

**Механика материалов**

**Mechanics of materials**

# **MECHANICS OF MATERIALS**

by

**V.V. Zozulya**

**Centro de Investigacion Cientifica de Yucatan, A.C., Merida, Mexico**

**A. V. Martynenko**

**Kharkov National University, Kharkov, Ukraine**

**A. N. Lukin**

**Institute of Mechanics, Kiev, Ukraine**

**Kharkov 2001**

**В.В.Зозуля, А.В.Мартыненко, А.Н.Лукин**

**МЕХАНИКА  
МАТЕРИАЛОВ**

**Харьков - 2001**

**ББК 30.3**  
**3 78**

**Зозуля В.В., Мартыненко А.В., Лукин А.Н.**  
**378** Механика материалов. – Харьков: Изд-во Национ. ун-та  
внутр. дел, 2001. – 404 с.

**ISBN 966–610–055–X**

Предлагаемый курс механики материалов обобщает многолетний опыт преподавания дисциплины на кафедре «Строительной механики» Харьковского национального автомобильно-дорожного технического университета (ХАДИ). Наличие нескольких инженерных специальностей в университете обязывает раскрыть в книге широкий спектр вопросов механики материалов.

Для студентов инженерных специальностей ВУЗов, изучающих механику материалов, аспирантов и преподавателей.

**з**  $\frac{200407000}{2001}$

**ББК 30.3**

**ISBN 966–610–055–X**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	11
<b>Глава 1. Основные положения науки о механике материалов</b> .....	12
1.1 Задачи, цель и предмет механики материалов.....	12
1.2 Краткая история развития науки о механике материалов.....	13
1.3 Расчетная схема. Типовые формы элементов инженерных сооружений.....	16
1.4 Внешние силы и их классификация.....	19
1.5 Основные гипотезы и принципы механики материалов.....	21
<b>Глава 2. Внутренние силы и усилия. Метод сечений</b> .....	23
2.1 Понятие о внутренних силах и напряжениях.....	23
2.2 Внутренние усилия.....	25
2.3. Выражение внутренних усилий через внешние силы.....	27
<b>Глава 3. Эпюры внутренних усилий</b> .....	30
3.1 Основные правила построения эпюр.....	30
3.2 Особенности построения эпюр внутренних усилий в балках.....	32
3.3 Дифференциальные зависимости при изгибе.....	35
3.4 Особенности построения эпюр в рамах.....	37
3.5 Особенности построения эпюр внутренних усилий для криволинейных стержней.....	38
3.6 Особенности построения эпюр внутренних усилий в пространственных рамах.....	39
<b>Глава 4. Геометрические характеристики плоских сечений</b> .....	41
4.1 Введение.....	41
4.2 Статические моменты площади.....	42
4.3 Моменты инерции площади.....	44
4.4 Вычисление моментов инерции простых сечений.....	45
4.5 Определение моментов инерции при параллельном переносе координатных осей.....	47
4.6 Определение моментов инерции при повороте координатных осей.....	50
4.7 Главные оси и главные моменты инерции.....	51
4.8 Окружность инерции Мора.....	52
4.9 Порядок определения положения главных осей и значений главных моментов инерции составных сечений.....	55
<b>Глава 5. Растяжение и сжатие</b> .....	58
5.1 Деформации при растяжении и сжатии.....	58
5.2 Напряжения при растяжении и сжатии.....	60
5.3 Испытание материалов на растяжение.....	62
5.4 Концентрация напряжений.....	69

5.5 Допускаемые напряжения. Расчеты на прочность по допускаемым напряжениям.....	72
5.6 Учет влияния собственного веса.....	74
5.7 Стержень равного сопротивления.....	76
5.8 Ступенчатый стержень.....	78
<b>Глава 6. Теория напряженного и деформированного состояния.....</b>	<b>80</b>
6.1 Понятие о напряженном состоянии в точке.....	80
6.2 Закон парности касательных напряжений.....	82
6.3 Главные площади и главные напряжения.....	83
6.4 Линейное напряженное состояние.....	83
6.5 Плоское напряженное состояние.....	84
6.6 Круг напряжений Мора.....	86
6.7 Объемное напряженное состояние.....	88
6.8 Деформированное состояние.....	92
6.9 Обобщенный закон Гука.....	96
6.10 Потенциальная энергия деформации.....	97
<b>Глава 7. Критерии прочности.....</b>	<b>98</b>
7.1 Задачи теории прочности.....	98
7.2 Критерий наибольших нормальных напряжений.....	100
7.3 Критерий наибольших линейных деформаций.....	101
7.4 Критерий наибольших касательных напряжений.....	101
7.5 Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения.....	102
7.6 Теория прочности Мора.....	105
<b>Глава 8. Изгиб.....</b>	<b>108</b>
8.1 Деформации при изгибе и основные допущения.....	108
8.2 Определение напряжений при чистом изгибе.....	110
8.3 О рациональной форме поперечного сечения при изгибе.....	115
8.4 Расчет на прочность по нормальным напряжениям.....	115
8.5 Касательные напряжения при изгибе.....	117
8.6 Распределение касательных напряжений по высоте сечения балки.....	120
8.7 Расчет балок на прочность по касательным напряжениям.....	123
8.8 Исследование напряженного состояния балок при поперечном изгибе. Расчет на прочность по главным напряжениям.....	123
8.9 Траектории главных напряжений.....	126
<b>Глава 9. Определение перемещений при изгибе.....</b>	<b>128</b>
9.1 Общие положения.....	128
9.2 Дифференциальное уравнение упругой линии балки.....	129
9.3 Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой	

линии балки .....	131
9.4 Метод начальных параметров .....	134
<b>Глава 10. Дополнительные вопросы теории изгиба .....</b>	<b>139</b>
10.1 Изгиб балок тонкостенного профиля .....	139
10.2 Методы расчета на прочность строительных конструкций .....	144
<b>Глава 11. Расчет балок переменного сечения на прочность и жесткость .....</b>	<b>150</b>
11.1 Местные изменения формы и размеров .....	151
11.2 Ступенчатые стержни .....	151
11.3 Балки равного сопротивления изгибу .....	152
<b>Глава 12. Сдвиг .....</b>	<b>156</b>
12.1 Понятие о срезе и сдвиге. Деформации при сдвиге .....	156
12.2 Напряжения при сдвиге. Закон Гука .....	157
12.3 Расчет на прочность при сдвиге .....	163
12.4 Практические расчеты соединений, работающих на сдвиг. Заклепочные соединения. Расчет сварных соединений .....	164
<b>Глава 13. Кручение стержней .....</b>	<b>174</b>
13.1 Введение .....	174
13.2 Кручение стержней круглого поперечного сечения .....	174
13.3 Расчет винтовых цилиндрических пружин .....	182
13.4 Мембранная аналогия при кручении .....	186
13.5 Кручение стержней некруглого поперечного сечения .....	187
13.6 Кручение тонкостенных стержней .....	188
13.7 Замкнутые профили .....	189
13.8 Открытые профили .....	192
<b>Глава 14. Общие методы определения перемещений .....</b>	<b>194</b>
14.1 Действительная работа внешних сил .....	194
14.2 Действительная работа внутренних сил .....	196
14.3 Возможная работа внешних и внутренних сил. Общая формула Мора для определения перемещений .....	199
14.4 Особенности определения перемещений в фермах .....	201
14.5 Особенности определения перемещений в балках и ра- мах. Способ Верещагина .....	202
14.6 Определение перемещений, вызванных изменением тем- пературы .....	207
14.7 Теорема о взаимности работ и взаимности перемещений .....	209
14.8 Теорема Кастильяно .....	210
<b>Глава 15. Расчет статически неопределимых систем .....</b>	<b>213</b>
15.1 Понятие о степени статической неопределимости .....	213
15.2 Расчет статически неопределимых систем методом сил .....	215
15.3 Определение коэффициентов и свободных членов кано- нических уравнений .....	218
15.4 Построение суммарных эпюр внутренних усилий .....	220

15.5 Проверка расчета статически неопределимых систем методом сил .....	223
15.6 Определение перемещений в статически неопределимых системах .....	224
15.7 Способ упрощения канонических уравнений .....	226
15.8 Особенности расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают растяжение или сжатие .....	228
15.9 Определение начальных напряжений методом сил .....	230
15.10 Порядок расчета статически неопределимых систем методом сил .....	232
<b>Глава 16. Расчет неразрезных балок .....</b>	<b>233</b>
16.1 Выбор рациональной основной системы .....	233
16.2 Уравнение трех моментов .....	234
16.3 Способы построения суммарных эпюр изгибающих моментов и поперечных сил .....	238
16.4 Порядок расчета неразрезных балок .....	241
<b>Глава 17. Расчет плоских кривых стержней .....</b>	<b>244</b>
17.1 Понятие о кривом стержне .....	244
17.2 Чистый плоский изгиб кривого стержня .....	245
17.3 Расчет кривых стержней на прочность .....	247
17.4 Определение радиуса кривизны нейтрального слоя .....	249
17.5 Определение перемещений плоских кривых стержней .....	251
<b>Глава 18. Сложное сопротивление .....</b>	<b>253</b>
18.1 Пространственный изгиб .....	253
18.2 Косой изгиб .....	255
18.3 Определение при косом изгибе .....	257
18.4 Изгиб с растяжением .....	259
18.5 Внецентренное сжатие .....	260
18.6 Ядро сечения .....	263
18.7 Изгиб с кручением .....	266
<b>Глава 19. Расчет сжатых стержней на устойчивость (продольный изгиб) .....</b>	<b>270</b>
19.1 Понятие об устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня и критической силе .....	271
19.2 Формула Эйлера для определения критической силы .....	273
19.3 Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы .....	276
19.4 Пределы применимости формулы Эйлера .....	280
19.5 Построение графика зависимости критических напряжений от гибкости. Формула Ясинского .....	282
19.6 Расчет сжатых стержней на устойчивость при помощи коэффициента уменьшения допускаемого напряжения .....	



на сжатие. Проверочный и проектировочный расчеты .....	283
19.7 О выборе материала и рациональной формы поперечного сечения сжатых стержней .....	285
19.8 Продольно-поперечный изгиб .....	285
19.9 Приближенный способ расчета при продольно-поперечном изгибе .....	289
19.10 Определение допускаемой нагрузки при продольно-поперечном изгибе .....	292
<b>Глава 20. Прочность материалов при действии повторно-переменных напряжений</b> .....	293
20.1 Понятие об усталости материалов .....	293
20.2 Основные характеристики цикла .....	295
20.3 Предел усталостной прочности и его определение .....	298
20.4 Влияние параметров цикла на усталостную прочность материалов .....	302
20.5 Влияние концентрации напряжений на предел выносливости .....	304
20.6 Влияние чистоты обработки поверхности на усталостную прочность .....	305
20.7 Влияние размеров на усталостную прочность материала .....	306
20.8 Практические расчеты на выносливость .....	307
<b>Глава 21. Расчет тонкостенных оболочек</b> .....	311
21.1 Особенности напряженного состояния оболочек .....	311
21.2 Определение напряжений в осесимметричных оболочках по безмоментной теории .....	312
<b>Глава 22. Расчет толстостенных цилиндров</b> .....	320
22.1 Толстостенный цилиндр под действием внутреннего и наружного давления (задача Ляме) .....	320
22.2 Расчет составных цилиндров .....	328
<b>Глава 23. Расчет на прочность при действии динамических нагрузок</b> .....	333
23.1 Учет сил инерции и определение напряжений при равноускоренном движении .....	333
23.2 Определение напряжений и перемещений при ударе .....	334
23.3 Определение динамического коэффициента при продольном ударе стержней с переменным поперечным сечением .....	340
23.4 Определение допускаемых напряжений и расчет на прочность при ударе .....	341
23.5 Поперечный изгибающий удар .....	342
23.6 Крутильный удар .....	343
23.7 Учет массы тела, испытывающего удар .....	344

<b>Глава 24. Колебания упругих систем</b> .....	347
24.1 Основные понятия теории колебаний.....	347
24.2 Собственные колебания упругой системы с одной степенью свободы.....	348
24.3 Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы.....	352
24.4 Учет влияния сил сопротивления.....	355
24.5 Расчет консольной балки на действие периодической нагрузки.....	357
24.6 Определение критической скорости вращения вала.....	358
24.7 Свободные колебания упругой системы с несколькими степенями свободы.....	360
24.8 Свободные колебания балки с двумя сосредоточенными массами.....	363
24.9 Продольные колебания стержней.....	364
24.10 Крутильные колебания стержней.....	367
24.11 Поперечные колебания стержней.....	368
<b>Глава 25. Расчет стержней и балок методом граничных интегральных уравнений</b> .....	372
25.1 Расчет стержней МГИУ.....	372
25.1.1 Постановка задачи и основные уравнения.....	372
25.1.2 Фундаментальные решения для стержней.....	375
25.1.3 Примеры применения МГИУ к стержням.....	377
25.1.4 Вывод матричного уравнения.....	380
25.1.5 Учет граничных условий.....	382
25.2 Расчет балок МГИУ.....	384
25.2.1 Постановка задачи об изгибе балки.....	384
25.2.2 Вывод основных уравнений МГИУ для балок.....	385
25.2.3 Граничные условия.....	386
25.2.4 Пример №1 расчета балки МГИУ.....	387
25.2.5 Зависимости между неизвестными.....	387
25.2.6 Фундаментальные решения.....	388
25.2.7 Продолжение решения примера №1.....	389
25.2.8 Основные уравнения МГИУ в матричной форме.....	391
25.2.9 Примеры решения балок МГИУ.....	395
<b>Литература</b> .....	398
<b>Contents</b> .....	399

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс механики материалов обобщает многолетний опыт преподавания курса на кафедре «Строительной механики» Харьковского национального автомобильно-дорожного технического университета (ХАДИ). Наличие нескольких инженерных специальностей (механики, дорожники, автомобилисты) в университете обязывает раскрыть в книге широкий спектр вопросов по механике материалов. Авторы надеются, что им это удалось, хотя ограниченный объем книги не позволил в равной мере достаточно подробно и глубоко представить все темы.

Отличием данного курса, от большого количества уже существующих учебников по механике материалов, является, прежде всего, добавление нескольких тем и глав обычно не традиционных для данного предмета. Это разделы по расчету оболочек и толстостенных цилиндров, а также применение метода граничных интегральных уравнений к расчету стержней и балок (глава 25). Кроме этого достаточно подробно рассмотрены разделы, связанные с простыми деформациями, статически неопределимыми системами (в том числе неразрезные балки), устойчивостью, колебаниями и расчетом при повторно-переменных напряжениях.

Авторы искренне надеются, что учебник поможет всем студентам инженерных специальностей, изучающим механику материалов, глубже понимать и уметь применять на практике теорию механики материалов. А для тех, кто будет изучать предметы, базирующиеся на знании механики материалов (строительная механика, теория упругости, механика деформируемого твердого тела и др.), данный учебник может стать первой ступенькой к освоению этих сложных, но очень интересных разделов естествознания.

Аспирантам и преподавателям учебник может помочь при углубленном изучении предмета и при чтении лекций курса «Механика материалов»

## ГЛАВА 1

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ НАУКИ О МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

#### 1.1 Задачи, цель и предмет механика материалов

В процессе производственной деятельности человек создает и использует множество разнообразных конструкций. К их числу относятся различные машины и механизмы, приборы, строительные сооружения, транспортные средства и т.п. В процессе эксплуатации на конструкции действуют внешние силы и нагрузки и при этом должна быть обеспечена надежность конструкций. Любая конструкция или ее элементы считаются надежными, если обеспечена их прочность, жесткость и устойчивость .

*Прочностью* называется способность конструкции и ее элементов выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь. Под *жесткостью* понимается способность конструкции и ее элементов при действии нагрузок заданной величины изменять свою форму и размеры в допускаемых пределах, не нарушающих ее нормальную работу. *Устойчивость* - это способность конструкции сохранять первоначальную форму упругого равновесия. Упругая конструкция находится в устойчивом состоянии, если, будучи выведенной из этого состояния какими-либо воздействиями, возвращается в него после устранения этих воздействий. Изменение первоначальной формы упругого равновесия называется потерей устойчивости.

*Механика материалов* - наука разрабатывающая инженерные методы расчета на прочность жесткость и устойчивость, на основании которых устанавливаются рациональные формы и размеры элементов машин и сооружений, обеспечивающие их надежность и экономичность.

Следует заметить, что принципы и методы этих расчетов разрабатываются также в ряде других наук, таких как: механика твердого деформируемого тела, теория упругости, строительная механика, теория пластичности, теория ползучести, механика разрушения и др.

Механика материалов - наука экспериментально-теоретическая и отличается от других наук этого цикла тем, что использует упрощающие гипотезы и простой математический аппарат. Решения задач, полученных методами механики материалов, как правило,

выражаются в виде простых формул, удобных для практического использования.

Результаты, полученные в механике материалов, широко используются во всех областях техники, где существенными являются надежность и экономичность конструкций. Вместе с тем, следует иметь в виду, что эти результаты являются приближенными и имеют ограниченную область применения. Более точные решения, имеющие более широкую область применения, могут быть найдены методами механики твердого деформируемого тела.

Необоснованный расчетами выбор размеров конструкции приводит к увеличению ее веса, нерациональному использованию материалов и повышению стоимости конструкции, или резко снижает ее надежность.

## **1.2 Краткая история развития науки о механике материалов**

Механика материалов, как и любая другая наука, имеет свою историю, начала которой уходят в глубь веков. Строители древних сооружений, опираясь на интуицию и опыт предшественников, иногда выбирали формы и размеры сооружений настолько удачно, что даже в наше время их творения вызывают удивление и восхищение. Однако во многих случаях возводимые ими сооружения оказывались либо излишне массивными, либо недостаточно прочными.

Основным правилом в то время при выборе размеров новых конструкций было правило геометрического подобия, согласно которому все размеры конструкции увеличивались в одинаковой пропорции.

Долгое время знания о прочности конструкций и сооружений приобретались интуитивно, передавались из поколения в поколение, как секреты мастерства и относились скорее к области искусства, а не науки.

Впервые научный подход к проблемам прочности конструкций применил великий представитель Эпохи Возрождения: художник, математик, механик и инженер Леонардо да Винчи (1452-1519). Он проводил опыты по определению прочности строительных материалов, исследовал сопротивление балок изгибу и изучал несущую способность колонн. Однако свои исследования он не опубликовал и они остались неизвестными следующим поколениям ученых и инженеров.

Поэтому, возникновение науки о механике материалов связывают с именем знаменитого итальянского ученого Галилео Галилея (1564-1642), издавшего в 1638г. книгу "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению". Часть этой книги, посвященная механическим свойствам строительных материалов и исследованию прочности балок. Она является первым печатным трудом в области механики материалов и механики упругих тел.

Следующим шагом в развитии науки о прочности было открытие английским ученым Робертом Гуком (1635-1703) линейной зависимости между нагрузкой и деформацией - основного закона деформирования упругих тел. В 1676 году он опубликовал работу «О восстановительной способности или об упругости», которая содержала описание ряда опытов с упругими телами. В этой книге закон упругости был сформулирован так «Каково удлинение, такова и сила». Современная форма закону Гука была придана Томасом Юнгом (1773-1829). Вместо абсолютных величин (сила и удлинение), он ввел относительные (напряжение и деформация). Тогда оказалось, что коэффициент пропорциональности между напряжениями и относительными удлинениями, т.е. модуль Юнга в законе Гука является постоянной материала, а не конструкции и характеризуемого жесткость. В начале XIX века широкую известность получают работы французского ученого Луи Навье (1785-1836), издавшего в 1830г. первый учебник по механике материалов. Большой вклад в развитие теории изгиба и устойчивости стержней внес академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707-1783).

В значительной степени развитию механики материалов содействовали работы Д.Бернулли, Ш.Кулона, О.Коши, Г.Ляме, А.Лява, Дж.Максвелла, С.Пуассона, Б.де Сен-Венана, Л.Пранд-тля, Т.Кармана, Г.Надай, К.Кастильяно, О.Мора и др.

В России первые исследования в области механики материалов были проведены в 40-х годах 18 века. Великий русский ученый М.В.Ломоносов в 1752 г. создал первые в России приборы для определения твердости камней и машины для испытания цепей на прочность. Понятие твердости М.В.Ломоносов связывал с внутренними силами сцепления между частицами тела.

Широкое развитие строительства железных дорог и железнодорожных мостов значительно ускорило развитие технических наук. В этот период всеобщее признание получают труды выдающегося русского ученого Д.И.Журавского (1821-1891).

Первая русская научная школа экспериментального исследования свойств материалов была создана проф.Н.А.Белелюбским - вице-президентом международного общества по испытанию материалов. Он создал первую в России лабораторию для испытания механических свойств материалов.

Большое значение для развития инженерных знаний в нашей стране имела деятельность проф. В. Л.Кирпичева, основавшего Харьковский и Киевский политехнические институты. Он был первым заведующим кафедрами сопротивления материалов этих институтов. Его труды по механике и сопротивлению материалов, а также изданный в 1898г. первый в России учебник по механике материалов в значительной степени способствовали образованию научной школы в области вопросов прочности машин и строительных сооружений.

Целая эпоха в развитии механики материалов связана с именем С.П.Тимошенко. Он был заведующим кафедрой сопротивления материалов Киевского политехнического института, основателем и первым директором Института механики, который сейчас носит его имя. Написанные им учебники и монографии получили всемирную известность .

В наше время происходит дальнейшее развитие науки о механике материалов. Развитие ракетостроения, атомной энергии и освоение космического пространства выдвигают новые, более интересные и трудные задачи, в решение которых большой вклад внесли В.В.Болотин, Н.М.Беляев, В.З.Власов, А.Н.Гузь, Н.Н.Давиденков, А.Н.Динник, А.А.Ильюшин, В.Н.Корноухов, Н.И.Мухелишвили, Н.И.Новожилов, И.А.Одинг, П.Ф.Папкович, Г.О.Писаренко, С.Д.Пономарев, Ю.Н.Работнов, И.М.Рабинович, С.В.Серенсен, А.Ф.Смирнов, В.И.Феодосьев и др.

### 1.3 Расчетная схема. Типовые формы элементов инженерных сооружений

Реальные объекты - машины и инженерные сооружения в процессе эксплуатации подвергаются воздействию многочисленных силовых и температурных факторов. Однако не все из них оказывают одинаковое влияние на прочность реального объекта. Для упрощения расчета факторы, оказывающие несущественное влияние на прочность реального объекта, обычно не учитываются. Поэтому в механике материалов выполняется расчет не реальных объектов, а их расчетных схем.

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей и приведенный к упрощенным типовым геометрическим формам, а также идеализации материала и внешних воздействий, называется *расчетной схемой*.

В зависимости от поставленной задачи и требуемой точности расчета для одного и того же объекта можно составить несколько расчетных схем. С другой стороны, одной расчетной схеме могут соответствовать разные реальные объекты. Последнее обстоятельство позволяет провести исследование для одной расчетной схемы, получить решение целого класса реальных задач.

Чрезвычайно важным моментом при выборе расчетной схемы является переход от реальных геометрических форм элементов конструкции к упрощенным типовым формам. Несмотря на большое разнообразие конструкций элементов, составляющих машины и сооружения, с геометрической точки зрения их можно объединить в несколько основных форм: брус или стержень, пластина, оболочка и массив.

*Стержнем* называется тело, у которого один размер (длина) значительно больше двух других (поперечных) размеров. Линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений стержня является его осью. Сечение стержня называется поперечным, если оно расположено перпендикулярно к оси стержня. В зависимости от формы оси стержня бывают прямые, ломаные и кривые. Стержни, у которых поперечные сечения остаются постоянными по всей длине, называются призматическими (рис.1.1).



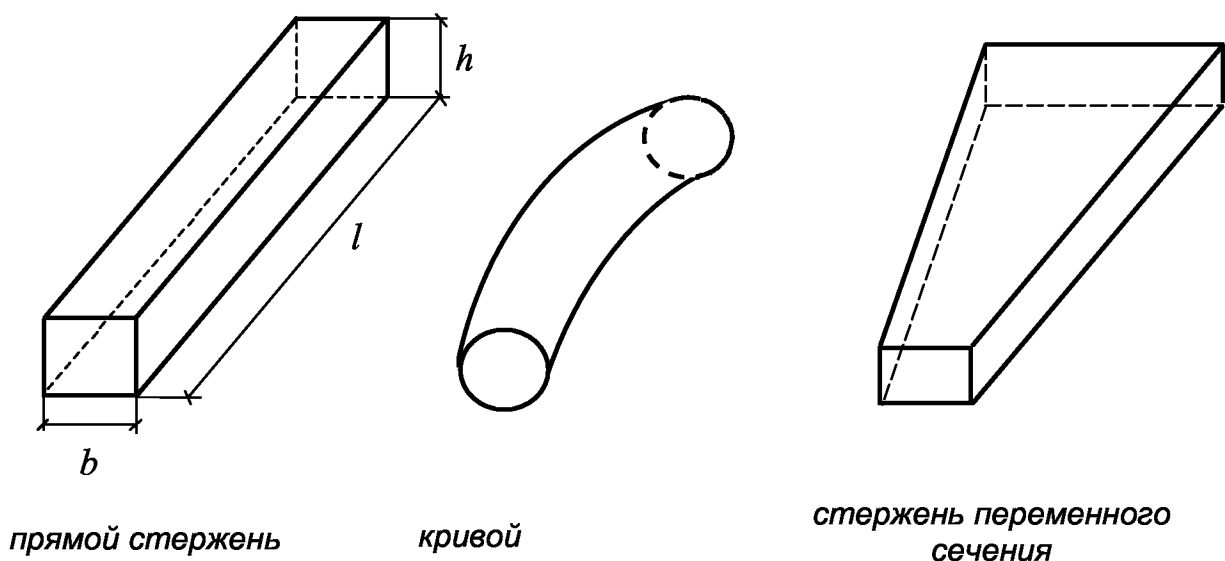


Рис.1.1

*Оболочкой* называется тело, ограниченное криволинейными поверхностями, у которого один размер (толщина) значительно меньше двух других размеров (длины и ширины). Поверхность, которая делит толщину оболочки на равные части, называется *срединной поверхностью* (рис. 1.2).

Оболочка, срединная поверхность которой является плоской называется *пластинкой* (рис.1.3).

Тела, у которых все три размера являются величинами одного порядка, называются *массивными телами или массивами*. Примерами массивных тел могут служить фундаменты различных сооружений, плотины и т.д. (рис.1.4).

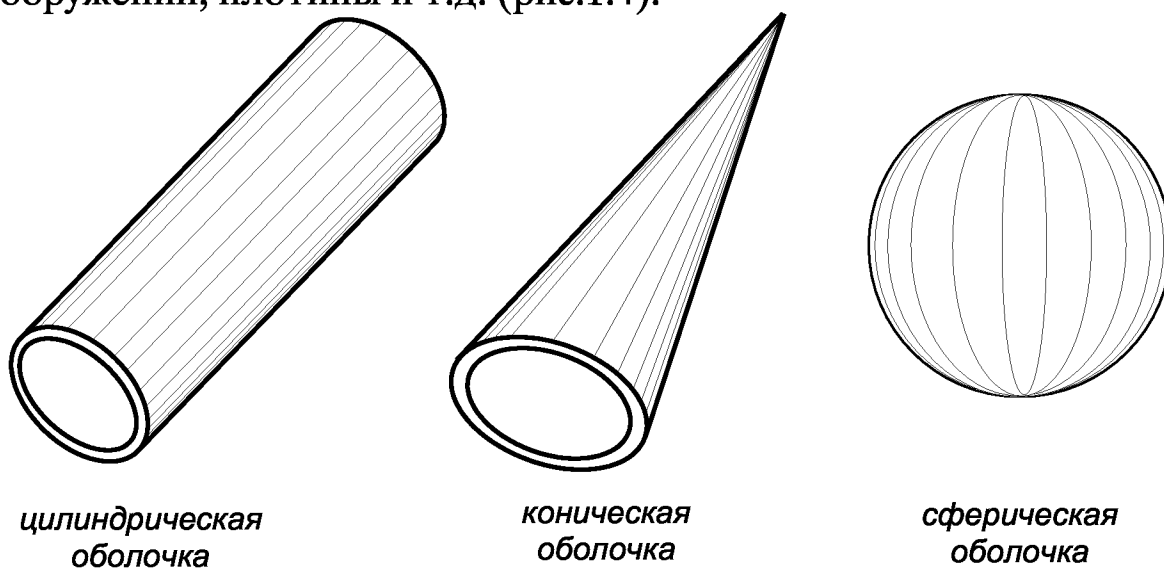
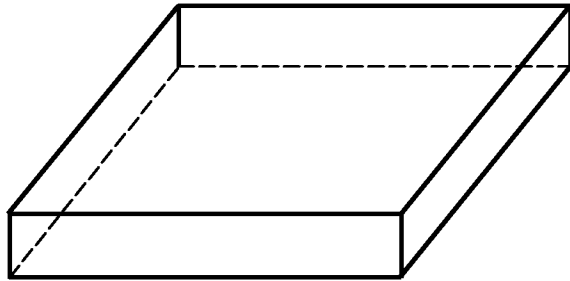
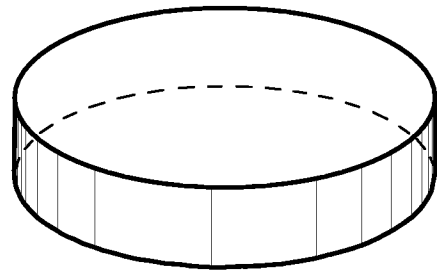


Рис. 1.2

В механике материалов изучаются в основном деформации стержней и некоторых видов оболочек.



*прямоугольная пластинка*



*круглая пластинка*

Рис. 1.3

Элементы конструкций должны занимать определенные положения в пространстве и располагаться на определенных расстояниях друг от друга. Для этого их положение фиксируется связями, которые могут быть упругими или жесткими. Упругие связи обладают деформациями, соизмеримыми с деформациями закрепляемого элемента. Деформациями жестких связей пренебрегают в виду их незначительности.

Точки приложения связей называют опорными точками или просто опорами. В одной и той же опорной точке может быть приложено несколько связей. На рис. 1.5а показаны шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры, а на рис. 1.5б жестко закрепленная опора.

Шарнирно-подвижная опора имеет одну, шарнирно-неподвижная - две, а жестко закрепленная - три связи. Каждой связи, приложенной в опоре, соответствует опорная реакция, направленная по направлению действия связи.

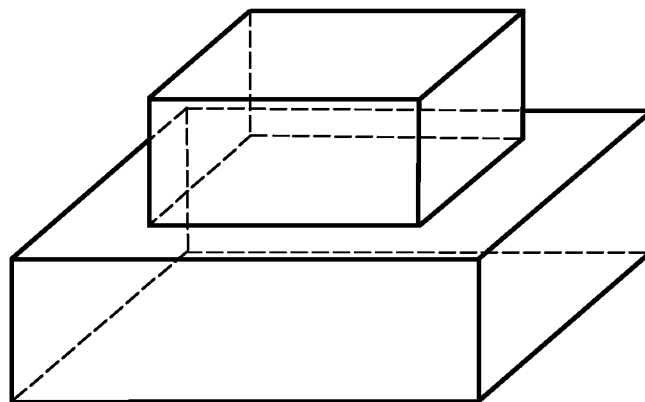


Рис. 1.4

На рис. 1.5 приведены примеры выбора расчетных схем и основные типы опор.

#### 1.4 Внешние силы и их классификация

Все конструкции машин и инженерные сооружения в процесс эксплуатации находятся в постоянном взаимодействии между собой и с внешней средой. Силы взаимодействия отдельных элементов с внешней средой или соседними элементами называются *внешними силами*. Если они известны в начальной стадии расчета, то их называют активными силами или нагрузками если не известны - то их называют реактивными силами или просто *реакциями*. На основании аксиомы связей реакции связей можно рассматривать как внешние силы.

*Внешние силы можно классифицировать по нескольким основным признакам:*

*1. По способу передачи на тело:*

а) поверхностные силы, которые передаются на тело через поверхность (давление газов в цилиндрах, давление грунта на нож скрепера, грейдера или бульдозера);

б) объемные силы, которые передаются на тело через объем (собственный вес, магнитные силы, силы инерции);

в) распределенные силы, которые непрерывно распределены по некоторой части поверхности. Их величина задается интенсивностью;

г) сосредоточенные силы, которые передаются на тело по небольшой части поверхности. Для упрощения их действие заменяют действием равнодействующей, которую называют сосредоточенной силой. Аналогично вводится понятие сосредоточенной пары или момента.

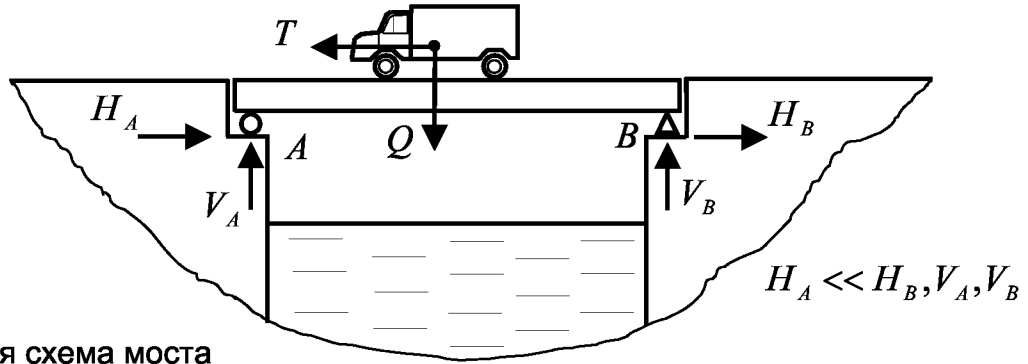
*2. По характеру действия во времени.*

а) статические - силы медленно изменяющиеся во времени, не вызывающие существенных сил инерции;

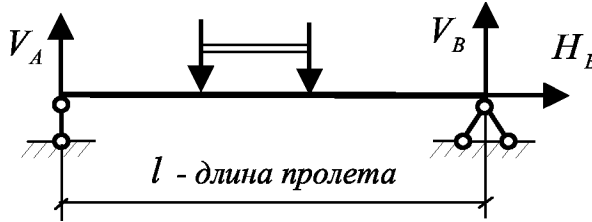
б) динамические - силы быстро изменяющиеся во времени, вызывающие большие силы инерции, которые надо учитывать в расчетах. Динамические силы могут быть ударными, внезапно приложенными и вибрационными;

в) поворотно-переменные - силы, действие которых периодически повторяются многократно раз.

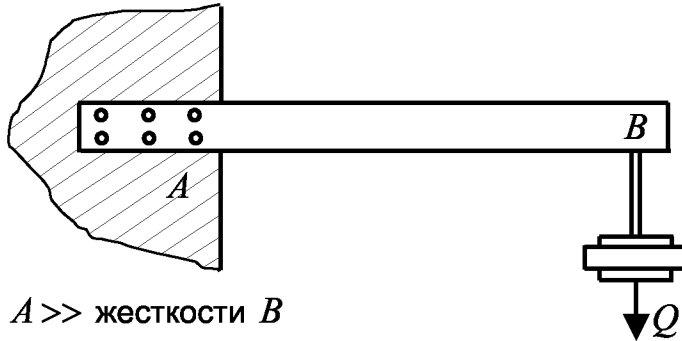
а) МОСТ



расчетная схема моста



б) жесткое закрепление



жесткость  $A \gg$  жесткости  $B$

расчетная схема жесткого закрепления (консоли)

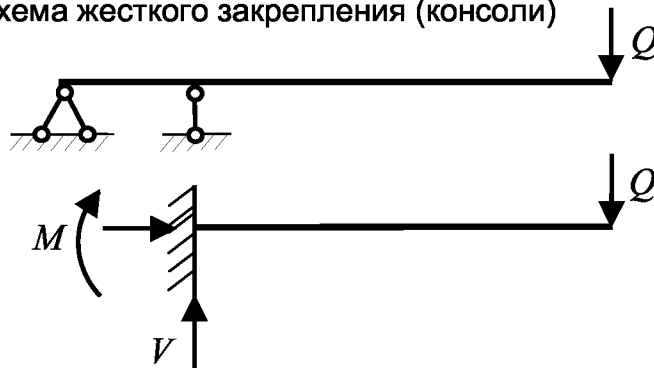


Рис.1.5

3. По длительности действия во времени;

а) постоянные силы, которые действуют на элемент конструкции все время (собственный вес, вес оборудования и т.п.);

б) временные силы, которые действуют на элемент конструкции в течение определенного промежутка времени (вес поезда или автомобиля на мосту, вес монтажного оборудования и т.д.).

### **1.5 Основные гипотезы и принципы механики материалов**

Для упрощения решения практических задач в механике материалов приняты следующие основные упрощающие гипотезы, касающиеся в основном свойств материала.

1. *Гипотеза сплошности.* Предполагается, что материал заполняет форму тела сплошным образом и эта сплошность не нарушается под действием внешних воздействий и деформации тела

2. *Гипотеза изотропности и однородности.* В окрестности любой точки тела физико-механические свойства материала одинаковы во всех направлениях и не изменяются при переходе к другим точкам и по всему объему тела.

3. *Гипотеза идеальной упругости и линейности деформирования.* Деформации тела прямо пропорциональны действующим нагрузкам и полностью исчезают после снятия нагрузки.

4. *Гипотеза малых деформаций.* В механике материалов рассматривают только перемещения и деформации, величины которых малы по сравнению с размерами деформируемого тела. Это дает возможность пренебрегать изменением расположения внешних нагрузок при деформировании тел и составлять уравнения равновесия статики без учета этих изменений. Кроме сформулированных общих гипотез для упрощения решения тех или иных задач вводятся и другие гипотезы. Они будут сформулированы отдельно при изучении этих задач.

Приведем также общие принципы, на которых базируются расчеты в механике материалов.

5. *Принцип независимости действия сил.* Основывается на гипотезах об идеальной упругости материала и малых деформациях. Согласно этому принципу деформации и перемещения в любой точке тела, вызванные системой нагрузок, равны сумме деформаций и перемещений вызванных каждой нагрузкой отдельно, и не зависят от порядка их приложения.

4. *Принцип Сен-Венана.* Предполагает, что если к телу приложена самоуравновешивающаяся система сил, то напряжения и деформации быстро убывают при удалении от места приложения нагрузки. Согласно этому принципу способ приложения нагрузки влияет только на деформацию тела в малом объеме примыкающем к месту приложения нагрузки и не влияет на деформацию тела вдали от точек их приложения.

Принцип Сен-Венана широко используется при решении практических задач.

5. *Принцип отвердения.* Равновесие тела не нарушится если предположить, что оно является абсолютно твердым. В соответствии с этим принципом при составлении уравнений равновесия можно пренебрегать деформациями тела.

На этих основных гипотезах и принципах базируется наука о механике материалов.

## ГЛАВА 2

### ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И УСИЛИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

#### 2.1 Понятие о внутренних силах и напряжениях

Из физики известно, что между частицами любого тела (атомами, молекулами, кристаллами) действуют силы взаимодействия, которые называются внутренними. Но в механике материалов под внутренними силами понимают только изменение этих сил, вызванное действием внешних сил. Поэтому в дальнейшем под *внутренними силами* будем понимать силы взаимодействия, возникающие между частицами или частями тела, при действии на него внешних сил. Величина внутренних сил определяет способность внешних сил разрушить тело. Поэтому для оценки прочности тела необходимо прежде всего знать их.

Для определения внутренних сил в механике материалов используют метод сечений. Суть его выясним на конкретном примере.

Рассмотрим стержень (рис.2.1а), находящийся в равновесии под действием внешних сил.

Для определения внутренних сил в произвольной точке  $O$  проведем мысленно через эту точку поперечное сечение 1, которое разделит стержень на две части: А (левую) и В (правую). Разъединим эти части (рис.2.1б). При этом равновесие каждой из них нарушится. Для того, чтобы уравновесить внешние силы, приложенные к ним, необходимо в сечении 1-1 приложить силы взаимодействия их друг на друга. По определению, эти силы являются внутренними силами. Выделим в окрестности точки  $O$  площадку и  $\Delta F$  обозначим через  $\Delta R$  - равнодействующую внутренних сил, приложенных к ней. Предел отношения, т. е.

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = p$$

называется *полным напряжением*. С физической точки зрения полное напряжение есть интенсивность внутренних сил в точке, а с математической  $p$  - вектор, модуль которого  $p$  является мерой внутренних сил в точке. Он измеряется в единицах силы, отнесенной к площади ( $H/m^2$ ,  $Па$ ,  $МПа$ ,  $кг/см^2$ ,  $т/м^2$  и т.д.).

Разложим вектор  $p$  на координатные составляющие. Выберем прямоугольную систему координат  $x, z, y$  (рис.2.2).

Начало ее совместим с центром тяжести поперечного сечения; ось  $x$  направим вдоль оси стержня, а  $z$  и  $y$  совместим с осями симметрии сечения и назовем их главными центральными осями (гл. ц. о.)

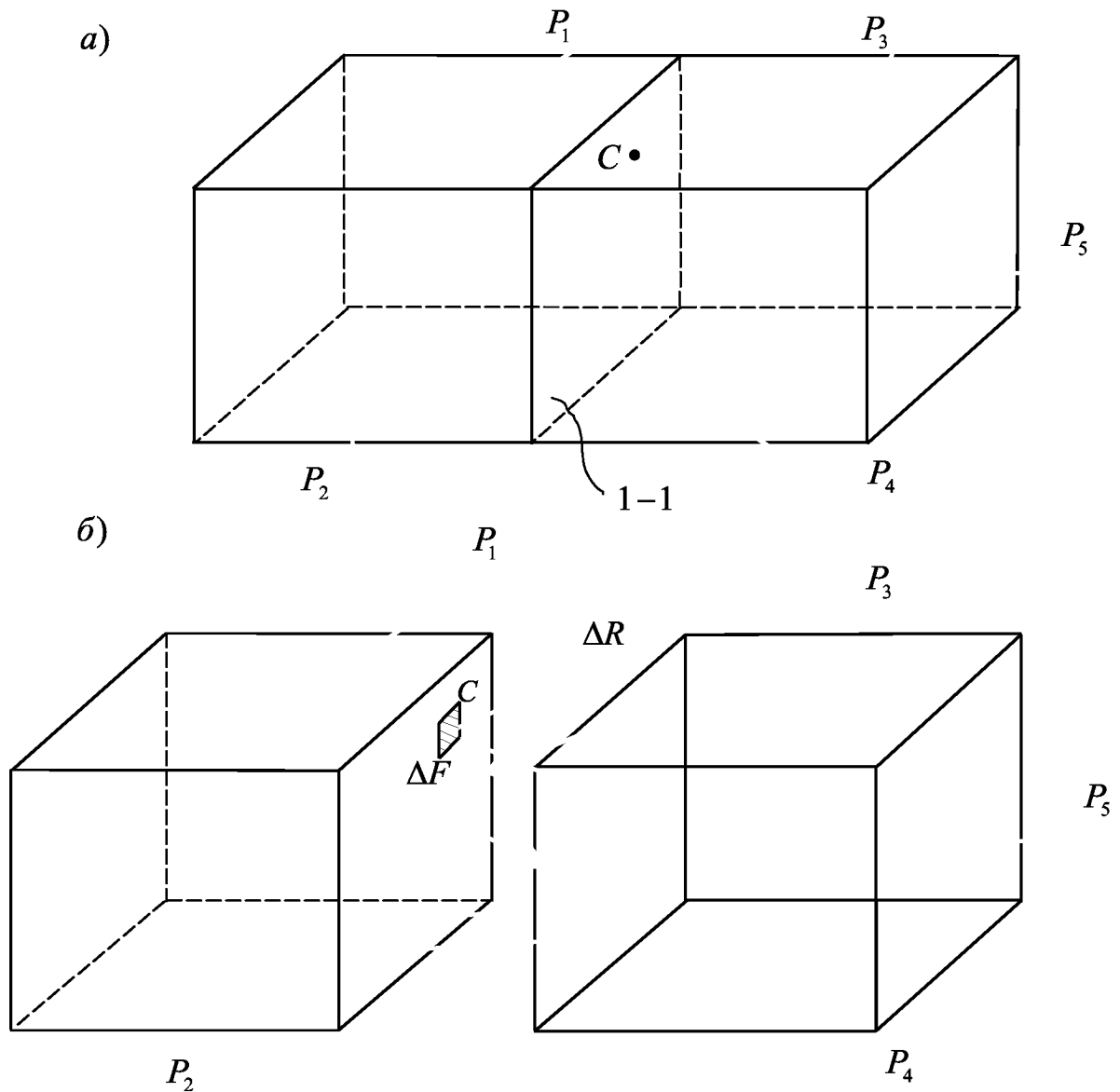


Рис.2.1

Составляющая полного напряжения  $p$ , направленная вдоль нормали к сечению, обозначается греческой буквой  $\sigma$  (сигма) и называется *нормальным напряжением*. Оно считается положительным, если направлено в сторону внешней нормали.

Составляющая полного напряжения  $p$  расположенная в плоскости сечения, обозначается греческой буквой  $\tau$  (тау) и называется *полным касательным напряжением*. Напряжение  $\tau$



можно разложить на координатные составляющие  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{xy}$ . Напряжение  $\tau_{xz}$  ( $\tau_{xy}$ ) считается положительным, если при взгляде с положительного направления координатной оси  $y$  ( $z$ ) оно вращает стержень относительно противоположного конца по часовой стрелке. На рисунке  $\tau_{xz} < 0$ , а  $\tau_{xy} > 0$ .

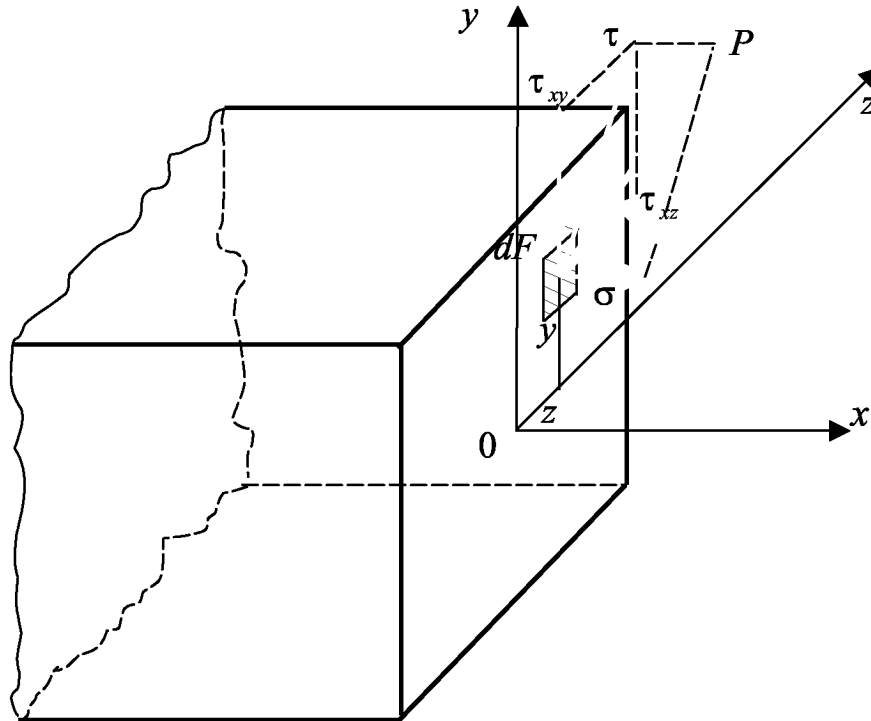


Рис.2.2

Так как  $p$  - гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами  $\sigma$  и  $\tau$ , то

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2},$$

но по той же причине  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$  поэтому

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}.$$

## 2.2 Внутренние усилия

Спроектируем все внутренние силы, действующие в поперечном сечении стержня, на координатные оси и найдем моменты их относительно этих осей.

$\sum X$  обозначается буквой  $N = \int_F \sigma dF$  - называется *продольной (осевой) силой*

$$\left. \begin{aligned} \sum Y \text{ обозначается буквой } Q_y &= \int_F \tau_{xy} dF \\ \sum Z \text{ обозначается буквой } Q_z &= \int_F \tau_{xz} dF \\ \sum M_x \text{ обозначается буквой } M_{kp} &= \int_F (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dF \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{- называются поперечными} \\ \text{(перерезывающими) силами} \\ \text{-называется крутящим} \\ \text{моментом} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_y \text{ обозначается буквой } M_y &= \int_F \sigma z dF \\ \sum M_z \text{ обозначается буквой } M_z &= \int_F \sigma y dF \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{- называются} \\ \text{изгибающими моментами.} \end{array}$$

Проекции внутренних сил, действующих в поперечном сечении стержня, на координатные оси и моменты их относительно этих осей, т.е.  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_{kp}$ ,  $M_y$  и  $M_z$  - называются *внутренними усилиями*.

Продольная сила  $N$  - сумма проекций всех внутренних сил, действующих в поперечном сечении стержня, на его ось; поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  -то же, но на гл. ц. о.  $y$  и  $z$  соответственно. Знаки  $N$ ,  $Q_y$  и  $Q_z$ , совпадают со знаками  $\sigma$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  соответственно.

Крутящий момент  $M_{kp}$  - сумма моментов всех внутренних сил, действующих в поперечном сечении стержня, относительно его оси.  $M_{kp} > 0$ , если при взгляде со стороны внешней нормали, он вращает по часовой стрелке.

Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  -то же относительно гл.ц.о.  $y$  и  $z$  соответственно.  $M_y > 0$  и  $M_z > 0$ , если изгибают стержень так, что вогнутость его располагается со стороны положительной координатной оси  $z$  и  $y$  соответственно.

Полученные выражения усилий через внутренние силы обычно называют *интегральными зависимостями*. Из них нельзя определить внутренние силы, т.е. напряжения  $\sigma$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , так как неизвестен закон распределения их по сечению и значение внутренних усилий. Что касается внутренних усилий, то их всегда можно определить через внешние силы. В *статически определимых конструкциях (системах)* для этого достаточно воспользоваться условиями равновесия. Если для определения усилий в сечениях элементов условий равновесия недостаточно, то такие конструкции (системы) называются *статически неопределимыми*.

Следует отметить, что даже при известных внутренних усилиях определить напряжения из полученных интегральных зависимостей нельзя. Поэтому задача вычисления напряжений всегда является статически неопределимой.

### 2.3 Выражение внутренних усилий через внешние силы

Рассмотрим равновесие одной из частей стержня, например, левой (обычно рассматривается та часть, на которую действует меньше внешних сил). На нее действуют внешние силы  $P_1, P_2$  и внутренние силы в поперечном сечении 1-1. Так как внутренние усилия  $N, Q_y, Q_z, M_{кр}, M_y$  и  $M_z$  являются равнодействующими внутренних сил, то их действие статически эквивалентно действию внутренних сил. Поэтому в сечении 1-1 можно приложить вместо внутренних сил положительные внутренние усилия (рис. 2.3).

Под действием показанных на рисунке сил эта часть стержня находится в равновесии, т.е. для нее должны выполняться шесть условий равновесия  $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0$  и  $\sum M_z = 0$ .

Из шести неизвестных усилий только одно проектируется на какую-либо ось или дает момент относительно нее. Поэтому из условий равновесия легко получим:

#### Формулы для определения внутренних усилий

$$\begin{aligned} N &= \sum_{лев} P_i \cos(\hat{P}_i, x); & M_{кр} &= \sum_{лев} M_{(x)}(P_i) \\ Q_y &= \sum_{лев} P_i \cos(\hat{P}_i, y); & M_y &= \sum_{лев} M_{(y)}(P_i) \\ Q_z &= \sum_{лев} P_i \cos(\hat{P}_i, z); & M_z &= \sum_{лев} M_{(z)}(P_i) \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что:

Продольная сила  $N$  равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, на ось стержня.  $N > 0$ , если проекция внешней силы направлена от сечения.

Поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  - тоже, но на оси  $y$  и  $z$  соответственно.  $Q_y > 0$  и  $Q_z > 0$ , если при взгляде с положительного направления осей  $z$  и  $y$  соответственно проекция внешней силы вращает стержень относительно сечения по часовой стрелке.

Крутящий момент  $M_{kp}$  равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно оси стержня.  $M_{kp} > 0$ , если при взгляде в торец внешняя сила или момент вращают по часовой стрелке.

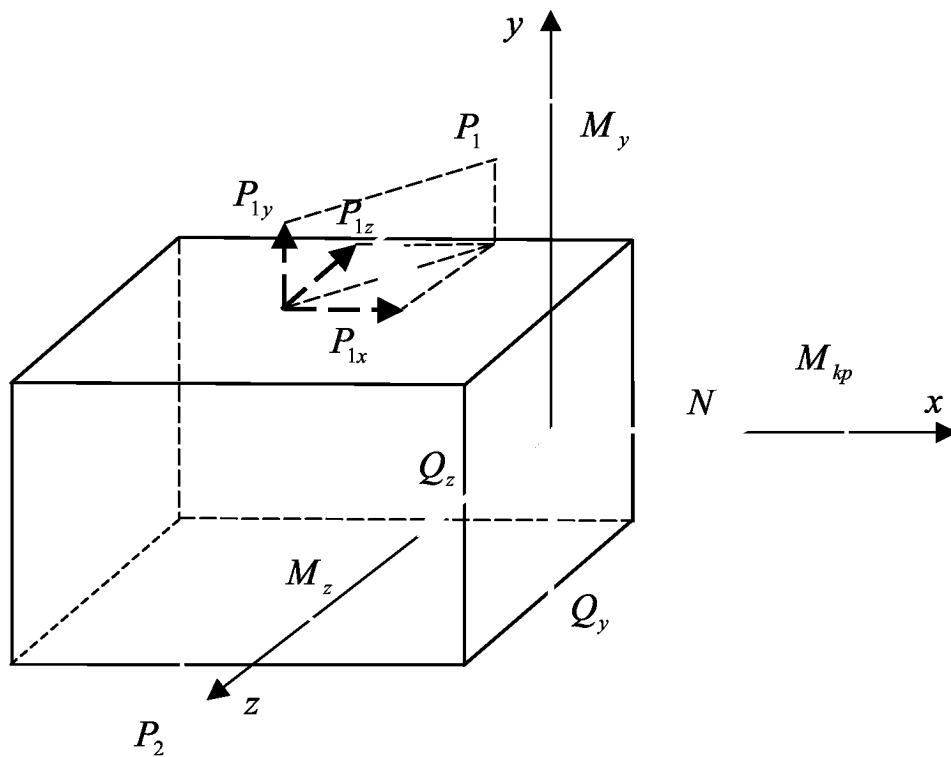


Рис.2.3

Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  - тоже, но относительно осей  $y$  и  $z$  соответственно.  $M_y > 0$  и  $M_z > 0$ , если внешняя сила или момент так изгибают стержень, что вогнутость его располагается со стороны положительных осей  $z$  и  $y$  соответственно. Например, в рассматриваемом случае, от действия силы  $P_1$ :  $N < 0$ ,  $Q_y > 0$ ,  $Q_z > 0$ ,  $M_{kp} < 0$ ,  $M_y < 0$  и  $M_z > 0$ .

Таким образом, в самом общем случае действия внешних сил на стержень в его сечениях возникают четыре вида усилий: продольная сила ( $N$ ), поперечные силы ( $Q_y$ ,  $Q_z$ ), крутящий момент ( $M_{kp}$ ) и изгибающие моменты ( $M_y$ , и  $M_z$ ).

Каждый вид усилий вызывает характерную для него деформацию.

Деформация, вызванная действием:

1. продольной силы ( $N$ ) называется *растяжением или сжатием*;
2. поперечной силы ( $Q_y$  или  $Q_z$ ) называется *сдвигом*;

3. крутящим моментом ( $M_{кр}$ ) называется *кручением*;
4. изгибающим моментом ( $M_y$  или  $M_z$ ) называется *изгибом*.

Эти четыре вида деформаций называются простыми. Деформация, вызванная совместным действием двух и более усилий, называется сложной. В таких случаях говорят, что стержень испытывает *сложное сопротивление*. В расчетной практике наиболее часто встречаются следующие случаи сложного сопротивления:

1. Поперечный изгиб - деформация, вызванная совместным действием изгибающего момента и поперечной силы.
2. Пространственный или кривой изгиб - деформация, вызванная совместным действием двух изгибающих моментов.
3. Изгиб с растяжением (сжатием) - деформация, вызванная совместным действием изгибающих моментов и продольной силы.
4. Изгиб с кручением - деформация, вызванная совместным действием изгибающих и крутящего моментов.

## ГЛАВА 3

### ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

#### 3.1 Основные правила построения эпюр

Обычно наибольшие внутренние силы в стержне возникают в тех сечениях, где действуют наибольшие внутренние усилия. Эти сечения называются опасными. Для определения опасных сечений в механике материалов строят эпюры внутренних усилий. Они представляют собой графики, показывающие, как изменяются внутренние усилия по длинам элементов. Отметим некоторые общие правила построения эпюр:

1. Эпюры строятся на осях элементов или на линиях, параллельных им, которые называются базовыми.
2. Ординаты откладываются в масштабе, перпендикулярно осям элементов или базовым линиям.
3. Эпюры штрихуются линиями, перпендикулярными базовым линиям.
4. На эпюрах проставляются значения характерных ординат и знаки.

Порядок построения эпюр рассмотрим на конкретном примере. Пусть необходимо построить эпюры внутренних усилий для стержня (рис. 3.1а), нагруженного осевыми сосредоточенными силами  $P_1$ ,  $P_2$  и собственным весом ( $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$ ).

Так как все внешние силы действуют по оси стержня, то очевидно, что  $Q_y = Q_z = M_y = M_z = M_{кр} = 0$ , а  $N \neq 0$ . Следовательно, в этом случае будет только эпюра продольных сил. Для построения ее необходимо составить функцию изменения продольной силы  $N$  по длине стержня. Но в данном случае описать изменение продольной силы по длине стержня одной функцией невозможно. Поэтому предварительно выделим части стержня, в пределах которых изменение можно задать одной функцией. Эти части стержня называются участками. В рассматриваемом случае их два (I и II). Выберем для каждого участка произвольное начало координат. Рекомендуется выбирать его с той стороны, где расположена рассматриваемая часть стержня.

Проектируя на ось стержня все внешние силы, действующие на нижнюю часть его, находим продольную силу в произвольном сечении каждого участка.

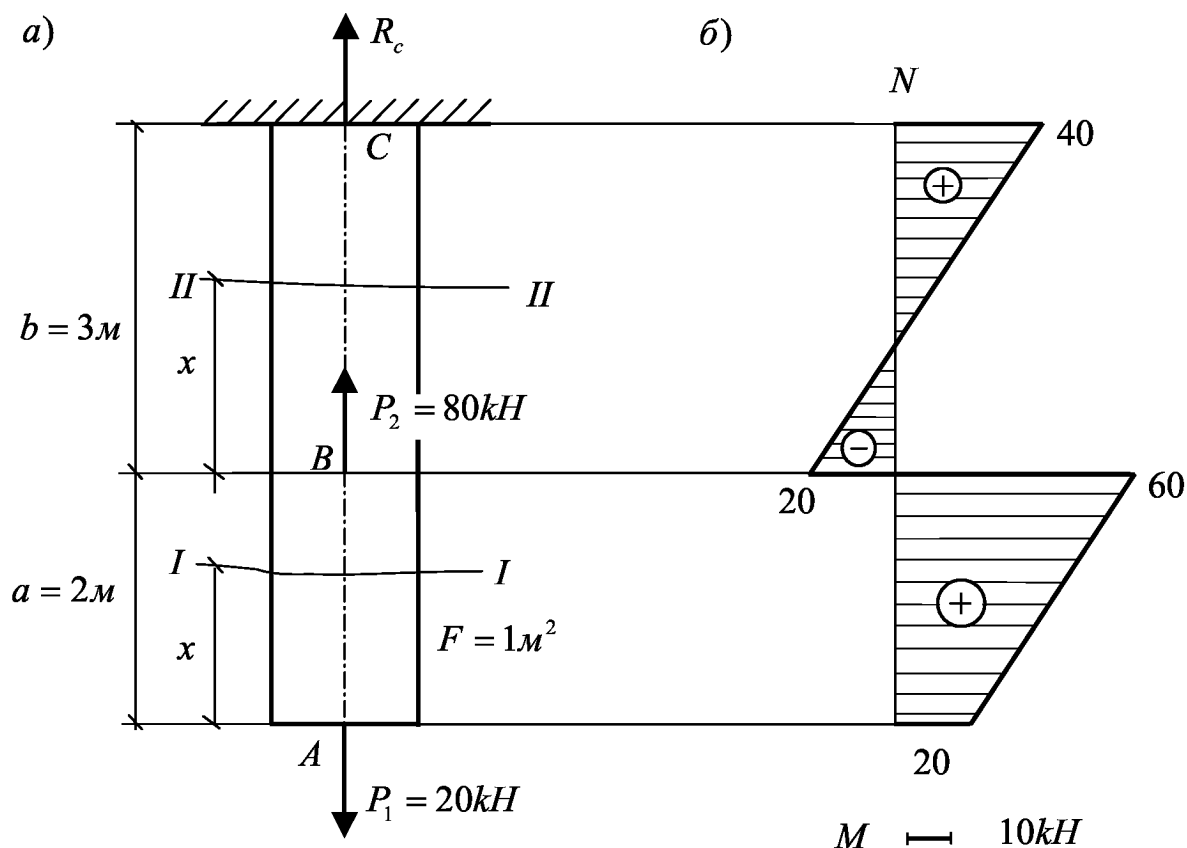


Рис. 3.1

Участок I  $0 \leq x \leq 2\text{ м}$

$N_{(x)} = P_1 + F\gamma x$  - линейная функция.

Для построения графика прямой линии надо знать два значения.

$$N|_{x=0} = P_1 = 20\text{ кН}, \quad N|_{x=2\text{ м}} = P_1 + F\gamma \cdot 2 = 20 + 1 \cdot 20 \cdot 2 = 60\text{ кН}$$

Участок II  $2 \leq x \leq 5\text{ м}$

$N_{(x)} = P_1 - P_2 + F\gamma(2 + x)$  - линейная функция,

$$N|_{x=2} = 20 - 80 + 1 \cdot 20 \cdot 2 = -20\text{ кН}, \quad N|_{x=5\text{ м}} = 20 - 80 + 1 \cdot 20 \cdot 5 = 40\text{ кН}$$

Откладывая ординаты от базовой линии, получим график изменения продольной силы по длине стержня, т.е. эпюру  $N$  (рис. 3.1б). Из эпюры видно, что опасным сечением стержня является сечение В, в котором действует наибольшая продольная сила  $N_{\max} = 60\text{ кН}$ . Заметим, что в сечениях А, В, и С на эпюре  $N$  получились скачки, равные сосредоточенным силам, приложенным к стержню в этих сечениях. На основании этого вывода можно утверждать, что реакция  $R_c = 40\text{ кН}$ .

### 3.2 Особенности построения эюр внутренних усилий в балках

*Балками* называются прямолинейные стержни, работающие в основном на изгиб. Рассмотрим простую балку, нагруженную по всей длине равномерно распределенной нагрузкой, интенсивностью  $q$  (рис. 3.2). Начало координат поместим в крайней левой точке А балки. Ось  $x$  направим вдоль оси балки,  $y$  - вверх, а  $z$  - на нас.

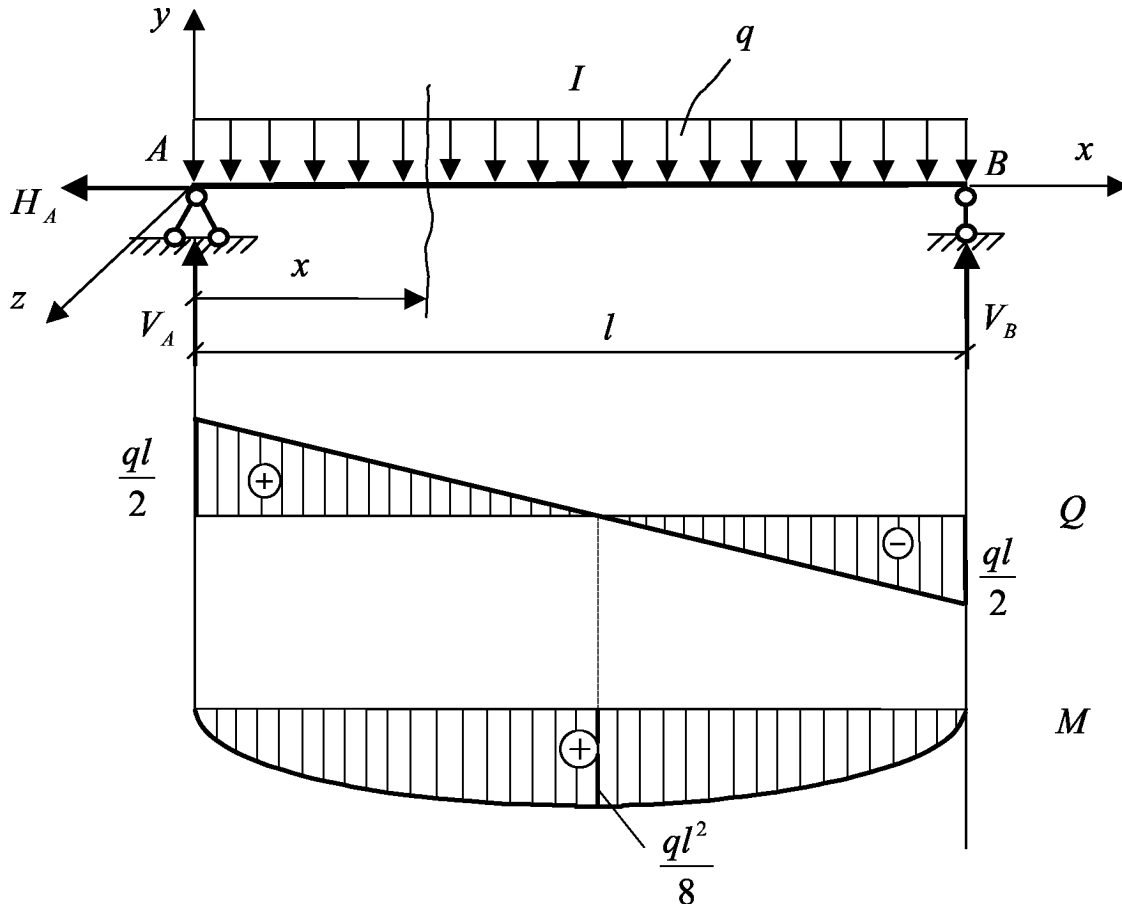


Рис.3.2

Вертикальная нагрузка, расположенная в плоскости  $xu$  не дает проекций на оси  $x$  и  $y$  и моментов относительно осей  $x$  и  $y$ . Поэтому во всех сечениях балки

$$N = Q_z = M_y = M_{kp} = 0$$

и только  $Q_y$  и  $M_z$  останутся отличными от нуля. В дальнейшем для упрощения будем обозначать их без индексов, т.е. через  $Q$  и  $M$ . Таким образом, в балках при вертикальной нагрузке будет только две эюры:  $Q$  - поперечных сил и  $M$  - изгибающих моментов. Правила определения  $Q$  и  $M$  через внешние силы мы сформулировали на предыдущей лекции. Но их можно упростить, если сохранить, изображенную на рис. 10 систему координат.



Поперечная сила  $Q$  равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси балки.  $Q > 0$ , если проекция внешней силы стремится вращать балку относительно сечения по часовой стрелке (рис. 3.3а).

Изгибающий момент  $M$  равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно сечения.  $M > 0$ , если внешняя сила или момент так изгибают балку, что вогнутость располагается сверху, т.е. вызывает сжатие верхних волокон (рис. 3.3б).

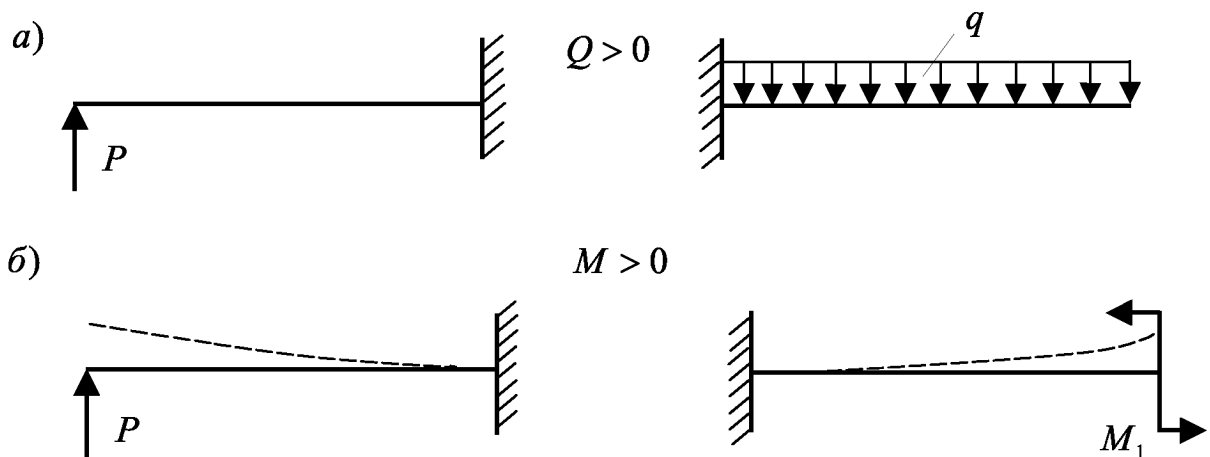


Рис. 3.3

Построение эпюр внутренних усилий выполняется в следующем порядке:

1. Определить опорные реакции.

В шарнирно-неподвижной опоре могут возникнуть две реакции:  $H_A$  - горизонтальная и  $V_A$  - вертикальная, а в шарнирно-подвижной – только одна  $V_B$ . Выберем произвольно их направление.

Для определения трех неизвестных реакции  $H_A$ ,  $V_A$  и  $V_B$  составим три условия равновесия

$$\sum X = H_A = 0; \quad \sum M_A = V_B l - ql \frac{l}{2} = 0; \quad \sum M_B = V_A l - ql \frac{l}{2} = 0$$

Откуда находим:  $H_A = 0$ ,  $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$ .

