ограничена и слабо компактна. Будем считать ее слабо сходящейся, причем  $w_k \rightarrow w_0$ , и вначале предположим  $w_0 = 0$ . Тогда имеем тождественное соотношение

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_m - w_n}{2} \right\|_{H_*}^2 &= \|w_m\|_{H_C}^2 \frac{1}{2} \frac{\|w_m\|_{H_*}^2 + \tilde{E}(w_m)}{\|w_m\|_{H_C}^2} + \\ &+ \|w_n\|_{H_C}^2 \frac{1}{2} \frac{\|w_n\|_{H_*}^2 + \tilde{E}(w_n)}{\|w_n\|_{H_C}^2} - \left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_C}^2 \times \\ &\times \frac{\left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_*}^2 + \tilde{E}\left(\frac{w_m + w_n}{2}\right)}{\left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_C}^2} - \frac{1}{2} \tilde{E}(w_m) - \frac{1}{2} \tilde{E}(w_n) + \tilde{E} \frac{w_m + w_n}{2}. \end{aligned} \quad (33.57)$$

Учтем теперь, что  $\tilde{E}$ ,  $\|w\|_{H_C}^2$ , как это видно из (33.51), суть слабо непрерывные в  $H_*$  функционалы, что вытекает из соотношений (14.38) и теоремы 12.3 (соотношение (12.52)). Далее, при достаточно больших  $m$  и  $n$  имеем

$$\lambda_{\text{тк min}} \leq \frac{\|w_m\|_{H_*}^2 + \tilde{E}(w_m)}{\|w_m\|_{H_C}^2} \leq \lambda_{\text{тк min}} + \varepsilon_m, \quad (33.58)$$

$$\lambda_{\text{тк min}} \leq \frac{\|w_n\|_{H_*}^2 + \tilde{E}(w_n)}{\|w_n\|_{H_C}^2} \leq \lambda_{\text{тк min}} + \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_m, \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } m, n \rightarrow \infty;$$

$$\lambda_{ix \min} \leq \frac{\left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_x}^2 + \tilde{E} \left( \frac{w_m + w_n}{2} \right)^2}{\left\| \frac{w_m + w_n}{2} \right\|_{H_C}^2} \quad (33.59)$$

Соотношения (33.58), (33.59) следуют из определения  $w_{\min}$  как нижней грани  $E(w) \|w\|_{H_C}^{-2}$ . Из (33.58), (33.59) вытекает, что правая часть (33.57) исчезает при достаточно больших  $m, n$ , что в свою очередь означает сильную сходимость  $w_m$ . Этим доказательство теоремы 33.4 завершено. ■

**Т е о р е м а 33.5.** Пусть выполнены условия теоремы 33.1. В-этом случае

$$\lambda_{ix \min} \leq \lambda_{ixn}. \quad (33.60)$$

Действительно, по самому определению  $\lambda_{ixn}$  можно трактовать как нижнюю грань  $\lambda$  на множестве решений  $w$  НОУ (32.11);  $\lambda_{ix \min}$  определено нами как нижняя грань  $\lambda$  во всем пространстве  $H_x$ , т. е. на более широком множестве, откуда и следует (33.60).

**33.5.** НОУ (32.10), (32.11) могут быть сведены к некоторому операторному уравнению типа (13.33). Поскольку техника сведения была подробно изложена в § 13, то мы приведем окончательный результат

$$w = \overset{0}{G}_{xx} w + \lambda \overset{1}{G}_{xx}(w), \quad (33.61)$$

где

$$(\overset{0}{G}_{xx}(w) \cdot \varphi)_{H_x} = \int_{\Omega} T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{\alpha i} \varphi_{\alpha j}) d\Omega, \quad (33.62)$$

$$(\overset{1}{G}_{xx}(w) \cdot \varphi)_{H_x} = (w \cdot \varphi)_{H_C}.$$

**О п р е д е л е н и е 33.1.** Решение  $w_0 \neq 0$ , НОУ (32.10), (32.11), соответствующее  $\lambda_0$ , будем называть *неособым*, если уравнение

$$w = \sigma \left( \text{grad}_{H_x} \overset{0}{G}_{xx} w + \lambda_0 \text{grad}_{H_x} \overset{1}{G}_{xx} w \right) \text{ в точке } w_0 \quad (33.63)$$

не имеет  $\sigma = 1$  собственным значением.

**Л е м м а 33.5.** Пусть  $w_0, \lambda_0$  — неособое решение (33.61). В этом случае отрезок

$$\lambda_0 - \delta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \delta \quad (33.64)$$

при достаточно малом  $\delta$  принадлежит СНОУ (33.61) и, значит, справедливы (32.10), (32.11).



Для доказательства леммы 33.5 запишем (33.61) для  $\lambda = \lambda_0 + \delta$ .  
Имеем

$$w = G_{\text{жж}}^0(w) + \lambda_0 G_{\text{жж}}^1(w) + \delta G_{\text{жж}}^1(w). \quad (33.65)$$

Уравнение (33.65) относится к типу, рассмотренному в § 23. Лемма 33.5 устанавливается почти дословным повторением доказательства теоремы 23.1, и более подробно обосновываться не будет. ■

**Лемма 33.6.** Пусть  $w_n$  — любая собственная функция, соответствующая  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$ . В этом случае  $w_n$  — особое решение уравнения (33.61) при  $\lambda = \lambda_{t_{\text{жн}}}$ .

Действительно, если предположить, что  $w_n$  — неособое решение, то в силу леммы (33.5) отрезок  $\lambda_{t_{\text{жн}}} - \delta \leq \lambda \leq \lambda_{t_{\text{жн}}}$  принадлежит спектру НОУ (31.40), (31.44), а это невозможно по определению  $\lambda_{t_{\text{жн}}}$ . ■

33.6. Приведем некоторые общие факты, характеризующие поведение оболочек в задаче  $t_k$  после потери устойчивости.

**Теорема 33.6.** Пусть выполнены условия теоремы 33.1. В этом случае каждая поверхность пространства  $H_k$ , задаваемая уравнением

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}^0 = \frac{1}{2} \|w\|_H^2 + \mathcal{J}_{\text{жжз}} + \mathcal{J}_{\text{жж4}} = c, \quad c \geq \min \mathcal{J}_{\text{жж}}^0 \text{ на } H_k, \quad (33.66)$$

содержит по меньшей мере одно решение НОУ (32.40), (32.44) и соответственно (33.61).

Для доказательства теоремы заметим, что множество

$$\mathcal{J}_{\text{жж}}^0 \leq c \quad (33.67)$$

слабо замкнуто [5] в  $H_k$ . Действительно, пусть  $w_k \in \{\mathcal{J}_{\text{жж}}^0 \leq c\}$  и  $w_k \rightarrow w_0$ . Докажем, что  $w_0 \in \{\mathcal{J}_{\text{жж}}^0 \leq c\}$ . Имеем

$$\frac{1}{2} \|w_k\|_H^2 + \mathcal{J}_{\text{жжз}}(w_k) + \mathcal{J}_{\text{жж4}}(w_k) \leq c. \quad (33.68)$$

Из (33.68) следует

$$\frac{1}{2} \liminf \|w_k\|_H^2 + \mathcal{J}_{\text{жжз}}(w_0) + \mathcal{J}_{\text{жж4}}(w_0) \leq c. \quad (33.69)$$

Но поскольку  $w_k \rightarrow w_0$ , то

$$\frac{1}{2} \|w_0\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \liminf \|w_k\|_H^2. \quad (33.70)$$

Из (33.69), (33.70) следует слабая замкнутость (33.67).

Учтем теперь, что  $\|w\|_{H_C}^2$  — слабо непрерывный в  $H$  функционал, а значит,  $\|w\|_{H_C}^2$  на (33.67) достигает своего максимума. В этой точке, если предположить, что она внутренняя для (33.67), должно быть

$$\text{grad}_{H_k} \|w\|_{H_C}^2 = 0. \quad (33.71)$$

Но поскольку  $\|w\|_{H_C}^2$  — однородный квадратичный функционал в  $H$ , то из (33.71) вытекает  $w \equiv 0$ , что невозможно, ибо максимум  $\|w\|_{H_C}^2$  в (33.67) не может быть нулем. Таким образом, этот максимум достигается в какой-либо точке (33.66). Но в силу теоремы Люстерника [24, 31] в этой точке

$$\text{grad}_{H_x} \mathcal{J}_{xx}^0 = \lambda(c) \text{grad}_{H_x} \|w\|_{H_C}^2, \quad (33.72)$$

где  $\lambda(c)$  есть некоторая функция уровня  $c$ . ■

**Теорема 33.7.** Пусть выполнены условия теоремы 33.1. В этом случае любая поверхность  $H_x$ , задаваемая уравнением

$$\|w\|_{H_C}^2 = c^2 > 0, \quad (33.73)$$

содержит по крайней мере один собственный элемент  $w$ ,  $\lambda$  НОУ (32.10), (32.11), соответственно (33.61).

Доказательство теоремы в значительной степени базируется на рассуждениях теоремы 21.3, поэтому будет дано в кратком изложении. Во-первых, отметим, что имеет место представление

$$\mathcal{J}_{xx}^0 = \frac{1}{2} \|w\|_H^2 + \tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0, \quad (33.74)$$

где  $\tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0(w)$  — слабо непрерывный в  $H_x$  функционал.

Далее,  $\mathcal{J}_{xx}^0$  ограничен снизу в  $H_x$ , ибо этот функционал совпадает с функционалом  $\mathcal{J}_{xx}$ , даваемым (21.1), если  $a^* \equiv \omega_{\Pi}^* \equiv 0$ ,  $w_{\Pi}^* \equiv 0$ , и его ограниченность снизу следует из теоремы 21.1 для условий теоремы 16.1. Поэтому, если  $w_k$  — абсолютно минимизирующая  $\mathcal{J}_{xx}^0$  последовательность, то можно ее считать слабо сходящейся в  $H_x$ , и пусть  $w_k \rightarrow w_0$ . Покажем, что на самом деле

$$w_k \Rightarrow w_0. \quad (33.75)$$

Для этого каждому двум членам  $w_k, w_l$  последовательности  $w_k$  сопоставим число  $\alpha_{kl}$  такое, что

$$\left\| \alpha_{kl} \frac{w_k + w_l}{2} \right\|_{H_C} = c^2. \quad (33.76)$$

В § 32 было установлено, что

$$\alpha_{kl} \rightarrow 1, \text{ если } k, l \rightarrow \infty. \quad (33.77)$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{w_k - w_l}{2} \alpha_{kl} \right\|_H^2 &= \frac{\alpha_{kl}^2}{2} \|w_k\|_H^2 + \frac{\alpha_{kl}^2}{2} \|w_l\|_H^2 - \left\| \frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl} \right\|_H^2 + \\ &+ \tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0(\alpha_{kl} w_k) + \tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0(\alpha_{kl} w_l) - 2\tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0\left(\frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl}\right) + \\ &+ 2\tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0\left(\frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl}\right) - \tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0(\alpha_{kl} w_k) - \tilde{\mathcal{J}}_{xx}^0(\alpha_{kl} w_l). \end{aligned} \quad (33.78)$$

Учтем теперь соотношения

$$\mathcal{I}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_k) \rightarrow d, \quad \mathcal{I}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_l) \rightarrow d \quad \text{при } k, l \rightarrow \infty.$$

Но тогда при больших  $k, l$  будут справедливы неравенства

$$d \leq \frac{\alpha_{kl}^2}{2} \|w_k\|_H^2 + \tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_k) \leq d + \varepsilon_{kl},$$

$$d \leq \frac{\alpha_{kl}^2}{2} \|w_l\|_H^2 + \tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_l) \leq d + \varepsilon_{kl}, \quad (33.79)$$

$$2d \leq \left\| \frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl} \right\|_H^2 + 2\tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0\left(\frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl}\right), \quad \varepsilon_{kl} \rightarrow 0 \quad \text{при } k, l \rightarrow \infty.$$

Из (33.78), (33.79) имеем

$$\|w_k - w_l\|_H^2 \leq 8d + 8\varepsilon_{kl} - 8d + 8\tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0\left(\frac{w_k + w_l}{2} \alpha_{kl}\right) - \\ - 4\tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_k) - 4\tilde{\mathcal{I}}_{\kappa\kappa}^0(\alpha_{kl}w_l). \quad (33.80)$$

В силу слабой непрерывности  $\mathcal{I}_{\kappa\kappa}^0$  в  $H$ , а также предельного соотношения  $\varepsilon_{kl} \rightarrow 0$  из (33.78) имеем

$$\|w_k - w_l\|_H \rightarrow 0. \quad (33.81)$$

Таким образом,  $w_k$  сходится сильно в  $H$  к  $w_0$ , и тогда функционал  $\mathcal{I}_{\kappa\kappa}^0$ , даваемый (33.74), имеет минимум в точке  $w_0$  на (33.73). Отсюда в силу теоремы из [31] имеет место (33.72), и существование собственного элемента НОУ (32.10), (32.11) и соответственно (33.61) доказано. ■

### § 34. Глобальная устойчивость оболочек в задачах 9ж.

**Существование нижних критических чисел. Некоторые оценки для У-разбиений**

**34.1.** Рассмотрим НОУ (32.24), (32.25). Поскольку метод их анализа лишь технически будет отличаться от соображений, использованных в § 33, то мы ограничимся здесь формулировкой основных фактов. Прежде всего отметим, что понятия спектрального множества НОУ и регулярного множества НОУ здесь формулируются так же, как и для задачи *тж*. Выражение для потенциальной энергии  $\mathcal{I}_{\kappa}^{\lambda}$  имеет вид

$$\mathcal{I}_{\kappa}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left( \|w\|_H^2 - \lambda \|w\|_{H_C}^2 \right) + \mathcal{I}_{9ж3}(w) + \mathcal{I}_{9ж4}(w), \quad (34.1)$$

где

$$\|w\|_H^2 = \|w\|_{H_{\kappa}}^2 + \int_{\Omega} C_p^{ijkl} \nabla_{ij} \Psi_1 \nabla_{kl} \Psi_1 \, d\Omega, \quad (34.2)$$

$$\mathcal{I}_{\kappa 3}(w) = 2 \int_{\Omega} C_p^{ijkl} \nabla_{ij} \Psi_1 \nabla_{kl} \Psi_2 d\Omega, \quad (34.3)$$

$$\mathcal{I}_{\kappa 4}(w) = \int_{\Omega} C_p^{ijkl} \nabla_{ij} \Psi_2 \nabla_{kl} \Psi_2 d\Omega. \quad (34.4)$$

В (34.2)–(34.4)  $\Psi_1, \Psi_2$  определяются через  $w$  из (32.27), (32.28). Формула (34.1) получается, если в (7.31) совершить подстановку (32.23) и учесть условия осуществимости б. м. н. д. с. (32.19), (32.20).

**34.2.** Для дальнейших рассмотрений нам потребуется соотношение

$$\Phi(w, 1) = 0, \quad (34.5)$$

составленное с учетом условий б. м. н. д. с. (32.19), (32.20).

Уравнение (34.5) можно получить, если в (19.2) подставить (32.23). Однако более элементарно мы получим (34.5), если в (32.24) поставим  $\varphi \rightarrow w$  и учтем (32.25). Имеем

$$\|w\|_{H_{\kappa}}^2 = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} w - w_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi_M d\Omega + \lambda \|w\|_{H_C}^2. \quad (34.6)$$

Подставив в (32.25)  $\theta = \Psi_M$ , получим

$$\|\Psi_M\|_{H_{\theta}}^2 = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} w_{\alpha i} w_{\alpha j} - B_{ij} w \right) C^{ik} C^{jl} \nabla_{kl} \Psi_M d\Omega. \quad (34.7)$$

Из (34.6)–(34.7) получаем

$$\|w\|_{H_{\kappa}}^2 + 2 \|\Psi_M\|_{H_{\theta}}^2 + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} B_{ij} \nabla_{kl} \Psi_M w d\Omega - \lambda \|w\|_{H_C}^2 = 0. \quad (34.8)$$

Соотношение (34.8) совпадает с (34.5).

**Теорема 34.1.** Пусть выполнены условия теоремы 19.1, условия существования б. м. н. д. с. (32.19), (32.20) и условия (32.66). В этом случае СНОУ (32.24), (32.25) лежит справа от некоторой точки  $\lambda_{9\kappa}^*$ . Все точки  $\lambda < \lambda_{9\kappa}^*$  принадлежит РНОУ (32.24), (32.25).

Для доказательства теоремы 34.1 рассмотрим агрегат в (34.8), определяемый соотношением

$$\mathfrak{E}(\nabla_{ij} \Psi_M) = 2 \|\Psi_M\|_{H_{\theta}}^2 + \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} B_{ij} \nabla_{kl} \Psi_M w d\Omega. \quad (34.9)$$

Его можно исследовать методами § 29 как и функционал  $\mathfrak{E}(T_M^{ij})$  и доказать, что он имеет минимум, определяемый соотношением

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\min}(\nabla_{ij} \Psi_M) &= -\frac{1}{8} \int_{\Omega} N_{9\kappa} w^2 d\Omega; \\ N_{9\kappa} &= C_{ijkl,p} C^{iq} C^{jr} C^{hs} C^{lt} \tilde{B}_{qr} \tilde{B}_{st}. \end{aligned} \quad (34.10)$$

Здесь  $N_{9к}$  — упруго-геометрический комплекс, введенный соотношением (29.46). Из (34.8) получаем

$$\|w\|_{H_k}^2 - \lambda \|w\|_{H_C}^2 - \frac{1}{8} \int_{\Omega} N_{9к} w^2 d\Omega \leq 0. \quad (34.11)$$

Введем теперь параметр

$$\lambda_{9к}^* = \min \left( \|w\|_{H_k}^2 - \frac{1}{8} \int_{\Omega} N_{9к} w^2 d\Omega \right) \text{ при } \|w\|_{H_C}^2 = 1. \quad (34.12)$$

Существование  $\lambda_{9к}^*$  обеспечивается леммой 33.1. Из (34.11), (34.12) следует

$$(\lambda_{9к}^* - \lambda) \|w\|_{H_C}^2 \leq 0, \quad (34.13)$$

откуда при  $\lambda < \lambda_{9к}^*$  следует

$$\|w\|_{H_C}^2 = 0, \quad (34.14)$$

и значит,  $w \equiv 0$ . Доказательство теоремы 34.1 завершено. ■

Очевидно, по своему определению  $\lambda_{9к}^*$  есть наименьшее собственное число ЛОУ

$$(w \cdot \varphi)_{H_k} - \frac{1}{4} \int_{\Omega} N_{9к} w \varphi d\Omega - \lambda (w \cdot \varphi)_{H_C} = 0, \quad (34.15)$$

которое можно записать в виде

$$\tilde{\nabla}_{ij} D D_{ik}^{ijhl} \nabla_{hl} w - \frac{1}{4} N_{9к} w D + \lambda_{9к}^* (T_6^{ij} w_{\alpha i} D)_{\alpha j} = 0 \quad (34.16)$$

при сохранении граничных условий (33.28), (33.29).

**Теорема 34.2.** Пусть выполнены условия теоремы 34.1. В этом случае полупрямая  $\lambda > \lambda_{9к}$  принадлежит СНОУ (32.24), (32.25), причем в точках спектра наряду с б. м. н. д. с. оболочка будет иметь и м. н. д. с. с более низким уровнем полной энергии системы оболочка — упругие связи — внешние усилия.

Доказательство теоремы 34.2 в полной мере повторяет доказательство теоремы 33.2 с той лишь разницей, что вместо  $\mathcal{J}_{ix}^{\lambda}$  используется функционал  $\mathcal{J}_{9к}^{\lambda}$ , определяемый (34.1). ■

Таким образом, в задаче 9к полупрямая  $\lambda > \lambda_{9к}$  принадлежит  $U_k$ ,  $k \geq 2$ , и в данной задаче теорема 34.2 вскрывает важную роль эйлеровой характеристики  $\lambda_{9к}$ , при глобальном анализе проблемы устойчивости, заключающуюся в том, что при  $\lambda > \lambda_{9к}$  появляющаяся м. н. д. с. более устойчива, чем б. н. д. с. И здесь отметим, что фактически, по-видимому, при  $\lambda > \lambda_{9к}$  появляются дополнительно два м. н. д. с. Это обстоятельство при малых превышениях  $\lambda$  над  $\lambda_{9к}$  обнаруживается в ряде случаев аналитическими методами.

**34.3.** Как и в задаче *тх*, вводим  $\lambda_{9\kappa\text{н}}$ , как такое число, что при  $\lambda < \lambda_{9\kappa\text{н}}$  оболочка имеет единственную б. м. н. д. с., а в малом полуинтервале  $\lambda_{9\kappa\text{н}} \leq \lambda < \lambda_{9\kappa\text{н}} + \varepsilon$  имеется по крайней мере одно м. н. д. с.

**Теорема 34.3.** Пусть выполнены условия теоремы 34.1. В этом случае  $\lambda_{9\kappa\text{н}}$  существует, причем имеют место неравенства

$$\lambda_{9\kappa}^* \leq \lambda_{9\kappa\text{н}} \leq \lambda_{9\kappa\text{э}}. \quad (34.17)$$

**Теорема 34.3** есть прямое следствие теорем 34.1 и 34.2. ■

В условиях задачи  $9\kappa$  расчет  $\lambda_{9\kappa\text{н}}$  явился предметом громадного числа исследований. Список этих работ, далеко неполный, дан в § 25—28, см. литературу к гл. VI. Теорема 34.3 устанавливает существование нижнего критического числа как математический факт.

Приведем некоторые оценки для  $\lambda_{9\kappa\text{н}}$ .

**Лемма 34.1.** Пусть в условиях теоремы 34.1 существует элемент  $w \in H_\kappa$  такой, что

$$\mathcal{J}_\kappa^{\lambda_{9\kappa\text{э}}}(w) < 0. \quad (34.18)$$

В этом случае имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{9\kappa\text{н}} < \lambda_{9\kappa\text{э}}. \quad (34.19)$$

**Лемма 34.2.** Пусть  $w_1$  — какой-либо собственный элемент ЛОУ (32.29), принадлежащий  $\lambda_{9\kappa\text{э}}$ , и

$$\mathcal{J}_{\kappa 3}(w_1) \neq 0. \quad (34.20)$$

В этом случае справедливо (34.19). При этом имеет место неравенство

$$\lambda_{9\kappa\text{н}} \leq \lambda_{9\kappa\text{э}} \left( 1 - \frac{\mathcal{J}_{\kappa 3}^2(w_1)}{4\mathcal{J}_{\kappa 4}(w_1)\lambda_{9\kappa\text{э}}} \right). \quad (34.21)$$

В (34.21)  $w_1$  нормирована условием  $\|w_1\|_{H_C}^2 = 1$ .

Доказательства лемм 34.1, 34.2 не приводятся из-за полной аналогии с 33.2 и 33.3. Как и в задаче *тх*, эти леммы утверждают невозможность использовать эйлеров принцип линеаризации около б. м. н. д. с. для решения задач устойчивости, так как м. н. д. с. появляются уже при  $\lambda < \lambda_0$  и возможен переход в эти напряженные состояния.

**Лемма 34.3.** Пусть выполнено условие

$$\mathcal{J}_{\kappa 2}^{\lambda_{9\kappa\text{э}}}(w) + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{\kappa 3}(w) + 2\mathcal{J}_{\kappa 4}(w) \neq 0 \quad (34.22)$$

при любом  $w \in H_\kappa$ . В этом случае

$$\lambda_{9\kappa\text{н}} = \lambda_{9\kappa\text{э}}. \quad (34.23)$$

**34.4.** Рассмотрим дополнительно некоторые оценки для  $\lambda_{9жн}$ . Для этого введем функционал

$$\lambda(w) = \frac{\mathcal{E}(w)}{\|w\|_{H_C}^2}, \quad (34.24)$$

$$\mathcal{E}(w) = \|w\|_{H_x}^2 - \int_{\Omega} C^{ik} C^{jr} (B_{ij} w - w_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kr} \Psi_M d\Omega,$$

в котором  $\Psi_M$  определено через  $w$  из (32.25).