Для проверки правильности вычисления реакций спроектируем все силы на ось  $y$

$$\sum Y = V_A + V_B - ql = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} - ql = 0,$$

следовательно, реакции определены правильно.

2. Выделить отдельные участки. В рассматриваемом случае только один участок (I).

3. Составить функции усилий на участках и вычислить их значения в характерных сечениях.

Участок I  $0 \leq x \leq l$

$$Q_{(x)} = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx - \text{линейная функция.}$$

Для построения графика прямой линии надо знать два значения

$$Q|_{x=0} = \frac{ql}{2}, \quad Q|_{x=l} = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}$$

$$M(x) = V_A x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - \text{парабола.}$$

Для построения графика параболы надо знать, как минимум, три значения.

$$M|_{x=0} = 0, \quad M|_{x=l} = \frac{ql}{2} l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

Третье значение обычно вычисляют в точке экстремума функции  $M(x)$ . Для определения ее запишем условие экстремума функции  $M(x)$ :

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0,$$

но  $\frac{ql}{2} - qx = Q_{(x)}$ , поэтому  $Q_{(x)} = \frac{ql}{2} - qx_0 = 0$  - условие экстремума

$M(x)$ . Из этого условия находим  $x_0 = \frac{l}{2}$ , тогда

$$M|_{x=x_0=l/2} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

4. По вычисленным значениям  $Q$  и  $M$  построить графики. При построении графика  $Q$  принято откладывать положительные ординаты вверх, а отрицательные - вниз. А при построении графика  $M$  наоборот - положительные ординаты вниз, а отрицательные - вверх. Построенные таким способом графики являются эпюрами внутренних усилий  $Q$  и  $M$  (рис. 3.2).

5. Проверить правильность построения эпюр. Для этого используют дифференциальные зависимости при изгибе, которые мы сейчас и рассмотрим.

### 3.3 Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим балку, нагруженную произвольной нагрузкой (рис.3.4)

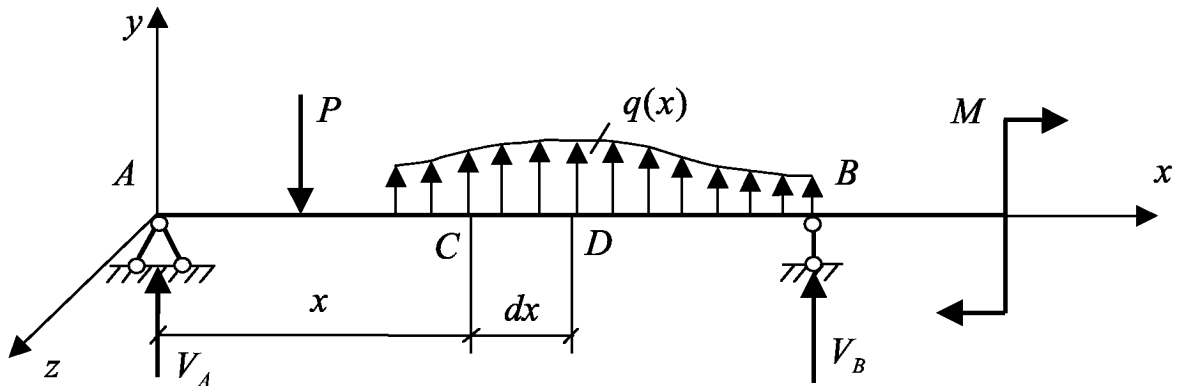


Рис.3.4

Выделим на участке действия положительной распределенной нагрузки элемент балки  $CD$ , длиной  $dx$ . Под действием внешней нагрузки  $q(x) = q$  и положительных усилий  $Q$  и  $M$  в сечении  $C$  и  $Q + dQ$  и  $M + dM$  в сечении  $D$  он находится в равновесии (рис.3.5). Поэтому

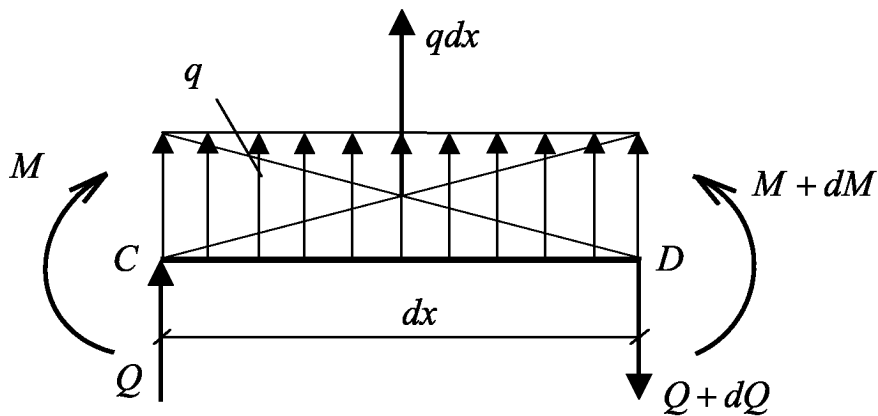


Рис.3.5

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0,$$

$$\sum M_D = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

Из первого условия равновесия имеем

$$\frac{dQ}{dx} = q .$$

Если во втором условии равновесия пренебречь слагаемым второго порядка малости, то получим

$$\frac{dM}{dx} = Q .$$

Продифференцируем это уравнение  $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}$ , но  $\frac{dQ}{dx} = q$ , поэтому

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q .$$

Полученные зависимости между усилиями и интенсивностью распределенной нагрузки называются дифференциальными зависимостями при изгибе. Они используются для контроля правильности построения эпюр  $Q$  и  $M$ .

Рассмотрим несколько частных случаев :

1. Если  $q = 0$ , то  $\frac{dQ}{dx} = 0$  и  $\frac{d^2M}{dx^2} = 0$ . Интегрируя эти уравнения, получим:  $Q = C_0 = const$ , а  $M = C_1x + C_2$ . Следовательно, на тех участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  ограничена прямой, параллельной базовой линии, а эпюра  $M$  - наклонной прямой.

2. Если  $q(x) = q_0 = const$ , то  $\frac{dQ}{dx} = q_0$  и  $\frac{d^2M}{dx^2} = q_0$ .

Интегрируя эти уравнения, получим:

$Q = q_0x + C_0$  - линейная функция, а  $M = q_0 \frac{x^2}{2} + C_1x + D$  - парабола.

Построим графики функций  $Q$  и  $M$  при положительной и отрицательной нагрузке  $q_0$  ( рис.3.6 ).

Из графиков видно, что на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра  $Q$  ограничена восходящей прямой, если  $q_0 > 0$  или нисходящей, если  $q_0 < 0$ , а эпюра  $M$  - параболой, выпуклость которой направлена в сторону действия нагрузки.

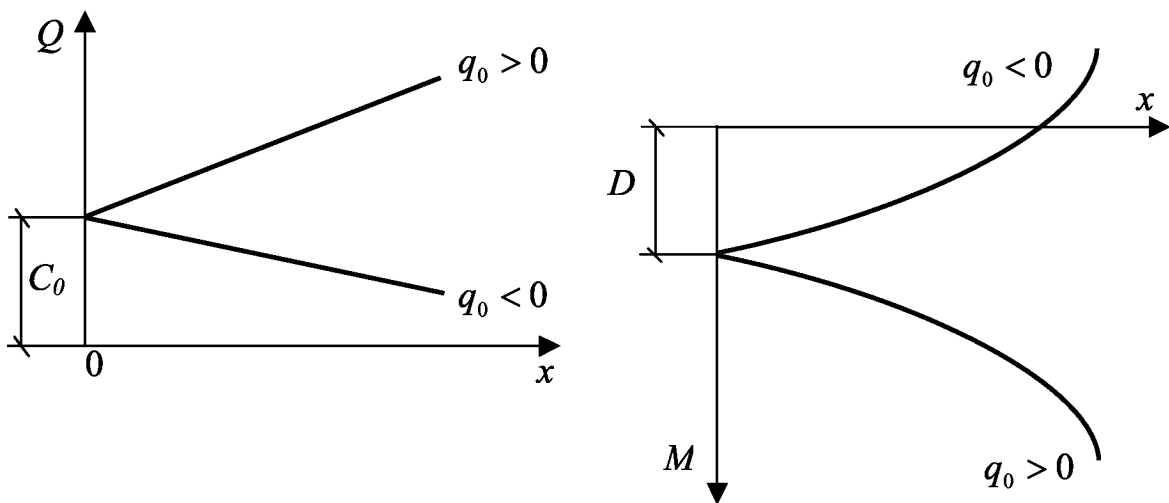


Рис.3.6

3. Так как  $\frac{dM}{dx} = Q$ , то на тех участках, где функция момента  $M$  возрастает, поперечная сила  $Q$  положительная, а убывает – отрицательная. В сечениях, где  $Q = 0$ , изгибающий момент  $M$  достигает экстремальных значений.

4. Из геометрического смысла первой производной следует, что  $Q = \operatorname{tg}\varphi$ , так как  $\frac{dM}{dx} = Q$ . Следовательно, поперечная сила  $Q$  равна тангенсу угла наклона касательной к эпюре изгибающих моментов  $M$  в данном сечении.

### 3.4 Особенности построения эпюр внутренних усилий в рамах

*Рамой* называется конструкция (система) состоящая из прямолинейных стержней, соединенных между собой жесткими узлами (рис.3.7)

Вертикальные и наклонные элементы рамы называются стойками, а горизонтальные – ригелями. Рама, у которой все элементы и нагрузки расположены в одной плоскости, называется плоской. В сечениях элементов плоской рамы из шести внутренних усилий отличными от нуля могут быть только три  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Следовательно, для плоских рам надо строить только три эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Эпюры в рамах строятся непосредственно на контурах рамы. Все правила построения эпюр в балках применимы и для рам, если каждый прямолинейный элемент ее рассматривать как балку,

помещая начало координат в крайней левой точке. При этом все вертикальные элементы надо рассматривать справа, т.е. начало координат располагать внизу. На эпюре изгибающих моментов не принято проставлять знаки. При такой методике построения эпюры  $M$  она всегда будет располагаться на растянутых волокнах.

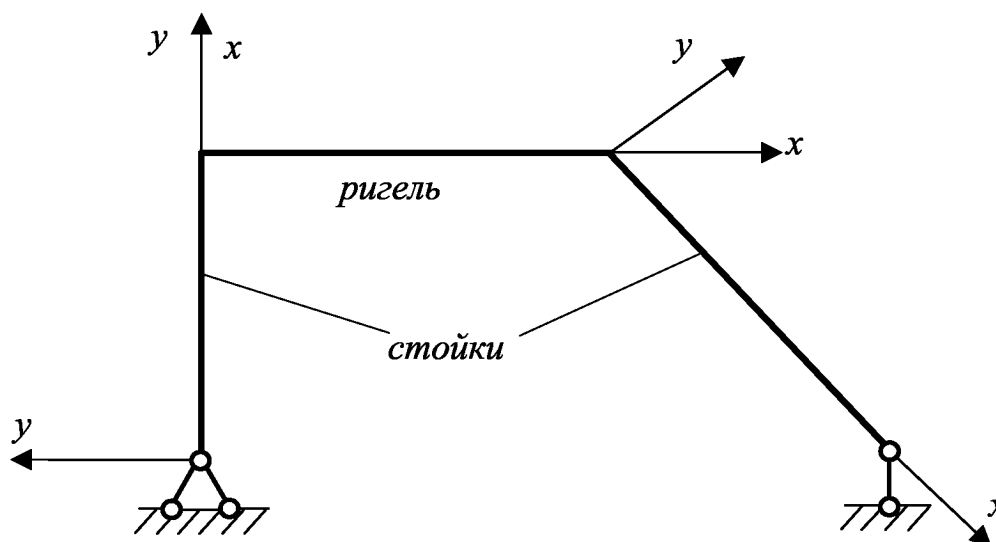


Рис.3.7

Все правила контроля правильности построения эпюр в балках применимы и для рам. Кроме того в рамах для контроля правильности построения эпюр всегда проверяют равновесие узлов.

### 3.5 Особенности построения эпюр внутренних усилий для криволинейных стержней

В сечениях плоских криволинейных стержней, как и в рамах действуют только три усилия  $N$ ,  $Q$  и  $M$ . Для  $N$  и  $Q$  сохраняется то же правило знаков, что и для балок и рам. Для изгибающих моментов вводится новое правило знаков. Изгибающий момент считается положительным, если он увеличивает кривизну стержня. Для определения  $N$  и  $Q$  внешние силы надо проектировать соответственно на касательную и нормаль к оси стержня.

Все эпюры в криволинейных стержнях строятся на контурах. Ординаты откладываются вдоль нормалей к оси стержня. Положительные - наружу, а отрицательные - внутрь. Эпюра изгибающих моментов  $M$  строится только на растянутых или на сжатых волокнах. Знаки на ней не ставятся.

В криволинейных стержнях, оси которых являются дугами окружностей, при составлении функций  $N$ ,  $Q$  и  $M$  на отдельных участках удобнее пользоваться полярной системой координат.

Для проверки правильности построения эпюр в плоских кривых стержнях можно использовать дифференциальные зависимости при изгибе, которые имеют вид:

$$\boxed{\frac{dN}{dS} = -\frac{Q}{r}, \quad \frac{dQ}{dS} = q + \frac{N}{r}, \quad \frac{dM}{dS} = Q.}$$

### 3.5 Особенности построения эпюр внутренних усилий в пространственных рамах

В поперечных сечениях элементов пространственных стержневых систем могут действовать все шесть внутренних усилий:  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_{kp} = M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Все правила построения эпюр в балках и плоских рамах применимы и для пространственных стержневых систем, только для каждого прямолинейного элемента необходимо изображать на расчетной схеме систему координат. Ось  $x$  всегда совмещается с осью стержня, а оси  $y$  и  $z$  направляются так, чтобы вращение от оси  $y$  к оси  $z$  совершалось против часовой стрелки по отношению к наблюдателю, расположенному со стороны положительной оси  $x$  (рис.3.8).

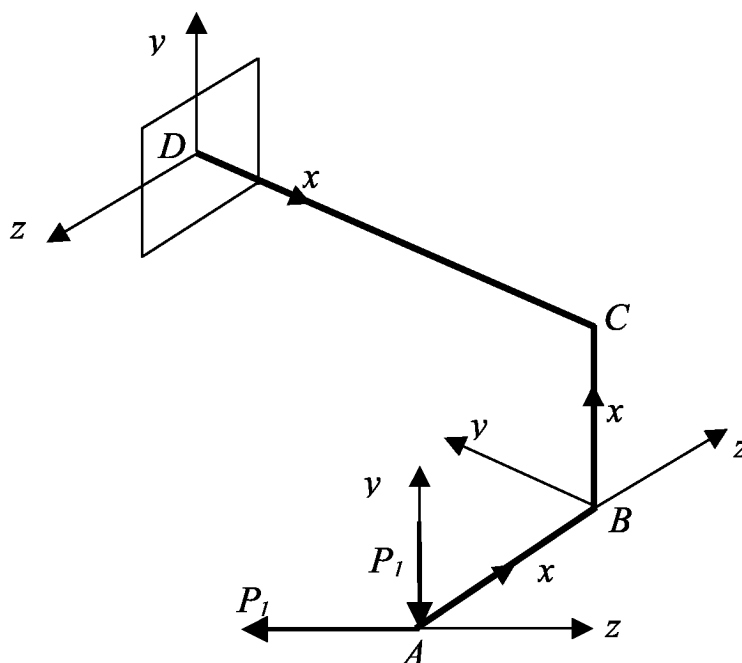


Рис.3.8.

При построении эпюр ординаты откладываются перпендикулярно осям элементов. Эпюры  $N$  и  $M$  можно ориентировать произвольно. Остальные эпюры располагаются в плоскостях, в которых действуют соответствующие им усилия. Эпюры изгибающих моментов строятся обычно на растянутых волокнах, поэтому знаки на них не ставятся. На всех других эпюрах внутренних усилий обязательно ставятся знаки и значения характерных ординат.



## ГЛАВА 4

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### 4.1 Введение

Для оценки прочности элементов конструкций необходимо прежде всего знать величину внутренних сил. От чего они зависят? Очевидно от внешних сил (нагрузок) и площади поперечных сечений элементов. А еще от чего? Чтобы ответить на этот вопрос попытаемся объяснить результаты слѣдующих экспериментов. Рассмотрим консольную балку прямоугольного сечения  $F = h \cdot b$  ( $h > b$ ), нагруженную сосредоточенной силой  $P$  в двух вариантах: параллельной стороне  $h$  (рис.4.1а) и  $b$  (рис.4.1б).

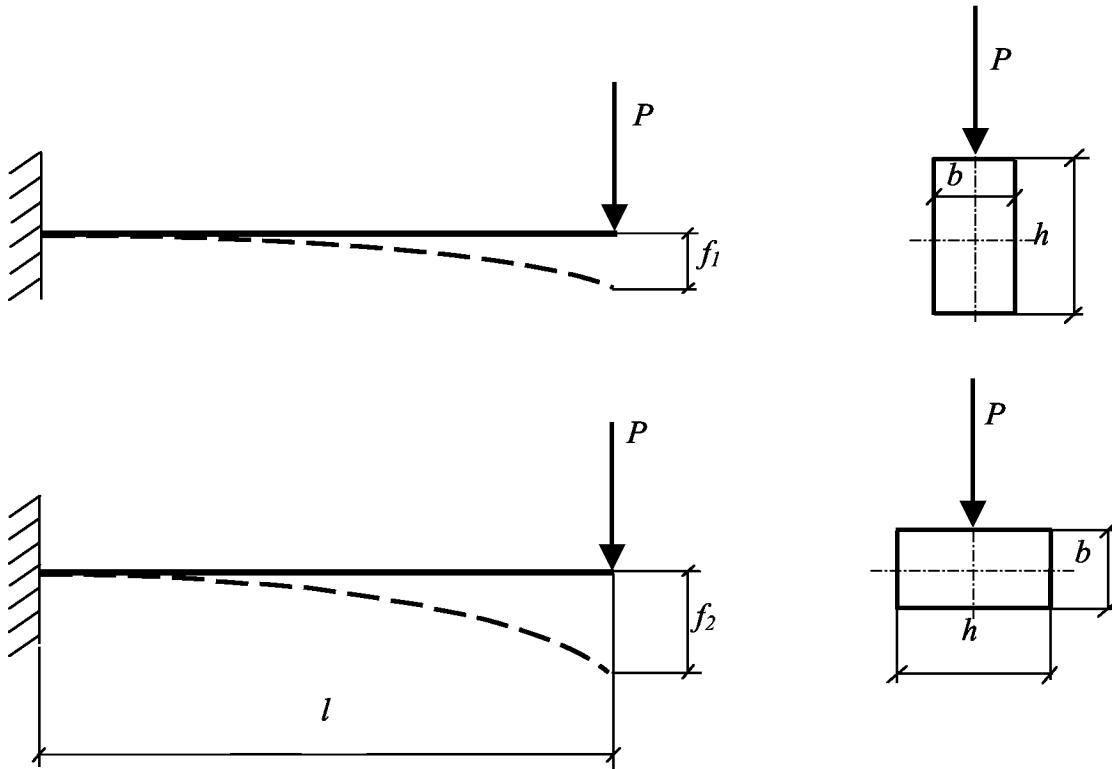


Рис. 4.1

Прогибы во втором варианте больше. Следовательно и больше внутренние силы. Почему? Ведь  $P = const$ , и  $F = const$ . в обоих вариантах загрузки. По-видимому потому, что кроме нагрузки и площади на величину внутренних сил оказывают влияние и некоторые другие геометрические характеристики поперечных сечений элементов. Изучим их.

## 4.2 Статические моменты площади

Рассмотрим произвольное поперечное сечение стержня в прямоугольной системе координат  $z_1 O_1 y_1$  (рис.4.2).

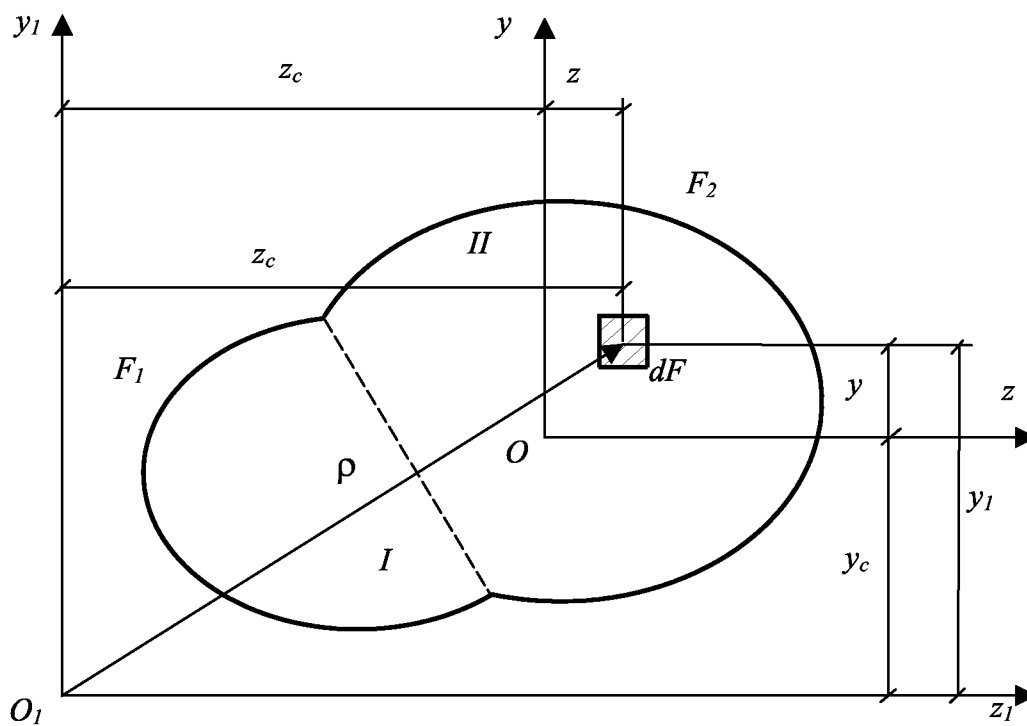


Рис.4.2

Выделим элемент площади  $dF$  с координатами  $z_1$  и  $y_1$  и обозначим через  $F = F_1 + F_2$  - площадь сечения.

*Статическими моментами площади  $F$  относительно осей  $z_1$  и  $y_1$  называются определенные интегралы по площади соответствующего вида*

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF$$

$$S_{y_1} = \int_F z_1 dF$$

Они измеряются в единицах длины в кубе, т.е. в  $см^3$ ,  $м^3$ ,  $мм^3$ . Из свойств определенных интегралов следует, что

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_{F_1} y_1 dF + \int_{F_2} y_1 dF = S_{z_1}^I + S_{z_1}^{II}, \text{ т.е.}$$

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^n S_{z_1}^i, \quad S_{y_1} = \sum_{i=1}^n S_{y_1}^i$$

Следовательно, статические моменты площади сложного сечения равны сумме статических моментов его составляющих. Рассмотрим другую систему координат  $zOy$ , параллельную  $z_1O_1y_1$ , и определим

$$S_z = \int_F y dF \quad \text{и} \quad S_y = \int_F z dF$$

Выразим координаты  $y$  и  $z$ , через координаты  $y_1$  и  $z_1$  имеем

$$y = y_1 - y_C, \quad z = z_1 - z_C.$$

Подставляя их в выражения для  $S_z$  и  $S_y$ , получим:

$$\begin{aligned} S_z &= S_{z_1} - Fy_C, \\ S_y &= S_{y_1} - Fz_C \end{aligned}$$

В этих формулах  $y_C$  и  $z_C$  пока произвольные. Выберем их так, чтобы  $S_z = 0$  и  $S_y = 0$ .

Ось, относительно которой статический момент площади равен нулю, называется центральной, а точка пересечения каких-либо двух центральных осей называется *центром тяжести площади*.

Пусть оси  $z$  и  $y$ - центральные, тогда:

$$\begin{aligned} S_z &= S_{z_1} - Fy_C = 0, \\ S_y &= S_{y_1} - Fz_C = 0 \end{aligned}$$

Если  $S_{z_1}$ ,  $S_{y_1}$  и  $F$  известны, то из этих уравнений получим:

$$\boxed{z_C = \frac{S_{y_1}}{F}, \quad y_C = \frac{S_{z_1}}{F}}$$

- формулы для определения координат центра тяжести площади. Если для составного сечения известны координаты центров тяжести  $z_C$  и  $y_C$ , его составляющих, то из этих же уравнений получим

$$\boxed{S_{z_1} = \sum_{i=1}^n F_i y_C^i, \quad S_{y_1} = \sum_{i=1}^n F_i z_C^i}$$

- формулы для определения статических моментов площади. Следовательно, статический момент площади сложного сечения относительно произвольной оси равен сумме произведений площадей его составляющих на расстояния от оси до центров тяжести.

### 4.3 Моменты инерции площади

Моментами инерции площади называются определенные интегралы по площади следующего вида (рис.4.2):

$$\left. \begin{aligned} J_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF \\ J_{y_1} &= \int_F z_1^2 dF \\ J_{z_1 y_1} &= \int_F z_1 y_1 dF \\ J_{\rho} &= \int_F \rho^2 dF \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{- осевые моменты инерции,} \\ &\text{- центробежный момент инерции,} \\ &\text{- полярный момент инерции.} \end{aligned}$$

Из свойств определенных интегралов следует, что

$$J = \sum_{i=1}^n J_i$$

т.е. момент инерции сложного сечения равен сумме моментов инерции его составляющих. Отметим некоторые основные свойства моментов инерции :

1. Все моменты инерции измеряются в единицах длины в четвертой степени ( $см^4$ ,  $м^4$ ,  $мм^4$  и т.д.).

2.  $J_{z_1} > 0$ ,  $J_{y_1} > 0$ ,  $J_{\rho} > 0$  т.е. осевые и полярный моменты инерции всегда положительные.

3. Центробежный момент инерции  $J_{z_1 y_1}$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Координатные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю называются *главными осями инерции*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями инерции* (гл. ц. о. и.).

4. Если хотя бы одна из двух координатных осей совпадает с осью симметрии сечения, то такие оси будут главными осями инерции (рис.4.3). Действительно, каждой площадке, расположенной справа от оси симметрии с произведением  $zydF$ , имеется симметрично расположенная площадка слева от оси симметрии, для которой произведение  $zydF$  имеет противоположный знак. Поэтому сумма таких произведений по всей площади сечения всегда будет равна нулю.

5.  $J_{\rho} = \int_F \rho^2 dF$ , но  $\rho^2 = z^2 + y^2$  поэтому

$$J_{\rho} = \int_F (z^2 + y^2) dF = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF = J_y + J_z$$

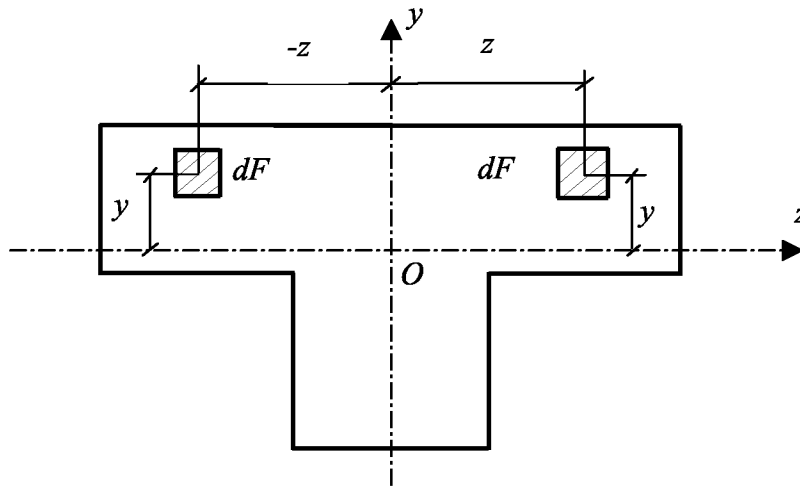


Рис.4.3

Полярный момент инерции всегда равен сумме осевых моментов инерции, т.е.

$$J_p = J_y + J_z$$

#### 4.4 Вычисление моментов инерции простых сечений

а) Прямоугольник.

Вычислим моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $z$  и  $y$ , совпадающих с осями симметрии (рис.4.4).

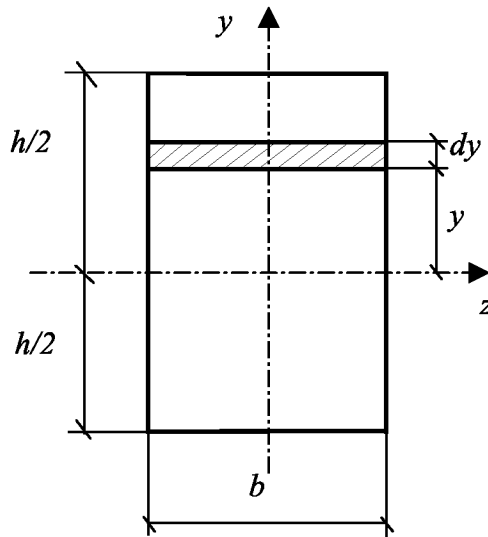


Рис.4.4.

Для вычисления  $J_z$  выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси  $z$ . При этом  $dF = b \cdot dy$  и

$$J_z = \int_F y^2 dF = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = 2b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Очевидно, что  $J_y = \frac{hb^3}{12}$ ,  $J_{zy} = 0$ .

Следовательно

$$\boxed{J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}}$$

формулы для вычисления моментов инерции прямоугольника.

б) Треугольник.

Определим  $J_{z_1}$  треугольника (рис. 4.5). Для этого выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси  $z_1$ , с площадью  $dF = b(y_1)dy_1$

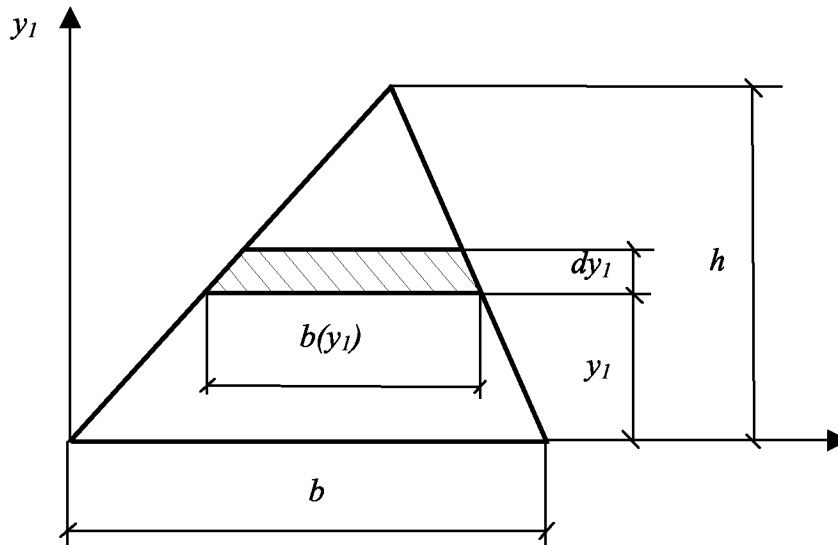


Рис.4.5

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{b(y_1)}{h - y_1} = \frac{b}{h}$$

Из этого соотношения находим  $b(y_1) = b\left(1 - \frac{y_1}{h}\right)$  и  $dF = b\left(1 - \frac{y_1}{h}\right)dy_1$ .

Подставим  $dF$  в формулу для  $J_{z_1}$  и выполним интегрирование

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = b \int_0^h \left(b - \frac{y_1}{h}\right) y_1^2 dy_1 = b \left( \frac{y_1^3}{3} - \frac{y_1^4}{4h} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12},$$

т.е.  $\boxed{J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}}$  - формула для вычисления осевого момента треугольника относительно основания.

в) Круг.

Вычислим полярный момент инерции круга (рис.4.6).

Выделим элементарную площадку в виде тонкого кольца толщиной  $d\rho$ . При этом  $dF = 2\pi\rho d\rho$  и

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

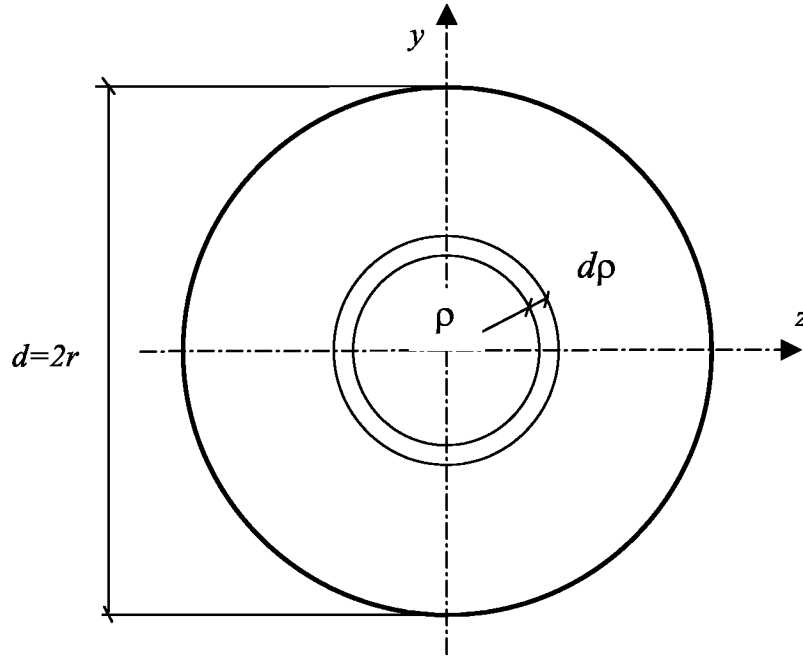


Рис.4.6

Далее, учитывая, что  $J_\rho = J_z + J_y$ , а  $J_z = J_y$  получим  $J_z = J_y = \frac{1}{2} J_\rho = \frac{\pi d^4}{64}$ . Таким образом, окончательно имеем формулы для вычисления моментов инерции круга:

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} J_\rho = \frac{\pi d^4}{64}, \quad J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

#### 4.5 Определение моментов инерции

##### при параллельном переносе координатных осей

Рассмотрим произвольное плоское поперечное сечение (рис.4.7)

Пусть  $zOy$  - произвольные центральные оси, а  $z_1O_1y_1$  - оси им параллельные. Определим  $J_{z_1}$ ,  $J_{y_1}$  и  $J_{z_1y_1}$ , если известны  $J_z$ ,  $J_y$  и  $J_{zy}$  - моменты инерции относительно центральных осей. Для этого

выразим координаты  $z_1$  и  $y_1$  произвольной площадки  $dF$  через координаты  $z$  и  $y$ . Имеем :

$$z_1 = z + a, \quad y_1 = y + b.$$

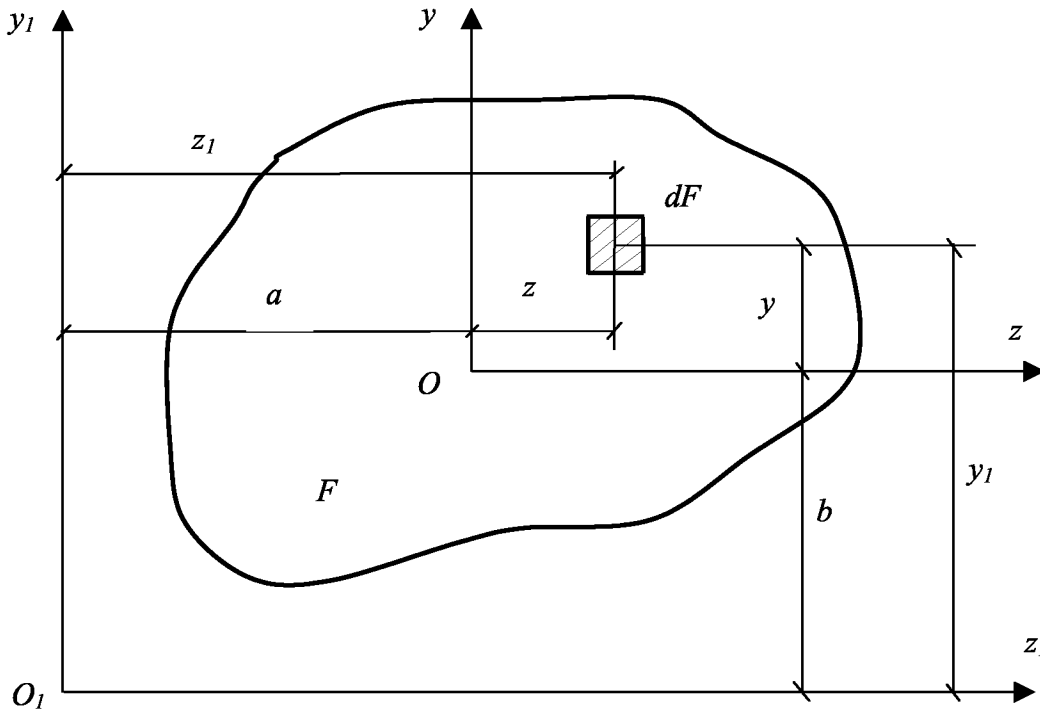


Рис.4.7

Подставим  $y_1$  в формулу для  $J_{z_1}$  и проинтегрируем:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + b)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF = J_z + 2bS_z + b^2 F,$$

но  $S_z = 0$  т.к. ось  $z$  - центральная. Поэтому  $J_{z_1} = J_z + Fb^2$ . Аналогично, находим  $J_{y_1} = J_y + Fa^2$  и  $J_{z_1 y_1} = J_{zy} + Fab$ . Таким образом, окончательно имеем формулы для определения моментов инерции при параллельном переносе координатных осей:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_z + Fb^2 \\ J_{y_1} &= J_y + Fa^2 \\ J_{z_1 y_1} &= J_{zy} + Fab \end{aligned}$$

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс произведение площади на квадрат расстояния между осями.

Центробежный момент инерции относительно произвольных координатных осей равен центробежному моменту инерции



относительно параллельных им центральных осей плюс произведение площади на координаты центра тяжести сечения в новых осях.

Из формул для  $J_{z_1}$  и  $J_{y_1}$  следует, что при  $a = 0$  и  $b = 0$  они имеют наименьшие значения. Следовательно, осевые моменты инерции относительно центральных осей имеют наименьшие значения.

В заключение рассмотрим пример. Определим осевой момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию (рис.4.8).

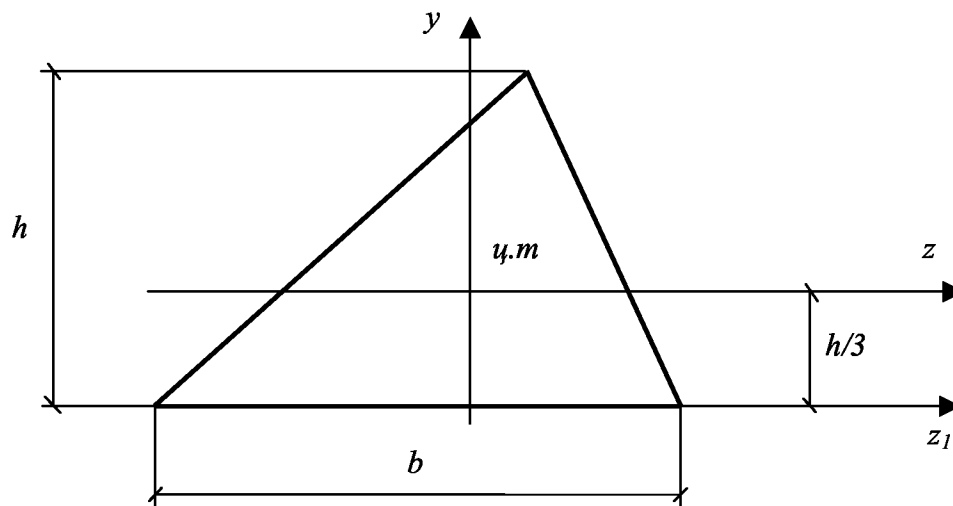


Рис.4.8

Вспользуемся формулой  $J_{z_1} = J_z + Fb^2$  но  $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$ , а  $b = \frac{1}{3}h$ , поэтому имеем:  $J_z = J_{z_1} - Fb^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{1}{2}bh\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$  т. е. осевой момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, определяется по формуле

$$J_z = \frac{bh^3}{36}$$

## 4.6 Определение моментов инерции при повороте координатных осей

Рассмотрим произвольное плоское сечение (рис.4.9).

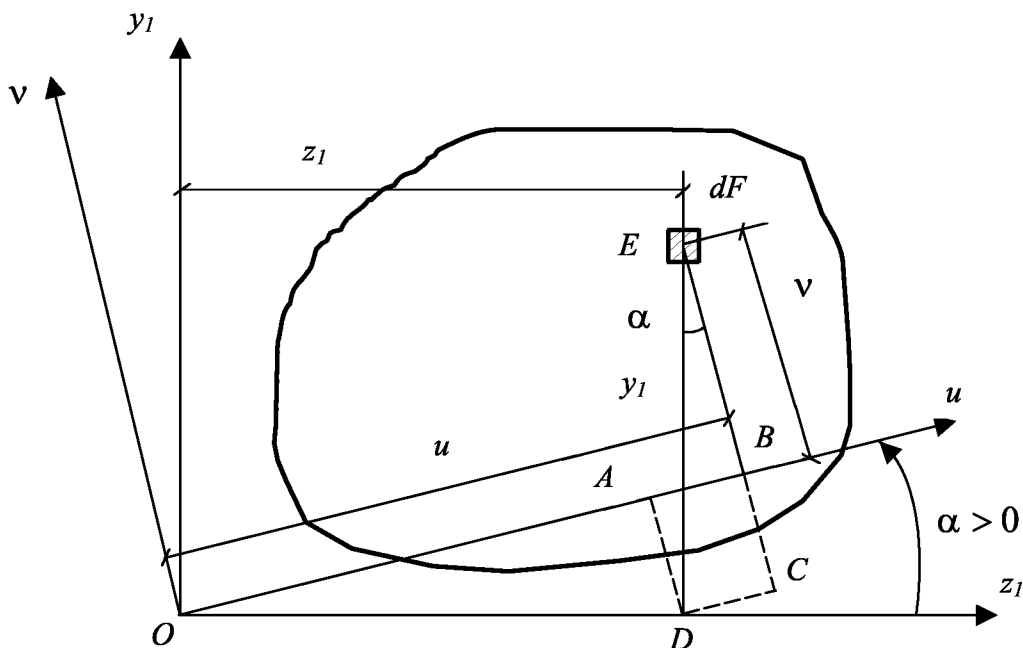


Рис.4.9

Пусть  $z_1O_1y_1$  - произвольные координатные оси, а  $uO_1v$  - повернутые оси на угол  $\alpha$ . Угол поворота  $\alpha$  будем считать положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки. Определим моменты инерции относительно повернутых осей, т.е.  $J_u$ ,  $J_v$  и  $J_{uv}$  если известны  $J_{z_1}$ ,  $J_{y_1}$  и  $J_{z_1y_1}$  - моменты инерции относительно исходных осей. Выразим координаты  $u$  и  $v$  произвольной элементарной площадки  $dF$  через координаты  $z_1$  и  $y_1$ . Из чертежа видно, что:

$$u = O_1A + AB = z_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha ;$$

$$v = EC - BC = y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha .$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y_1^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F z_1^2 dF - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F z_1 y_1 dF = \\ &= J_{z_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \sin^2 \alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha = \\ &= J_{z_1} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + J_{y_1} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} + \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha .$$

Аналогично можно получить формулы для определения  $J_v$  и  $J_{uv}$ .  
Окончательно имеем формулы для определения моментов инерции при повороте координатных осей:

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} + \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha \\ J_v &= \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} - \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha + J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha \\ J_{uv} &= \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Складывая первые две формулы, получим:

$$J_u + J_v = J_{z_1} + J_{y_1} = J_p$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции при повороте координатных осей не изменяется, т.е. является инвариантом.

#### 4.7 Главные оси и главные моменты инерции

Осевые моменты инерции  $J_u$  и  $J_v$  являются функциями угла поворота осей  $\alpha$ . Определим угол  $\alpha = \alpha_0$ , при котором осевые моменты инерции  $J_u$  и  $J_v$  достигают экстремальных значений. Запишем условия экстремума  $J_u$  и  $J_v$ :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_u}{d\alpha} &= -2 \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha - 2J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha = -2J_{uv} = 0 \\ \frac{dJ_v}{d\alpha} &= 2 \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + 2J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha = 2J_{uv} = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, осевые моменты инерции  $J_u$  и  $J_v$  достигают экстремальных значений одновременно при  $J_{uv} = 0$ , т.е. относительно главных осей. Так как  $J_u + J_v = const$ , то один из них достигает максимума, а другой - минимума. Определим положение главных осей

$$J_{uv} = \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha_0 = 0$$

Из этого условия получим формула для определения положения главных осей инерции

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2J_{z_1 y_1}}{J_{z_1} - J_{y_1}}$$

Эта формула определяет два значения острого угла  $\alpha$ , отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ , т.е. положение двух главных осей инерции.

Для определения главных моментов инерции необходимо в формулы для  $J_u$  и  $J_v$  подставить меньшее значение угла  $\alpha_0$ .

#### 4.8 Окружность инерции Мора

Все практические задачи на вычисление моментов инерции относительно повернутых осей удобно решать графическим способом при помощи окружности инерции Мора.

Исключим угол  $\alpha$  из формул:

$$J_u = \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} + \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha$$

$$J_{uv} = \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha$$

Возведем их в квадрат

$$\left( J_u - \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} \right)^2 = \left( \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - J_{z_1 y_1} \sin 2\alpha \right)^2$$

$$J_{uv}^2 = \left( \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_1 y_1} \cos 2\alpha \right)^2$$

и сложим

$$\left( J_u - \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} \right)^2 + J_{uv}^2 = \left( \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \right)^2 + J_{z_1 y_1}^2 - \text{окружность инерции Мора}$$

Обозначим через  $a = \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2}$ ,  $R = \sqrt{\left( \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} \right)^2 + J_{z_1 y_1}^2}$ ,  $J_u = x$ , а  $J_{uv} = y$

тогда полученное уравнение примет вид  $(x - a)^2 + y^2 = R^2$  - это уравнение окружности, центр которой лежит на оси  $x$  и сдвинут вправо на величину  $a$ .

Следовательно, моменты инерции относительно повернутых осей определяются координатами точек некоторой окружности, которая называется *окружностью инерции Мора*.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется определить для некоторого произвольного сечения (рис.4.10) моменты инерции

относительно повернутых осей  $u$  и  $v$ , если известны моменты инерции относительно исходных произвольных осей  $z_1$  и  $y_1$ .

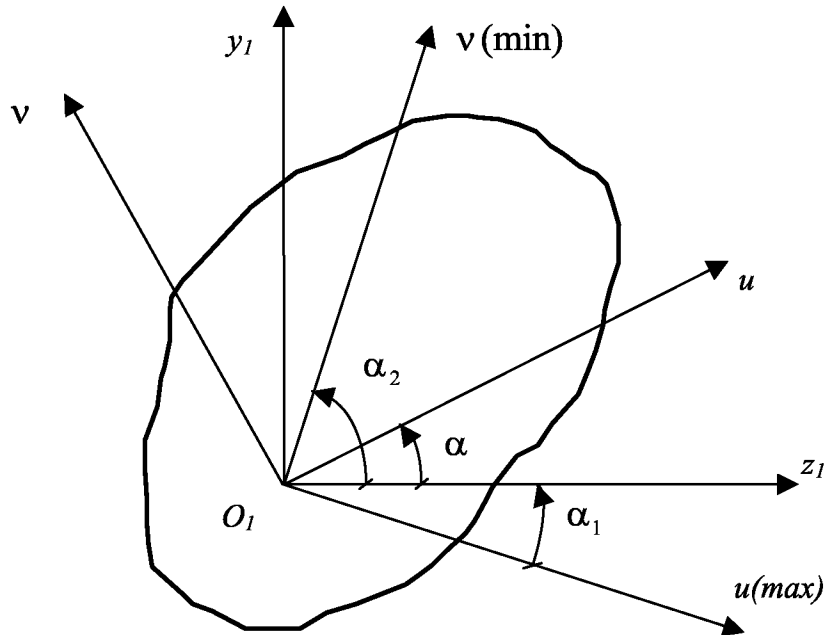


Рис.4.10

Предположим, что  $J_{z_1} > J_{y_1}$ , а  $J_{z_1 y_1} > 0$  и, откладывая осевые моменты инерции по оси абсцисс, а центробежные - по оси ординат, выполним следующие графические построения (рис.4.11):

1. Отложим в масштабе отрезки  $OD = J_{z_1}$  и  $DA = J_{z_1 y_1}$ ;  $OE = J_{y_1}$  и  $EB = -J_{z_1 y_1}$ . В результате получим соответственно точки  $A$  и  $B$ .

2. На  $AB$ , как на диаметре, построим окружность, которая является окружностью инерции Мора. Докажем это. Так как  $\angle AO_1 D = \angle BO_1 E$ , то

$$O_1 D = O_1 E = \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2}, AO_1 = BO_1 = \sqrt{O_1 D^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2}\right)^2 + J_{z_1 y_1}^2} = R,$$

$$OO_1 = OE + EO_1 = J_{y_1} + \frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2} = \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} = a.$$

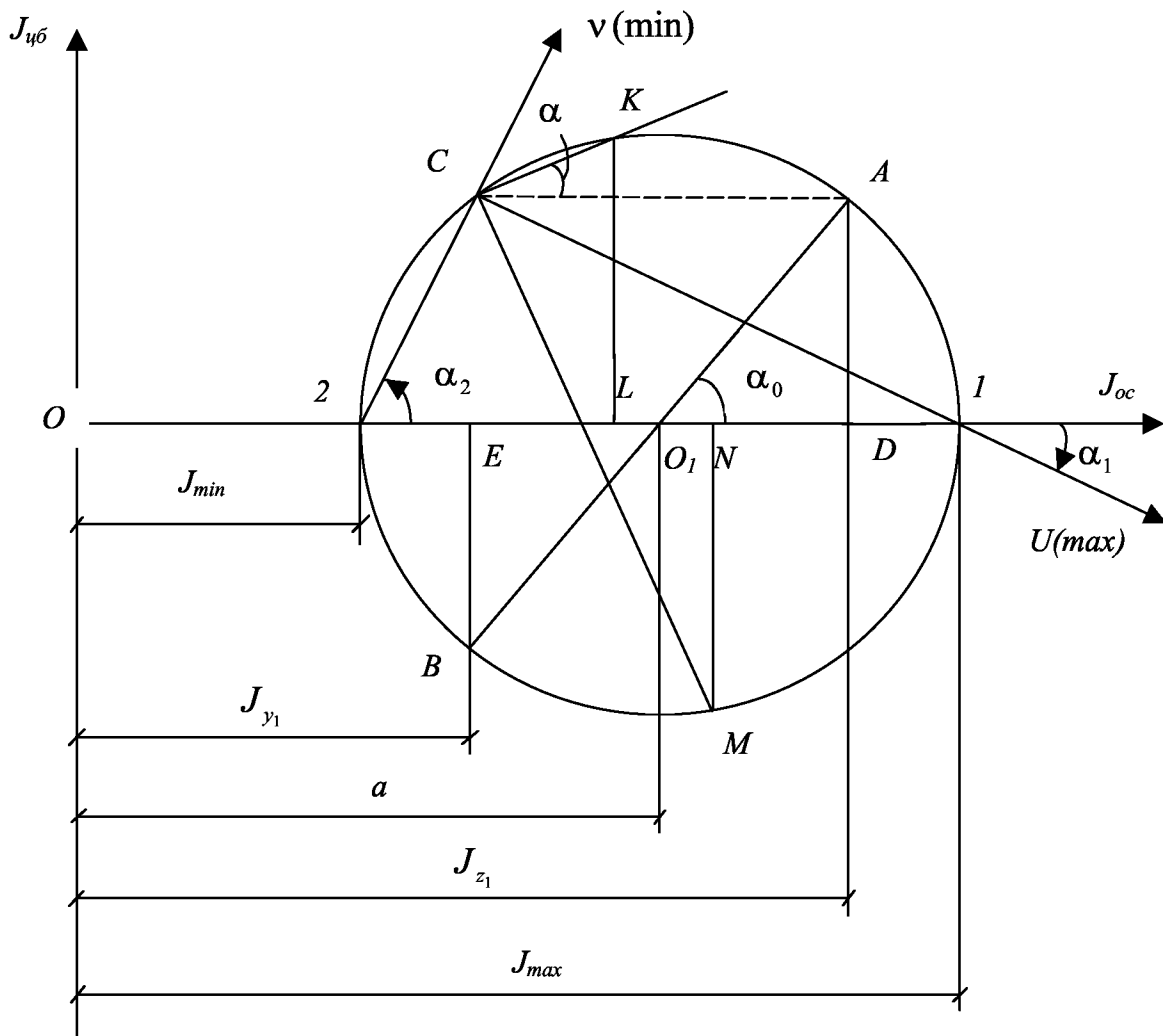


Рис.4.11

Следовательно, центр построенной таким способом окружности, сдвинут вправо на  $a$ , а радиус ее равен радиусу окружности инерции Мора, т.е. она является окружностью инерции Мора.

3. Проведем из точки  $A$  горизонтальную или из точки  $B$  вертикальную прямую до пересечения с окружностью в точке  $C$ , которая называется полюсом окружности инерции Мора. Полюс обладает следующим свойством. Если из полюса провести отрезок параллельно некоторой оси  $u$ , то он пересечет окружность в точке  $K$ , координаты которой равны моментам инерции:  $J_u = OL$ , а  $J_{uv} = KL$ .

Осевой момент инерции  $J_v$  определяется абсциссой точки пересечения луча  $CM \perp CK$  с окружностью, т.е.  $J_v = ON$ , а  $J_{uv} = -MN$ .

Окружностью инерции Мора удобно пользоваться так же для определения главных моментов инерции и положения главных осей. Главные моменты инерции на окружности изображаются точками 1 и 2, у которых ординаты равны нулю.

Имеем:

$$J_{\max} = O1 = OO_1 + R, \quad J_{\min} = O2 = OO_1 - R.$$

Учитывая то, что  $OO_1 = \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2}$ , а  $R = \sqrt{\left(\frac{J_{z_1} - J_{y_1}}{2}\right)^2 + J_{z_1 y_1}^2}$ , получим формулы для определения главных моментов инерции

$$J_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[ (J_{z_1} + J_{y_1}) \pm \sqrt{(J_{z_1} - J_{y_1})^2 + 4J_{z_1 y_1}^2} \right]$$

Главные оси инерции определяются направлениями отрезков  $C1$  и  $C2$ , т.е. углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  или углом  $\alpha_0$ . Из чертежа следует:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{-AD}{O_1 D} = \frac{-2J_{z_1 y_1}}{J_{z_1} - J_{y_1}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\frac{CE}{E1} = -\frac{CE}{D2} = -\frac{J_{z_1 y_1}}{J_{z_1} - J_{\min}} = \frac{J_{z_1 y_1}}{J_{\min} - J_{z_1}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{CE}{E2} = \frac{J_{z_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{\min}} = -\frac{J_{z_1 y_1}}{J_{\min} - J_{y_1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

*формулы для определения положения главных осей инерции:*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{-2J_{z_1 y_1}}{J_{z_1} - J_{y_1}} \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{J_{z_1 y_1}}{J_{\min} - J_{z_1}} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= -\frac{J_{z_1 y_1}}{J_{\min} - J_{y_1}} \end{aligned}$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - углы, образованные соответственно осью  $u(\max)$  и  $v(\min)$  с горизонтальной осью  $z_1$ .

#### 4.9 Порядок определения положения главных осей

##### и значения главных моментов инерции составных сечений

Проиллюстрируем его на конкретном составном сечении, состоящем из трех элементов: прямоугольника, швеллера и уголка (рис.4.12)

Рекомендуется следующий порядок выполнения вычислений:

1. Провести параллельные между собой собственные центральные оси для каждого элемента сечения  $z_i O_i y_i$ .

2. Определить геометрические характеристики каждого элемента сечения относительно собственных центральных осей, т.е.  $F_i$ ,  $J_{z_i}$ ,  $J_{y_i}$  и  $J_{z_i y_i}$ .

3. Провести произвольные оси  $z_0 O_0 y_0$ , параллельные осям  $z_i O_i y_i$ , и определить координаты центра тяжести каждого элемента сечения в этих осях, т.е.  $O_i(z_i^0; y_i^0)$ .

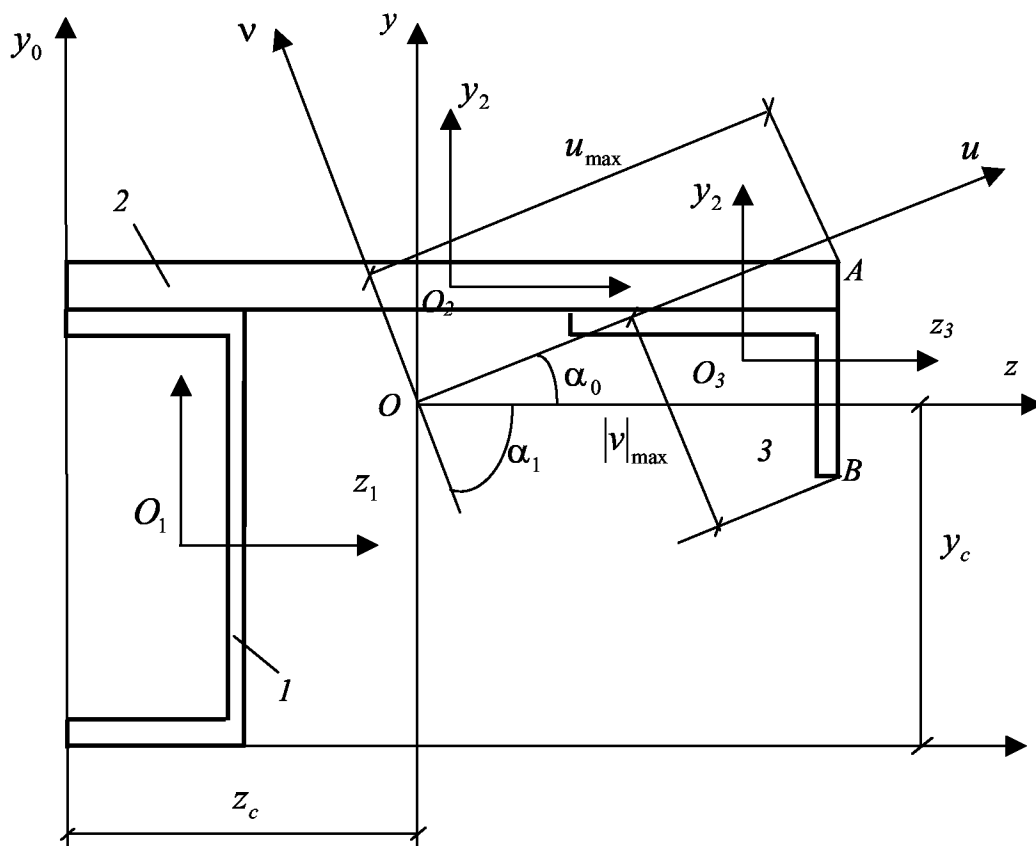


Рис.4.12

4. Определить положение центра тяжести составного сечения по формулам



$$z_c = \frac{S_{y_0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i^0}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_c = \frac{S_{z_0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i^0}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

5. Провести центральные оси  $zOy$ , параллельные осям  $z_iO_iy_i$  и определить координаты центра тяжести каждого элемента, т.е.  $O_i(a;b)$  по формулам

$$a_i = z_i^0 - z_c, \quad b_i = y_i^0 - y_c.$$

6. Вычислить моменты инерции составного сечения относительно центральных осей  $zOy$  по формулам

$$J_z = \sum_{i=1}^n (J_{z_i} + F_i b_i^2),$$

$$J_y = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + F_i a_i^2),$$

$$J_{zy} = \sum_{i=1}^n (J_{z_i y_i} + F_i a_i b_i).$$

7. Вычислить значения главных моментов инерции по формулам

$$J_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) \pm \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right].$$

8. Определить положения главных осей инерции по формулам

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2J_{zy}}{J_z - J_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{zy}}{J_{\min} - J_z}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{J_{zy}}{J_{\min} - J_y}.$$

9. Проверить правильность вычислений, т.е. убедиться, что:

$$\text{а) } J_{\max} + J_{\min} = J_z + J_y,$$

$$\text{б) } J_{uv} = 0,$$

$$\text{в) } \alpha_1 = \alpha_0 \text{ или } \alpha_2 = \alpha_0, \text{ или } |\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ$$

10. Построить окружность инерции Мора. Определить графически  $J_{\max}$ ,  $J_{\min}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и сравнить с результатами аналитического расчета.

11. Вычислить радиусы инерции и моменты сопротивления сечения по формулам :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} \text{ - радиусы инерции,}$$

$$W_u = \frac{J_u}{|v_{\max}|}, \quad W_v = \frac{J_v}{|u_{\max}|} \text{ - моменты сопротивления,}$$

где  $|v_{\max}|$  и  $|u_{\max}|$  - соответственно расстояние от оси  $u$  и  $v$  до крайней точки сечения.



Выделим из стержня на участке, где действует постоянная продольная сила, некоторую часть, длиной  $l$  и шириной  $b$  (рис.5.1в) и посмотрим, что происходит с ней при действии продольной силы  $N$ .

Опыты показывают (например, опыт с растяжением резинового стержня), что длина стержня увеличивается, а ширина - уменьшается. Пусть  $l_1$  и  $b_1$  - длина и ширина стержня после деформации.

Изменение длины стержня называется *абсолютной продольной деформацией*, т.е.

$$\boxed{\Delta l = l_1 - l} \quad - \text{ абсолютная продольная деформация.}$$

Отношение абсолютной продольной деформации к начальной длине называется *относительной продольной деформацией*, т.е.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}} \quad - \text{ относительная продольная деформация безразмерная).}$$

По аналогии с продольными деформациями:

$$\boxed{\Delta b = b_1 - b} \quad - \text{ называется абсолютной поперечной деформацией, а}$$

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}} \quad - \text{ называется относительной поперечной деформацией.}$$

При растяжении, когда  $N > 0$ ,  $\Delta l > 0$  и  $\varepsilon > 0$ , а  $\Delta b < 0$  и  $\varepsilon' < 0$ , а при сжатии ( $N < 0$ ) - наоборот  $\Delta l < 0$   $\varepsilon < 0$ , а  $\Delta b > 0$  и  $\varepsilon' > 0$ . Опыты показывают, что отношение  $\varepsilon'/\varepsilon$  не зависит от  $N$  и определяется только свойствами материала. Абсолютная величина этого отношения называется *коэффициентом Пуассона* (или поперечной деформации) и обозначается буквой  $\mu$

$$\boxed{\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \quad - \text{ коэффициент Пуассона.}$$

Коэффициент Пуассона - безразмерная величина, характеризующая способность материала деформироваться в поперечном направлении при растяжении или сжатии его в продольном направлении. Для реальных материалов он изменяется в очень узких пределах  $\mu = 0 \div 0.5$ . Для пробки  $\mu$  близок

к нулю, а для каучука - к 0.5. Для различных марок сталей он изменяется в пределах  $\mu = 0.25 \div 0.3$ .

Значение коэффициента Пуассона определяется опытным путем в результате специальных испытаний материала.

## 5.2 Напряжения при растяжении и сжатии

Сделаем поперечное сечение  $n-n$  (рис.5.1в). Отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие нижней (рис.5.2). Внутренние силы, действующие в сечении  $n-n$ , уравнивают продольную силу  $N$ , поэтому должны быть параллельны ей. Так как  $p \perp n-n$ , то  $\tau = 0$ , а  $p = \sigma$ . Из условия равновесия  $\sum X = N - \int_F \sigma dF = 0$  имеем  $N = \int_F \sigma dF$ .

Определить внутренние силы ( $\sigma$ ) из этого уравнения невозможно, т.к. неизвестен закон распределения их по сечению. Для выяснения этого закона обратимся к эксперименту (растянем резиновый стержень с нанесенными на его поверхности поперечными параллельными линиями). Эксперимент показывает, что в сечениях достаточно удаленных от мест приложения сосредоточенных сил, напряжения распределяются по сечению равномерно (рис.5.1а). Рассмотрим случай, когда  $\sigma = const$  по  $F$ . При этом из уравнения  $N = \int_F \sigma dF$  получим формулу для определения напряжений при растяжении и сжатии

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

где  $N$  - продольная сила;

$F$  - площадь поперечного сечения стержня.

Теперь рассмотрим произвольное наклонное сечение  $n-m$  (рис.5.1в). Положение его будем определять углом  $\alpha$  ( $\alpha$  - угол между осью стержня и внешней нормалью  $\nu$  к сечению;  $\alpha > 0$ , если нормаль поворачивается против часовой стрелки). Продольную силу  $N$  уравнивают параллельные ей полные напряжения  $p_\alpha$ , действующие в сечении  $n-m$  (рис.5.3).

Составим условие равновесия:

$$\sum X = N - \int_{F_\alpha} p_\alpha dF_\alpha = 0$$

полагая  $p_\alpha = const$ , из этого условия получим:

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha}, \text{ но } F_\alpha = \frac{F}{\cos \beta},$$

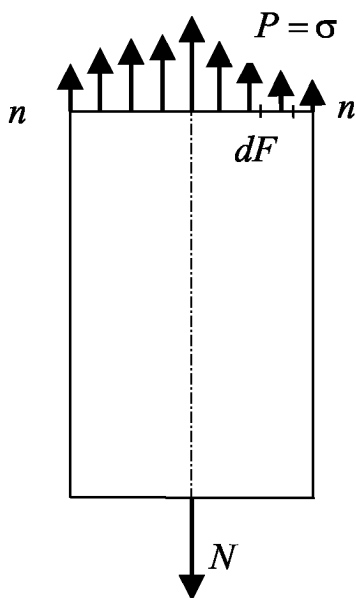


Рис.5.2

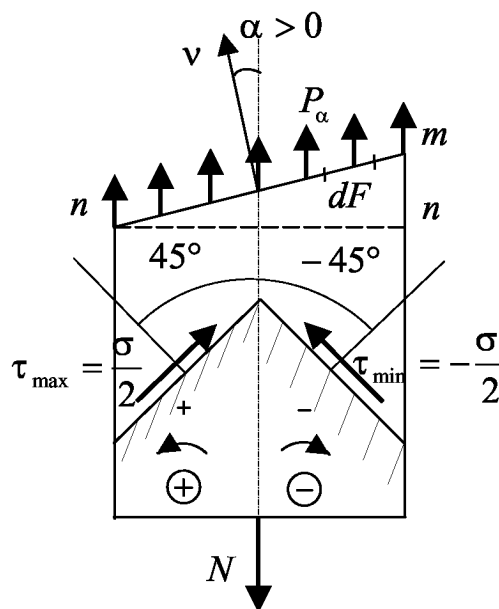


Рис.5.3

ПОЭТОМУ  $p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$ .

Составляющие полного напряжения  $p_\alpha$  (рис.5.5) будут равны:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

Таким образом, имеем формулы для определения напряжений на произвольных площадках при растяжении или сжатии

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha, \quad \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Определим  $\alpha$ , при которых напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  достигают экстремальных значений. Имеем

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma \cos \alpha \sin \alpha = -\sigma \sin 2\alpha = -2\tau_\alpha = 0 \quad \text{- условие экстремума } \sigma_\alpha.$$

Следовательно, нормальные напряжения достигают экстремальных значений на площадках, где  $\tau_\alpha = 0$ .

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными, а нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются *главными напряжениями*. Положение главных площадок определяется уравнением,

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = 0 \text{ т.е. } \sin 2\alpha = 0 \text{ Откуда находим } \alpha_1 = 0 \text{ и } \alpha_2 = 90^\circ.$$

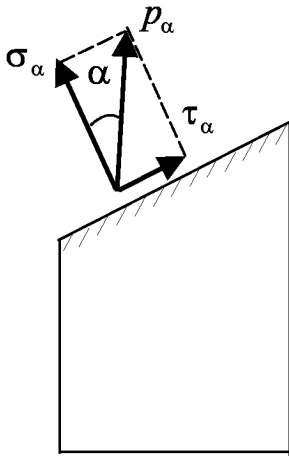


Рис.5.4

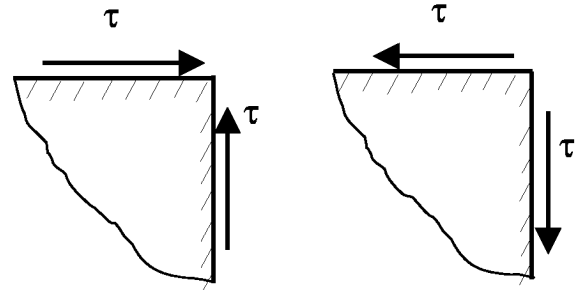


Рис.5.5

Очевидно

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sigma, \quad \sigma_{\min} = \sigma_{\alpha} \Big|_{\alpha=90^\circ} = 0 \text{ - главные напряжения.}$$

Следовательно, при растяжении и сжатии нормальные напряжения достигают наибольших (по абсолютной величине) значений в поперечных сечениях стержня. Запишем условие экстремума  $\tau$

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = \sigma \cos 2\alpha = 0$$

Отсюда находим  $\alpha = \pm 45^\circ$ . Очевидно, что

$\tau_{\max} = \tau_{\alpha} \Big|_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma}{2}$ ,  $\tau_{\min} = \tau_{\alpha} \Big|_{\alpha=-45^\circ} = -\frac{\sigma}{2}$  - экстремальные касательные напряжения. Следовательно, при растяжении или сжатии касательные напряжения достигают наибольшего (по абсолютной величине) значения, равного -  $\frac{\sigma}{2}$ , на площадках, составляющих с осью стержня углы  $\pm 45^\circ$  (рис. 31). Из рисунка видно, что на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Это свойство называется *законом парности касательных напряжений*. В силу закона парности касательных напряжений они всегда направлены либо к ребру, либо от ребра (рис.5.5а,б).

### 5.3. Испытание материалов на растяжение

Прочность элементов конструкций и деталей машин в значительной мере определяется механическими свойствами материала, из которого они изготовлены. Эти свойства определяются путем испытаний материалов в специальных

лабораториях, оборудованных разрывными машинами и приборами для измерения малых деформаций. Испытания выполняются при статических или динамических нагрузках и различных деформациях: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб.

При статических нагрузках наиболее достоверные механические характеристики материала можно получить в результате испытания его на растяжение.

Испытания на растяжение выполняются на стандартных круглых или плоских образцах, вырезанных из испытуемого материала. Рекомендуется использовать для испытаний 10-ти кратные образцы, у которых отношение  $l_0/d_0 = 10$ . Размеры нормального 10-ти кратного круглого образца приведены ниже на рис.5.6

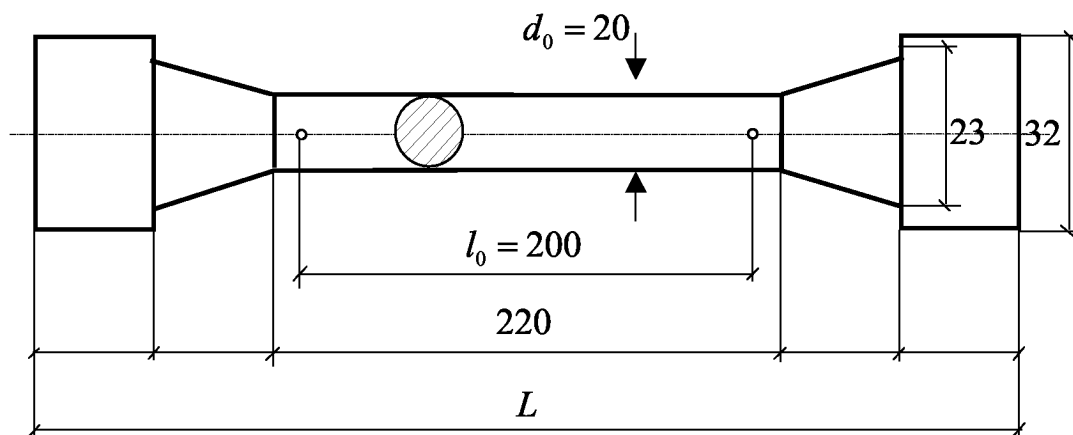


Рис. 5.6

Для плоского 10-ти кратного образца длина рабочей части определяется по формуле  $l_0 = 11,3\sqrt{F_0}$ , а отношение  $b/h$  рекомендуется принимать равным 3. Он изображен на рис.5.7

С целью экономии материала допускается применение 5-ти кратных и пропорциональных образцов, т.е. таких, размеры которых в 2, 3, 4 и т.д. раза меньше размеров нормального 10-ти или 5-ти кратного образца. Применение нестандартных образцов для испытаний не рекомендуется потому, что некоторые механические характеристики зависят от формы образца.

Подготовленный образец вставляется в захваты испытательной машины и растягивается статически до разрушения (рис.5.8). В результате испытаний машина вычерчивает график

$P = f(\Delta l)$  который называется *диаграммой растяжения*. Характер диаграммы растяжения зависит от свойств испытуемого материала. Например, для малоуглеродистой стали она приведена на рис.5.9.

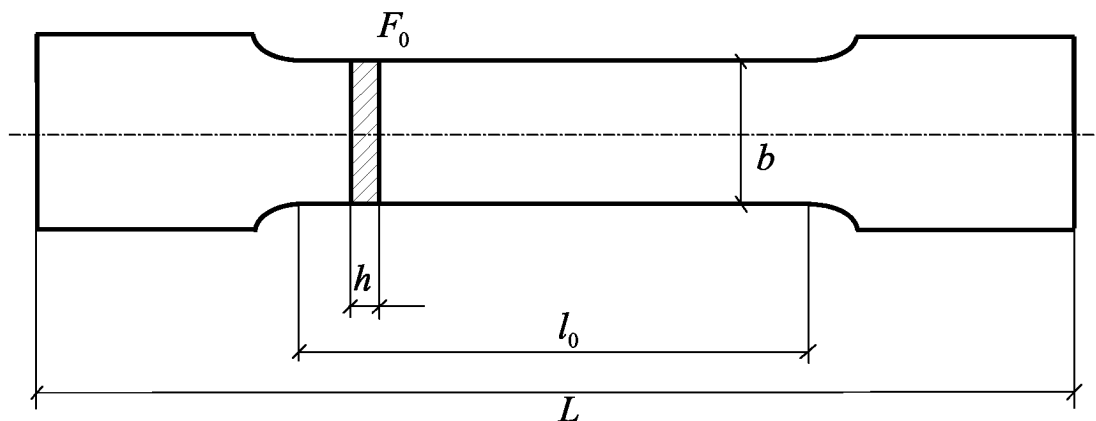


Рис.5.7

На диаграмме растяжения можно выделить следующие характерные участки:

ОА - участок пропорциональности. На этом участке абсолютное удлинение образца пропорционально нагрузке.

ОАВ - участок упругости. На этом участке деформации образца будут упругими, т.е. будут полностью исчезать при разгрузке.

ВСД - участок текучести. Горизонтальная часть его СД называется площадкой текучести. На этой стадии растяжения образец удлиняется при постоянной силе. Такой процесс деформирования материала называется текучестью.

ДЕ - участок упрочнения. Последний участок ЕР названия не имеет.

Обозначим наибольшие значения растягивающих сил на каждом участке соответственно через  $P_{тц}$ ,  $P_{уп}$ ,  $P_T$  и  $P_{max}$ . Сила в момент разрыва образца  $P_p < P_{max}$ , почему? При  $P < P_{max}$  образец удлинялся и уменьшался незначительно в поперечных размерах по всей длине равномерно до некоторой площади  $F_y$ . При дальнейшем растяжении его в слабом месте происходит интенсивный рост деформаций, что приводит к местному сужению в виде шейки с площадью  $F_{ш} \ll F_0$  и к падению нагрузки.

Если нагрузку довести до некоторого значения  $P > P_{уп}$  например, до точки М, а затем разгрузить образец, то это



изобразится на диаграмме линией  $MN$   $OA$ . Следовательно, при разгрузке образца из общей деформации  $OK$  часть  $NK$  -исчезает, а часть  $ON$  остается, т.е. полная деформация за пределом упругости состоит из двух частей: упругой  $\Delta l_y$  и пластической  $\Delta l_{nl}$ , т.е.

$$\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_{nl}.$$

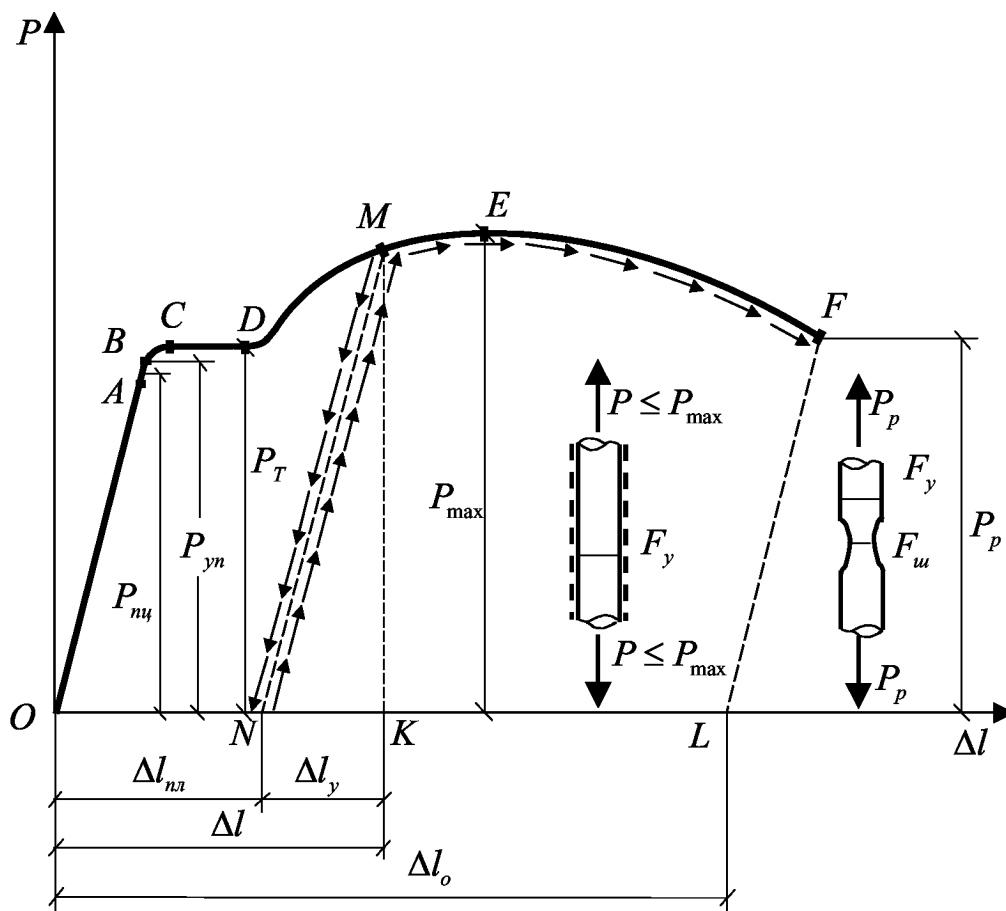
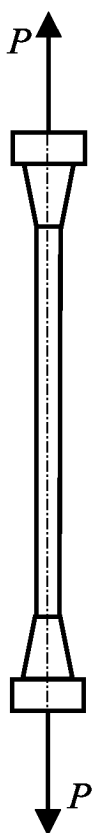


Рис.5.8

Рис.5.9

Поэтому после разрыва образца упругая деформация исчезает ( $FL \parallel OA$ ), а пластическая - изобразится отрезком  $OL$ . Следовательно  $OL = \Delta l_o$  - пластическая (остаточная) деформация образца в момент разрыва.

При повторном нагружении диаграмма растяжения пойдет по линии  $NMEF$ , т.е. упругие свойства материала повысятся. Повышение упругих свойств материала путем предварительного пластического деформирования его называется *наклепом*. Наклеп часто используется в технике для упрочнения материалов (вытяжка тросов и проволоки, прокатка листовой меди или латуни и т.д.). В некоторых случаях явление наклепа оказывается нежелательным,

например, при штамповке. С наклепом в таких случаях ведут борьбу путем отжига и других технологических операций.

Если в диаграмме растяжения разделить все ординаты на первоначальную площадь сечения  $F_0$ , а абсциссы - на расчетную длину  $l_0$ , то получим график  $\sigma = f(\epsilon)$  который называется диаграммой условных напряжений (рис.5.10). Очевидно, что диаграмма условных напряжений подобна диаграмме растяжения, так как  $F_0 = const$  и  $l_0 = const$ .

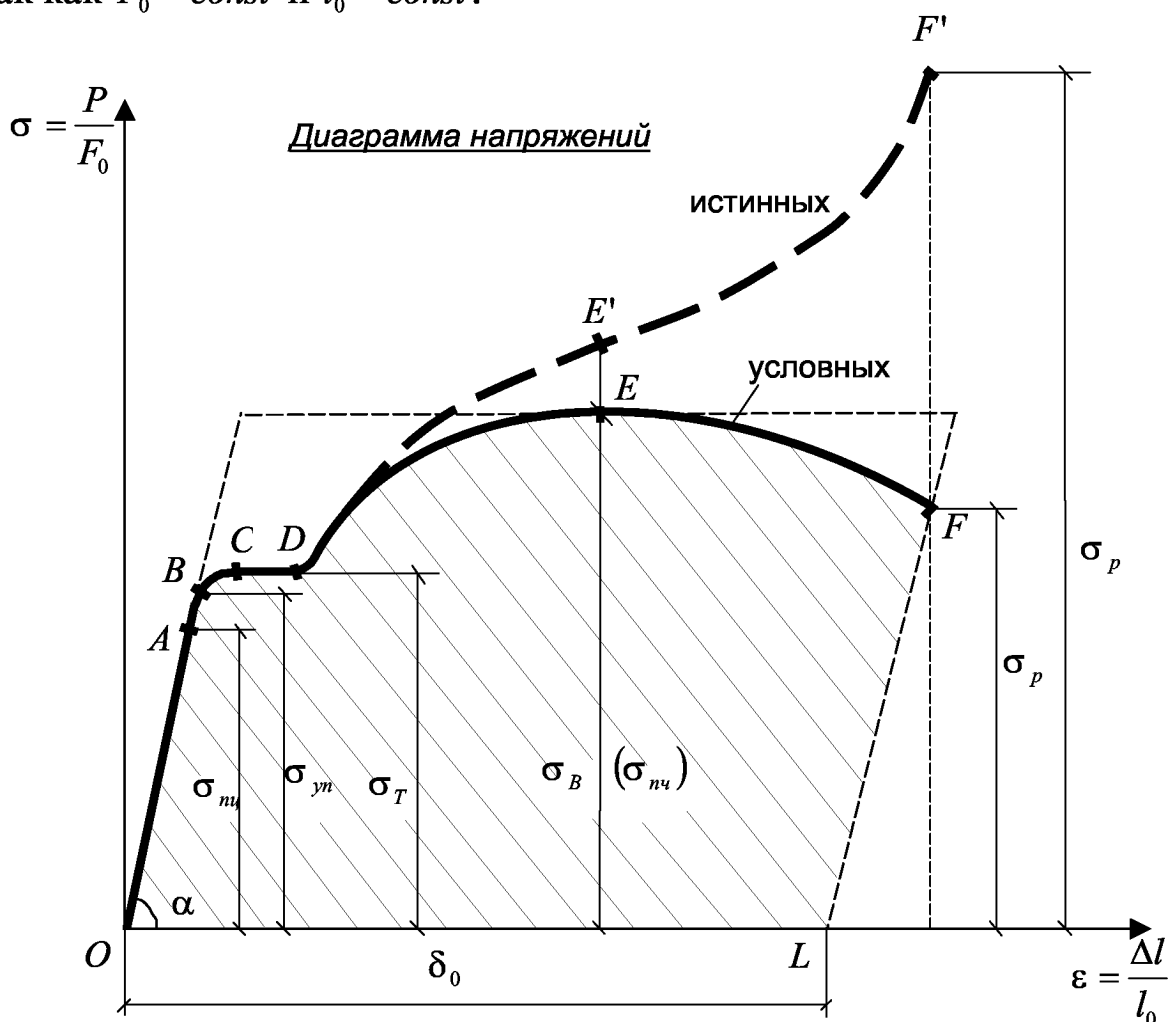


Рис.5.10

Наибольшие условные напряжения на характерных участках диаграммы называются *характеристиками прочности материала*:

$$\sigma_{mц} = \frac{P_{mц}}{F_0} - \text{предел пропорциональности};$$

$$\sigma_{уп} = \frac{P_T}{F_0} - \text{предел упругости};$$

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0} - \text{предел текучести};$$

$$\sigma_B = \frac{P_{\max}}{F_0} - \text{временное сопротивление или предел}$$

прочности ( $\sigma_{пч}$ )

Основными из них являются:

$\sigma_T$  - предел текучести - условное напряжение при котором материал деформируется без увеличения нагрузки;

$\sigma_B$  - временное сопротивление (или предел прочности  $\sigma_{пч}$ ) - наибольшее условное напряжение за время испытаний.

$\sigma_P < \sigma_B$  потому, что на участке  $EF$  истинная площадь образца (после образования шейки) значительно меньше первоначальной площади  $F_0$ .

Поэтому для вычисления истинных напряжений надо силы делить на площадь поперечного сечения образца в данный момент испытания. Учитывая это, получим истинные сопротивления материала при наибольшей нагрузке и в момент разрыва образца

$$\sigma_B^И = \frac{P_{\max}}{F_y} > \sigma_B \text{ и } \sigma_P^И = \frac{P_P}{F_{III}} \gg \sigma_P$$

Если отложить эти напряжения на диаграмме, то участку  $EF$  окажется восходящим  $E'F'$

Исправленная таким способом диаграмма называется *диаграммой истинных напряжений*. Из нее следует, что напряжения в материале непрерывно возрастает вплоть до разрушения.

Способность материала выдерживать большие остаточные деформации не разрушаясь называется *пластичностью*. В качестве характеристик пластичности материала используют:

$\delta_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100\%$  - относительное остаточное удлинение образца в момент разрыва;

$$\psi = \frac{F_0 - F_{III}}{F_0} 100\% - \text{относительное сужение площади образца};$$

$a = \omega_{OADEFL} = \eta \sigma_B \delta_0$  - удельная работа деформаций, затраченная на разрушение образца.

Здесь  $\eta = \frac{\omega_{OADEFL}}{\omega_{OAF'L}}$  - коэффициент полноты диаграммы.

Для малоуглеродистых сталей он равен 0,85.

В зависимости от величины характеристик пластичности все материалы можно условно разделить на:

- а) пластические, если  $\delta_0 > 5\%$
- б) хрупкие, если  $\delta_0 < 5\%$

На участке пропорциональности ОА зависимость  $\sigma = f(\epsilon)$ -линейная. Уравнение ее можно записать в виде:

$$\boxed{\sigma = E\epsilon} \text{ - закон Гука (1635 - 1703).}$$

Коэффициент пропорциональности между  $\sigma$  и  $\epsilon$  в законе Гука, т.е.  $E = \operatorname{tg}\alpha$  называется *модулем упругости или модулем Юнга*. Модуль Юнга имеет размерность напряжения ( $H/m^2$ , МПа,  $кг/см^2$  и т. д.). Для реальных строительных материалов он изменяется в очень широких пределах, от 8 МПа - для каучука до  $2 \cdot 10^5$  МПа - для стали, т.е.

$$E = 8 \div 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Модуль упругости  $E$  определяется опытным путем в результате специальных лабораторных испытаний. Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  полностью определяют деформативные свойства изотропных материалов.

При растяжении или сжатии  $\sigma = \frac{N}{F}$ , а  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , поэтому закон Гука можно записать в виде

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF}} \text{ - формула для определения абсолютных деформаций при растяжении или сжатии.}$$

Произведение  $EF$  - называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении или сжатии. Для материалов, у которых диаграмма напряжений не имеет площадки текучести (рис.5.11), предел текучести определяется условно как напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,2% и обозначается через  $\sigma_{0,2}$

#### 5.4 Концентрация напряжений

Проведем следующий простой опыт. Нанесем на резиновую модель стержня, толщиной  $h$  и шириной  $b$  с отверстием диаметром  $d$ , через равные промежутки ряд параллельных между собой поперечных линий и растянем его осевыми силами. Опыт показывает, что расстояния между линиями у отверстия

увеличиваются больше, чем вдали от него. Следовательно, у отверстия деформации будут больше, а, так как по закону Гука  $\sigma = E\varepsilon$ , то и напряжения будут больше.

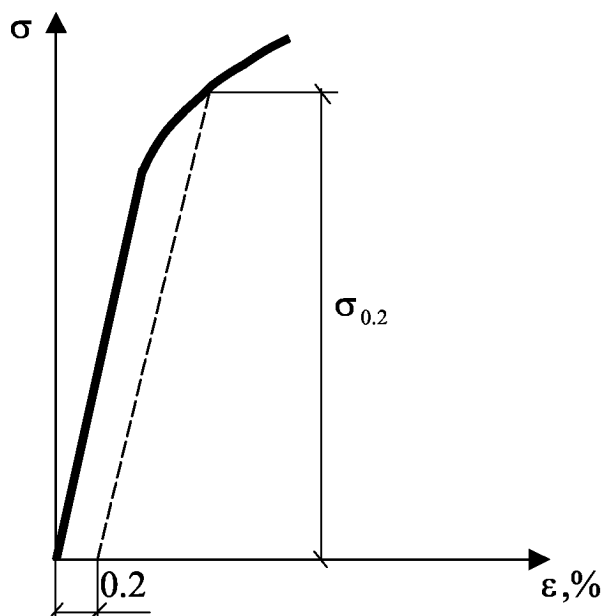


Рис.5.11

Повышение напряжений в местах резкого изменения площади или формы поперечного сечения стержня называется *концентрацией напряжений* (рис.5.12). Причины, вызывающие концентрацию напряжений, называются *концентраторами*. Ими могут быть (рис.5.13) отверстия, выточки, галтели, трещины и т.д.

Следует заметить, что существенное повышение напряжений происходит только в ограниченной области, расположенной непосредственно у концентратора напряжений. Поэтому их часто называют местными напряжениями. Величина максимальных местных напряжений  $\sigma_{\max}$  зависит, в основном, от вида концентратора напряжений и радиуса  $r$  сопряжения отдельных участков стержня. С увеличением  $r$   $\sigma_{\max}$  уменьшается.

Для количественной оценки концентрации напряжений обычно используют отношение

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H} \quad - \quad \text{теоретический коэффициент концентрации}$$

*напряжений*, где  $\sigma_{\max}$  - максимальное местное напряжение;

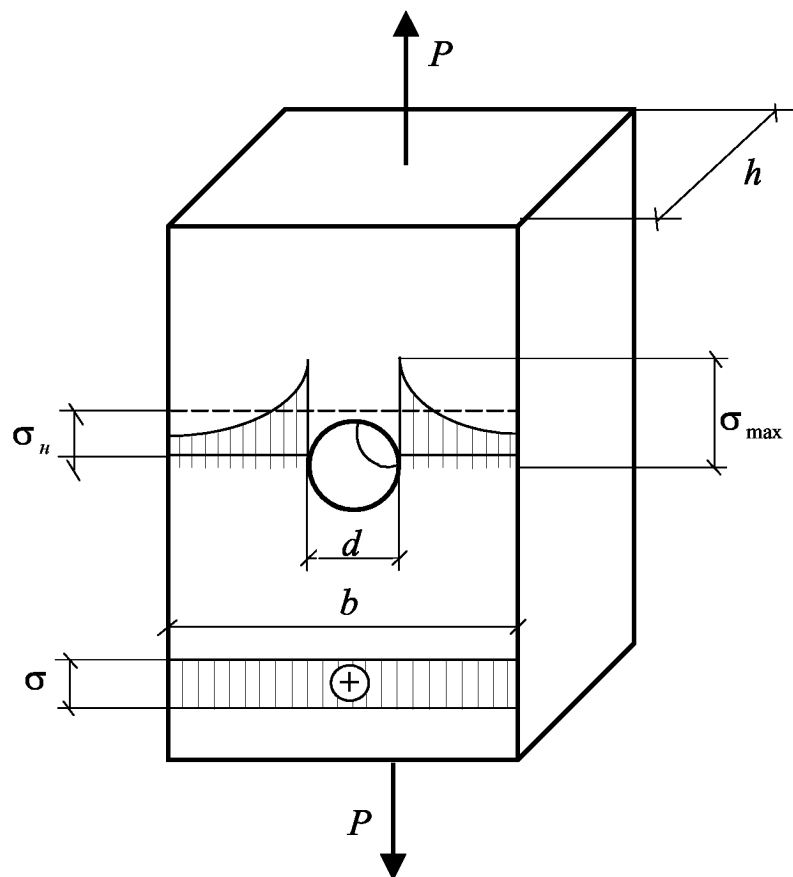


Рис.5.12

$\sigma_n = \frac{P}{h(b-d)}$  - номинальное (среднее) напряжение в ослабленном сечении.

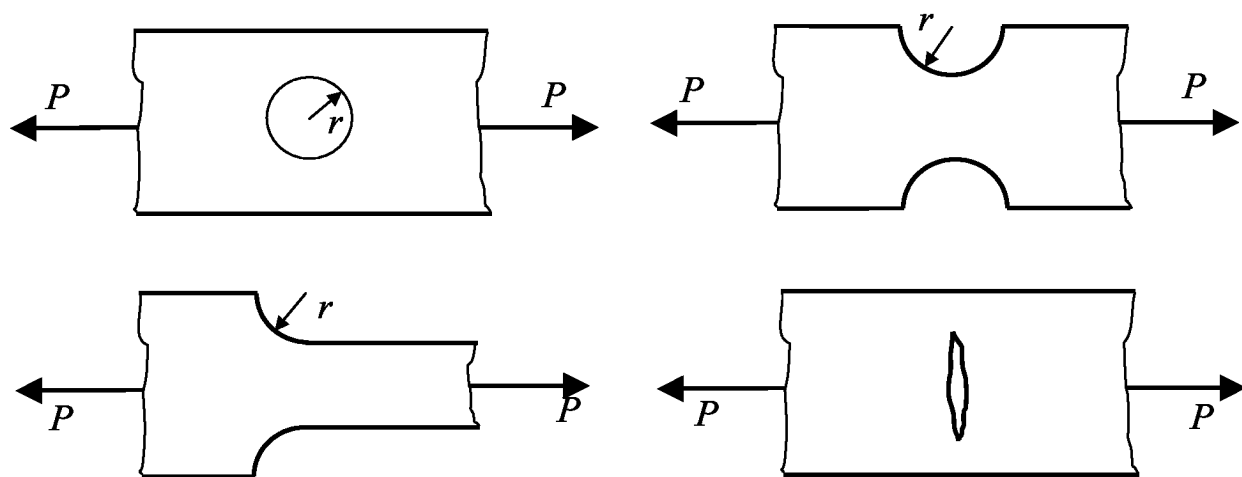


Рис.5.13

Коэффициент  $\alpha_\sigma$  определяется теоретически - методами теории упругости, или опытным путем, в результате точных

измерений деформаций. Значение его приводится в справочниках и учебниках в виде графиков и таблиц для наиболее часто встречающихся в практике концентраторов напряжений.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$  не учитывает влияния свойств реальных материалов. Учесть их можно с помощью, так называемого, *эффективного коэффициента концентрации напряжений*

$$K_\sigma = \frac{P_1}{P_2} ,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  - разрушающие нагрузки образца соответственно без концентратора и с концентратором напряжений.

Эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_\sigma$  определяется только опытным путем.

Концентрация напряжений является вредным явлением в технике. Именно она является причиной разрушения многих машин и инженерных сооружений. Поэтому при расчете деталей машин на прочность с ней надо считаться. По возможности следует избегать глубоких выточек, резких изменений сечений. Надо тщательно обрабатывать поверхности деталей и тем лучше, чем прочнее материал из которого они изготовлены. Даже мелкие следы от шлифовального круга могут снизить предел прочности твердо закаленной стали на 10 ÷ 20%.

Особо опасна концентрация напряжений для хрупких однородных материалов при любых нагрузках. Для них  $K_\sigma = \alpha_\sigma$ . Для пластических материалов, у которых диаграмма растяжения имеет площадку текучести, концентрация напряжений опасна только при действии динамических и знакопеременных нагрузок. При статических нагрузках рост максимальных местных напряжений приостанавливается, как только они достигнут предела текучести  $\sigma_T$ . Это приводит к выравниванию напряжений в ослабленном сечении. Следовательно, такие материалы мало чувствительны к концентрации напряжений. Для них эффективный коэффициент концентрации напряжений близок к единице.

## 5.5 Допускаемые напряжения.

### Расчеты на прочность по допускаемым напряжениям

Испытания материалов на растяжение показывают, что в пластических материалах появляются большие остаточные деформации, когда напряжения достигают предела текучести  $\sigma_T$ . Разрушение же материала наступает, когда напряжения достигают временного сопротивления  $\sigma_B$ .

В деталях машин остаточные деформации, как правило, не допускаются. Поэтому появление в деталях машин напряжений, равных пределу текучести материала  $\sigma_T$  или временному сопротивлению  $\sigma_B$  является опасным для их эксплуатации. Поэтому сами напряжения  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$  тоже называют опасным и обозначают через  $\sigma_{оп}$ . Следовательно,

$$\sigma_{оп} = \sigma_T - \text{для пластических материалов;}$$

$$\sigma_{оп} = \sigma_B - \text{для хрупких материалов.}$$

Очевидно, для надежной и долговечной работы деталей машин и элементов конструкций необходимо потребовать, чтобы выполнялось *условие прочности*

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_{оп}}{n},$$

где  $\sigma_{\max}$  - максимальное рабочее напряжение;

$\sigma_{оп}$  - опасное напряжение для материала;

$n$  - коэффициент запаса прочности.

Правая часть условия прочности обозначается буквой  $[\sigma]$  и называется допускаемым напряжением

$$\frac{\sigma_{оп}}{n} = [\sigma]$$

Выбор коэффициента запаса прочности является самой ответственной задачей любого расчета на прочность. От правильного выбора его зависит прочность, надежность и экономичность машин и конструкций. Поэтому назначением коэффициентов запаса прочности занимаются специальные государственные нормирующие организации. Они издаются соответствующие нормы (ГОСТы), которыми следует руководствоваться при выполнении расчетов на прочность.

В случае отсутствия этих норм при назначении коэффициента запаса прочности необходимо учитывать следующие факторы:

а) неоднородность материала;



- б) неточность определения внешних сил;
- в) приближенность методов расчета;
- г) характер разрушения (хрупкий или пластичный);
- д) характер изменения нагрузки во времени;
- ж) концентрацию напряжений;
- з) условия работы машины или сооружения;
- к) развитие сопротивления материалов и смежных наук;
- л) экономику и состояние страны.

Первые четыре фактора учитываются всегда. Они называются основными, а коэффициент запаса прочности, учитывающий их, называется основным. Основной коэффициент запаса прочности  $n$  в значительной мере зависит от характера разрушения материала, т.е. от того, что принято за опасное напряжение.

Если  $\sigma_{оп} = \sigma_T$ , то  $n = n_T$ , а если  $\sigma_{оп} = \sigma_B$ , то  $n = n_B$ . При этом допускаемые напряжения могут быть определены по формулам

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \text{ - для пластических материалов;}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B} \text{ - для хрупких материалов,}$$

где  $n_T$  и  $n_B$  - коэффициент запаса прочности соответственно по текучести и по временному сопротивлению.

При статических нагрузках, отсутствии концентрации напряжений и нормальных условиях работы рекомендуется принимать  $n_T = 1,4 \div 1,6$  а  $n_B = 2,5 \div 3$ . Для малоуглеродистой стали  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ , поэтому, если принять  $n_T = 1,5$ , то допускаемое напряжение будет равно

$$[\sigma] = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа.}$$

Хрупкие материалы лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению. Поэтому допускаемые напряжения на растяжение и сжатие будут различны. Их обозначают так:

$[\sigma_+]$  - допускаемое напряжение на растяжение;

$[\sigma_-]$  - допускаемое напряжение на сжатие.

Для пластических материалов  $[\sigma_+] = [\sigma_-] = [\sigma]$ , т.е. обозначают допускаемое напряжение без знака в скобках.

Таким образом, прочность деталей будет обеспечена, если выполняются условия прочности:

$$\boxed{\begin{matrix} \sigma_{\max} \leq [\sigma_+] \\ |\sigma_{\min}| \leq [\sigma_-] \end{matrix}} \quad - \text{ для хрупких материалов,}$$

$$\boxed{|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]} \quad - \text{ для пластических материалов.}$$

При растяжении или сжатии  $\sigma = \frac{N}{F}$ , поэтому приведенные выше условия прочности можно записывать в виде:

$$\boxed{\frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma_+] \text{ и } \frac{|N_{\min}|}{F} \leq [\sigma_-]} \quad - \text{ для хрупких материалов,}$$

$$\boxed{\frac{|N_{\max}|}{F} \leq [\sigma]} \quad - \text{ для пластических материалов.}$$

В зависимости от исходных данных все расчеты на прочность делятся на проектировочные и проверочные. *Расчет называется проектировочным*, если при известных нагрузках и материале из условий прочности определяются необходимые размеры поперечных сечений элементов.

Если сечения элементов, нагрузка и материал известны и в результате расчета проверяется выполнение условий прочности, то такие *расчеты называются проверочными*.

### 5.6 Учет влияния собственного веса

Рассмотрим призматический стержень (рис.5.14), нагруженный осевой силой  $P$  и собственным весом ( $\gamma$  - объемный вес материала). Определим абсолютное удлинение стержня  $\Delta l$ . Так как  $N_{(x)} = P + F\gamma x \neq const$ , то воспользоваться законом Гука  $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$  нельзя. Выделим элемент длиной  $dx$ . Изменением  $N$  на длине  $dx$  можно пренебречь, поэтому

$$d(\Delta l) = \frac{N_{(x)} dx}{EF}, \text{ а}$$

$$\Delta l = \int_0^l d(\Delta l) = \frac{1}{EF} \int_0^l (P + F\gamma x) dx = \frac{1}{EF} \left( Px + \frac{1}{2} F\gamma x^2 \right) \Big|_0^l = \frac{1}{EF} \left( Pl + \frac{1}{2} F\gamma l^2 \right)$$

т.к.  $F\gamma l = G$ , то формула для определения абсолютного удлинения призматического стержня с учетом влияния собственного веса будет

$$\Delta l = \frac{\left(P + \frac{1}{2}G\right)l}{EF},$$

где  $G$  - собственный вес стержня.

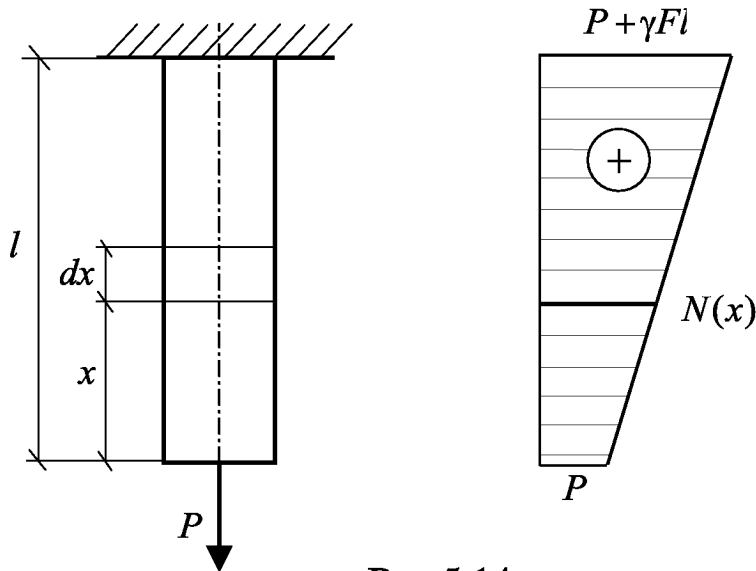


Рис.5.14

Построим эпюру продольных сил

$$N|_{x=0} = P, \quad N|_{x=l} = P + F\gamma l \text{ и запишем условие прочности } \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma]$$

$$\text{Имеем: } \frac{P + F\gamma l}{F} \leq [\sigma] \text{ или } \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma].$$

Откуда получим формулу для определения площади сечения призматического стержня с учетом влияния собственного веса

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}.$$

Из этой формулы видно, что влияние собственного веса учитывается слагаемым  $\gamma l$ . Поэтому, если оно составляет от  $[\sigma]$  более 5%, то собственный вес учитывать надо, а если менее 5% - то не надо. При  $P = 0$ , из условия прочности стержня  $\gamma l \leq [\sigma]$ , находим  $l \leq \frac{[\sigma]}{\gamma}$ . Следовательно, предельная длина призматического стержня определяется по формуле:

$$l_{np} \leq \frac{[\sigma]}{\gamma}.$$

Если в формулу для  $l_{np}$  подставить вместо  $[\sigma]$  временное сопротивление  $\sigma_B$ , то получим формулу для определения критической длины стержня, при которой он разрывается от собственного веса

$$l_k = \frac{\sigma_B}{\gamma}$$

Для малоуглеродистой стали ( $\sigma_B = 360 \text{ МПа}$ , а  $\gamma = 7.85 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ ) критическая длина  $l_k = \frac{360 \cdot 10^6}{7.85 \cdot 10^4} = 4580 \text{ м} = 4.6 \text{ км}$ .

При такой длине стержень (трос) разорвется от собственного веса. Как же можно поднять клеть с углем из шахты, глубиной более 4,6км, или пробурить скважину такой глубины? Современная техника решает такие задачи. Как? Надо делать сечение стержня по длине переменным.

### 5.7 Стержень равного сопротивления

Стержнем равного сопротивления называется стержень переменного сечения, у которого напряжения во всех поперечных сечениях одинаковы и равны допускаемому (рис.5.15).

Определим закон изменения площади поперечного сечения  $F_{(x)}$ . Минимальная площадь поперечного сечения  $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$ . Выделим часть стержня, длиной  $dx$ , весом  $dG = \frac{1}{2} [F_{(x)} + F_{(x)} + dF_{(x)}] \gamma dx \approx F_{(x)} \gamma dx$  и составим условие равновесия

$$\begin{aligned} \sum X &= -[\sigma] F_{(x)} - F_{(x)} \gamma dx + [\sigma] [F_{(x)} + dF_{(x)}] = 0 \\ &- F_{(x)} \gamma dx + [\sigma] dF_{(x)} = 0 \end{aligned}$$

Разделив это уравнение на  $[\sigma] F_{(x)}$ , получим

$$\frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}} = \frac{\gamma dx}{[\sigma]}, \text{ откуда } \ln F_{(x)} = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C_0, \text{ а } F_{(x)} = e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]} + C_0} = e^{C_0} e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} = C_1 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}.$$

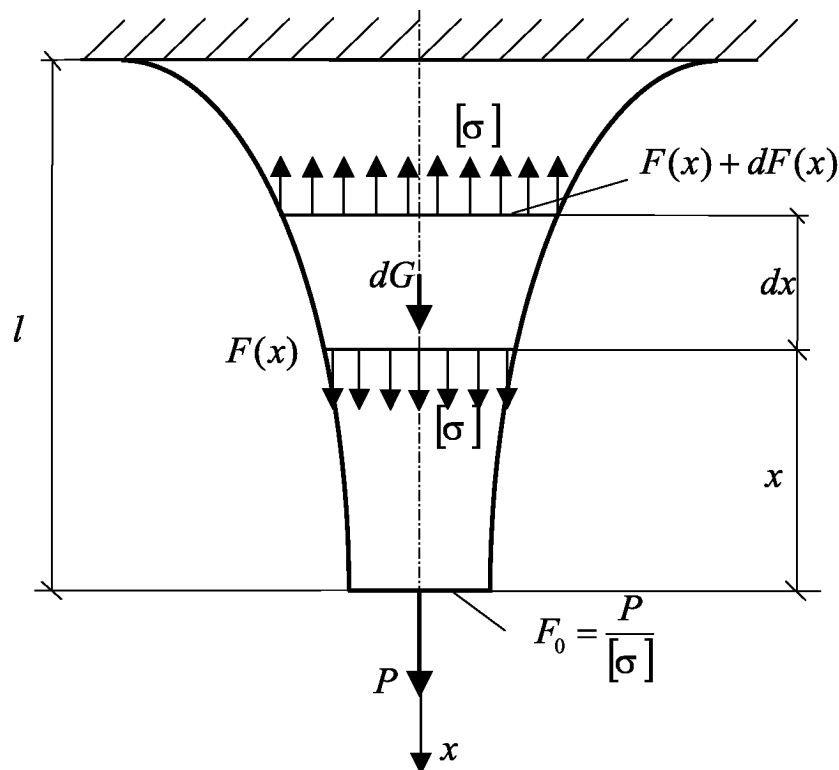


Рис.5.15

Определим постоянную интегрирования из условия

$$F_{(x)}|_{x=0} = C_1 = F_0 = \frac{P}{[\sigma]}, \text{ т.е. } C_1 = \frac{P}{[\sigma]}.$$

Подставляя  $C_1$ , получим формулу для определения площади поперечного сечения стержня равного сопротивления

$$F_{(x)} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}$$

Как определить расход материала  $V$ ? Воспользуемся свойствами стержня равного сопротивления и определим  $G$  - вес его (рис.5.16)

$$\sum X = P + G - [\sigma] F_{\max} = 0 \Rightarrow G = P \left( e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right), \text{ тогда } V = \frac{G}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} \left( e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right).$$

Определим  $\Delta l$  - абсолютное удлинение. Так как  $\sigma = [\sigma] = const$ , то

$$\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}, \text{ а } \Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l.$$

По расходу материала стержень равного сопротивления является наиболее экономичным, но его трудно изготовить. Поэтому он применяется только в уникальных сооружениях (маяки, телебашни и т.д.). Обычно вместо стержня равного сопротивления

используется конический (рис.5.17а) или ступенчатый стержень (рис.5.17б)

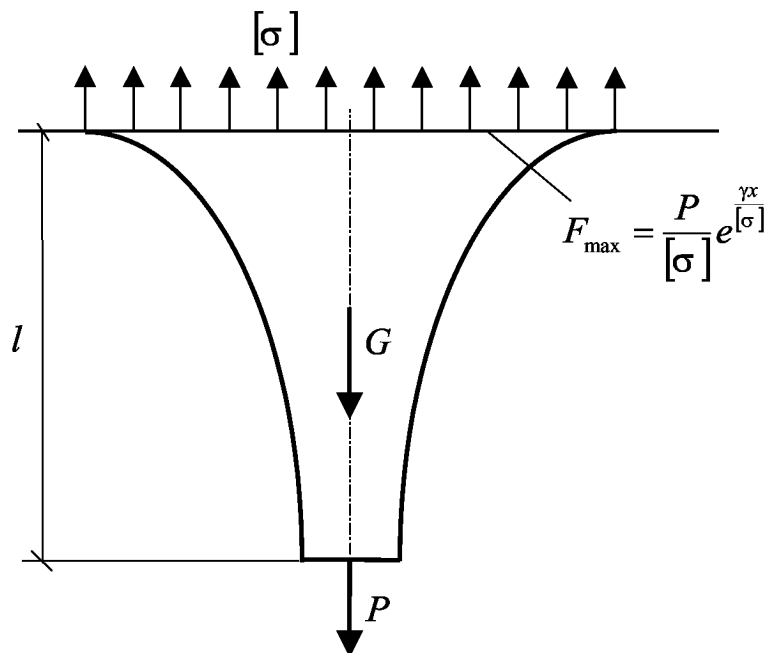


Рис.5.16

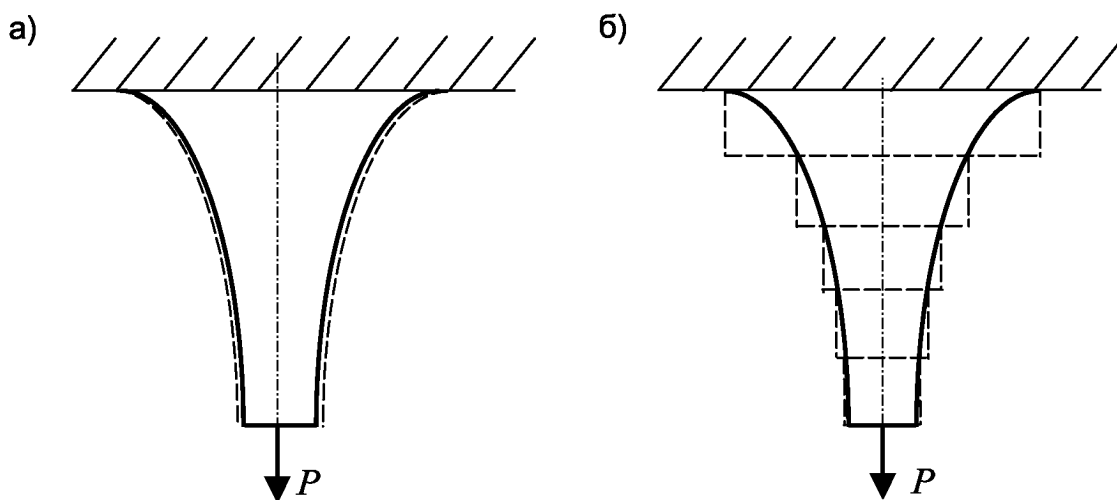


Рис.5.17

По общим затратам ступенчатый стержень является самым экономичным.

### 5.8 Ступенчатый стержень

Это стержень, у которого сечение изменяется отдельными ступенями (рис.5.18). Обычно их проектируют так, чтобы напряжения в конце каждой ступени были одинаковы и равны  $[\sigma]$ .

Площадь первой ступени можно определить по формуле

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l_1}{[\sigma]}\right)}$$

Если учесть, что на вторую ступень стержня действует сила  $P_1 = [\sigma] F_1$ , то

$$F_2 = \frac{P_1}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l_2}{[\sigma]}\right)} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l_1}{[\sigma]}\right) \left(1 - \frac{\gamma l_2}{[\sigma]}\right)}$$

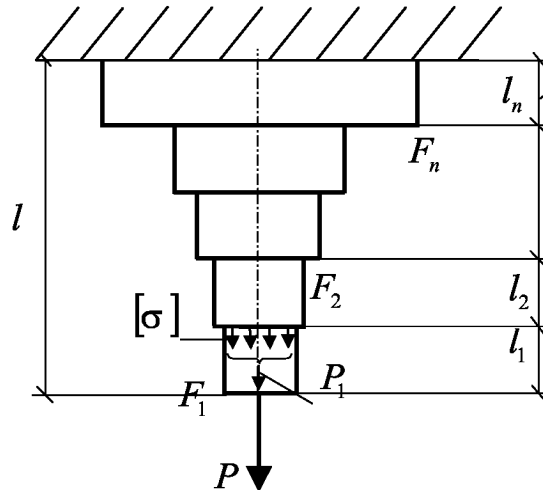


Рис.5.18

Очевидно, что формула для определения площади  $n$ -й ступени ступенчатого стержня будет

$$F_n = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l_1}{[\sigma]}\right) \left(1 - \frac{\gamma l_2}{[\sigma]}\right) \dots \left(1 - \frac{\gamma l_n}{[\sigma]}\right)}$$

Если длины всех ступеней одинаковы, т.е.  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = \frac{l}{n} = h$ ,

то

$$F_n = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma h}{[\sigma]}\right)^n}$$

Ступенчатые стержни широко используются в инженерной практике при строительстве фундаментов, подпорных стен, штанг и тросов шахтных подъемников и т.д.

## ГЛАВА 6

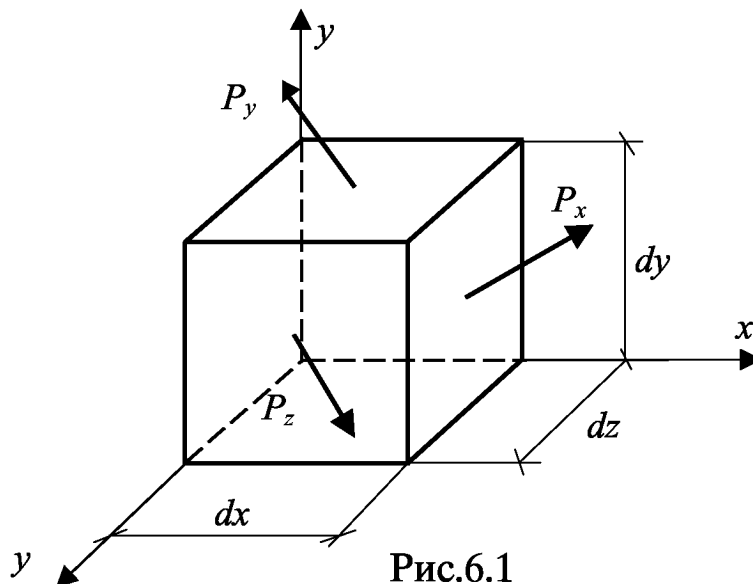
### ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

#### 6.1 Понятие о напряженном состоянии в точке

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии под действием пространственной системы сил. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц тела, т.е. деформировать его. Внутренние силы (напряжения) препятствуют этому.

В соответствии с гипотезой сплошности, материал распределяется непрерывно в теле, а расположенная в данной точке  $A$  частица взаимодействует с другими частицами. В любой, сколь угодно малой окрестности содержится бесконечное множество частиц. Поэтому напряжения распределяются непрерывно и в разных направлениях, имеют различную величину.

Для исследования напряженного состояния тела выберем произвольную точку  $A$  и, используя метод сечений, выделим в ее окрестности элемент в виде параллелепипеда с гранями длиной  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , направленными вдоль координатных осей  $x, y, z$  (рис.6.1). На гранях параллелепипеда действуют внутренние силы, заменяющие действие отброшенной части тела.



Эти силы  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  называются *полными напряжениями*. Здесь индексы соответствуют нормали к площадкам, на которых действуют напряжения. Так как выделенный элемент мал, то можно



считать, что напряжения на каждой грани распределяются равномерно.

Полные напряжения в общем случае не совпадают по направлению с нормалью к площадке на которой они действуют. Разложим их по трем взаимно перпендикулярным направлениям, совпадающим с координатными осями (рис.6.2). Напряжение, перпендикулярное к плоскости обозначаются буквой  $\sigma$  с индексом, соответствующим нормали к площадке, на которой они действуют и называются нормальными. Два напряжения, расположенных в плоскости обозначим буквой  $\tau$  с двумя индексами первый соответствует нормали к площадке, второй - направлению действия напряжения. Эти напряжения будем называть касательными. Так на площадке, перпендикулярной оси  $X$ , действуют напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  (рис.6.2).

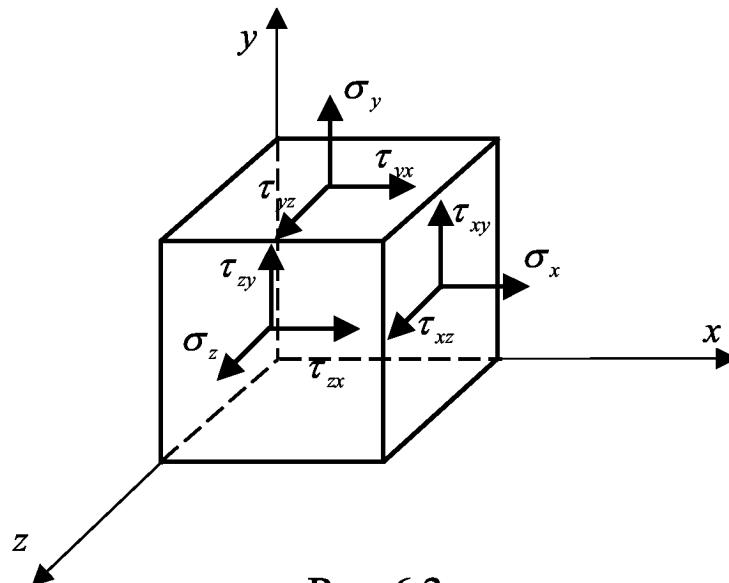


Рис .6.2

Таким образом, на каждой грани выделенного элемента действуют три компоненты полного напряжения. Совокупность напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных гранях можно представить в виде матрицы которая называется *тензором напряжений*:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

### *Правило знаков:*

Нормальные напряжения считаются положительными, если они совпадают по направлению с внешней нормалью к площадке, на которой они действуют (вызывают растяжение), и отрицательными - наоборот.

Знак касательных напряжений связан с направлением осей координат. Если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением координатной оси, то на этой площадке касательное напряжение положительно, когда оно действует в направлении соответствующей оси. Если же внешняя нормаль противоположна направлению оси, то касательное напряжение положительно, если оно действует в направлении противоположном своей координатной оси.

### **6.2 Закон парности касательных напряжений**

Параллелепипед под действием приложенных к нему сил должен находиться в равновесии, а следовательно, должны выполняться уравнения равновесия статики. Составим сумму моментов всех сил, приложенных к граням параллелепипеда, относительно координатной оси  $Z$ .

$$\sum M_z = 0$$

Из теоретической механики известно, что силы, пересекающие ось и параллельные ей, не создают момента относительно этой оси. Напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , действующие на противоположных гранях создают моменты относительно оси  $Z$  равные по величине и противоположно направленные. Поэтому соответствующее уравнение равновесия имеет вид:

$$\tau_{xy} d_y d_z d_x - \tau_{yx} d_x d_z d_y = 0$$

Откуда следует:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Аналогично составляя уравнения равновесия относительно других координатных осей

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Эти равенства называют *законом парности касательных напряжений*. Он гласит: на любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и направлены так, что стремятся вращать элемент в противоположные стороны.

### 6.3 Главные площадки и главные напряжения

При изменении ориентации граней рассматриваемого элемента напряжения, действующие на его гранях изменяются. При этом существуют такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Они называются *главными площадками*, а нормальные напряжения действующие на этих площадках - *главными напряжениями*. Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; при этом индексы выбираются так, чтобы выполнялись в алгебраическом смысле неравенства  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Если только одно главное напряжение отлично от нуля, то напряженное состояние называется одноосным или линейным, только два - двuosным или плоским, три - трехосным или объемным.

### 6.4 Линейное напряженное состояние

Рассмотрим стержень, растягиваемый силами, действующими вдоль его оси. В поперечных сечениях стержня, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил, нормальные напряжения распределяются равномерно и определяются формулой

$$\sigma_x = \frac{N}{F},$$

а касательные напряжения равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками. Напряжения на площадках параллельных оси стержня равны нулю, т.е. элементы стержня находятся в линейном напряженном состоянии.

Определим напряжения на наклонных площадках. Проведем сечение стержня так, чтобы его внешняя нормаль составляла угол  $\alpha$  с осью стержня. Угол  $\alpha$  считается положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки. Действующие на наклонной площадке  $F_\alpha$  напряжения обозначим:  $P_\alpha$  - полное,  $\sigma_\alpha$  - нормальное,  $\tau_\alpha$  - касательное (рис.6.3). Составим уравнения равновесия отсеченной части стержня

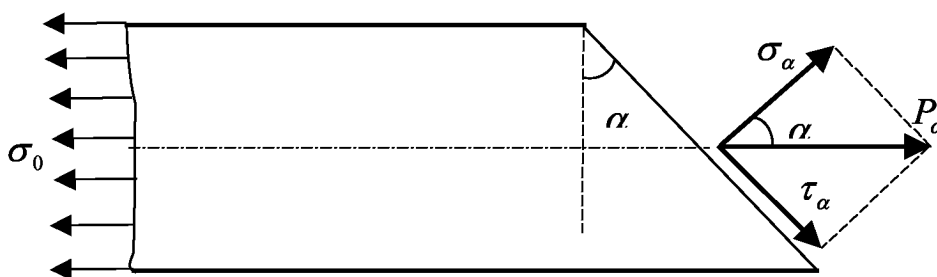


Рис.6.3

$$P_\alpha F_\alpha = \sigma_x F, F = F_\alpha \cos \alpha$$

Откуда

$$P_\alpha = \sigma_x \cos \alpha$$

Проектируя  $P_\alpha$  на направление нормали и касательной к сечению получим

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha$$

Из последнего равенства видно, что  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

### 6.5 Плоское напряженное состояние

Многие элементы конструкций находятся в условиях плоского напряженного состояния. В этом случае отличными от нуля являются 4 из 9 компонент тензора напряжений (рис.6.4а), т.е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

Для определения напряжений на наклонных площадках рассмотрим призматический элемент, изображенный на (рис.6.4а). Спроектируем все силы, действующие на него, последовательно на направление нормали и касательной к наклонной площадке.

$$\sigma_\alpha dF_\alpha - \sigma_x dF_x \cos \alpha - \sigma_y dF_y \sin \alpha - \tau_{xy} dF_x \sin \alpha - \tau_{yx} dF_x \cos \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha dF_\alpha + \sigma_x dF_x \sin \alpha - \sigma_y dF_y \cos \alpha - \tau_{xy} dF_x \cos \alpha + \tau_{yx} dF_y \sin \alpha = 0$$

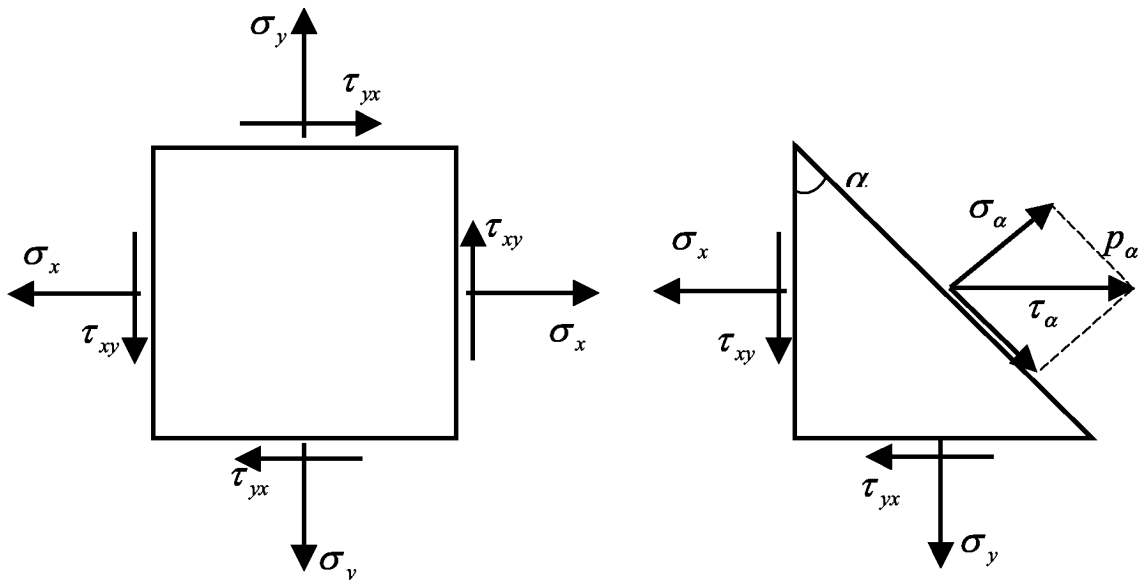


Рис.6.4

Учитывая, что

$$dF_x = dF_\alpha \cos \alpha, \quad dF_y = dF_\alpha \sin \alpha$$

найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Для определения положения главных площадок следует положить, что  $\tau_\alpha = 0$ . В результате получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

### Формулы для главных напряжений

Найдем формулы для определения главных напряжений через напряжения, действующие на произвольных площадках. Для этого предположим, что площадка  $dF$  - главная и на ней действует главное напряжение  $\sigma$ , а  $\tau_\alpha = 0$ . Спроектируем все силы действующие на выделенный элемент на оси  $x$  и  $y$  соответственно. В результате получим

$$\sigma dF_\alpha \cos \alpha - \sigma_x dF_x - \tau_{xy} dF_y = 0$$

$$\sigma dF_\alpha \sin \alpha - \sigma_y dF_y - \tau_{yx} dF_x = 0$$

Учитывая зависимость между  $dF_\alpha$ ,  $dF_x$  и  $dF_y$ , получим

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \sin \alpha = 0$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений относительно  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ . Так как  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , то

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Это квадратное уравнение относительно  $\sigma$ , корни которого имеют вид

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Исследуем при каком значении угла наклона площадок а действующие на них нормальные напряжения достигают экстремальных значений. Для этого продифференцируем  $\sigma_\alpha$  по  $\alpha$  и приравняем производную к нулю. В результате получим

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\right) = 2\tau_\alpha$$

Следовательно нормальные напряжения достигают экстремума на тех площадках, где касательные напряжения равны нулю, т.е. на главных площадках.

Если известны главные напряжения, то напряжения на наклонных площадках определяются в виде

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

### 6.6 Круг напряжений Мора

Зависимость напряжений от угла наклона площадки, на которой они действуют, имеет простую геометрическую интерпретацию в виде диаграммы, которая называется кругом напряжений Мора. Обозначим

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Тогда напряжения на наклонных площадках можно представить в виде

$$\sigma_\alpha = a + R \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = R \sin 2\alpha$$

Эти уравнения представляют окружность в параметрической форме Действительно, они эквивалентны уравнению

$$(\sigma_\alpha - a)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2$$

Используя круги Мора можно решать два типа задач.

Первый тип. Пусть известны напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  на произвольных площадках. Требуется найти главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и положение главных площадок.

Решение; По оси  $\sigma$  (рис.6.5) отложим отрезок  $OK_x$ , равный по величине  $\sigma_x$

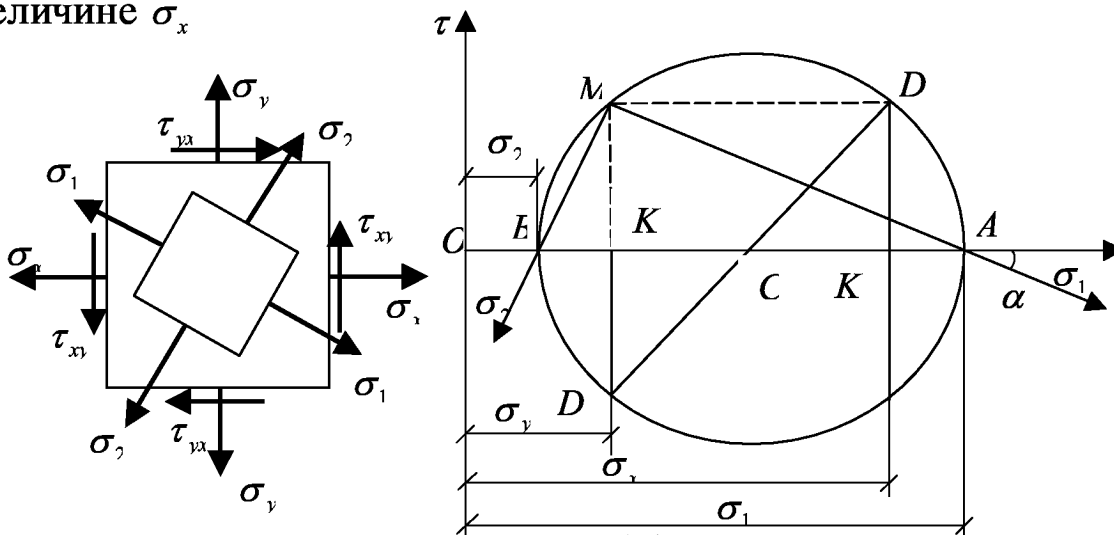


Рис.6.5

Из точки  $K_x$  в направлении оси  $\tau$  отложим отрезок  $K_x D_x$ , соответствующий  $\tau_{xy}$ . Аналогично построим точки  $K_y$  и  $D_y$ , равные напряжениям  $\sigma_y$  и  $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ . Соединив точки  $D_x$  и  $D_y$ , получим точку  $C$  пересечения отрезка  $|D_x D_y|$  с осью  $\sigma$ . Вокруг точки  $C$  опишем окружность диаметром  $D_x D_y$ . Это и будет окружность напряжений Мора.

Точки  $A$  и  $B$  пересечения окружности с осью  $\sigma$  соответствуют главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Для определения направления главных площадок из точки  $D_x$  проведем прямую параллельно оси  $\sigma$  до пересечения с окружностью в точке  $M$ , которая называется полюсом. Прямые, проведенные из полюса в точки  $A$  и  $B$ , соответствуют направлению главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно.

Второй тип. Пусть известны главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Требуется определить напряжения на площадках, направленных под углом  $\alpha$  к главным.

Решение. Вдоль оси  $\sigma$  (рис.6.6) отложим отрезки  $OA$  и  $OB$ , соответствующие главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

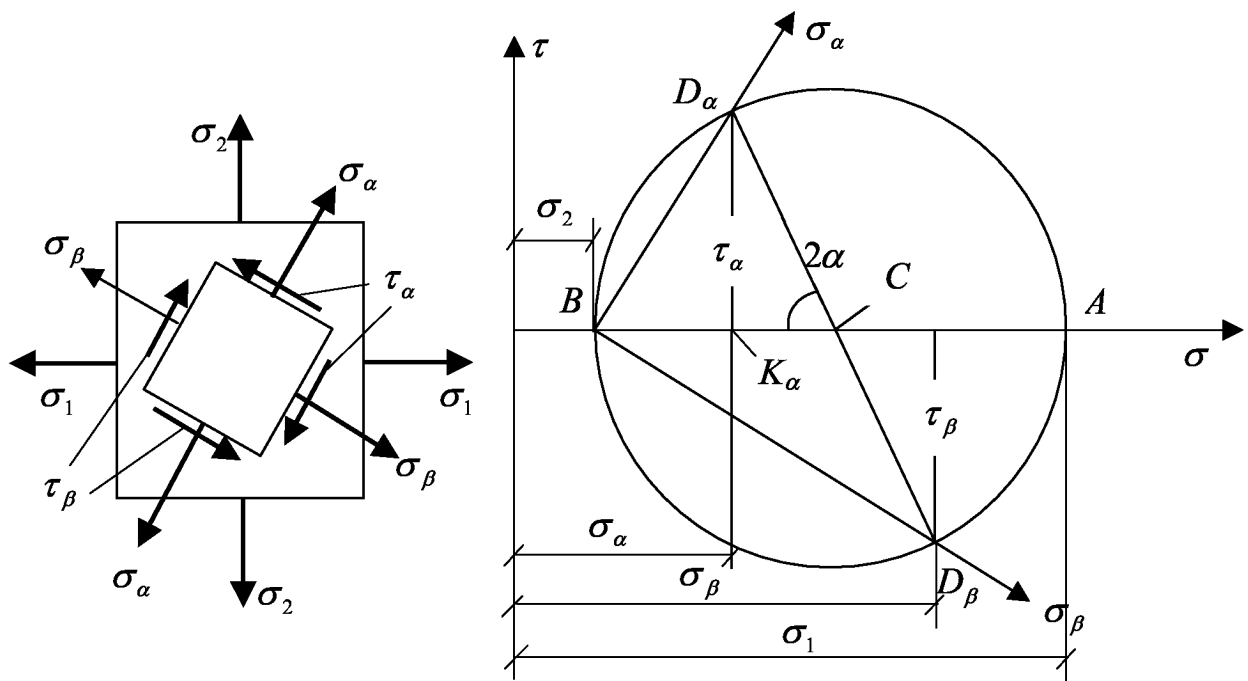


Рис.6.6

На отрезке  $AB$ , как на диаметре построим окружность напряжений Мора. Из центра окружности (точка  $C$ ) отложим центральный угол  $2\alpha$  с осью  $\sigma$  и проведем прямую до пересечения с окружностью в точках  $D_\alpha$  и  $D_\beta$ . Координаты этих точек и соответствуют напряжениям на площадках, повернутых на угол  $\alpha$  и  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$  и площадке, на которой действует главное напряжение  $\sigma_1$ . Положения этих площадок получим проведя из точки  $B$  прямые до пересечения с окружностью в точках  $D_\alpha$  и  $D_\beta$ .

### 6.7 Объемное напряженное состояние

Как отмечалось в предыдущей лекции, в общем случае напряженного состояния на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела, действует девять компонент тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений независимыми являются только шесть из них.

Вычислим напряжения на произвольной площадке  $ABC$  с вектором нормали  $\bar{v}$  в окрестности произвольной точки  $O$  (рис. 6.7). Обозначим (рис.6.7) направляющие косинусы вектора нормали  $\bar{v}$  к площадке  $ABC$  величинами  $l, m, n$ .

$$l = \cos(\bar{v}x), \quad m = \cos(\bar{v}y), \quad n = \cos(\bar{v}z)$$

Проекции полного напряжения  $\bar{P}_v$ , действующего на площадке  $ABC$ , на координатные оси обозначим  $P_x, P_y, P_z$ . Для их определения составим уравнения равновесия четырехгранника, выделенного координатными плоскостями и плоскостью  $ABC$  в окрестности произвольной точки нагруженного тела (рис.6.7)

$$\begin{aligned} \sum P_x = 0: P_x dF - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z &= 0 \\ \sum P_y = 0: P_y dF - \tau_{xy} dF_x - \sigma_y dF_y - \tau_{zy} dF_z &= 0 \\ \sum P_z = 0: P_z dF - \tau_{xz} dF_x - \tau_{yz} dF_y - \sigma_z dF_z &= 0 \end{aligned}$$

Площади граней элементов связаны между собой зависимостями

$$dF_x = dFl, \quad dF_y = dFm, \quad dF_z = dFn.$$

Учитывая это получим

$$\begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ P_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ P_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned}$$

Нормальные напряжения найдем составив сумму проекций на направление нормали



$$\sigma_v = P_{vx}l + P_{vy}m + P_{vz}n$$

или с учетом выражения для  $P_{vx}$ ,  $P_{vy}$ ,  $P_{vz}$ .

Полное напряжение на площадке равно

$$P_v = \sqrt{P_{vx}^2 + P_{vy}^2 + P_{vz}^2}$$

а касательное

$$\tau_v = \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2}$$

### Определение главных напряжений

Пусть площадка  $ABC$  (рис.6.7) - главная, а нормаль к ней  $\vec{v}$  совпадает с

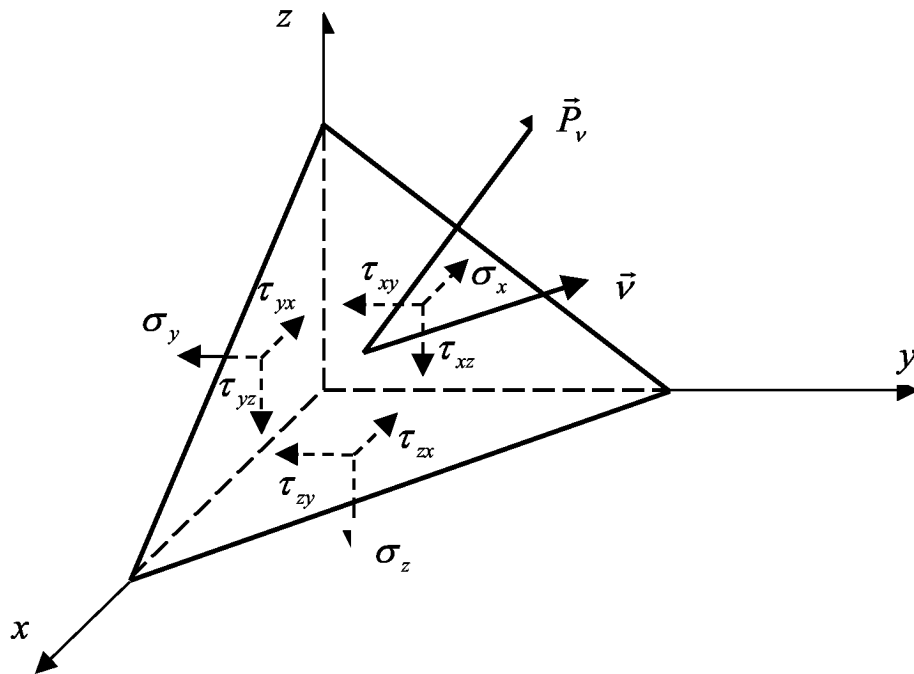


Рис.6.7

главной осью. Касательные напряжения на этой грани отсутствуют, а нормальное  $\sigma$  совпадает с полным. Проекции этого напряжения на оси координат равны

$$P_{vx} = \sigma l, \quad P_{vy} = \sigma m, \quad P_{vz} = \sigma n.$$

Учитывая выражения для  $P_{vx}$ ,  $P_{vy}$ ,  $P_{vz}$ , получим

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

Эти равенства можно рассматривать, как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $l, m, n$ . В силу того, что направляющие косинусы связаны соотношениями

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$  нулевое решение этой системы невозможно. Нулевое решение возможно только в том случае, когда определитель, составленный из ее коэффициентов обращается в нуль, т.е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв этот определитель, получим кубическое уравнение относительно главного напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

где  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

В силу симметрии определителя относительно главной диагонали, соответствующее ему кубическое уравнение имеет три действительных корня, три главных напряжения  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Главные напряжения в точке нагруженного тела не зависят от выбора системы координат. Поэтому

$$I_1 = const, \quad I_2 = const, \quad I_3 = const$$

и называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений. Их можно представить в виде

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

В случае объемного напряженного состояния напряжения также можно представить графически. Если рассмотреть наклонные площадки, параллельные одному из главных напряжений, то для них справедливы формулы для плоского напряженного состояния. Действительно, из рис.6.8 видно, что напряжения  $\sigma_3$  не влияет на величину напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  действующих на площадке параллельной  $\sigma_3$ . Тогда напряжения на таких площадках можно представить графически, построив круг Мора на главных напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Аналогично можно представить графически напряжения на наклонных площадках параллельных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , как показано на рис.6.8. Однако, точки расположенные на этих трех кругах не исчерпывают всех наклонных площадок в точке нагруженного тела.