**Теорема 34.4.** Пусть выполнены условия теоремы 19.3 и, кроме того, (33.54). В этом случае функционал  $\lambda(w)$ , даваемый (34.24), имеет абсолютный минимум  $\lambda_{9ж\min}$  в некоторой точке  $w_{\min} \in H_x$  (таких точек может быть несколько).

**Теорема 34.5.** Пусть выполнены условия теоремы 34.4. В этом случае справедливо неравенство

$$\lambda_{9ж\min} \leq \lambda_{9жн}. \quad (34.25)$$

**34.5.** НОУ (32.24), (32.25) могут быть сведены к некоторому операторному уравнению типа (17.19) и (17.20):

$$w = \overset{0}{G}_x w + \lambda \overset{1}{G}_x w, \quad (34.26)$$

где

$$(\overset{0}{G}_x w \cdot \varphi)_{H_x} = \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha i} w_{\alpha j}) \nabla_{kr} \Psi_M d\Omega, \quad (34.27)$$

$$(\overset{1}{G}_x w \cdot \varphi)_{H_x} = (w \cdot \varphi)_{H_C}. \quad (34.28)$$

**Определение 34.1.** Решение  $w_0 \neq 0$ ,  $\lambda_0$  (32.24), (32.25) будем называть неособым, если ЛОУ

$$w = \sigma (\text{grad}_{H_x} \overset{0}{G}_x w + \lambda_0 \text{grad}_{H_x} \overset{1}{G}_x w) \quad (34.29)$$

не имеет  $\sigma = 1$  собственным значением.

**Лемма 34.4.** Пусть  $w_0$ ,  $\lambda_0$  — неособое решение (34.26). В этом случае отрезок

$$\lambda_0 - \delta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \delta \quad (34.30)$$

при достаточно малом  $\delta$  принадлежит СНОУ (32.24), (32.25) и соответственно (34.26).

**Лемма 34.5.** Пусть  $w_0$  — любое решение НОУ (32.24), (32.25), соответствующее  $\lambda_{9жн}$ . В этом случае  $w_0$ ,  $\lambda_{9жн}$  образуют особое решение (32.24), (32.25), (33.26).

**34.6.** Приведем некоторые общие факты, характеризующие поведение оболочек в задаче 9ж после потери устойчивости.

**Теорема 34.6.** Пусть выполнены условия теоремы 34.1. В этом случае каждая поверхность пространства  $H_x$ , задаваемая

уравнением

$$\mathcal{I}_x^0 = \frac{1}{2} \|w\|_H^2 + \mathcal{I}_{x3} + \mathcal{I}_{x4} = c, \quad c \geq \min \mathcal{I}_x^0 \quad \text{в } H_x, \quad (34.34)$$

где  $\|w\|_H^2$  дается соотношением (32.76), содержит по меньшей мере одно решение НОУ (32.24), (32.25) и соответственно (34.26).

**Теорема 34.7.** Пусть выполнены условия теоремы 34.1. В этом случае каждая поверхность пространства  $H_x$ , задаваемая уравнением

$$\|w\|_{H_C}^2 = c^2, \quad (34.32)$$

содержит по крайней мере один собственный элемент  $w$ ,  $\lambda$  НОУ (32.24), (32.25) и соответственно (34.26). ■

### § 35. Ветвление решений в окрестности б.м.н.д.с. оболочек

**35.1. Определение 35.1.** Точкой ветвления  $\bar{\lambda}$  на прямой  $-\infty < \lambda < \infty$  для НОУ (32.10), (32.11) назовем такую точку, что для любой сколь угодно малой величины  $\varepsilon$  существует решение  $w(\lambda)$  такое, что

$$\|w(\lambda)\|_{H_x} \leq \delta(\varepsilon), \quad |\lambda - \bar{\lambda}| \leq \varepsilon, \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (35.1)$$

Изучение ветвлений в нелинейной теории упругости (да и вообще в математическом естествознании) было, как уже говорилось, начато Л. Эйлером [33]. Содержание настоящего параграфа посвящается установлению связи между ветвлением решения НОУ (32.10), (32.11), (32.24), (32.25) и собственными элементами ЛОУ (32.16), (32.29).

**Теорема 35.1.** Пусть выполнены условия теоремы 16.1. Тогда для того чтобы  $\bar{\lambda}$  была точкой ветвления НОУ (32.10), (32.11), необходимо и достаточно, чтобы  $\bar{\lambda}$  принадлежало спектру ЛОУ (32.16), т. е. необходимо и достаточно, чтобы  $\bar{\lambda}$  совпадало с одним из собственных чисел ЛОУ (32.16).

Для доказательства необходимости в теореме 35.1 представим НОУ (33.61) в следующем виде:

$$w = \overset{0}{G}_{\mu\mu 1}(w) + \overset{0}{G}_{\mu\mu 2}(w) + \overset{0}{G}_{\mu\mu 3}(w) + \lambda \overset{1}{G}_{\mu\mu 1}(w). \quad (35.2)$$

Здесь операторы  $\overset{0}{G}_{\mu\mu\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , даются соотношениями (14.19) — (14.21), в которых следует положить  $a^* \equiv T_0^{ij} \equiv 0$ . Пусть  $\bar{\lambda}$  — точка ветвления, тогда должна существовать последовательность решений (35.2)  $w_{1k} \neq 0$ ,  $\lambda_{1k}$  такая, что

$$\|w_{1k}\|_{H_x} \rightarrow 0, \quad \lambda_{1k} \rightarrow \bar{\lambda}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (35.3)$$

Пусть, далее,  $\bar{\lambda}$  не принадлежит спектру ЛОУ (32.16). В этом слу-



чае имеем

$$w_{1k} - \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 1} w_{1k} - \bar{\lambda} \overset{1}{G}_{\kappa\kappa} w_{1k} = \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 2} (w_{1k}) + \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 3} (w_{1k}) + (\lambda_{1k} - \bar{\lambda}) \overset{1}{G}_{\kappa\kappa 1} (w_{1k}) \quad (35.4)$$

и, далее,

$$w_{1k} = (\mathbf{I} - \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 1} - \bar{\lambda} \overset{1}{G}_{\kappa\kappa})^{-1} \{ \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 2} (w_{1k}) + \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 3} (w_{1k}) + (\lambda_{1k} - \bar{\lambda}) \overset{1}{G}_{\kappa\kappa 1} (w_{1k}) \}, \quad (35.5)$$

и, наконец, из (35.5) получаем

$$\|w_{1k}\|_{H_\kappa} \leq m \left( \|w_{1k}\|_{H_\kappa} + \|w_{1k}\|_{H_\kappa}^2 + (\lambda_{1k} - \bar{\lambda}) \|w_{1k}\|_{H_\kappa} \right). \quad (35.6)$$

При выводе (35.6) учтены (14.4) и неравенство

$$\|(\mathbf{I} - \overset{0}{G}_{\kappa\kappa 1} - \bar{\lambda} \overset{1}{G}_{\kappa\kappa})^{-1}\| \leq m, \quad (35.7)$$

вытекающее из способа определения этого оператора. Однако легко видеть, что (35.3) противоречит (35.6). Таким образом, если  $\bar{\lambda}$  не принадлежит спектру ЛОУ (32.16), то она не может быть точкой ветвления. ■

При доказательстве достаточности в теореме 35.1 было бы естественно сослаться на соответствующую теорему М. А. Красносельского [21], однако НОУ (33.61) и соответственно НОУ (35.2) не подходят под тип уравнений, рассмотренный в [21], где изучены уравнения вида

$$w = \lambda A w, \quad (35.8)$$

где  $A$  — потенциальный вполне непрерывный оператор. Структура (35.2) существенно отличается от (35.8). Однако вариационные соображения, которые лежат в основе анализа (35.8), могут быть использованы и в нашем случае. Для этого заметим, что (35.2) эквивалентно отысканию условных экстремумов функционала  $\frac{1}{2} \|w\|_{H_\kappa}^2$  на поверхности

$$\frac{1}{2} \|w\|_H^2 + \mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w) + \mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w) = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad (35.9)$$

и для доказательства достаточности условий теоремы 35.1 необходимо установить для каждого  $\bar{\lambda}_k$ , принадлежащего СЛОУ (32.16), существование последовательности (35.3). С этой целью построим в  $H_\kappa$  операторное отображение вида

$$w = \varepsilon \bar{w} \mu(\bar{w}), \quad (35.10)$$

где

$$\mu^2(\bar{w}) + 2\varepsilon \mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(\bar{w}) \mu^3(\bar{w}) + 2\varepsilon^2 \mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(\bar{w}) \mu^4(\bar{w}) = 1. \quad (35.11)$$

Функционал  $\mu(\bar{w})$  в (35.10) определяется из (35.11).

Лемма 35.1. Отображение (35.10), (35.11) при малых  $\varepsilon$  есть гомеоморфизм в  $H$ , при котором поверхность (35.9) переходит в сферу  $\|\bar{w}\|_H = 1$ .

Для доказательства леммы 35.1 учтем, что из (35.10), (35.11) при малых  $\varepsilon$  можно выразить  $\bar{w}$  через  $w$ . При этом надо условиться выбирать в (35.11) единственный положительный при малом  $\varepsilon$  корень. Это отображение можно записать в виде

$$\bar{w} = \frac{w}{\varepsilon} + \dots, \quad \mu = 1 + \varepsilon\mu_1(w) + \dots \quad (35.12)$$

Из (35.12) можно найти  $w \rightarrow \bar{w}$  при малых  $\varepsilon$ .

Таким образом, отыскание собственных элементов (35.2) сведено нами к нахождению экстремумов функционала

$$\mathcal{J}(\bar{w}) = \mu^2(\bar{w}) \|\bar{w}\|_{H_C}^2 \text{ на сфере } \Sigma: \|\bar{w}\|_H^2 = 1. \quad (35.13)$$

Дальнейшее рассмотрение потребует некоторых оценок.

Лемма 35.2. При достаточно малых  $\varepsilon$  справедливы оценки

$$1 - m\varepsilon \leq \mu(\bar{w}) \leq 1 + m\varepsilon, \quad \|\bar{w}\|_H^2 = 1. \quad (35.14)$$

Оценка (35.14) получается из (35.11), если положить  $\|\bar{w}\|_H^2 = 1$ . Тогда из слабой непрерывности  $\mathcal{J}_{\mu\mu}$  ( $\mu = 3, 4$ ) имеем

$$|\mathcal{J}_{\mu\mu}(\bar{w})| \leq m, \quad (35.15)$$

и, кроме того, при выполнении условий теоремы 16.1 имеет место неравенство (16.19)

$$\mathcal{J}_{\mu\mu}(\bar{w}) \geq m. \quad (35.16)$$

Из (35.11), (35.15), (35.16) при малых  $\varepsilon$  вытекает (35.14), откуда, кстати, следует

$$|\mu^2 - 1| \leq m\varepsilon. \quad \blacksquare \quad (35.17)$$

Лемма 35.3. Имеет место соотношение

$$\text{grad} \|\bar{w}\|_{H_C}^2 = 2A\bar{w}, \quad (35.18)$$

где  $A$  — ограниченный в  $H$  оператор и

$$\text{grad} \mu = - \frac{3G_{\mu\mu 2}(\bar{w}) + 4\varepsilon\mu(\bar{w})G_{\mu\mu 3}(\bar{w})}{1 + 3\varepsilon\mu\mathcal{J}_{\mu\mu 3}(\bar{w}) + 4\mu^2\varepsilon^2\mathcal{J}_{\mu\mu 4}(\bar{w})} \varepsilon\mu^2(\bar{w}). \quad (35.19)$$

В (35.19) grad берется в пространстве  $H$ .

Для доказательства (35.18) учтем, что

$$\frac{d}{d\alpha} \|\bar{w} + \alpha\varphi\|_{H_C}^2 \Big|_{\alpha=0} = 2(\bar{w} \cdot \varphi)_{H_C} = 2(A\bar{w} \cdot \varphi)_H. \quad (35.20)$$

Оператор  $A$  в правой части (35.20) существует и ограничен в силу неравенства (32.40). Формула (35.19) получается из (35.12), если учесть соотношения

$$\text{grad } \mathcal{J}_{\text{жж}}(\bar{w}) = \mu G_{\text{жж}^{-1}}, \quad (35.21)$$

вытекающие из определения операции градиента [5] и соотношений (35.2) для операторов  $G_{\text{жж}}$  и (33.8) для  $\mathcal{J}_{\text{жж}}$ . Более детально, дифференцируя (35.11), имеем

$$2\mu \text{grad } \mu + 6\varepsilon G_{\text{жж}2}(\bar{w}) \mu^3(\bar{w}) + 6\varepsilon \mu^2(\bar{w}) G_{\text{жж}2} \text{grad } \mu + \\ + 8\varepsilon^2 \mu^4(\bar{w}) G_{\text{жж}3}(\bar{w}) + 8\varepsilon^2 \mu^3(\bar{w}) \text{grad } \mu \mathcal{J}_{\text{жж}}(\bar{w}) = 0. \quad (35.22)$$

Из (35.22) следует (35.19). Лемма 35.3 доказана. ■

**Лемма 35.4.** Функционал  $\mathcal{J}(w) = \mu^2(w) \|w\|_{H_C}^2$  при малых  $\varepsilon$  близок к квадратичному  $\|w\|_{H_C}^2$ .

Для доказательства леммы следует установить два соотношения на сфере  $\Sigma: \|\bar{w}\|_H^2 = 1$ :

$$\mathcal{J}(\bar{w}) - \|\bar{w}\|_{H_C}^2 \rightarrow 0, \\ \|\text{grad } \mathcal{J}(\bar{w}) - \text{grad } \|\bar{w}\|_{H_C}^2\|_H \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (35.23)$$

Первое из соотношений (35.23) устанавливается непосредственно:

$$\mathcal{J}(\bar{w}) - \|\bar{w}\|_{H_C}^2 = (\mu^2 - 1) \|\bar{w}\|_{H_C}^2, \quad (35.24)$$

и дальше следует учесть (35.17) и неравенства (32.40), (32.41). Второе соотношение (35.24) требует более детальных рассмотрений:

$$\text{grad } \mathcal{J}(\bar{w}) - \text{grad } \|\bar{w}\|_{H_C}^2 = \\ = \text{grad } [(\mu^2 - 1) \|\bar{w}\|_{H_C}^2] = 2\mu \text{grad } \mu \|\bar{w}\|_{H_C}^2 + (\mu^2 - 1) \text{grad } \|\bar{w}\|_{H_C}^2 = \\ = -2\varepsilon \mu^3 \frac{3G_{\text{жж}2}(\bar{w}) + 4\varepsilon \mu G_{\text{жж}3}(\bar{w})}{1 + 3\varepsilon \mu G_{\text{жж}3}(\bar{w}) + 4\mu^2 \varepsilon^2 G_{\text{жж}4}(\bar{w})} \|\bar{w}\|_{H_C}^2 + (\mu^2 - 1) 2A\bar{w}. \quad (35.25)$$

В (35.25) использованы (35.18), (35.19). Далее, оба слагаемых в правой части исчезают при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что следует из первого из соотношений (35.23), ограниченности оператора  $A$ , неравенства (35.40), неравенства (35.15). ■

Таким образом, выполнены все условия теоремы о критических точках близких функционалов, на основе которой заключаем, что если  $\bar{\lambda}_k$  принадлежит СЛЮУ (32.16), т. е. является критической точкой  $\|\bar{w}\|_{H_C}^2$  на поверхности

$$\|\bar{w}\|_H^2 = 1, \quad (35.26)$$

то при достаточно малом  $\varepsilon$  будут существовать такие числа  $\lambda_k$  и элементы  $\bar{w}_k$ , что  $\bar{w}_k$  есть критическая точка  $\mu^2(\bar{w}) \|w\|_{HC}^2$  на (35.26) и, кроме того,

$$|\lambda_k - \bar{\lambda}_k| \leq m\varepsilon. \quad (35.27)$$

Но тогда в силу (35.10) будем иметь, что  $w_k = \varepsilon \mu(\bar{w}_k) \bar{w}_k$  будет осуществлять экстремум  $\|w\|_{HC}^2$  на поверхности (35.9). При этом

$$\|w_k\|_H \sim \|w_k\|_{HC} \leq m\varepsilon, \quad (35.28)$$

и точка  $\lambda_k$  есть точка ветвления НОУ (32.10), (32.11). Таким образом, установлено, что каждая точка  $\lambda_k$  СЛОУ (32.16) есть точка ветвления НОУ (32.10), (32.11).

Теорема 35.1 доказана. ■

Ее значение заключается в том, что без употребления аналитических средств, которые характерны вообще для методов теории ветвления, установлен важный факт: каждое собственное число ЛОУ есть точка ветвления. Этот результат есть проявление внутренних свойств краевых задач нелинейной теории оболочек, вскрытых использованием тополого-вариационных методов. Его основу составляет потенциальность системы. Известно также, что такой факт имеет место не всегда, и известны примеры, когда собственное значение ЛОУ не является точкой ветвления соответствующего нелинейного операторного уравнения [1]. ■

Теорема 35.2. Ветвь решений, выходящая из первого собственного значения  $\lambda_1 = \lambda_{1*}$  ЛОУ (32.14), (32.16), может быть продолжена неограниченно, точнее, каждому значению уровня (33.8) соответствует по крайней мере один собственный элемент НОУ (32.10), (32.11).

Теорема 35.2 непосредственно вытекает из теоремы 33.7. Необходимо лишь проверить, что если

$$\|w\|_{HC}^2 = c^2 \rightarrow 0, \quad (35.29)$$

то

$$\lambda(c) \rightarrow \lambda_1. \quad (35.30)$$

Из (33.54), (35.29) следует

$$\|w\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \rightarrow 0, \text{ если } c \rightarrow 0. \quad (35.31)$$

Для собственного числа НОУ имеем соотношение

$$\lambda = \frac{\|w\|_H^2 + 3\mathcal{J}_{\text{ккз}}(w) + 4\mathcal{J}_{\text{кк4}}(w)}{\|w\|_{HC}^2}. \quad (35.32)$$

В (35.32)  $\|w\|_H$  дается формулой (32.72). Далее, в силу самой структуры  $\mathcal{J}_{\text{кк4}}(w)$ ,  $\mu = 3, 4$ , получаем

$$\frac{3\mathcal{J}_{\text{ккз}}(w) + 4\mathcal{J}_{\text{кк4}}(w)}{\|w\|_{HC}^2} \rightarrow 0, \text{ если } c \rightarrow 0. \quad (35.33)$$

Но

$$\frac{\|w\|_H^2}{\|w\|_{H_C}^2} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_{1\text{кз}} \quad (35.34)$$

поскольку в теореме 33.7 минимизация  $\mathcal{J}_{\text{кз}}^0$  проводилась на всем множестве элементов, принадлежащих сфере (33.73). Теорема 35.2 доказана. ■

**35.2. Теорема 35.3.** Пусть выполнены условия 1—7 § 17. В этом случае каждое собственное значение  $\lambda_k$  ЛОУ (32.27), (32.29) есть точка ветвления НОУ (32.24), (32.25).

**Теорема 35.4.** Ветвь решений, выходящая из первого собственного значения ЛОУ (32.27), (32.29)  $\lambda_1 = \lambda_{9\text{кз}}$ , может быть продолжена неограниченно, точнее, каждому значению уровня (34.31) соответствует по крайней мере один собственный элемент НОУ (32.24), (32.25).

Поскольку доказательство теорем 35.3, 35.4 в большой степени было бы повторением доказательства теорем 35.1, 35.2, то мы его здесь в деталях не приводим. Отметим лишь, что вместо поверхности (35.9) рассматриваем поверхность

$$\frac{1}{2} \|w\|_H^2 + \mathcal{J}_{\text{кз}}(w) + \mathcal{J}_{\text{к4}}(w) = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad (35.35)$$

где  $\mathcal{J}_{\text{к4}}$  определяются (34.3), (34.4). Вместо (35.32) получаем формулу

$$\lambda = \frac{\|w\|_H^2 + 3\mathcal{J}_{\text{кз}}(w) + 4\mathcal{J}_{\text{к4}}(w)}{\|w\|_{H_C}^2}. \quad (35.36)$$

Поверхности (35.35) и (35.9) отличаются тем, что  $\|w\|_H$  в (35.9) берется в соответствии с (32.72), а в (35.35) — в соответствии с (32.76).

В заключение отметим, что основной результат данного параграфа можно трактовать как установление важных равенств

$$\lambda_B = \lambda_{1\text{к1}} = \lambda_{1\text{кз}}, \quad \lambda_B = \lambda_{9\text{к1}} = \lambda_{9\text{кз}}, \quad (35.37)$$

которые вместе с (33.32) и (34.17) полностью решают вопрос о соотношениях этих характеристик как в случае задачи  $1\text{к}$ , так и  $9\text{к}$  [10—14]. Здесь  $\lambda_B$  — наименьшая точка ветвления на оси  $\lambda$  нелинейной краевой задачи (32.24), (32.25).

## § 36. Вариационные методы в глобальной устойчивости пологих оболочек

**36.1.** При решении задачи глобальной устойчивости в первую очередь необходимо определить  $\lambda_n$  и соответственно сделать первый шаг в построении  $U$ -разбиений для данной задачи. При этом обычно исходят из того факта, что при  $\lambda = \lambda_n$  соответствующее решение

$w_n$  НОУ (13.39), (17.19) является особым. Именно на этом обстоятельстве базируются все численные подходы. Обычно решение задачи разделяется на два этапа. На первом этапе соответствующие нелинейные задачи решаются при каком-либо фиксированном параметре нагружения  $\lambda$  и затем отыскиваются те значения параметра, где наступает вырождение. В некоторых случаях обе операции объединяются. Пусть  $\Phi_k$  — некоторая система функций, удовлетворяющая условиям § 26. Будем искать приближенное решение НОУ (32.10), (32.11) в виде (26.1). Для определения  $D_{nk}$  используем систему

$$\frac{\partial}{\partial D_{nk}} (\mathcal{J}_{kx2}^0 + \mathcal{J}_{kx3} + \mathcal{J}_{kx4}) = \lambda \frac{\partial}{\partial D_{nk}} \frac{1}{2} \|w_n\|_{H_C}^2, \quad (36.1)$$

$$\mathcal{J}_{kx}^0 = \mathcal{J}_{kx2}^0 + \mathcal{J}_{kx3} + \mathcal{J}_{kx4} = c > \min \mathcal{J}_{kx}^0; \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{J}_{kx2}^0 = \frac{1}{2} \|w\|_H^2, \quad \|w\|_H \rightarrow (32.72). \quad (36.2)$$

При этом рассмотрим наиболее широко используемый здесь метод П. Ф. Папковича, когда перемещения  $w_1, w_2$  выражены через  $w$  из (13.6) или (13.36). Система (36.1) содержит  $n+1$  неизвестных:

$D_{nk}$  и  $\lambda$ . Поэтому она должна решаться совместно с уравнением (36.2). Приведем некоторые факты, обосновывающие эту схему.

Лемма 36.1. Система (36.1), (36.2) имеет по меньшей мере одно действительное решение при каждом  $n$ .

Лемма легко доказывается, если учесть, что все агрегаты от  $D_{nk}$  в (36.1), (36.2) являются полиномами, а функционал  $\frac{1}{2} \|w_n\|_{H_C}^2$  ограничен снизу на (36.2) и, значит, имеет минимум. Далее, поскольку  $w_n$  принадлежит (36.2), то все приближения находятся в некоторой сфере  $H_x$  и поэтому образуют слабо компактное в  $H_x$  множество. ■

Лемма 36.2. Всякая слабо сходящаяся в  $H_x$  последовательность из  $\{w_n\}$  либо сходится слабо к нулю, либо сходится сильно. При этом каждый сильный предел  $\{w_n\}$  в  $H_x$  является собственной функцией для НОУ (32.10), (32.11).

Пусть  $w_n \rightarrow w_0 \neq 0$  в  $H_x$ . Покажем прежде всего, что числовая последовательность  $\lambda^n$  сходится. Действительно, для  $\lambda^n$  имеем формулу (35.32), откуда с учетом (36.2) получаем

$$\lambda^n = \frac{2c + \mathcal{J}_{kx3}(w_n) + 2\mathcal{J}_{kx4}(w_n)}{\|w_n\|_{H_C}^2}, \quad (36.3)$$

и в силу слабой непрерывности правой части (36.3) и условия  $w_n \neq 0$  при достаточно большом  $n$  получаем

$$\lambda^n \rightarrow \lambda^0 = \frac{2c + \mathcal{J}_{kx3}(w_0) + 2\mathcal{J}_{kx4}(w_0)}{\|w_0\|_{H_C}^2}. \quad (36.4)$$

Учтем теперь, что уравнениям (36.1) можно придать вид

$$(w_n \cdot \varphi_k)_{H_n} = \int_{\Omega} T_M^{ij}(w_n) (B_{ij} \varphi_k - w_{n\alpha i} \cdot \varphi_{k\alpha j}) d\Omega + \overset{n}{\lambda} (w_n \cdot \varphi_k)_{H_C}, \quad (36.5)$$

где  $T_M^{ij}$  определяются через  $\omega_M(w_n)$ , которые в свою очередь необходимо найти из (32.10), где вместо  $w$  совершается подстановка  $w_n$ . Покажем сейчас, что  $w_0$  есть решение НОУ (32.10), (32.11). Для этого рассмотрим следующую цепь преобразований:

$$\begin{aligned} 0 &= (w_0 \cdot \varphi_k)_{H_n} - \int_{\Omega} T_M^{ij} (B_{ij} \varphi_k - w_{0\alpha i} \varphi_{k\alpha j}) d\Omega - \overset{0}{\lambda} (w_0 \cdot \varphi_k)_{H_C} = \\ &= ((w_0 - w_n) \cdot \varphi_k)_{H_n} + \int_{\Omega} [T_M^{ij}(w_n) - T_M^{ij}(w_0)] B_{ij} \varphi_k d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} [T_M^{ij}(w_0) w_{0\alpha i} - T_M^{ij}(w_n) w_{n\alpha i}] \varphi_{k\alpha j} d\Omega - (\overset{0}{\lambda} w - \overset{n}{\lambda} w_n) \cdot \varphi_k)_{H_C}; \end{aligned} \quad k = 1 \dots n. \quad (36.6)$$

Последний переход в (36.6) произведен с учетом (36.5). Далее первые три члена исчезают вследствие  $w_n \rightarrow w$ , так как первый член есть линейный в  $H_n$  функционал. Кроме того, необходимо учесть (14.38) и (12.52). Наконец, последний член в правой части (36.6) также исчезает при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $\overset{0}{\lambda} w - \overset{n}{\lambda} w_n \rightarrow 0$ . Таким образом, установлено, что  $w_0$  есть решение НОУ (32.10), (32.11). Сильная сходимость  $w_n \Rightarrow w_0$  доказывается такими же рассуждениями, какие уже использовались в лемме 26.4. Лемма 36.2 доказана. ■

Сформулируем полученные в разделе 36.1 результаты.

**Теорема 36.1.** Пусть выполнены все условия теоремы 16.1 (соответственно 16.2, 16.3). Пусть решение задачи  $tx$  на поверхности (36.2) ищется в виде (26.1) с применением метода Бубнова — Галеркина в форме П. Ф. Папковича. В этом случае система (36.1) на поверхности (36.2) имеет по меньшей мере одно решение  $w_n$  при каждом  $n$ . Совокупность  $\{w_n\}$  слабо компактна и каждая слабо сходящаяся последовательность  $w_n$  (если она не сходится к нулю) сходится сильно к решению НОУ (32.10), (32.11), лежащему на (36.2).

**36.2.** Укажем способ, с помощью которого можно выделить сильно компактное в  $H_n$  множество приближений. Для этого учтем, что при каждом  $n$  на поверхности  $s$  (36.2) функционал  $\frac{1}{2} \|w\|_{H_C}^2$  имеет максимум. Дело в том, что этот функционал является квадратичной формой  $D_{n\alpha}$ , ограниченной сверху. Далее, последовательность  $w_n^{(\max)}$  не может слабо стремиться к нулю. Если бы это имело место, то тогда  $\|w_n^{(\max)}\|_{H_C}^2 \rightarrow 0$ . Вместе с этим справедливо очевидное

соотношение

$$\|w_n^{(\max)}\|_{H_C}^2 \geq \|w_{n-1}^{(\max)}\|_{H_C}^2, \quad (36.7)$$

и стремление  $\|w_n^{(\max)}\|_{H_C} \rightarrow 0$  невозможно. Таким образом, доказана Теорема 36.2. Пусть выполнены условия теоремы 36.1. В этом случае множество приближений  $\{w_n\}$  имеет сильно компактное подмножество, каждая предельная точка которого есть решение НОУ (32.10), (32.11), лежащее на поверхности (36.2). ■

36.3. Рассмотрим, какие из собственных элементов НОУ (32.10), (32.11) могут быть получены как пределы множества приближений  $\{w_n\}$ . С этой целью подставим в (32.11)  $\lambda$  из (35.32):

$$w \cdot \varphi)_{H_\kappa} = \int_{\Omega} T_M^{ij} (B_{ij}\varphi - w_{\alpha i}\varphi_{\alpha j}) d\Omega + \frac{2c + \mathcal{J}_{\kappa\kappa 3}(w) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa 4}(w)}{\|w\|_{H_C}^2} (w \cdot \varphi)_{H_C} \quad (36.8)$$

и будем считать, как обычно, в (36.8)  $T_M^{ij}$  выраженными через  $w$  из (32.10). Таким образом, (36.8) уже само по себе есть НОУ относительно  $w$ , но параметр  $\lambda$  в нем исключен. Здесь же автоматически учтено условие (36.2).

Введем оператор  $\tilde{G}_{\kappa\kappa}$  соотношением

$$\tilde{G}_{\kappa\kappa}(w \cdot \varphi)_{H_\kappa} = \int_{\Omega} T_M^{ij} (B_{ij}\varphi - w_{\alpha i}\varphi_{\alpha j}) d\Omega + \frac{2c + \mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w) + 2\mathcal{J}_{\kappa\kappa}(w)}{\|w\|_{H_C}^2} (w \cdot \varphi)_{H_C}. \quad (36.9)$$

Лемма 36.3. Оператор  $\tilde{G}_{\kappa\kappa}$  действует усиленно непрерывно любой части  $H_\kappa$ , слабое замыкание которой не содержит нуля.

Доказательство леммы вытекает из (14.38), (12.52) и из того факта, что коэффициент при  $(w \cdot \varphi)_{H_C}$  в правой части (36.9) является слабо непрерывным в любой части  $H_\kappa$ , слабое замыкание которой не содержит нуля.

Очевидно, (36.8) можно теперь свести к НОУ вида

$$w = \tilde{G}_{\kappa\kappa}(w). \quad (36.10)$$

Пусть теперь  $w_0$  — решение (36.10) и  $r$  — любое число, меньшее  $w_0 \|_{H_\kappa}$ . Очевидно, слабое замыкание шара  $\Pi(r, w_0)$  не содержит нуля и в этом шаре  $\tilde{G}_{\kappa\kappa}$  усиленно непрерывен. Тогда справедлива

Теорема 36.3. Пусть  $w_0$  есть решение (36.10) ненулевого ндекса. В этом случае  $w_0 \in \{\bar{w}_n\}$ , где  $\{\bar{w}_n\}$  — сильное замыкание множества приближений  $\{w_n\}$  в  $H_\kappa$ . Если, кроме того,  $w_0$  — неособое решение (36.10), то существует последовательность приближе-



ний  $w_n, \lambda^n$  такая, что

$$\begin{aligned} \|w_0 - w_n\|_{H_n} &\leq (1 + \varepsilon_n) \|w_0 - P_n w_0\|_{H_n}, \\ |\lambda^0 - \lambda^n| &\leq m \|w_0 - P_n w_0\|_{H_n}, \end{aligned} \quad (36.11)$$

где  $P_n$  — оператор ортогонального проектирования по базису  $\varphi_k$ .

В условиях теоремы 36.3 для некоторых типов базиса возможно дать более конкретную оценку быстроты сходимости приближенных методов в проблеме глобальной устойчивости. Будем предполагать выполненными условия (28.5), а в качестве  $\varphi_k$  возьмем про- ортонормированное в  $H_n$  множество (28.7).

**Теорема 36.4.** Пусть выполнены условия теоремы 28.3. В этом случае имеют место следующие оценки погрешности применения метода БГР в задаче глобальной устойчивости:

$$\left\| w_0 - \sum_{k=1}^n D_{nk} \varphi_k \right\|_{H_1} \leq m(w_0) n^{-\beta/2}, \quad (36.12)$$

$$|\lambda^0 - \lambda^n| \leq m(w_0) n^{-\beta/2}, \quad (36.13)$$

где  $\beta$  даются формулами (28.20).

**Теорема 36.5.** Пусть выполнены условия теоремы 28.4 и условия существования б. м. н. д. с. В этом случае для каждого неособого решения (36.9), (36.10) найдется последовательность приближений метода БГР вида (26.1), где  $\varphi_k$  суть ортонормированные в  $H_1$  функции (28.7), такие, что будут выполнены (36.13), где коэффициент  $\beta$  определяется из (28.25).

Доказательство теорем 36.4, 36.5 проводится почти дословно по схеме теорем 28.3, 28.4. Оценка для  $\lambda^n$  (36.13) получается из оценки приближений для  $w_0$  (36.12). ■

**Примечание 36.1.** К приближенному решению НОУ (32.10), (32.11) можно применить метод БГР в форме Х. М. Муштари, когда приближенно удовлетворяются и уравнения продольного напряженного состояния (32.10). При этом на основе результатов § 20, 28 могут быть получены оценки, аналогичные (36.11) — (36.13).

В НОУ (36.9), (36.10) вместо параметра  $\lambda$  введен новый параметр  $c$ , определяемый правой частью (34.32). Поэтому решения  $w$  НОУ (36.9), (36.10) можно рассматривать как функции параметра  $c$ .

**Теорема 36.6.** Пусть при некотором  $c_0$  решение  $w(c_0)$  НОУ (36.9) — (36.10) будет неособым. В этом случае можно указать отрезок

$$c_0 - \varepsilon \leq c \leq c_0 + \varepsilon, \quad (36.14)$$

на котором

$$w(c) \in H_{c_0 - \varepsilon}^{0,1} \llcorner c \llcorner c_0 + \varepsilon, \quad (36.15)$$

т. е.  $w(c)$  как функция аргумента  $c$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности  $c_0$ .

Теорема 36.6 разъясняет некоторые важные свойства решений (36.9), (36.10). За недостатком места ее доказательство здесь не приводится. ■

**36.4.** Сформулируем некоторые результаты, связанные с использованием прямых методов в задачах глобальной устойчивости 9ж. Рассмотрим НОУ (32.24), (32.25) и будем решать его методом БГР, используя соотношения (26.1) и считая, что (32.25) решается точно относительно  $\Psi_M$ . После этого (32.24) превращается в НОУ относительно  $w_n$ . Таким образом, здесь также используется вариант П. Ф. Папковича.

В соответствии с (34.1) уравнения для  $D_{nk}$ ,  $\lambda^n$  примут вид

$$\frac{\partial}{\partial D_{nk}} (\mathcal{J}_{x_2}^0 + \mathcal{J}_{x_3} + \mathcal{J}_{x_4}) = \lambda^n \frac{\partial}{\partial D_{nk}} \frac{1}{2} \|w_n\|_{H\mathbf{C}^4}^2 \quad (36.16)$$

где

$$\mathcal{J}_{x_2}^0(w) = \frac{1}{2} \|w\|_H^2,$$

а  $\|w\|_H$  определяется формулами (32.76). Будем отыскивать  $w_n$  на поверхности

$$\mathcal{J}_x^0 = \mathcal{J}_{x_2}^0 + \mathcal{J}_{x_3} + \mathcal{J}_{x_4} = c > \min \mathcal{J}_x^0. \quad (36.17)$$

**Теорема 36.7.** Пусть выполнены все условия теоремы 19.2 и условия существования б. м. н. д. с. (32.19), (32.20). В этом случае система (36.16), (36.17) имеет по меньшей мере одно действительное решение  $D_{nk}$ ,  $\lambda^n$  при каждом  $n$ . Множество приближений  $\{w_n\}$  слабо компактно. При этом каждая слабо сходящаяся последовательность из  $\{w_n\}$  либо слабо сходится к нулю, либо сильно сходится к некоторому решению  $w_0$  НОУ (32.24), (32.25), при этом имеет место сходимостъ числовой последовательности  $\lambda^n$  к собственному значению  $\lambda^0$  (32.24), (32.25), соответствующему  $w_0$ .

**Теорема 36.8.** Пусть выполнены условия теоремы 36.6. В этом случае множество приближений  $\{w_n\}$  имеет сильно компактное подмножество, каждая предельная точка которого есть решение (32.24), (32.25), лежащее на поверхности (36.17).

**36.5.** Введем оператор  $\tilde{G}_x$  соотношением

$$\begin{aligned} (\tilde{G}_x(w) \cdot \varphi)_{H_x} = & \int_{\Omega} C^{ik} C^{jl} (B_{ij} \varphi - \varphi_{\alpha}{}^{il} v_{\alpha j}) \nabla_{kl} \Psi_M d\Omega + \\ & + \frac{2c + \mathcal{J}_{x_3}(w) + 2\mathcal{J}_{x_4}(w)}{\|w\|_{H\mathbf{C}^4}^2} (w \cdot \varphi)_{H\mathbf{C}^4} \end{aligned} \quad (36.18)$$

и тогда, очевидно, (32.24) при условии (36.17) сведется к НОУ вида

$$w = \tilde{G}_x(w). \quad (36.19)$$

В (32.19)  $\Psi_M$  считается выраженным через  $w$  из (32.25).

**Теорема 36.9.** Пусть  $w_0$  — решение ненулевого индекса (36.19). В этом случае  $w_0 \in \overline{\{w_n\}}$ , где  $\{w_n\}$  — сильное замыкание множества приближений  $\{w_n\}$  в  $H_x$ . Если, кроме того,  $w_0$  — неособое решение (36.10), то существует последовательность приближений  $w_n$ ,  $\lambda_n$  такая, что

$$\begin{aligned} \|w_0 - w_n\|_{H_x} &\leq (1 + \varepsilon_n) \|w_0 - P_n w_0\|_{H_x}, \\ |\lambda^0 - \lambda^n| &\leq m \|w_0 - P_n w_0\|_{H_x}, \end{aligned} \quad (36.20)$$

где  $P_n$  — оператор ортогонального проектирования по базису  $\varphi_k$  (§ 28). ■

Будем теперь рассматривать случай, когда в отношении  $w$  выполнены граничные условия (28.5), а для  $\Psi_M$ , естественно, сохраняются (7.27). Здесь в качестве  $\varphi_k$  можно использовать также проортонормированные в  $H_1$  множества (28.7).

**Теорема 36.10.** Пусть выполнены условия теоремы 28.7, условия (28.17) и условия существования б. м. н. д. с. (32.19), (32.20). В этом случае в  $\{w_n\}$  существует последовательность  $w_n$  такая, что имеют место оценки (36.12), (36.13), где  $\beta$  даются формулами (28.10).

**Теорема 36.11.** Пусть выполнены условия теоремы 28.8 и условия существования б. м. н. д. с. (32.20). В этом случае существует последовательность  $w_n$  из  $\{w_n\}$  такая, что будут выполнены (36.12), (36.13), где  $\beta$  определяется из (28.25).

**Примечание 36.2.** К приближенному решению НОУ (32.24), (32.25) можно применить метод БГР в форме В. З. Власова, когда приближенно удовлетворяются и уравнения продольного напряженного состояния (32.25). При этом на основе результатов § 20, 28 могут быть получены оценки, аналогичные (36.11) — (36.13).

**Теорема 36.12.** Пусть при некотором  $c_0$  решение  $w(c_0)$  НОУ (36.19) будет неособым. В этом случае справедливо утверждение теоремы 36.6. ■

**Примечание 36.3.** Изложенные в данном параграфе схемы обоснования методов БГР в задачах глобальной устойчивости полых оболочек обобщаются и на случай, когда аппроксимация решений производится методами конечных разностей или конечных элементов. И здесь важно выполнение двух условий: 1) аппарат аппроксимации должен обеспечить приближение любого элемента из  $H_x$ , если используются схемы Папковича, или любого элемента из  $H_{ix}$  (соответственно  $H_{yx}$ ), если используются схемы Х. М. Муштари (соответственно В. З. Власова); 2) определение констант аппроксимации производится на основе какого-либо вариационного принципа Лагранжа или Алумяэ. ■

### § 37. Некоторые задачи глобальной устойчивости пластин

**37.1.** Рассмотрим вначале случай  $tk$ . Из (32.6) следует очевидный факт: необходимые и достаточные условия существования б. м. н. д. с. для пластины даются соотношениями

$$\tilde{M}^m|_{\Gamma_2+\Gamma_4} \equiv \tilde{Q}|_{\Gamma_3+\Gamma_4} \equiv \tilde{w}|_{\Gamma_1+\Gamma_2} \equiv \tilde{w}_4|_{\Gamma_1+\Gamma_3} \equiv R^3 \equiv 0. \quad (37.1)$$

**Теорема 37.1.** Пусть выполнены условия 2—6 § 13 и условия (37.1) существования б. м. н. д. с. В этом случае для пластины имеют место точные равенства

$$\lambda_{tkn} = \lambda_{tkb} = \lambda_{tk1} = \lambda_{tk3}. \quad (37.2)$$

Для доказательства (37.2) нам понадобится

**Лемма 37.1.** Пусть собственный элемент ЛОУ (32.16)  $w$  есть постоянная. В этом случае  $w \equiv 0$  и соответствующее число  $\lambda$  не есть собственное.

Лемма 37.1 очевидна, если граница  $\Gamma$  оболочки  $S$  содержит участок  $\Gamma_1 + \Gamma_2 > 0$ . Если же  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ , то упругие связи на  $\Gamma_3, \Gamma_4$  в соответствии с условиями образования пространств  $H_x$  должны быть существенно упругими, и тогда вследствие структуры граничных условий на  $\Gamma_3, \Gamma_4$  из  $w \equiv \text{const}$  следует  $w \equiv 0$ . ■

Для доказательства теоремы 37.1 будем исходить из леммы 33.4. В случае пластины, как видно из (33.8) — (33.10),

$$\mathcal{J}_{\text{нк}2}^{\lambda_{tk3}} = \frac{1}{2} \left( \|w\|_H^2 - \lambda_{tk3} \|w\|_{H_C}^2 \right), \quad (37.3)$$

$$\mathcal{J}_{\text{нк}3} = 0, \quad (37.4)$$

$$\mathcal{J}_{\text{нк}4} \geq 0. \quad (37.5)$$

В (37.3)  $\|w\|_H$  дается формулами (32.72), (32.76). Соотношение (37.4) следует из того факта, что для пластины из (32.14) получаем  $K_{tk1} = 0$ , и, значит, вследствие (14.16)  $\varepsilon_{ij1} \equiv 0$ , так как  $w^* \equiv 0$  в условиях (37.1). Поэтому (33.43) принимает для пластины вид

$$\|w\|_H^2 - \lambda_{tk3} \|w\|_{H_C}^2 + 4\mathcal{J}_{\text{нк}4}(w) \neq 0. \quad (37.6)$$

Пусть теперь в (37.6) стоит знак равенства. По определению  $\lambda_{tk3}$  имеем

$$\|w\|_H^2 - \lambda_{tk3} \|w\|_{H_C}^2 \geq 0, \quad (37.7)$$

и тогда с учетом (37.5) получаем

$$\|w\|_H^2 - \lambda_{tk3} \|w\|_{H_C}^2 = 0, \quad (37.8)$$

откуда

$$w = w_1, \quad (37.9)$$

$$\mathcal{J}_{\text{нк}4}(w_1) = 0, \quad (37.10)$$

где  $w_1$  — первый собственный элемент ЛОУ (32.16).

Но из (37.10) вследствие (33.11) следует

$$\varepsilon_{ijM_2}^0(w_1) \equiv 0, \quad (37.11)$$

$$w_{\Gamma M_2}|_{\Gamma_6} \equiv w_{mM_2}|_{\Gamma_7} \equiv w_{iM}|_{\Gamma_8} \equiv 0; \quad i = 1, 2, \quad (37.12)$$

и тогда

$$w_1 = c \quad (37.13)$$

и по лемме 37.1  $w_1 \equiv 0$ . Таким образом, условия леммы 33.4 выполнены, и теорема 37.1 доказана. ■

Теорема 37.1 полностью решает вопрос о структуре СНОУ (32.10), (32.11). Именно, спектр заполняет всю прямую  $\lambda > \lambda_{ik}$ . Вместе с этим положительно решается вопрос о возможности использовать метод линеризации Эйлера при исследовании устойчивости пластин в задачах *тх*. ■

Рассмотрим сейчас некоторые факты, характеризующие поведение пластин после потери устойчивости.

Теорема 37.2. Пусть выполнены 2—6 § 13 и условия существования б. м. н. д. с. (37.1). В этом случае каждому уровню  $c > 0$  потенциальной энергии пластины после потери устойчивости соответствует не менее счетного числа форм равновесия, на которых этот уровень достигается. При этом для соответствующих собственных элементов имеют место предельные соотношения

$$w_{kc} \rightarrow 0, \quad \lambda_{kc} \rightarrow \infty.$$

Теорема 37.2 будет установлена, если доказать, что функционал  $\mathcal{J}(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{H_C}^2$  на поверхности

$$\mathcal{J}_{kk2}^0 + \mathcal{J}_{kk4} = c^2 \quad (37.14)$$

будет иметь счетное множество критических элементов  $w_{kc}$ ,  $\lambda_{kc}$ , удовлетворяющих (37.14). Для доказательства используем известную теорему Л. А. Люстерника [19] о критических точках четных функционалов на сферах в гильбертовом пространстве. Указанная теорема впоследствии получила большое развитие [25]. Для нас существен вклад В. И. Соболева [27], освободившего от условия однородности функционал  $I$ ; М. М. Вайнберга [3], отбросившего некоторые условия гладкости, и Э. С. Цитландадзе [30, 31], рассмотревшего случай кратности критических точек. На другой основе проблема экстремума четных функционалов была рассмотрена М. А. Красносельским [18]. Мы приведем основной результат.