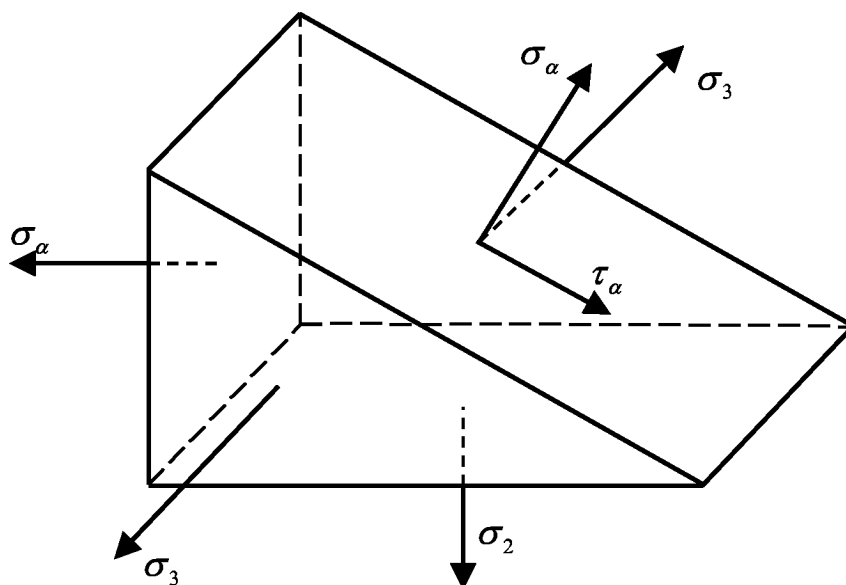


Рис.6.8

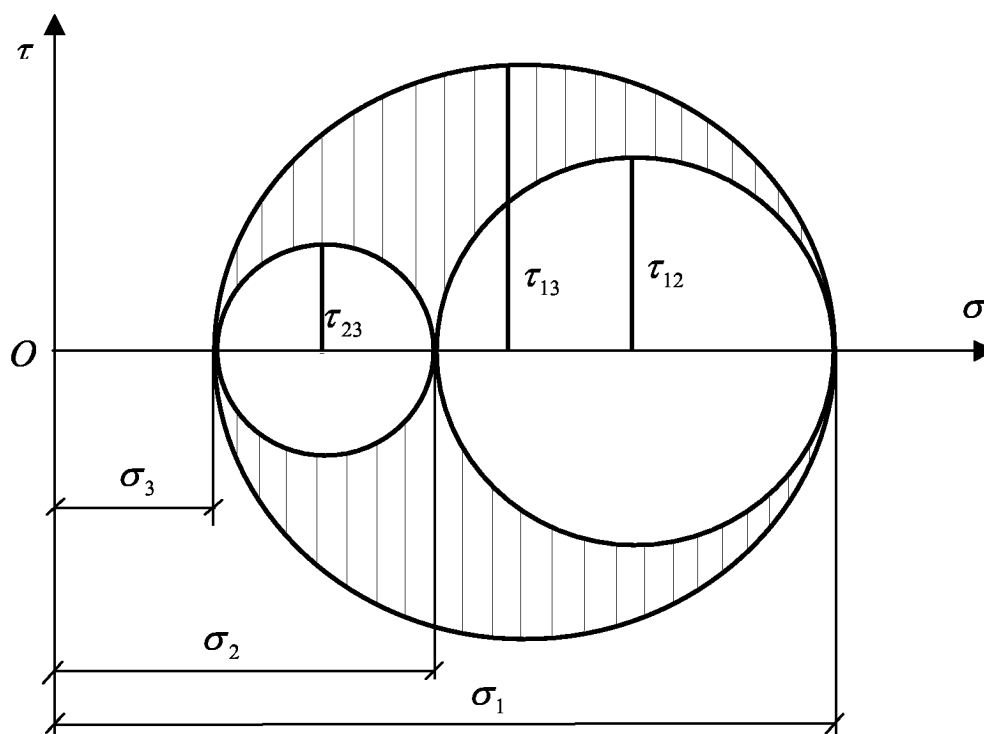


Рис.6.9

Можно показать, что площадкам общего положения соответствуют точки на плоскости  $(\sigma, \tau)$ , лежащие в заштрихованной области между тремя кругами Мора. Точки, являющиеся вершинами этих кругов соответствуют площадкам

наклоненным под углом  $45^\circ$  к соответствующим главным площадкам. Касательные напряжения на этих площадках равны радиусам кругов Мора и определяются формулами

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max} = \tau_{13}$ .

### 6.8 Деформированное состояние

Опыт показывает, что под действием внешних сил элементы конструкций и машин изменяют свои первоначальные размеры и форму. Эти изменения характеризуются деформациями и перемещениями тела. Перемещения упругих тел могут быть двух видов: а) перемещения как абсолютного твердого тела; б) перемещения отдельных точек тела, обусловленных деформациями материала. Первый вид перемещений рассматривается в теоретической механике. В сопротивлении материалов, как правило, рассматриваются конструкции, в которых исключаются такие перемещения. Возникающие в них перемещения вызваны деформациями тела.

Для исследования деформированного состояния рассмотрим элемент  $ABCD$  (рис.6.10), который после деформации тела перешел в состояние  $A'B'C'D'$ . Переход от начального состояния в конечное может быть осуществлен за счет изменения длины сторон (без изменения углов между ними) и за счет изменения углов (без изменения длин).

Пусть до деформации длина элемента  $AB$  была равна  $dx$ , а  $AC$  -  $dy$ , угол между ними равен  $90^\circ$  и ориентированы они в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно (рис.6.11). Пусть после деформации точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  заняли положение  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Перемещения точки  $A$  в направлении оси  $Ox$  равно  $u$ , оси  $Oy$  -  $v$ , а перемещения точек  $B$  и  $C$  соответственно:

$$\begin{aligned} B: \quad u' &= u + \frac{du}{dx} dx, & v' &= v + \frac{dv}{dx} dx \\ C: \quad u'' &= u + \frac{du}{dy} dy, & v'' &= v + \frac{dv}{dy} dy \end{aligned}$$

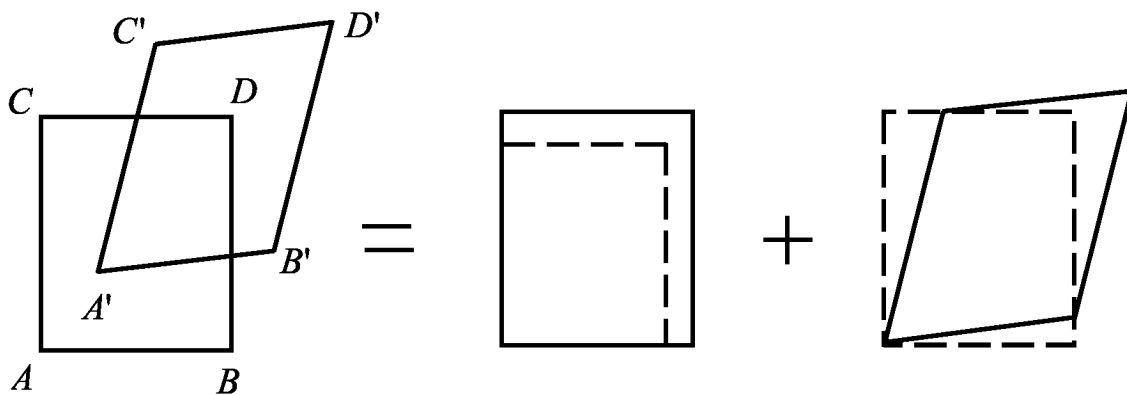


рис.6.10

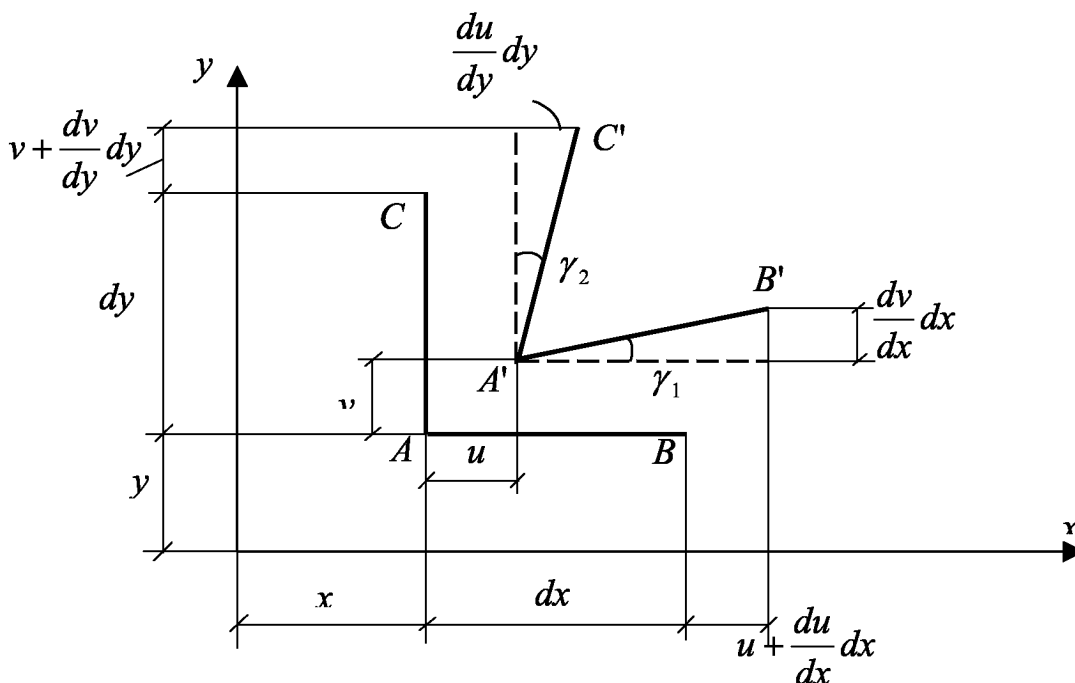


Рис.6.11

Тогда линейные деформации элементов  $AB$  и  $AC$  определяются в виде

$$\varepsilon_x = \frac{u' - u}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{v' - v}{dy} = \frac{dv}{dy}$$

Угловые деформации, т.е. изменение углов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис.6.11) равно

$$\gamma_1 = \frac{\frac{dv}{dx} dx}{dx + \frac{du}{dx} dx} \approx \frac{dv}{dx}$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{du}{dy} dy}{dy + \frac{dv}{dy} dy} \approx \frac{du}{dy}$$

Угол сдвига между элементами  $AB$  и  $AC$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

При выводе этих соотношений мы учитывали, что перемещения и углы поворота малы, т.е.  $\frac{du}{dx} \ll 1$ ,  $\frac{dv}{dy} \ll 1$ ,  $\operatorname{tg} \gamma_1 \approx \gamma_1$ ,  $\operatorname{tg} \gamma_2 \approx \gamma_2$ .

Аналогично линейные деформации в направлении оси  $z$  и углы сдвига в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  определяются формулами

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}; \quad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}; \quad \gamma_{yx} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}.$$

Таким образом деформированное состояние характеризуется величинами  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ , а выражения, связывающие их с компонентами вектора перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , называются *соотношениями Коши*.

Часто при исследовании деформаций необходимо определить линейную деформацию в направлении составляющем угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ . Рассмотрим отрезок  $AB$ , который деформируется в плоскости  $xOy$  и занимает положение  $A'B'$  (рис.6.12). Компоненты вектора перемещения точки  $A$  в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  равны  $u$ ,  $v$  и точки  $B$

$$u + \frac{du}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy; \quad v + \frac{dv}{dy} dy + \frac{du}{dx} dx$$

Длина отрезка  $AB$  до деформации равна  $ds$ , а после деформации

$$ds' = ds + \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy \right) \cos \alpha + \left( \frac{dv}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right) \sin \alpha$$

Тогда деформация отрезка  $AB$  в направлении, определяемом углом  $\alpha$  равна

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ds' - ds}{ds} = \left( \frac{du}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{ds} \right) \cos \alpha + \left( \frac{dv}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{ds} \right) \sin \alpha$$

Учитывая, что  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ ,  $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$  из соотношения Коши получим

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

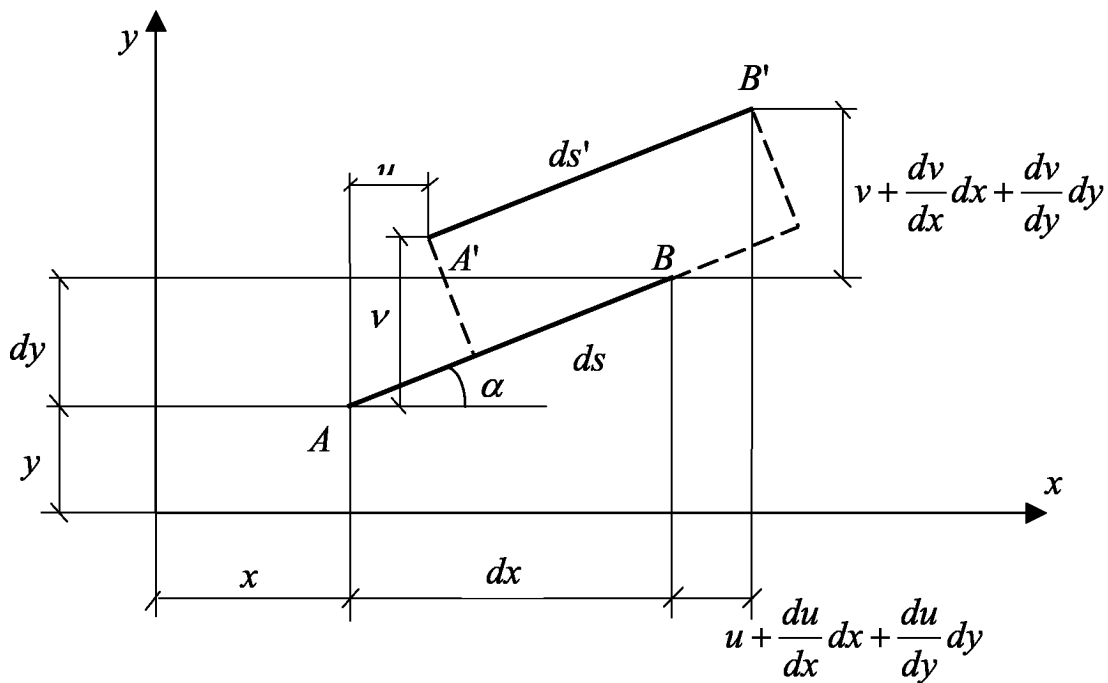


Рис.6.12

Если заменить  $\gamma_{xy}$  на  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ , то эта формула будет полностью совпадать с выражением для  $\sigma_\alpha$ . Таким образом, деформация в точке характеризуется тензором деформаций

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix}$$

Как и тензор напряжений его можно привести к диагональному виду

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - главные деформации.

Аналогично в трехмерном случае деформация в точке также определяется тензором деформаций, который можно представить в общем или диагональном виде

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Вычислим относительную объемную деформацию тела. Для этого рассмотрим элементарный параллелепипед. Размеры сторон его до деформации равны  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . После деформации их размеры равны  $dx + \Delta dx$ ,  $dy + \Delta dy$ ,  $dz + \Delta dz$ . Начальный объем  $V_0 = dxdydz$ , а после деформации

$$V_1 = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = V_0(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

Раскрыв скобки и учитывая, что деформации малы, т.е. пренебрегая произведениями  $\varepsilon_x \varepsilon_y \dots \varepsilon_y \varepsilon_z$  найдем относительное изменение объема

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Таким образом  $\theta$  является первым инвариантом тензора деформаций.

### 6.9 Обобщенный закон Гука

Приведенные выше формулы теории напряженного и деформированного состояния применимы как для упругих, так и неупругих тел. Для решения контактных задач необходимо знать количественные зависимости между напряжениями и деформациями. Рассмотрим их для случая линейно упругих, изотропных тел.

Выделим из деформированного тела элементарный куб к граням которого приложены главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Применяя принципы независимости действия сил, будем считать, что на выделенный элемент действуют только напряжения  $\sigma_1$ , т.е.  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Тогда он будет находиться в линейном напряженном состоянии. На основании закона Гука для линейного напряженного состояния

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2' = -\mu \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3' = -\mu \frac{\sigma_1}{E},$$

если  $\sigma_2 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_3 = 0$ , то

$$\varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_3'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E},$$

Аналогично, когда  $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$

$$\varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_2''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E},$$

Полные линейные деформации в направлении  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''', \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''', \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3'''$$

Подставляя сюда их выражения через напряжения, получим

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]}$$



$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

В случае плоского напряженного состояния одно из напряжений (например  $\sigma_3$ ) равно нулю, тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_2]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu\sigma_1]$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{E} \mu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Эти формулы называются *обобщенным законом Гука* для объемного и плоского напряженного состояния.

### 6.10 Потенциальная энергия деформации

В случае линейного напряженного состояния удельная потенциальная энергия определяется формулой  $u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ .

Используя принцип независимости действия сил обобщим эту формулу на случай объемного напряженного состояния

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3].$$

Подставив сюда выражения для  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  из обобщенного закона Гука, получим

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)].$$

## ГЛАВА 7

### КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

#### 7.1 Задачи теории прочности

При оценке прочности конструкций различных деталей, машин и сооружений необходимо учитывать, что они часто работают в условиях сложного напряженного состояния. В зависимости от условий работы материал этих конструкций может находиться в различных механических состояниях. Как правило, если внешние нагрузки не превышают некоторой величины (зависящей от материала и вида напряженного состояния), то материал находится в упругом состоянии. При больших нагрузках могут обнаруживаться заметные остаточные деформации и даже местные трещины. В первом случае материал переходит в пластическое состояние, во втором - в состояние разрушения.

Механическое состояние материала в точке зависит от многих факторов: напряженного состояния, температуры и других физических полей длительности и характера действия внешней нагрузки и т.д. Действие всех этих факторов на механическое состояние и прочность материалов еще недостаточно изучены и не существует общей теории учитывающей их. Поэтому в сопротивлении материалов предполагается, что механическое состояние и прочность материалов в первую очередь определяется напряженным состоянием тела в точке.

В предыдущих главах показано, что напряженное состояние тела в точке полностью определяется: при линейном напряженном состоянии - одним главным напряжением, при плоском - двумя, при объемном - тремя.

При увеличении внешней нагрузки главные напряжения также будут возрастать и при некотором определенном их значении произойдет качественное изменение свойств материала - переход к другому механическому состоянию. Такое *напряженное состояние называется предельным*. Для пластического материала предельным считается напряженное состояние, при котором начинают развиваться заметные остаточные деформации. Для хрупкого материала - такое, которому соответствует начало разрушения.

Процессы, происходящие в этих предельных состояниях различные, как по физической природе, так и по внешним

проявлениям. Поэтому и условия перехода в эти состояния могут быть совершенно различными. Чтобы оценить насколько опасно то или иное напряженное состояние следует сравнить его с предельным состоянием для данного материала, которое рассматривается, как характеристика свойств материала. При этом возникает задача определения предельного напряженного состояния. Очевидно, что эта задача может быть решена экспериментально, путем механических испытаний соответствующих материалов.

В случае одноосного напряженного состояния производится испытание материала на растяжение или сжатие. В качестве предельного значения единственного главного напряжения  $\sigma_1 = \sigma$  берется предел текучести  $\sigma_T$  для пластического или предел прочности  $\sigma_B$  для хрупкого материала. Коэффициенты запаса в этих случаях равны

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}; \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma}$$

Испытания материалов на одноосное растяжение и сжатие производились в течение длительного периода и для различных материалов имеются достоверные значения  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$ . Это позволяет достаточно определять коэффициенты запаса и судить о прочности материалов конструкций при одноосном напряженном состоянии.

При плоском и объемном состоянии предельное состояние наступает от действия двух или трех главных напряжений, число различных комбинаций которых бесконечно. Поэтому и число опытов по определению предельных состояний, соответствующих этим комбинациям главных напряжений бесконечно.

Имеющаяся в настоящее время экспериментальная база позволяет исследовать только некоторые, наиболее простые типы сложных напряженных состояний.

Поэтому возникает необходимость создания общего метода оценки меры опасности любого напряженного состояния, основываясь, на результатах опытов на простое растяжение или сжатие. Решение этой задачи осуществляется с помощью *теорий предельного состояния или теорий прочности*.

Эти теории основываются на предположении о том, что два напряженных состояния считаются равнопрочными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений

одновременно становятся предельными. Тогда коэффициент запаса прочности для обоих напряженных состояний будет одинаковым.

Сравнение напряженных состояний для заданного материала можно производить по эквивалентным напряжениям  $\sigma_{\text{экв}}$ . *Эквивалентное напряжение*  $\sigma_{\text{экв}}$  - это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равнопрочным заданному.

Для успешного использования указанного подхода необходимо связать эквивалентные напряжения в двух равнопрочных состояниях определенной зависимостью, основанной на анализе причин разрушения или перехода в предельное состояние материала. Однако физической теории, раскрывающей истинные причины разрушения материала, еще не создано. Это повлекло за собой появление многих теорий, основанных на различных гипотезах о причинах наступления предельного состояния и разрушения материала. Рассмотрим основные, наиболее известные теории.

## 7.2 Критерий наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)

Согласно этой теории, наиболее существенное влияние на прочность и наступление предельного состояния оказывает величина наибольшего главного напряжения. В соответствии с этой гипотезой предельное состояние и разрушение материала не происходит, если выполняются условия прочности

$$\sigma_{\text{экв I}} = \sigma_1 \leq [\sigma_+];$$

$$\sigma_{\text{экв I}} = \sigma_3 \leq [\sigma_-]$$

где  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  допускаемые напряжения на растяжение и сжатие материала, при одноосном напряженном состоянии.

Главный недостаток этой теории в том, что в ней не учитываются два других главных напряжения. опыты показывают, что она дает удовлетворительные результаты только при разрушении путем отрыва одной части материала от другой в весьма хрупких материалах, таких как камень, кирпич, бетон, керамика, чугун, инструментальная сталь и др.

В настоящее время эта теория применяется очень редко.

### 7.3 Критерий наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности)

Причиной наступления предельного состояния и разрушения в соответствии с этой теорией являются наибольшие удлинения.

Для объемного напряженного состояния условия прочности запишутся в виде

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$$

где  $\varepsilon_1$  - величина наибольшей линейной деформации для исследуемого напряженного состояния,  $[\varepsilon] = \frac{\varepsilon_0}{n}$  - допускаемое значение линейной деформации, полученное из опытов на одноосное растяжение.

Выразим условие прочности через напряжения. Для этого используем закон Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_0 = \frac{[\sigma]}{E}.$$

В результате получим

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Следует иметь в виду, что это условие применимо лишь в тех случаях, когда  $\sigma_{\text{экв II}} > 0$  и неприменимо когда материал не следует закону Гука или находится за пределами пропорциональности.

Как и первая, вторая теория прочности находится в согласии с опытами только для хрупких материалов, но имеет то преимущество, что учитывает все три главных напряжения.

### 7.4 Критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)

Причиной наступления предельного состояния и разрушения в этой теории принимаются наибольшие касательные напряжения. Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau],$$

где  $\tau_{\text{max}}$  - расчетная величина наибольшего касательного напряжения для рассматриваемого напряженного состояния,  $[\tau]$  - допускаемая величина касательного напряжения из опыта на простое растяжение.

В случае объемного напряженного состояния наибольшее касательное напряжение определяется формулой

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Допускаемое касательное напряжение определяется равенством

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Тогда условие прочности можно представить в виде

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Недостатком ее является то, что не учитывается главное напряжение  $\sigma_2$ , которое также оказывает некоторое влияние на прочность.

Критерий наибольших касательных напряжений рассматривается также как условие пластичности (начала образования областей с остаточными деформациями).

### 7.5 Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности)

При построении этой теории первоначально была предложена гипотеза, согласно которой, причиной наступления предельного состояния и разрушения считалась полная удельная потенциальная энергия, достигающая предельного значения. Условие прочности представляется в виде

$$u \leq [u],$$

где  $u$  - полная удельная энергия деформации, которая для объемного напряженного состояния имеет вид

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)],$$

$[u]$  - предельное значение энергии, определяемое из опытов на простое напряжение.

Формула для вычисления  $[u]$  получается, если в предыдущем выражении положить  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , и  $\sigma_1 = [\sigma]$ , т.е.

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}.$$

Тогда условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma].$$

Однако эта гипотеза не прошла экспериментальную проверку и не нашла применения на практике, так как полученные на ее основе результаты не согласуются с экспериментом.

Поэтому была предложена новая теория, которая основана на гипотезе, согласно которой причиной наступления предельного состояния и разрушения считается часть удельной потенциальной энергии деформации, которая накапливается вследствие изменения формы элемента.

Поводом для этой гипотезы послужил тот экспериментальный факт что при всестороннем сжатии разрушение практически не наступает. Таким образом энергия, соответствующая изменению объема при всестороннем сжатии не может служить критерием прочности.

Новая энергетическая теория связывается только с энергией формоизменения. Критерий прочности, согласно этой теории, представляется в виде

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}],$$

где  $u_{\phi}$  - удельная энергия формоизменения для рассматриваемого напряженного состояния,  $[u_{\phi}]$  - допускаемая энергия формоизменения, полученная из опытов на простое растяжение. Для вычисления удельной энергии формоизменения используем соотношение

$$u = u_0 + u_{\phi} \text{ или } u_{\phi} = u - u_0$$

Здесь  $u_0$  - удельная энергия, затрачиваемая на изменение объема.

Представим заданное напряженное состояние (рис.7.1а), определяемое главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , в виде суммы двух напряженных состояний (рис.7.1б, в). Первое соответствует гидростатическому

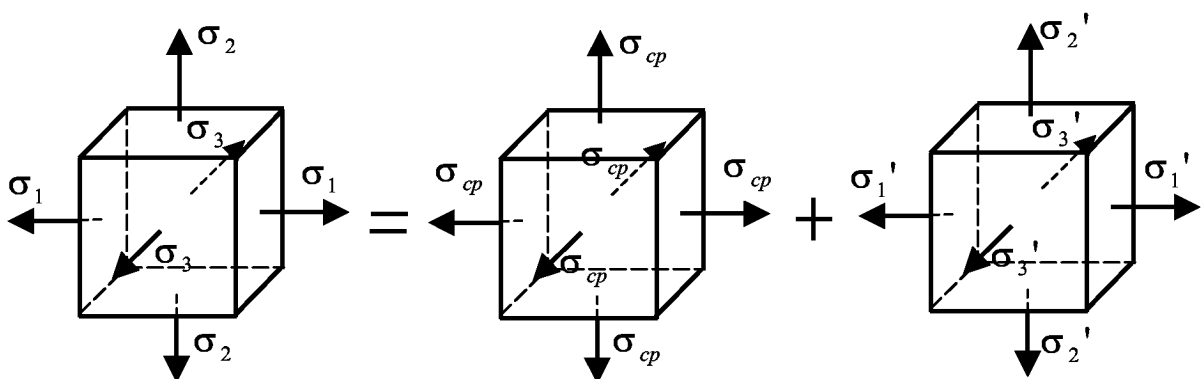


Рис. 7.1

растяжению (сжатию), когда по всем граням кубика действуют одинаковые напряжения

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Второе напряженное состояние характеризуется напряжениями

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{cp}; \quad \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{cp}; \quad \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{cp}.$$

Изменение объема кубика от действия этих напряжений равно нулю. Действительно, подставляя их значения в формулу для объемной деформации из предшествующей главы, получим

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') = \frac{1-2\mu}{E} \left( \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' - 3 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) = 0$$

Изменение объема кубика происходит только от действия напряжений, соответствующих первому напряженному состоянию. Для определения  $u_0$  подставим в формулу для  $u$  вместо  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  напряжения  $\sigma_{cp}$ . В результате получим

$$u = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Тогда удельная энергия формоизменения определяется как разность между  $u$  и  $u_0$ . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)) = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned}$$

Для случая простого растяжения  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = [\sigma]$  получим  $[u_\phi] = \frac{1+\mu}{6E} 2[\sigma]^2$ . Учитывая это условие прочности, согласно четвертой теории прочности, запишется в виде

$$\sigma_{экр IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

Четвертая теория прочности хорошо подтверждается экспериментально для пластических материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Появление малых пластических деформаций в материале четвертой теорией прочности определяется более точно, чем третьей. Поэтому ее часто называют условием пластичности.



## 7.6 Теория прочности Мора

В отличие от изложенных выше теорий, теория Мора основывается не на гипотезах, а на экспериментальных данных. Зависимость между прочностными свойствами материала и видом напряженного состояния выводится и обосновывается с использованием кругов напряжений Мора. Для этого выбирается некоторое напряженное состояние и одновременно увеличиваются его компоненты. Когда напряженное состояние станет предельным, на напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  строится соответствующий им круг Мора. Среднее напряжение  $\sigma_2$  не учитывается. Опыт показывает, что ошибка при этом не превышает 10 – 15 %. Строится серия таких кругов, соответствующих различным напряженным состояниям (рис. 7.2). Огибающая этих кругов, форма которой зависит от свойств материала является его механической характеристикой.

Если огибающая предельных кругов Мора построена, то для ответа на вопрос является ли напряженное состояние, характеризующееся главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , предельным и оценки прочности материала следует построить для  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  круг напряжений в опасной точке материала. Прочность будет обеспечена, если он целиком лежит внутри огибающей. Для нахождения коэффициента запаса следует определить во сколько раз необходимо увеличить  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , чтобы круг касался огибающей.

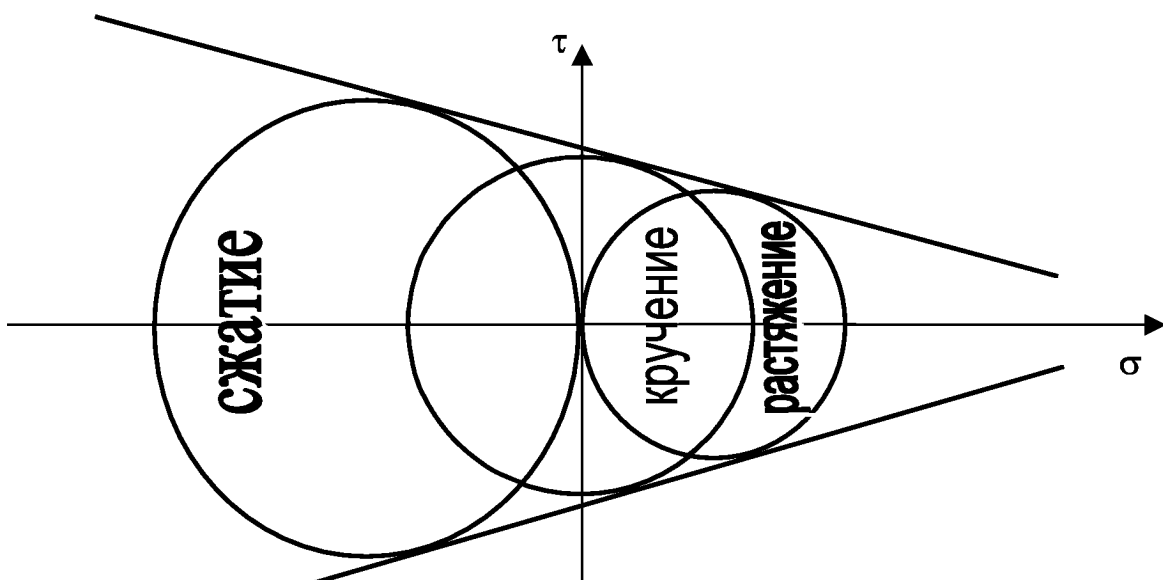


Рис.7.2

Для построения действительной огибающей предельных кругов Мора потребовалось бы опытным путем исследовать всевозможные напряженные состояния. Это неосуществимая задача, поэтому на практике действительную огибающую заменяют прямыми касательными лишь к двум предельным кругам, соответствующим опытам на одноосное растяжение и сжатие.

Условие прочности для промежуточного напряженного состояния с главными напряжениями в  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и предельным кругом Мора с центром в точке  $O$  (рис. 7.3) получим из следующих геометрических соотношений.

Проведем прямые  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$ ,  $O_3M_3$ , соединяющие центры предельных кругов Мора и точки их касания с предельной прямой, а также отрезок  $AO_1$  параллельный  $M_1M_2$ . Из подобия  $\Delta O_1O_2B$  и  $\Delta O_1O_2A$  получим следующие зависимости

$$\frac{O_3B}{O_1O_3} = \frac{O_2A}{O_1O_2},$$

где

$$O_3B = O_3M_3 - O_1M_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma_+]}{2}; \quad O_1O_3 = OO_1 - OO_3 = \frac{[\sigma_+]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

$$O_2A = O_2M_2 - O_1M_1 = \frac{[\sigma_-]}{2} - \frac{[\sigma_+]}{2}; \quad O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = \frac{[\sigma_+]}{2} + \frac{[\sigma_-]}{2}.$$

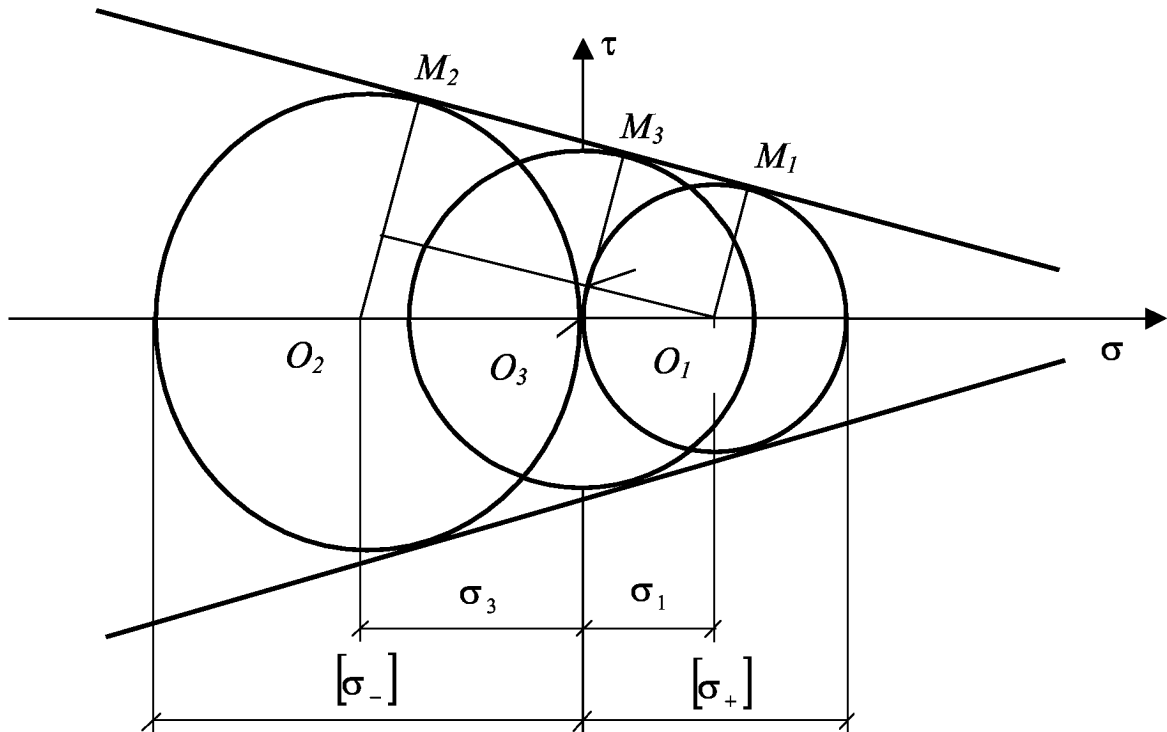


Рис.7.3

Учитывая эти обозначения, преобразуем последнее равенство к виду

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 = [\sigma_+].$$

Тогда получим условие прочности по теории Мора

$$\sigma_{\text{экв } M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 = [\sigma_+].$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, т.е.  $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ , теория прочности Мора совпадает с третьей теорией.

### *ВЫВОДЫ :*

Таким образом, разрушение материала может происходить путем отрыва одной части от другой и путем среза. Как правило, разрушение путем отрыва происходит хрупко, без заметных остаточных деформаций. Разрушение путем среза сопровождается пластическими деформациями. Поэтому первую и вторую теории можно применять для оценки прочности хрупких материалов, а третью и четвертую - пластических. Теория Мора позволяет учитывать разное сопротивление материала растяжению и сжатию.

## ГЛАВА 8

### ИЗГИБ

#### 8.1 Деформации при изгибе и основные допущения

Очень часто стержень подвергается действию поперечной нагрузки, плоскость действия которой проходит через ось стержня. Такой вид деформации называется *изгибом* (рис.8.1)

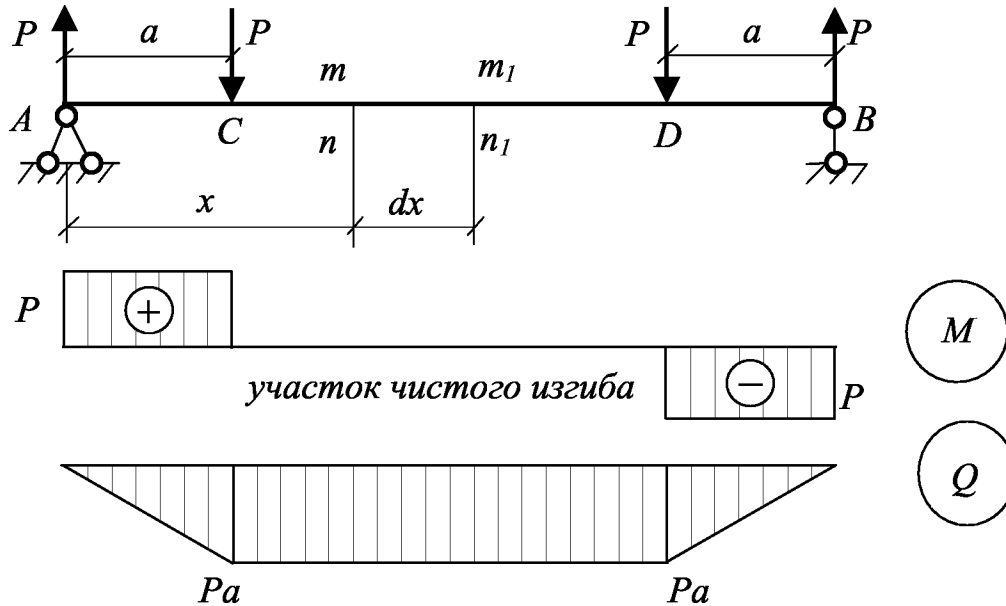


Рис .8.1

Если все нагрузки лежат в одной плоскости, называемой силовой, и эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки, то *изгиб называется плоским*. При плоском изгибе ось балки и после деформации остается в силовой плоскости.

Если в сечении балки возникает только один изгибающий момент, то *изгиб называется чистым* ( $CD$  - участок чистого изгиба, рис.8.1). Если в сечении кроме изгибающего момента возникает и поперечная сила, то такой *изгиб называется поперечным* (участки  $CD$  и  $DB$ ).

Рассмотрим плоский чистый изгиб прямого стержня. Если на его боковую поверхность нанести сетку в виде продольных и поперечных прямых (рис.8.2а), то при изгибе можно заметить следующее (рис.8.2б):

- 1) продольные линии искривляются по дуге окружности;
- 2) поперечные линии остаются прямыми и только поворачиваются относительно друг друга; отсюда можно сделать

вывод, что поперечные сечения стержня остаются плоскими и после деформации, то есть справедлива *гипотеза плоских сечений*.

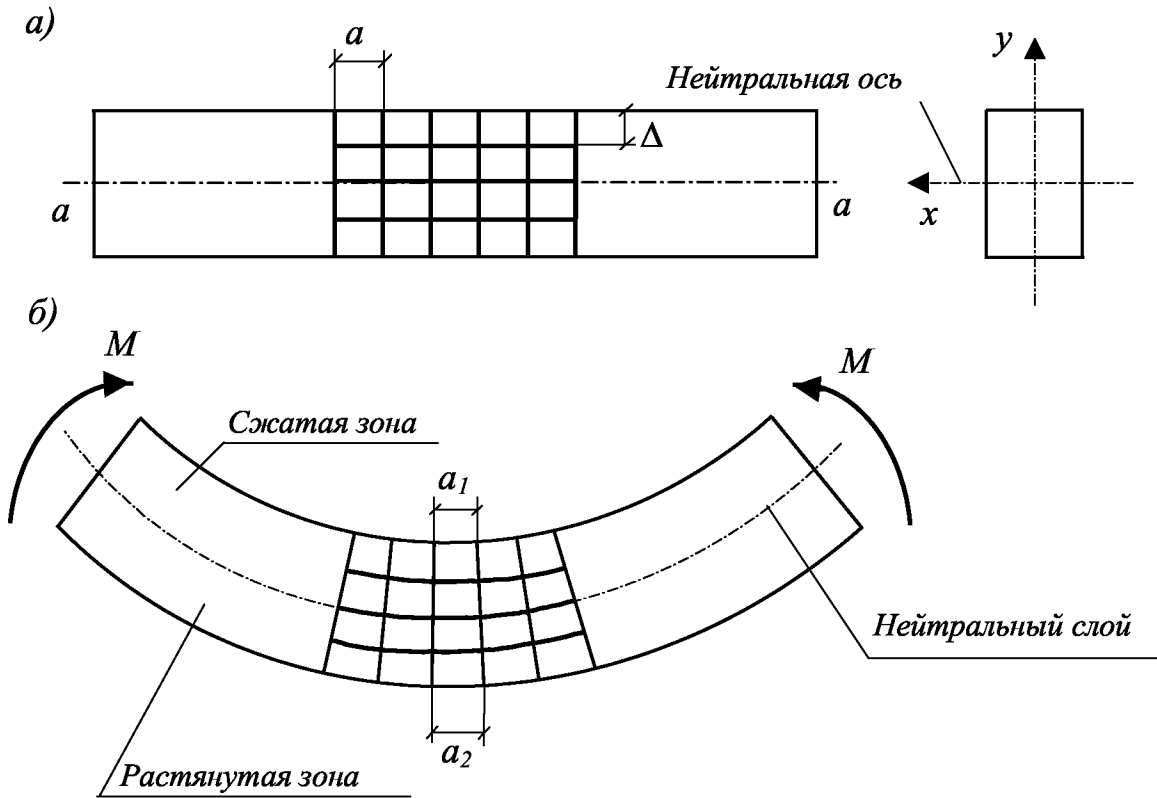


Рис.8.2

3) верхние волокна укорачиваются ( $a_1 < a$ ), а нижние удлиняются ( $a_2 > a$ ). Между ними расположены волокна, не изменяющие свою длину. Они образуют *нейтральный слой*.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* или *нейтральной осью*.

При плоском изгибе нейтральный слой оказывается перпендикулярным к силовой плоскости, и значит, нейтральная линия также перпендикулярна к ней. Будем считать, что ось  $Z$  проведена в сечении так, что она совпадает с нейтральной линией (но положение ее по высоте сечения пока неизвестно);

4) расстояния между продольными линиями  $\Delta$  не изменяются. На основании этого можно предположить, что продольные волокна не нажимают друг на друга и не стремятся оторваться одно от другого, то есть каждое волокно испытывает простое растяжение или сжатие.

## 8.2 Определение напряжений при чистом изгибе

В сечении балки, взятом на участке чистого изгиба, возникает только один изгибающий момент

$$M_z = \int_F \sigma y dF \quad (8.1)$$

Следовательно, в сечении действуют нормальные напряжения  $\sigma$  (рис.8.3).

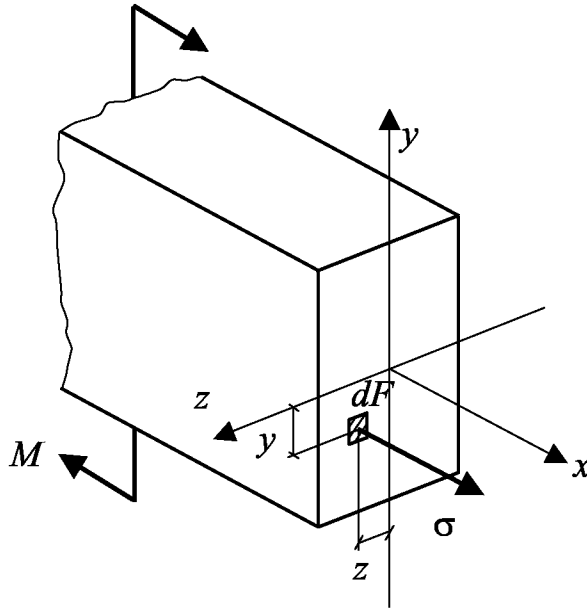


Рис.8.3

Продольная сила  $N$  и изгибающий момент  $M_y$  будут равны нулю, то есть

$$N = \int_F \sigma dF = 0 \quad (8.2)$$

$$M_y = \int_F \sigma z dF = 0 \quad (8.3)$$

Из формулы (8.1) нельзя определить величину нормальных напряжений  $\sigma$ , так как неизвестно, как они распределены по сечению. Задача определения напряжений в сечении является статически неопределимой. Воспользуемся выводом о том, что отдельное волокно при изгибе испытывает простое растяжение или сжатие. Тогда для него можно записать закон Гука как при растяжении

$$\sigma = E\varepsilon \quad (8.4)$$

Чтобы найти относительную деформацию  $\varepsilon$  на участке чистого изгиба выделим элемент балки длиной  $dx$  и рассмотрим его деформацию (рис.8.4).

Сечения  $mn$  и  $m_1n_1$  остаются плоскими и поворачиваются на угол  $d\varphi$ . Волокна нейтрального слоя искривляются, радиус кривизны нейтрального слоя  $\rho$ . Длина волокон нейтрального слоя не изменяется.

$$dx = \rho d\varphi = \rho d\varphi$$

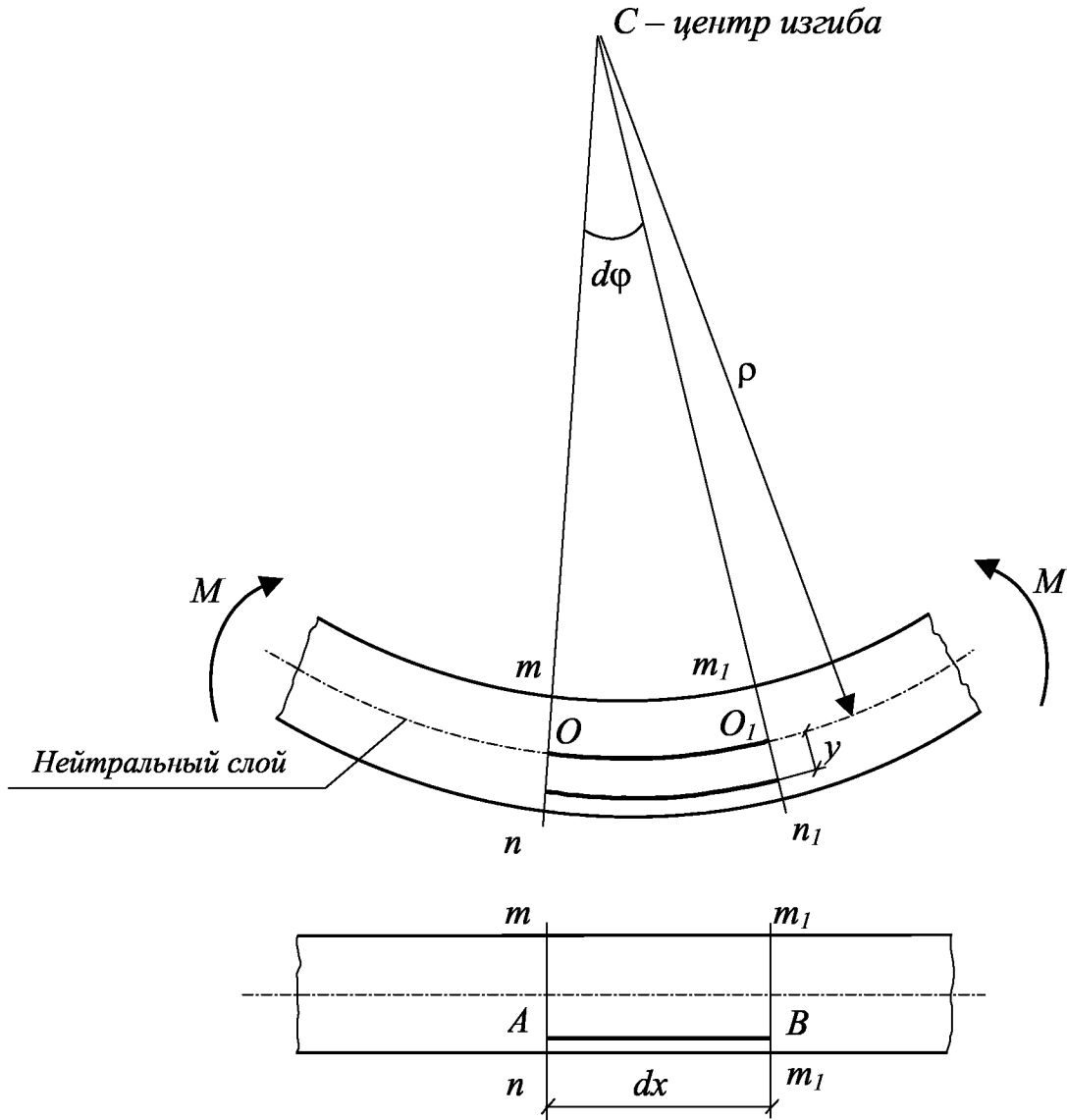


Рис.8.4

Волокно  $AB$ , расположенное на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, удлиняется, радиус его кривизны  $\rho + y$ .

Относительное удлинение волокна

$$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho dy}{\rho dx} = \frac{y}{\rho}$$

то есть

$$\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}, \quad (8.5)$$

Тогда

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (8.6)$$

Подставим выражение (8.6) в зависимость (8.1):

$$M_z = \int_F \sigma y dF = \int_F E \frac{y}{\rho} y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF$$

Учитывая, что  $\int_F y^2 dF = J_z^F$  представляет собой момент инерции сечения относительно оси  $Z$ , можно записать

$$M_z = \frac{1}{\rho} EJ$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (8.7)$$

Величина  $EJ_z$  называется *жесткостью поперечного сечения* при изгибе. Кривизна волокон нейтрального слоя прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения при изгибе.

Из формулы (8.7) видно, что если балка изготовлена из однородного материала ( $E = const$ ) и имеет постоянное сечение ( $J_z = const$ ), то при чистом изгибе ( $M_z = const$ ) ее ось искривляется по дуге окружности ( $\frac{1}{\rho} = const$ , и значит  $\rho = const$ ).

Подставим в формулу (6) значение кривизны  $\frac{1}{\rho}$ . Получим

$$\sigma = Ey \frac{1}{\rho} = Ey \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{M_z y}{J_z},$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M_z y}{J_z}} \quad (8.8)$$

Это и есть искомая формула, дающая возможность определять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в произвольной точке поперечного сечения. Из формулы видно, что нормальные напряжения по сечению распределяются неравномерно. Какую бы форму и размеры не имело сечение, напряжения в точках нейтральной оси равны нулю (при  $y = 0$ ,  $\sigma = 0$ ). Величина  $\sigma$  линейно возрастает по мере удаления от



нейтральной оси, наибольшего значения нормальные напряжения достигают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси при  $y = y_{\max}$ . Знак напряжений определяется знаком изгибающего момента. При положительном изгибающем моменте нижние волокна будут растянуты и  $\sigma > 0$ , а верхние волокна сжаты и для них  $\sigma < 0$ .

Осталось только установить, где в сечении расположена ось  $z$  - нейтральная ось сечения. Для этого используем условия (8.2) и (8.3), подставив туда значения  $\sigma$  из формулы (8.8).

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F \frac{M_z y}{J_z} dF = \frac{M_z}{J_z} \int_F y dF = 0$$

$$M_y = \int_F \sigma z dF = \int_F \frac{M_z y}{J_z} z dF = \frac{M_z}{J_z} \int_F y z dF = 0$$

Поскольку  $\frac{M}{J_z} \neq 0$ , а  $\int_F y dF = S_z$  и  $\int_F y z dF = J_{yz}$ , то

$$S_z = 0, J_{yz} = 0 \quad (8.9)$$

На основании этого заключаем, что ось  $z$  - нейтральная ось - проходит через центр тяжести сечения, а оси  $y$  и  $z$  - главные центральные оси сечения. То есть при плоском изгибе, когда силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей стержня, нейтральный слой совпадает с другой главной плоскостью.

Эпюра напряжений для любых сечений, имеющих горизонтальную ось симметрии, всегда будет иметь вид, представленный на рис.8.5

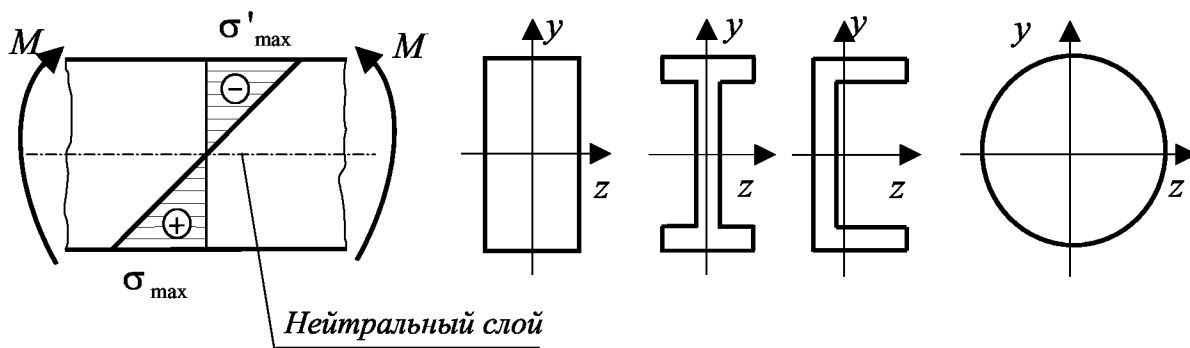


Рис.8.5

При положительном изгибающем моменте все волокна, расположенные выше нейтральной линии, окажутся сжатыми, а ниже ее - растянутыми. Если же изгибающий момент будет отрицательным, то изменятся и знаки напряжений.

Максимальные напряжения получим, подставив в формулу (8.8)  
 $y = y_{\max}$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{J_z} = \frac{M}{\frac{J_z}{y_{\max}}}$$

Отношение осевого момента инерции к расстоянию от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения называется *осевым моментом сопротивления*, т.е.

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} \quad (8.10)$$

Момент сопротивления измеряется в  $\text{см}^3$  и зависит от формы, и размеров поперечного сечения.

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \quad (8.11)$$

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии, то расстояния от нейтральной оси до крайних нижних и крайних верхних волокон различны (рис.8.6)

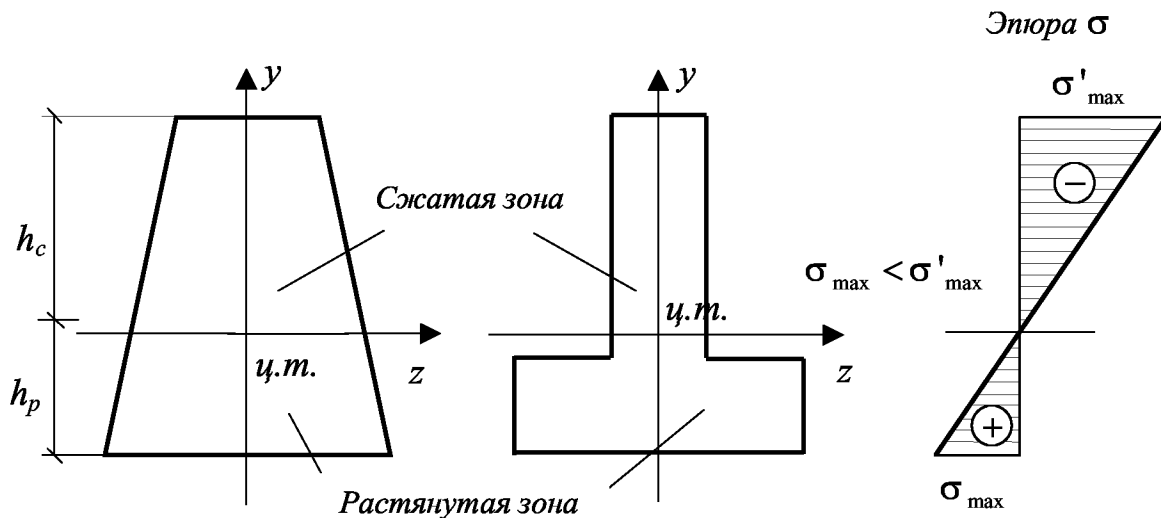


Рис.8.6

Обозначим их соответственно через  $h_c$  и  $h_p$ . Тогда напряжения в крайних волокнах выразятся формулами

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh_c}{J_z}, \quad \sigma'_{\max} = \frac{Mh_p}{J_z} \quad (8.12)$$

### 8.3 О рациональной форме поперечного сечения при изгибе

Полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы о рациональной форме сечения при чистом изгибе. Так как напряжения в сечении распределяются неравномерно, то материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен очень мало. Поэтому в целях его экономии и снижения веса конструкций для деталей, работающих на изгиб, следует выбрать такие формы сечения, чтобы большая часть материала была удалена от нейтральной оси.

Если материал конструкции одинаково работает на растяжение и сжатие (например, сталь) рациональными будут симметричные относительно нейтральной оси сечения. Близким к идеальному, является двутавровое сечение, хуже будет сечение в виде прямоугольника. Деревянные балки чаще всего имеют прямоугольное сечение, так как изготовление деревянных двутавровых балок потребует большой затраты труда. Нерационально круглое сечение, так как вес балки такого сечения почти в 4 раза превышает вес двутавровой балки, имеющей ту же прочность. Поэтому выбор круглого сечения может быть оправдан только конструктивными или технологическими соображениями (например, для вращающихся деталей), причем в таком случае выгоднее ставить полое сечение.

Для балок из хрупких материалов (чугун, бетон) целесообразно использовать сечения несимметричные относительно нейтральной оси. Хрупкие материалы хорошо работают на сжатие и значительно хуже на растяжение. Поэтому, выбирая форму сечения можно добиться того, чтобы нейтральная линия была сдвинута в сторону растянутой зоны и  $\sigma_{\max}$  в растянутой зоне было значительно меньше  $\sigma'_{\max}$  в сжатой зоне, как показано на рис.8.6.

### 8.4 Расчет на прочность по нормальным напряжениям

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы максимальные нормальные напряжения в опасном сечении, т.е. в сечении, где изгибающий момент наибольший, не превосходили допустимой величины. Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для симметричных относительно нейтральной оси сечений имеет вид:

$$\boxed{\frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma]} \quad (8.13)$$

Для балок из хрупких материалов надо составлять два условия прочности - для сжатой и растянутой зоны отдельно:

$$\frac{|M_{\max}|}{J} h_c \leq [\sigma_-] \text{ и } \frac{|M_{\max}|}{J} h_p \leq [\sigma_+] \quad (8.14)$$

Здесь  $[\sigma_-]$  и  $[\sigma_+]$  - допускаемые напряжения на сжатие и растяжение.

Зависимости (8.13) и (8.14) позволяют делать три вида расчетов на прочность:

- 1) проверочный расчет, при котором вычисляются максимальные напряжения и сравниваются с допускаемыми значениями;
- 2) проектировочный расчет, т.е. подбор сечений;
- 3) определение величины допускаемой нагрузки.

При подборе сечений прокатного профиля необходимо определить требуемый момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

и затем из таблиц сортамента найти соответствующий номер профиля.

Выведем формулу момента сопротивления для прямоугольного сечения (рис.8.7).

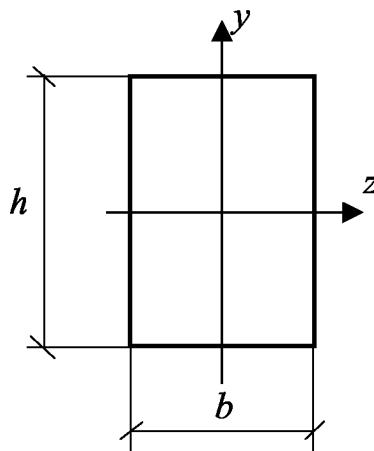


Рис.8.7

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (8.15)$$

Определяя размеры прямоугольного сечения по зависимостям (8.13) и (8.15) необходимо предварительно задаться соотношением  $\frac{h}{b}$ .

Для круглого сечения (рис.8.8) осевой момент сопротивления определяется аналогично.

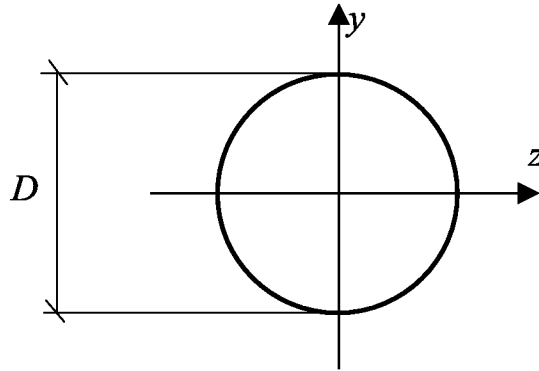


Рис.8.8

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32},$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \quad (8.16)$$

В проектировочных расчетах находят диаметр сечения.

$$\frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{32M_{\max}}{\pi D^3} \leq [\sigma].$$

Откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}}.$$

Допускаемая нагрузка на балку определяется величиной максимального изгибающего момента.

### 8.5 Касательные напряжения при изгибе

В случае поперечного изгиба в сечениях стержня кроме изгибающего момента  $M$  возникает и поперечная сила  $Q$ . Поэтому кроме нормальных напряжений возникают и касательные напряжения. Определим касательные напряжения в балке прямоугольного поперечного сечения (рис.8.9)

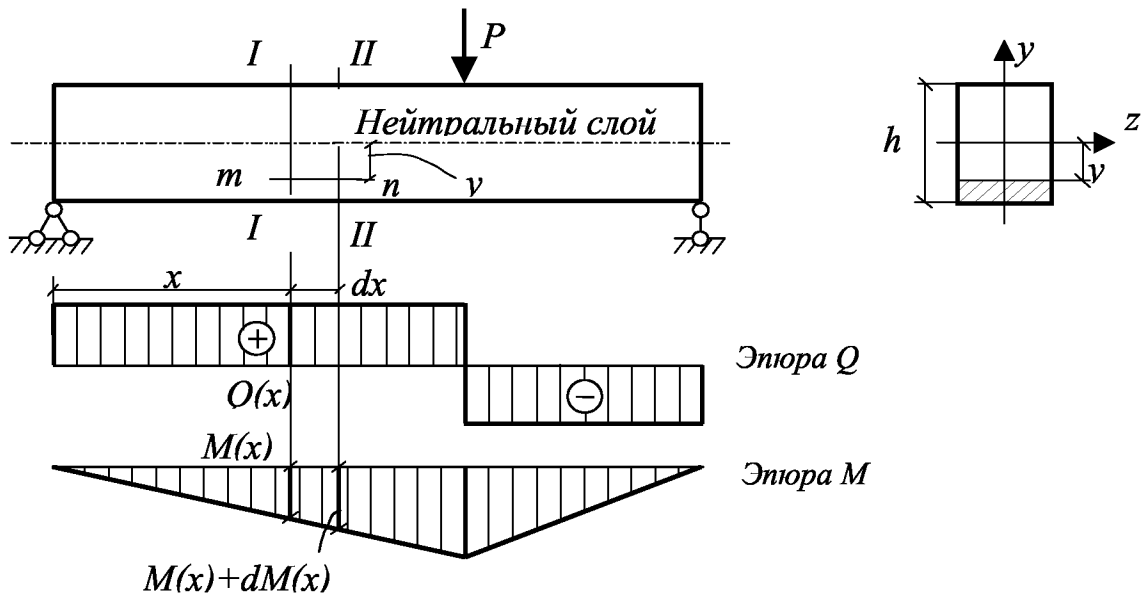


Рис.8.9

Возьмем два произвольных сечения  $I-I$  и  $II-II$ , расположенных на расстоянии  $dx$ . Как видно из эпюр, в сечении  $I-I$  действуют поперечная сила  $Q_{(x)}$  и изгибающий момент  $M_{(x)}$ , а в сечении  $II-II$  - поперечная сила  $Q_{(x)}$  и изгибающий момент  $M_{(x)} + dM$ .

Нормальные напряжения, вызванные изгибающими моментами в сечениях  $I-I$  и  $II-II$ , соответственно определяются по формулам:

$$\sigma' = \frac{My}{J_z}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM)y}{J_z}$$

Проведем горизонтальное сечение  $mn$  на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя балки и рассмотрим равновесие выделенного элемента (рис.8.10).

Равнодействующие нормальных напряжений, действующие на левую и правую боковые грани параллелепипеда, обозначим  $N_1$  и  $N_2$ . Площадь граней обозначим  $F_{отс}$  (это часть отсеченной площади поперечного сечения, расположенная между горизонтальным сечением и краем сечения балки).

$$N_1 = \int_{F_{отс}} \sigma' dF = \int_{F_{отс}} \frac{My}{J_z} dF = \frac{M}{J_z} \int_{F_{отс}} y dF.$$

Обозначим  $\int_{F_{отс}} y dF = S_z^{отс}$ , тогда  $N_1 = \frac{M}{J_z} S_z^{отс}$ ;

$$N_2 = \int_{F_{отс}} \sigma'' dF = \int_{F_{отс}} \frac{(M + dM)y}{J_z} dF = \frac{M + dM}{J_z} S_z^{отс}.$$

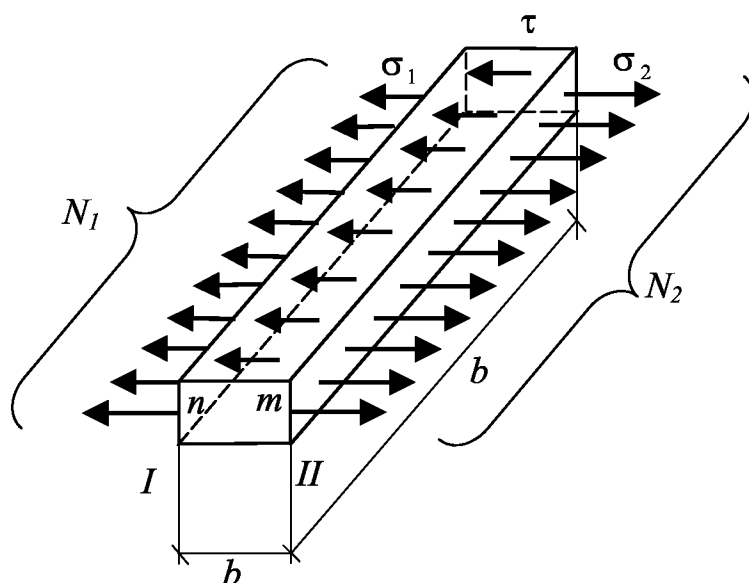


Рис.8.10

Выделенный элемент находится в равновесии и для него справедливо условие равновесия  $\sum X = 0$ . Но  $N_2 > N_1$ , поэтому естественно предположить, что в горизонтальном сечении действуют касательные напряжения  $\tau$ . Площадь горизонтального сечения равна  $bdx$ . Для большинства поперечных сечений делается допущение, что напряжения  $\tau$  распределены равномерно по ширине сечения. Это справедливо для узких сечений, когда высота сечения велика по сравнению с шириной ( $\frac{h}{b} > 2$ ).

Используя уравнение равновесия, получим

$$\sum x = N_2 - N_1 - \tau b dx = 0;$$

откуда

$$\tau = \frac{N_2 - N_1}{bdx} = \frac{dMS_z^{отс}}{dx b J_z}$$

Используя зависимость  $\frac{dM}{dx} = Q$ , окончательно получаем

$$\tau = \frac{QS_z^{отс}}{bJ_z}$$

где  $Q$  - величина поперечной силы в сечении;  $S_z^{отс}$  - статический момент части площади поперечного сечения, расположенной между рассматриваемым волокном и краем сечения балки, относительно нейтральной оси;  $b$  - ширина сечения в той точке, где определяются касательные напряжения;  $J_z$  - осевой момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Эта зависимость была установлена выдающимся русским инженером Д.И.Журавским и названа его именем. Д.И.Журавский (1821-1891) - один из пионеров строительной механики и мостостроения в России - является одним из основателей науки о сопротивлении материалов, особенно много сделавшим в теории изгиба.