Теорема. Пусть функционал  $I(w)$  удовлетворяет условиям

- а)  $I(w)$  — четный функционал, т. е.  $I(-w) = I(w)$ ;
- б)  $I(w) \geq 0$ , причем  $I(w) = 0$  тогда и только тогда, когда  $w = 0$ ;
- в)  $\text{grad}_{H_\kappa} I(w) \neq 0$ , если  $w \neq 0$ ;  $\text{grad}_{H_\kappa} I(w)|_{w=0} = 0$ ;
- г)  $I(w)$  — гладкий функционал, т. е.

$$I(w+h) - I(w) = (\text{grad}_{H_\kappa} I \cdot h)_{H_\kappa} + \zeta(w, h), \quad (37.15)$$

причем

$$\frac{|\zeta(w, h)|}{\|h\|_{H_\mu}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{H_\mu} \rightarrow 0 \quad \text{равномерно для всех} \quad \|w\|_{H_\mu} \leq R.$$

В этом случае на каждой сфере  $\|w\|_{H_\mu} = r \leq R$  имеется не менее счетного множества собственных элементов  $w_{k,c}$ ,  $\lambda_{k,c}$ , причем выполнены (37.14). Для использования этого факта совершим функциональную замену переменных

$$w \sim c\mu(w)w, \quad (37.16)$$

где  $\mu(w)$  будем определять из уравнения

$$\mu^2(w) + c^2\mu^4(w)\mathcal{J}_{\mu^4}(w) = 1. \quad (37.17)$$

При выборе  $\mu(w)$  из (37.17) (в дальнейшем будем выбирать единственный положительный корень) поверхность (37.14) превращается в сферу  $\Sigma$  радиуса 1 с центром в начале координат. При этом функционал  $\mathcal{J} = \frac{1}{2}\|w\|_{H_C}^2$  превращается в

$$\tilde{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}c^2\mu^2(w)\|w\|_{H_C}^2.$$

Таким образом, мы приходим к исследованию критических точек  $\tilde{\mathcal{J}}$  на  $\Sigma$ .

Проверим выполнение всех условий а)–г) для функционала  $\tilde{\mathcal{J}}$ . Условия а), б) выполняются очевидным образом. Покажем теперь, что из соотношения

$$\text{grad}_{H_\mu} \tilde{\mathcal{J}}(w) = 0 \quad (37.18)$$

следует

$$w = 0. \quad (37.19)$$

Имеем

$$(\text{grad}_{H_\mu} \tilde{\mathcal{J}}(w) \cdot \tilde{h})_{H_\mu} = (\text{grad}_{H_\mu} \mathcal{J}(w) \cdot h)_{H_\mu}, \quad (37.20)$$

где  $\tilde{h}$  и  $h$  связаны соотношением

$$h = c\mu(w)\tilde{h} + c(\text{grad}_{H_\mu}\mu \cdot \tilde{h})_{H_\mu} w. \quad (37.21)$$

Формулы (37.20), (37.21) выражают неизменность приращения  $\mathcal{J}$  при функциональной замене (37.16). ■

**Лемма 37.2.** Пусть заданы постоянная  $c$  и элементы  $h, w \in H_\mu$ . В этом случае уравнение (37.21) единственным образом определяет элемент  $\tilde{h}$ .

Для доказательства умножим (37.21) скалярно на  $\text{grad}_{H_\mu}\mu$ . При этом получим

$$(h \cdot \text{grad}_{H_\mu}\mu)_{H_\mu} = c\mu(w)(\tilde{h} \cdot \text{grad}_{H_\mu}\mu)_{H_\mu} + c(\text{grad}_{H_\mu}\mu \cdot \tilde{h})_{H_\mu}(w \cdot \text{grad}_{H_\mu}\mu)_{H_\mu}. \quad (37.22)$$

Из (37.22) следует

$$(\tilde{h} \cdot \text{grad}_{H_x} \mu)_{H_x} = \frac{(h \cdot \text{grad}_{H_x} \mu)_{H_x}}{c [\mu(w) + (w \cdot \text{grad}_{H_x} \mu)_{H_x}]}. \quad (37.23)$$

Подставив (37.23) в (37.21), получим искомое выражение  $\tilde{h}$  через  $h$ :

$$\tilde{h} = \frac{1}{c\mu(w)} \left[ h - w \frac{(h \cdot \text{grad}_{H_x} \mu)_{H_x}}{\mu(w) + (w \cdot \text{grad}_{H_x} \mu)_{H_x}} \right]. \quad (37.24)$$

Доказательство леммы 37.2 будет вполне завершено, если установить соотношение

$$\mu + (\text{grad}_{H_x} \mu \cdot w)_{H_x} \neq 0. \quad (37.25)$$

Применяя операцию  $\text{grad}$  к (37.17), имеем

$$\text{grad}_{H_x} \mu + 2c^2 \mu^2 \text{grad}_{H_x} \mu \mathcal{J}_{xx4}(w) + \frac{1}{2} c^2 \mu^3 \text{grad}_{H_x} \mathcal{J}_{xx4}(w) = 0. \quad (37.26)$$

Учтем теперь соотношения

$$\text{grad}_{H_x} \mathcal{J}_{xx4}(w) = G_{xx3}(w) \quad (37.27)$$

и в силу однородности  $\mathcal{J}_{xx4}(w)$ ,  $G_{xx3}(w)$  из (37.27) найдем

$$(\text{grad}_{H_x} \mathcal{J}_{xx4}(w) \cdot w)_{H_x} = (G_{xx3}(w) \cdot w)_{H_x} = 4\mathcal{J}_{xx4}(w). \quad (37.28)$$

Из (37.26), (37.28) следует, если умножить (37.26) на  $w$ ,

$$(\text{grad}_{H_x} \mu \cdot w)_{H_x} (1 + 2c^2 \mu^2 \mathcal{J}_{xx4}(w)) = -2c^2 \mu^3 \mathcal{J}_{xx4}(w). \quad (37.29)$$

Наконец, из (37.29) следует

$$\mu + (\text{grad}_{H_x} \mu \cdot w)_{H_x} = \mu - \frac{2c^2 \mu^3 \mathcal{J}_{xx4}(w)}{1 + 2c^2 \mu^2 \mathcal{J}_{xx4}(w)} = \frac{\mu}{1 + 2c^2 \mu^2 \mathcal{J}_{xx4}(w)}, \quad (37.30)$$

и (37.25) доказано. Вместе с этим установлена и лемма 37.2. ■

Таким образом, одновременно справедливы (37.24), (37.24) и (37.20). Предположим теперь, что при некотором  $w$  выполнено (37.18). В этом случае левая часть (37.20) есть нуль при любых  $\tilde{h}$ , а значит, в силу (37.24) и правая часть (37.20) есть нуль при любых  $h$ . Значит,

$$(\text{grad}_{H_x} \mathcal{J}(w) \cdot w)_{H_x} = 0. \quad (37.31)$$

В силу структуры  $\mathcal{J}(w)$  из (37.31) следует

$$\mathcal{J}(w) = 0 \text{ и, значит, } w = 0. \quad (37.32)$$

Следовательно, условие в) также выполнено. Гладкость  $\tilde{\mathcal{J}}(w)$  устанавливается элементарно.

Таким образом, существование не менее счетного числа экстремумов  $\tilde{\mathcal{I}}(w)$  на  $\Sigma$  установлено, и соответственно доказано существование не менее счетного числа экстремумов  $\mathcal{I}(w)$  на поверхности (37.15), с выполнением (37.14).

Можно оценить количественно интенсивность слабого стремления  $w_{kc}$  к нулю. Для этого рассмотрим соотношение

$$\lambda_{kc} = 2 \frac{c^2 + \mathcal{I}_{\text{кн4}}(w_{kc})}{\|w_{kc}\|_{H_C}^2}, \quad (37.33)$$

откуда

$$\|w_{kc}\|_{H_C}^2 \leq \frac{2c^2}{\lambda_{kc}}, \quad (37.34)$$

и, наконец, учтя

$$m \|w\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq \|w\|_{H_C},$$

из (37.34) получаем

$$\|w_{kc}\|_{W_{2\Omega}^{(1)}} \leq \frac{m}{\lambda_{kc}^{1/2}}. \quad (37.35)$$

Разъясним физическое содержание теоремы 37.2. Это можно сделать на основе аналогии с явлением потери устойчивости стержня. Известно, что при заданном уровне энергии после потери устойчивости стержень имеет счетное множество форм равновесия. При этом с ростом помера  $k$  формы равновесия уменьшается ее амплитуда, но появляется большее количество промежуточных нулей, точнее,  $k-1$ , например для шарнирно-опертого стержня. Это свойство и означает слабое стремление к нулю форм равновесия. При этом поддержание стержня в формах равновесия с возрастающим количеством промежуточных нулей требует все возрастающего продольного усилия, что соответствует  $\lambda_{kc} \rightarrow \infty$ . Отметим, что физически слабая сходимост  $w_{kc} \rightarrow 0$  означает, что с ростом  $k$  пластина при потере устойчивости разбивается на большое число долек, сам прогиб представляет собою быстро колеблющуюся функцию, само явление носит все более местный характер. При этом в силу большой преобладающей значения над потенциальной энергией растяжения. В случае пластины дополняются некоторые факты, касающиеся применения прямых методов.

Теорема 37.3. Пусть выполнены условия 2—6 § 13 и условия (37.1) существования б. м. н. д. с. Пусть решение задачи  $tx$  для пластины ищется в виде (26.1) с применением метода БГР в форме П. Ф. Папковича. В этом случае система (36.1) для пластины имеет на поверхности (37.14) не менее  $n+1$  действительных решений. Совокупность  $\{w_n\}$  слабо компактна, и каждая слабо сходя-



щаяся последовательность  $w_n$  (если она не сходится слабо к нулю) сильно сходится к решению  $w_0$  НОУ (32.11) для пластины, лежащему на (37.14).

Напомним читателю, что соответствующая теорема 36.1 для оболочек утверждает существование лишь одного действительного решения у системы (36.1).

Теорема 37.3 вытекает из результатов [21, 32], если учесть, что  $\mathcal{J}_{\text{жж}2}^0(w_n)$ ,  $\mathcal{J}_{\text{жж}4}(w_n)$ ,  $\|w_n\|_{H_C}^2$  в случае пластины являются четными функциями  $D_{nk}$ , а поверхность (37.14) при подстановке (26.1) оказывается гомеоморфной сфере, причем гомеоморфизм возможно осуществить так, чтобы сохранилась центральная симметрия точек сферы и (37.14). ■

**37.2.** В случае круглой пластины могут быть получены дополнительные данные о поведении пластины после потери устойчивости.

**Теорема 37.4** [6]. Пусть имеется круглая однородная изотропная пластина, жестко заделанная по контуру или шарнирно-опертая, для которой, следовательно, выполняется одна из систем граничных условий:

$$w|_{\Gamma} = \frac{dw}{dr}\Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad w|_{\Gamma} = \left[ \frac{d^2w}{dr^2} + (1 + \nu) \frac{dw}{dr} \right] \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (37.36)$$

и подвергнутая действию равномерного сжимающего усилия. Пусть, далее,  $\lambda_n$  — собственные значения ЛОУ (32.16), когда  $H_k \rightarrow H_1$ . В этом случае для каждого  $\lambda$  из интервала

$$\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1} \quad (37.37)$$

существует не менее  $n$  решений НОУ (32.10), (32.11)  $(w_{nj}, \Psi_{nj})$ ,  $(-w_{nj}, \Psi_{nj})$ ;  $j = 1, \dots, n$ . При этом  $w_{nj}(r)$  имеет  $n - 1$  нулей внутри отрезка  $0 < r < 1$ . ■

**37.3.** Для задачи 9ж имеют место утверждения, аналогичные теоремам 37.1—37.3. Поскольку они устанавливаются сходными рассуждениями, то мы приведем лишь их формулировки.

**Теорема 37.5.** Пусть выполнены условия 2—7 § 17 и условия существования б. м. н. д. с. (37.1). В этом случае для пластины имеют место точные равенства

$$\lambda_{9жн} = \lambda_{9жв} = \lambda_{9ж1} = \lambda_{9жв}. \quad (37.38)$$

**Теорема 37.6.** Пусть выполнены условия 2—7 § 17 и условия существования б. м. н. д. с. (37.1). В этом случае каждому уровню  $c > 0$  потенциальной энергии оболочки после потери устойчивости соответствует не менее счетного числа форм равновесия, на которых этот уровень достигается. При этом для соответствующих собственных элементов имеют место предельные соотношения

$$w_{kc} \rightarrow 0, \quad \lambda_{kc} \rightarrow 0.$$

**Теорема 37.7.** Пусть выполнены условия 2—7 § 17 и условия существования б. м. н. д. с. (37.1). Пусть решение задачи 9ж для пластины ищется в виде (26.1) с применением метода БГР в форме П. Ф. Папковича. В этом случае система

$$\frac{\partial}{\partial D_{nk}} (\mathcal{J}_{\kappa_2}^0 + \mathcal{J}_{\kappa_4}) = \lambda \frac{\partial}{\partial D_{nk}} \frac{1}{2} \|w_n\|_{H_C}^2; \quad k = 1, \dots, n, \quad (37.39)$$

на поверхности

$$\mathcal{J}_{\kappa}^0 = \mathcal{J}_{\kappa_2}^0 + \mathcal{J}_{\kappa_4} = c > \min \mathcal{J}_{\kappa}^0 \text{ в } H_{\kappa} \quad (37.40)$$

имеет не менее  $n + 1$  действительных решений. Совокупность  $\{w_n\}$  слабо компактна, и каждая слабо сходящаяся последовательность  $w_n$  (если она не сходится слабо к нулю) сильно сходится к  $w_0$  — решению НОУ (32.24) для пластины, лежащему на (37.40). ■

**37.4.** В работах [8—10] автором был изложен ряд результатов, относящихся к устойчивости «в большом» в нелинейной теории логих оболочек. Эти результаты также описывались в [11—14, 16, 17]. В первую очередь отметим теоремы 33.3 и 34.3, утверждающие существование нижних критических чисел для задач  $tx$  и 9ж. Полное доказательство этих теорем приводится здесь впервые. В [10] приведены теоремы 35.1, 35.3 о ветвлении решений из каждого собственного числа линеаризованной задачи. Подробное доказательство также публикуется здесь впервые. В [34] М. Бергер приложил вариационные соображения к проблеме собственных значений для некоторых типов нелинейных эллиптических краевых задач. На основе этих результатов в [1, 35] им рассмотрена в нашей терминологии задача 91 для пластин и подтверждены для того частного случая все результаты теоремы 35.3. Из дополнительных результатов отметим вывод о том, что если  $\lambda_n$  есть  $r$ -кратное собственное число, то от него ответвляется по крайней мере  $r$  ветвей решений соответствующего НОУ. Заметим, что этот вывод сохраняется и для всех других задач 9ж и  $tx$  для пластин, рассмотренных выше. В [2, 36] М. Бергером рассмотрена задача 91 для круговой цилиндрической оболочки. Результаты этой работы являются частным случаем теоремы 35.3. Некоторые частные случаи теоремы 35.3 установлены И. В. Скрыпником [24]. В работе [10] сформулирован и основной результат о послекритическом поведении пластин (теоремы 37.2, 37.4). Подробное доказательство теоремы 37.4 дано в [15]. ■

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК§ 38. Статистическая модель работы пологой оболочки  
при среднем изгибе

38.1. Из результатов § 29—37 следует, что довольно типичной картиной деформации оболочки будет такая, когда имеется несколько форм равновесия оболочки при заданных условиях ее работы. Более того, в ряде случаев оболочка будет иметь несколько устойчивых форм равновесия. Естественно, встает вопрос о выборе той формы равновесия, которая имеет наибольшие шансы осуществиться в опыте. В нашей терминологии (§ 29) это вторая задача теории устойчивости. Она не может быть решена, если не привлечь более тонкие данные об условиях работы оболочки и ее параметрах. Речь идет о разбросе параметров ее формы, упругих характеристик, внешней нагрузки и, таким образом, о построении статистической теории работы оболочки. Разумеется, такая теория должна включать и те критерии, которыми пользуются в теории устойчивости упругих систем, например, оценку степени устойчивости системы по уровню потенциальной энергии системы. Из всего предыдущего следует, что весьма широкий круг задач будет охвачен, если считать, что реализации случайного процесса деформации оболочки  $a(w_1, w_2, w)$  принадлежат  $H_{ик}$ . Таким образом, полное и строгое рассмотрение вопроса требует введения вероятностных распределений в данном функциональном пространстве. Хорошо известны трудности, с которыми сопряжено построение такой теории. Они значительно возрастают, если иметь в виду создание доступных для современных ЭВМ вычислительных алгоритмов.

В данном разделе мы дадим построение распределений, описывающих работу оболочки в конечных аппроксимирующих подпространствах  $w_n$ , где  $w_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) образуется базисом  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$

38.2. С этой целью рассмотрим более подробно структуру случайных факторов, определяющих работу оболочки. Их можно разбить на три группы. В первую из них включаем случайные отклонения в форме срединной поверхности оболочки, форме граничного контура и упругих характеристик. Во вторую группу относим отклонения в параметрах, характеризующих способ заделки оболочки. Наконец, в третью группу входят случайные нагрузки, действующие на оболочку.

Для статистической характеристики первых двух групп мы примем, что с достаточной точностью она описывается конечным числом случайных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_N$  и соответственно законом распределения  $\theta(a_1, a_2, \dots, a_N)$ . В случае, если случайными будут функциональные параметры, как, например, форма срединной поверхности, толщина оболочки, мы поступим следующим образом. Выберем некоторую достаточно представительную для данного параметра систему функций  $\zeta_k(\alpha^1, \alpha^2)$  и произведем аппроксимацию случайного параметра линейными агрегатами из  $\zeta_k(\alpha^1, \alpha^2)$ . Коэффициенты этой аппроксимации и будут набором случайных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , представляющим случайный характер рассматриваемого функционального параметра. Например, для описания случайных отклонений в толщине оболочки можно использовать представление

$$h(\alpha^1, \alpha^2) = \sum_{k=1}^m a_k \zeta_k(\alpha^1, \alpha^2), \quad \zeta_k(\alpha^1, \alpha^2) = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}, \quad (38.1)$$

е. полиномиальную аппроксимацию. При этом коэффициенты  $a_k$  определяются для каждой оболочки путем фактического измерения толщины в разных ее точках, а затем производится статистическая обработка измерений с целью определения закона распределения  $(a_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Естественно, что система аппроксимирующих функций должна выбираться так, чтобы весь практически возможный разброс  $h(\alpha^1, \alpha^2)$  описывался бы достаточно точно минимальным числом параметров  $a_k$ . Совершенно аналогично может быть писано и случайное поле отклонений срединной поверхности и других функциональных параметров, входящих в первые две группы, и мы, таким образом, приходим к распределению  $\theta(a_1, \dots, a_n)$ .

38.3. Обратимся к статистическому описанию внешней нагрузки, действующей на оболочку. Примем для простоты изложения, что действует лишь  $R^3(\alpha^1, \alpha^2, t)$ . В дальнейшем, исходя из естественных предположений о структуре случайной функции  $R^3(\alpha^1, \alpha^2, t)$ , примем

$$R^3(\alpha^1, \alpha^2, t) = R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t) + R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t) + R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t), \quad (38.2)$$

(е

$$R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t) = E\{R^3(\alpha^1, \alpha^2, t)\}, \quad (38.3)$$

$R^{31}$ ,  $R^{32}$  — случайные функции, природа которых будет описана ниже,  $E$  — знак операции вычисления математического ожидания.

Будем считать, что  $R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  есть непрерывный по времени процесс, т. е. процесс, каждая реализация которого есть непрерывная функция времени. Статистическое описание этого процесса можно произвести так же, как и описание факторов первых двух уп. Именно, предположим, что с достаточной степенью точности

для любой реализации  $R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  можно принять [24]

$$R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} b_{k_1 k_2} \psi_{k_1}(\alpha^1, \alpha^2) \psi_{k_2}(t). \quad (38.4)$$

При этом предполагается, что  $\psi_{k_1}(\alpha^1, \alpha^2)$  суть элементы некоторого базиса в  $L_{2\Omega}$ , а  $\psi_{k_2}(t)$  — элементы некоторого базиса в  $L_{2T}$ , где  $0 \leq t \leq T$ , а  $T$  — промежуток времени, на котором наблюдается поведение оболочки. При этом, очевидно, мы получим достаточно полное вероятностное описание  $R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t)$ , если зададим закон распределения  $\theta_2(b_{k_1 k_2})$  случайных величин  $b_{k_1 k_2}$ .

Вообще говоря, случайные величины  $a_k$  и  $b_{k_1 k_2}$  могут оказаться зависимыми. Например, если в  $R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  включается случайная составляющая воздействия на оболочку воздушного потока, то она может зависеть от случайных отклонений в форме оболочки, т. е. параметров, входящих в  $a_k$ . Поэтому в общем случае целесообразно считать заданным совместный закон распределения  $\theta_3(a_k, b_{k_1 k_2})$  всех случайных величин, входящих в первые две группы и  $R^3(\alpha^1, \alpha^2, t)$ . Более детально о таком способе задания случайных функций см. в [24, 25].

В отношении  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  предположим, что эта часть нагрузки является так называемым белым шумом по времени [21, 25]. Его статистические свойства определяются соотношением

$$ER^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t_1)R^{31}(\beta^1, \beta^2, t_2) = K^{31}(\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2)\delta(t_1 - t_2). \quad (38.5)$$

Смысл (38.5) заключается в том, что значения реализаций  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  в разные моменты времени статистически независимы. Иными словами, зная реализацию  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  в какой-либо момент времени, мы ничего не можем сказать о том, с какой вероятностью будет приниматься то или иное значение в другие моменты времени, даже сколь угодно близкие к рассматриваемому. Иными словами,  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  — чисто разрывной процесс. Разумеется, это некоторая идеализация тех процессов, с которыми приходится иметь дело в реальности. Белый шум по статистическим свойствам в каком-то смысле противоположен непрерывному случайному процессу. Для последнего вероятность больших значений величины  $\|R^{33}(t + \Delta t) - R^{33}(t)\|_{L_{2\Omega}}$  становится сколь угодно малой, если  $\Delta t$  достаточно мало. Для процессов, которые аппроксимируются белым шумом, приближения (38.4) работают плохо. Для достижения необходимой точности приходится брать значительное число членов. Между тем введение белого шума дает возможность в ряде случаев при обработке задачи использовать аналитический аппарат уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП) и довести решение задачи до обозримого вычислительного уровня. При этом охватывается достаточно широкий класс задач.

38.4. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением собственно пологих оболочек. Для этого класса можно принять метрику на срединной поверхности плоской. Для получения уравнений движения оболочки прибавим в (6.43) к силам  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  силы инерции  $-\rho w_{tt}$  и силы трения  $-2\Delta w_t$ , которые считаем пропорциональными скорости. Здесь  $\rho$  — массовая площадная плотность оболочки,  $2\Delta$  — коэффициент трения. В результате получаем

$$\begin{aligned} \rho w_{tt} + 2\Delta w_t + (D_{\alpha^i}^{ijkl} w_{\alpha^k \alpha^l})_{\alpha^i \alpha^j} = D_p^{ijkl0} \varepsilon_{kl} (B_{ij} + w_{\alpha^i \alpha^j}) + \\ + R^s(\alpha^1, \alpha^2, t), \quad w_1|_{\Gamma} = w_2|_{\Gamma} = \frac{dw}{dn} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ w|_{t=0} = w(0), \quad w_t|_{t=0} = v_0. \end{aligned} \quad (38.6)$$

Уравнения (38.6) можно рассматривать как начально-краевую задачу относительно  $w$ , так как входящие в  $\varepsilon_{kl}, w_1, w_2$  можно считать выраженными через  $w$  посредством соотношения (14.1), где, как условлено, принято  $R^s = 0; s = 1, 2$ . Поскольку для  $R^3(\alpha^1, \alpha^2, t)$  принята структура (38.2), то решения  $w(\alpha^1, \alpha^2, t), w_t(\alpha^1, \alpha^2, t)$  уже будут марковским процессом, а  $w_{tt}$  будет содержать белый шум.