Касательные напряжения возникают не только в горизонтальных сечениях. Согласно закону парности напряжения возникают и в поперечных сечениях балки. На рис.8.11 они не показаны. Знак касательных напряжений определяется знаком поперечной силы  $Q$ .

### 8.6 Распределение касательных напряжений по высоте сечения балки

Рассмотрим, как распределяются касательные напряжения в балках различного поперечного сечения.

а) в случае прямоугольного сечения.

Для него  $\frac{Q}{bJ_z} = const$  и меняется только величина статического момента  $S_z^{отс}$ . Возьмем произвольную точку  $K$ , отстоящую от нейтральной оси  $z$  на расстоянии  $y$  (рис.8.11а). Проведем через эту точку сечение параллельно оси  $z$ . Площадь отсеченной части сечения

$$F_{отс} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

Статический момент этой площади

$$S_z^{отс} = F_{отс}y_1 = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

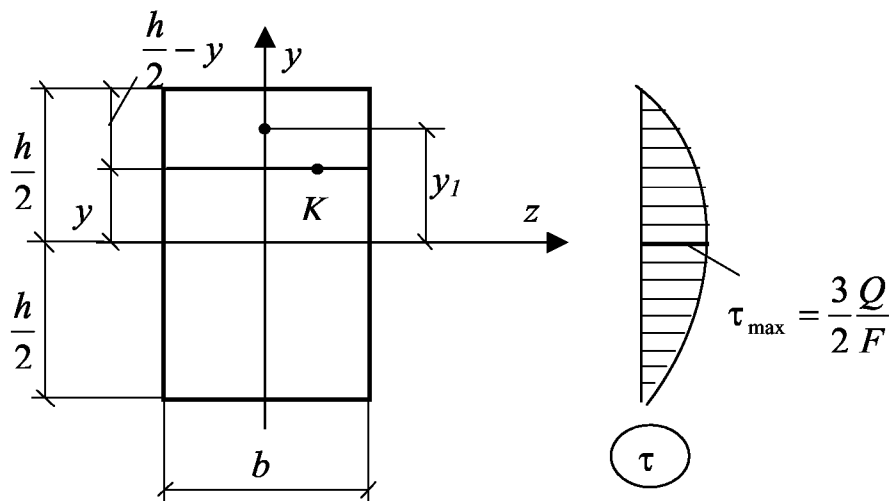


Рис.8.11



Подставляя в формулу Журавского найденное значение  $S_z^{отс}$ , а также  $J_z = \frac{bh^3}{12}$ , получаем

$$\tau = Q \frac{\frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

Переменная  $y$  входит во второй степени, следовательно, эпюра  $\tau$  будет параболической. В наиболее удаленных от нейтральной оси точках при  $y = \pm \frac{h}{2}$   $\tau = 0$ .

В нейтральном слое при  $y = 0$  касательные напряжения будут максимальны

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2F}$$

По этим данным и построена эпюра  $\tau$  на рис.8.12б.

б) двутавровое сечение

При построении эпюры касательных напряжений для двутаврового сечения надо учитывать, что изменяется не только статический момент  $S_z^{отс}$  но и ширина сечения. Поэтому эпюра касательных напряжений отроится по характерным точкам (рис.8.12).

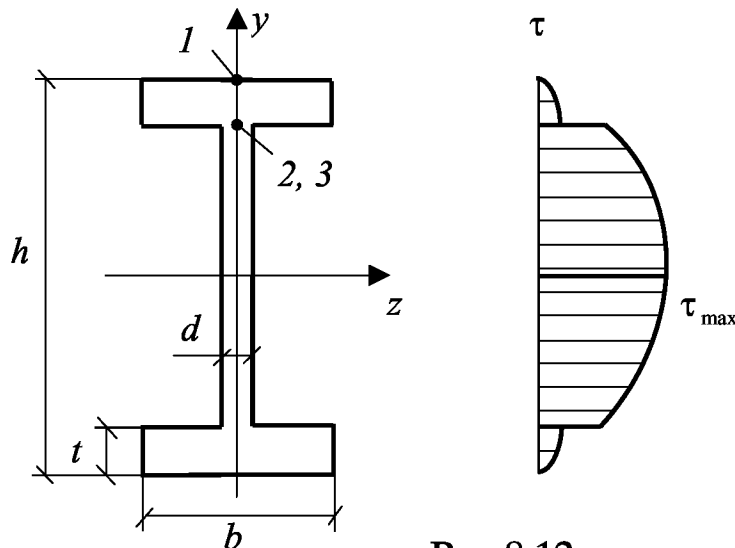


Рис.8.12

В верхней точке  $S_z^{отс} = 0$ , поэтому  $\tau = 0$ . В месте примыкания полки к стенке (точки 2 и 3) будем считать, что эти точки расположены бесконечно близко одна от другой, но точка 2 - принадлежит полке, а точка 3 - стенке.

В точке 2 ширина сечения равна  $b$ , а статический момент определяется статическим моментом полки с размерами  $b \times t$ . Для точки 3 статический момент остается таким же, но ширина сечения равна  $d$ , поэтому касательные напряжения резко возрастают. Наибольшие касательные напряжения возникают на нейтральной оси, где  $S_z^{отс}$  достигает максимального значения.

в) для круглого сечения (рис.8.13) формула Журавского для вертикальной составляющей касательного напряжения может быть записана в виде

$$\tau = \frac{4Q}{3F} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

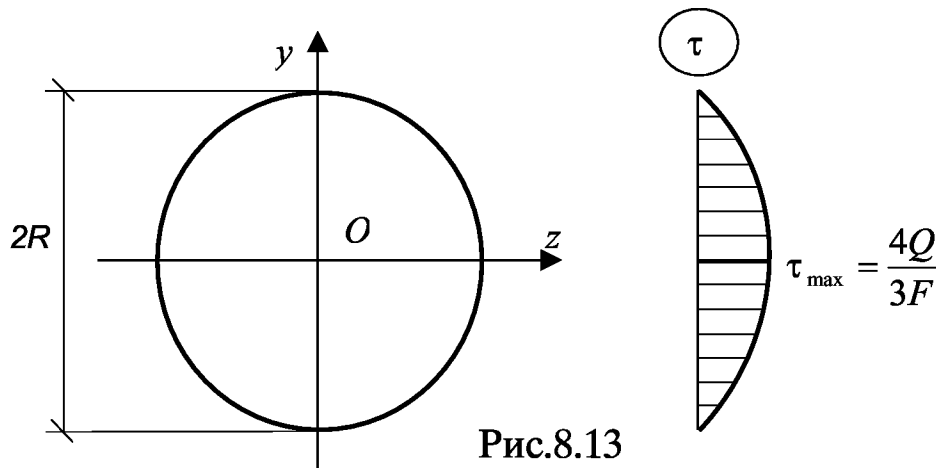


Рис.8.13

Как видно, эпюра  $\tau$  получается параболической. В наиболее удаленных точках от нейтральной оси при  $y = \pm R, \tau = 0$ . Наибольшие касательные напряжения будут в нейтральном слое при  $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3F}$$

На рис.8.14 показан вид эпюр для некоторых других сечений.

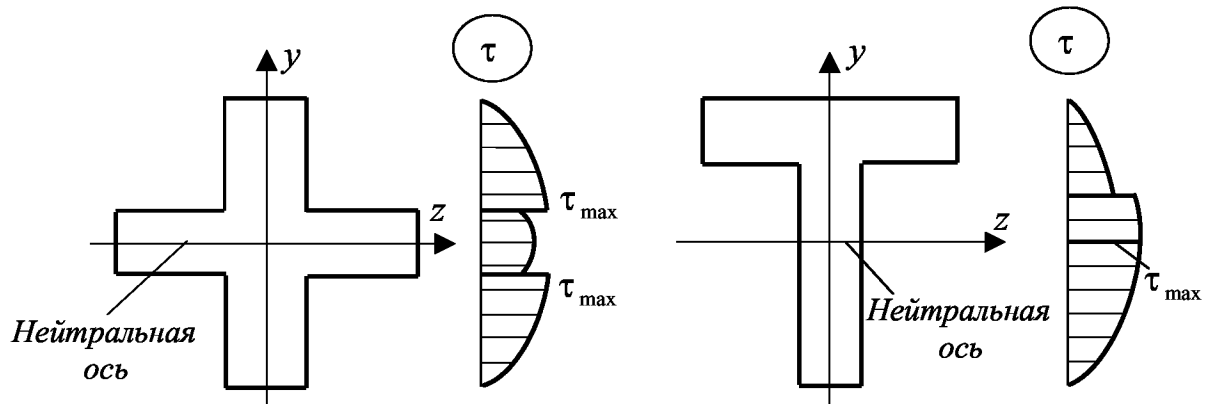


Рис.8.14

Анализируя эпюры касательных напряжений можно сделать следующие выводы:

- 1) вид эпюры  $\tau$  зависит от формы поперечного сечения,
- 2) касательные напряжения по сечению распределяются неравномерно и максимального значения достигают чаще всего на нейтральной оси сечения.

### **8.7 Расчет балок на прочность по касательным напряжениям**

При изгибе балок кроме расчета на прочность по нормальным напряжениям производится расчет на прочность по касательным напряжениям. Расчет выполняется для сечения, где действует  $Q_{\max}$

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  - допускаемое касательное напряжение. Для стальных балок.

$$[\tau] \approx 0,6[\sigma].$$

Для балок прямоугольного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_{\max}|}{F} \leq [\tau].$$

Для балок круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q_{\max}|}{F} \leq [\tau].$$

Для балок двутаврового сечения

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| S_{z\max}}{dJ_z} \leq [\tau].$$

Как правило, в длинных балках сплошного сечения касательные напряжения значительно меньше нормальных напряжений. Для таких балок расчет на прочность по касательным напряжениям выполняется как проверочный.

### **8.8 Исследование напряженного состояния балок при нонеречном изгибе. Расчет на прочность по главным напряжениям**

Наблюдения показывают, что в процессе эксплуатации в балках появляются трещины, имеющие различную ориентировку: поперечные, продольные и наклонные.

Расположение и направление этих трещин указывает причину, их вызывающую.

Вертикальные трещины появляются у нижнего или верхнего края балки в зоне наибольшего изгибающего момента. Это свидетельствует

о том, что причиной их появления являются нормальные напряжения  $\sigma_{\max}$ .

Горизонтальные трещины в однопролетных балках чаще всего появляются над опорами, т.е. в зоне, где возникают  $Q_{\max}$ , и располагаются они по оси балки. Следовательно, причиной их появления являются касательные напряжения  $\tau_{\max}$ .

Но возможен и третий случай, когда причиной повреждения балки являются наклонные трещины, занимающие промежуточное положение между краем балки и осью. Их появление нельзя объяснить действием или нормальных или касательных напряжений.

Поэтому рассмотрим, в каком напряженном состоянии находится материал балки при плоском поперечном изгибе. В качестве примера возьмем балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную сосредоточенной силой (рис.8.15).

На рис.8.16а показан фасад балки и эпюры  $Q$  и  $M$ , на рис.8.15б - поперечное сечение балки и эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении под силой. Вырежем из балки в окрестностях некоторых точек элементарные кубики, одна из граней которых совпадает с плоскостью поперечного сечения. Рассмотрим, какие напряжения действуют по граням кубиков.

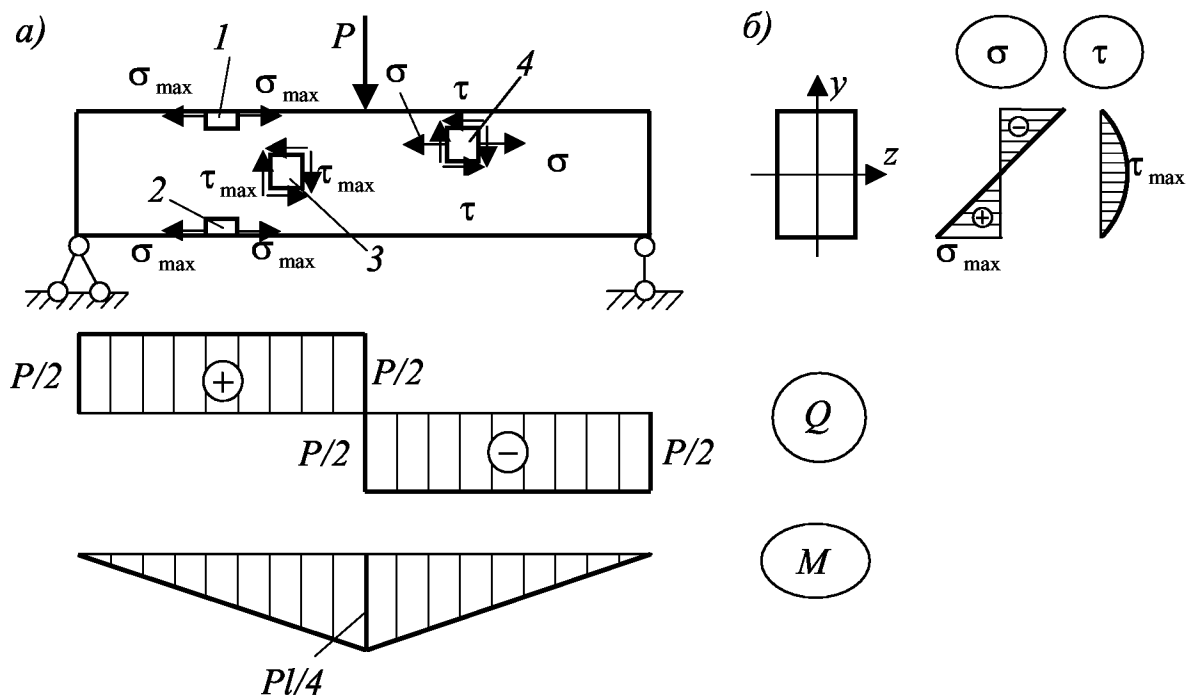


Рис.8.15

Элементы 1 и 2 выделены у крайних точек сечения, здесь  $\tau = 0$ ,  $\sigma = \sigma_{\max}$  и элементы испытывают простое растяжение или сжатие, т.е. находятся в линейном напряженном состоянии. Поэтому условие прочности для них

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Элемент 3 выделен у точки нейтрального слоя балки, где  $\sigma = 0$ , а  $\tau = \tau_{\max}$ . Поэтому на гранях элементарного кубика действуют только касательные напряжения. Элемент испытывает чистый сдвиг.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{z\max}}{bJ} \leq [\tau].$$

На гранях элемента 4, выбранных произвольно, будут действовать и нормальные и касательные напряжения, знак и величина которых определяются величиной  $Q$  и  $M$ , и расположением элементов. Эти элементы находятся в плоском напряженном состоянии, при котором главные напряжения определяют по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right], \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]. \end{aligned}$$

Внося величины напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в выражения для эквивалентных напряжений по различным теориям прочности, получим условия прочности по главным напряжениям. Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \end{aligned}$$

Из этих зависимостей видно, что главные напряжения будут иметь большую величину в таких точках балки, в которых имеются одновременно большие нормальные и большие касательные напряжения. Следовательно, большие главные напряжения будут в тех сечениях балки, где одновременно  $M$  и  $Q$  имеют большие значения.

Изменения напряжений по высоте сечения связаны с видом поперечного сечения. В балках прямоугольного сечения закон изменения нормальных и касательных напряжений таков (рис.8.15), что у них по высоте сечения нет таких точек, в которых действовали бы

одновременно большие нормальные и большие касательные напряжения.

Иное положение в случае двутаврового сечения балки и вообще сечений с резко изменяющейся шириной (рис.8.16).

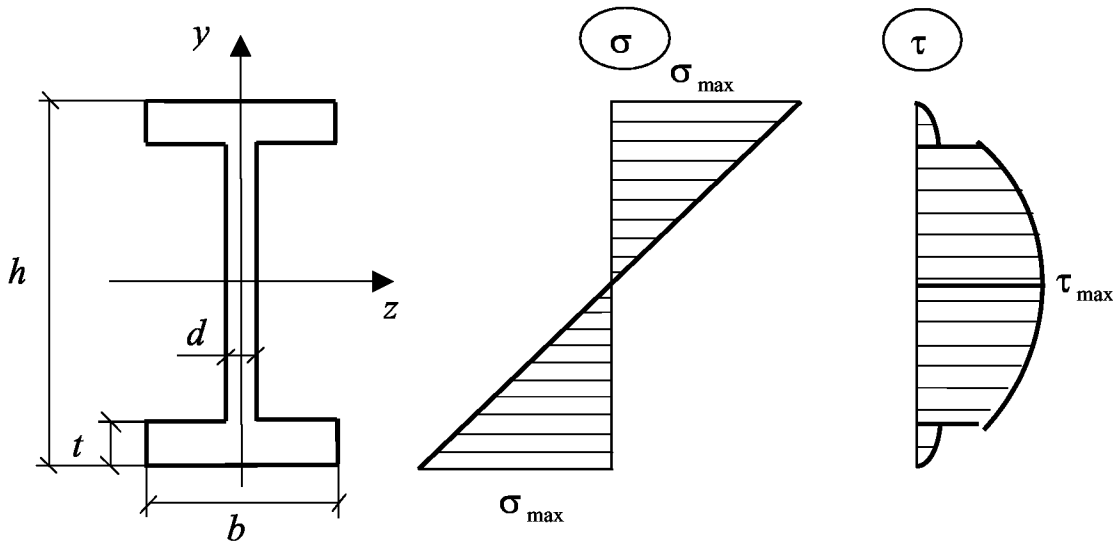


Рис .8.16

В месте сопряжения горизонтальной полки с вертикальной стенкой будут действовать большие нормальные и большие касательные напряжения. Следовательно, в таких точках могут возникать большие главные напряжения. Они могут быть причиной появления наклонных трещин. Поэтому, кроме расчета на прочность по нормальным и касательным напряжениям для таких балок необходимо выполнять проверку прочности по главным напряжениям.

### 8.9 Траектории главных напряжений

Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  действуют на площадках, наклон которых к плоскости поперечного сечения изменяется от точки к точке. Часто возникает необходимость знать не только величины

главных напряжений, но их направление. В частности, это необходимо при конструировании железобетонных балок, в которых арматуру следует располагать таким образом, чтобы она сопротивлялась действию растягивающих напряжений (рис.8.17).

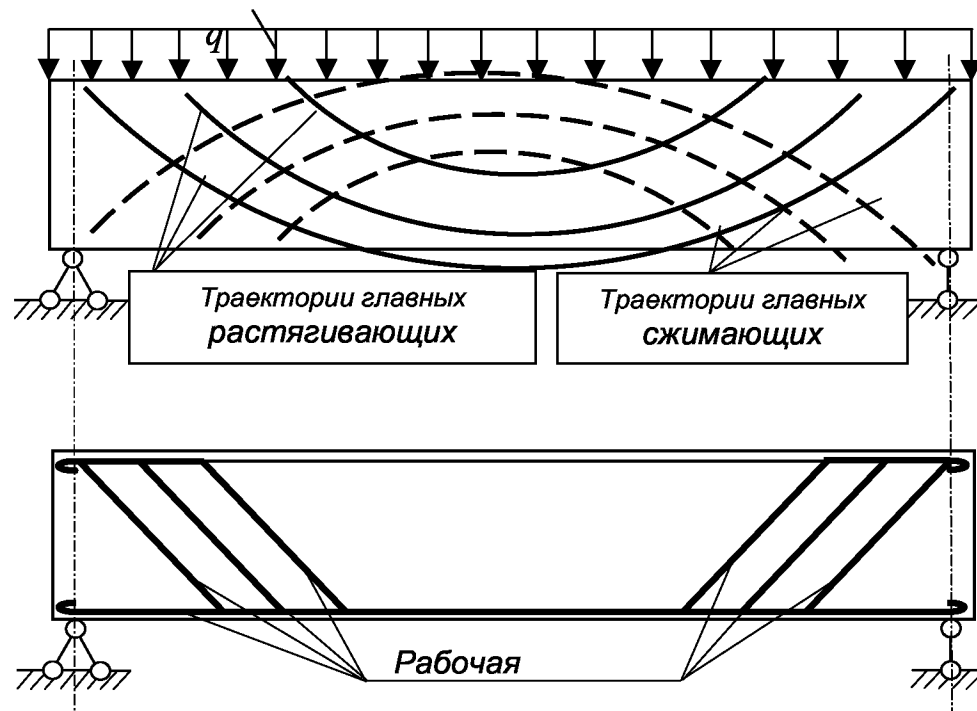


Рис.8.17

В любой балке можно построить линию, касательная к которой в каждой точке будет совпадать с направлением главных напряжений. Такая кривая называется *траекторией главных напряжений* (8.17). Траектории главных напряжений зависят от вида нагрузки и условия закрепления балки. Направление главных напряжений в каждой точке сечения может быть определено по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau}{\sigma},$$

или найдено построением круга напряжений Мора.

Через каждую точку балки проходят две траектории главных напряжений соответственно ( $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ), пересекающиеся между собой под прямым углом. В железобетонных балках арматуру обычно стремятся располагать в направлении траекторий главных растягивающих напряжений (рис.8.17).

## ГЛАВА 9

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

#### 9.1 Общие положения

Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе. При нагружении прямолинейная ось балки искривляется. Изогнутая ось балки называется упругой линией. Рассмотрим балку, представленную на рис.9.1.

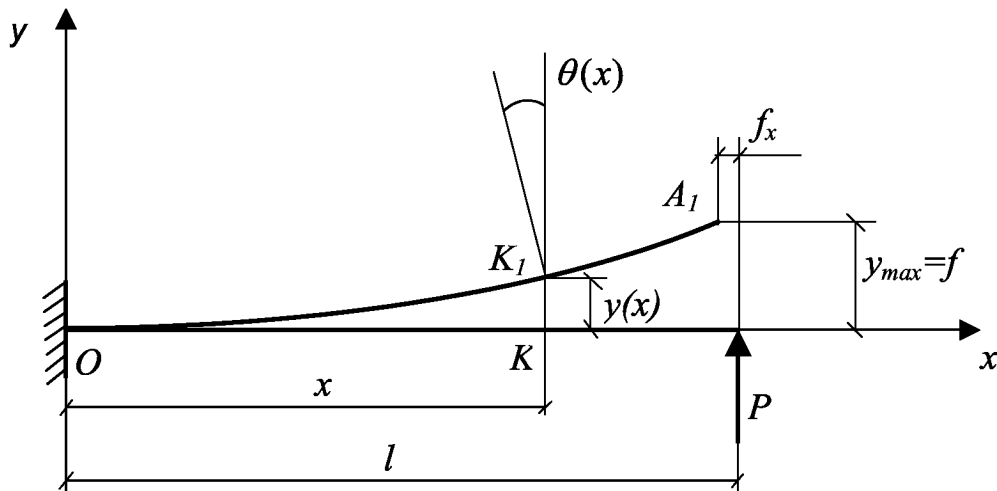


Рис.9.1

Поместим начало координат на ее левом конце, ось  $x$  направим вдоль оси балки вправо, а ось  $y$  - вверх. Под действием нагрузки точка  $A$  займет положение  $A_1$ . Перемещение  $f_x$  настолько мало по сравнению с  $f_y$ , что им можно пренебречь. Будем учитывать только те перемещения, что происходят перпендикулярно оси балки, т.е.  $f \approx f_y$ .

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется прогибом и обозначается  $y(x)$ .

Произвольное сечение  $K$ , расположенное на расстоянии  $x$  от начала координат, переместилось в точку  $K_1$ . Это перемещение и является прогибом балки  $y(x)$  в сечении с абсциссой  $x$ . Наибольший прогиб называется стрелой прогиба и обозначается буквой  $f$ .



Прогиб  $y(x)$  будем считать положительным, если перемещение происходит вверх, т.е. в направлении оси  $y$ .

При изгибе поперечные сечения балки не только получают линейные перемещения, но и поворачиваются относительно первоначального положения.

Угол  $\theta(x)$ , на который сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота*.

Угол поворота  $\theta(x)$  будем считать положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

Большие линейные и угловые перемещения недопустимы для нормальной эксплуатации конструкций. Например, изогнутая ось вала зубчатой передачи приведет к разрушению зубчатых колес и опор вала, если перемещения будут слишком большими. Нельзя допускать больших перемещений и в элементах инженерных сооружений (мостах, подкрановых балках и т.д.). Поэтому кроме расчетов на прочность в большинстве случаев выполняются и расчеты на жесткость.

Условие жесткости имеет вид:

$$\begin{aligned} f &\leq [f] \\ \theta_{\max} &\leq [\theta] \end{aligned}$$

Допустимые значения прогибов  $[f]$  и углов поворота  $[\theta]$  зависят от условий эксплуатации и назначения конструкции. Для стальных балок инженерных сооружений

$$[f] = \left( \frac{1}{1000} + \frac{1}{250} \right) l$$

Поэтому для проверки жесткости балки необходимо уметь определять перемещения. Кроме того, определение перемещений необходимо при решении статически неопределимых задач.

## 9.2 Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Пусть уравнение упругой линии будет  $y = f(x)$ . Тогда угол поворота произвольного сечения  $\theta$  можно определить как угол между осью  $x$  и касательной к упругой линии в этом сечении (рис.9.2), т.е.

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}}$$

Учитывая, что деформации очень малы, т.е.  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , получим зависимость между линейными и угловыми перемещениями.

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (9.1)$$

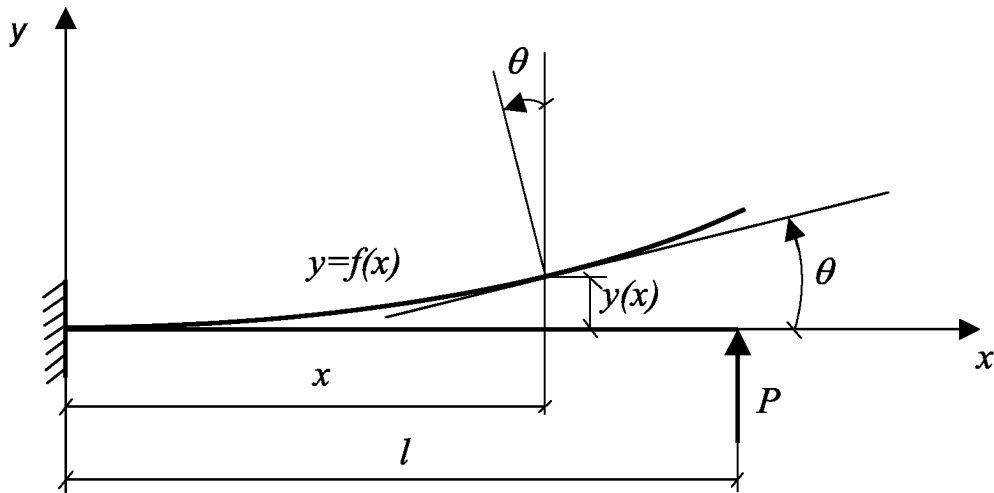


Рис.9.2

Найдем зависимость, которая выражает закон изменения прогибов по длине балки. Для этого воспользуемся формулой для определения кривизны нейтрального слоя при изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (9.2)$$

Формулу (9.2) читают так: кривизна балки в рассматриваемом сечении пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна ее жесткости.

Из курса высшей математики известно, что кривизна плоской кривой  $y = f(x)$  определяется по формуле:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (9.3)$$

Из этой формулы следует, что если известно уравнение кривой  $y = y(x)$ , то ее кривизна в каждой точке может быть вычислена через первую и вторую производные от этой функции.

Приравняв правые части уравнений (9.2) и (9.3) получим *точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки*:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (9.4)$$

Это уравнение можно упростить. Учитывая, что в реальных конструкциях перемещения невелики и что тангенсы углов наклона касательной к оси будут малы, квадратом первой производной в знаменателе  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  по сравнению с единицей можно пренебречь.

Тогда получим *приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки*.

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}} \quad (9.5)$$

Это уравнение связывает перемещения, изгибающий момент в сечении и жесткость поперечного сечения при изгибе. Из него следует, что упругая линия может быть найдена, если известен закон изменения изгибающего момента по длине балки.

### 9.3 Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки

Уравнение (9.5) дает возможность вычислить линейные и угловые перемещения сечений. Первое интегрирование уравнения (9.5) определяет закон изменения углов поворота сечений по длине балки:

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx + C.$$

Второе интегрирование приводит к уравнению упругой линии

$$y(x) = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + Cx + D.$$

Для вычисления интегралов необходимо сначала написать аналитические выражения изгибающего момента и жесткости. Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находятся из граничных условий, которые зависят от способов закрепления балки. Если балка лежит на двух опорах, то прогибы над опорами равны нулю. В защемлении прогиб и угол поворота равны нулю.

Рассмотрим пример. Найти перемещения консоли постоянного сечения, нагруженной на свободном конце силой  $P$  (рис. 9.3). В защемлении возникает вертикальная реакция  $V_A = P$  и изгибающий момент  $M_A = Pl$ .

Начало координат поместим на левом конце балки. Изгибающий момент в произвольном сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от начала координат

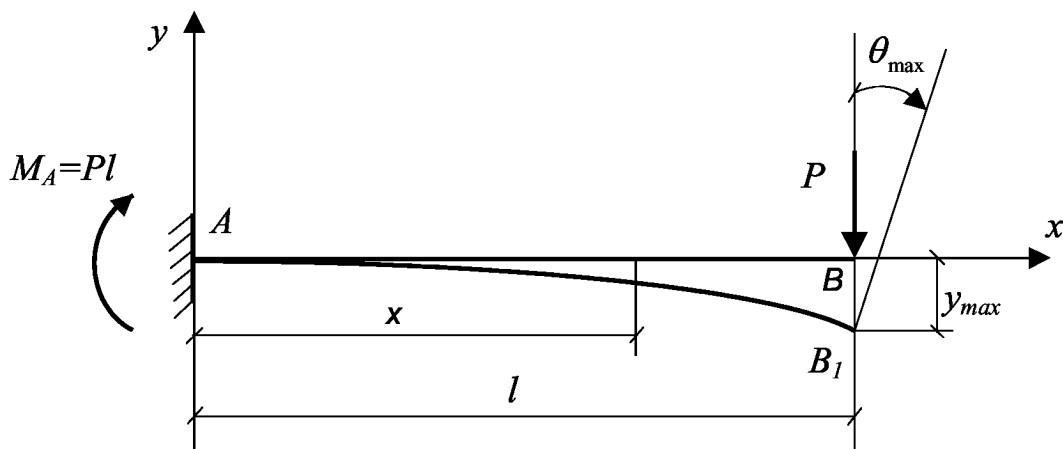


Рис.9.3

$$M(x) = V_A x - M_A = Px - Pl$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Px - Pl}{EJ_z}. \quad (\text{а})$$

Учитывая, что жесткость балки постоянна, интегрируя уравнение (а) первый раз получим

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = P \frac{x^2}{2} - Plx + C. \quad (\text{б})$$

Интегрируя еще раз, будем иметь

$$EJ_z y(x) = \frac{P}{2} \frac{x^3}{3} - Pl \frac{x^2}{2} + Cx + D. \quad (\text{в})$$

Используем граничные условия. При  $x = 0$ , т.е. на левом конце балки, в заделке угол поворота и прогиб равны нулю.

$$EJ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad EJy(x) \Big|_{x=0} = 0.$$

Подставив эти значения сначала в уравнение (а), а затем в уравнение (б), получим:

$$C = 0 \quad \text{и} \quad D = 0.$$

Итак, имеем:

1) уравнение углов поворота

$$EJ\theta(x) = \frac{P}{2} x^2 - Plx \quad (\text{г})$$

2) уравнение упругой линии

$$EJy(x) = \frac{P}{6} x^3 - \frac{Pl}{2} x^2. \quad (\text{д})$$

Эти уравнения дают возможность определить перемещения в любом сечении балки в зависимости от  $x$ .

Максимальный прогиб балки и максимальный угол поворота будут на правом конце при  $x = l$ . Подставив это значение в уравнения (г) и (д), получим:

$$EJ\theta_{\max}|_{x=l} = \frac{Pl^2}{2} - Pl^2 = -\frac{Pl^2}{2}, \quad \theta_{\max} = -\frac{Pl^2}{2EJ_z}$$

$$EJy_{\max}|_{x=l} = \frac{P}{6}l^3 - \frac{P}{2}l^3 = -\frac{Pl^3}{3}, \quad y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ_z}$$

Знак "минус" в выражении угла поворота свидетельствует о том, что поворот сечения происходит по часовой стрелке, минус в выражении прогиба показывает, что прогиб происходит вниз (не совпадает с положительным направлением оси  $y$ ).

Рассмотрим балку, показанную на рис .9.4.

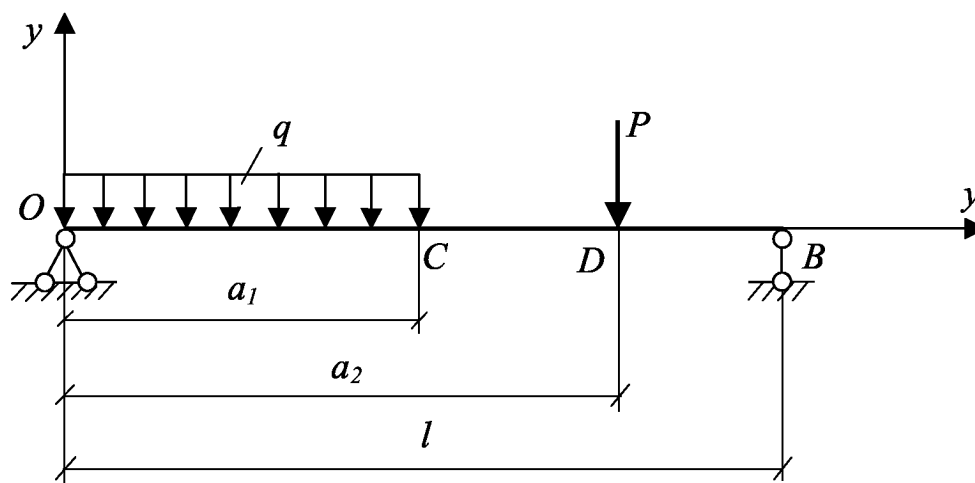


Рис.9.4

Она имеет три участка. Чтобы получить уравнение упругой линии надо записать выражения изгибающего момента для каждого участка и дважды их интегрировать. Для определения шести произвольных постоянных надо записать шесть граничных условий, два из которых записываем из условий закрепления балки:

$$y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0$$

Остальные уравнения вытекают из условий непрерывности и плавности упругой линии: прогиб, угол поворота в конце первого участка (сечение  $C$ ) будут такими же, как прогиб и угол поворота в начале второго участка. Такие же условия надо использовать и на границе второго и третьего участков (сечение  $D$ ). Выполняя эти условия, получим шесть уравнений с шестью неизвестными, которые необходимо совместно решить. Задача очень усложняется,

поэтому не будем доводить ее до конца. Как видим, если балка по условиям нагружения разбивается на  $n$  участков, то для определения постоянных интегрирования надо составить и решать систему  $2n$  уравнений. Совместное решение уравнений позволит найти постоянные и получить для каждого участка уравнение прогибов и углов поворота. Однако необходимость решения совместных уравнений очень сильно осложняет задачу, поэтому непосредственное интегрирование применяют только в тех случаях, когда число участков невелико (один-два).

#### 9.4 Метод начальных параметров

Метод начальных параметров позволяет определять перемещения не прибегая к решению сложных систем уравнений. Метод основан на применении универсального уравнения упругой линии балки. Получим это уравнение.

Рассмотрим балку постоянной жесткости, нагруженную положительными сосредоточенными моментами, силами и равномерно распределенной нагрузкой. Они считаются положительными, если вызывают в сечении положительный изгибающий момент (рис. 9.5).

Начало координат возьмем на левом конце балки, ось  $x$  направим вправо, ось  $y$  - вверх. Балка имеет ряд участков.

Рассмотрим первый участок. Для него:

$$0 \leq x_1 \leq a_1, \quad M(x) = 0, \text{ т.е. } \begin{aligned} EJ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 0, \\ EJ \frac{dy}{dx} &= C_1, \\ EJ(y - Xx) &= C_1 x + D_1. \end{aligned}$$

Второй участок

$$a_1 \leq x_2 \leq b_1, \quad M(x) = M_1$$

Умножим изгибающий момент на величину равную единице:  $(x - a_1)^0$ ,

где  $a_1$  - расстояние от начала координат до сечения.

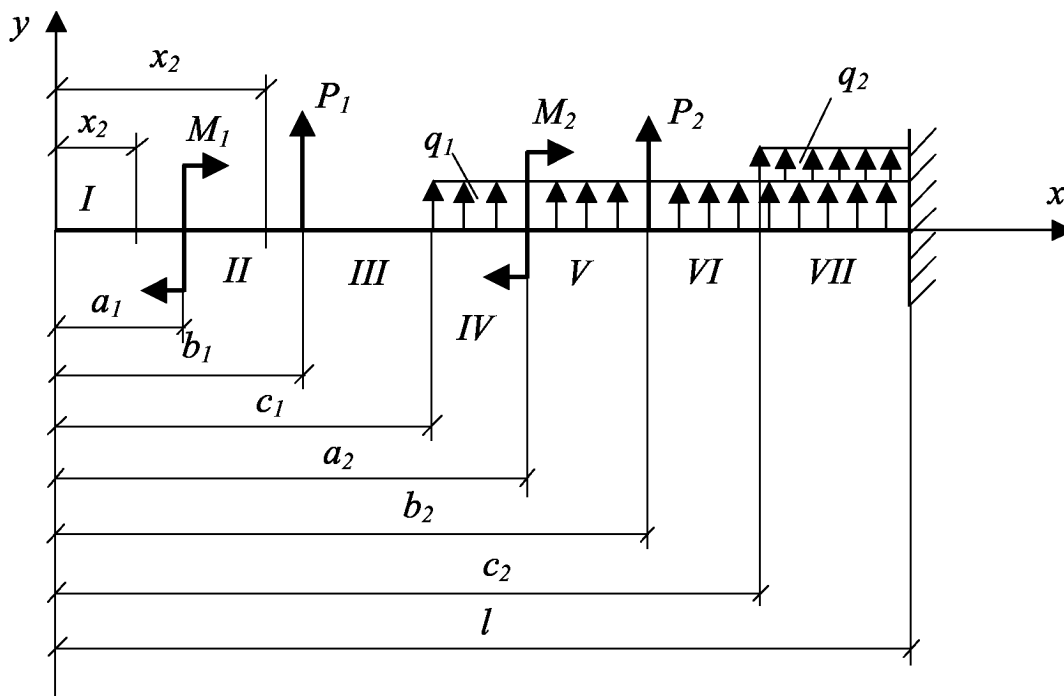


Рис.9.5

Напомним, что всякая величина в нулевой степени равна единице

$$M(x) = M_1(x - a_1), \quad EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1(x - a_1)^0.$$

Интегрируем это уравнение, не раскрывая скобки

$$EJ \frac{dy}{dx} = M_1(x - a_1) + C_2,$$

$$EJy(x) = M_1 \frac{(x - a_1)^2}{2} + C_2x + D_2.$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что упругая линия не имеет разрывов и изломов и является плавной кривой. На границе первого и второго участков имеем:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1=a_1} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_2=a_2}, \quad \text{откуда } C_1 = C_2 = C.$$

$$y(x) \Big|_{x_1=a_1} = y(x) \Big|_{x_2=a_2}, \quad \text{откуда } D_1 = D_2 = D.$$

Аналогично можно получить:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C,$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D$$

Определим физический смысл постоянных интегрирования  $C$  и  $D$ . Если обозначить угол поворота и прогиб в начале координат через  $\theta_0$  и  $y_0$ , то получим

$$C = EJ\theta_0, \quad D = EJy_0$$

Эти выражения принято называть *начальными параметрами*.

Рассмотрим седьмой участок. Изгибающий момент на этом участке можно записать так:

$$M(x) = \sum_{i=1}^2 M_i (x - a_i)^0 + \sum_{i=1}^2 P_i (x - b_i) + \sum_{i=1}^2 q_i \frac{(x - c_i)^2}{2}$$

Подставим выражение изгибающего момента в приближенное дифференциальное уравнение упругой линии и проинтегрируем дважды.

$$EJ \frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^2 M_i (x - a_i) + \sum_{i=1}^2 P_i \frac{(x - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^2 q_i \frac{(x - c_i)^3}{6} + EJ\theta_0,$$

$$EJy(x) = \sum_{i=1}^2 M_i \frac{(x - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^2 P_i \frac{(x - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^2 q_i \frac{(x - c_i)^4}{24} + EJ\theta_0 x + EJy_0.$$

Располагая члены уравнения по восходящим степеням и учитывая, что количество нагрузок может быть произвольным, окончательно получим:

$$EJ\theta(x) = EJ\theta_0 + \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i) + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^3}{6},$$

$$EJy(x) = EJ\theta_0 x + EJy_0 + \sum_{i=1}^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^4}{24}.$$

Первое из этих уравнений называется универсальным уравнением углов поворота поперечных сечений, второе - универсальным или обобщенным уравнением упругой линии балки. Они позволяют определять угловые и линейные перемещения любого сечения в зависимости от нагрузки и жесткости балки. При использовании этих уравнений должны выполняться следующие требования:

1. При определении прогиба и угла поворота произвольного сечения в уравнения записываются слагаемые только для тех нагрузок, которые расположены между началом координат и рассматриваемым сечением. Если нагрузка относительно сечения создает положительный изгибающий момент, то она входит в эти уравнения со знаком "+".

2. Распределенная нагрузка не должна прерываться. Если по условию задачи распределенная нагрузка оканчивается (рис. 9.6, конец второго участка), то ее следует продолжить до конца балки, добавив одновременно нагрузку такой же интенсивности, но другого знака (компенсирующую нагрузку  $q^* = q$ ). На рис. 9.6 добавленная и компенсирующая нагрузки показаны пунктиром.



3. Если начало координат расположено на левом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения против часовой стрелки. Если же начало координат взято на правом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения по часовой стрелке. Линейное перемещение вверх будет положительным, независимо от того, где расположено начало координат.

4. Жесткость балки должна быть постоянной на всех участках.

5. Начало координат единое для всех участков.

6. Ось прямолинейная.

В универсальное уравнение упругой линии балки входят начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ . Значения начальных параметров находят на основании граничных условий в опорных сечениях балки. Если начало координат взять на жестко закрепленном опорном сечении, то начальные параметры будут равны нулю ( $y_0 = 0, \theta_0 = 0$ ). Поэтому для консольной балки, имеющей жесткую опору, начало координат обязательно нужно помещать в этом сечении.

Если начало координат находится в сечении на шарнирной опоре, то  $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$ . Если же концевые сечения балки не являются опорными сечениями, то начальные параметры отличаются от нуля и их нужно определять. С этой целью в общем виде находят прогибы в опорных сечениях и, приравняв их к нулю, получают уравнения для определения начальных параметров.

**Пример.** Определить прогиб и угол поворота сечения  $K$  (рис. 9.6).

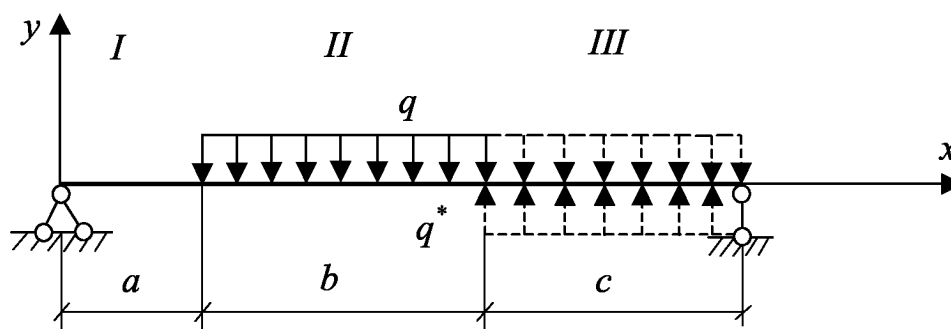


Рис.9.6

Начало координат целесообразно взять на левом конце балки, ось  $x$  направить вправо, ось  $y$  - вверх. Тогда  $EJy_0 = 0, EJ\theta_0 = 0$ .

На опоре возникают реакции  $V_A = qa$  и  $M_A = \frac{qa^2}{2}$ , которые необходимо учесть при составлении универсального уравнения. На

втором участке нужно продлить равномерно распределенную нагрузку и приложить компенсирующую ( $q^* = q$ ). На рис. 9.6 они показаны пунктиром.

Универсальное уравнение запишем так:

$$EJy(x) = -M_A \frac{(x-0)^2}{2} + V_A \frac{(x-0)^3}{6} - q \frac{(x-0)^4}{24} \Big|_I + q^* \frac{(x-a)^4}{24} \Big|_{II}.$$

Подставляя значения  $M_A$  и  $V_A$  в это уравнение при  $x = 2a$ , получим максимальный прогиб

$$EJy_k \Big|_{x=2a} = -\frac{qa^2}{2} \frac{4a^2}{2} + qa \frac{8a^3}{6} - q \frac{16a^4}{24} + q \frac{a^4}{24} = -\frac{7}{24} qa^4.$$

Откуда

$$y_k = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Знак "минус" указывает, что сечение  $x$  перемещается вниз.

Для определения угла поворота сечений нужно дифференцировать универсальное уравнение упругой линии.

$$EJ\theta(x) = -M_A(x-0) + V_A \frac{(x-0)^2}{2} - q \frac{(x-0)^3}{6} \Big|_I + q^* \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II}.$$

Подставив значения  $M_A$  и  $V_A$  получим значение максимального угла поворота при  $x = 2a$ .

$$EJ\theta_k \Big|_{x=2a} = -\frac{qa^3}{6}, \quad \text{откуда} \quad \theta_k = -\frac{qa^3}{6EJ}.$$

Знак "минус" указывает, что сечение  $x$  поворачивается по часовой стрелке.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА

10.1 Изгиб балок тонкостенного профиля

Известно, что внешние силы, расположенные в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, вызывают прямой поперечный (или плоский) изгиб. Однако это не всегда так. Рассмотрим консольную балку швеллерного поперечного сечения, нагруженную сосредоточенной силой  $P$  (рис.10.1).

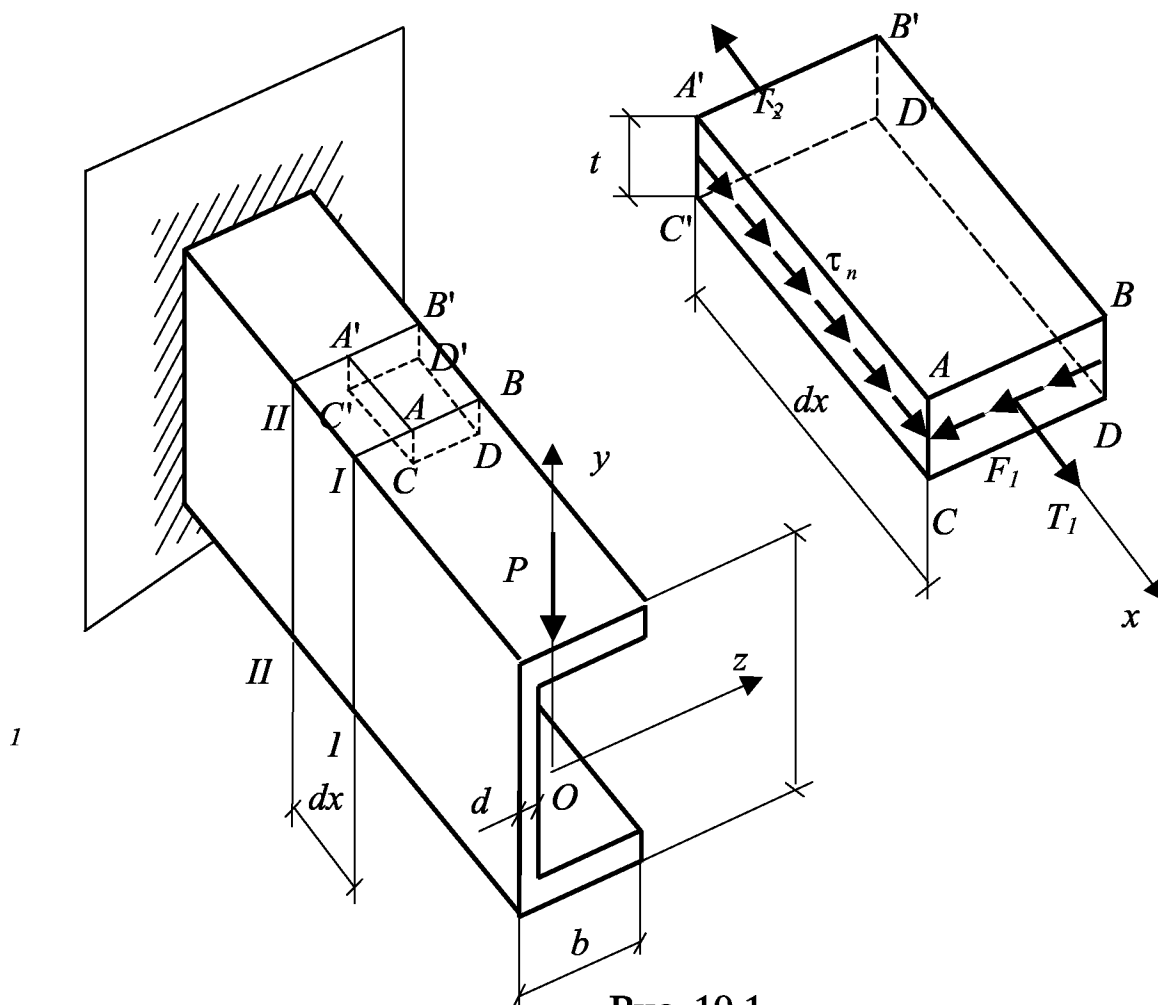


Рис. 10.1

Проведем два сечения  $I-I$  и  $II-II$ , отстоящие друг от друга на расстоянии  $dx$ . В сечении  $I-I$  действуют  $M(x)$  и  $Q(x) = P$ . В сечении  $II-II$  -  $M(x) + dM(x)$  и  $Q(x) = P$ . Выделим из полки элемент  $ABCDA'B'C'D'$  и рассмотрим его равновесие.

На грань  $ABCD$  действуют напряжения  $\sigma' = \frac{M(x)y}{J}$ , равнодействующая которых

$$T_1 = \int_{F_1} \sigma' dF = \frac{M(x)}{J} \int_{F_1} y dF = \frac{M(x)S_n}{J}.$$

На грань  $A'B'C'D'$  действуют напряжения  $\sigma'' = \frac{(M(x) + dM(x))y}{J}$ , равнодействующая которых

$$T_2 = \int_{F_1} \sigma'' dF = \frac{M(x) + dM(x)}{J} \int_{F_1} y dF = \frac{(M(x) + dM(x))S_n}{J}$$

Т.к.  $T_2 > T_1$ , то для равновесия элемента по грани  $ACA'C'$  должны действовать касательные напряжения  $\tau_n$ , направленные от сечения  $II-II$  к сечению  $I-I$ . По закону парности такие же напряжения  $\tau_n$  должны действовать в поперечных сечениях полки, т.е. на площадках  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ . Так как  $t$  мало, то можно считать  $\tau_n = const$  по толщине полки. При этом имеем

$$\sum P_x = T_1 + \tau_n t dx - T_2 = 0.$$

Подставив выражения для  $T_1$  и  $T_2$ , получим

$$\frac{M(x)S_n}{J} + \tau_n t dx - \frac{M(x)S_n}{J} - \frac{dM(x)S_n}{J} = 0$$

После деления на  $t dx$  будем иметь

$\tau_n = \frac{dM(x)}{dx} \frac{S_n}{tJ}$ , но  $\frac{dM(x)}{dx} = Q$  поэтому формула для определения касательных напряжений (горизонтальных) в полках балок тонкостенных профилей имеет вид:

$$\tau_n = \frac{QS_n}{tJ}$$

Здесь  $S_n$  - статический момент площади отсеченной части полки относительно нейтральной линии;

$t$  - толщина полки.

Исследуем распределение касательных напряжений  $\tau_n$  по ширине полки швеллера  $\tau_n = \frac{QS_n}{tJ}$ . Определим

$$S_n = tz \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \frac{tz}{2} (h - t),$$

$$\tau_n = \frac{Qtz(h-t)}{2tJ} = Qz \frac{(h-t)}{2tJ} - \text{линейная функция от } z,$$

$$\tau_n|_{z=0} = 0, \quad \tau_n|_{z=b-d} = \frac{Q(h-t)(b-d)}{2J}.$$

Эпюра  $\tau_n$  построена на рис. 10.2.

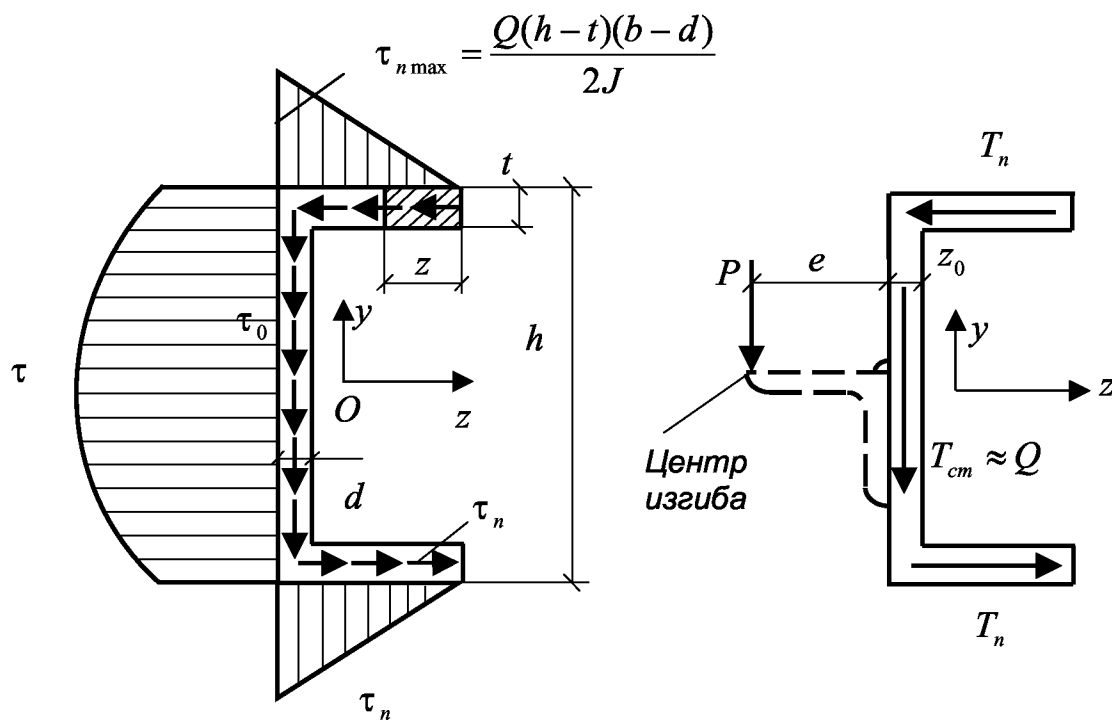


Рис.10.2

Кроме напряжений  $\tau_n$  в сечении действуют вертикальные (параллельные  $Q$ ) касательные напряжения  $\tau$ , которые определяются по известной формуле Журавского ( $\tau = \frac{QS}{bJ}$ ). Напряжения  $\tau$  всегда образуют единый поток с касательными напряжениями  $\tau$  в стенке (рис.10.2).

Определим равнодействующие касательных напряжений, действующих в сечении. Вертикальные касательные напряжения  $\tau$  в полках незначительные, поэтому можно считать, что равнодействующая их в стенке  $T_{cm} \approx Q$ .

Равнодействующие касательных напряжений  $\tau_n$ , действующих в полках, будут равны

$$T_n = \frac{1}{2} \frac{Q(h-t)(b-d)}{2J} t(b-d) = \frac{Q(h-t)(b-d)^2 t}{4J}$$

Равнодействующие  $T_n$  и  $T_{cm}$  дают момент относительно центра тяжести сечения (рис. 10.2).

Найдем на плоскости  $zOy$  точку "С", относительно которой внутренние силы, действующие в поперечном сечении швеллера ( $T_n$  и  $T_{cm}$ ), не дают момента. Эта точка называется *центром изгиба*. Имеем:

$$\sum M_{(c)} = T_{cm}e - 2T_n \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 0$$

Подставляя в это уравнение выражения для  $T_n$  и  $T_{cm}$  получим:

$$Qe = \frac{Q(h-t)^2(b-d)^2t}{4J}$$

Отсюда находим формулу для определения положения центра изгиба.

$$e = \frac{(h-t)^2(b-d)^2t}{4J}$$

Если внешняя сила  $P$  располагается в плоскости  $xOy$ , то она создает момент относительно центра изгиба, равный  $M_{kp} = P(e + z_0)$ . Внутренние силы ( $\tau$  и  $\tau_n$ ) не дают момента относительно центра изгиба. Поэтому отсеченная часть балки не будет находиться в равновесии. Для равновесия в поперечном сечении должны возникать дополнительные напряжения  $\tau_k$ , которые вызывают кручение балки.

Открытые тонкостенные профили плохо работают на кручение. Кроме того, если балка закреплена, то вследствие отсутствия деформации поперечного сечения в закреплении в балке возникнут также значительные нормальные напряжения. Поэтому нельзя допускать появления кручения при изгибе балок тонкостенных профилей.

Очевидно, кручения балки не будет, если внешняя сила  $P$  проходит через центр изгиба (рис. 10.2)

В симметричных тонкостенных сечениях тоже возникают горизонтальные напряжения в полках  $\tau_n$ . Но они менее опасны, так как не вызывают кручения балки. В таких сечениях центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения (рис.10.3). Именно поэтому в них не будет кручения.

Следовательно, чтобы избежать кручения балок тонкостенных профилей необходимо использовать симметричные сечения. Если же тонкостенное сечение несимметричное, то чтобы не было кручения необходимо, чтобы все внешние нагрузки пересекали ось центров изгиба или ось жесткости балки.

Наличие касательных напряжений в полках тонкостенных профилей требует пересмотреть проверку прочности балки по главным напряжениям. Материал в крайних волокнах балки испытывает не линейное, а плоское напряженное состояние (рис. 10.4).

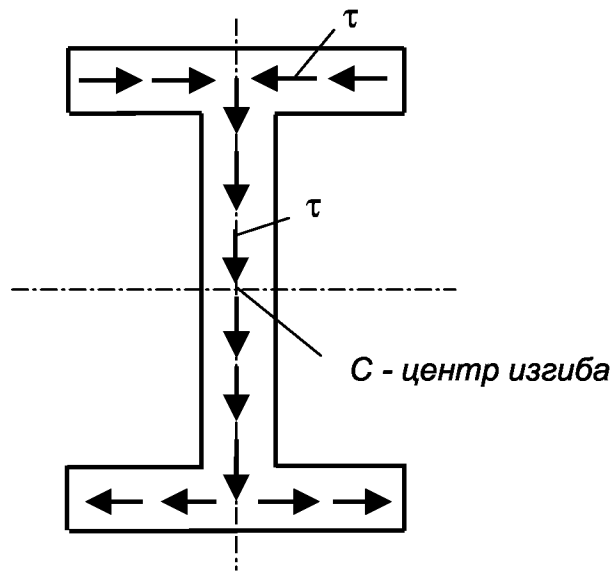


Рис. 10.3

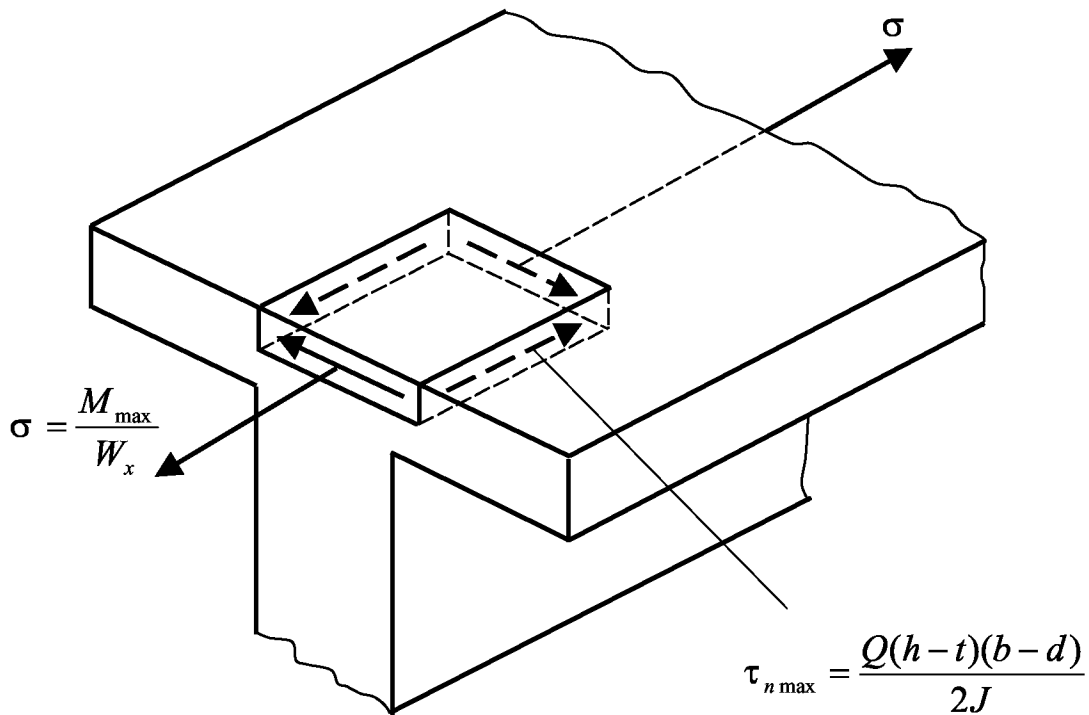


Рис.10.4

Поэтому, для составления условия прочности надо воспользоваться теориями прочности.

## 10.2 Метода расчета на прочность строительных конструкций

Одним из главных вопросов сопротивления материалов является вопрос о том, как назначить размеры стержня, чтобы он мог надежно сопротивляться заданной нагрузке. В тех случаях, когда размеры стержня заданы, возникает задача об определении грузоподъемности стержня, т.е. определении силы, которую стержень может выдержать, не претерпевая каких-либо изменений, опасных для его долговечной работы.

Для решения указанных вопросов необходимо провести специальные расчеты. Существует три метода решения этих задач:

- 1) расчет по допускаемым напряжениям;
- 2) расчет по разрушающим нагрузкам;
- 3) расчет по предельным состояниям.

*1). Метод расчета по допускаемым напряжениям.*

По методу допускаемых напряжений требуется, чтобы наибольшее напряжение в стержне не превосходило допускаемого напряжения. Условие прочности при растяжении или сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

Допускаемое напряжение находится как отношение опасного напряжения на коэффициент запаса прочности (см. Главу 5). Допускаемые напряжения устанавливаются государственными нормирующими органами и публикуются в технических условиях и нормах проектирования, которые имеют силу закона.

Метод расчета по допускаемым напряжениям исходит из рассмотрения идеально упругого тела, не учитывая действительных свойств строительных материалов, по существу являющихся упруго-пластичными материалами. Кроме того, им не учитываются и фактические условия работы конструкций под нагрузкой. Основанный на принятии единого постоянного коэффициента запаса прочности, этот метод не удовлетворяет требованию равнопрочности сооружения.

*2). Метод расчета по разрушающим нагрузкам.*

Метод расчета по разрушающим нагрузкам исходит из более широкого использования экспериментальных данных и обобщения опыта строительства, а также из анализа пластических свойств материалов и их использования.



Сущность метода расчета по разрушающим нагрузкам сводится к тому, чтобы наибольшая нагрузка на сооружение не превышала некоторой допустимой нагрузки  $[P]$ :  $P_{\max} \leq [P]$ .

Допустимая нагрузка равна разрушающей нагрузке, деленной на коэффициент запаса прочности для всего сооружения, т.е.

$$[P] = \frac{P_{\text{разр}}}{K}$$

Для определения разрушающей нагрузки в конструкциях из пластических материалов принимается упрощенная диаграмма растяжения, в которой площадка текучести распространяется безгранично (диаграмма идеального упругопластического материала) (рис. 5). Такая диаграмма изображается двумя прямыми.

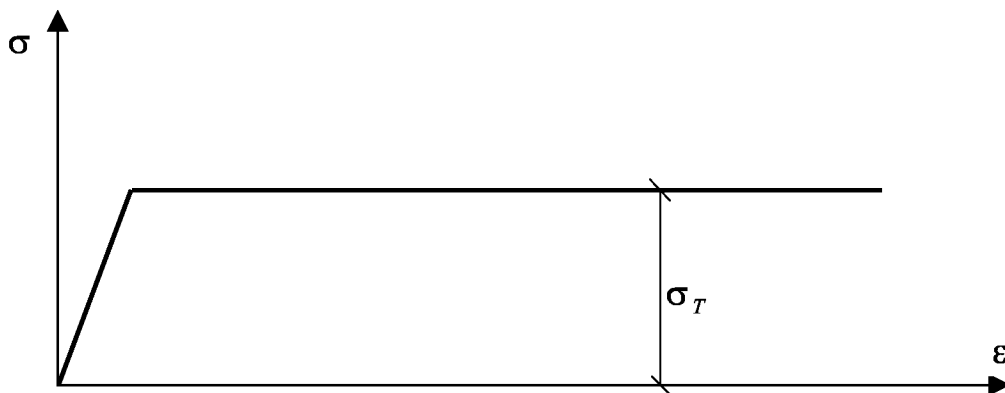


Рис.10.5

При центральном растяжении или сжатии стержня разрушающая сила определяется так:

$$P_{\text{разр}} = \sigma_T F.$$

Рассмотрим балку, материал которой характеризуется идеальной диаграммой. Пределы текучести при растяжении и сжатии будем считать одинаковыми. После появления текучести в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения при дальнейшем увеличении изгибающего момента пластическое состояние материала распространяется в направлении к нейтральной оси (рис. 10.6). До полного исчерпания несущей способности балки в ее поперечных сечениях будут две зоны - упругая и пластическая. Предельное состояние наступит, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению.

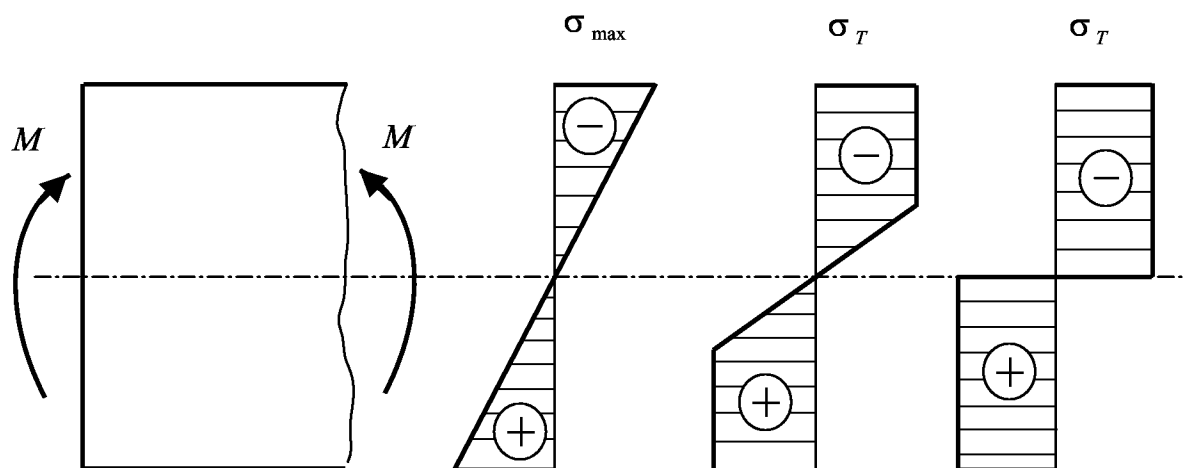


Рис.10.6

Последняя эпюра напряжений является предельной. Появление такой эпюры в сечении приравнивается к появлению в нем пластического шарнира. Изгибающий момент достигает при этом наибольшей возможной для данного сечения величины. Если нагрузка будет возрастать, момент сохранит ту же самую величину.

Определим предельный момент  $M_{np}$  для симметричного сечения (рис.10.7)

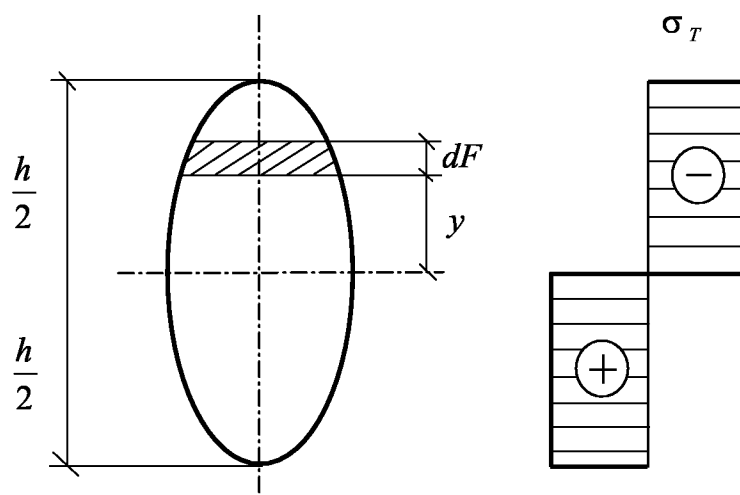


Рис.10.7

$$M_{np} = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_T dF = 2\sigma_T \int_0^{h/2} y dF,$$

$$M_{np} = 2\sigma_T S,$$

где  $S$  - статический момент половины сечения относительно нейтральной оси.

Выражение для  $M_{np}$  можно записать так:

$$M_{np}^{nl} = \sigma_T W_{np}^{nl}, \quad \text{где } W_{np}^{nl} = 2S.$$

По обычному расчету за предельный момент принимается такой момент, при котором только в крайнем волокне напряжения достигают предела текучести

$$\sigma_T = \frac{M_{np}^{ynp}}{W}, \quad \text{где } M_{np}^{ynp} = \sigma_T W.$$

Отношение моментов:

$$\frac{M_{np}^{nl}}{M_{np}^{ynp}} = \frac{2\sigma_T S}{\sigma_T W} = \frac{2S}{W}.$$

Для сплошного прямоугольного сечения:

$$S = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}, \quad W = \frac{bh^2}{6}.$$

Тогда:

$$\frac{M_{np}^{nl}}{M_{np}^{ynp}} = \frac{2 \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2}$$

$$M_{np}^{nl} = 1.5 M_{np}^{ynp}$$

Расчет с учетом пластических свойств материала в случае прямоугольного сечения позволяет повысить нагрузку на 50%.

Для двутавровых сечений

$$W_{np}^{nl} = 1.12W$$

Недостатком метода расчета по разрушающим нагрузкам является то, что он основан на понятии постоянного коэффициента запаса, что также не позволяет правильно оценить степень влияния тех или иных нагрузок на исчерпание несущей способности конструкции.

### 3). Метод расчета по предельным состояниям.

Расчет строительных конструкций производится по методу предельных состояний. Предельным называется такое состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять заданным эксплуатационным требованиям.

Различают три вида предельных состояний:

- а) первое предельное состояние - по несущей способности (прочности, устойчивости и выносливости при переменных напряжениях);
- б) второе предельное состояние - по развитию чрезмерных деформаций (прогибов, перекосов и др.);
- в) третье предельное состояние - по образованию или раскрытию трещин.

Основным документом по расчету и проектированию строительных конструкций и сооружений являются "Строительные нормы и правила" (сокращенно СНиП).

Прочность конструкции или сооружения зависит от множества факторов, которые при расчете по допускаемым напряжениям и разрушающим нагрузкам учитываются одним общим коэффициентом запаса.

При расчете по предельным состояниям вводится три отдельных коэффициента вместо одного общего:

1). Коэффициент перегрузки  $n$  ( $n > 1$ ) учитывает опасность повышения фактической нагрузки по сравнению с ее нормативной величиной. В результате умножения нормативной нагрузки на коэффициент перегрузки получается расчетная нагрузка. Значения нормативных нагрузок и соответствующих коэффициентов перегрузки приводятся в СН и П. Например, для нагрузки от собственного веса  $n = 1.1$ ; для снеговой нагрузки  $n = 1.4$  и т.д.

2). Коэффициент однородности  $K$  ( $K < 1$ ) учитывает изменчивость механических свойств материала. Для каждого материала опытным путем установлено нормативное сопротивление  $R^H$ . Для пластичных материалов  $R^H$  равно пределу текучести  $\sigma_T$ , для хрупких - пределу прочности  $\sigma_{пч}$ . Путем умножения нормативного сопротивления на коэффициент однородности получается расчетное сопротивление  $R$ :

$$R = R^H K$$

3). Коэффициент условий работы  $m$  ( $m \leq 1$ ) учитывает особенности действительной работы элементов конструкции: возможные отклонения от проектных размеров, отличие расчетной схемы от действительного сооружения, специфические условия работы и т.п.

Коэффициент условий работы вводится для уменьшения величины расчетного сопротивления  $R$ .

Значения нормативных сопротивлений, коэффициентов однородности коэффициентов условий работы приводятся в СНиП.

Условие прочности на растяжение (сжатие) заключается в том, что наибольшее нормальное напряжение от расчетных нагрузок не должно превышать расчетного сопротивления.

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq mR$$

Здесь  $N$  - наибольшая продольная сила от расчетных нагрузок (с учетом коэффициентов перегрузки).

Условие прочности по первому предельному состоянию по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq mR$$

Здесь  $M_{\max}$  - максимальный расчетный изгибающий момент, т.е. момент в опасном сечении от расчетных нагрузок (с учетом коэффициентов перегрузки );

$m$  - коэффициент условий работы;

$R$  - расчетное сопротивление материала на растяжение или сжатие при изгибе.

## ГЛАВА 11

### РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

До сих пор нами рассматривались балки с постоянным поперечным сечением по всей длине. Размеры сечений таких балок определяются по максимальному изгибающему моменту в опасном сечении, в остальных же сечениях балка имеет лишний запас прочности. Поэтому на практике широко распространены стержни, поперечное сечение которых изменяется по длине. Кроме того, по конструктивным соображениям стержни, работающие на изгиб, часто имеют отверстия, выточки, ступеньки, конусность и т.д.

С точки зрения расчета на прочность и жесткость все такие стержни можно разделить на три основные группы:

- 1) стержни, имеющие местные изменения формы и размеров сечений (рис.11.1а);
- 2) стержни ступенчато-переменного сечения (рис.11.1б);
- 3) стержни, имеющие непрерывно изменяющиеся по длине размеры (иногда и форму) сечений (рис 11.1в).

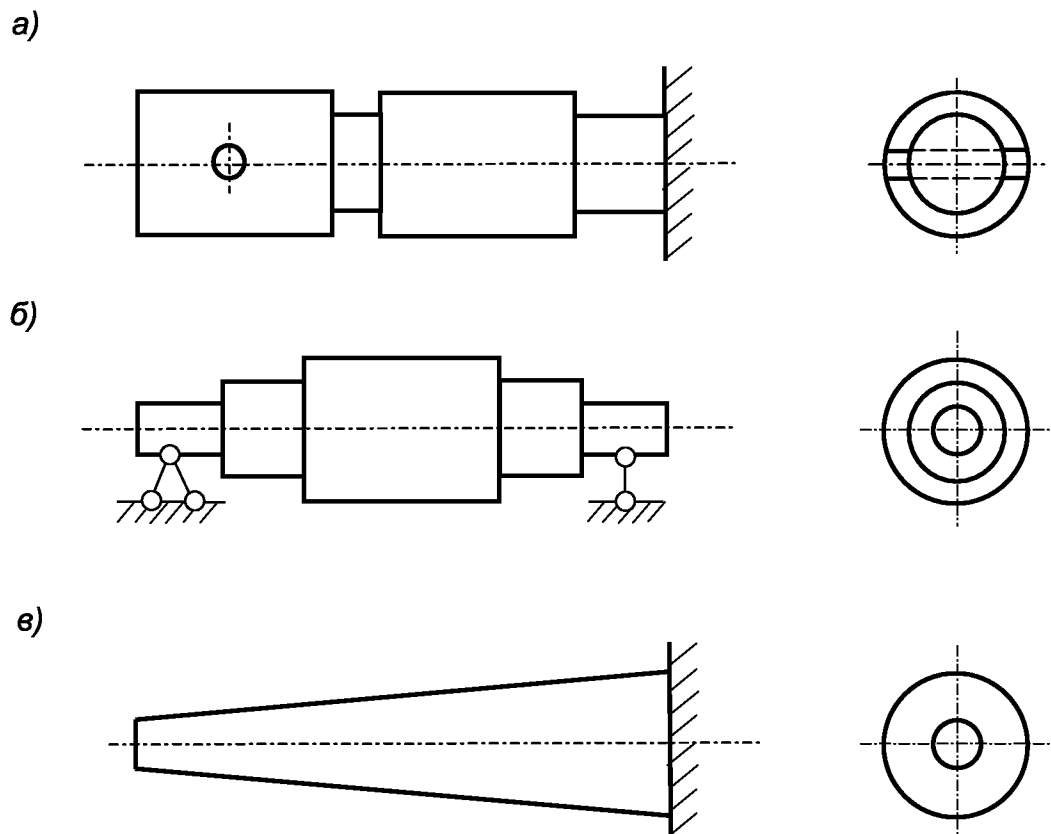


Рис. 11.1

Перейдем к рассмотрению каждой группы в отдельности.

### 11.1 Местные изменения формы и размеров

Отверстия, выточки и прочие нарушения формы и размеров сечений вызывают резкое и значительное изменение закона распределения напряжений и деформаций. Однако это изменение носит местный характер и на прочность стержня в большинстве случаев влияет незначительно. Поэтому условие прочности записывают для опасной точки, расположенной в одном из ослабленных сечений, так как здесь может иметь место концентрация напряжений. В зависимости от чувствительности материала к концентрации условия прочности будут иметь различный вид. Для высокопластичных материалов (малоуглеродистых сталей, меди, алюминия) и хрупких неоднородных материалов (чугунов) концентрацию можно не учитывать и условие прочности записывать в обычном виде:

$$\frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

Для однородных хрупких материалов (высокопрочных закаленных сталей) концентрацию напряжений необходимо учитывать. Условие прочности имеет вид:

$$\alpha \frac{M}{W_z} \leq [\sigma], \quad (11.2)$$

где  $\alpha$  - теоретический коэффициент концентрации, определяемый по справочным таблицам.

В обеих формулах  $W_z$  - осевой момент сопротивления ослабленного сечения.

При определении прогибов и углов поворота сечений отверстия и прочие нарушения не учитывают.

### 11.2 Ступенчатые стержни

В местах сопряжения участков с различными размерами сечений возникает концентрация напряжений. Если материал чувствителен к ней, то нужно применить условие прочности (11.2) ко всем сечениям на границах участков. Если же материал нечувствителен к концентрации напряжений, то нужно применить условие прочности (11.1) к нескольким вероятным опасным сечениям.

Для определения перемещений в ступенчатом стержне можно пользоваться методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки или энергетическими методами, которые будут рассмотрены ниже, или применять видоизмененный метод начальных параметров. Суть последнего заключается в замене ступенчатого стержня эквивалентным ему по деформациям стержнем постоянной жесткости.

### 11.3 Балки равного сопротивления изгибу

Частным случаем балок с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений являются балки равного сопротивления изгибу. В таких балках во всех сечениях максимальные нормальные напряжения одинаковы и равны допусжаемому, т.е.

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{W_{z(x)}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = |\sigma| \quad (11.3)$$

Отсюда

$$\frac{W_{z(x)}}{W_z} = \frac{M(x)}{M_{\max}} \quad (11.4)$$

В качестве иллюстрации теории балки равного сопротивления рассмотрим следующий пример.

Балка прямоугольного сечения одним концом закреплена, на свободном конце приложена сосредоточенная сила  $P$  (рис 11.2а).

Изгибающий момент в произвольном сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от свободного конца балки, будет:

$$M(x) = -Px$$

В закреплении  $M_{\max} = -Pl$ , ширина сечения -  $b$ , высота -  $h$ ,

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

Рассмотрим случай, когда ширина сечения  $b$  остается постоянной, а высота сечения изменяется -  $h = h(x)$ . Тогда

$$W_{z(x)} = \frac{bh(x)^2}{6}$$

На основании зависимости (11.4) имеем

$$\frac{\frac{bh(x)^2}{6}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{-Px}{-Pl}$$



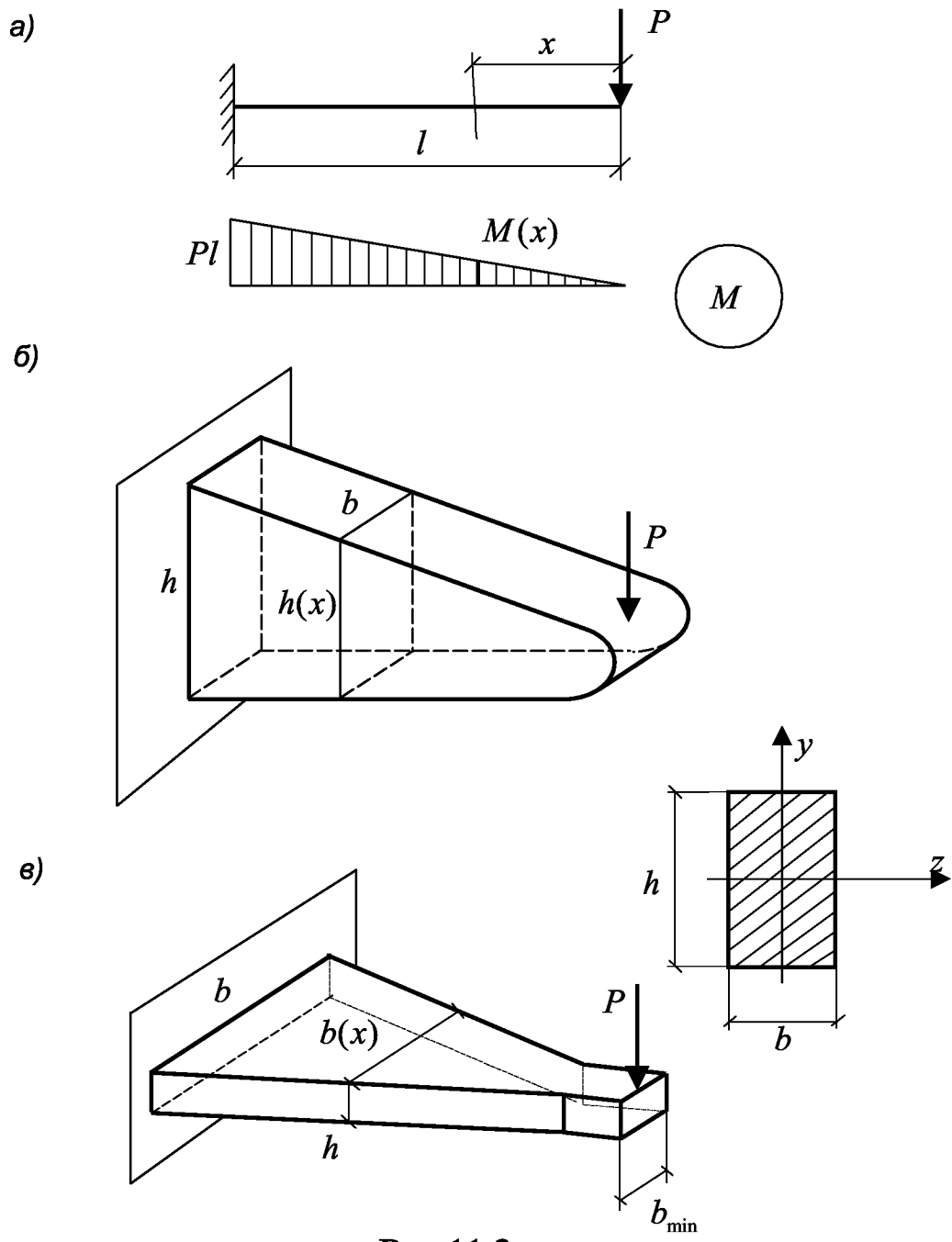


Рис.11.2

откуда

$$h(x) = h \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (11.5)$$

Следовательно, высота сечения балки равного сопротивления изгибу с постоянной шириной сечения меняется по закону параболы (рис .11.2б). Определив высоту сечения  $h$  в опасном сечении, можно определить и высоту  $h(x)$  в любом сечении балки по уравнению (11.5).

Так как площадь данной параболы составляет  $2/3$  площади описанного прямоугольника длиной  $l$  и высотой  $h$ , то объем такой балки будет составлять  $2/3$  объема балки с постоянным сечением  $bh$ , т.е. экономия материала будет  $33\%$ .

Рассмотрим другое решение этой задачи, когда высота сечения  $h$  постоянна, а изменяется ширина  $b = b(x)$ .

На основании уравнения (11.4) имеем:

$$\frac{b(x)h^2}{6} = \frac{-Px}{-Pl},$$

откуда

$$b(x) = \frac{b}{l}x \quad (11.6)$$

Следовательно, в этом случае ширина балки изменяется по закону прямой линии. Форма такой балки легко осуществима (рис.11.2в). Экономия материала при применении такой балки в сравнении с призматической балкой сечения  $bh$  достигает  $50\%$ . В действительности экономия будет несколько меньшей, так как в окрестностях свободного конца балки ( $x = 0$ ) изгибающие моменты малы, поэтому ширина сечения определяется из условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{hb_{\min}} \leq [\tau]$$

Откуда

$$b_{\min} \geq -\frac{3P}{2h[\tau]}.$$

Определим наибольший прогиб этой балки. Момент инерции произвольного сечения относительно оси  $z$  выражается равенством:

$$J(x) = \frac{b(x)h^3}{12} = \left(\frac{b}{l}x\right) \frac{h^3}{12} = \frac{bh^3}{12} \frac{x}{l} = J \frac{x}{l}$$

Здесь  $J$  - момент инерции сечения в заделке.

Дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-Px}{EJ \frac{x}{l}} = -\frac{Pl}{EJ}$$

Правая часть дифференциального уравнения постоянна, поэтому интегрирование его представляет простую задачу.

Последовательно интегрируя, получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pl}{EJ}x + C \quad (a)$$

$$y(x) = -\frac{Pl}{EJ} \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (б)$$

$C$  и  $D$  определим из условий:

$$\text{при } x = l \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad y(x) = 0$$

Из первого условия по уравнению (а) получим:

$$-\frac{Pl^2}{EJ} + C = 0, \quad C = \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Из второго условия согласно уравнению (б) имеем

$$-\frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{EJ} + D = 0 \quad D = -\frac{Pl^3}{2EJ}$$

Подставляя найденные значения постоянных в (б), получим уравнение прогибов оси балки:

$$y(x) = -\frac{Plx^2}{2EJ} + \frac{Pl^2x}{EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Положив  $x = 0$ , найдем наибольший прогиб на конце консоли:

$$y_{\max} = -\frac{Pl^3}{2EJ}$$

Напомним, что в балке постоянного сечения  $y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ .

Следовательно, балки равного сопротивления изгибу, обладая такой же прочностью в заделке, как и балка постоянного сечения, имеют в полтора раза больший прогиб. Подобного рода системы выгодны для рессор, которые должны обладать достаточной прочностью и вместе с тем большой гибкостью. Так, например, обыкновенная автомобильная рессора имеет такой же закон изменения жесткости, как рассмотренная балка.

## ГЛАВА 12

### СДВИГ

#### 12.1 Понятие о срезе и сдвиге. Деформации при сдвиге

Если на брус действуют две равные и противоположно направленные силы, перпендикулярные оси стержня и расположенные на очень малом расстоянии друг от друга, то происходит срез.

Деформация, предшествующая срезу, заключается в перекашивании прямых углов и называется *сдвигом* (рис.12.1).

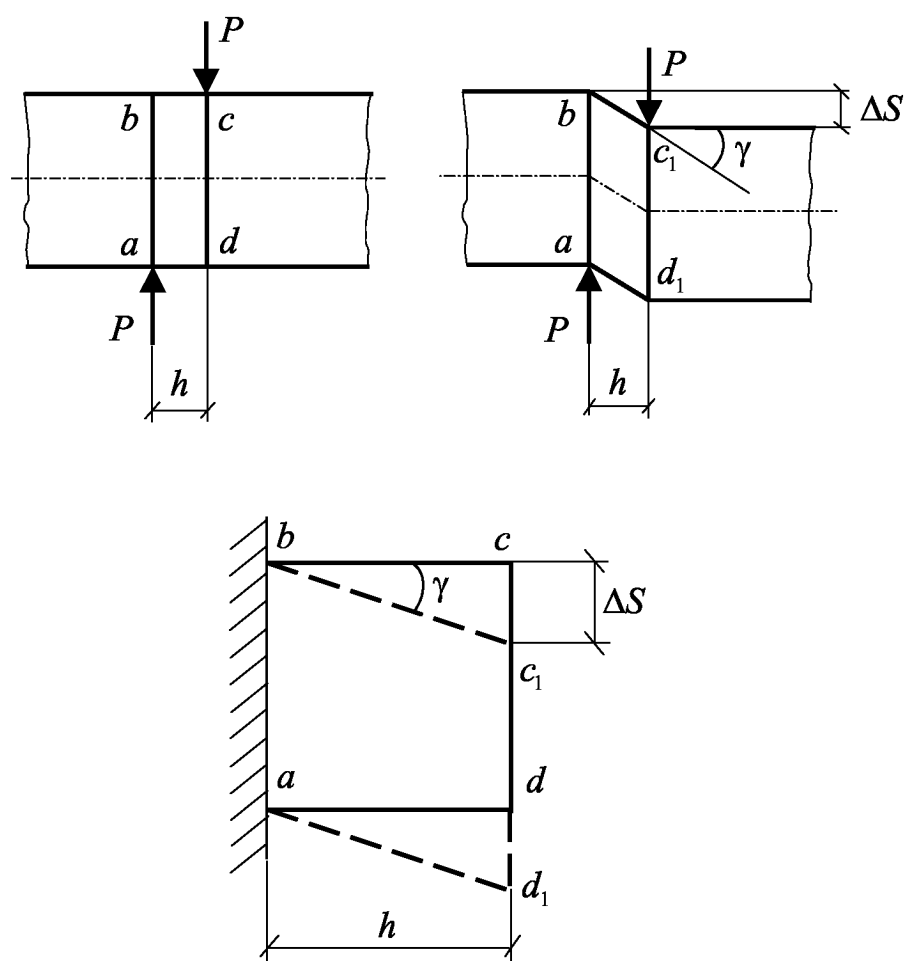


Рис.12.1

В результате сдвига одно поперечное сечение сдвигается относительно другого на величину  $\Delta S$ , которая называется *абсолютной величиной сдвига*. Она имеет размерность длины.

Отношение абсолютной величины сдвига к расстоянию между силами называется *относительной деформацией сдвига* или *углом сдвига*.

$$\frac{\Delta S}{h} = \operatorname{tg} \gamma .$$

Так как при малых деформациях  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , то

$$\boxed{\frac{\Delta S}{h} = \gamma} \quad (12.1)$$

$\gamma$  - относительный сдвиг или угол сдвига. Угол сдвига показывает искажение прямых углов (прямоугольник  $abcd$  превращается в параллелограмм  $abc'd'$ ).  $\gamma$  выражается в радианах.

## 12.2 Напряжения при сдвиге. Закон Гука

Для определения напряжений при сдвиге применим метод сечений. В сечении между силами действует только поперечная сила  $Q$ , являющаяся равнодействующей касательных напряжений (рис. 12.2). Так как расстояние между силами  $h$  очень мало, то действием изгибающего момента в сечении можно пренебречь.

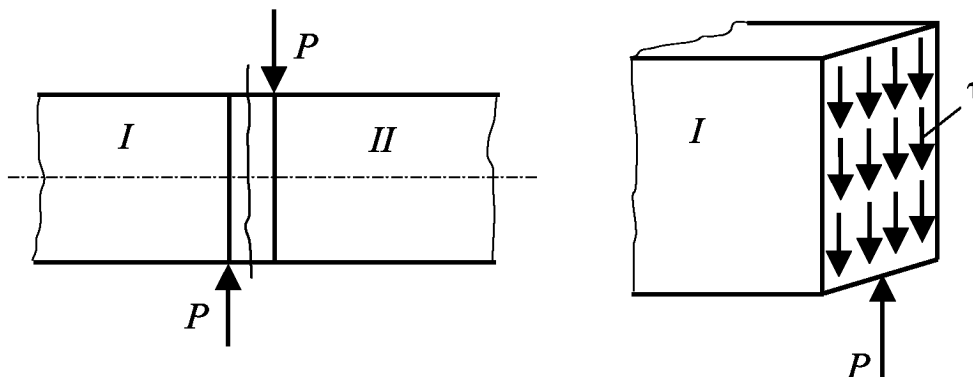


Рис.12.2

Воспользуемся интегральной зависимостью

$$Q = \int_F \tau dF$$

Закон распределения касательных напряжений неизвестен. Если предположить, что они распределяются по сечению равномерно, то  $\tau$  можно вынести за знак интеграла:

$$Q = \tau \int_F dF$$

следовательно,

$$\boxed{\tau = \frac{Q}{F}} \quad (12.2)$$

На самом деле касательные напряжения при сдвиге распределяются по сечению неравномерно, но для практических расчетов можно пользоваться формулой (12.2).

Касательные напряжения в пределах упругих деформаций прямо пропорциональны относительной деформации сдвига, т.е.

$$\tau = G\gamma \quad (12.3)$$

Эта зависимость выражает собой закон Гука при сдвиге.

Величина  $G$  характеризует способность материала сопротивляться сдвигу и называется *модулем упругости второго рода* или *модулем сдвига*.  $G$  имеет размерность напряжения, т.е. МПа. Величина модуля упругости второго рода определяется экспериментально и для каждого материала имеет свое значение.

Типичный вид диаграммы  $\tau - \gamma$  деформации сдвига для пластичной стали показан на рис. 12.3. Она напоминает аналогичную диаграмму  $\sigma - \varepsilon$  при растяжении. Напряжение  $\tau_{nc}$  (предел пропорциональности при сдвиге) является границей справедливости закона Гука.

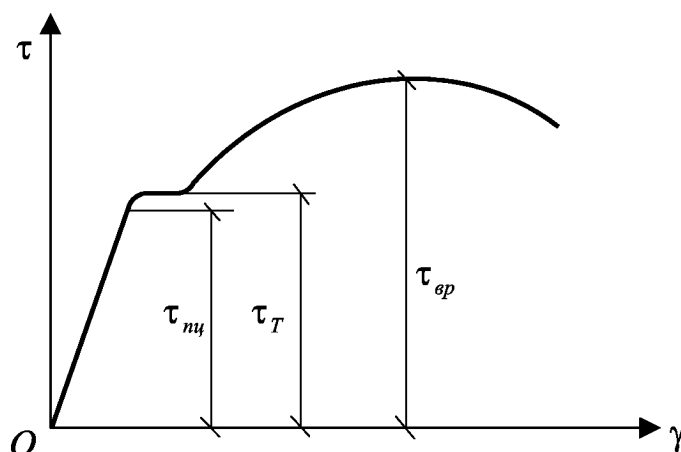


Рис.12.3

Зная, что

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\Delta S}{h}$$

можно найти абсолютную величину сдвига

$$\frac{Q}{F} = G \frac{\Delta S}{h}, \quad \text{откуда} \quad \Delta S = \frac{Qh}{GF} \quad (12.4)$$

Величина абсолютного сдвига прямо пропорциональна сдвигающим силам и расстоянию между ними и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения при сдвиге.  $GF$  - жесткость поперечного сечения при сдвиге.

Формула (4) аналогична зависимости для определения абсолютной деформации при растяжении:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

Здесь  $E$  - модуль упругости первого рода.

Установим зависимость между  $G$  и  $E$ . Для этого на участке балки между силами выделим элемент и рассмотрим его деформацию (рис. 12.4).

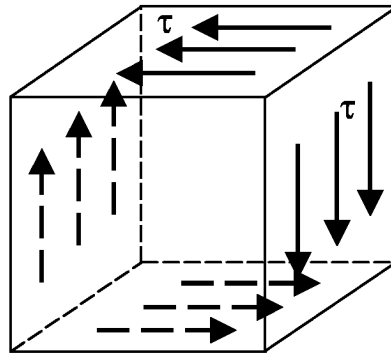


Рис.12.4

На боковых вертикальных и горизонтальных гранях элемента действуют касательные напряжения. На гранях, параллельных плоскости чертежа, никаких напряжений нет.

Деформация, при которой на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называются *чистым сдвигом*.

При чистом сдвиге материал находится в плоском напряженном состоянии. При этом

$$\tau_\alpha = \tau, \quad \tau_\beta = -\tau, \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0 \quad (12.5)$$

Определим главные напряжения при чистом сдвиге и положения главных площадок.

Величины главных напряжений определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Учитывая зависимости (12.5) получаем:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \tau, \\ \sigma_2 = 0, \\ \sigma_3 = -\tau. \end{cases} \quad (12.7)$$

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{\tau}{\tau} = 1$$

Следовательно, при чистом сдвиге главные площадки наклонены к граням элемента под углом  $45^\circ$  (рис.12.5).

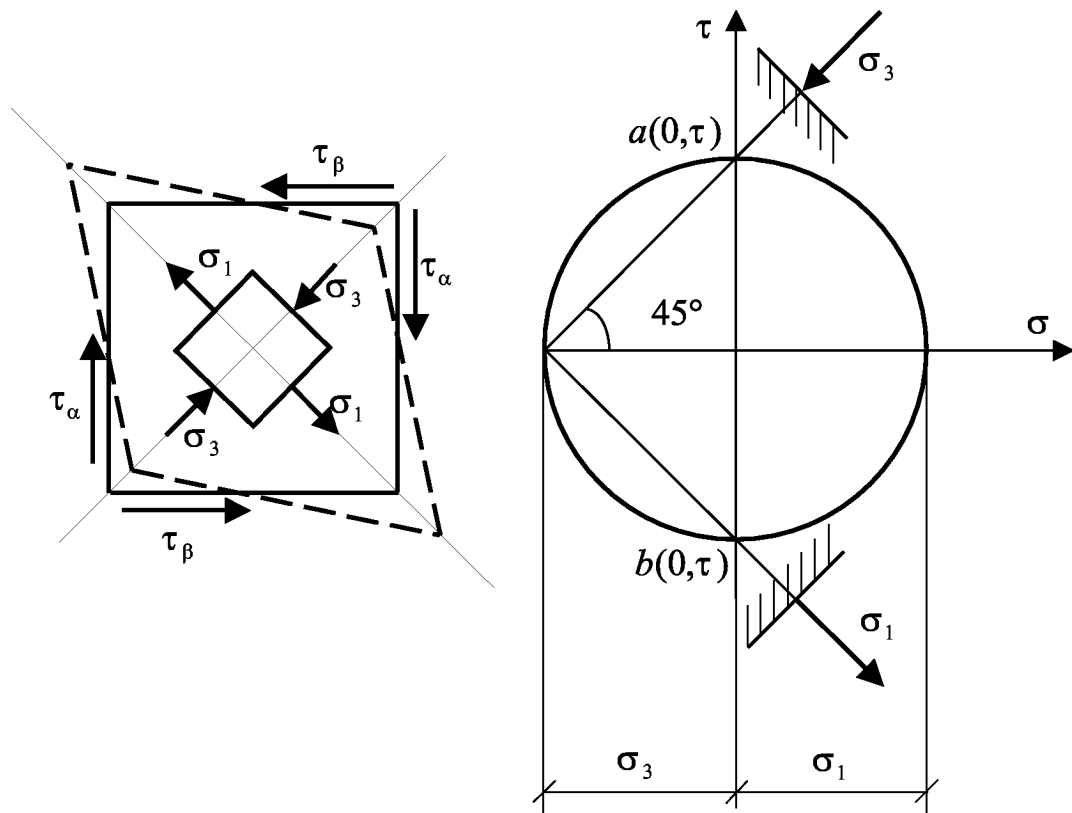


Рис.12.5

Графическое определение направления главных напряжений может быть получено и с помощью круга Мора.

Как видно из рис.12.5, прямые углы элемента искажаются, изменяются длины диагоналей.

Найдем удлинение диагонали квадратного элемента (рис.12.6).

С одной стороны его можно объяснить деформацией сдвига. С другой стороны диагональ  $BD$  можно представить как волокно материала, растягиваемое напряжением  $\sigma_1$  и сжимаемое в



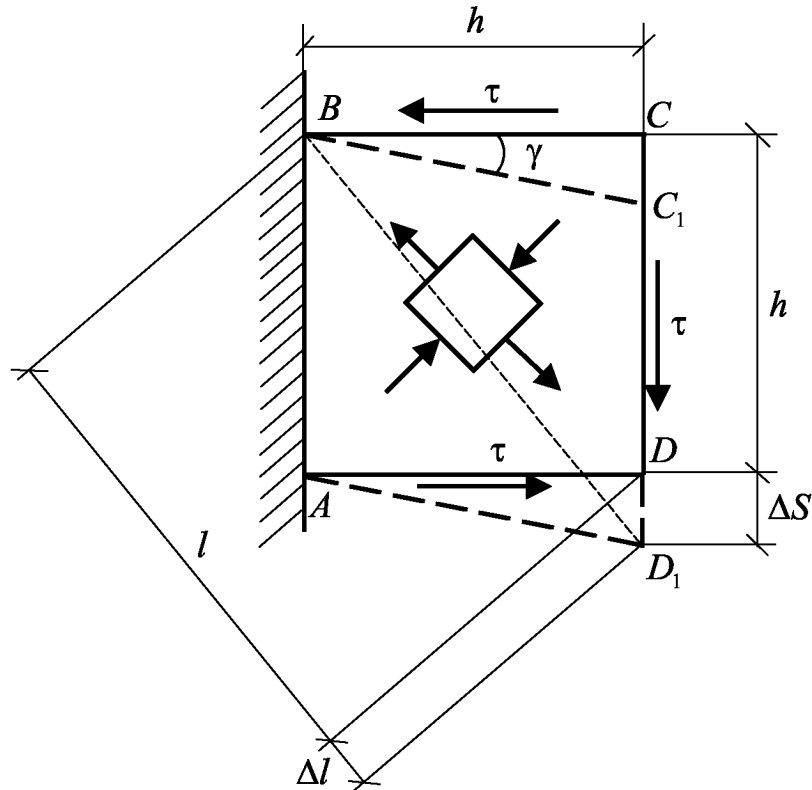


Рис.12.6

поперечном направлении напряжением  $\sigma_3$ . Сказанное позволяет сделать вывод о том, что модули  $G$  и  $E$  не являются независимыми друг от друга.

Удлинение диагонали

$$\Delta l = DD_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}$$

Относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}h\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2h} = \frac{\gamma}{2}$$

По закону Гука для чистого сдвига  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , поэтому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G} \quad (12.8)$$

Теперь воспользуемся обобщенным законом Гука. Главное напряжение  $\sigma_1$  действует в направлении диагонали  $BD$ , т.е. полученное значение  $\varepsilon$  есть ни что иное, как удлинение  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

С учетом зависимостей (12.7) получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\tau - \mu\tau) = \frac{1+\mu}{E} \tau \quad (12.9)$$

Приравняв правые части уравнений (12.8) и (12.9) имеем

$$\frac{\tau}{2G} = \frac{1+\mu}{E} \tau$$

или

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (12.10)$$

Формула (12.10) устанавливает зависимость между тремя постоянными материала, характеризующими его упругие свойства - модулями упругости первого и второго рода и коэффициентом Пуассона. Найдя из опыта две из них, третью можно подсчитать. Например, для стали при  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0.25$  найдем

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$$

Чистый сдвиг имеет место в пластинках, нагруженных растягивающими нормальными напряжениями в одном направлении и сжимающими напряжениями в другом (рис.12.7а). По площадкам, расположенным под углом  $\alpha = 45^\circ$ , действуют только касательные напряжения.

Приложение равномерно распределенных напряжений, как показано на рис.12.7а, трудно осуществить, поэтому состояние чистого сдвига обычно получают путем кручения цилиндрической трубы (рис.12.7б). Вследствие малого поворота одного конца относительно другого, элемент  $abcd$ , образованный двумя образующими и двумя смежными круговыми поперечными сечениями, подвергается чистому сдвигу.

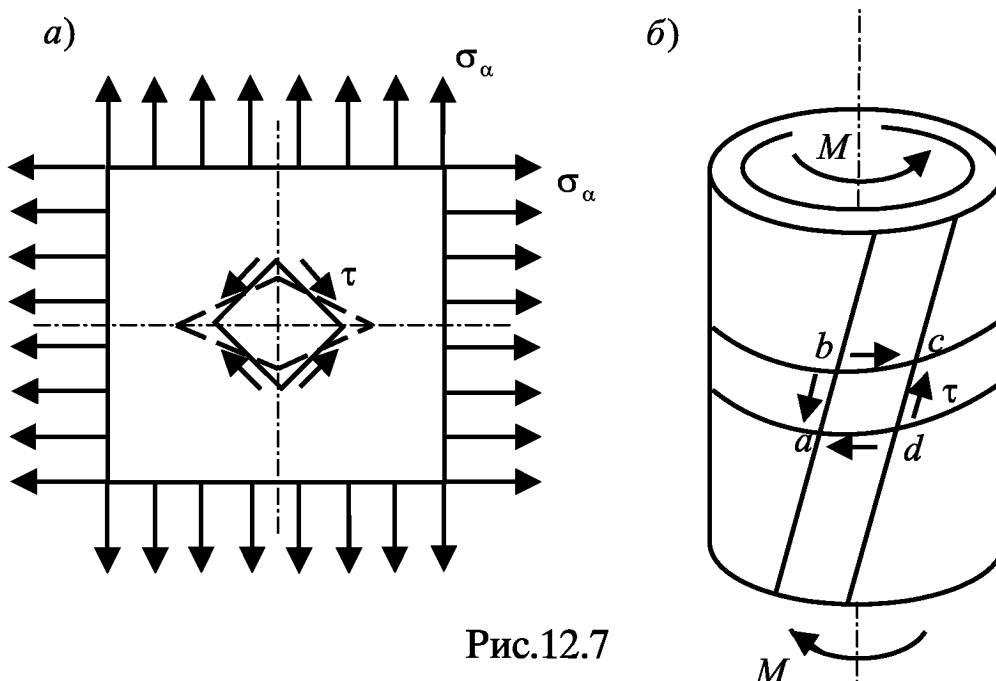


Рис.12.7

### 12.3 Расчет на прочность при сдвиге

Условие прочности при сдвиге имеет вид:

$$\boxed{\frac{Q}{F} \leq [\tau]} \quad (12.11)$$

Так как материал стержня при сдвиге находится в сложном напряженном состоянии, то для оценки его прочности необходимо привлечь теории прочности.

Для хрупких материалов применяют первую и вторую теории прочности. При чистом сдвиге

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Согласно первой теории прочности получаем условие

$$\sigma_1 = \tau \leq [\sigma]$$

т.е. касательное напряжение при сдвиге должно быть не больше допускаемого напряжения на растяжение, т.е.

$$\tau \leq [\sigma]$$

По второй теории прочности будем иметь:

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 = (\tau + \mu \tau) \leq [\sigma]$$

Если для стали принять  $\mu = 0.3$ , то допускаемое касательное напряжение должно быть таким:

$$\tau \leq 0.77[\sigma]$$

Для пластичных материалов обычно используют третью и четвертую теории прочности. Согласно третьей теории прочности получим:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) \leq [\sigma], \quad \text{т.е.} \quad [\tau] = 0.5[\sigma]$$

Наконец, по четвертой теории прочности получим:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma]$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.58[\sigma]$$

В практике обычно принимают для хрупких материалов

$$[\tau] = (0.8 \div 1.0)[\sigma]$$

для пластичных

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6)[\sigma]$$

Условие прочности при сдвиге (11) имеет совершенно такой же вид, как и условие прочности на растяжение (сжатие). Оно позволяет выполнять три вида расчета на прочность при сдвиге; проектировочный, проверочный и определение максимальной допускаемой нагрузки.

## 12.4 Практические расчеты соединений, работавших на сдвиг

### а) Заклепочные соединения

На сдвиг рассчитывают в основном соединительные элементы конструкций, служащие для скрепления между собой отдельных стержней и других деталей инженерных конструкций и машин (заклепки, болты, сварные швы, шпонки, вырубки и т.п.) (рис.12.8).

С теоретической точки зрения эти расчеты являются весьма несовершенными, так как основываются на ряде упрощающих расчет допущений. К числу таких допущений относится в первую очередь предположение, что в сечении, по которому может произойти разрушение от сдвига, касательные напряжения распределены равномерно. Предполагается также, что все заклепки работают в одинаковых условиях, т.е. передаваемое усилие распределяется между заклепками равномерно, что при работе в упругой стадии не так.

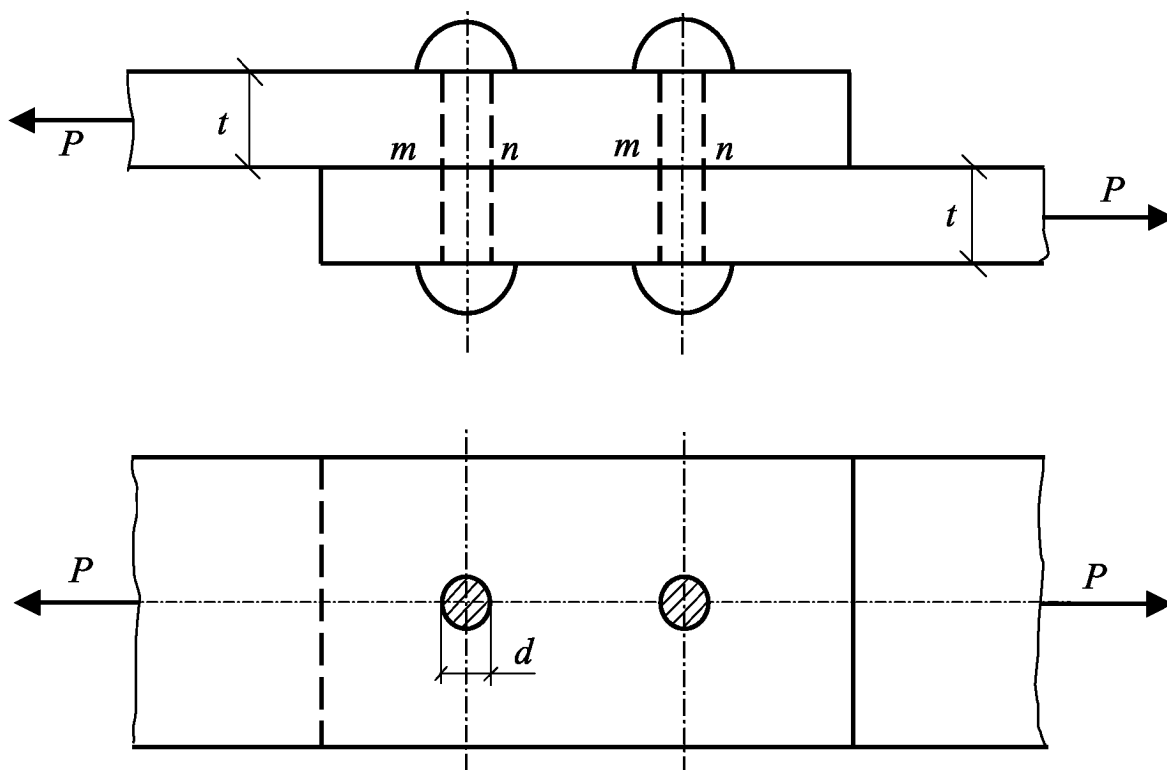


Рис.12.8

Опыты показали, что в упругой стадии работы заклепки соединения нагружены далеко неравномерно. Однако многолетняя служба различных сооружений показывает, что подобный расчет, несмотря на свой условный характер, вполне обеспечивает прочность конструкций.

Начало применения заклепок для соединения элементов металлических конструкций относится к двадцатым годам прошлого

столетия. Т.к. заклепки изготавливаются из пластичных материалов, то разрушению предшествуют значительные деформации, что повышает надежность соединения.

В настоящее время заклепки применяются у нас в основном в тяжелых конструкциях или при достаточно резких динамических нагрузках.

Отверстия для заклепок в соединяемых деталях просверливаются, а в менее ответственных продавливаются. (При продавливании отверстий края вытягиваются, т.е. подвергаются наклепу и становятся более хрупкими). Во всяком случае диаметр отверстия делается на 0.5-1.0 мм больше диаметра заклепки. Заклепка, имеющая с одной стороны головку, разогревается до светло-красного каления и вставляются в заготовленное отверстие. В некоторых соединениях используют холодные заклепки. Из выступающего конца стержня формируется вторая головка при помощи пневматического молотка или специальной клепальной машины. При этом стержень расширяется, плотно заполняет отверстие и при остывании сильно стягивает соединяемые детали. Таким образом, расчетным диаметром заклепки является диаметр заготовленного отверстия. Силы трения, возникающие на поверхности сопротивления листов, плотно сжатых заклепками, при расчете не учитываются, и принимается, что взаимному скольжению листов препятствует только сопротивление заклепок срезыванию.

Заклепки в соединении, изображенном на рис.12.8 испытывают напряжения среза по одному поперечному сечению и называются односрезными заклепками. Разрушение от среза может произойти по сечениям  $m - n$  (рис.12.9)

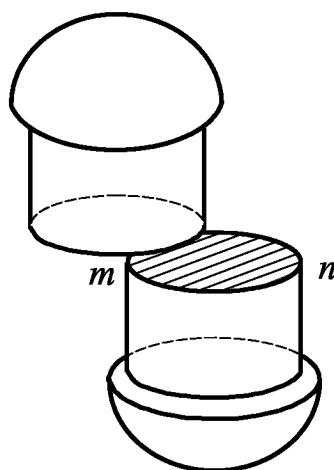


Рис.12.9

Площадь среза одной заклепки

$$F_{cp} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Если число заклепок в соединении  $n$ , то

$$F_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} n.$$

Соединение внахлестку имеет тот недостаток, что листы располагаются не в одной плоскости, вследствие чего силы  $P$  образуют пару сил, вызывающие изгиб листов и перекашивание соединения. Более рационально соединение листов впритык с накладками (рис.12.10). В таком соединении каждая заклепка испытывает напряжения среза по двум плоскостям. Такая заклепка называется двухсрезными заклепками.

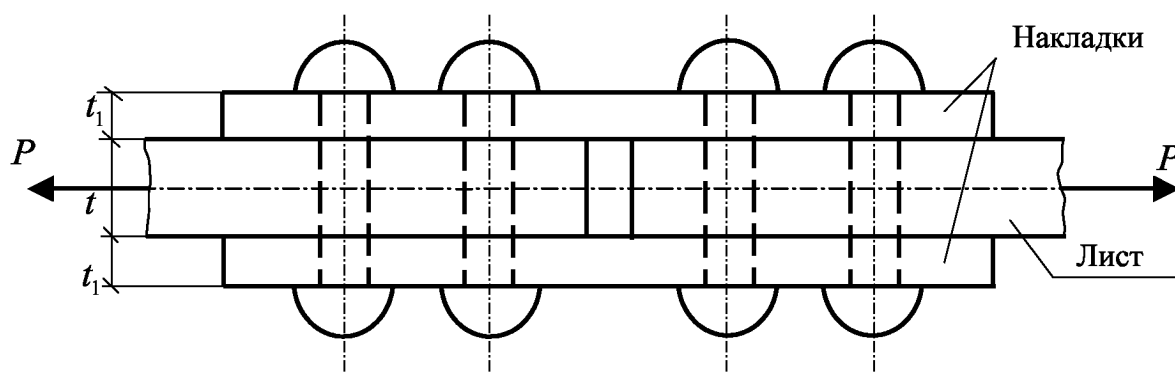


Рис.12.10

Встречаются конструкции, в которых склепываются целые пакеты листов (рис.12.11). В таких случаях заклепки являются многосрезными.

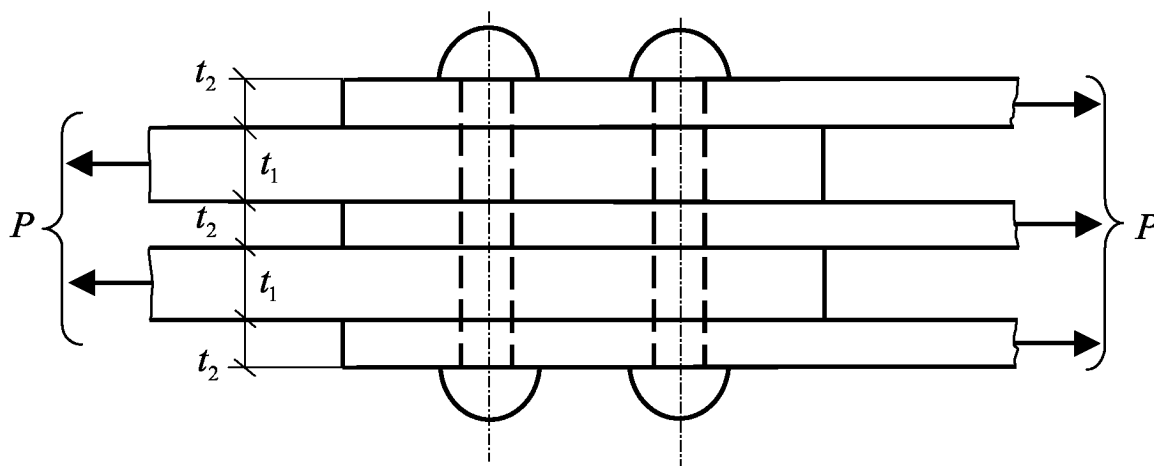


Рис.12.11

Если число плоскостей среза обозначить через  $m$ , то площадь среза соединения

$$F_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} nm,$$

где  $n$  - число заклепок, расположенных по одну сторону стыка.

Условие прочности соединения на срез имеет вид:

$$\tau = \frac{P}{F_{cp}} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} nm} \leq [\tau]}$$

Оно позволяет выполнять три вида расчетов на прочность - проверочный, проектировочный и определение максимально допустимой нагрузки на соединение.

Проектировочный расчет, обычно заключается в определении диаметра  $d$  заклепок, если их количество  $n$  задано конструктивно

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi mn[\tau]}}.$$

Если конструктивно назначается диаметр заклепок  $d$ , то определяют их количество.

$$n \geq \frac{4P}{\pi d^2 m[\tau]}.$$

Количество срезов заклепки  $m$  определяется самой конструкцией соединения.

Деформация сдвига часто сопровождается смятием.

*Смятием* называется местная деформация сжатия, когда действие сжимающей силы передается на сравнительно небольшом участке. Если, например, соединить два деревянных бруса болтом, то при навинчивании гайки, поверхность дерева под гайкой и головкой болта будет сжиматься, вдавливаясь внутрь древесины. В этих местах появится местное сжатие, напряжение от которого быстро убывает по мере удаления в стороны. Это и есть смятие. Для того, чтобы уменьшить напряжение смятия дерева, увеличивают опорную поверхность в месте смятия, подкладывая под гайку и головку болта металлические шайбы, имеющие большую площадь соприкосновения с деревом.

В заклепочных и болтовых соединениях напряжения смятия распределяются по полуцилиндрической поверхности отверстия листа и заклепки неравномерно и имеют наибольшую величину у точки  $K$  (рис.12.12).

Для упрощения расчета условно принимают, что смятие происходит по площади  $mnr$

$$F_{cm} = td$$

где  $d$  - диаметр заклепочного отверстия,  
 $t$  - толщина листа.

Если заклепка соединяет два листа неодинаковой толщины, то в формулу нужно подставить меньшую из них.

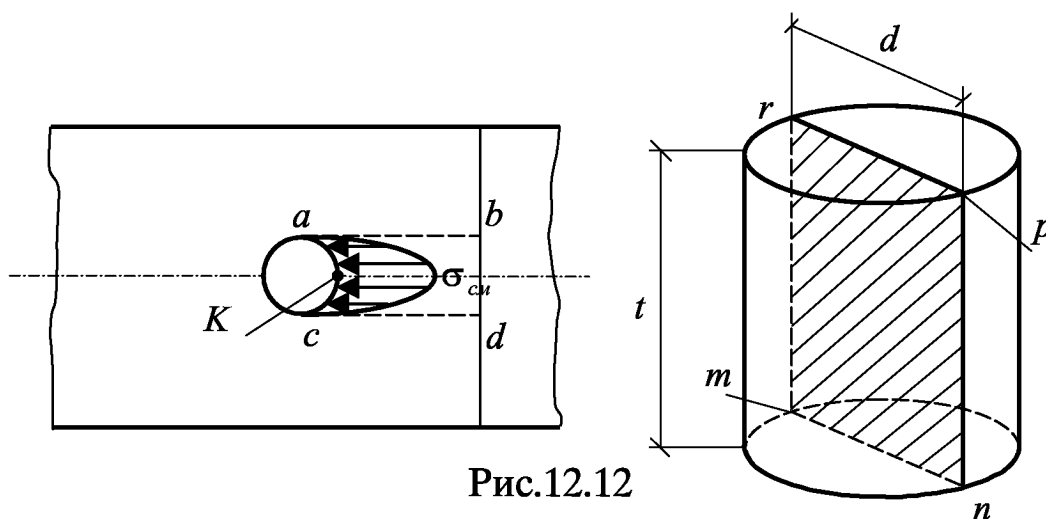


Рис.12.12

Для двухсрезных заклепок условной площадью смятия является

$$F_{см} = td \text{ или } F_{см} = 2t_1d$$

В расчет вводят меньшую из них.

Аналогично определяется площадь смятия и для многосрезных соединений. Так как предполагают, что напряжения смятия по условной площади смятия распределяется равномерно, то условие прочности соединения на смятие принимает вид:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{nF_{см}^{мин}} \leq [\sigma_{см}],$$

где  $n$  - число заклепок,  $[\sigma_{см}]$  - допускаемое напряжение на смятие, для стали оно принимается  $[\sigma_{см}] = (2 \div 2.5)[\sigma_{\perp}]$

Как правило расчет на прочность болтовых и заклепочных соединений на смятие проводится как проверочный.

### б). Расчет сварных соединений

При изготовлении металлических конструкций часто применяется сварка с помощью электрической дуги, открытой русским ученым - проф. В.В.Петровым в 1802 году. Обнаружив плавление металла в пламени полученной им электрической дуги, проф.Петров указал на возможность использования этого явления в технике.



Однако электрическая дуговая сварка была изобретена лишь в конце XIX века русскими инженерами Н.И.Бенардосом и Н.Г.Славяновым (1888 г.). В настоящее время она усовершенствована трудами советских ученых - акад. Е.О.Патоном и др. и получила широкое распространение во всем мире.

Соединение элементов при помощи электросварки наиболее прогрессивно. Сварные соединения менее трудоемки, чем заклепочные, они не ослабляют сечений соединяемых элементов, упрощают конструкцию и по надежности не уступают заклепочным соединениям.

Наиболее простым типом сварного соединения является соединение встык, при котором зазор между двумя соединяемыми элементами заполняется наплавленным металлом. В зависимости от толщин соединяемых элементов зазору между соединяемыми элементами придают *V* - образную или *X* - образную форму. При малой толщине листов кромки их не обрабатывают (рис.12.13).

Проверка соединения на растяжение или сжатие производится из условия прочности

$$\sigma = \frac{P}{l\delta} \leq [\sigma_s]$$

где  $[\sigma_s]$  - допускаемое напряжение при электросварке, зависит от вида сварки (ручная или автоматическая) и типа электродов (с тонкой или толстой обмазкой);

*l* - расчетная длина шва принимается меньше действительной на 10мм,  $l = b - 10\text{мм}$ ;

$\delta$  - толщина свариваемых элементов. Высота шва всегда больше толщины свариваемых элементов, но для надежности она принимается равной толщине  $\delta$ , т.е. наплывы не учитываются.

Сварное соединение встык с косым швом, (рис.12.14), как показали экспериментальные исследования, равнопрочно целому сечению.

Другими типами соединения листов являются соединения внахлестку, с накладками, в тавр и др., выполняемые при помощи валковых или угловых швов.

Угловой шов, параллельный направлению усилия, называется фланговым. Швы, перпендикулярные к действующему усилию, называются лобовыми, и когда швы идут под углом к направлению силы - называются косыми.

Расчет на прочность угловых швов производится условно на срез по сечению, расположенному в биссекторной плоскости прямого угла (рис .12.16)

Площадь среза  $F_{cp} = lh = l\delta \cos 45^\circ$

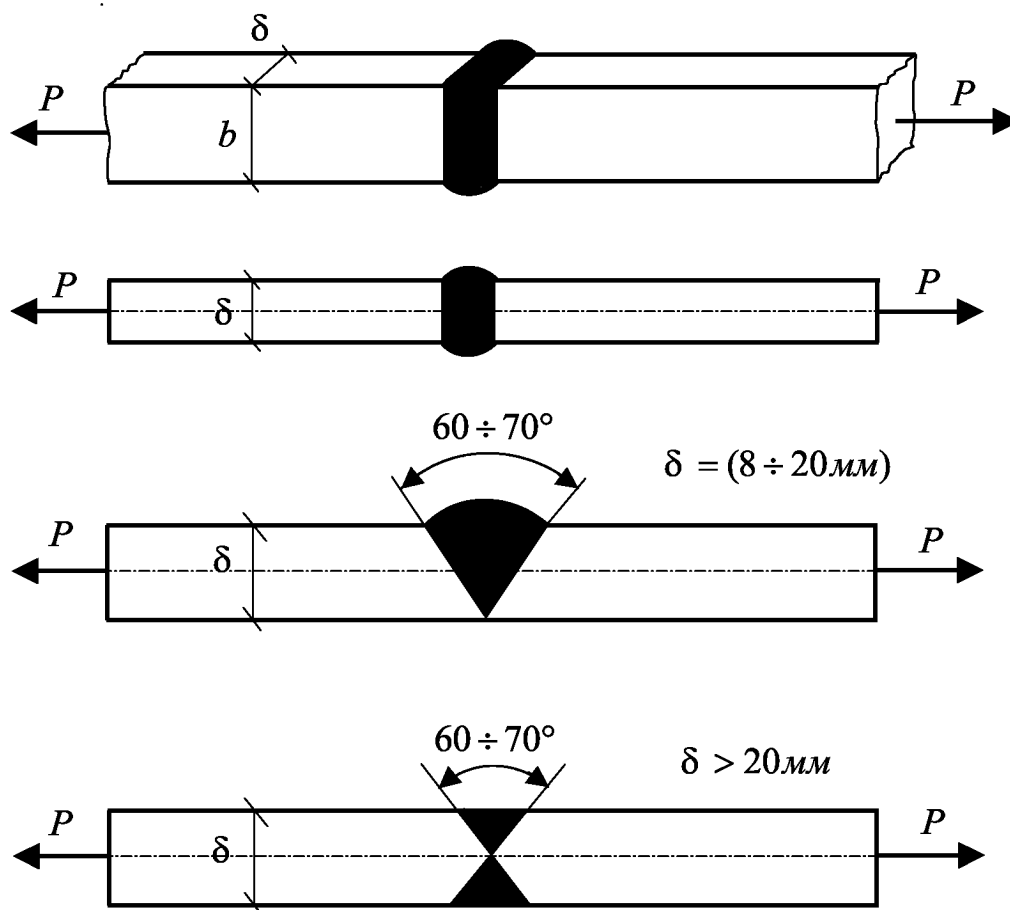


Рис.12.13



Рис.12.14

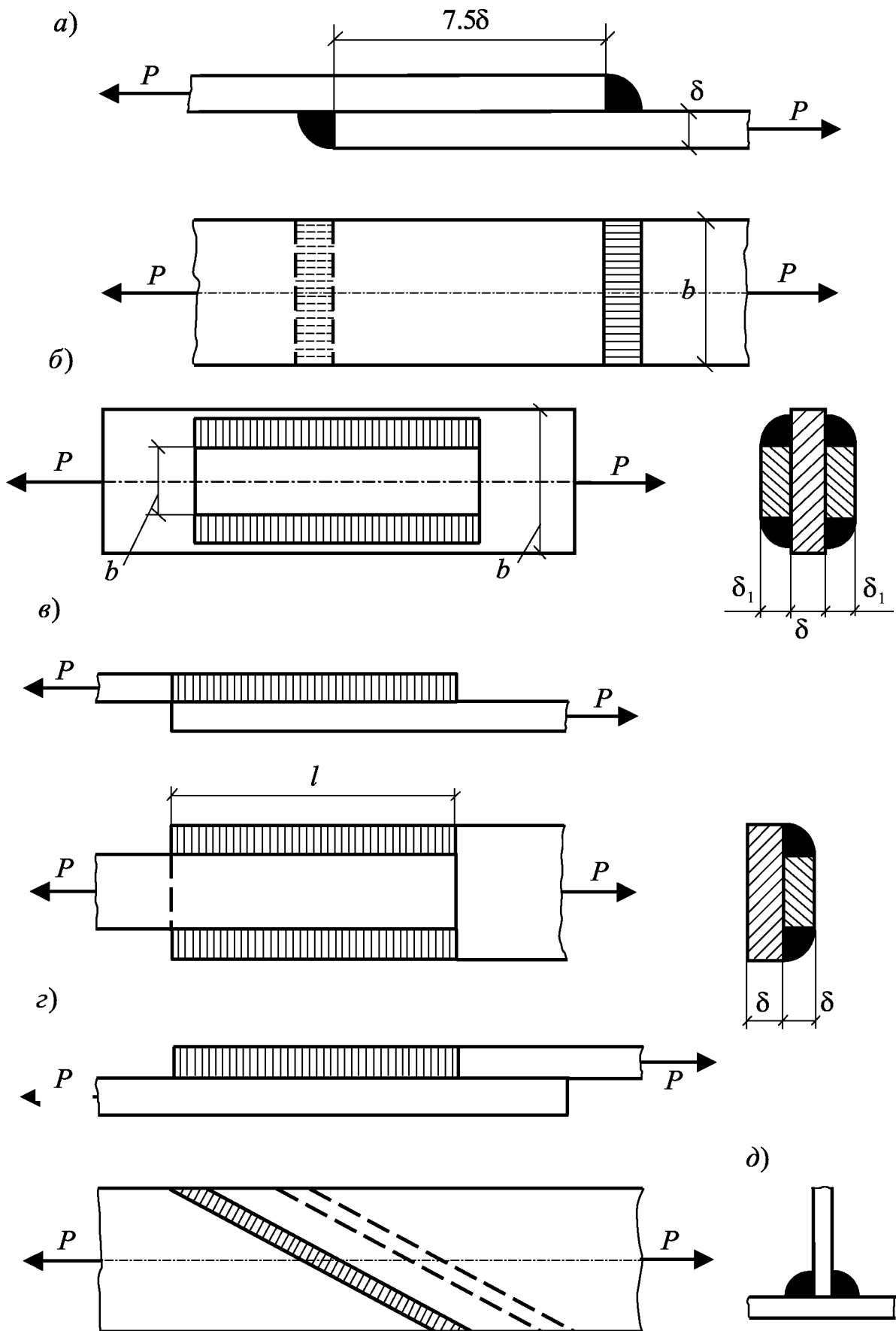


Рис.12.15

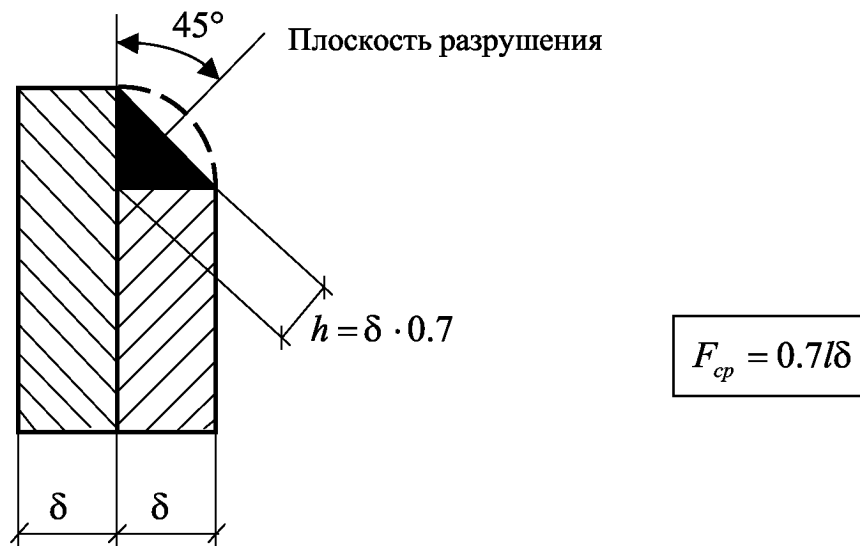


Рис.12.16

При расчете на прочность предполагают, что касательные напряжения по плоскости среза распределяются равномерно. Условие прочности для двух симметрично расположенных швов (рис.12.15в) можно записать:

$$\frac{P}{1.4\delta l} \leq [\tau_s],$$

где  $[\tau_s]$  - допускаемое напряжение на срез для электросварки.

Из условия прочности можно определить расчетную длину сварного шва

$$l = \frac{P}{1.4\delta [\tau_s]}$$

В некоторых элементах металлических конструкций растягивающая сила не проходит посередине привариваемой полки. Например, в уголке растягивающая сила проходит через центр тяжести сечения (рис.12.17).

Усилия, приходящиеся на каждый шов, обратно пропорциональны расстояниям  $h_1$  и  $h_2$ . Чтобы обеспечить одинаковые условия работы обоих швов, длина их должна быть разной и определяться из условия (а)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1} \tag{а}$$

При одинаковой толщине шва условие прочности имеет вид:

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2)0.7\delta} \leq [\tau] \tag{б}$$

Из уравнений (а) и (б) находится расчетная длина каждого шва.

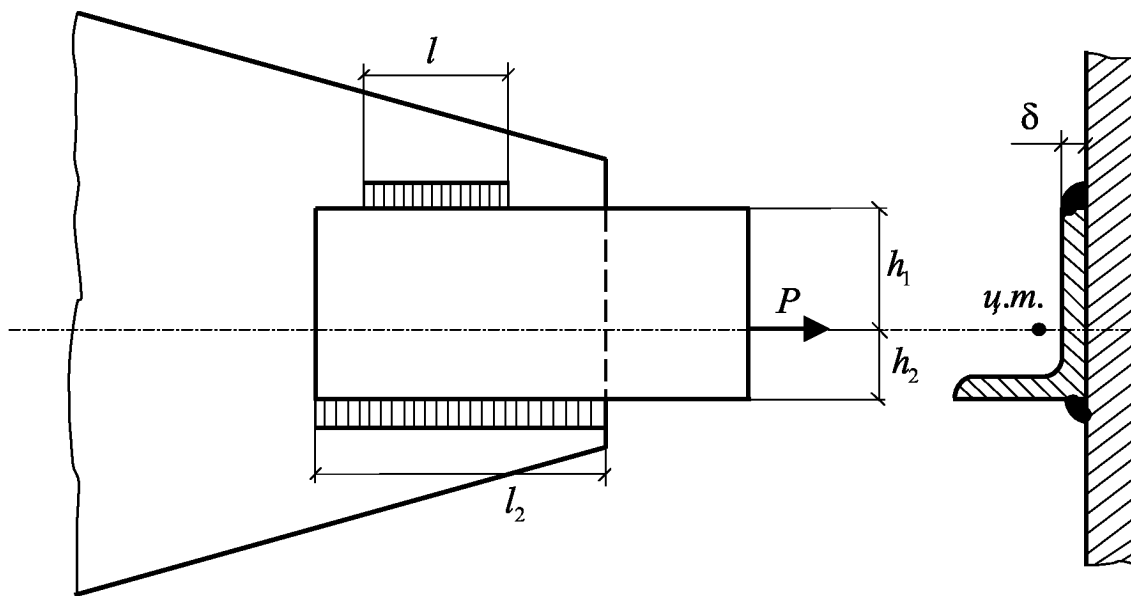


Рис.12.17

## ГЛАВА 13

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

#### 13.1 Введение

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях элементов конструкций возникает только крутящий момент  $M_{кр}$ , а другие внутренние силовые факторы (продольная сила, изгибающие моменты, поперечные силы) равны нулю.

Рассмотрим вопросы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций работающих на кручение. Это валы, шпиндели токарных и сверлильных станков, сами сверла, пружины и другие элементы конструкций.

Стержни любой формы поперечного сечения, работающие на кручение, называются валами.

Сложность решения задачи по определению напряжений и деформаций при кручении существенным образом зависит от формы поперечного сечения. Наиболее просто такие задачи решаются для стержней круглого и кольцевого поперечного сечения. Поэтому в начале будем рассматривать стержни круглого поперечного сечения.

#### 13.2 Кручение стержней круглого поперечного сечения

Для того, чтобы определить напряжения в поперечных сечениях вала рассмотрим уравнение, связывающее крутящий момент с напряжениями

$$\int_F \tau \rho dF = M_{кр}$$

где  $\tau$  - касательное напряжение, действующее на элементарной площадке  $dF$ , расположенной на расстоянии  $\rho$  от центра сечения (рис.13.1).

Это интегральное уравнение относительно  $\tau$  и, как отмечалось выше, из него нельзя определить  $\tau$ , так как закон их распределения по сечению не известен. Для его определения рассмотрим деформации вала.

На поверхность круглого вала нанесем ортогональную сетку линий с постоянным шагом: прямые линии вдоль образующих цилиндра и окружности в перпендикулярных к продольной оси плоскости (рис.13.1а). После деформации стержня (рис.13.1б)

образующие цилиндра переходят в винтовые линии, образующие некоторый угол  $\gamma$  с осью стержня. Все окружности в перпендикулярных сечениях сохраняют свою форму, только поворачиваются одна относительно другой на некоторый угол, называемый углом закручивания. Радиусы в торцевых сечениях не искривляются и сами сечения остаются плоскими. Длина стержня не изменяется. Квадратные элементы на цилиндрической поверхности стержня деформируются и приобретают форму ромбов.