38.5. Для приближенного определения вероятностных характеристик  $w(\alpha^1, \alpha^2, t)$  положим

$$w(\alpha^1, \alpha^2, t) \approx \sum_{r=1}^n q_r(t) \varphi_r(\alpha^1, \alpha^2), \quad (38.7)$$

где  $\varphi_r(\alpha^1, \alpha^2)$  — ортонормированный базис в  $H_1$ , и для  $q_r(t)$  составим систему уравнений метода Бубнова — Галеркина

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + 2\Delta \dot{q}_r = - \frac{\partial}{\partial q_r} \left[ \mathcal{U} - \sum_{s=1}^n (R_s^{32} + R_s^{33}) q_s \right] + R_s^{31}(t), \\ R_s^{31}(t) = \int_{\Omega} R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t) \varphi_s(\alpha^1, \alpha^2) d\alpha^1 d\alpha^2. \end{aligned} \quad (38.8)$$

В (38.8)  $\mathcal{U}(q_1, q_2, \dots, q_n)$  — внутренняя потенциальная энергия деформации оболочки, определяемая из (4.15) — (4.17). При этом  $w_1, w_2$  определяются через  $w$  из (14.1), и вся потенциальная энергия оболочки  $\mathcal{U}$  оказывается выраженной через  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . В соответствии с (38.5) можно определить характеристики белого шума  $R_s^{31}$ . Имеем

$$\begin{aligned} ER_s^{31}(t_1) R_p^{31}(t_2) = \\ = E \int_{\Omega} \int_{\Omega} R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t_1) R^{31}(\beta^1, \beta^2, t_2) \varphi_s(\alpha^1, \alpha^2, t_1) \varphi_p(\alpha^1, \alpha^2, t_2) \times \\ \times d\alpha^1 d\alpha^2 d\beta^1 d\beta^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^{33}(\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2) \times \\ \times \varphi_s(\alpha^1, \alpha^2) \varphi_p(\beta^1, \beta^2) d\alpha^1 d\alpha^2 d\beta^1 d\beta^2 \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (38.9)$$

Таким образом, (38.8) оказывается системой, подвергнутой действию случайных факторов  $a_k$ ,  $b_{k_1 k_2}$  и белого шума  $R_s^{31}(t)$  с корреляционной матрицей (38.9). Предположим теперь, что параметры  $a_k$ ,  $b_{k_1 k_2}$  приняли некоторые значения, и рассмотрим условный закон распределения  $f_n(t, q, p/a_k, b_{k_1 k_2})$ ,  $r = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, N$ ;  $k_1 = 1, \dots, m_1$ ;  $k_2 = 1, \dots, m_2$ . Для его определения запишем (38.8) в виде

$$\dot{q}_r = p_r, \quad \dot{p}_r = -\frac{2\Delta}{\rho} p_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial q_r} \left[ \mathcal{U} - \sum_{s=1}^n (R_s^{32} + R_s^{33}) q_s \right] + R_r^{31}(t). \quad (38.10)$$

Поскольку  $R_r^{31}(t)$  по предположению — белый шум, то для закона распределения  $f_n(t, q, p/a_k, b_{k_1 k_2})$  получаем уравнение КФП [1, 2, 21, 22, 25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} = & - \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial q_r} (p_r f_n) + \\ & + \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial p_r} \left\langle \left( \frac{2\Delta}{\rho} p_r + \frac{\partial}{\partial q_r} \left[ \mathcal{U} - \sum_{s=1}^n (R_s^{32} + R_s^{33}) q_s \right] \right) f_n \right\rangle + \frac{1}{2\rho^2} \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial^2 f_n}{\partial p_r \partial p_s}. \end{aligned} \quad (38.11)$$

Уравнению (38.11) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} = & - \sum_{r=1}^n p_r \frac{\partial f_n}{\partial q_r} + \frac{2\Delta n}{\rho} f_n + \frac{2\Delta}{\rho} \sum_{r=1}^n p_r \frac{\partial f_n}{\partial p_r} + \\ & + \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_r} - R_r^{32} - R_r^{33} \right) \frac{\partial f_n}{\partial p_r} + \frac{1}{2\rho^2} \sum_{r,s=1}^n \mathcal{K}_{rs}^{33} \frac{\partial^2 f_n}{\partial p_r \partial p_s}. \end{aligned} \quad (38.12)$$

Будем также считать, что нам известно начальное распределение  $f_n(0, q, p/a_k, b_{k_1 k_2})$ . В этом случае при определенных условиях, которые мы здесь не станем описывать, уравнение (38.12) допускает единственное решение  $f_n$ , удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} 1) f_n \geq 0; \quad 2) \int \int_{-\infty}^{\infty} f_n dq dp = 1; \quad 3) f_n(q, p, t) \rightarrow 0, \text{ если} \\ \sum_{r=1}^n (p_r^2 + q_r^2) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (38.13)$$

Если распределение  $f_n(t, q, p, a_k, b_{k_1 k_2})$  из (38.12), (38.13) найдено,

что безусловный закон  $f_n^*(t, q, p)$  найдется соотношением

$$f_n^*(t, q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t, q, p/a_k, b_{k_1 k_2}) \theta_3(a_k, b_{k_1 k_2}) da db. \quad (38.14)$$

Наконец, распределение координат  $f_n^{**}(t, q)$  определим по формуле

$$f_n^{**}(t, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t, q, p/a_k, b_{k_1 k_2}) \theta_3(a_k, b_{k_1 k_2}) da db dp. \quad (38.15)$$

Функции  $f_n^*(t, q, f)$ ,  $f_n^{**}(t, q)$  и могут служить мерой реальности того или иного положения оболочки в момент времени  $t$ . ■

Для проблемы устойчивости большой интерес представляют предельные при  $t \rightarrow \infty$  распределения  $f_n(\infty, q, p/a_k, b_{k_1 k_2})$ ,  $f_n^*(\infty, q, p)$ ,  $f_n^{**}(\infty, q)$ . Для их определения предположим, что существуют пределы

$$R^{32}(\alpha^1, \alpha^2, t)|_{t \rightarrow \infty} = R_{\infty}^{32}(\alpha^1, \alpha^2), \quad (38.16)$$

и для каждой реализации  $R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)$

$$R^{33}(\alpha^1, \alpha^2, t)|_{t \rightarrow \infty} = R_{\infty}^{33}(\alpha^1, \alpha^2). \quad (38.17)$$

Чтобы статистически описать  $R_{\infty}^{32}(\alpha^1, \alpha^2)$ , предположим, что в существенной части реализаций имеет место соотношение

$$R_{\infty}^{32}(\alpha^1, \alpha^2) = \sum_{p=1}^{m_3} v_p \psi_p(\alpha^1, \alpha^2), \quad (38.18)$$

где  $\psi_p$  — по-прежнему некоторый ортонормированный базис в  $L_{2a}$ . Тогда  $R_{\infty}^{32}(\alpha^1, \alpha^2)$  будет описываться законом распределения  $\theta_4(v_p)$ . Можно ввести более общий закон распределения  $\theta_5(a_k, v_p)$ , если учесть возможную зависимость  $a_k$  и  $v_p$ .

Предельное при  $t \rightarrow \infty$  распределение  $f(\infty, q, p/a_k, v_p)$  найдется из стационарного уравнения

$$\begin{aligned} - \sum_{r=1}^n p_r \frac{\partial f_n}{\partial q_r} + \frac{2\Delta n}{\rho} f_n + \frac{2\Delta}{\rho} \sum_{r=1}^n p_r \frac{\partial f_n}{\partial p_r} + \\ + \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_r} - R_{r\infty}^{31} - R_{r\infty}^{32} \right) \frac{\partial f_n}{\partial p_r} + \frac{1}{2\rho^2} \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial^2 f_n}{\partial p_r \partial p_s} \mathcal{H}_{rs}^{33}, \end{aligned} \quad (38.19)$$

где

$$R_{r\infty}^{3s} = \int_{\Omega} R_{\infty}^{3s}(\alpha^1, \alpha^2) \varphi_r(\alpha^1, \alpha^2) d\alpha^1 d\alpha^2, \quad s = 1, 2. \quad (38.20)$$

Определив  $f_n(\infty, q, p, a_k, v_p)$ , можно найти безусловные законы



## Распределения

$$f_n^{***}(\infty, q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\infty, q, p, a_h, v_p) \theta_5(a_h, v_p) da dv, \quad (38.21)$$

$$f_n^{***}(\infty, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\infty, q, p, a_h, v_p) \theta_5(a_h, v_p) da dv dp. \quad (38.22)$$

Если  $f_n^*(t, q, p)$ ,  $f_n^{**}(t, q)$  характеризовали статистическое поведение оболочки на конечном отрезке  $T$  действия разложения (38.4), то  $f_n^{***}(\infty, q, p)$ ,  $f_n^{****}(\infty, q)$  характеризуют асимптотическую устойчивость оболочки в  $n$ -м приближении. Таким образом, намечен принципиальный путь решения второй задачи теории упругой устойчивости. ■

Рассмотрим теперь, в какой мере соответствуют существующие интуитивные представления о критериях реальности той или иной формы оболочки распределениям  $f_n^{***}(\infty, q, p)$  и  $f_n^{****}(\infty, q, p)$ . Наиболее распространенный критерий: уровень полной потенциальной энергии системы оболочка — внешние силы. Для решения вопроса учтем, что при некоторых условиях уравнение (38.19) допускает явное решение. Действительно, допустим, что

$$\mathcal{K}_{rs}^{33} = \delta_{rs} \cdot \delta, \quad (38.23)$$

где  $\delta_{rs}$  — символ Кронекера. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$f_n(\infty, q, p, a_h, v_p) = \mathcal{Q}_n \exp \left( -\frac{2\Delta}{\delta} \left[ \frac{\rho}{2} \sum_{r=1}^n p_r^2 + \mathcal{U} + \sum_{r=1}^n (R_{r\infty}^{32} + R_{r\infty}^{33}) q_r \right] \right) \quad (38.24)$$

есть решение (38.19). При этом выполнены условия

$$1) f_n \geq 0; 2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n dq dp = 1; 3) f_n \rightarrow 0, \text{ если} \quad \sum_{r=1}^n (q_r^2 + p_r^2) \rightarrow \infty. \quad (38.25)$$

В формуле (38.24)  $a_h$  входит параметрически в  $\mathcal{U}$ ,  $d_p$  в  $R_{\infty}^{32}$ , постоянная  $\mathcal{Q}_n$  находится из условия нормирования 2, (38.25). Формула (38.24) есть распределение Максвелла — Больцмана.

Если поинтересоваться только предельным распределением координат, то из (38.24) следует

$$f_n = D_n \exp \left( -\frac{2\Delta}{\delta} \left[ \mathcal{U} - \sum_{r=1}^n (R_{r\infty}^{31} + R_{r\infty}^{32}) q_r \right] \right), \quad (38.26)$$

и мы получаем распределение Гиббса [9, 11], в котором, действительно, вероятность пребывания оболочки в той или иной форме предельного равновесия определяется уровнем ее потенциальной энергии. При этом, чем выше уровень потенциальной энергии системы в том или ином положении равновесия, тем менее реальна эта форма. Таким образом, в рассматриваемом частном случае (38.23) уровень потенциальной энергии оболочки действительно определяет реальность той или иной формы равновесия. Рассмотрим более детально (38.23)

$$\mathcal{H}_{rs}^{33} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathcal{H}(\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2) \varphi_r(\alpha^1, \alpha^2) \varphi_s(\beta^1, \beta^2) d\alpha^1 d\alpha^2 d\beta^1 d\beta^2 = \delta\delta_{rs}. \quad (38.27)$$

Если  $\varphi_r(\alpha^1, \alpha^2)$ , как это предположено, — полная ортонормированная система в  $L_{2\Omega}$ , то из (38.27)

$$\mathcal{H}(\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2) = \delta \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(\alpha^1, \alpha^2) \varphi_r(\beta^1, \beta^2) = \delta\delta(r, \beta^1, \beta^2), \quad (38.28)$$

как это установлено в § 28. Таким образом, (38.23) говорит о том, что  $R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t)$  есть белый шум не только по времени, но и по координатам. Таким образом, в этом случае уровень потенциальной энергии системы оболочка — внешние силы действительно связан с вероятностью реализации той или иной формы равновесия оболочки (частный случай этого утверждения см. в [4]). В других случаях, когда (38.23) не выполнено, следует использовать  $f_n(\infty, q, a_k, d_p)$  и соответственно распределение  $f_n^{***}$ , определяемое из (38.22).

К закону распределения Гиббса можно прийти, если предположить достаточно большим  $t$  или трение  $2\Delta$  и отбросить в (38.8) инерционные члены. При этом получим

$$2\Delta \dot{q}_r = - \frac{\partial}{\partial q_r} \left[ \mathcal{U} - \sum_{k=1}^n (R_r^{32} + R_r^{33}) q_k \right] + R_r^{31}(t). \quad (38.29)$$

Таким образом, при данном предположении сами скорости (38.29) уже содержат составляющую типа белого шума. Соответствующее уравнение КФП имеет вид

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = - \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial q_r} \left\{ \left[ \mathcal{U} - \sum_{s=1}^n (R_s^{32} + R_s^{33}) q_s \right] f_n \right\} + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n \mathcal{H}_{rs}^{31} \frac{\partial^2 f_n}{\partial q_r \partial q_s}. \quad (38.30)$$

Если выполнено (38.23), то стационарное распределение  $f_n(q, a_k, v_p)$ , определенное из (38.30), будет распределением Гиббса.

**38.6.** Построенные здесь вероятностные модели работы оболочек имели своей целью решение второй задачи проблемы устойчивости. Вместе с этим теория марковских процессов нашла широкое применение для оценки надежности и характеристик усталостного разрушения оболочек, находящихся под действием случайных нагрузок; акустического давления двигателей, турбулентной атмосферы и т. д. В этом случае представление о  $\{q\}$  или  $\{q_1, \dot{q}\}$  как о марковских процессах может оказаться недостаточным. Приходится использовать другие гипотезы о статистических свойствах  $R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t)$ . В частности, может оказаться полезным представление вида

$$T\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial t}\right)R^{31}(\alpha^1, \alpha^2, t) = I(\alpha^1, \alpha^2, t), \quad (38.31)$$

где  $T$  — рациональная функция операторов  $\partial/\partial \alpha^i$ ,  $\partial/\partial t$ ,  $I(\alpha^1, \alpha^2, t)$  — белый шум как по координатам, так и по времени. В предположении (38.31) также возможно использование аппарата уравнения КФП, и есть основания считать, что могут быть получены приемлемые численные алгоритмы. Широкие возможности для исследования устойчивости упругих систем под воздействием случайных факторов открываются в связи с обобщениями уравнений КФП на более широкий класс случайных процессов. В связи с этим отметим одну из первых работ данного направления [23]. Построение статистической теории устойчивости оболочек в какой-то мере завершает намеченную здесь программу исследования проблемы устойчивости, выраженную в сформулированных в § 29 двух задачах.

**38.7.** Впервые теория марковских процессов в проблеме устойчивости оболочек была применена в [8]. Дальнейшее развитие см. в [9, 11]. В этих работах была дана классификация случайных факторов, воздействующих на оболочку, и дан способ их одновременного учета с помощью теоремы о полной вероятности. Автор ограничился предположением о марковости обобщенных координат, что в широком классе задач оказывается достаточным для анализа проблемы устойчивости. Стремясь обосновать критерий уровня потенциальной энергии как основу построения статистической теории устойчивости, автор [8—11] рассмотрел случай  $\delta$ -коррелированной по времени и пространственным координатам нагрузки (формула (38.23)). В. М. Гончаренко перенес рассмотрение на общий случай [12—16], когда марковским процессом считаются и обобщенные скорости и координаты. Кроме того, им изучен общий случай, когда внешняя нагрузка не  $\delta$ -коррелирована по пространственным переменным. В связи с рассматриваемым кругом вопросов В. М. Гончаренко перешел к рассмотрению распределений в пространствах С. Л. Соболева [17, 18]. Ряд задач рассмотрен в [3, 4, 6, 7, 19, 20]. К настоящему времени выполнено большое количество работ, в которых теория марковских процессов используется для изучения накопления усталостных повреждений в обо-

лочках. Их анализ в наши задачи не входит. Большой интерес представляет обоснование изложенной здесь схемы, в частности, вопрос о поведении распределений  $f_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Легко привести примеры, когда при  $n \rightarrow \infty$  они вырождаются. Ряд результатов здесь получен И. Д. Чуешовым [26—28], в работах которого построены статистические распределения в бесконечномерных энергетических пространствах для пластин и оболочек. В этой связи отметим также упоминавшийся цикл работ В. М. Гончаренко [17, 18]. Следует отметить, что в гидродинамике, в частности для краевых задач Навье — Стокса, проблема начала разрабатываться еще Хопфом и получила завершение в исследованиях М. И. Вишика и А. В. Фурсикова [5].

## НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

1. Формулировка основных краевых задач нелинейной теории оболочек без предположений пологости (3.26) и среднего изгиба (2.22), т. е. при произвольных поворотах.

2. Построение математической теории краевых задач для уравнений Рейсснера (осесимметричная оболочка, произвольные прогибы).

3. Вывод основных краевых задач нелинейной теории пологих оболочек непосредственно из краевых задач нелинейной трехмерной теории упругости. Обоснование этого вывода (см., например, Ф. Съярле, П. Рабье), пределы применимости.

4. Введение функций усилий в линейной и нелинейной теории непологих оболочек. Сокращение числа независимых переменных теории.

5. Детальный анализ пределов применимости нелинейных краевых задач теории пологих оболочек. Получение теоретических оценок влияния непологости на различные характеристики напряженно-деформированного состояния.

6. Математический анализ краевых задач теории пологих оболочек для более широкого класса граничных условий, чем это рассмотрено в данной книге. В частности, теоремы разрешимости для свободных оболочек, не подчиненных никаким геометрическим граничным условиям.

7. Построение математической теории краевых задач для вариантов оболочек типа Тимошенко, Рейсснера, учитывающих наряду с геометрической нелинейностью сдвиговые напряжения. Обоснование приближенных методов.

8. Распространение основных результатов данной книги на случай неконсервативных нагрузок. Здесь есть примеры, когда разрешимость наступает лишь при достаточно большой нагрузке.

9. Распространение метода получения априорной оценки на случай оболочек с линеарной вязкоупругостью. При этом целесообразно опираться на свойства вязкоупругих операторов, определяемых принципом устойчивости естественного напряженного состояния вязкоупругих тел.

10. Выделение класса нелинейных краевых задач математической физики, для которого априорная оценка решения может быть дана развитым в этой книге методом.

11. Исследование строения энергетического решения нелинейных краевых задач в окрестности угловой точки и в окрестности точки и линии смены типа граничных условий.

12. Постановка нелинейных краевых задач теории пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Поведение энергетических решений в окрестности ребер жесткости. Соприжение с жесткими телами.

13. Изучение особенностей решений нелинейных краевых задач теории пологих оболочек, обусловленных особенностями в  $S$ ,  $\rho(\alpha^1, \alpha^2)$ .

14. Развитие теории нижнего критического числа для непологих оболочек при произвольных углах поворота.

15. Развитие теории нижнего критического числа для моментных напряженных состояний.

16. Оценка нижних критических чисел для оболочек различного вида при разных условиях закрепления. Критерии жесткости. Исследование жесткости замкнутой сферы, замкнутого эллипсоида.

17. Строгий анализ уравнений ветвления в окрестности особых решений в нелинейной теории оболочек. Применение топологических методов. Вторичные

ветвления. Исследование топологической структуры функционалов  $\mathcal{J}(w)$ ,  $\mathcal{J}(a)$ ,  $\mathcal{J}(\psi, w)$ .

18. Применение групповых методов в теории ветвления.

19. Исследование возможности неограниченного продолжения ветвей решений нелинейной краевой задачи, исходящих из какого-либо собственного значения соответствующей линеаризованной около б. м. н. д. с. задачи.

20. Распространение теоремы Волковьского на общий случай пластин произвольной формы (возможно, при некоторых условиях симметрий): при нагрузке  $\lambda$ , превосходящей  $n$ -е собственное число линеаризованной около б. м. н. д. с. краевой задачи, существует не менее  $n$  различных решений нелинейной задачи.

21. Анализ числа решений нелинейных краевых задач теории среднего изгиба при наличии различных классов симметрии.

22. Развитие и обоснование асимптотического по параметру точкостепенного метода решения нелинейных краевых задач теории оболочек.

23. Изучение поведения при  $n \rightarrow \infty$  конечномерных распределений  $f_n(p, q)$ , получаемых на основе уравнения Колмогорова — Фоккера — Плапка для конечномерных аппроксимаций по методу Бубнова — Галеркина или Рунца основных линейных краевых задач нелинейной теории пологих оболочек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе I

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ.— 1963.— Т. 27, вып. 6.— 1057—1074.
2. Александров П. С. Комбинаторная топология.— М.— JL: Гостехиздат, 1947.— С. 92—143.
3. Алузяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии // ПММ.— 1949.— Т. 13, № 1.— С. 95—107.
4. Алузяэ Н. А. Применение обобщенного вариационного принципа Кастиллиано к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек // ПММ.— 1950.— Т. 14, вып. 1, 2.— С. 93—99.
5. Алузяэ Н. А. Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии // ПММ.— 1950.— Т. 14, вып. 2.— С. 197—203.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.— М.: Наука, 1974.— С. 14—17, 66—80.
7. Базаренко Н. А., Ворович И. И. Асимптотики поведения решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 6.— С. 1035—1062.
8. Базаренко Н. А., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для цилиндра конечной длины при малой толщине // Тр. V Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Москва, 1965).— М.: Изд-во АН СССР, 1965.— С. 13—14.
9. Базаренко Н. А., Ворович И. И. Анализ трехмерного напряженного и деформированного состояния круговых цилиндрических оболочек. Построение прикладных теорий // ПММ.— 1969.— Т. 33, вып. 3.— С. 495—510.
10. Белько И. В., Бородун А. А., Ведерников В. И., Феденко А. С. Дифференциальная геометрия/Под ред. А. С. Феденко.— Минск: БГУ, 1982.— С. 105.
11. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля.— С.-Петербург: Издание Морского министерства. Ч. I, 1912.— С. 1—330; Ч. II, 1914.— С. 331—640. См. также: Труды по теории пластин.— М.: Гостехиздат, 1953.— С. 101—308.
12. Веква И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Наука, 1959.— С. 116—120.
13. Виленская Т. В., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для незамкнутой полой сферы при малой толщине // Тр. V Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Москва, 1965).— М.: Изд-во АН СССР, 1965.— С. 15—16.
14. Виленская Т. В., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решений задач теории упругости для сферической оболочки малой толщины // ПММ.— 1966.— Т. 30, вып. 2.— С. 278—295.
15. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // ПММ.— 1944.— Т. 8, вып. 2.— С. 109—140.
16. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— М.— JL: Гостехиздат, 1949.— С. 475—478.
17. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.— С. 445—505.

18. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (Москва, 1964). Обзорные доклады, вып. 3. Механика твердого тела.— М.: Наука, 1966.— С. 116—136.
19. *Ворович И. И.* Некоторые проблемы концентрации напряжений // Концентрация напряжений. Вып. 2. Доклады II симпозиума по концентрации напряжений около отверстий в пластинках и оболочках (Киев, 1967).— Киев: Наукова думка, 1968.— С. 45—53.
20. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // ПММ.— 1970.— Т. 34, вып. 5.— С. 870—876.
21. *Ворович И. И., Шленев Н. А.* Пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Механика.— М.: Наука, 1963.— С. 91—176.
22. *Ворович И. И.* Общие проблемы теории пластин и оболочек // Тр. VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Баку, 1966).— М.: Наука, 1966.— С. 896—903.
23. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите // Материалы к VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966).— М.: Наука, 1966.— С. 277—280.
24. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 2.— С. 230—241.
25. *Ворович И. И., Малкина О. С.* О точности асимптотических разложений решений задачи теории упругости для толстой плиты // Инженерный журнал МГТ.— 1967.— № 5.— С. 92—102.
26. *Ворович И. И., Малкина О. С.* О концентрации напряжений в толстой плите // Концентрация напряжений.— Киев: Наукова думка, 1971.— Вып. 3.— С. 37—41.
27. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А.* Некоторые общие свойства трехмерного напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты симметричного строения // Тр. IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Ленинград, 1973).— Л.: Судостроение, 1975.— С. 36—38.
28. *Галимов К. З.* О некоторых задачах теории упругости при произвольных смещениях // Ученые записки Казанского ун-та.— 1952.— Т. 112, кн. 3.— С. 101—119.
29. *Галимов К. З.* Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях // Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук.— 1950.— Вып. 2.— С. 3—38.
30. *Галимов К. З.* Применение вариационного принципа возможных изменений напряженного состояния к нелинейной теории пологих оболочек // Изв. вузов. Математика.— Казань: КГУ, 1958.— № 4.— С. 2—11.
31. *Галимов К. З.* Условии непрерывности деформации поверхности при произвольных изгибах и деформациях // Ученые записки Казанского ун-та.— 1953.— Т. 113, кн. 10.— С. 161—164.
32. *Галимов К. З.* О некоторых задачах теории оболочек при произвольных перемещениях // Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук.— 1953.— Вып. 3.— С. 3—16.
33. *Галимов К. З.* К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 6.— С. 723—742.
34. *Галимов К. З.* К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек // Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук.— 1956.— № 10.— С. 3—25.
35. *Галимов К. З., Паймушин В. Н.* Теория оболочек сплошной формы.— Казань, КГУ, 1985.— С. 34—158.
36. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.— С. 388—464.
37. *Гозман Э. И.* Введение в тензорное исчисление.— Харьков; Киев: ОНТИ НКТП, 1935.— С. 14—24.
38. *Грин А. Е., Адкинс Дж. Е.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.— С. 391—426.



39. Дубровин Б. А., Новиков С. Г., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.— С. 71—110, 499—530.
40. Зубов Л. М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1982.— С. 142.
41. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Ч. 1.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— С. 97—134, 170—181.
42. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.— 767 с.
43. Кильчевский Н. А. Элементы тензорного исчисления и его приложение к механике.— М.: Гостехиздат, 1954.— С. 30.
44. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.— С. 17—50, 84—135.
45. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины.— Киев: Наукова думка, 1978.— С. 55—136.
46. Кочин И. Е. Векторное исчисление и начала тензорного.— М.: Наука, 1965.— С. 307—450.
47. Кутялин Д. И. Теория конечных деформаций.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.— 275 с.
48. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1957.— С. 15—27, 44—56.
49. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.— С. 16—18, 470—474.
50. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 13—55, 173—284, 398—400.
51. Мушгари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек // Изв. физ.-мат. о-ва при Казанском ун-те.— 1938.— Т. 11, серия 8.— С. 71—150.
52. Мушгари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применениями к решению задач устойчивости упругого равновесия // ПММ.— 1939.— Т. 2, вып. 4.— С. 439—456.
53. Мушгари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань: Таткнигоиздат, 1957.— 431 с.
54. Мушгари Х. М. К вопросу обоснования теории тонких пологих оболочек // Прикладная механика.— 1969.— Т. 5, вып. 1.— С. 109—113.
55. Новиков С. П. Лекции по дифференциальной геометрии. Ч. 1, 2.— М.: МГУ, 1972.
56. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— С. 11—59.
57. Норден А. П. Теория поверхностей.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 40—89.
58. Норден А. П. Теория поверхностей.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 40—89, 102—105, 141—156.
59. Норден А. П. К вопросу о геометрической теории конечных деформаций.— Изв. КФАН СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, 1956.— Вып. 2.— С. 53—61.
60. Паймушин В. Н. К задаче параметризации срединной поверхности оболочки сложной геометрии // Прочность и надежность сложных систем. Днепропетровское отделение института механики АН УССР.— Киев: Наукова думка, 1979.— С. 78—84.
61. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу.— М.: МГУ, 1974.— С. 7—42, 139—183.
62. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1969.— С. 73—79, 108—112, 140—144, 151—154.
63. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1967.— С. 9—63, 324—340, 488—582.
64. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 169—185, 210—233, 350—352.
65. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1.— 4-е изд.— М.: Наука, 1983.— 528 с.; Т. 2.— 4-е изд.— М.: Наука, 1984.— 560 с.
66. Сокольников И. С. Тензорный анализ.— М.: Наука, 1971.— С. 63—223.
67. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков.— М.: Наука, 1965.— С. 25—151, 200—204.
68. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана.— М.: Мир, 1983.— С. 9—35.

69. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения.— М.: Оборонгиз, 1949.— С. 187—282.
70. *Фиников С. П.* Дифференциальная геометрия.— М.: Изд-во МГУ, 1961.— 155 с.
71. *Bieberbach L.* Differentialgeometric.— Leipzig; Berlin, 1932.— P. 77—80.
72. *Chien Wei-Zang.* The intrinsic theory of thin shells and plates // Quart. Appl. Math.— 1943.— V. 1, N 1.— P. 297—327.
73. *Chien Wei-Zang.* The intrinsic theory of thin shells and plates // Quart. Appl. Math.— 1944.— V. 2, N 1—2.— P. 120—135.
74. *Destuynder P., Ciarlet P.* A justification of the two-dimensional linear plate model // J. Mécanique.— 1979.— V. 18.— P. 315—344.
75. *Donnel L.* Stability of thin-walled tubes under torsion // Nat. Adv. Corn. for Aeron. Rep.— 1934.— P. 479.
76. *Donnel L.* A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending // Trans. ASME.— 1934.— V. 56, № 11.— P. 795.
77. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure and Appl. Math.— 1961.— V. 14, N 1.— P. 1—33.
78. *von Karman.* Festigkeitsproblem in Maschinenbau // Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV<sub>4</sub>, art 27.— Leipzig, 1910.— P. 311—385.
79. *Koiter W. T.* On the non-linear theory of thin elastic shells // Proc. Konik. Ned. Akad. Wetensch.— 1966.— ser. B, V. 69, N 1.— P. 1—54.
80. *Marguerre K.* Zur theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung.— Berlin, 1939.— P. 413—418.
81. *Murnagan F. D.* Finite Deformation of an Elastic Solid.— Second Edition.— Zonelon, 1967.— P. 230—270.
82. *Pietraszkiewicz W.* Non-linear theories of thin elastic shells (in Polish) // Proc. Polish Symp. shell Structures. Theory and Applications (Krakow, May 25—26, 1974).— Warszawa: Polish Sci. Publ., 1978.— P. 27—50.
83. *Pietraszkiewicz W.* Introduction to the nonlinear theory of shells // Ruhr-Universität Bochum. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik.— 1977.— V. 10.— P. 1—154.
84. *Pietraszkiewicz W.* Finite rotations and lagrangean description in the non-linear theory of shells.— Warszawa; Posnan, 1979.— 104 с.
85. *Pietraszkiewicz W.* Niektore problemy nieliniowej teorii powlok // Mechanika teoretyczna i stosowana.— T. 2, № 18.— Warszawa, 1980.— P. 169—192.
86. *Pietraszkiewicz W.* Finite rotations of shells: Theorie of shells.— North-Holland Publishing Company, 1980.— P. 445—471.
87. *Reissner E.* On the theory of thin elastic shells // H. Reissner. Anniversary Volume: Contributions to Applied Mechanics/I. W. Edwards, Ann. Arbor.— Michigan, 1949.— P. 231—247.
88. *Reissner E.* On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 1950.— P. 27—52.
89. *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells revolution // Progress in Applied mechanics the Prager Anniversary Volume, 1963.— P. 171—178.
90. *Reissner E.* On the equations of non-linear shallow shell theory // Studies Appl. Math., 1969.— V. 48.— P. 171—175.
91. *Reissner E.* A note on generating generalized two-dimensional plate and shell theories // J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP).— 1977.— V. 28.— P. 633—642.
92. *Sanders J.* Non-linear theories for thin shells // Quart. Appl. Math.— 1963.— V. 21.— P. 21—36.
93. *Simmonds I., Danielson D.* Non-linear shell theory with a finite rotation vector // Proc. Konik. Ned. Akad. Wetensch. Ser. B.— 1970.— V. 73.— P. 460—478.
94. *Simmonds I., Danielson D.* Non-linear shell theory with finite rotation and stress function vectors // Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech.— 1972.— V. 39, N 4.— P. 1085—1090.

## К главе II

1. *Александров П. С.* Комбинаторная топология.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— С. 72—81, 111—122, 426—430, 580—588, 599—610.
2. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды МИАН СССР.— 1961.— Т. 60.— С. 42—81.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Пикольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— С. 376—404.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.— С. 13—82.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— С. 101—105.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.— С. 168—170.
7. *Ильин В. П.* О теоремах сложения для предельного показателя // ДАН СССР.— 1954.— Т. 96, № 5.— С. 905—908.
8. *Ильин В. П.* К теоремам вложения // Труды МИАН СССР.— 1959.— Т. 53.— С. 359—386.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— С. 76—80, 195—204, 616—636.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.— С. 174—237.
11. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 79—146, 300—303.
12. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 15—52.
13. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.— С. 11—183.
14. *Лере Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения // УМН.— 1946.— Т. 1, № 3, 4.— С. 71—95.
15. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— С. 13—132.
16. *Мазья В. Г.* Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств // ДАН СССР.— 1960.— Т. 133, № 3.— С. 527—530.
17. *Мазья В. Г.* Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения // Теоремы вложения и их приложения. Труды Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения (Баку, 1966).— М.: Наука, 1970.— С. 142—159.
18. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.— С. 314—316.
19. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жестко-пластических сред.— М.: Наука, 1981.— С. 44—47.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения в математической физике.— 2-е изд., перераб.— М.: Физматгиз, 1962.— 566 с.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— С. 140—157.
22. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— С. 11—263.
23. *Рожанская Ю.* Особые точки векторных полей.— [22].— С. 348—367.
24. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам в частных производных // Ученые зап. Ленинградского пед. ин-та им. А. И. Герцена.— 1958.— Т. 197.— С. 54—112.
25. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5.— М.: Физматгиз, 1959.— С. 274—503.
26. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: ЛГУ, 1950.— С. 5—94; Новосибирск: НГУ, 1962.— С. 5—94.
27. *Соболев В. И., Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1965.— 519 с.

28. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.— С. 130—140.
29. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1982.— 495 с.
30. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.— 664 с.
31. *Успенский С. В.* О теоремах вложения для обобщенных классов Соболева // Сибирский математический журнал.— 1962, № 3.— С. 418—445.
32. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1984.— С. 46—56.
33. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения, работы по аналитической механике.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 273—313.
34. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms // Tech. Report. Univ. of Kansas.— 1955.— N 14.— P. 94—106.
35. *Birkhoff G., Kellogg O. D.* In variant points in function space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1922.— V. 23.
36. *Brouwer L. E. J.* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Math. Ann.— 1912.— V. 71, N 2.— P. 158—184.
37. *Gagliardo E.* Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // Ricerche di Mat.— 1959.— V. 8, N 1.— P. 24—51.
38. *Hopf H.* Vektorfelder in  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten // Math. Ann.— 1926.— Bd. 96.— S. 225—250.
39. *Kronecker L.* Über die Charakteristik von Funktionen Systemen // Monatsber. Acad. Wiss. Berlin.— 1878.— S. 97—121.
40. *Rotte E.* Zur Theorie der topologische Ordnung und der Vektorfeldes in Banachschen Raumen; Compositio, Math. S., 1937.

#### К главам III—IV

1. *Агмон С., Дуглас А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических систем в частных производных при общих граничных условиях.— М.: ИЛ, 1962.— С. 195—203.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // ДАН СССР.— 1963.— Т. 148, № 4.— С. 745—748.
3. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.— С. 222.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— С. 376—404.
5. *Браудер Ф. Е.* Нелинейные эллиптические граничные задачи.— Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму // Новосибирск: АН СССР, 1963.
6. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.— 415 с.
7. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Моск. мат. об-ва.— 1952.— Т. 1.— С. 187—246.
8. *Вишик М. И.* Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму при периодичных граничных условиях // ДАН СССР.— 1961.— Т. 137, № 3.— С. 502—505.
9. *Вишик М. И.* Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму // Труды Моск. мат. об-ва.— 1963.— Т. 12.— С. 125—184.
10. *Волевич Л. Р.* К теории краевых задач для общих эллиптических систем // ДАН СССР.— 1963.— Т. 148, № 3.— С. 489—492.
11. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб.— 1965.— Т. 68, № 3.— С. 373—416.
12. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. Серия мат.— 1955.— Т. 19.— С. 173—176.

13. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 4.— С. 449—474.
14. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // ДАН СССР.— 1957.— Т. 117, № 2.— С. 203—206.
15. *Ворович И. И.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек «в большом» // ДАН СССР.— 1958.— Т. 122, № 1.— С. 37—40.
16. *Ворович И. И.* Некоторые применения нелинейного функционального анализа к задачам механики сплошной среды // Тр. IV Всесоюзного математического съезда. Секционные доклады (Ленинград, 1961). Т. 2.— Л.: Наука, 1964.— С. 541—545.
17. *Ворович И. И.* Пути развития проблемы устойчивости в теории оболочек // Актуальные проблемы науки.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1967.— С. 111—126.
18. *Ворович И. И.* Некоторые оценки числа решений для уравнения Кармана в связи с проблемой устойчивости пластин и оболочек // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды.— М.: Наука, 1969.— С. 111—118.
19. *Ворович И. И., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории оболочек // Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969).— М.: Наука, 1970.— С. 156—159.
20. *Ворович И. И., Яценко М. Н.* Об одной форме потери устойчивости цилиндрической панели // Тр. VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Ростов-на-Дону, 1971).— М.: Наука, 1973.— С. 259—262.
21. *Ворович И. И.* Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды // XIII Международный конгресс. Аннотации докладов.— М.: Наука, 1972.— С. 23—24.
22. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек // ПММ.— 1972.— Т. 36, вып. 4.— С. 691—104.
23. *Ворович И. И., Лебедев Л. П., Шлафман Ш. М.* О некоторых прямых методах и существовании решений в нелинейной теории упругости непологих оболочек вращения // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 2.— С. 339—348.
24. *Ворович И. И.* Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: МГУ, 1977.— С. 10—47.
25. *Гавевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.— 336 с.
26. *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем // ДАН СССР.— 1955.— Т. 102, № 6.— С. 1069—1070.
27. *Дубинский Ю. А.* О разрешимости системы сильного изгиба пластинок // ДАН СССР.— 1967.— Т. 175, № 5.— С. 1026—1029.
28. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 9.— М.: ВИНТИ, 1976.— С. 1—131.
29. *Качуровский Р. И.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах // УМН.— 1968.— Т. 23, № 2.— С. 121—168.
30. *Кошелев А. И.* Об ограниченности в  $L_p$  производных решений эллиптических уравнений.— Мат. сб.— 1956.— Т. 38(30), № 3.— С. 278—312.
31. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 110—146.
32. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1978.— С. 98—184.
33. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Физматгиз, 1963.— 431 с.
34. *Лебедев Л. П.* О равновесии свободной нелинейной пластины // ПММ.— 1980.— Т. 44, № 1.— С. 162—165.
35. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— С. 136—137, 153—156, 178—191.
36. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.
37. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М.: Наука, 1970.— С. 124—206.

18. Морозов Н. Ф. К нелинейной теории тонких пластин // ДАН СССР.— 1957.— Т. 114, вып. 5.— С. 968—971.
19. Морозов Н. Ф. Нелинейные задачи теории тонких пластин // Вестник Ленинградского ун-та.— 1958.— № 19.— С. 100—124.
20. Морозов Н. Ф. Нелинейные задачи теории тонких анизотропных пластин // Изв. вузов. Математика.— Казань, 1960.— № 3.— С. 8—12.
1. Морозов Н. Ф. К нелинейным задачам теории тонких пластин с осями симметрии // ДАН БССР.— 1963.— Т. 7, № 6.
2. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости.— Л.: ЛГУ, 1978.— С. 97—132.
13. Новожиллов В. В. Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.— 366 с.
4. Петровский И. Г. Об аналитичности решения систем уравнений с частными производными.— Мат. сб.— 1939.— Т. 5(47), № 1.— С. 3—70.
5. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // ДАН СССР.— 1964.— Т. 157, № 4.— С. 798—801.
16. Скрыпник В. И. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 9.— М.: ВИНТИ, 1976.— С. 131—242.
7. Скрыпник В. И. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев: Наукова думка, 1973.— 219 с.
18. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дагласа — Л. Ниренберга. I.— Изв. АН СССР. Серия мат.— 1964.— Т. 28, № 3.— С. 665—706.
9. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических в смысле А. Дагласа — Л. Ниренберга. II.— Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 92. Краевые задачи математической физики. 4.— М.; Л.: Наука, 1966.— С. 233—296.
10. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана.— М.: Мир, 1983.— С. 69—96.
11. Antman S. S. Buckled states of nonlinearly elastic plates // Arch. Rational Mech. Anal.— 1978.— V. 67.— С. 111—149.
2. Benardou M., Oden J. Tinsley. An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems // J. Math. Pures et Appl.— 1981.— V. 60, N 3.— P. 285—308.
3. Berger M. S. On von Kármán equations and the buckling of a thin elastic plate // Comm. Pure Appl. Math.— 1967.— V. 20, N 4.— P. 687—718; 1968.— V. 21, N 3.— P. 225—241.
4. Berger M. S., Fife P. C. On von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate II. Plate with general edge conditions // Comm. Pure Appl. Math.— 1968.— V. 21, N 3.— P. 226—241.
5. Bhattacharyya P. K. On existence of a solution of the clamped shallow non-circular cylindrical shell problem // Int. J. Eng. Sci.— 1985.— V. 23, N 3.— P. 359—369.
6. Browder F. E. On the generalization of the Shauder fixpoint theorem // Duck. Math.— 1954.— V. 26, N 2.— P. 116—121.
7. Browder F. E. Nonlinear maximal monotone operators in Banach Spaces // Math. Fund.— 1968.— V. 175, N 2.— P. 89—113.
8. Browder F. E. Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1968.— V. 61, N 2.
9. Destuynder Ph. Sur l'existence du solution stables pair un modèle coque en élasticite von linear // C. R. Acad. Sci.— 1981.— Sér. 1, V. 293, N 15.— P. 713—716.
10. Hildebrandt T. H., Graves L. M. Implicit functions and their differentials in general analysis // Trans. Amer. Math. Soc.— 1927.— V. 29.
1. Hlavacek I., Naumann I. Inhomogeneous boundary value problems for the von Kármán equation. I // Aplukace Matematiky.— 1974.— V. 19.— P. 253—269.
2. Hlavacek I., Naumann I. Inhomogeneous boundary value problems to the von Kármán equations. II // Aplikace Matematiky; 1975.— V. 20.— P. 280—297.

63. John O., Nečas I. On the solvability of von Kármán equations // *Aplukace Matematiky*.— V. 20.— P. 48—62.
64. Knightly G. H. An existence theorem for the von Kármán equations // *Arch. Rational Mech. Anal.*— 1967.— V. 27.— P. 233—242.
65. Knightly G. H., Sather D. On nonuniqueness of the solutions of the von Kármán equations // *Arch. Rational Mech. Anal.*— V. 28, № 2.— P. 65—78.
66. Nečas I., Naumann I. On a boundary value problem in nonlinear theory of thin elastic plates // *Aplikace Matematiky*.— 1974.— V. 19.— P. 7—16.
67. Minty G. I. On the solvability of nonlinear functional equations of «monotone» type // *Pacific Journ. Math.*— 1964.— V. 14, N 1.
68. Rabier P. Résultats d'existence dans les modeles non lineaires de plaques // *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A.*— V. 1979.— V. 2.— P. 515—518.
69. Vorovich I. I. (Rostov-on-Don. USSR.) The problem of nonuniqueness and stability in the non-linear mechanics of continuous media // *Reprint from Applied Mechanics Proceedings of the Thirteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Moscow, August, 1972).*— Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag.— 1973.— P. 340—357.

#### К главе V

1. Вайнберг М. М., Качуровский Р. И. К вариационной теории нелинейных операторов и уравнений // *ДАН СССР*.— 1959.— Т. 129, № 6.— С. 1199—1202.
2. Вайнберг М. М. О безусловном экстремуме функционалов и о сходимости минимизирующих последовательностей // *ДАН СССР*.— 1968.— Т. 183, № 6.— С. 1243—1246.
3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1972.— С. 119—123.
4. Ворovich И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек // *Изв. АН СССР. Серия мат.*— 1955.— Т. 19, № 4.— С. 173—183.
5. Ворovich И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек // *ПММ*.— 1956.— Т. 20, вып. 4.— С. 449—474.
6. Ворovich И. И., Лебедев Л. П. О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек // *ПММ*.— 1972.— Т. 36, вып. 4.— С. 691—704.
7. Ворovich И. И., Лебедев Л. П., Шлафман Ш. М. О некоторых прямых методах и существовании решений в нелинейной теории упругих непологих оболочек вращения // *ПММ*.— 1974.— Т. 38, вып. 2.— С. 339—348.
8. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 299—303.
9. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.— 216 с.
10. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана.— М.: Мир, 1983.— 172 с.

#### К главе VI

1. Александров А. В. Об исследовании геометрически нелинейных пологих оболочек методом последовательных нагружений // *Тр. Моск. инст. шж. ж.-д. транспорта*.— 1974.— Вып. 456.— С. 57—64.
2. Алексеева М. К. О напряженном состоянии пластин, ослабленных отверстием, при больших упругих перемещениях // *Прикл. механика*.— 1968.— Т. 4, № 5.— С. 109—115.
3. Алексеев С. А. Послекритическая работа гибких упругих пластинок // *ПММ*.— 1956.— Т. 20, вып. 6.— С. 637—679.
4. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.— М.: Наука, 1982.— 304 с.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, 1984.— 335 с.
6. Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Гуляев В. И., Дехтярюк Е. С. Построение и исследование кривых нагружения механических систем // *Вычислительная и прикл. мат.* Киев.— 1981.— № 46.— С. 84—96.