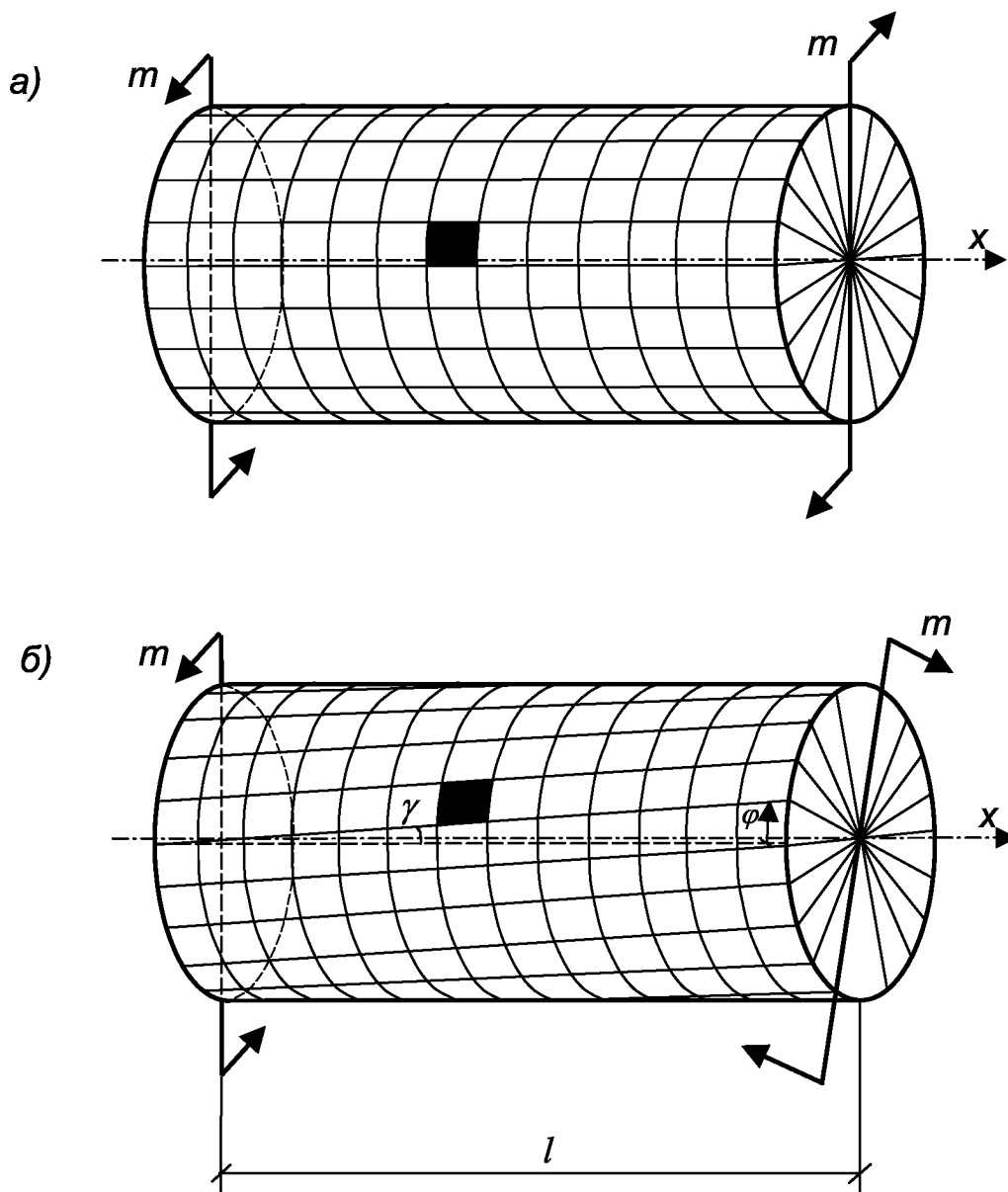


Рис.13.1

Предположим, что картинка деформаций наблюдаемых на поверхности вала, сохраняется и внутри. Это предположение эквивалентно гипотезе плоских сечений:

- 1) сечения плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации при кручении круглого стержня, поворачиваясь одно относительно другого на некоторый угол;
- 2) радиусы, проведенные мысленно в любом поперечном сечении, при кручении не искривляются.

Рассмотрим часть стержня длиной  $dx$  между двумя поперечными сечениями (рис.13.2). Элемент  $ABCD$  после деформации превращается в

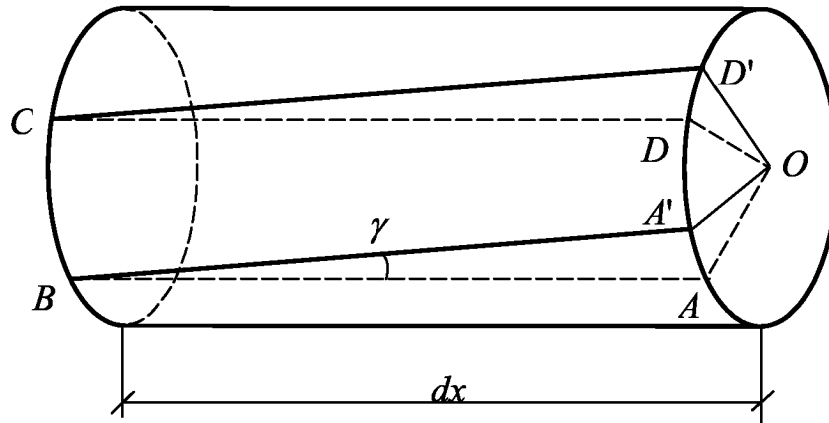


Рис.13.2

ромб  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $\angle ABA_1 = \gamma$ ,  $\angle AOA_1 = d\varphi$ .

Из рисунка видно, что:  $AA_1 = AO d\varphi = r d\varphi$  (из  $\triangle AOA_1$ )

$AA_1 = AB \operatorname{tg} \gamma = AB \gamma = \gamma dx$  (из  $\triangle ABA_1$ )

Сравнивая полученные выражения приходим к зависимости

$$r d\varphi = \gamma dx \text{ или } \gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dx}$  называется относительным углом закручивания и обозначается  $\theta$ . Используя это обозначение получаем  $\gamma = r\theta$ .

Рассмотрим элемент меньшего радиуса  $\rho$  расположенного внутри стержня. Угол сдвига элемента определяется по аналогичной формуле:

$$\gamma_\rho = \rho\theta$$

Воспользуемся теперь законом Гука при сдвиге. На расстоянии  $\rho$  от оси вращения получим:

$$\tau = \rho\theta G$$

т.е. касательные напряжения пропорциональны расстоянию от оси вращения до заданной точки и изменяются по линейному закону от  $\tau = 0$  до наибольшего значения



$$\tau_{\max} = Gr\theta = G\theta \frac{d}{2}$$

На рис.13.3 показано распределение касательных напряжений вдоль

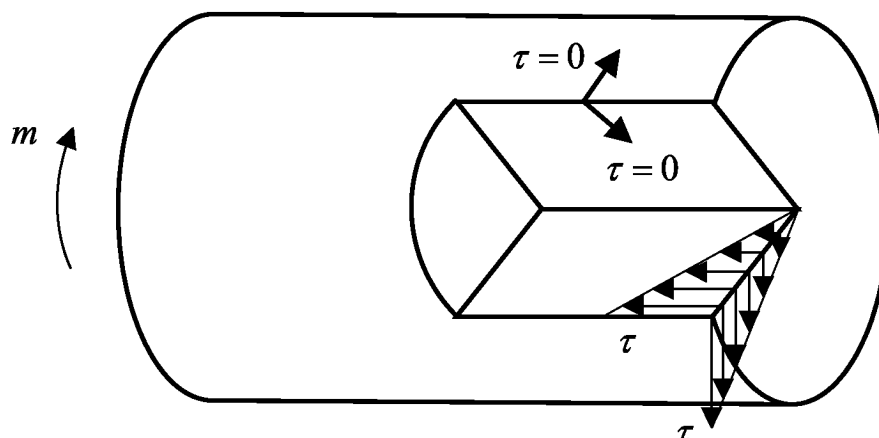


Рис.13.3

произвольного радиуса поперечного сечения

Подставляя значение  $\tau$  в интегральное уравнение равновесия, получим

$$\int_F G\rho\theta\rho dF = G\theta \int_F \rho^2 dF = G\theta J_p = M_{KP}$$

Из последнего равенства получаем

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{KP}}{GJ_p}$$

В этой формуле  $J_p$  - полярный момент инерции сечения.

Интегрируя выражение для  $\theta$  в пределах участка длиной  $l$ , где  $M_{KP} = const$  получим

$$\varphi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{M_{KP} dx}{GJ_p} = \frac{M_{KP} l}{GJ_p}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{M_{KP} l}{GJ_p}}$$

Эта формула представляет собой закон Гука при кручении и позволяет определить угол закручивания.

Для определения величины касательного напряжения в любой точке сечения подставляем значение  $\theta$  в формулу для  $\tau$

$$\boxed{\tau = \frac{M_{KP}}{J_p} \rho}$$

Для наибольших касательных напряжений получим формулу

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{J_p} \frac{d}{2} = \frac{M_{KP}}{W_p}$$

где  $W_p = \frac{2J_p}{d}$  - полярный момент сопротивления.

Таким образом, обведенные формулы позволяют решить две основные задачи сопротивления материалов - определить напряжения и деформации вала при кручении.

Произведем расчет валов на прочность и жесткость при кручении. Используя формулу для максимальных касательных напряжений, можем записать *условие прочности при кручении* в следующем виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_p} \leq [\tau]$$

Из этого неравенства определяется полярный момент сопротивления

$$W_p \geq \frac{M_{KP}}{[\tau]}$$

Для вала круглого поперечного сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_p = \frac{2J_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Подставляя выражение  $W_p$  в условие прочности при кручении и решая его относительно диаметра, получим следующую расчетную формулу

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{KP}}{\pi[\tau]}}$$

Полученное по этой формуле расчетное значение диаметра округляется затем до ближайшего большего стандартного значения. Если выбрать значение  $d_{СТ}$  несколько меньше  $d_{РАСЧ}$ , то необходимо выполнить проверочный расчет и убедиться, что перегрузка меньше 5%, т.е. выполнить последовательно следующий расчет

$$W_p = \frac{\pi d_{СТ}^3}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_p}, \quad \delta = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100\% < 5\%$$

Из характера распределения касательных напряжений, следует, что материал вала вблизи оси используется нерационально. Поэтому более рационально с точки зрения экономии металла и снижения веса конструкции выбирать вал пустотелый, поперечное сечение которого имеет форму кольца (рис.13.4).

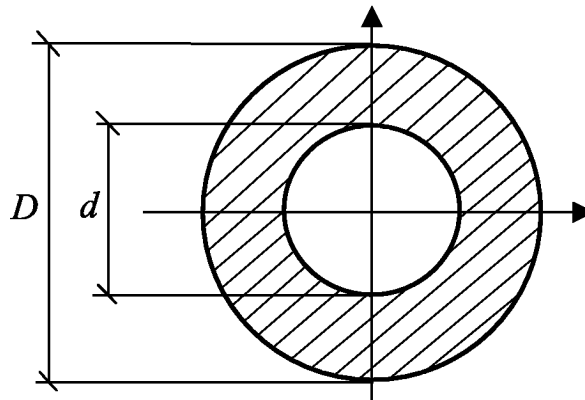


Рис.13.4

Обозначим  $d$  - внутренний диаметр кольца,  $D$  - наружный диаметр  $\alpha = d / D$  - отношение диаметров.

В этих обозначениях

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Из условия прочности при кручении определяется значение  $D$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{KP}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}$$

Как и прежде полученные расчетные значения  $D$  и  $d$  округляются до ближайших значений  $d_{CT}$  и  $D_{CT}$ , а затем выполняется проверочный расчет:

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D_{CT}^4 - d_{CT}^4); \quad W_p = \frac{2J_p}{D_{CT}};$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_p}; \quad \delta = \frac{|\tau_{max} - [\tau]|}{[\tau]} 100\% < 5\%$$

Очень часто валы кроме условия прочности должны удовлетворять также условию жесткости

$$\theta = \frac{M_{KP}}{GJ_p} \leq [\theta]$$

Значение  $[\theta]$  зависит от условий работы вала и задается обычно в градусах на погонный метр длины вала. При статической нагрузке принимают обычно

$$[\theta] = 0,3^\circ \text{ м}^{-1} = 0,3^\circ \frac{\pi}{180 \cdot 100} = \frac{\pi}{6} 10^{-4} \text{ рад} / \text{см}.$$

Проверка выполнения условия жесткости обычно включается в проверочный расчет вала после подбора стандартных значений диаметров из условия прочности. Если же условие жесткости при этом не выполняется, то диаметр вала необходимо подбирать из условия жесткости:

$$J_p \geq \frac{M_{KP}}{G[\theta]}$$

Для сплошного вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{KP}}{\pi G[\theta]}}$$

Для вала кольцевого сечения с заданным соотношением диаметров

$$\frac{d}{D} = \alpha; \quad J_p \geq \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{KP}}{\pi(1 - \alpha^4)G[\theta]}}; \quad d = \alpha D$$

Исследуем напряженное состояние элементов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , выделенных из вала круглого поперечного сечения (рис.13.5). Элемент  $ABCD$  ограничен сечениями перпендикулярными оси вала и его образующими, а  $A_1B_1C_1D_1$  - повернут на  $45^\circ$  по сравнению с  $ABCD$ . Как показано выше в сечениях вала действуют касательные напряжения  $\tau$ , перпендикулярные радиусу, а также касательные напряжения  $\tau$  в направлении образующих в соответствии с законом парности. Нормальных напряжений на гранях элемента  $ABCD$  нет, этот элемент находится в условиях чистого сдвига.

При рассмотрении чистого сдвига было показано, что если повернуть такой элемент на  $45^\circ$ , то его грани станут главными площадками. Следовательно, на гранях элемента  $A_1B_1C_1D_1$  будут действовать главные напряжения  $\sigma_1 = \tau$  и  $\sigma_3 = -\tau$ .

Наглядной иллюстрацией такого распределения напряжений служат опыты по разрушению при кручении образцов, изготовленных из различных материалов.

Дерево - материал неоднородный, имеет очень малую прочность на скалывание вдоль волокон, поэтому при кручении разрушение начинается с образования продольных трещин, вызванных действием касательных напряжений (вдоль граней  $AD$  и  $BC$ ).

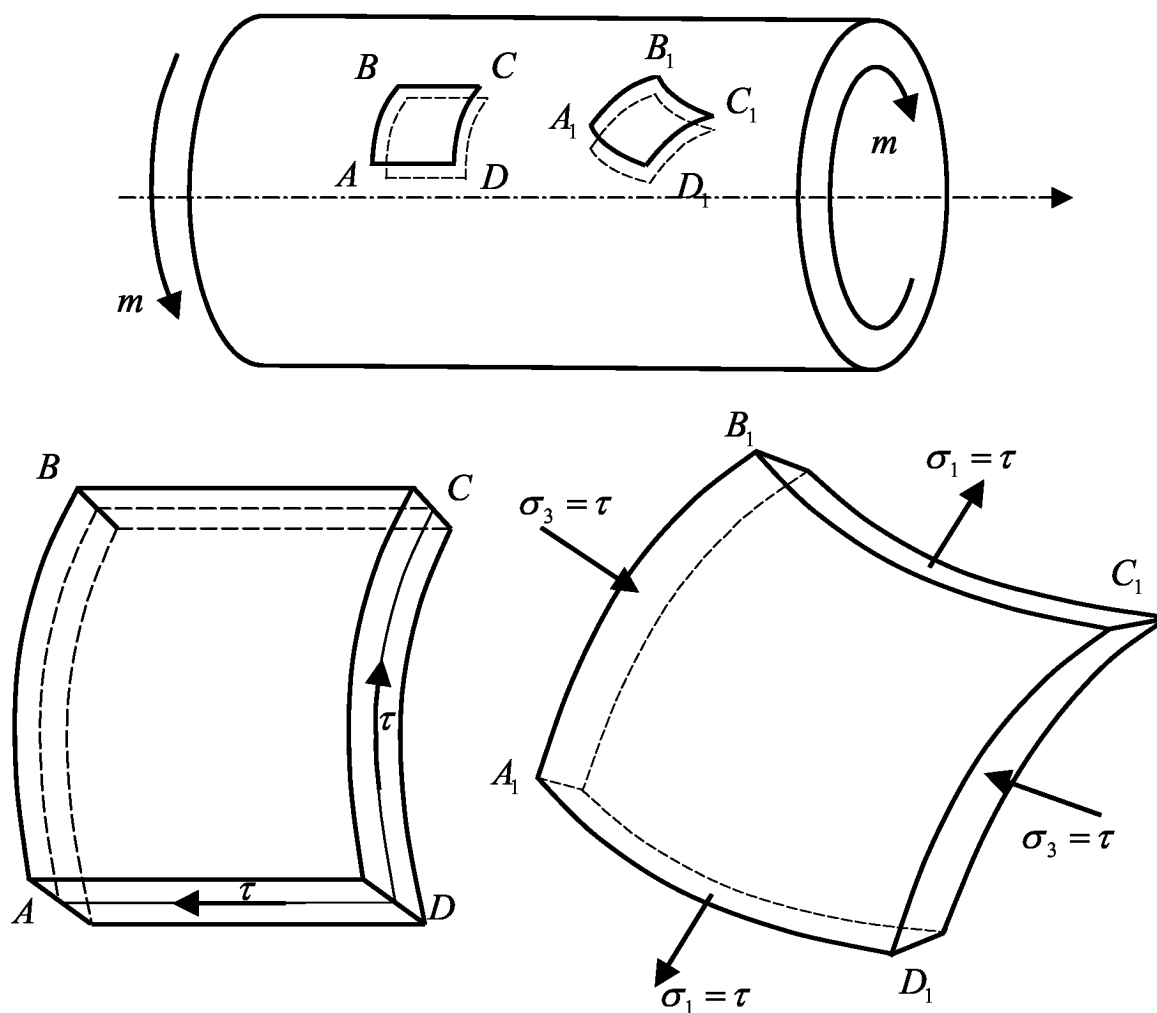


Рис.13.5

Чугун по разному сопротивляется растяжению и сжатию, поэтому при кручении образца из чугуна его разрушение происходит от действия главных растягивающих напряжений  $\sigma_1$ , действующих под углом  $45^\circ$  к оси стержня. Поверхность разрушения чугунного образца располагается примерно под углом  $45^\circ$  к оси стержня.

Образец из малоуглеродистой стали разрушается от действия касательных напряжений, действующих в плоскости поперечного сечения. Плоскость разрушения стального образца перпендикулярна к оси стержня.

Выбор допускаемого значения касательного напряжения  $[\tau]$  зависит от характера разрушения и, следовательно, для разных материалов должен выбираться с привлечением различных теорий прочности.

### 13.3 Расчет винтовых цилиндрических пружин

Полученные формулы для расчетов на прочность при сдвиге и кручении могут быть с достаточной для практических целей точностью применены при расчетах винтовых цилиндрических пружин, которые являются наиболее распространенными в технике типом пружин. Эти пружины навивают из проволоки круглого поперечного сечения, изготовленной из специальных марок стали. Если угол наклона витков пружины можно считать малым (другими словами, винтовая цилиндрическая пружина имеет малый шаг  $h$ .), то при расчете на прочность винтовой пружины можно пренебречь влиянием изгибающего момента.

Пусть винтовая пружина, растягивается (или сжимается) силами величиной  $P$ , имеет средний диаметр  $D=2R$  и изготовлена из проволоки диаметром  $d$  (рис. 6). Для определения внутренних усилий в пружине применим метод сечений.

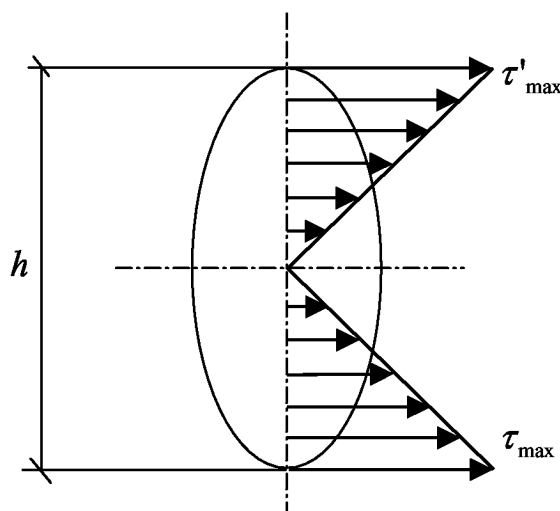


Рис.13.6

Очевидно, что в любом сечении действуют поперечная сила  $Q=P$  и крутящий момент  $M_{кр} = PR$ , вызванный эксцентриситетом приложенной к пружине растягивающей нагрузки.

Кроме того, в сечении действуют продольная сила и изгибающий момент, действием которых можно пренебречь вследствие малости угла наклона витков пружины. Если учитывать только действие  $Q$  и  $M_{кр}$ , то в поперечном сечении проволоки диаметром  $d$  возникают напряжения среза  $\tau_1 = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}$

и напряжение кручения, достигающее при  $\rho = \frac{1}{2}d$  максимального значения

$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3}$ . Распределение этих напряжений показано на рис.13.7.

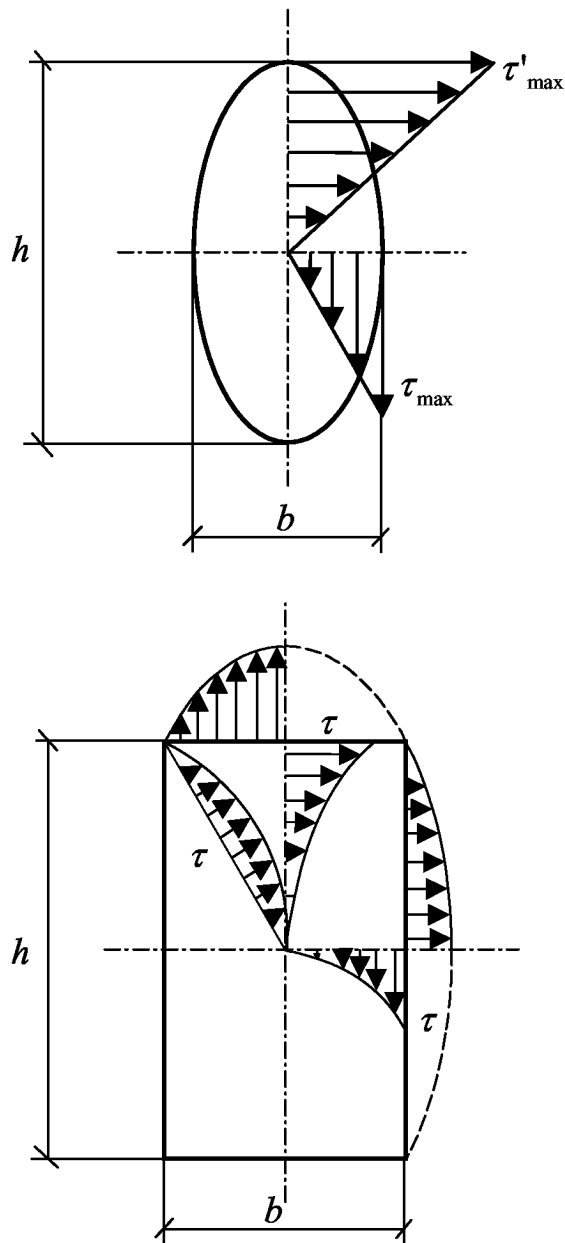


Рис.13.7

Очевидно, что суммарное касательное напряжение достигает наибольшего значения в точке *A* сечения витка проволоки на внутреннем радиусе пружины. При этом  $\tau_{\max}$  принимает значение

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right)$$

Как правило,  $d \ll 4R = 2D$ , поэтому  $\tau_{\max}$  можно вычислять по приближенной формуле

$$\tau_{\max} \approx \frac{8PD}{\pi d^3}$$

где  $d$  - диаметр проволоки,  $D$  - средний диаметр витков пружины.

В тех случаях, когда диаметр проволоки не является малым по сравнению с диаметром пружины, нужно пользоваться формулой, учитывающей различную кривизну на внутренней и наружной поверхностях пружины:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right)$$

где  $m = \frac{D}{d}$ .

Кроме наибольшего касательного напряжения, которое необходимо для расчета на прочность, мы должны определить также деформацию пружины  $\lambda$ . Для этого рассмотрим элемент  $AB$  витка пружины длиной  $dS$ .

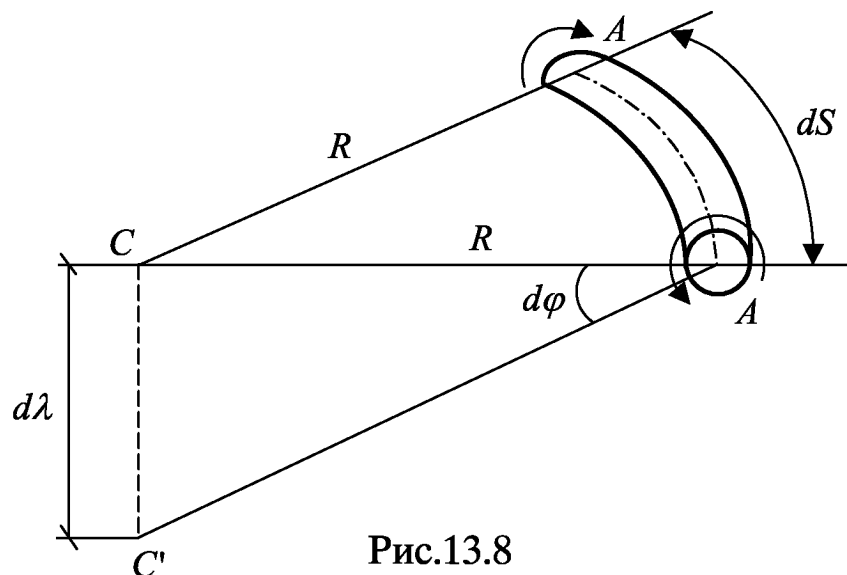


Рис.13.8

Если сечение  $A$  считать неподвижным, то за счет действия крутящего момента  $M_{KP}$  сечение  $B$  повернется на угол  $d\varphi$ , определяемый по известной формуле

$$d\varphi = \frac{M_{KP} dS}{GJ_p}$$

Подставляя сюда значения  $M_{KP} = PR = \frac{1}{2} PD$ ,  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$

получим

$$d\varphi = \frac{16PD}{\pi Gd^4} dS$$

Вследствие закручивания радиус пружины в сечении  $B$  повернется на угол  $d\varphi$  из положения  $BC$  в положение  $BC'$ . Величина перемещения

$$d\lambda \approx R d\varphi = \frac{1}{2} D d\varphi = \frac{8PD^2}{\pi Gd^4} dS$$



Полную деформацию пружины получим, проинтегрировав выражение  $d\lambda$  по длине всех  $n$  витков пружины. Так как наклон витков предположен малым, то длина одного витка может приближенно считаться равной длине окружности  $\pi D$ , а длина всех  $n$

$$S = \pi D n$$

Таким образом, деформацию пружины приближенно можно определять по формуле

$$\lambda = \int_0^S \frac{8PD^2}{\pi Gd^4} dS = \frac{8PD^2}{\pi Gd^4} \pi D n = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}$$

Полученные формулы позволяют рассчитать пружину на прочность и жесткость. Допускаемое напряжение  $[\tau]$  выбирается в зависимости от материала и диаметра  $d$  проволоки пружины. Для закаленной пружинной стали  $[\tau] = 500 \text{ МПа}$  при  $d = 6 \text{ мм}$ ,  $[\tau] = 400 \text{ МПа}$  при  $d = 10 \text{ мм}$  и  $[\tau] = 350 \text{ МПа}$  при  $d = 12 \text{ мм}$ . Для хромоникелевой стали для пружин с диаметром проволоки  $d = 12 \div 16 \text{ мм}$  принимают  $[\tau] = 700 \text{ МПа}$ .

Расчет амортизационных пружин производится исходя из величины энергии, которую должна поглощать пружина:

$$U = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{4P^2 D^3 n}{Gd^4}$$

С учетом приближенной формулы для  $\tau_{\max}$  это выражение можно преобразовать к виду

$$U = \frac{\pi^2 D d^2 n}{16G} \tau_{\max}^2$$

$$\text{Объем проволоки пружины } V = SF = \pi D n \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi^2 D d^2 n}{4}$$

С учетом этого получаем зависимость между  $U$  и  $V$

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V$$

По заданной величине энергии  $U$  можно определить объем проволоки пружины; необходимый для поглощения этой энергии, чтобы напряжения не превышали допускаемых

$$V_{\min} = \frac{4GU}{[\tau]^2}$$

После этого подбираются  $d$ ,  $D$  и  $n$  с таким расчетом, чтобы  $\tau_{\max} \leq [\tau]$  и зазоры между витками пружины не перекрывались при ее осадке.

Кроме винтовых цилиндрических пружин в технике применяются пружины конические, призматические, фасонные, тарельчатые. Сечение витков пружины может быть не круглым, а прямоугольным. Расчет таких пружин представляет собой сложную задачу, поэтому мы его не рассматриваем.

### **13.4 Мембранная аналогия при кручении**

При исследовании различных физических процессов математическими методами, часто встречаются случаи, когда совершенно различные по физической сущности явления сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Тогда между этими явлениями (процессами) может быть установлена аналогия, которая позволяет не решая уравнений сказать, что между функциями, характеризующими первый физический процесс существует та же зависимость, что и между функциями, описывающими второй процесс. Если физическое содержание одного процесса допускает простое и наглядное толкование зависимостей между функциями, его описывающими, то аналогия даст возможность наглядно представить зависимости между соответствующими функциями второго процесса.

Так в частности обстоит дело в задаче о кручении стержней. В теории упругости показано, что независимо от формы поперечного сечения, задача о кручении бруса сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой на контур того же очертания и нагруженной равномерно распределенным давлением. Аналогом напряжения является угол между касательной к поверхности пленки и плоскостью контура, а аналогом крутящего момента - объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Пусть нужно установить закон распределения напряжений в заданном сечении вала. Для этого на контур такого же очертания натянем пленку, которая нагружена равномерно распределенным давлением. Мысленно сделав несколько разрезов пленки, мы определим изменение угла наклона касательной к поверхности пленки по сечению. В соответствии с мембранной аналогией распределение касательных напряжений по сечению будет таким же. Заметим, что при помощи мембранной аналогии можно получить не только качественные, но и количественные результаты. Более подробно этот метод изложен в специальной литературе.

### 13.5 Кручение стержней некруглого поперечного сечения

Определение напряжений при кручении стержней некруглого поперечного сечения представляет собой сложную задачу, которую нельзя решить методами сопротивления материалов. Точный расчет стержней некруглого поперечного сечения возможен только методами теории упругости. Причина этого состоит в том, что при кручении стержней некруглого поперечного сечения не соблюдается гипотеза плоских сечений.

Боковые поверхности прямоугольного стержня после деформации перестают быть плоскими, поперечные линии заметно искривляются, следовательно, и поперечные сечения перестают быть плоскими, деформируются. Элементы, нанесенные на поверхность прямоугольной сеткой линий, деформируются по-разному, в зависимости от их положения. Следовательно, напряжение  $\tau$  является функцией двух координат в плоскости сечения, а не одного лишь расстояния  $\rho$  от оси вращения. На взаимный поворот сечений  $\Delta\varphi$  оказывает влияние деформация сечений, а не только крутящий момент и расстояние  $l$ .

Проведенные методами теории упругости исследования показывают что расчетные формулы для определения относительного и полного углов закручивания, а также наибольших касательных напряжений при кручении стержней некруглого поперечного сечения можно привести к виду

$$\theta = \frac{M_{KP}}{GJ_K}, \quad \varphi = \frac{M_{KPl}}{GJ_K}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_K},$$

где  $J_K$  и  $W_K$  геометрические характеристики некруглого сечения, называемые моментом инерции и моментом сопротивления при кручении.

Например, для стержня эллиптического сечения наибольшие касательные напряжения достигаются на концах малой полуоси

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_k},$$

где  $W_k = \frac{\pi hb^2}{16}$ . На концах большой полуоси эллипса  $\tau_{\max} = \gamma \tau_{\max}$ ;  $\gamma = \frac{b}{h}$ ;

$$J_k = \frac{\pi hb^2}{64} (h^2 + b^2).$$

При  $h = b = d$  получаем  $J_k = J_p$ ;  $W_k = W_p$ ;  $\gamma = 1$ , т.е. приходим к формулам при кручении круглого стержня.

При кручении стержней прямоугольного сечения геометрические характеристики  $J_k$  и  $W_k$  определяются по формулам

$$W_k = \alpha hb^2, \quad J_k = \beta hb^3,$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по таблицам в зависимости от отношения  $h/b$ . Наибольшего значения  $\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_k}$  касательные напряжения достигают на серединах длинных сторон прямоугольника.

На серединах коротких сторон прямоугольного сечения касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max},$$

где коэффициент  $\gamma$  также определяется по таблице в зависимости от соотношения сторон  $h/b$ . В угловых точках прямоугольника касательные напряжения отсутствуют.

В учебниках и справочниках по сопротивлению материалов можно найти формулы и таблицы для определения геометрических характеристик  $J_k$ ,  $W_k$  также и для других форм сечений брусьев, работающих на кручение.

### 13.6. Кручение тонкостенных стержней

В различных областях техники, машиностроении, строительстве и т.д. используются тонкостенные стержни работающие на кручение. Характерной особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно меньше прочих линейных размеров. Такие профили могут быть замкнутыми и открытыми. Характер распределения напряжений в поперечном сечении и методы расчета зависят от того, открытый или замкнутый профиль имеет поперечное сечение стержня.

Для изучения характера распределения напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня воспользуемся методом мембранной аналогии. Представим себе вырезанное в плоской плите отверстие в форме изучаемого профиля и натянутую на нем пленку. Приложив к пленке равномерно распределенное давление, изучим ее деформации (рис.13.9).

В случае замкнутого профиля область внутри контура не связана с внешней областью и под давлением смещается (рис.13.9а). Деформированная пленка при этом образует поверхность с примерно постоянным углом наклона касательной к контуру. Следовательно, касательные напряжения распределяются равномерно по толщине профиля.

Для открытого профиля пленка деформируется как показано на рис.13.9б. Наибольшие углы наклона касательной имеются по концам, причем в середине толщины происходит смена знака угла наклона. Поэтому предполагается, что касательные напряжения  $\tau$  распределяются линейно по толщине профиля (рис.13.9б).

Перейдем к выводу формул для расчета тонкостенных стержней на кручение.

### 13.7 Замкнутые профили

Методом мембранной аналогии установлено, что касательные напряжения в этом случае распределяются равномерно по толщине поперечного сечения (рис.13.9а).

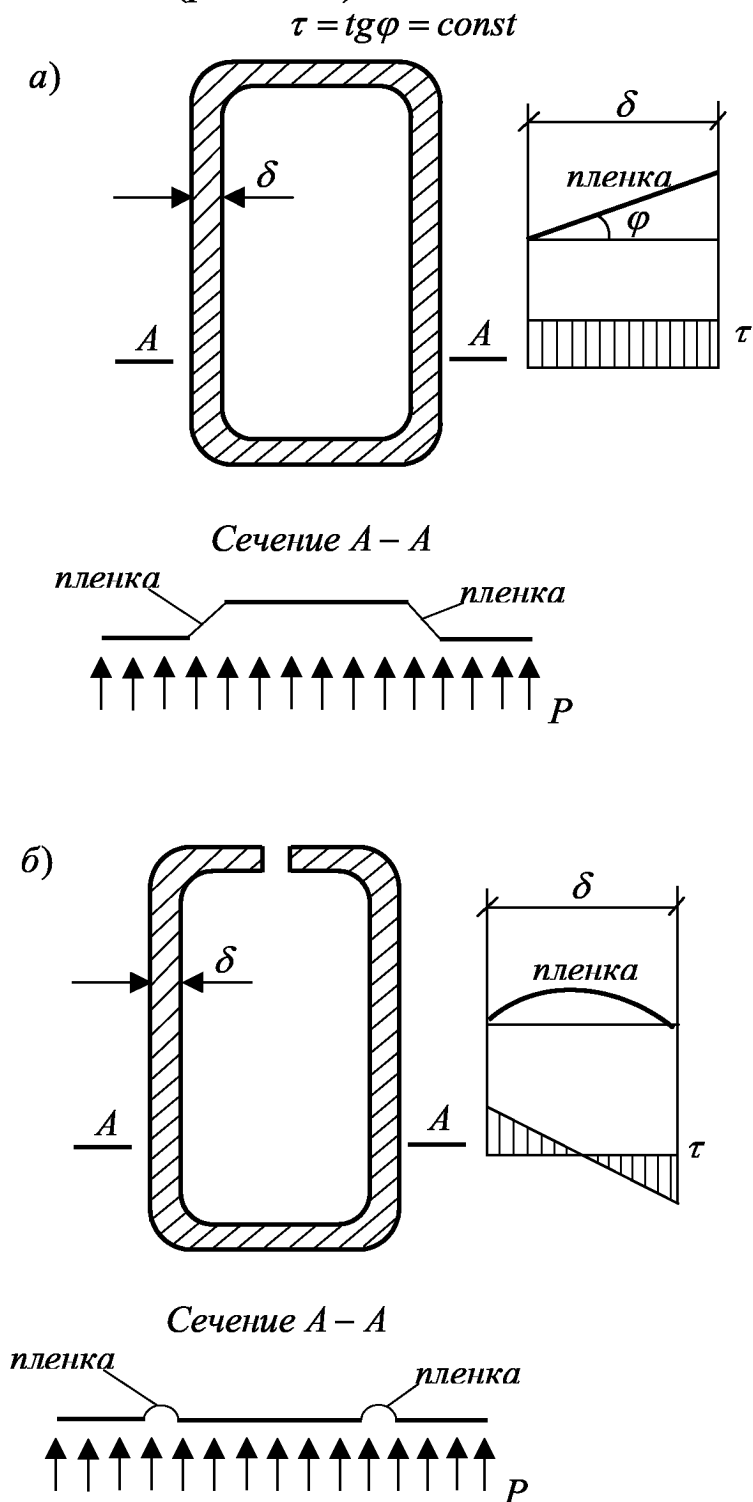


Рис.13.9

Выделим из бруса элемент длиной  $dx$  (рис.13.10) двумя сечениями

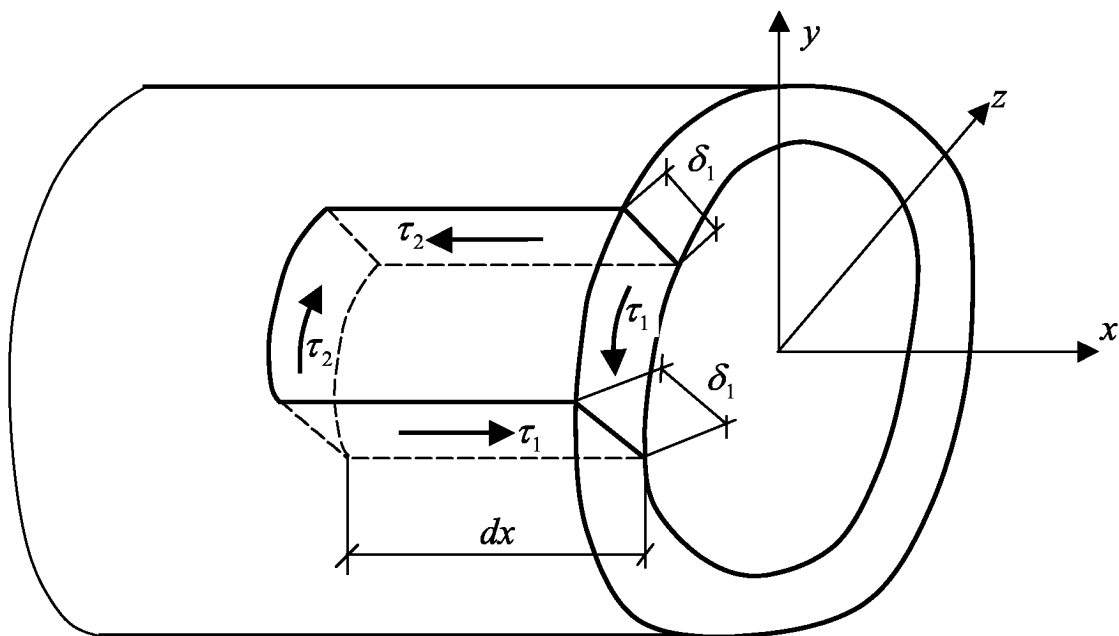


Рис.13.10

перпендикулярными его оси и двумя меридиональными сечениями. Составив сумму проекций на ось  $x$  всех сил приложенных к элементу, найдем

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = const$$

Следовательно, произведение  $\tau\delta$  по длине контура замкнутого профиля не изменяется: на участках, имеющих меньшую толщину напряжения больше.

Выразим крутящий момент через напряжения  $\tau$ . Для этого составим момент силы  $\tau\delta ds$  относительно произвольной точки  $O$  (рис.13.11)

$$M_{кр} = \tau\delta r dS$$

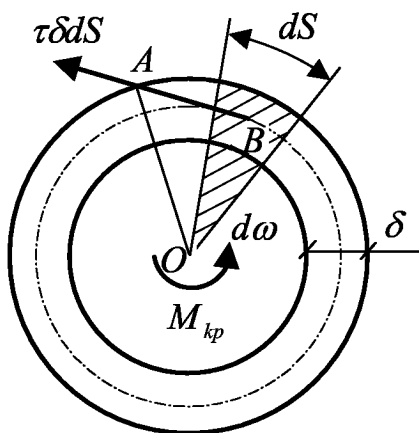


Рис.13.11

Учитывая, что  $\tau\delta = const$ , а  $rds = 2d\omega$  - удвоенная площадь треугольника  $AOB$ , получим

$$M_{kp} = 2\tau\delta\omega,$$

где  $\omega$  - площадь, ограниченная средней линией тонкостенного сечения Из этой формулы получим

$$\tau = \frac{M_{kp}}{2\omega\delta}$$

Если толщина профиля по контуру неодинакова, то максимальное напряжение определяется формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{2\omega\delta_{\min}}$$

Для того, чтобы определить относительный угол закручивания тонкостенного стержня, рассмотрим потенциальную энергию деформации в элементарном объеме  $dS dx\delta$ . Учитывая, что при кручении материал находится в состоянии чистого сдвига имеем

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx dS.$$

Полную энергию однородного стержня длиной  $l$  получим проинтегрировав последнее выражение по длине и по замкнутому контуру

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \int_S \tau^2 \delta dS dx = \frac{\tau^2 \delta^2 l}{2G} \int_S \frac{dS}{\delta}$$

Подставляя выражение  $\tau\delta$  в эту формулу, найдем

$$U = \frac{M_{kp}^2 l}{8G\omega^2} \int_S \frac{dS}{\delta}.$$

С другой стороны, энергия  $U$  может быть выражена через работу внешнего скручивающего момента  $M_{kp}$  на искомом угле закручивания

$$U = A = \frac{M_{kp} \varphi}{2}.$$

Приравнивая правые части последних формул, найдем

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{4G\omega^2} \int_S \frac{dS}{\delta}$$

При постоянной по длине контура  $S$  толщине  $\delta = const$

$$\varphi = \frac{M_{kp} l S}{4G\omega^2 \delta}$$

### 13.8 Открытые профили

Используя мембранную аналогию с достаточной точностью можно принять то, что профиль пленки описывается параболой  $y = ax^2$ .

Тогда касательные напряжения

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi = y' = 2ax$$

изменяются по линейному закону. Очевидно, что форма пленки, а следовательно и напряжения в стержне не сильно изменяется, если профиль сечения распрямить. Это значит, что напряжения в криволинейном открытом профиле примерно такие, как и в прямолинейном. Следовательно, для их расчета можно воспользоваться расчетными формулами, приведенными для прямоугольного сечения с большим отношением сторон.

Используя формулы предыдущей лекции и то, что при  $h/b > 10$   $\alpha = \beta = 1/3$ , получим

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{kp}}{\delta^2 S} \quad \varphi = \frac{3M_{kp} l}{G \delta^3 S},$$

где  $\delta$  - толщина профиля (меньшая сторона прямоугольника  $b = \delta$ );  $S$  - длина контура (большая сторона прямоугольника  $h = S$ ).

Полученные формулы пригодны для профиля любой формы, если только он может быть развернут в прямоугольник.

В случае, если незамкнутый профиль является составным и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, его разбивают на прямоугольные элементы, толщина которых значительно меньше длины. Тогда для составного сечения

$$J_k = \frac{\eta}{3} \sum_i \delta_i^3 S_i,$$

где  $\eta$  - коэффициент, учитывающий погрешность, возникающую при замене реального профиля прямоугольником:

для углового сечения  $\eta = 1,00$ ;

для двутаврового  $\eta = 1,20$ ;

для швеллерного  $\eta = 1,12$ .

При этом крутящий момент распределяется между отдельными элементами сечения

$$M_{kp} = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Для отдельно взятого участка



$$\tau_i = \frac{M_i}{W_i}, \quad \varphi = \frac{M_i l}{GJ_i},$$

где  $J_i$  и  $W_i$  - моменты инерции сопротивления  $i$  - того участка.

Так как угол закручивания на всех участках одинаков т.е.

$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \dots \varphi_n$ , то

$$M_i = M_{kp} \frac{J_{k_i}}{J_k},$$

а наибольшее касательное напряжение возникает на участке, имеющем наибольшую толщину стенки  $\delta_{\max}$  и равно

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp} \delta_{\max}}{J_k}.$$

## ГЛАВА 14

### ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Общие или энергетические методы определения перемещений упругих линейно деформируемых стержневых систем основаны на анализе работы, которую выполняют внешние и внутренние силы при загрузении системы. Работа силы может быть действительной или возможной (виртуальной) в зависимости от того, на каком перемещении она выполняет ее.

#### 14.1 Действительная работа внешних сил

*Работа силы называется действительной*, если она выполняет ее на перемещении, вызванном самой силой. Вычислим действительную работу сосредоточенной силы  $P$ , приложенной к любой упругой линейно деформируемой системе (рис.14.1).

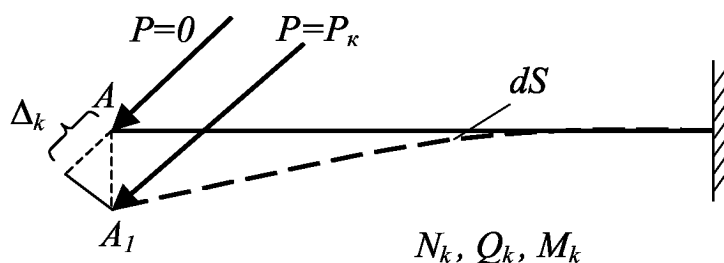


Рис. 14.1

Предположим, что сила  $P$  статически возрастает от нуля до некоторого конечного значения  $P$ . При этом, вследствие деформации материала, точка  $A$ , приложения силы  $P$ , переместится в точку  $A_1$ . Проекция отрезка  $AA_1$  на направление силы  $P$ , т.е.  $\Delta_k$  - конечное значение перемещения в направлении этой силы.

Изобразим график зависимости  $P = f(\Delta)$  - л.ф. (рис. 14.2).

Из физики известно, что площадь  $\Delta OBC$  - есть работа силы  $P$ , т.е.

$$A = \frac{P_k \Delta_k}{2}.$$

Если на упругую систему действует и сосредоточенная внешняя сила, то действительная работа их будет равна

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{P_k \Delta_k}{2}$$

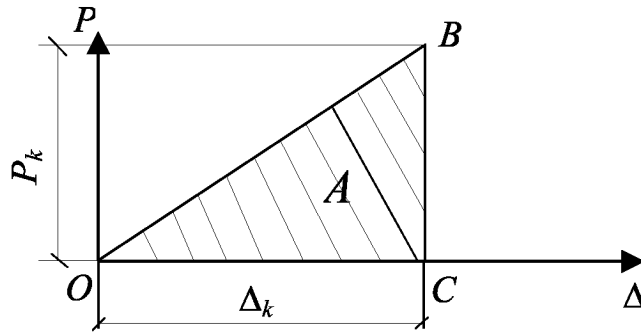


Рис. 14.2

Рассмотрим второй пример. Пусть на балку действует пара сил с моментом  $M = Ph$  (рис. 14.3), который статически возрастает от нуля до некоторого значения  $M_k = P_k h$ . В этом случае, рассматривая действие каждой силы отдельно, получим

$$A = \frac{1}{2} P_k C C_1 + \frac{1}{2} P_k b \Delta \varphi_k = \frac{1}{2} P_k (b + a) \Delta \varphi_k,$$

но так как  $b + a = h$ , а  $P_k h = M_k$ , то

$$A = \frac{M_k \Delta \varphi_k}{2}.$$

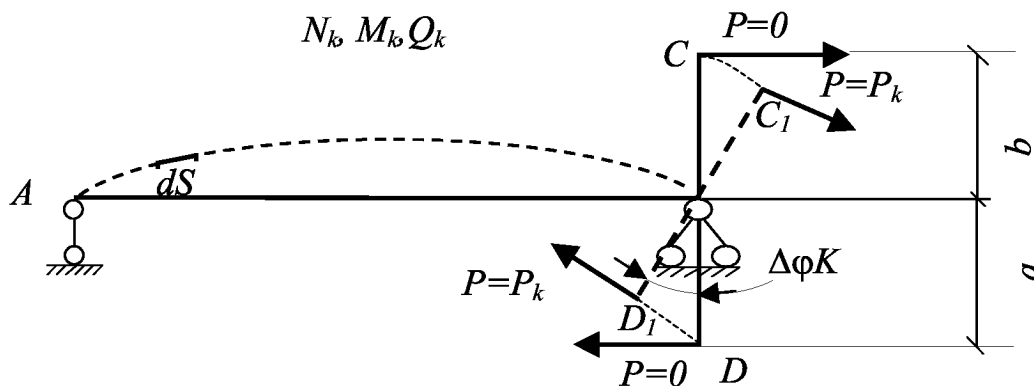


Рис.14.3

При действии на балку  $n$  внешних сосредоточенных моментов действительная работа их выразится формулой

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{M_k \Delta \varphi_k}{2}.$$

Из полученных формул для определения действительной работы внешних сосредоточенных сил и моментов видно, что, как в первом, так и во втором случаях, она определяется суммой произведений двух сомножителей. Один из них зависит только от сил и называется *обобщенной силой*, а второй - только от перемещений и называется *обобщенным перемещением*. Обобщенное перемещение принято обозначать буквой  $\Delta_{ki}$ . Первый

индекс указывает на точку и направление перемещения, а второй - на причину перемещения. Обобщенную силу обычно обозначают через  $P_k$ . При этом действительная работа любых внешних сил может быть выражена одной формулой для определения действительной работы внешних обобщенных сил

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{P_k \Delta_{kk}}{2}$$

где  $P_k$  - обобщенная сила,  $\Delta_{kk}$  - обобщенное перемещение.

Таким образом, под обобщенной силой можно понимать любое силовое воздействие, а под обобщенным перемещением - только то перемещение, на котором данная обобщенная сила выполняет работу.

Для дальнейшего понимания очень важно четко представить себе, какое обобщенное перемещение соответствует данной обобщенной силе. Например, линейному перемещению соответствует сосредоточенная сила, действующая в направлении его, а углу поворота соответствует сосредоточенный момент.

#### 14.2 Действительная работа внутренних сил

При загрузении какой-либо упругой линейно деформируемой системы, работу совершают не только внешние, но и внутренние силы - силы упругости. Они препятствуют развитию деформаций, т.е. направлены противоположно им. Поэтому работа внутренних сил, при загрузении упругой системы будет отрицательной.

Определим действительную работу внутренних сил, которую выполняют они при загрузении какой-либо плоской упругой линейно деформируемой системы (рис. 14.1).

Очевидно, что она равна работе внутренних усилий  $N$ ,  $M$  и  $Q$ , так как последние являются равнодействующими внутренних сил. Обозначим через  $N_k$ ,  $M_k$  и  $Q_k$  - конечные значения усилий, а через конечные значения перемещений, соответственно в направлении действия  $N$ ,  $M$  и  $Q$ . Тогда элементарная (на длине  $dS$ ) действительная работа внутренних сил выразится формулой

$$dW = -\frac{1}{2} N_k \Delta dS(N_k) - \frac{1}{2} M_k \Delta dS(M_k) - \frac{1}{2} Q_k \Delta dS(Q_k).$$

Определим  $\Delta dS(N_k)$ . Для этого предположим, что в сечениях элемента  $dS$  действуют только продольные силы  $N_k$ , а  $M_k = Q_k = 0$

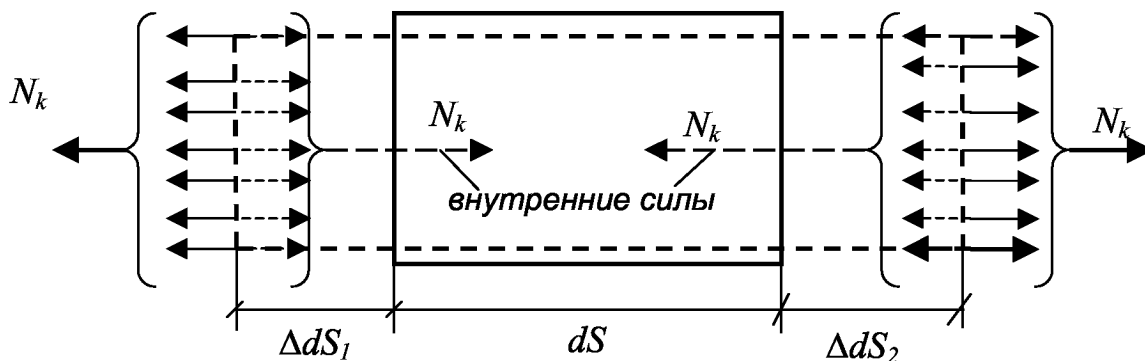


Рис.14.4

Показанные на чертеже сплошными линиями силы  $N_k$  являются, по отношению к выделенному элементу, внешними силами, так как совпадают с направлением деформаций. Внутренние силы будут такими же, но направлены противоположно. Они изображены на чертеже пунктирными линиями.

Из чертежа видно, что

$$\Delta dS(N_k) = \Delta dS_1 + \Delta dS_2 = \frac{N_k dS}{EF}.$$

Для определения  $\Delta dS(M_k)$  предположим, что элемент  $dS$  испытывает чистый изгиб, т.е.  $M_k \neq 0$ , а  $N_k = Q_k = 0$  (рис.14.5).

В этом случае сечения  $I-I$  и  $II-II$  повернутся на некоторый угол  $d\varphi$ , а взаимный угол поворота сечений  $I-I$  и  $II-II$  -

$$\Delta dS(M_k) = 2d\varphi.$$

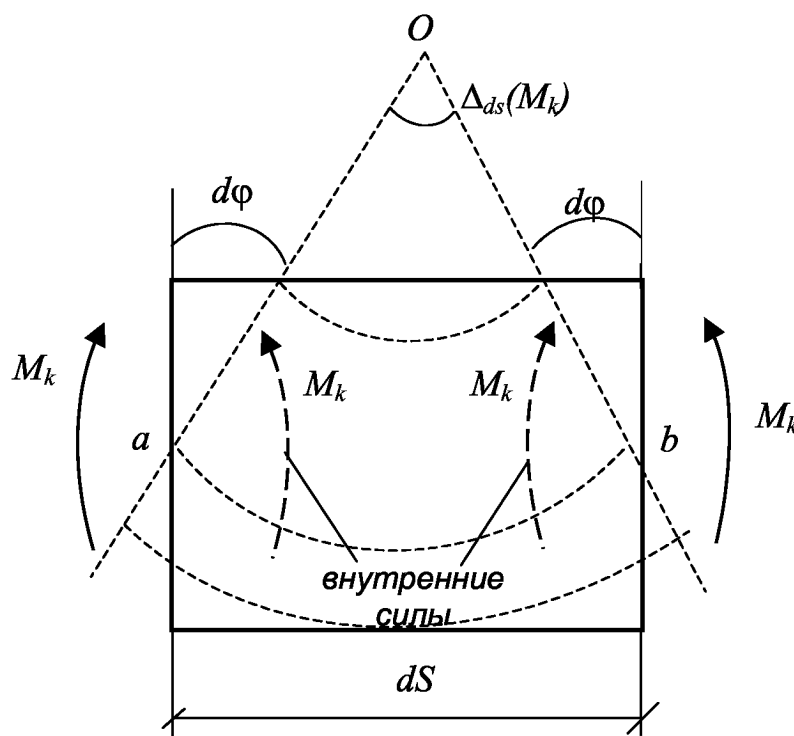


Рис. 14.5

Так как  $aO = bO = \rho$  - радиус кривизны нейтрального слоя, то из соотношения  $dS = \rho \Delta dS(M_k)$ , получим  $\Delta dS(M_k) = \frac{dS}{\rho}$ , но  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EJ}$  поэтому

$$\Delta dS(M_k) = \frac{M_k dS}{EJ}.$$

Для определения перемещения  $\Delta dS(Q_k)$  вычислим действительную работу, которую выполняют внутренние силы при чистом сдвиге элемента  $dS$ , т.е. при  $N = M = 0$ , а  $Q \neq 0$ .

В этом случае элементарная площадка  $dF$ , выделенная в сечении  $II$  на расстоянии  $y$  от нейтральной линии, сдвигается по отношению к такой же площадке в сечении  $I$  от действия силы  $\tau dF$  на величину  $\gamma dS = \frac{\tau}{G} dS$  (так как  $\tau = G\gamma$ ). Действительная работа силы  $\tau dF$  на этом перемещении будет равна

$$d^2 W_Q = -\frac{1}{2} \tau dF \frac{\tau}{G} dS = -\frac{\tau^2 dS}{2G} dF.$$

Используя формулу Журавского  $\tau = \frac{Q_k S_z(y)}{b(y)J}$ , их интегрируя по площади поперечного сечения  $F$ , получим

$$dW_Q = \frac{1}{2} Q_k K \frac{Q_k dS}{GF},$$

где  $K = \frac{F}{J^2} \int_F \frac{S_z^2(y) dF}{b^2(y)}$  - коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Путем интегрирования его можно легко вычислить для любого поперечного сечения. Например, для прямоугольного сечения  $K = 1.2$ , для круглого -  $10/9$ . Для других типов сечений значения  $K$  приводятся в справочниках.

Из выражения для  $dW_Q$  следует, что

$$\Delta dS(Q_k) = K \frac{Q_k dS}{GF}$$

Наконец, подставляя выражения для перемещений в направлении действия  $N$ ,  $M$  и  $Q$  в формулу для  $dW$ , интегрируя и суммируя по всем участкам, получим формулу для определения действительной работы внутренних сил

$$W = - \left[ \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_k^2 dS}{2EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_k^2 dS}{2EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} K \frac{Q_k^2 dS}{2GF} \right]$$

При разгрузке упругой системы деформации изменяют знаки на обратные, а внутренние силы сохраняют свое направление. Поэтому работа их будет положительной. Если пренебречь рассеиванием энергии, то эту работу можно рассматривать, как проявление потенциальной энергии, накопленной системой при разгрузении, т.е.  $U = -W$ . Следовательно, потенциальная энергия деформации упругой стержневой системы определяется формулой:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_k^2 dS}{2EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_k^2 dS}{2EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} K \frac{Q_k^2 dS}{2GF}$$

В сечениях элементов пространственных стержневых систем действуют шесть усилий:  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  и  $M_{кр}$ . Поэтому для таких систем в формулах для  $W$  и  $U$  необходимо добавить еще три слагаемых, зависящих от  $Q_z$ ,  $M_y$  и  $M_{кр}$ .

### 14.3 Возможная работа внешних и внутренних сил.

#### Общая формула Мора для определения перемещений

*Работа силы называемая возможной (виртуальной)*, если она выполняет ее на перемещении, вызванном другой силой, группой сил или каким-либо другим фактором (изменением температуры, смещением связей и т.д.). Эти *перемещения тоже называются возможными*. Так как внешние и внутренние силы всегда остаются постоянными в процессе изменения возможных перемещений, то возможная работа их будет равна не половине, а полному произведению силы на перемещение.

Рассмотрим какую-либо упругую линейно деформируемую стержневую систему, нагруженную двумя группами сил (рис.14.6):  
 1-я группа сил "К" состоит из одной обобщенной силы  $P_k = const$ ;  
 2-я группа сил "Р" состоит из любого количества сосредоточенных сил  $P$ , моментов  $M$  и распределенных нагрузок  $q$ .

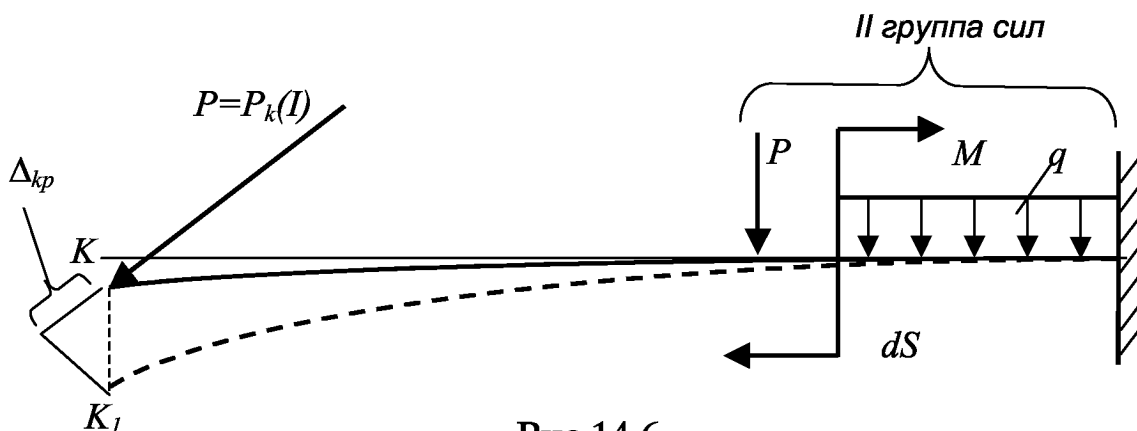


Рис.14.6

Предположим, что к системе сначала была приложена 1-я группа сил "K", а затем - вторая группа сил "P". Очевидно, при этом перемещения, вызванные 2-й группой сил "P" будут возможными для 1-й группы сил "K".

Вычислим возможную работу 1-й группы сил "K" на перемещениях, вызванных 2-й группой сил "P".

Возможная работа внешних сил будет равна

$$A = P_k \Delta_{kp}$$

Возможная работа внутренних сил, т.е. усилий  $N_{\rho}$ ,  $M_k$  и  $Q_k$ , действующих на элемент  $dS$ , очевидно, может быть выражена формулой

$$dW = -N_k \Delta dS(N_p) - M_k \Delta dS(M_p) - Q_k \Delta dS(Q_p)$$

где  $\Delta dS(N_p) = \frac{N_p dS}{EF}$ ,  $\Delta dS(M_p) = \frac{M_p dS}{EJ}$ ,  $\Delta dS(Q_p) = K \frac{Q_p dS}{GF}$  -

перемещения, вызванные 2-й группой сил "P", соответственно в направлении действия  $N$ ,  $M$  и  $Q$ .

Подставляя эти перемещения в выражение для  $dW$ , интегрируя и суммируя по всем участкам, получим формулу для определения возможной работы внутренних сил

$$W = - \left[ \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_k N_p dS}{EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_k M_p dS}{EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} K \frac{Q_k Q_p dS}{GF} \right]$$

Далее заметим, что 1-я группа сил "K" находится в равновесии. Поэтому к ней применим принцип возможных перемещений (Лагранжа): если система сил находится в равновесии, то работа их на возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю, т.е.  $A + W = 0$  или

$$A = -W \quad - \text{уравнение возможных работ}$$

Уравнение возможных работ часто называют *основным уравнением строительной механики*. Запишем уравнение возможных работ для частного случая, когда  $P = 1$ . Усилия, вызываемые действием единичной обобщающей силы, обозначим через  $N_{\rho}$ ,  $M_k$  и  $Q_k$ . Тогда получим

$$1 \cdot \Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_k N_p dS}{EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_k M_p dS}{EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} K \frac{Q_k Q_p dS}{GF}$$

- *общая формула Мора для определения перемещений*.

Так как от умножения любого числа на единицу результат не изменяется, то уравнение возможных работ можно рассматривать как формулу для определения перемещений. Ее впервые получил немецкий ученый Отто Мор. Поэтому она называется *общей*



формулой Мора для определения перемещений, а сам метод определения перемещений по этой формуле - *методом Мора*.

В формуле Мора:  $\Delta_{kp}$  - действительное перемещение, соответствующее единичной обобщенной силе от действия заданной нагрузки;  $\bar{N}_k$ ,  $\bar{M}_k$ ,  $\bar{Q}_k$ ,  $N_p$ ,  $M_p$  и  $Q_p$  - функция усилий от действия соответственно единичной обобщенной силы и внешней нагрузки.

В заключение приведем порядок определения перемещений по методу Мора:

1. Снять внешнюю нагрузку и приложить в направлении искомого перемещения соответствующую единичную обобщенную силу.

2. Для обеих схем загрузки системы (заданной нагрузкой и единичной обобщенной силой) выделить общие участки интегрирования, определить опорные реакции, если это необходимо, и составить на каждом участке функции  $\bar{N}_k$ ,  $\bar{M}_k$ ,  $\bar{Q}_k$ ,  $N_p$ ,  $M_p$  и  $Q_p$  и их произведения  $\bar{N}_k N_p$ ,  $\bar{M}_k M_p$  и  $\bar{Q}_k Q_p$ .

3. Подставить функции  $\bar{N}_k N_p$ ,  $\bar{M}_k M_p$  и  $\bar{Q}_k Q_p$  в формулу Мора и выполнить интегрирование и суммирование по всем участкам.

4. Если в результате вычислений перемещение  $\Delta_{kp}$  окажется положительным, это означает, что его направление совпадает с направлением единичной обобщенной силы.

#### 14.4 Особенности определения перемещений в фермах

*Фермой* называется расчетная схема, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных между собой шарнирно. При узловой передаче нагрузки в стержнях ферм возникают только продольные силы. Если при этом учесть, что  $N = const$  и  $EF = const$  по длине каждого стержня, то из формулы Мора получим формулу Максвелла для определения перемещения узлов ферм.

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{k_i} N_{p_i} l_i}{E_i F_i}$$

где  $\bar{N}_{k_i}$  и  $N_{p_i}$ ,- продольная сила в  $i$ -том стержне от действия соответственно единичной обобщенной силы и внешней нагрузки;  $E_i F_i$  и  $l_i$ ,- соответственно жесткость при растяжении и длины  $i$ -того стержня;  $n$  - количество стержней фермы, т.е. суммирование необходимо выполнять по всем стержням фермы.

Эту формулу впервые получил другим способом английский ученый Максвелл, поэтому она называется формулой Максвелла,

### 14.5 Особенности определения перемещений в балках и рамах. Способ Верещагина

Непосредственное вычисления перемещений в балках и рамах показывают, что влияние продольных и поперечных сил на них ничтожно мало по сравнению с влиянием изгибающих моментов. Поэтому при решении инженерных задач для балок и рам при определении перемещений влиянием продольных и поперечных сил можно пренебречь и пользоваться одночленной формулой Мора.

Формула Мора для определения перемещений в балках и рамах

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_k M_{pi} dx}{E_i J_i}.$$

В балках и рамах вычисление интеграла Мора значительно упрощается, если на участке жесткость  $EJ = \text{const}$ , а одна из функций, например  $\bar{M}_k$  - линейная.

Рассмотрим прямолинейный участок длиной  $l$ , на котором  $EJ = \text{const}$ ,  $\bar{M}_k = a + bx$  - линейная, а  $M_p$  - произвольная функция и вычислим интеграл Мора (рис.14.7).

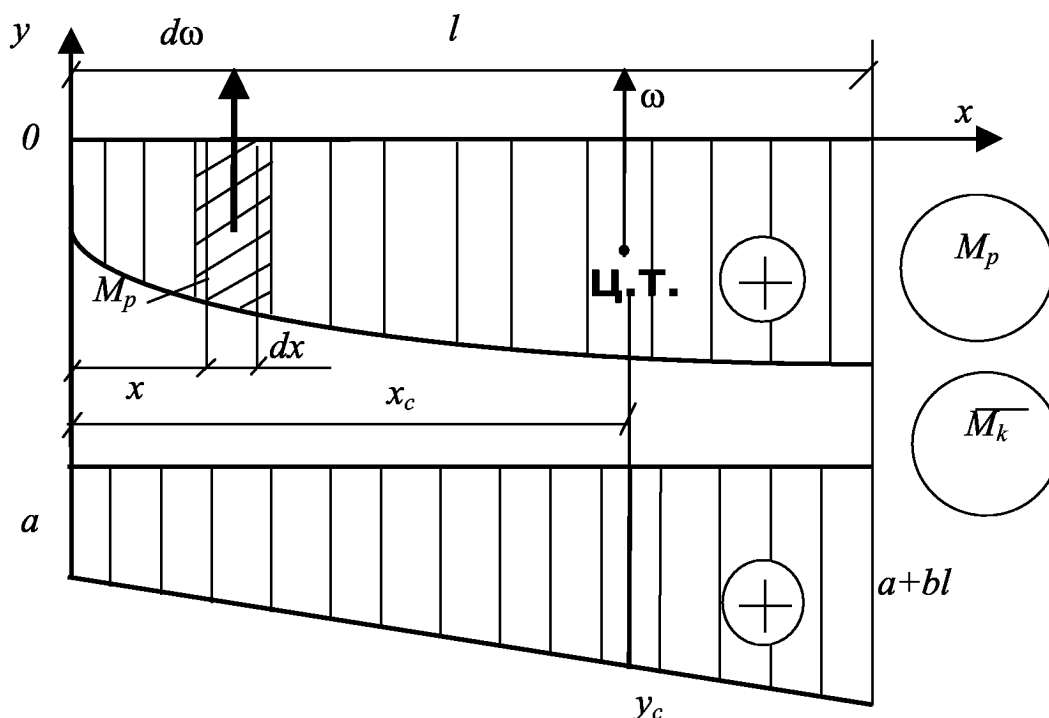


Рис.14.7

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_k M_p dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l (a + bx) d\omega = \frac{1}{EJ} \left( a \int_0^l d\omega + b \int_0^l x d\omega \right) =$$

$$= \frac{1}{EJ} (a\omega + b\omega x_c) = \frac{\omega}{EJ} (a + bx_c) = \frac{\omega y_c}{EJ}$$

Учитывая это для определения перемещений в системе, имеющей  $n$  таких участков, можно воспользоваться формулой Верещагина для определения перемещений в балках и рамах

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{E_i J_i}$$

где  $\omega_i$  - площадь эпюры  $M_p$  на  $i$ -том участке;

$y_i$  - ордината прямолинейной эпюры  $\bar{M}_k$ , взятой под центром тяжести площади  $\omega_i$ .

Такой способ вычисления интегралов предложил в 1924 году Верещагин А.Н., будучи студентом 3-го курса Московского железнодорожного института. Поэтому в литературе он называется способом Верещагина, или способом перемножения эпюр по Верещагину, что символически можно записать так:

$$\Delta_{kp} = M_p \bar{M}_k$$

При перемножении эпюр по Верещагину на одной из них надо брать площадь и умножать на ординату, взятую под центром тяжести этой площади, на другой, прямолинейной эпюре. Следовательно, если одна из эпюр, например  $M_p$ , ограничена кривой, то площадь надо брать только на криволинейной эпюре. В этом случае для вычисления площади необходимо использовать интегрирование. Для того чтобы избежать интегрирования необходимо разбивать сложные эпюры на простые, для которых легко определить площадь и положение центра тяжести по готовым формулам. Например, вычислим интеграл Мора на участке, длиной  $l$ , загруженном равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , при  $EJ = const$  (рис.14.8).