7. Беллман Р. Метод возмущений в приложении к нелинейной механике // Сб. переводов и обзоров иностр. периодич. литературы. № 2. Механика.— М.: ИЛ, 1957.— С. 154—159.
8. Бермус И. М. Неосесимметричное выпучивание ортотропных сферических оболочек // Механика композитных материалов.— 1980.— № 6.— С. 1056—1061.
9. Бермус И. М., Срубщик Л. С. Особые случаи ветвления решений уравнений неосесимметричного деформирования упругих оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. XIII Всесоюзная конференция. Таллин, 1983, ч. 1, с. 114—119.
10. Бермус И. М., Срубщик Л. С. Неосесимметричное выпучивание и после-критическое поведение упругих конических оболочек в случае двукратного критического значения нагрузки // Актуальные проблемы механики оболочек. Тезисы докладов.— Казань; КГУ, 1985.— С. 23—24.
11. Будянский В., Хатчисон Дж. Выпучивание: достижения и проблемы. Механика деформируемых твердых тел: направления развития.— М.: Мир, 1983.— С. 121—160.
12. Бутенко В. Ю. Использование метода продолжения по параметру для решения нелинейных краевых задач // Теория автоматизир. проектир., Харьков.— 1980.— № 2.— С. 97—100.
13. Вавилов В. В. О сходимости аппроксимаций Паде мероморфных функций // Мат. сб.— 1976.— Т. 101 (143).— С. 44—56.
14. Вайнберг Д. В., Гуляев В. И. Устойчивость механических и физических полей в оболочках сложной формы // Успехи механики деформируемых сред.— М.: Наука, 1975.— С. 96—104.
15. Вайнберг Д. В., Гуляев В. И., Мельниченко Г. И. Особые точки и точки ветвления решений нелинейных уравнений деформируемой среды // Сопротивление материалов и теория сооружений. Межвед. респ. науч.-техн. сб. Вып. 21.— Киев, 1973.— С. 23—31.
16. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с.
17. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости/Под ред. А. А. Николаевского.— М.: Мир, 1967.— 309 с.
18. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М.: Машиностроение, 1976.— 278 с.
19. Валишвили Н. В., Гагרוшин С. С. Об использовании метода движения по параметру при конечно-разностном исследовании геометрически нелинейных задач теории тонких упругих оболочек // Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1, Ереван, 1980.— С. 254—257.
20. Ворович И. И. О поведении круглой плиты после потери устойчивости // Уч. зап. Рост. ун-та.— 1955.— Т. 32, вып. 4.— С. 55—60.
21. Ворович И. И., Минакова Н. И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек // Итоги науки. Механика. Т. 7.— М.: ВИНТИ, 1973.— С. 5—86.
22. Григолюк Э. И. К вопросу о поведении круглой пластины после потери устойчивости // Вестник инженеров и техников.— 1949.— № 3.— С. 103—106.
23. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. О некоторых формах метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости // ПМТФ.— 1980.— № 5.— С. 158—162.
24. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек // Успехи механики, Варшава.— 1981.— Т. 4, вып. 2.— С. 89—122.
25. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Модифицированные формы метода продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1983.— С. 55—70.
26. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек //



- Исследования по теории пластин и оболочек.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.— Вып. 17, ч. 1.— С. 3—58.
27. Гончар А. А. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций // Мат. сб.— 1975.— Т. 98(140).— С. 564—577.
  28. Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Мат. сб.— 1975.— Т. 105.— С. 147—163.
  29. Гончар А. А., Лунгу К. Н. Полюсы аппроксимаций Паде и аналитическое продолжение функций // Мат. сб.— 1980.— Т. 111(153).— С. 119—132.
  30. Гуляев В. И. Устойчивость деформируемой среды при больших перемещениях // Сопротивл. материалов и теория сооружений. Межвед. респ. научно-техн. сб. Киев: Будівельник, 1971.— Вып. 14.— С. 44—48.
  31. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. Устойчивость нелинейных механических систем.— Львов: Вища школа, 1982.— 254 с.
  32. Гуляев В. И., Мельниченко Г. И. Формы закритического равновесия цилиндрических и конических оболочек эллиптического сечения под действием осевой нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 5.— С. 60—66.
  33. Е Кай Юань. Исследование больших прогибов тонких кольцеобразных пластинок.— [71].— С. 79—101.
  34. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М: Наука, 1977.— С. 669—692.
  35. Карпов В. В. Способ улучшения решения, полученного методом последовательных нагружений // Волжский мат. сб.— Куйбышев: Куйбыш. пед. ин-т.— 1973.— Вып. 15.— С. 106—111.
  36. Карпов В. В. О погрешности линеаризации при расчете гибких оболочек // Механика деформ. сред.— Саратовский ун-т, 1976.— Вып. 4.— С. 102—108.
  37. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решения при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 5.— С. 189—191.
  38. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру.— Киев: Наукова думка, 1980.— С. 68—94.
  39. Каюк Я. Ф. Об аналитическом продолжении решений нелинейных дифференциальных уравнений по параметру // Укр. мат. журн.— 1967.— № 19.— С. 131—138.
  40. Каюк Я. Ф. Концентрация усилий в пластинах после потери устойчивости // Концентрация напряжений.— 1968.— Вып. 2.— С. 54—61.
  41. Каюк Я. Ф. Напряженное состояние пологих оболочек вращения при больших перемещениях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1969.— № 5.— С. 159—163.
  42. Каюк Я. Ф. Концентрация напряжений в тонких оболочках при больших прогибах // Концентрация напряжений.— 1971.— Вып. 3.— С. 74—86.
  43. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы геометрически нелинейных задач // Прикл. механика.— 1971.— Т. 7, № 8.— С. 69—76.
  44. Каюк Я. Ф. О сходимости разложений по параметру в геометрически нелинейных задачах // Прикл. механика.— 1973.— Т. 9, № 3.— С. 83—89.
  45. Коннор Дж., Морин Р. Метод возмущений в расчете геометрически нелинейных оболочек // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т. 2.— Л.: Судостроение, 1974.— С. 186—202.
  46. Кубенко В. Д., Немши Ю. Н., Шнеренко К. И., Шульга Н. А. Метод возмущений в крайних задачах механики деформируемых тел. Прикл. механика.— 1982.— Т. 18, № 11.— С. 3—20.
  47. Кублановская В. Н. Приложение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе // Тр. МИАН.— 1959.— Т. 53.— С. 13—69.
  48. Кузнецов В. В. Об использовании метода продолжения решения по длине отрезка интегрирования при расчете круглых гофрированных пластин // Изв. АН СССР. МТТ.— 1983.— № 2.— С. 189—191.
  49. Ляпунов А. М. О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости // Собр. соч. Т. 4.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— С. 9—208.

50. *Логинов В. В.* Об инвариантных решениях в теории ветвления // ДАН СССР.— 1979.— Т. 246, № 5.— С. 1048—1051.
51. *Логинов В. В., Треногин В. А.* Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений // *Мат. сб.*— 1971.— Т. 85, № 3.— С. 440—454.
52. *Моршнева И. В., Юдович В. И.* Об ответвлении циклов от равновесий инверсионно- и вращательно-симметричных динамических систем // *Сиб. мат. журн.*— 1985.— Т. 26, № 1.— С. 124—133.
53. *Найфе А. Х.* Методы возмущений.— М.: Мир, 1971.— 456 с.
54. *Никиреев В. М.* К решению нелинейных уравнений строительной механики методом последовательных нагружений // *Строит. мех. и расчет сооружений.*— 1970.— № 3.— С. 61—62.
55. *Петров В. В.* К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // *Науч. докл. высшей школы. Строительство.*— 1959.— № 1.— С. 27—35.
56. *Петров В. В.* Исследование конечных прогибов пластин и пологих оболочек методом последовательных нагружений // *Теория пластин и оболочек. Тр. II Всес. конф. (Львов, 1961).*— Киев: Изд-во АН УССР, 1962.— С. 328—331.
57. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории оболочек // *Науч. тр. Саратов. политехн. ин-т.*— 1970.— Вып. 49.— С. 50—57.
58. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек.— Саратов. политехн. ин-т: Изд-во Саратов. ун-та, 1975.— 119 с.
59. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К вопросу об устойчивости пластинки // *ПММ.*— 1936.— Т. 3, № 1.— С. 16—22.
60. *Разманов Е. А.* О сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций // *Мат. сб.*— 1980.— Т. 112(154)— С. 162—169.
61. *Рикс Е.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // *Прикл. механика.*— 1972.— № 4.— С. 204—210.
62. *Свирский И. В.* Способы частичной линеаризации, ускоряющие сходимость метода Ньютона при решении систем нелинейных уравнений // *Тр. семинара по теории оболочек. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР.*— 1975.— Вып. 6.— С. 202—209.
63. *Свирский И. В.* Способы частичной линеаризации при решении уравнений в частных производных // *Тр. семинара по теории оболочек. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР.*— 1975.— Вып. 6.— С. 210—213.
64. *Срубцик Л. С.* Выпучивание упругих оболочек с начальными несовершенствами по многим собственным формам // *ДАН СССР.*— 1979.— Т. 249, № 4.— С. 808—812.
65. *Срубцик Л. С.* Влияние начальных несовершенств на выпучивание упругих оболочек при кратных критических нагрузках // *ПММ.*— 1980.— Т. 44, вып. 5.— С. 892—904.
66. *Срубцик Л. С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1981.— 96 с.
67. *Срубцик Л. С.* Неосесимметричное выпучивание и послекритическое поведение упругих сферических оболочек в случае двукратного критического значения нагрузки // *ПММ.*— 1983.— Т. 47, вып. 4.— С. 662—672.
68. *Темис Ю. М.* Метод последовательных нагружений с коррекцией погрешности в геометрически нелинейных упругих задачах // *Прикл. пробл. прочности и пластич., Горький, 1980, № 16, с. 3—10.*
69. *Тер-Григорьянц Г. К.* О возникновении двоякопериодической конвекции в горизонтальном слое // *ПММ.*— 1973.— Т. 37, вып. 1.— С. 177—184.
70. *Теория ветвлений и нелинейные краевые задачи на собственные значения/Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана.*— М.: Мир, 1974.— 255 с.
71. *Теория гибких пластин/Перевод с китайского В. В. Новидкого и В. П. Слабонова. Под ред. А. С. Вольмира.*— М.: ИЛ, 1957.— 208 с.
72. *Терстон Ж. А.* Продолжение метода Ньютона через точки бифуркации // *Прикл. механика.*— 1969.— № 3.— С. 44—52.

73. Хатчисон Дж., Койтер В. Т. Теория посткритического поведения конструкций // Механика.— М.: 1971.— Т. 128, № 4.— С. 129—150.
74. Цень Вэй Чан. Приложение метода возмущений к теории круглых тонких пластинок большого прогиба // [71].— С. 56—79.
75. Цень Вэй Чан, Е Кай Юань. О больших прогибах круглых тонких пластинок // [71].— С. 178—207.
76. Цень Вэй Чан. Теория круглых пластинок большого прогиба при осевой симметрии // [71].— С. 11—38.
77. Шалашилин В. И. Некоторые алгоритмы метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости // Нелинейная теория оболочек и пластин.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.— С. 50—51.
78. Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах больших осесимметричных прогибов оболочек вращения // Тр. XII Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Т. III. Ереван.— 1980.— С. 264—271.
79. Шалашилин В. И. Продолжение по параметру в задачах устойчивости и собственных колебаний // Тр. Всес. симпозиума по нелинейным задачам теории пластин и оболочек.— Саратов: Саратовский ун-т, 1981.— С. 29—32.
80. Шалашилин В. И. Алгоритмы метода продолжения по параметру для нелинейных уравнений деформируемых систем.— М.: МАИ, 1981.— 29 с.
81. Шалашилин В. И. Алгоритмы метода продолжения по параметру в нелинейных краевых задачах теории деформируемых систем.— М.: МАИ, 1981.— 29 с.
82. Шалашилин В. И. Продолжение решения в точках ветвления.— М.: МАИ, 1981.
83. Шалашилин В. И. Алгоритмы метода продолжения для больших осесимметричных прогибов оболочек вращения. Численные и экспериментальные методы исследования прочности, устойчивости и колебаний конструкций ЛА.— М.: МАИ, 1983.— С. 72—78.
84. Юдович В. И. Свободная конвенция и ветвление // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 1.— С. 101—111.
85. Baker G. A., Graves-Morris P. Pade Approximants. Part I: Basic theory, 325 p.; Part II: Extensions and applications, 215 p.— London: Addison — Wesley Publishing Company, 1981.
86. Bodner S. R. The Postbuckling behaviour of a clamped circular plate // Quart. Appl. Math.— 1955.— V. 12, N 4.— P. 397—401.
87. Budiansky B. Theory of buckling and post buckling behaviour of elastic structures // Advances in Appl. Mechanik.— 1974.— V. 14.— P. 2—66.
88. Budiansky B., Hutchinson J. W. Buckling progress and challenge // Trends in Solid Mechanics/eds I. F. Besseling, A. M. A. van der Heijden // Proc. of the Symp. dedicated to the sixty — fifth birthday of W. T. Koiter.— Delft: The University Press, 1979.— С. 93—117.
89. Friedrichs K., Stoker J. The nonlinear boundary value problem of the buckled plate // Proc. of the Nat. Acad. of Sci.— 1939.— V. 25.— P. 535—540; Amer. J. Math.— 1941. V. 63.— P. 839—888; Buckling of the circular plate beyond the critical thrust // J. Appl. Mech.— 1942.— V. 9, N 1.— P. 7—14.
90. Hansen J. S. Some two-modes buckling problems and their relation to catastrophe theory // AIAA Journal.— 1977.— V. 15, N 11.— P. 1638—1644.
91. Hutchinson J. W., Koiter W. T. Post — buckling theory // Appl. Mech. Rev.— 1970.— V. 23.— P. 1353.
92. Koiter W. T. On the stability of elastic equilibrium. Dissertation.— Delft, 1945. (Techn. Trans., NASA.— 1967.— Т. 10.— P. 833).
93. Koiter W. T. Elastic stability and postbuckling behaviour // Proc. Sympos. on Nonlinear Problem/Ed. Langer R. E. Univ. of Wisconsin Press, 1963.— P. 257—275.
94. Koiter W. T. The non-linear buckling problem of a complete spherical shells under uniform external pressure.— Proc. Konink. Ned. Akad. Wetensch.— 1969.— Ser. B. V. 72.— P. 40.
95. Koiter W. T. Current trends in the theory of buckling // Buckling Structure.— Berlin, 1976.— P. 1—16

96. Koiter W. T. Forty years in retrospect, the bitter and the sweet // Trends and Solids Mechanics (Eds I. F. Besseling, A. M. A. van der Heijden. Proc. of the Symposium dedicated to the sixtyfifth birthday of W. T. Koiter.— Delft: The University Press.— 1979.— P. 237—246.
97. Koiter W. T., Van der Neut A. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels // Thin — Walled Structures (eds I. Rhodes, A. C. Walker).— London: Grenada, 1980.
98. Koiter W. T. The application of the initial postbuckling analysis to shells // Buckling Shells. Proc. State — of — the Art. Colloq., Univ. Stuttgart, May 6—7, 1982.— Berlin e. a., 1982.— P. 3—11.
99. Liapunov A. Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvements de rotation // P. 1. Зап. Акад. Наук.— СПб, 1906.
100. Na T. Y., Turski C. E. Solution of the non-linear differential equations to finite bending of a thin-walled by parameter differentiation // J. Aeronaut. Quart.— 1974.— V. 25, N 1.— P. 14—18.
101. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecha nique celest, 1.— Paris: Gauthier — Villars, 1892.
102. Poiter-Ferry M. Imperfection seneitivity of a nearly double bifurcation point // Stab. Mech. Continua.— 2 Symposium, Numbrecht. Aug. 31.— Sept. 4, 1981.— Berlin, 1982.— P. 201—214.
103. Randhamohan S. K., Setlur A. V., Goldberg J. E. Stability of shells by parametric differentiation // J. Struct. Div., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.— 1971.— V. 97, N 6.— P. 1775—1790.
104. Schamidt E. Zur Theorie linearen and nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 3. Über die Auflösungen der nichtlinearen Integral gleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1910.— Bd 65.— S. 370—399.
105. Thurston G. A. Continuation of Newton's method through bifurcation points // Trans. ASME.— 1969.— E36, N 3.— P. 425—430.
106. Thompson I. M. T. The rotationally — simmetric branching behaviour of a complete spherical shall.— Proc. Konik. Ned. Akad. Wetensch.— 1964.— Ser. B. V. 67.— P. 295—299.
107. Thompson I. M. T. The elastic instability of a complete spherical shell // Aeronatu. Quart.— 1962.— V. 13.— P. 189—193.
108. Thompson I. M. T. The post-buckling of a spherical shell by computer analysis // World Conference on Sheel Structures (eds S. I. Medwadowski et al.).— Washington: National Academie of Sciences, 1964.

### К главе VII

1. Амельченко В. В., Невгеров И. В., Петров В. В. Решение нелинейных задач теории пологих оболочек путем вариационных итераций // Изв. АН СССР. МТТ.— 1963.— № 3.— С. 62—68.
2. Амельченко В. В., Крысько В. А. Расчет гибких ортотропных пластин методом Власова — Канторовича на ЭВМ // За технический прогресс.— 1967.— № 1.— С. 9—11.
3. Амельченко В. В. К вопросу о сходимости вариационного метода В. З. Власова при расчете гибких пологих оболочек // Вычислительные методы и программирование. Саратов. ун-т.— 1970, вып. 3.— С. 153—160.
4. Амельченко В. В., Крысько В. А. Исследование закритического поведения гибких цилиндрических панелей и пластинок // Механика деформ. сред: Саратовский ун-т, 1974.— Вып. 2.— С. 14—23.
5. Андреева Л. Е., Петровский В. В. Решение нелинейных задач осесимметричного деформирования оболочек на основе метода В. З. Власова // Изв. вузов. Машиностроение.— 1972.— № 8.— С. 173—175.
3. Бубнов И. Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем» // Избранные труды.— Л.: Гос. изд-во судостроительной промышленности, 1956.— С. 136—139.

7. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
8. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.— С. 475—478.
9. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
10. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек // Тезисы докладов на совещании по теории упругости, пластичности и теоретическим вопросам строительной механики (22—25 дек. 1954 г.).— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954.— С. 21—22.
11. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. Серия математическая.— 1955.— Т. 19, № 4.— С. 173—183.
12. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек // ДАН СССР.— 1955.— Т. 105, № 1.— С. 42—45.
13. *Ворович И. И.* Некоторые задачи нелинейной теории оболочек // Тр. III Всес. мат. съезда. Секционные доклады.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.— С. 1, 201—202.
14. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 4.— С. 449—474.
15. *Ворович И. И.* Погрешность прямых методов в нелинейной теории оболочек // ДАН СССР.— 1958.— Т. 122, № 2.— С. 196—199.
16. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Исследование устойчивости неполого сферического купола в высоких приближениях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1963.— № 2.— С. 121—128.
17. *Ворович И. И.* Некоторые математические проблемы теории пластин и оболочек // II Всес. съезд по теоретической и прикладной механике. (Москва, 29 янв.— 5 февр., 1964). Аннотации докладов.— М.: Наука, 1964.— С. 56—57.
18. *Ворович И. И.* Некоторые применения нелинейного функционального анализа к задачам механики сплошной среды // Тр. IV Всесоюзного матем. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.). Секционные доклады.— Л.: Наука, 1964.— Т. 2.— С. 541—545.
19. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // ПММ.— 1965.— Т. 29, вып. 5.— С. 894—901.
20. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* Анализ нелинейной деформации сферического купола в высоких приближениях // Инженерн. журн. МТТ.— 1966.— № 2.— С. 150—153.
21. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. (Москва, 1964). Обзорные доклады, вып. 3. Механика твердого тела.— М.: Наука, 1966.— С. 116—136.
22. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф., Минакова Н. И., Яценко М. Н., Шепелева В. Г.* О некоторых результатах исследования на ЭВМ нелинейных задач теории оболочек // V Всес. конф. по применению ЭЦВМ в строительной механике (Тбилиси, 1968). Аннотации докладов.— Тбилиси: 1968.
23. *Ворович И. И., Минакова Н. И., Зипалова В. Ф., Срубцик Л. С., Шепелева В. Г.* О результатах математического исследования и численного анализа устойчивости некоторых типов оболочек и неполюгих оболочек // III Всес. съезд по теоретической и прикладной механике (Москва, 1968).— М.: Изд-во АН СССР, 1968.— С. 80—83.
24. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Устойчивость неполого сферического купола // ПММ.— 1968.— Т. 32, № 2.— С. 332—338.
25. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Исследования устойчивости неполого сферического купола в высоких приближениях // Изв. АН СССР, МТТ.— 1969.— № 2.— С. 121—128.
26. *Ворович И. И., Шепелева В. Г.* Исследование нелинейной устойчивости пологой оболочки двойкой кривизны в высоких приближениях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1969.— № 3.— С. 69—73.

27. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек.— М.: ВИНТИ, 1973.— С. 5—84.— (Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел; Т. 7.)
28. *Ворович И. И., Яценко М. Н.* Об одной форме потери устойчивости цилиндрической панели // Теория оболочек и пластин. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1973.— С. 104—109.
29. *Ворович И. И., Минакова Н. И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек.— М.: ВИНТИ, 1973.— С. 5—86.— (Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел; Т. 7.)
30. *Ворович И. И., Лебедев Л. П., Шлафман Ш. М.* О некоторых прямых методах и существовании решений в нелинейной теории упругости неполюгих оболочек вращения // ПММ.— 1974.— Т. 38, вып. 2.— С. 339—348.
31. *Ворович И. И.* Метод Бубнова — Галеркина, его развитие и роль в прикладной математике // Успехи механики деформируемых сред: К 100-летию со дня рождения акад. Б. Г. Галеркина.— М.: Наука, 1975.— С. 121—133.
32. *Ворович И. И., Шлафман Ш. М.* О сходимости метода конечных элементов в нелинейной теории оболочек // X Всес. конф. по теории оболочек и пластин.— Тбилиси, 1975.— Т. 1.— С. 552—561.
33. *Галеркин Б. Г.* Стержни и пластинки // Вестник инженеров. 1.— 1915.— Т. 19.— С. 897—908.
34. *Грошева М. В., Ефимов Г. В., Брумберг В. А. и др.* Системы аналитических вычислений на ЭВМ // Информатор № 1.— М.: ИПМ АН СССР, 1983.— 42 с.
35. *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР.— 1953.— Т. 88, № 4.— С. 601—602.
36. *Давиденко Д. Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. мат. журн.— 1953.— Т. 5, № 2.— С. 196—206.
37. *Давиденко Д. Ф.* О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1955.— Т. 7, № 1.— С. 18—28.
38. *Давиденко Д. Ф.* К вопросу о нахождении приближенных решений алгебраических уравнений // ДАН УССР.— 1962.— Т. 4.— С. 434—437.
39. *Давиденко Д. Ф.* О применении метода вариации параметра к построению итерационных формул повышенной точности для определения численных нелинейных интегральных уравнений // ДАН СССР.— 1965.— Т. 162, № 3.— С. 499—502.
40. *Давиденко Д. Ф.* О построении итерационных процессов повышенной точности методом вариации параметра // Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков. Секция 14.— М.: АН СССР, 1966.— С. 31.
1. *Закс М. Б.* Аналитические преобразования на ЭВМ.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981.— 84 с.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.— 541 с.
3. *Зипалова В. Ф.* Исследование больших осесимметричных деформаций сферического купола при комбинированных нагружениях // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1966.— С. 410—412.
4. *Зипалова В. Ф.* Устойчивость сферического купола с шарнирным закреплением // Изв. АН СССР. МТТ.— 1967.— № 1.— С. 172—177.
5. *Зипалова В. Ф., Ненастьева В. М.* Исследование хлопка сферической оболочки под действием кольцевой нагрузки в высоких приближениях // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1966.— С. 413—414.
6. *Зипалова В. Ф., Щепкина Е. Д.* Исследование устойчивости конической оболочки в высоких приближениях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1970.— № 3.— С. 135—139.

47. *Зиналова В. Ф., Ненастьева В. М.* Термоустойчивость шарнирно опертой пологой сферической оболочки // Теория оболочек и пластин. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1973.— С. 289—293.
48. *Ильин В. П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов // Тр. МИАН, I—III.— Работы по приближенному анализу.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959.— С. 64—127.
49. *Келдыш М. В.* О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Серия мат.— 1942.— № 6.— С. 309—330.
50. *Кирия В. С.* Об одном новом методе решения конечных уравнений // Тр. Тбил. ун-та.— 1960.— № 86.— С. 235—259.
51. *Колтунов М. А.* Приближенное решение задачи о деформации гибкой оболочки методом независимого выбора аппроксимирующих функций // Научно-техн. конф. по расчету пластинок и оболочек.— М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1952.
52. *Колтунов М. А.* Учет конечных перемещений в задаче об изгибе и устойчивости пластинок и пологих оболочек // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1952.— № 5.
53. *Колтунов М. А.* Напряженное состояние гибких пологих оболочек // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1962.— № 4.— С. 63—69.
54. *Колтунов М. А.* Уточненное решение задачи об устойчивости прямоугольных панелей гибких оболочек // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1961.— № 3.— С. 37—46.
55. *Колтунов М. А.* Устойчивость панели цилиндрической оболочки // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1962.— № 6.
56. *Колтунов М. А.* Устойчивость пологих оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек.— Казань: Изд-во Казан. ун-та.— 1968.— № 6.
57. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления // Сб. статей/Под ред. Б. Бухбергера, Д. Коллинза, Р. Луса.— М.: Мир, 1986.— 391 с.
58. *Корнишин М. С.* О решении систем нелинейных алгебраических уравнений теории оболочек // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1959.— № 4.— С. 151—154.
59. *Корнишин М. С.* Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения.— М.: Наука, 1964.— 192 с.
60. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 172—184.
61. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 455 с.
62. *Красовский Ю. П.* Исследование потенциалов, связанных с краевыми задачами для эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Серия математическая.— 1967.— Т. 31, № 3.— С. 587—640.
63. *Красовский Ю. П.* Выделение особенности у функции Грина. Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— Т. 31, № 5.— С. 977—1010.
64. *Крылов Н. М.* О некоторых направлениях в области приближенного решения проблем математической физики // Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции.— М.: Изд-во АН СССР.— 1947.— Т. 1.— С. 231—241.
65. *Крысько В. А.* О решении нелинейных задач теории пластинок вариационным методом Власова—Канторовича и пути уточнения решения // Материалы XXX научно-техн. конф. Саратов. политехи. ун-та, секция строит. и дорожно-строит. ф-ов.— Саратов, 1967.— С. 98—104.
66. *Крысько В. А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1976.— 216 с.
67. *Курдюмов А. А.* К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та, 1961, вып. 34, С. 55—62.

68. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.— С. 84—88.
69. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М.: Гостехиздат, 1957.— 457 с.
70. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов.— М.: Физматгиз, 1966.— 432 с.
71. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к задачам устойчивости упругого равновесия // Изв. физ.-мат. о-ва и научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете им. В. И. Ульянова-Ленина, 1938.— С. 71—148.
72. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань: Таткнигоиздат, 1957.— 430 с.
73. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.
74. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1985.— 588 с.
75. *Панов Д. Г.* О применении метода Б. Г. Галеркина для решения некоторых задач теории упругости // ПММ.— 1939.— Т. 3, № 2.— С. 139—142.
76. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Ч. II.— М.: Оборонгиз, 1941.
77. *Петров В. В.* Расчет гибких пластинок и пологих оболочек вариационным методом В. З. Власова // Прикл. механика.— 1966.— Т. 2, № 5.— С. 50—57.
78. *Петров В. В., Филатов В. Н.* Расчет гибких пластинок вариационным методом В. З. Власова // Изв. вузов. Строительство и архитектура.— 1970.— № 2.— С. 46—49.
79. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в линейной теории пластин и оболочек.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975.— 120 с.
80. *Петров В. В., Невееров И. В., Амельченко В. В.* Некоторые вопросы расчета пологих оболочек при больших прогибах вариационным методом Власова // Изв. вузов. Строительство и архитектура.— 1968.— № 12.— С. 22—28.
81. *Петров В. В., Семенов И. К.* Расчет нелинейно-упругих пластинок обобщенным методом Власова — Канторовича // Изв. вузов. Строительство и архитектура.— 1982.— № 2.— С. 37—41.
82. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек.— М.: Наука, 1967.— 279 с.
83. *Свирский И. В.* О точности метода Бубнова — Галеркина // ДАН СССР.— 1953.— Т. 88, № 5.— С. 624—624.
84. *Свирский И. В.* Методы решения систем алгебраических и трансцендентных уравнений, встречающиеся при расчете больших прогибов пластин и оболочек // Материалы летней школы по проблеме: Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. I.— Тарту: Тартуский гос. ун-т, 1966.— С. 234—257.
85. *Свирский И. В.* Методы типа Бубнова — Галеркина и последовательных приближений.— М.: Наука, 1968.— 199 с.
86. Система аналитических преобразований в механике // Тезисы докл. Всес. конф.— Горький: ГГУ, 1984.— 147 с.
87. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: ЛГУ, 1950.— С. 48—51.— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1962.— С. 48—51.
88. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов.— М.: Мир, 1977.— 349 с.
89. *Стриклин Дж.* Статический и динамический расчеты геометрически нелинейных оболочек вращения // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ/Пер. с англ. под ред. А. П. Филина.— Л.: Судостроение, 1974.— С. 272—293.
90. *Феодосьев В. И.* К расчету хлопающей мембраны // ПММ.— 1946.— Т. 10, вып. 2.— С. 295.
91. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения.— М.: Оборонгиз, 1949.— 343 с.



92. Форсберг К. Оценка методов конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек // [89].— С. 296—311.
93. Харрик И. Ю. О приближении функций, обращающихся на границе в нуль вместе с частными производными, функциями особого рода // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 253—256.
94. Харрик И. Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида // Сиб. мат. журн.— 1963.— Т. 4, № 2.— С. 408—425.
95. Яковлев М. Н. К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру // Журн. вычисл. мат. и мат. физики.— 1964.— Т. 4, № 11.— С. 146—149.
96. Яковлев М. Н. О некоторых методах решения нелинейных уравнений // Тр. МИАН.— 1965.— № 84.— С. 8—40.
97. Ямада И., Екоши У. Исследование конечной деформации осесимметричных плит и оболочек // [89].— С. 171—185.
98. Ritz W. Uber eine neue Methode zur Losung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik // J. reine angew. Math., 1908.— V. 135.— P. 1—61.
99. Ritz W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platten mit freien Randern // Ann. d. Phys.— Bd 28, N 4.— S. 737—786.
100. Stoutenmyer D. R. Analytical solution of the integralequations using computer algebra // SIAM Revin.— 1971.— V. 18 (4).— P. 829.

#### К главе VIII

1. Бахтин И. А., Красносельский М. А. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости // ДАН СССР.— 1955.— Т. 105, № 4.— С. 621—624.
2. Валишвили Н. В., Стегний В. Н. О формах равновесия пологих сферических оболочек // МТТ.— 1968.— Т. 2, № 6.— С. 131—134.
3. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М.: Машиностроение, 1976.— С. 151—186.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.— С. 382—538.
5. Ворович И. И. О поведении круглой плиты после потери устойчивости // Ученые записки РГУ. Физико-матем. ф-т.— 1955.— Т. 32, вып. 4.— С. 55—60.
6. Ворович И. И. Некоторые применения нелинейного функционального анализа к задачам механики сплошной среды // Тр. IV Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Секционные доклады.— Л.: Наука, 1964.— С. 541—545.
7. Ворович И. И. Некоторые математические проблемы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Обзорные доклады, вып. 3. Механика твердого тела.— М.: Наука, 1966.— С. 116—136.
8. Ворович И. И. Единственность решения краевых задач нелинейной теории оболочек и проблема жесткости оболочек // Тр. Тбилисского гос. университета. Институт прикладной математики. Вып. 2.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1969.— С. 49—55.
9. Ворович И. И. Некоторые оценки числа решений для уравнения Кармана в связи с проблемой устойчивости пластин и оболочек // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды: К 60-летию акад. Л. И. Седова.— М.: Наука, 1969.— С. 111—118.
10. Ворович И. И. Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды // XIII Международный конгресс по теоретической и прикладной механике. Аннотация докладов.— Москва, 1972.— С. 23—24.
11. Ворович И. И. Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды: Лекции, прочитанные на мехмате МГУ // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: МГУ, 1977.— С. 10—47.

12. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей // УМН.— 1948.— Т. 3, вып. 2(24).— С. 47—158.
13. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— С. 669—714.
14. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.— С. 163—165.
15. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.— С. 336—350.
16. *Морозов Н. Ф.* Единственность симметричного решения // ДАН СССР.— 1958.— Т. 123, вып. 3.— С. 417—419.
17. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.— 182 с.
18. *Оссерман Р.* Задача Плато // УМН.— 1967.— Т. 22, вып. 4.— С. 55—136.
19. *Погорелов А. В.* Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1959.— 105 с.
20. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей.— Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
21. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек.— М.: Наука, 1967.— 281 с.
22. *Срубцик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба, симметрично нагруженных оболочек вращения // ПММ.— 1962.— Т. 26, вып. 5.— 313—332.
23. *Срубцик Л. С.* Нежесткость сферической оболочки // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 4.— С. 723—729.
24. *Срубцик Л. С.* Нежесткость сферического купола // ПММ.— 1968.— Т. 32, вып. 3.— С. 435—444.
25. *Срубцик Л. С.* К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Серия мат.— 1972.— № 4.— С. 890—909.
26. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.— 177 с.
27. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле.— М.; Л.: ОНТИ, 1934.— 600 с.
28. *Ясинский Ф. С.* Избранные работы по устойчивости сжатых стержней.— М.: Гостехиздат, 1952, приложение IV, с. 125—129.
29. *Euler L.* Methodus inveniendi linear curvas maximim minimive proprietate gaudentes (Appendix, De curvis elasticis) Marcum Michaellem. Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744.

### К главе IX

1. *Бергер М. С.* Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем // Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения.— [28].— С. 71—112.
2. *Бергер М. С.* Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений (продолжение).— С. 113—128.
3. *Вайнберг М. М.* О собственных элементах одного класса нелинейных операторов // ДАН СССР.— 1950.— Т. 75, № 5.— С. 609—612.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с.
5. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
6. *Волковьевский Д. Х.* Доказательство существования выпученных форм круглых пластин при помощи теоремы Шаудера о неподвижной точке // Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения.— [28].— С. 35—45.
7. *Ворович И. И.* О поведении круглой плиты после потери устойчивости // Ученые записки РГУ. Тр. физико-математического ф-та.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1955.— Вып. 4.— С. 55—60.

8. *Ворович И. И.* Некоторые задачи нелинейной теории оболочек // Тр. III Всесоюзного математического съезда. Секционные доклады.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 1.— С. 201—202.
9. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек.— ДАН СССР.— 1957.— Т. 417, № 2.— С. 748—784.
10. *Ворович И. И.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек «в большом» // ДАН СССР.— 1958.— Т. 122, № 1.— С. 37—40.
11. *Ворович И. И.* Некоторые математические проблемы теории пластин и оболочек // II Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов.— М.: Наука, 1964.— С. 56—57.
12. *Ворович И. И.* Некоторые применения функционального анализа к задачам механики сплошной среды // Тр. IV Всесоюзного математического съезда. Секционные доклады, т. 2.— М.; Л.: Наука, 1964.— С. 541—545.
13. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Обзорные доклады, вып. 3. Механика твердого тела.— М.: Наука, 1966.— С. 116—136.
14. *Ворович И. И.* Пути развития проблемы устойчивости в теории оболочек // Актуальные проблемы науки.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1967.— С. 111—126.
15. *Ворович И. И.* О поведении пластин произвольной формы после потери устойчивости // Проблемы механики твердого деформируемого тела: К 60-летию акад. В. В. Новожилова.— Л.: Судостроение, 1970.— С. 113—119.
16. *Ворович И. И.* Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды // XIII Международный конгресс. Аннотации докладов.— М.: 1972.— С. 23—24.
17. *Ворович И. И.* Неединственность и устойчивость в механике сплошной среды. Лекции, прочитанные на мехмате МГУ // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: Изд-во МГУ, 1977.— С. 10—47.
18. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.— С. 184—214.
19. *Люстерник Л. А.* Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве.— Изв. АН СССР. Серия мат.— 1939.— № 3.— С. 257—264.
20. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.— М.: Высшая школа, 1982.— С. 196—201, 217.
21. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах.— М.: Изд-во МГУ, 1930.
22. *Михайлов Г. К.* Леонард Эйлер и его вклад в развитие рациональной механики. Успехи механики.— Варшава.— 1985.— Т. 8, вып. 1.— С. 3—58.
23. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М.: Гостехиздат, 1957.— С. 206—208.
24. *Скряпник И. В.* О бифуркации равновесия гибких пластин. Матем. физика. Респ. межвед. сб.— Киев, 1973, вып. 13.— С. 159—161.
25. *Скряпник И. В.* Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений.— М.: ВИНТИ.— С. 131—249.— (Итоги науки, современные проблемы математики; Т. 9).
26. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана/Пер. с франц. А. С. Кравчука под ред. Б. Е. Победри.— М.: Мир, 1983.— С. 97—116.
27. *Соболев В. И.* О собственных элементах некоторых нелинейных операторов // ДАН СССР.— 1941.— Т. 31, № 8.— С. 734—736.
28. Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения/Под ред. Д. Б. Келлера и С. А. Антмана.— М.: Мир, 1974.
29. *Треногин В. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.— С. 45, 249—253.
30. *Цитлинадзе Э. С.* Некоторые вопросы теории нелинейных операторов и вариационного исчисления в пространствах типа Банаха // УМН.— 1950.— Т. 5, № 4.— С. 141—176.
31. *Цитлинадзе Э. С.* Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1952.— № 2.— С. 235—275.

32. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе.— М.: Гостехиздат, 1955.— С. 53—55.
33. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле.— М.; Л.: ОНТИ, 1934.— 600 с.
34. Berger M. O. An eigenvalue problem for nonlinear elliptic partial differential equations.— Trans. Amer. Math. Soc. 1965.— V. 120.— P. 145—184.
35. Berger M. O. Von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate // Comm. Pure and Appl. Math.— 1967.— V. 20.— P. 687—719.
36. Berger M. O. An application of the calculus of variations in the large to the equations of nonlinear elasticity // Bull. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 73.— P. 520—525.

### К главе X

1. Андронов А. А., Витт А. А., Понтрягин Л. С. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ.— 1938.— Т. 33.— С. 165—180.
2. Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.— С. 142—160.
3. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей в теории пластин и оболочек // Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964.— С. 15—63.
4. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.— М.: Стройиздат, 1982.— 351 с.
5. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики.— М.: Наука, 1980.— 412 с.
6. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Нелинейные акустические колебания цилиндрической оболочки // Изв. АН АрмССР.— 1964.— Т. 17, № 3.— С. 65—70.
7. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Вероятностные характеристики поведения цилиндрической оболочки при действии акустической нагрузки.— Прикл. механика.— 1965.— Т. 1, № 3.— С. 1—9.
8. Ворovich И. И. О статистическом методе в задачах устойчивости оболочек // Доклад на конференции по теории и применениям тонких оболочек. Тарту, 1957.
9. Ворovich И. И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек // ПММ.— 1959.— Т. 23, № 5.— С. 885—892.
10. Ворovich И. И. Неединственность и устойчивость в нелинейной механике силовой среды: Некоторые математические проблемы // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: МГУ, 1977.— С. 10—47.
1. Ворovich И. И. Некоторые вопросы использования статистических методов в теории устойчивости пластин и оболочек // Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964.— С. 64—94.
2. Гончаренко В. М. Статистический метод в задачах о чистом изгибе цилиндрической оболочки // Тр. Всес. конференции по теории пластин и оболочек.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1960.— С. 130—137.
3. Гончаренко В. М. К определению вероятности потери устойчивости оболочки // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 1.— С. 159—161.
4. Гончаренко В. М. Применение марковских процессов в статистической теории устойчивости оболочек // Укр. мат. журн.— 1962.— Т. 14, № 2.— С. 198—202.
5. Гончаренко В. М. Исследование вероятности хлопка удлиненной цилиндрической панели под действием случайного давления // ПММ.— 1962.— № 4.— С. 740—744.
6. Гончаренко В. М. Прошелквание панелей при наличии случайных силовых воздействий // Теория оболочек и пластин.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964.— С. 383—390.

17. Гончаренко В. М. Некоторые классы векторзначных обобщенных функций и их приложения к краевым задачам относительно случайных функций // Укр. мат. журн.— 1975.— № 2.— С. 158—166.
18. Гончаренко В. М. О некоторых пространствах случайных функций конечного порядка // Изв. вузов. Математика.— 1982.— № 6.— С. 67—69.
19. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 5.— С. 102—110.
20. Диментберг М. Ф. О нелинейных колебаниях упругих оболочек при случайных нагрузках // Теория оболочек и пластин.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1964.— С. 437—444.
21. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН.— 1938.— Т. 5.— С. 5—41.
22. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. (Юбилейный сб., посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции).— М.: Изд-во АН СССР, 1947.— Т. 1. С. 245—254.
23. Пугачев В. С. Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского.— 1944.— Т. 118.— С. 3—36.
24. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: Физматгиз, 1962.— 660 с.
25. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы.— М.: Наука, 1985.— 560 с.
26. Чуешов И. Д. О статистических решениях в нелинейной механике упругих оболочек // Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. научных трудов.— Киев: Наукова думка, 1983.— С. 139—146.
27. Чуешов И. Д. Существование статистических решений стохастической системы уравнений Кармана в ограниченной области // Мат. сб.— 1983.— № 3.— С. 122, 291—312.
28. Чуешов И. Д. Уравнение Хопфа для динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством и евклидова теория поля Препринт. ИТФ-84-184Р.— Киев: АН УССР. Институт теоретической физики, 1985.— 36 с.

Научное издание

**ВОРОВИЧ Иосиф Израилевич**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**  
**НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ**  
**ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*  
Редакторы *Л. П. Лебедев, А. Г. Мордвицев*  
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*  
Технический редактор *С. Я. Шляяр*  
Корректоры *О. А. Бутусова, И. Я. Кристалъ*

ИБ № 13000

Сдано в набор 25.08.88. Подписано к печати 10.11.89. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 23,5. Усл. кр.-отт. 23,5. Уч.-изд. л. 26,17. Тираж 2130 экз. Заказ № 326. Цена 5 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»  
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

# MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE NON-LINEAR THEORY OF SHALLOW SHELLS

by I. I. Vorovich

Vorovich Iosif Izrailevich is one of the leading Soviet specialists in the field of mathematics, solid body mechanics and technical applications of elasticity theory. He is Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR, Member of the National Committee for Theoretical and Applied Mechanics of the USSR, Doctor of Physics and Mathematics, Director of the Research Institute of Mechanics and Applied Mathematics of Rostov State University, Head of the Elasticity Theory Chair of Rostov State University, Winner of the State Prize.

Vorovich I. I. takes part in publishing the magazines «Applied Mathematics and Mechanics», «Mechanics of Solids» (USSR), he is the author of books on contact strength, dynamic elasticity theory, theory of thin-walled constructions.

Vorovich I. I. is a graduate from the Mechanics and Mathematics Faculty of the Moscow University and from the N. E. Zhukovsky Air-Force Engineering Academy.

The monograph by Vorovich I. I. «Mathematical problems of the non-linear theory of shallow shells» is unique among publications in the field of mechanics and mathematics. It is the result of more than 30-years work on the mathematical shell theory. Many results, described in the book are unknown to foreign specialists. The monograph appeared as a result of a thorough revision of author's preceding works. A great deal of new material was added, many results were improved.

This monograph is devoted to the fundamental mathematical analysis of thin-walled constructions under great displacements typical of aircraft, ships and rockets. The foundation of this theory was laid by Th. von Kármán, I. G. Bubnov, L. H. Donnel, K. Marguerre, Kh. M. Mushtari, V. Z. Vlasov, W. Z. Chien and others.

Many scientific works are devoted to numerical analysis of certain problems we are discussing now; however, the problems were solved mainly for the plates.

The monograph starts with a detailed analysis of all hypotheses constituting the basis for the «central buckling» theory, the demonstration is conducted in general non-orthogonal coordinates under general boundary conditions. Boundary problems are solved for displacements and for the force function. The «shallowness» notion discussed in the works of K. Marguerre, L. H. Donnel, Kh. M. Mushtari, V. Z. Vlasov is thoroughly analyzed. A general physical and geometrical criterion of shallowness is presented.

An essential part of the book is devoted to the question of solvability of the main non-linear boundary problems of shallow shells. The question is resolved globally without limiting the external load. Two approaches are used giving, generally speaking, different results.

The topological method is based on computing the vector field index, introduced by J. L. Leray and S. Schauder, which serves as a topological characteristic of a certain vector field. The zero vector of the corresponding field is the generalized (energy) solution. The computation of the vector field index is based on the theory of homotopy.

The variational approach reveals the existence of critical points of non-quadratic functionals of Lagrange and Castigliano type for mechanical problems being considered. This was earlier proved only in regard to plates for a special case of boundary conditions. It must also be noted that the constitutional functionals in the non-linear shell theory are not convex and operators are not monotonic. This part ends with a description of the properties of solution differentiability, which depend on the loading smoothness.

In the book under discussion, practically all approximate methods used in the shell design under great displacement are substantiated. Great attention is

given to the global verification of the Bubnov — Galerkin, Ritz and Newton — Kantorovich methods. This verification is made without bounding the load. The error is evaluated and recommendations on increasing the effectiveness of the methods are given.

The main part of the book concentrates on the global shell stability. The author states that the problem consists of two tasks: 1) evaluation of the number of equilibrium forms of an elastic system under given loads (Y-decompositions); 2) numerical evaluation of the probability of every possible form. Only the first task was developed in the shell stability theory. A number of results achieved by Vorovich I. I. was published only in scientific journals, unknown to western readers.

A combination of topological, variational and bifurcation methods is used for the global evaluation of the number of the shell equilibrium forms. Conditions of global uniqueness of solutions in the whole energy space (physically rigid shells) and conditions of non-uniqueness are obtained. A novel geometrically elastic shell invariant used for bounding the number of equilibrium forms is proposed. The connection between the physical shell rigidity and geometric rigidity of the surface is discussed. A special attention is paid to the mathematical analysis of Euler's linearization method in the problem of shell stability.

Sufficient conditions of the possible application of Euler's linearization method for solving the shell stability problems are proved. Sufficient conditions for the reverse situation are formulated. The theory of the lower critical number is described, the upper and the lower boundaries for the lower critical number are given.

The qualitative characteristics of the plate behavior after the loss of stability are discussed in terms of the Lusternic — Shnirelman — Sobolev theory.

The concluding part of the book deals with the formulation of a statistical theory of shell stability, on the basis of which the second part of the stability problem is solved.

The book contains a detailed mathematical introduction featuring non-linear functional analysis, Sobolev spaces theory and differential geometry. At the end of the book a list of unsolved problems in the field of the non-linear shell theory is given.

The book gives an idea of great potentialities inherent in contemporary mathematical methods for analyzing complex problems of mechanics. The monograph may be of interest for

- 1) specialists: in elasticity theory, mathematical physics, functional analysis, approximate methods of mathematics, modern geometry of surfaces;
- 2) mathematicians of all other fields interested in application of modern mathematical methods;
- 3) engineers using plate and shell theory for designing thin-walled constructions;
- 4) students and post-graduates of all specialities mentioned above.

The book contains 46 plots, 514 references.