Пусть эпюра  $M_p$  ограничена кривой, а  $\bar{M}_k$  - прямой. Разбивка эпюр  $M_p$  и  $\bar{M}_k$  на простые (треугольные и чистую выпуклую параболу) показана на чертеже.

Путем интегрирования можно легко получить готовую формулу для определения площади чистой выпуклой параболы

$$\omega = \frac{ql^3}{12}$$

центр тяжести которой находится посередине.

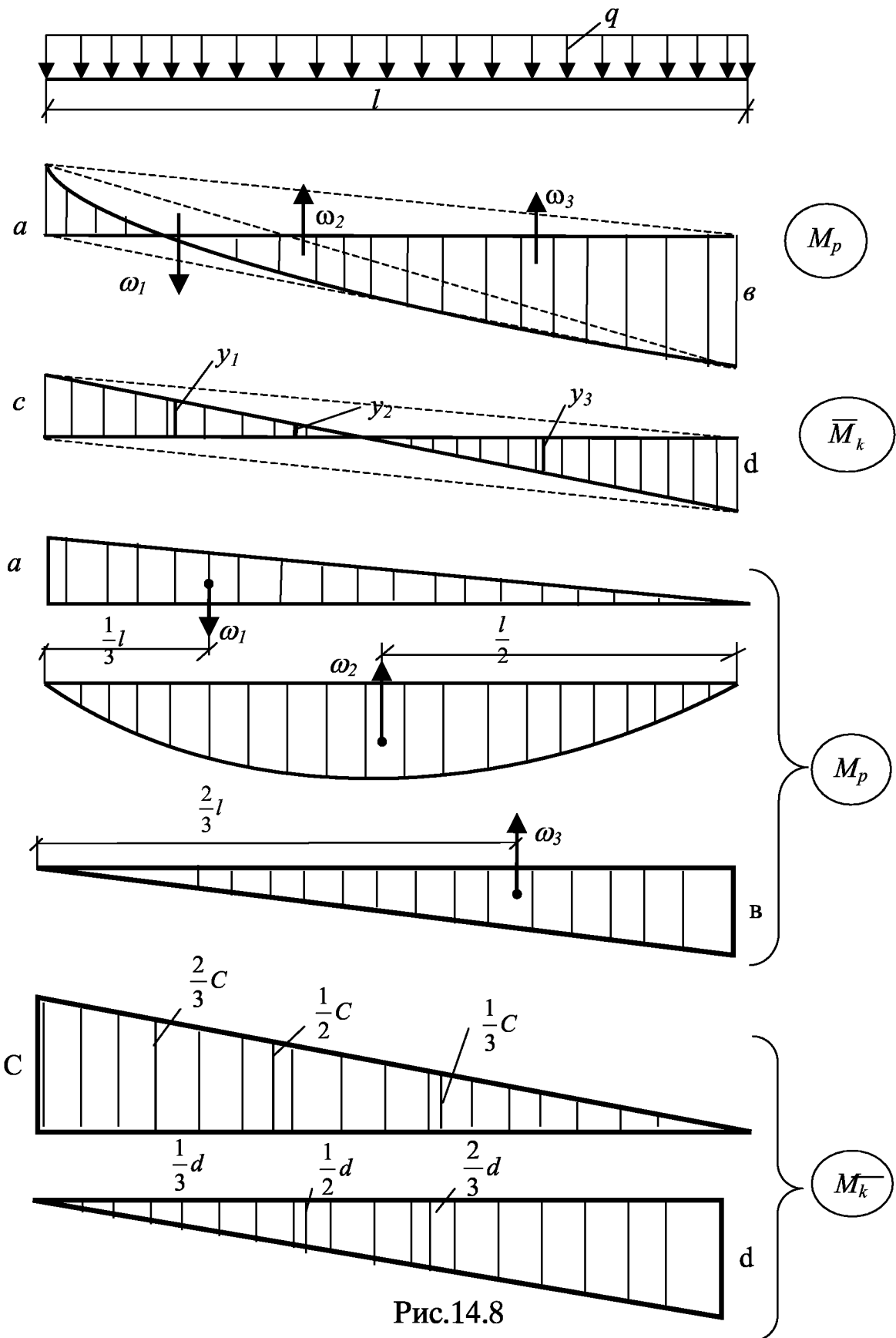


Рис.14.8

Учитывая это, получим:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}al, \quad \omega_2 = \frac{ql^3}{12}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}bl$$

Ординаты под центрами тяжести этих площадей находим из подобия треугольников

$$y_1 = -\frac{1}{3}c + d, \quad y_2 = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d, \quad y_3 = -\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d.$$

Теперь

$$\Delta_{kp} = M_p \bar{M}_k = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \omega_i y_i.$$

Если  $\Delta_{kp} > 0$ , то по направлению оно совпадает с направлением действия единичной обобщенной силы.

В тех случаях, когда на участке обе эпюры  $\bar{M}_k$  и  $M_p$  ограничены прямыми линиями, можно умножать площадь любой из них на ординату другой.

Приступая к вычислению перемещений способом Верещагина необходимо помнить, что им можно пользоваться только при выполнении следующих условий :

1. Ось стержня на участке должна быть прямолинейной  $dS = dx$ ;
2. Жесткость постоянная, т.е.  $EJ = const$ ;
3. Одна из эпюр, например  $\bar{M}_k$ , ограничена прямой.

В заключение изложим порядок вычисления перемещений способом Верещагина на конкретном примере. Определим прогиб сечения  $K$  консоли при  $EJ = const$  (рис. 14.9).

Задача решается в следующем порядке:

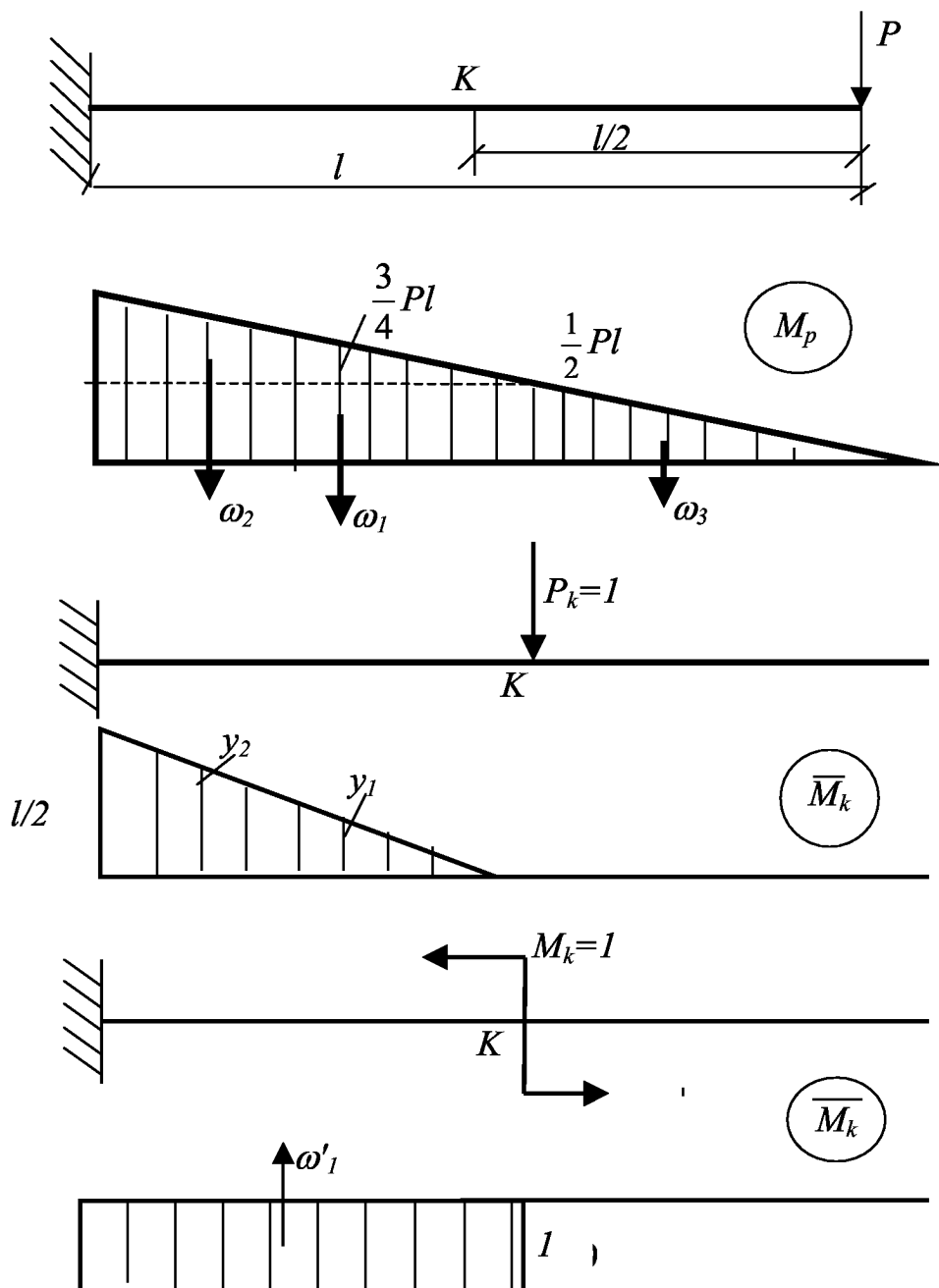
1. Построить эпюру изгибающих моментов  $M_p$  от действия заданной нагрузки.

2. Изобразим вспомогательную систему, загруженную соответствующей данному перемещению единичной обобщенной силой, т.е. силой  $P = 1$  и построим эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_k$  от ее действия.

3. Перемножим эпюры  $M_p$  и  $\bar{M}_k$  между собой по Верещагину.

Разобьем эпюру  $M_p$  на прямоугольник и два треугольника, и вычислим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{Pl}{2} \frac{1}{2} = -\frac{Pl^2}{4}, \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{1}{4} = -\frac{Pl^2}{8}, \\ \omega_3 &= \omega_2 = -\frac{Pl^2}{8}, \end{aligned}$$



$$y_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$y_2 = -\frac{2}{3} \frac{1}{2} = -\frac{1}{3},$$

$$y_3 = 0.$$

Тогда

$$y_k = M_p \bar{M}_k = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \cdot$$

$$\left( \frac{Pl^2}{4} \frac{1}{4} + \frac{Pl^2}{8} \frac{1}{3} - \frac{Pl^2}{8} \cdot 0 \right) = \frac{Pl^3}{8J} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5Pl^3}{48EJ}.$$

$y_k > 0$ , т.е. точка  $K$  перемещается вниз по направлению действия единичной силы  $P_k = 1$ .

Для определения угла поворота  $\theta_k$  вспомогательную систему получим, приложив в точке  $K$  единичный сосредоточенный момент  $M_k = 1$ . Эпюра  $\overline{M}_k'$  от его действия приведена на чертеже. Так как обе эпюры  $M_p$  и  $\overline{M}_k'$  на левом участке ограничены прямыми линиями, то безразлично на какой из них брать площадь, а на какой - ординату. Пусть

$$\omega_1' = 1 \frac{l}{2} = \frac{l}{2}, \text{ тогда } y_1' = -\frac{Pl}{2} + \frac{1}{2} \left( -\frac{Pl}{2} \right) = -\frac{3Pl}{4} \text{ и}$$

$$\theta_k = \overline{M}_k' M_p = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \left( -\frac{3Pl}{4} \right) = -\frac{3Pl^2}{8EJ}.$$

Так как  $\theta_k < 0$ , то сечение  $K$  поворачивается по часовой стрелке, т.е. против действия  $M_k = 1$ .

#### 14.6 Определение перемещений, вызванных изменением температуры

Рассмотрим два состояния какой-либо упругой линейно деформируемой системы (рис. 14.10):

*I-е* состояние "к" - на систему действует обобщенная сила  $P_k = 1$ ;

*II-е* состояние "t" - после достижения силой  $P_k$  конечного значения, равного единице; температура наружных и внутренних волокон изменилась соответственно на  $t_n$  и  $t_b$  градусов. Запишем уравнение возможных работ сил первого состояния "к" на перемещения  $x$ , вызванных вторым состоянием системы "t".

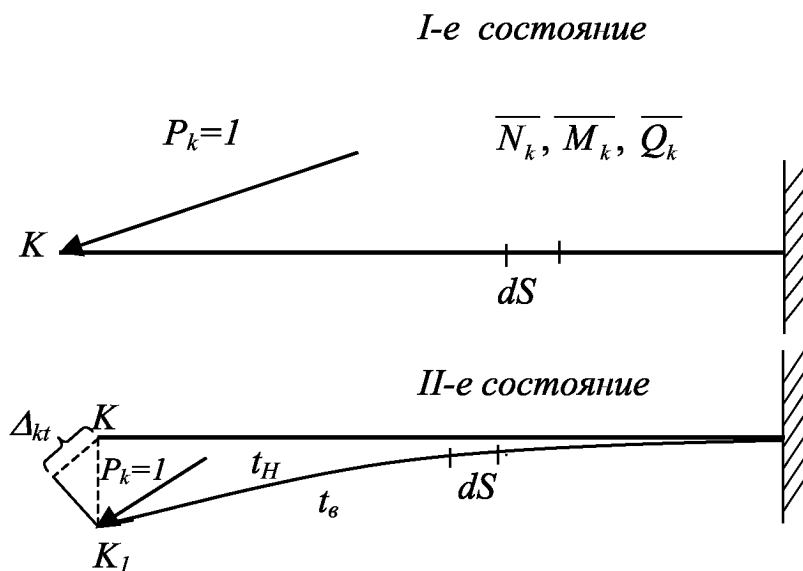


Рис.14.10

$$1 \cdot \Delta_{kt} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{N}_k \Delta dS(N_i) + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{M}_k \Delta dS(M_i) + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{Q}_k \Delta dS(Q_i)$$

Определим перемещения  $\Delta dS(N_i)$ ,  $\Delta dS(M_i)$ ,  $\Delta dS(Q_i)$ .  
Рассмотрим элемент, длиной  $dS$  и высотой  $h$  (рис.14.11).

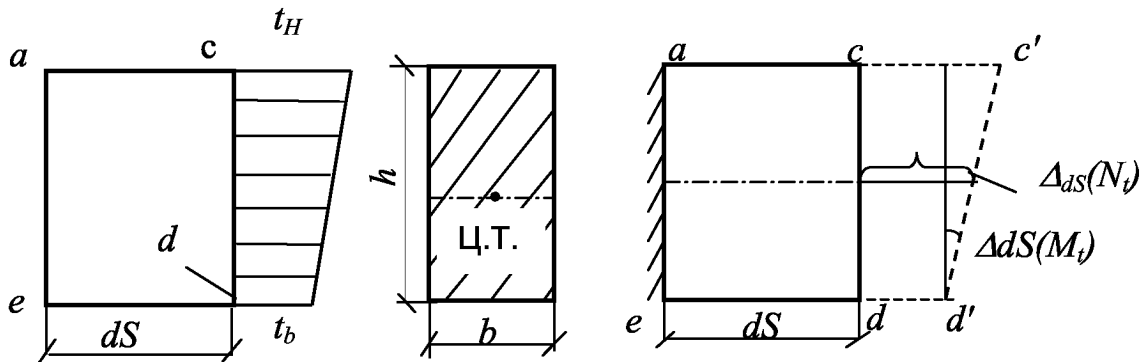


Рис.14.11

Предположим, что поперечное сечение его симметричное относительно горизонтальной оси, а температура изменяется линейно по высоте  $h$ .

Если обозначить через  $\alpha$  - коэффициент линейного удлинения материала, то от изменения температуры длина наружных и внутренних волокон изменится соответственно на  $\alpha dS t_n$  и  $\alpha dS t_b$ . По этим значениям построим эпюру температурных перемещений элемента  $dS$ .

Из эпюры температурных перемещений видно, что

$$\Delta dS(N_i) = \alpha \frac{t_n + t_b}{2} dS, \quad \Delta dS(M_i) = \alpha \frac{t_n - t_b}{h} dS, \quad \Delta dS(Q_i) = 0,$$

так как от изменения температуры деформация сдвига не возникает. Подставляя эти перемещения в уравнения возможных работ, получим общую формулу для определения перемещений вызванных изменением температуры в статически определимых системах

$$\Delta_{kt} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\alpha(t_n + t_b)}{2} \bar{N}_k dS + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\alpha(t_n - t_b)}{h} \bar{M}_k dS$$

Рассмотрим случай, когда  $t_n$ ,  $t_b$ ,  $h$  и  $\alpha$  - постоянные на каждом участке. В данном случае из полученной выше общей формулы имеем формулу для определения температурных перемещений в статически определимых балках и рамах

$$\Delta_{kt} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{(t_n + t_b)}{2} \omega_i(\bar{N}_k) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{(t_n - t_b)}{h} \omega_i(\bar{M}_k).$$



где  $\omega_i(\bar{N}_k) = \int_0^{l_i} \bar{N}_k dS$  и  $\omega_i(\bar{M}_k) = \int_0^{l_i} \bar{M}_k dS$  - соответственно площадь эпюры  $\bar{N}_k$  и  $\bar{M}_k$  на  $i$ - том участке. Следует заметить, что произведение  $\omega_i(\bar{N}_k)$  и  $\omega_i(\bar{M}_k)$  на соответствующие коэффициенты считается положительным, если деформации от действия единичной обобщенной силы  $P_k=1$  и изменения температуры совпадают по направлению.

#### 14.7 Теорема о взаимности работ и взаимности перемещений

Рассмотрим два состояния какой-либо упругой линейно деформируемой системы (рис.14.12):

I-е состояние "к" - система нагружена обобщенной силой  $P_k$ ;

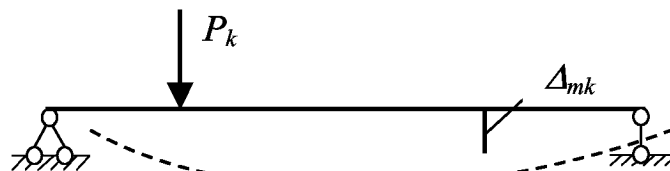
II-е состояние "m" - система нагружена обобщенной силой  $P_m$ .

Запишем уравнения возможных работ:

а) сил первого состояния "к" на перемещениях вызванных вторым состоянием "m"

$$P_k \Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} N_k \frac{N_m dS}{EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} M_k \frac{M_m dS}{EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} k Q_k \frac{Q_m dS}{GF}$$

I-е состояние



II-е состояние

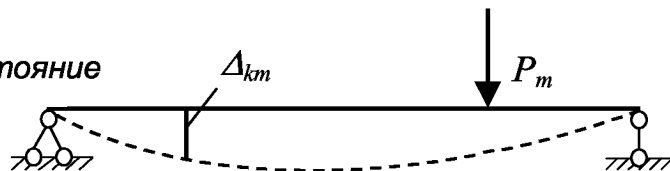


Рис.14.12

б) сил второго состояния "m" на перемещениях вызванных силами первого состояния "к"

$$P_m \Delta_{mk} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} N_m \frac{N_k dS}{EF} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} M_m \frac{M_k dS}{EJ} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} k Q_m \frac{Q_k dS}{GF}$$

Правые части этих уравнений равны, поэтому и левые части должны быть равны между собой, т.е.

$$P_k \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk}$$

Теорема о возможности работ (теорема Бетти) формулируется так: возможная работа первой группы сил на перемещениях, вызванных второй группой сил, равна возможной

работе второй группы сил на перемещениях, вызванных первой группой сил.

Если  $P_k = P_m = P$ , то из теоремы взаимности работ получим *теорему о взаимности перемещений (теорема Максвелла)*

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk}$$

Формулируется она так: перемещение в направлении первой обобщенной силы, вызванное второй обобщенной силой, равно перемещению в направлении второй обобщенной силы, вызванное первой обобщенной силой, если эти силы равны между собой. В этом случае, когда  $P_k = P_m = 1$ , теорема взаимности перемещений записывается так:

$$\delta_{km} = \delta_{mk}$$

где  $\delta_{km}$  - перемещение в направлении обобщенной силы  $P_k$ , вызванное обобщенной силой  $P = 1$ .

Теорема взаимности перемещений позволяет значительно сократить объем вычислений при решении целого ряда практических задач. Например, можно без вычислений утверждать, что для приведенных на (рис.14.13) двух состояний балки  $\delta_{km} = \delta_{mk}$ , т.е. прогиб под силой  $P_k$  от действия сосредоточенного момента  $M_m = 1$  численно равен углу поворота на правой опоре от силы  $P_k = 1$ .

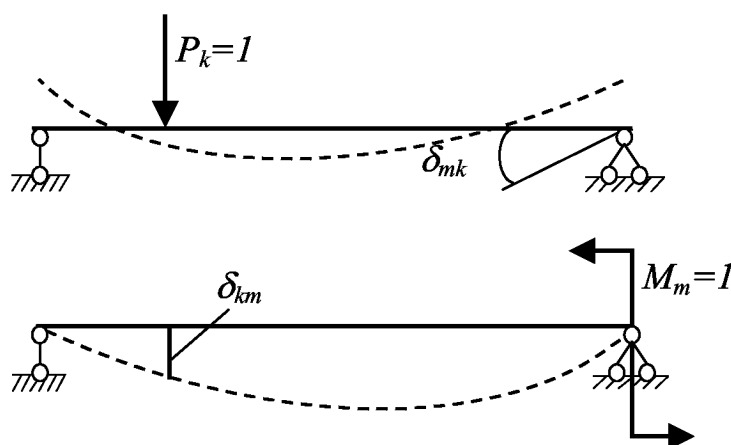


Рис. 14.13

### 14.8 Теорема Кастильяно

Вычислим потенциальную энергию деформации какой-либо упругой линейно деформируемой силы загруженной любой обобщенной силой  $P_k$  и группой сил "P", состоящей из произвольной внешней нагрузки ( $P, q, M$  и т.д.) (рис.14.14).

Предположим, что сначала к системе была приложена сила  $P_k$ . От ее действия точка  $K$  переместится на величину  $\Delta_{kk}$ . Затем,

при действии второй группы сил "P" она получит дополнительное перемещение  $\Delta_{kp}$ . После перемещение точки приложения силы  $P_k$  будет:

$$\Delta_k = \Delta_{kk} + \Delta_{kp}$$

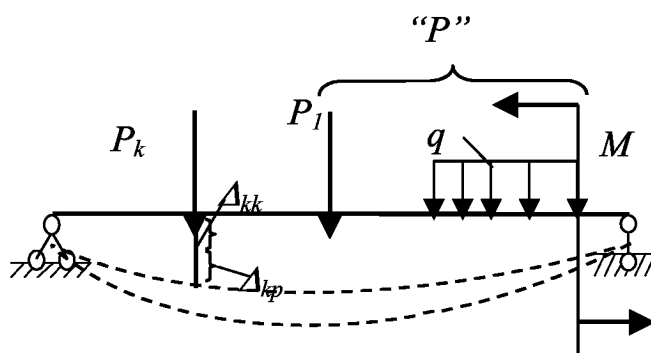


Рис.14.14

Так как потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, то получим:

$$U = \frac{1}{2} P_k \Delta_{kk} + P_k \Delta_{kp} + A_{pp},$$

где  $A_{pp}$  - работа группы сил "P" на вызванных ими перемещениях.

Для упругих линейно деформируемых систем  $\Delta_{kk} = P_k \delta_{kk}$ , поэтому

$$U = \frac{1}{2} P_k^2 \delta_{kk} + P_k \Delta_{kp} + A_{pp}.$$

Продифференцируем это выражение по силе  $P_k$

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = P_k \delta_{kk} + \Delta_{kp} = \Delta_{kk} + \Delta_{kp} = \Delta_k$$

т.е. теорема Кастильяно

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_k}$$

Она формулируется так: обобщенное перемещение равно частной производной от потенциальной энергии деформации по соответствующей ему обобщенной силе.

Теорема Кастильяно является общим методом определения перемещений любых упругих линейно деформируемых систем (стержневых систем, пластин, оболочек и массивных тел). Но для стержневых систем более простым является метод Мора. Поэтому для них метод Кастильяно практически не используется.

Если используя закон Гука, выразить потенциальную энергию деформаций через независимые перемещения  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  и взять производную по одному из них, то получим теорему Лагранжа:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i.$$

Которая формулируется так: частная производная от потенциальной энергии по обобщенному перемещению равна соответствующей ему обобщенной силе.

## ГЛАВА 15

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

#### 15.1 Понятие о степени статической неопределимости

Система называется статически неопределимой, если невозможно определить усилия в ее элементах из условий равновесия. Для расчета таких систем, кроме уравнений равновесия, необходимо использовать условия совместности деформаций, число которых равно степени статической неопределимости системы.

Под степенью статической неопределимости понимают избыток связей в системе по сравнению с минимально необходимым числом связей, обеспечивающим геометрическую неизменяемость ее.

Связь - любое кинематическое устройство предотвращающее перемещение системы в одном направлении. Например, в изображенной ниже балке (рис.15.1). опорные стержни являются связями.

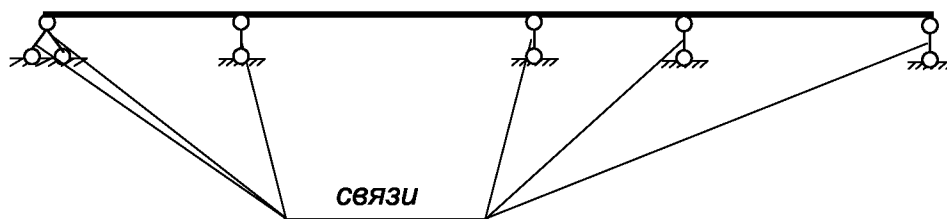


Рис.15.1

Шарнирно-неподвижная опора препятствует перемещению в двух направлениях, поэтому здесь две связи. В шарнирно-подвижной опоре одна связь. Всего в системе 5 связей, но для обеспечения геометрической неизменяемости ее достаточно 3 связей. Эти 3 связи являются минимально необходимым числом связей. Таким образом, две связи в системе оказались в смысле обеспечения ее геометрической неизменяемости как бы лишними, поэтому их называют лишними или избыточными связями.

Если в системе  $C$  - общее число связей:  $C_0$  - линейно необходимое число связей, то степень статической неопределимости ее будет

$$L = C - C_0.$$

Для рассматриваемой балки  $L=5-3=2$ , т.е. степень статической неопределимости ее равна 2 или говорят, что система дважды статически неопределена. Рассмотрим еще несколько примеров:

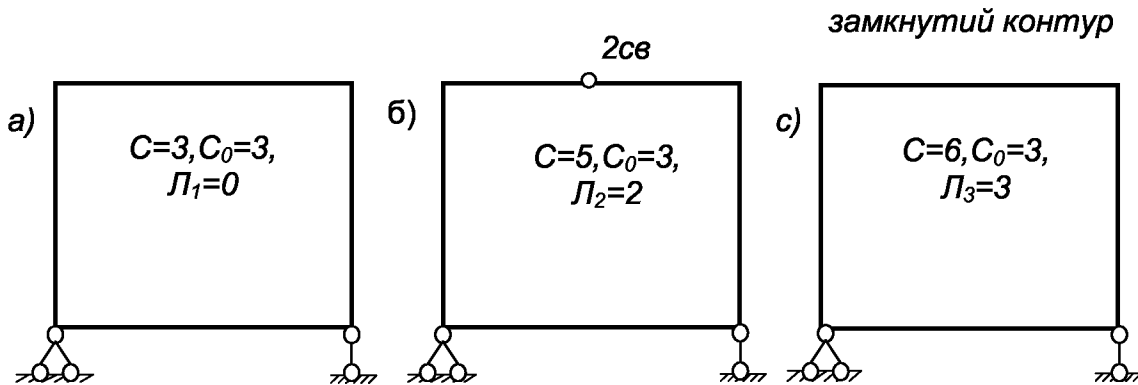


Рис.15.2.

Из рассмотренных примеров следуют выводы:

1) Замкнутый контур является трижды статически неопределимой системой;

2) Простой шарнир уменьшает степень статической неопределимости замкнутого контура на единицу, так как  $L_3 - L_2 = 3 - 2 = 1$ .

Шарнир называется простым или одиночным, если он связывает два элемента (рис.15.3).

Простой шарнир

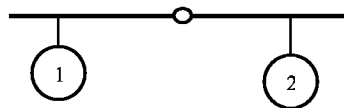


Рис.15.3

Если шарнир связывает  $n$  - элементов, то он называется кратным или общим (рис.15.4).

Кратный шарнир эквивалентный  $(n-1)$  простых шарниров. Учитывая это, для определения степени статической неопределимости плоских систем можно пользоваться следующей общей формулой

$$L = 3K - III.$$

где  $K$  - число замкнутых контуров в системе;

$III$  - число простых шарниров.

*Кратный шарнир*

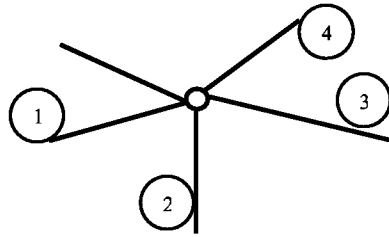


Рис.15.4

Например: определим степень статической неопределимости рамы (рис.15.5).

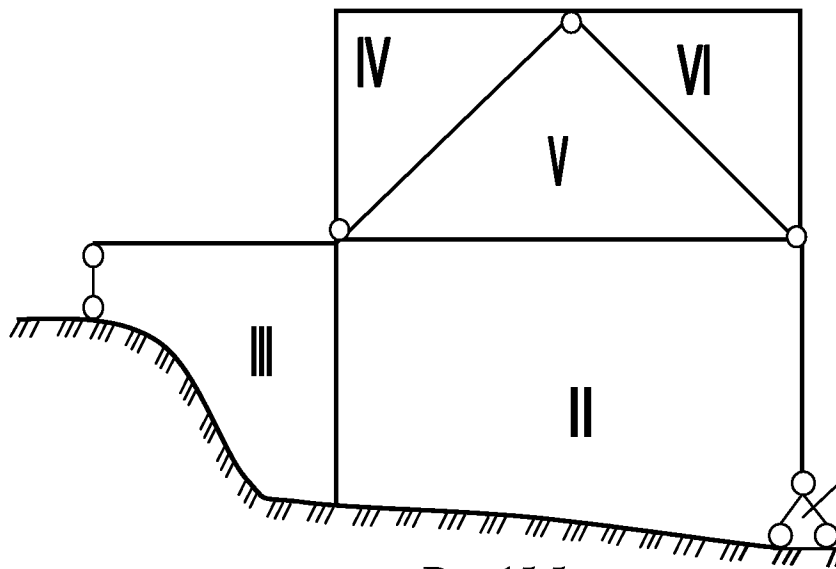


Рис.15.5

Имеем:  $K = 6$ ,  $III = 13$ ,  $L = 3 \cdot 6 - 13 = 5$ , т.е. система 5 раз статически неопределимая или имеет пять лишних связей.

Основной задачей расчета статически неопределимых систем является определение усилий в лишних связях. Если при расчете в качестве основных неизвестных принимаются реакции лишних связей, то такой метод расчета называется *методом сил*, а сами неизвестные - *лишними неизвестными*.

В качестве основных неизвестных могут быть приняты угловые и линейные перемещения отдельных узлов системы. Такой метод расчета статически неопределимых систем называется *методом перемещений*.

## 15.2 Расчет статически неопределимых систем методом сил

Идею метода сил рассмотрим на конкретном примере.

Пусть необходимо рассчитать раму (рис.15.6), т.е. построить эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

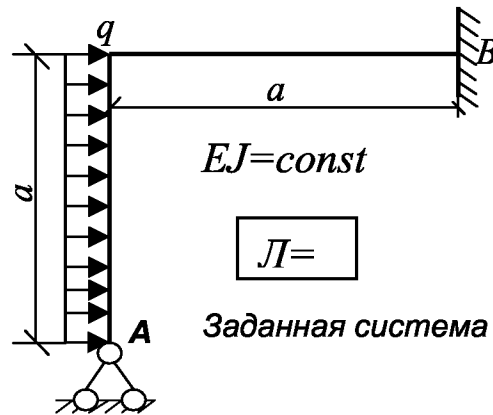


Рис.15.6

Система, которая подлежит расчету, обычно называется заданной. Определим степень статической неопределимости ее:  $L = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ , т.е. заданная система дважды статически неопределима (имеет 2 лишние связи).

Рассмотрим статически определимую систему, полученную из заданной удалением лишних связей. Такая система называется основной. Удалим опорные связи в точке  $A$ , в результате получим следующую основную систему (рис.15.7).

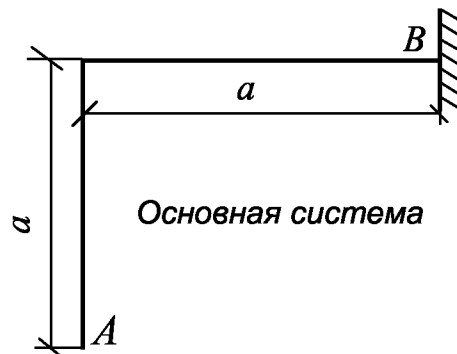


Рис.15.7

Таким образом, *основной системой* называется система, полученная из заданной удалением лишних связей. Она должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

Будем рассчитывать основную статически определимую систему. Загрузим ее заданной нагрузкой и неизвестными реакциями лишних отброшенных связей, т.е. лишними неизвестными  $x_1$  и  $x_2$ .



Основная система, нагруженная внешней нагрузкой и лишними неизвестными, называется *эквивалентной системой* (рис.15.8).

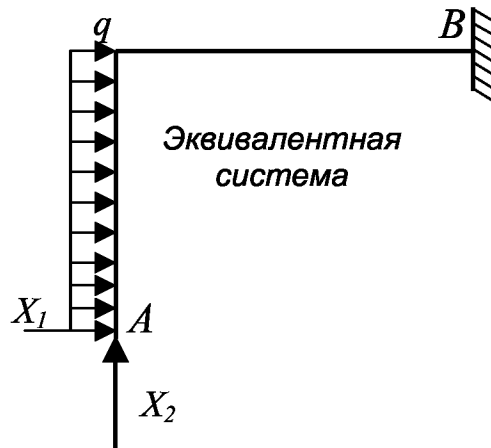


Рис.15.8

Эквивалентная система будет действительно эквивалентной заданной только при тех значениях лишних неизвестных при которых горизонтальное  $\Delta_1$  и вертикальное  $\Delta_2$  перемещения точки  $A$  будут равны нулю т.е. когда  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 0$  - условие совместности деформаций.

При вычислении перемещений, когда  $\Delta_i = f(x_1, x_2, P)$  обычно используют принцип независимости действия сил

$$\Delta_i = \Delta_i(x_1) + \Delta_i(x_2) + \Delta_i(P) = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{ip} = 0$$

где  $\Delta_{ik}$  - перемещение в основной системе по направлению силы  $x_i$ , вызванное силой  $P$ .

В упругих линейно-деформируемых системах перемещения  $\Delta_{ik}$  можно представить в виде

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} x_k,$$

где  $\delta_{ik}$  - перемещение в основной системе по направлению силы  $x_i$ , вызванное силой  $x_k = 1$ .

Учитывая такое представление для перемещения  $\Delta_{ik}$ , условия совместности деформаций можно записать в виде системы канонических уравнений метода сил

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_{2p} = 0$$

Это каноническая форма условий совместности деформаций. Их обычно называют системой канонических уравнений метода сил. Запишем для  $n$  раз статически неопределимой системы систему канонических уравнений

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \dots + \delta_{1n} x_n + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2p} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} = 0$$

Общие свойства канонических уравнений

1. Это система линейных алгебраических уравнений.
2. Уравнений столько, сколько раз статически неопределимая система.
3. В каждое уравнение входит не более, чем  $n$  неизвестных (где  $n$  - степень статической неопределенности).
4. Коэффициенты уравнений не зависят от внешней нагрузки. Они полностью определяются свойствами основной системы.

### 15.3 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta_{ip}$  канонических уравнений являются перемещениями в основной статически определимой системе. Поэтому для определения их можно воспользоваться методом Мора

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dS, \quad \Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} dS$$

Например,  $\delta_{12}$  и  $\Delta_{1p}$  - перемещения в основной системе по направлению силы  $x_1$ , вызванные соответственно силой  $x_2 = 1$  (рис.15.9а) и внешней нагрузкой (рис.15.9б). Для определения их вспомогательное состояние системы будет одно и тоже Оно показано на рис.15.9в

Коэффициенты, имеющие одинаковые индексы, называются коэффициентами канонических уравнений.

$$\delta_{kk} = \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\bar{M}_i^2}{EJ} dS$$

- главные коэффициенты.

Очевидно, что главные коэффициенты всегда положительны. Они располагаются на главной диагонали матрицы коэффициентов канонических уравнений. Если индексы коэффициентов неодинаковы, то их называют побочными. На основании теоремы о взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki},$$

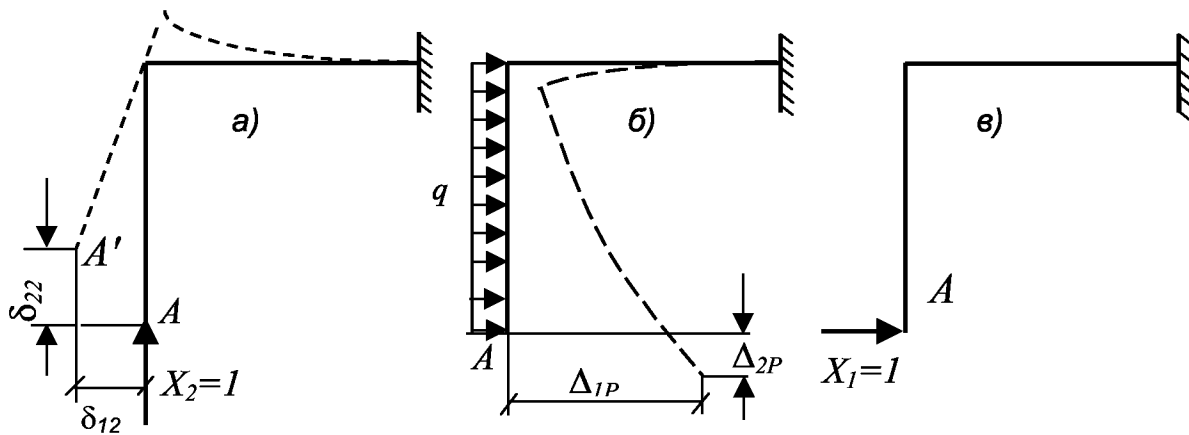


Рис.15.9

т.е. побочные коэффициенты расположены симметрично относительно главной диагонали и равны между собой.

В балках и рамах для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений удобно пользоваться способом Верещагина, т.е.

$$\delta_{ik} = M_i \bar{M}_k, \quad \Delta_{ip} = \bar{M}_i M_p$$

Например, определим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений для рассматриваемого примера. Построим эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия единичных лишних неизвестных и внешней нагрузки.

Теперь, коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta_{ip}$  канонических уравнений можно легко определить, перемножая эпюры  $\bar{M}_i$  и  $M_p$  между собой по Верещагину (рис.15.10)

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \left( \frac{1}{2} a a \frac{2}{3} a + a a a \right) \frac{1}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \bar{M}_2 = -a a \frac{1}{2} a \frac{1}{EJ} = -\frac{1}{2} \frac{a^3}{EJ}$$

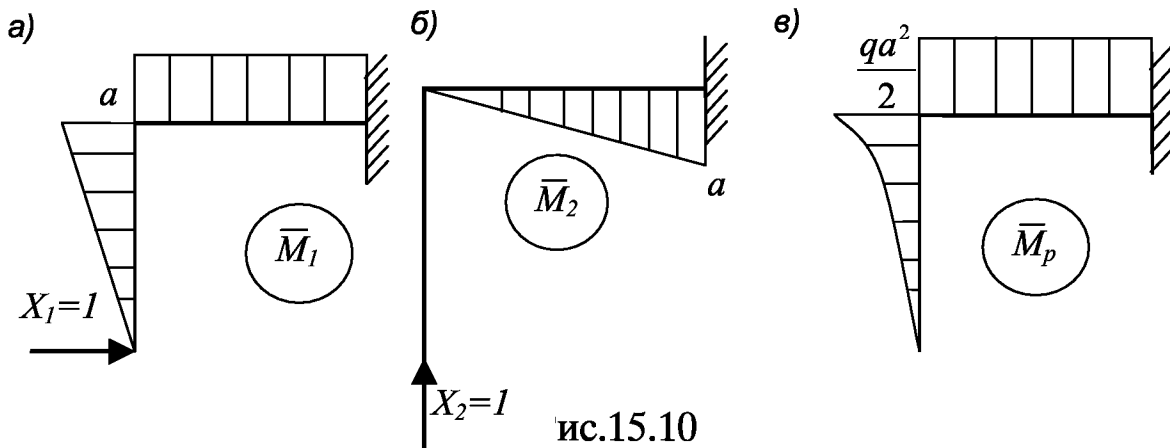
$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{1}{2} a a \frac{2}{3} a \frac{1}{EJ} = -\frac{1}{3} \frac{a^3}{EJ},$$

$$\Delta_{1p} = \bar{M}_1 M_p = \left( \frac{q a^3}{6} \frac{3}{4} a + \frac{q a^3}{2} a a \right) \frac{1}{EJ} = \frac{5}{8} \frac{q a^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \bar{M}_2 M_p = -\frac{q a^2}{2} a \frac{1}{2} a \frac{1}{EJ} = -\frac{1}{4} \frac{q a^3}{EJ}$$

После определения коэффициентов и свободных членов из решения системы канонических уравнений находятся значения лишних

неизвестных. Для рассматриваемого примера имеем следующую систему канонических уравнений.



Решая эту систему уравнений методом исключений или подстановок, получим

$$x_1 = -\frac{3}{7}qa, \quad x_2 = -\frac{3}{28}qa.$$

Знак минус в выражении для  $x_1$  показывает, что сила  $x_1$  направлена противоположно первоначально принятому направлению.

#### 15.4. Построение суммарных эпюр внутренних усилий

Для построения суммарных эпюр внутренних усилий можно воспользоваться эквивалентной системой (рис.15.11). Так как эквивалентная система является статически определимой, то построение эпюр внутренних усилий в ней не составляет никаких принципиальных трудностей.

Суммарные эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  приведем на рис. 15.12. При расчете более сложных многократно статически неопределимых рам для построения суммарной эпюры изгибающих моментов обычно используют принцип независимости действия сил, согласно которому суммарный изгибающий момент в любом сечении можно вычислить по формуле

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \dots + \bar{M}_n X_n$$

Согласно этой формуле надо каждую единичную эпюру  $\bar{M}_i$  умножить на соответствующее значение лишнего неизвестного  $X_i$ . Затем полученные эпюры сложить, добавив к ним эпюру  $M_p$ . Для рассматриваемого примера сложение эпюр выполнено на рис.15.13.

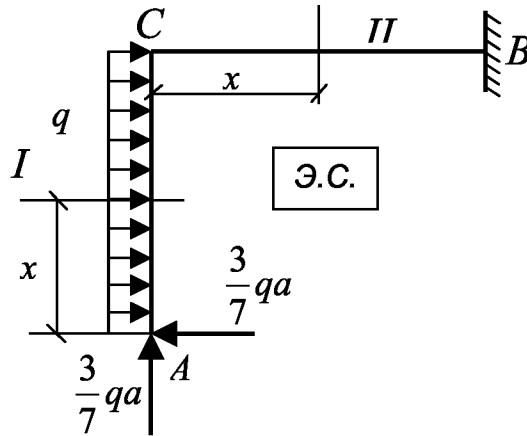


Рис.15.11.

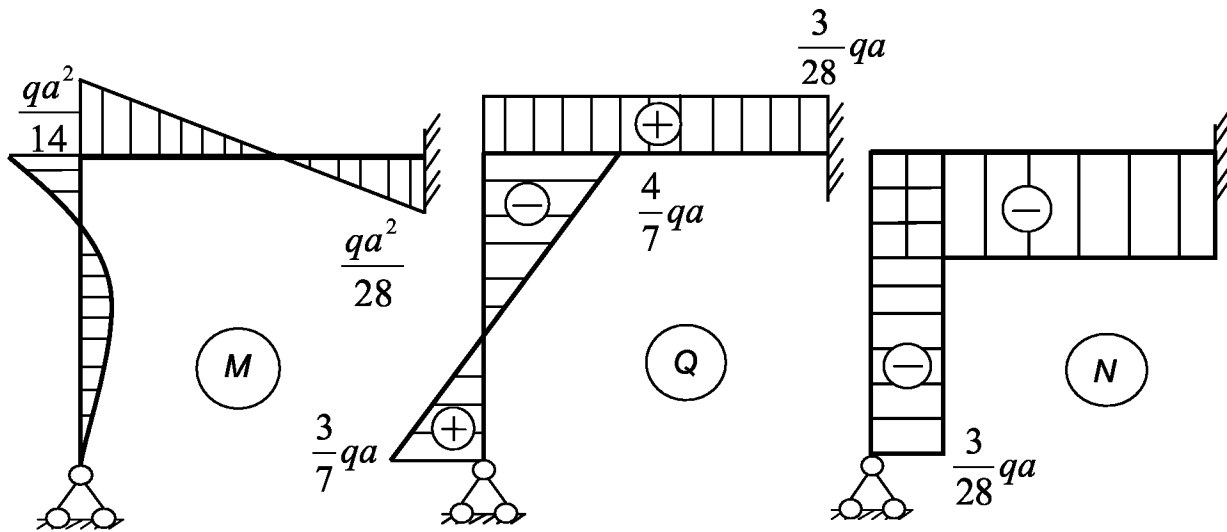


Рис.15.12

После построения суммарной эпюры изгибающих моментов поперечные силы можно вычислить, рассматривая равновесия отдельных участков и изобразить затем суммарную эпюру геометрических сил.

Например, рассмотрим участок ЛП некоторой рамы(рис.15.14), на котором по всей длине  $a$  действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

$$\sum M_n = Q_n a + M_n - M_n - \frac{qa^2}{2} = 0,$$

$$Q_n = \frac{qa}{2} + \frac{M_n - M_n}{a} = Q_o + \frac{M_n - M_n}{a},$$

$$\sum M_n = M_n + Q_n a + \frac{qa^2}{2} + M_n = 0,$$

$$Q_n = -\frac{qa}{2} + \frac{M_n - M_n}{a} = Q_o + \frac{M_n - M_n}{a}.$$

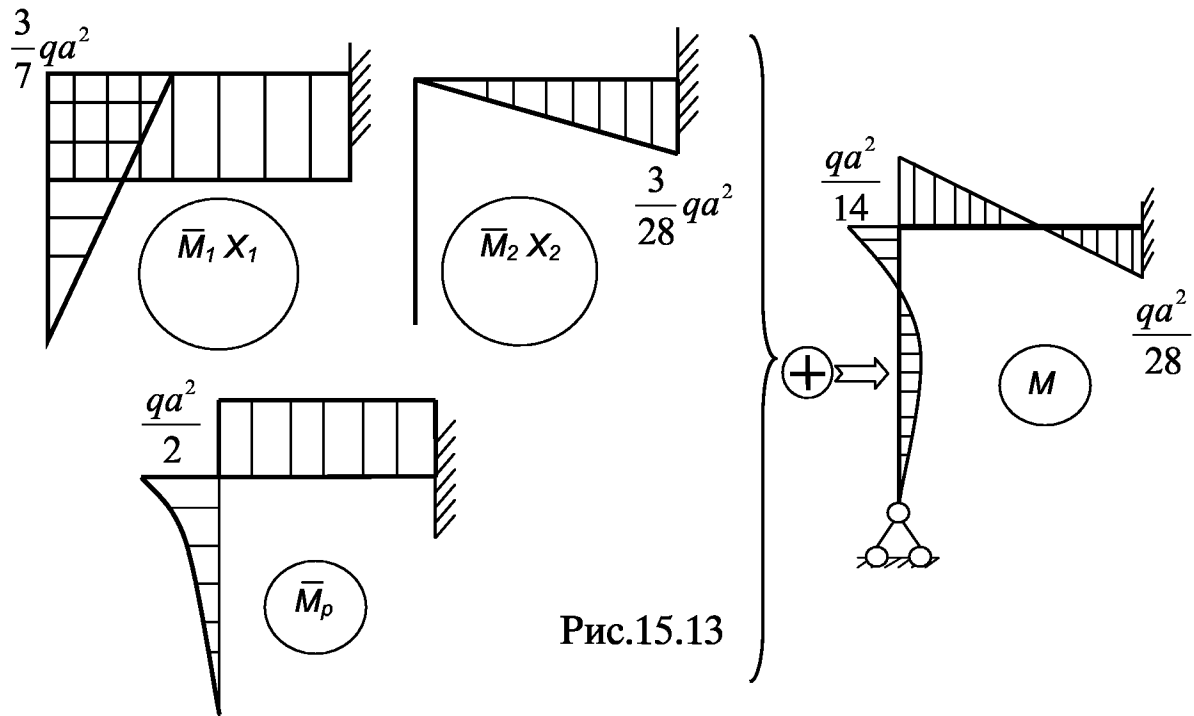


Рис.15.13

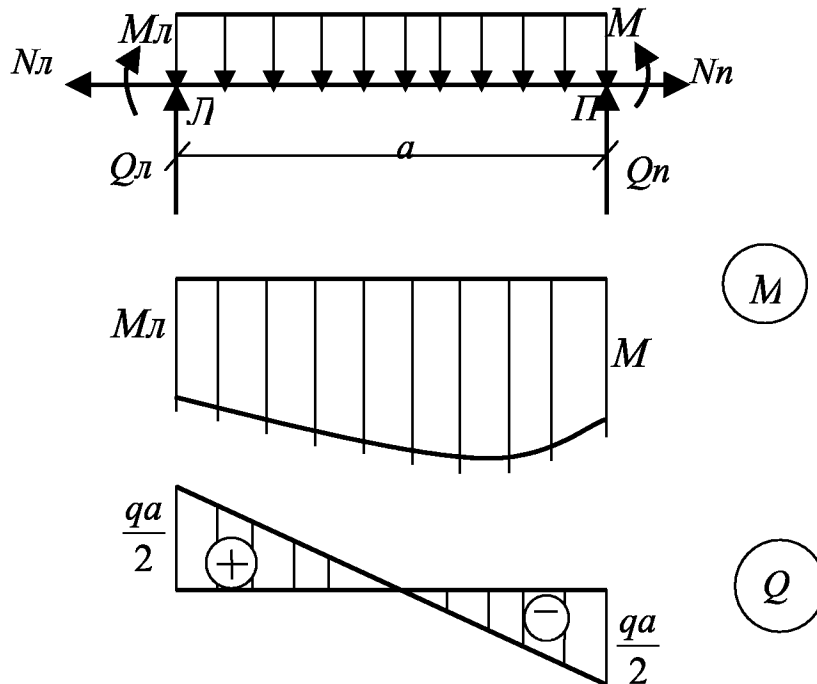


Рис.15.14

Следовательно, формула для определения поперечных сил:

$$Q = Q_o + \frac{M_n - M_l}{a}$$

где  $Q_o$  - балочная поперечная сила.

Если на участке  $q = 0$ , то и  $Q = 0$ , поэтому формула для участка, где  $q = 0$

$$Q = \frac{M_n - M_x}{a}$$

После построения эпюры поперечных сил продольные силы можно определить из условий равновесия отдельных узлов рамы и построить затем суммарную эпюру продольных сил.

Например, вырежем и рассмотрим равновесие узла "С"

$$\sum X = 0 \rightarrow N_{CB} = -\frac{4}{7}qa, \quad \sum Y = 0 \rightarrow N_{CA} = -\frac{3}{28}qa$$

т.е. те же значения, что были получены в эквивалентной системе.

### 15.5 Проверка расчета статически неопределимых систем методом сил

В расчетной практике для контроля правильности расчета любой статически неопределимой системы методом сил обычно выполняют проверки двух видов: статические и деформативные.

Статические проверки. Если суммарные эпюры внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$  построены правильно, то вся система в целом, ее узлы и элементы будут находиться в равновесии. Поэтому все статические проверки сводятся к проверке выполнения условий равновесия всей системы в целом или вырезанных из нее отдельных узлов и элементов. Например, в рассмотренном выше примере, проверим равновесие всей рамы в целом, узла "С" и элементов АС. Силы, действующие на них, показаны на рис.15.15.

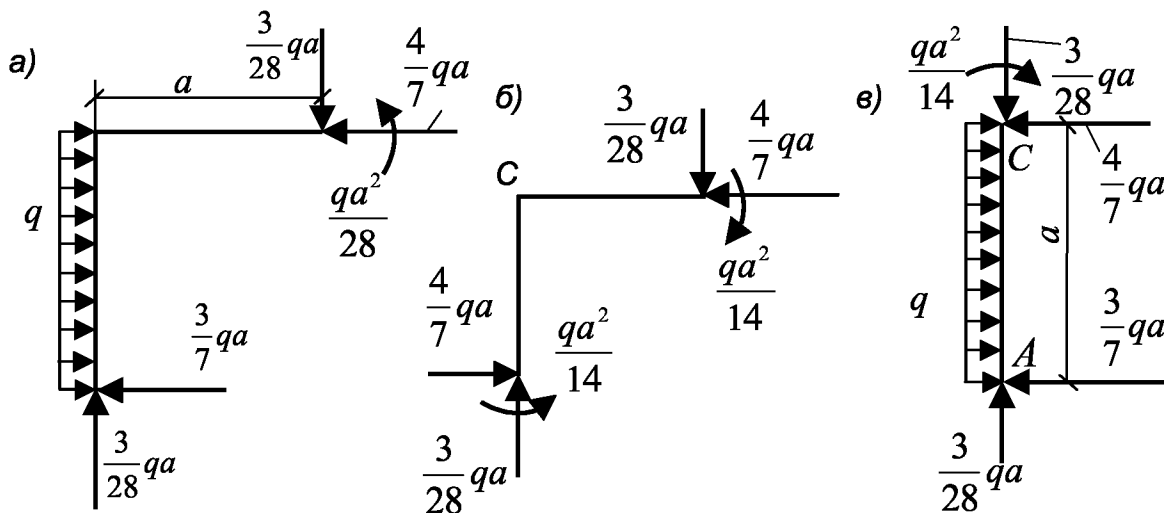


Рис.15.15.

Легко убедится, что во всех случаях

$$\sum X = 0, \sum Y = 0 \text{ и } \sum M = 0$$

т.е., все три условия равновесия выполняются, что подтверждает правильность построения суммарных эпюр внутренних усилий  $N, Q$  и  $M$ . Следует заметить, что статические проверки выполняются при любых значениях лишних неизвестных, поэтому они не гарантируют правильность определения их. Они являются недостаточными. Более надежную гарантию правильности решения задачи дают деформативные проверки.

Рассмотрим их. Умножим по Верещагину какую-либо единичную эпюру  $\bar{M}_i$  на суммарную эпюру  $M$

$$\begin{aligned}\bar{M}_i M_f &= \bar{M}_i (\bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_p) = \\ &= \bar{M}_i \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_i \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_i \bar{M}_n x_n + \bar{M}_i M_p = \\ &= \delta_{i1} x_1 + \delta_{i2} x_2 + \dots + \delta_{in} x_n + \Delta_{ip} = 0\end{aligned}$$

Следовательно, если лишние неизвестные определены правильно и правильно построена суммарная эпюра изгибающих моментов  $M$ , то произведение ее по Верещагину на каждую из единичных эпюр  $\bar{M}_i$  будет равно нулю, т.е.

$$M \bar{M}_i = 0 \quad - \text{деформативные проверки.}$$

Так как при расчете системы лишние неизвестные вычисляются с некоторой погрешностью, то и при выполнении деформативных проверок допускается такая же погрешность. Для того, чтобы определить ее необходимо при проверке вычислять сумму положительных и отрицательных слагаемых. Если разница между ними, выраженная в процентах к меньшей из них, невелика (до 1%), то результат расчета можно считать удовлетворительным.

Деформативные проверки дают надежную гарантию правильности расчета только при условии правильности построения исходных эпюр  $\bar{M}_i$  и  $M_p$ . Для того, чтобы вскрыть ошибки связанные с этим необходимо при выполнении деформативных проверок использовать любую основную систему, которая не использовалась в расчете. Количество деформативных проверок должно равняться степени статической неопределимости заданной системы.

### 15.6 Определение перемещений в статически неопределимых системах

Для определения перемещений в статически неопределимых системах необходимо, прежде всего, раскрыть статическую неопределимость, т.е. определить лишние неизвестные. Затем удобно воспользоваться эквивалентной системой. Так как она является статически определимой, то любое перемещение в ней может



быть вычислено способом Мора. В балках и рамах можно воспользоваться так же способом Верещагина.

Например, определим, в рассмотренном ранее примере, вертикальное перемещение середины ригеля  $y_K$  (рис.15.16а). За основное состояние системы принимаем эквивалентную систему (рис.15.16б), а за вспомогательное можно принять любую основную систему, нагруженную в точке  $K$  сосредоточенной силой  $P_K = 1$ , действующей в направлении искомого перемещения (рис.15.16в или рис.15.16г). Основная эпюра изгибающих моментов  $M$  и вспомогательная  $\bar{M}_K$  или  $\bar{M}'_K$  приведены на рис.15.16д,е,ж.

Перемножая по Верещагину эпюры  $M$  и  $\bar{M}_K$  или  $M$  и  $\bar{M}'_K$ , получим искомое перемещение

$$y_k = M\bar{M}_K = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \frac{qa^2}{56} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} \frac{a}{2} \frac{2}{2} \frac{a}{2} \right) = \frac{qa^4}{338EJ} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{qa^4}{448EJ}$$

$$y_k = M\bar{M}'_K = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \frac{a}{4} a \left( \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} - \frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} \right) \right) = \frac{qa^4}{224EJ} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{qa^4}{448EJ}$$

Как и следовало ожидать, результаты получились одинаковыми.

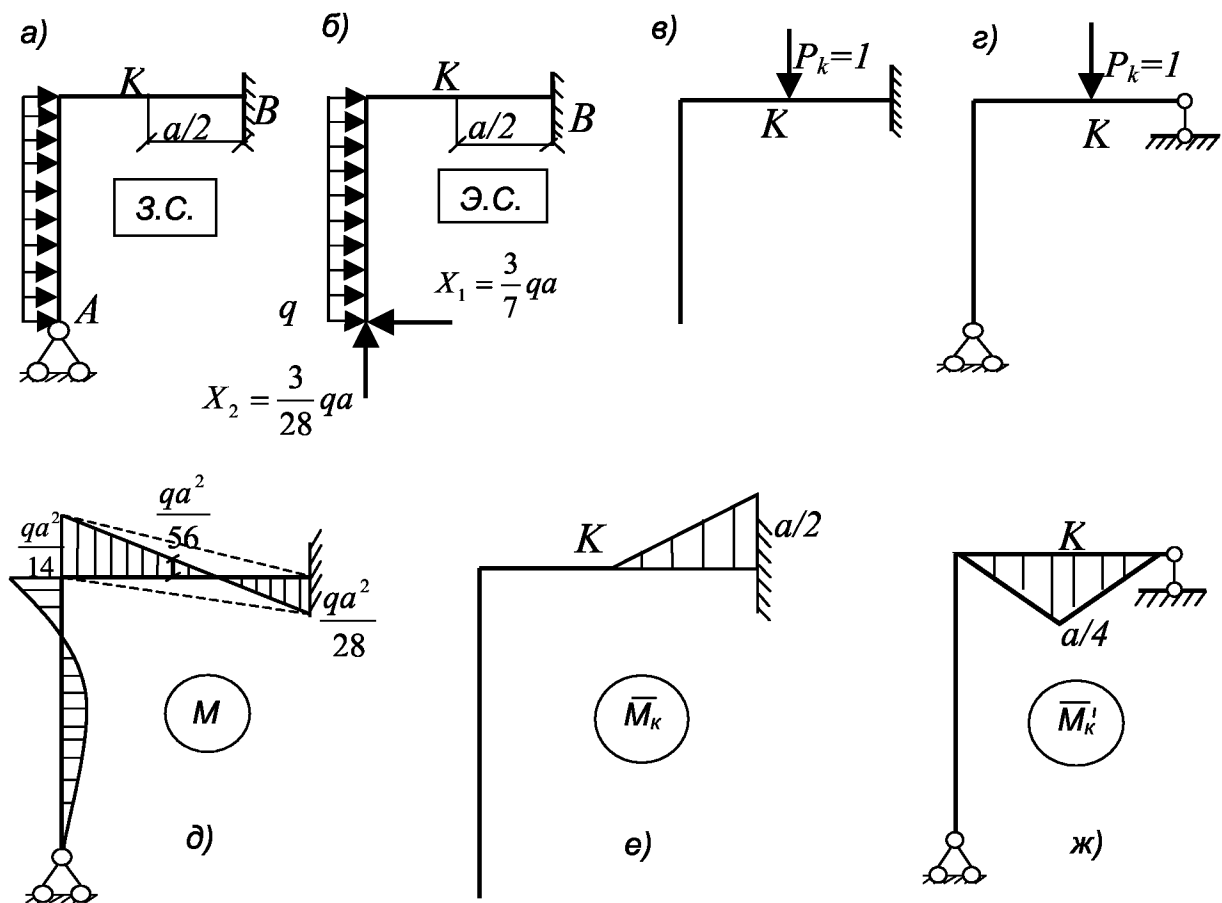


Рис.15.16

### 15.7 Способы упрощения канонических уравнений

В расчетной практике используется несколько способов упрощения канонических уравнений, но все они основаны на одной идее - обращения в нуль побочных перемещений. Наиболее эффективным средством обращения в нуль побочных перемещений является удачный выбор основной системы.

Основная система получается удалением из общего числа связей заданной системы только некоторых связей, которые являются лишними. Причем, за лишние связи можно принять внешние (опорные) или внутренние связи, препятствующие взаимному повороту, осевому перемещению или сдвигу сечений. В таких случаях лишними неизвестными будут внутренние усилия, т.е. изгибающие моменты, продольные и поперечные силы. В связи с этим имеется возможность для одной и той же заданной системы при расчете выбрать несколько основных систем. Однако, используется для расчета только одна из них - та, в которой наибольшее число побочных перемещений обращается в нуль. Она называется удачной или рациональной.

Например, выберем основную систему для расчета симметричной заданной системы (рис.15.17а).

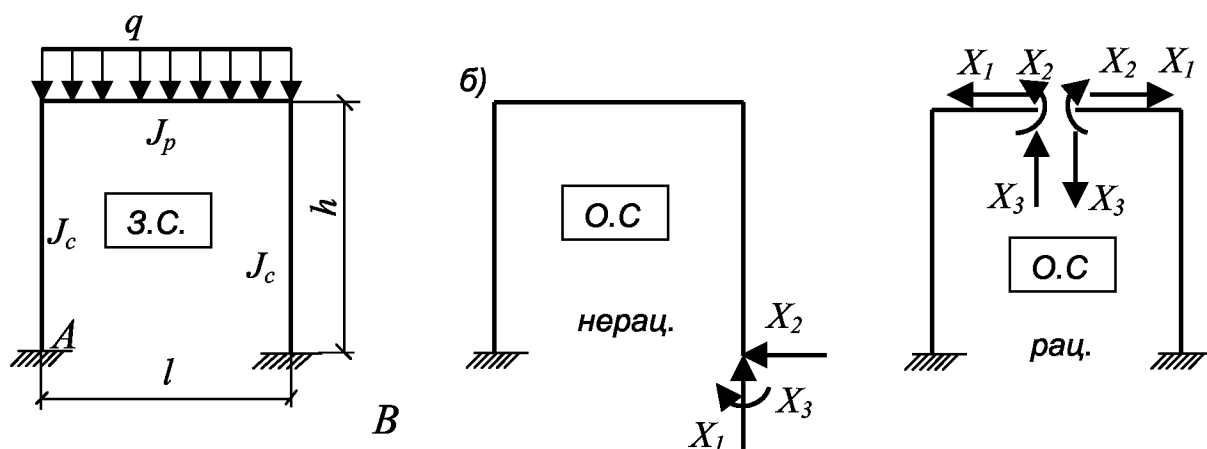


Рис.15.17

Определим стержень статической неопределимости ее  
 $L = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 0 = 3$   
 и рассмотрим два варианта основной системы.

В первом варианте (рис.15.17б) основная система получена из заданной удалением трех внешних (опорных) связей в опоре B. Во

втором варианте (рис.15.17в), основную систему получим из заданной, разрезав ее по оси симметрии, т.е. удалим 3 внутренние связи, и примем в качестве лишних неизвестных

$X_1$  - продольная сила в середине ригеля;

$X_2$  - изгибающий момент в середине ригеля;

$X_3$  - поперечная сила в середине ригеля.

Очевидно, в первом варианте основной системы ни одно из побочных перемещений не равно нулю, поэтому система канонических уравнений метода сил будет полной

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0$$

Проанализируем второй вариант основной системы (рис.15.17в). Построим в ней эпюры изгибающих моментов  $M_p$ ,  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  и  $\bar{M}_3$  (рис.15.18).

Заметим, что эпюры  $M_p$ ,  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  симметричны, а эпюра  $\bar{M}_3$  кососимметричная и вычислим коэффициент  $\delta_{13}$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \bar{M}_1 \bar{M}_3 = \frac{1}{2} h h \frac{1}{2} \frac{1}{EJ_c} - \frac{1}{2} h h \frac{1}{2} \frac{1}{EJ_c} = 0$$

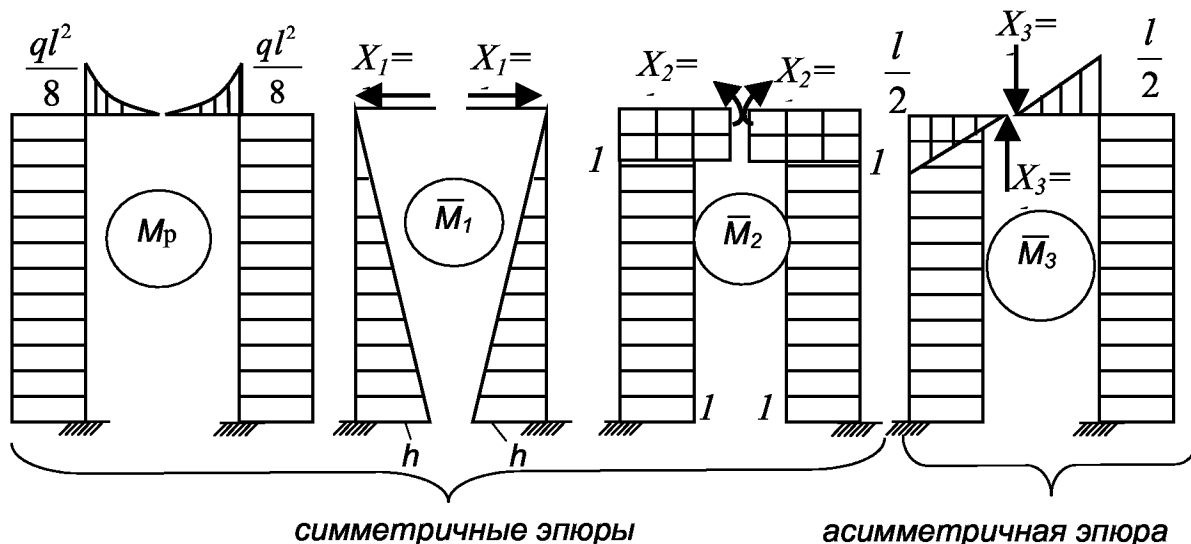


Рис.15.18

Следовательно, произведение по Верещагину симметричной эпюры на кососимметричную равно нулю. Поэтому, без вычислений можно записать, что  $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ . Вследствие этого система канонических уравнений упрощается и принимает вид

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0$$

1-я система (для симметричных неизвестных)

$$\delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} = 0$$

2-я система (для кососимметричных неизвестных)

Так как в данном примере эпюра  $M_p$  симметрична, то  $\Delta_{3p} = M_p$ ,  $\bar{M}_3 = 0$ , следовательно, и  $X_3 = 0$ .

При кососимметричной внешней нагрузке эпюра  $M_p$  также будет кососимметричной, поэтому  $\Delta_{1p} = M_p \bar{M}_1 = 0$  и  $\Delta_{2p} = M_p \bar{M}_2 = 0$ . Следовательно, в таком случае, симметричные лишние неизвестные будут равны нулю:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ .

Таким образом, для симметричной заданной системы основную систему надо выбирать тоже симметричную. При этом часть побочных коэффициентов обратиться в нуль, а система канонических уравнений распадается на две независимые системы. В одну из них будут входить только симметричные линейные неизвестные, а во вторую - только кососимметричные. Это значительно упрощает расчет заданной системы. Поэтому симметричная основная система (рис.15.17в) считается рациональной или удачной.

Если заданная система несимметрична, то при выборе основной системы предпочтение надо отдавать системе, которая состоит из большего числа самостоятельных геометрически неизменяемых элементов. При этом эпюры  $M_p$  и  $\bar{M}_i$  будут распространяться на меньшее число элементов, что приводит к сокращению объема вычислений при определении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

Другие способы упрощения канонических уравнений метода сил мы рассматривать не будем. Они рассматриваются в курсе "Строительной механики стержневых систем".

### **15.8 Особенности расчета статически неопределимых систем, элементы которой испытывают растяжение или сжатие**

Метод сил - общий метод расчета статически неопределимых систем. Он применим для расчета любых статически неопределимых систем при любых внешних воздействиях.

Для статически неопределимых систем, элементы которых испытывают только растяжение или сжатие характерным является то,

что в них изгибающие моменты и поперечные силы тождественно равны нулю. Поэтому при определении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений нельзя пренебрегать влиянием продольных сил. Их определяют по формуле Максвелла

$$\delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{N}_i N_k dx}{EF}, \quad \Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{N}_i N_p dx}{EF},$$

или по способу Верещагина

$$\delta_{ik} = \bar{N}_i \bar{N}_k, \quad \Delta_{ip} = \bar{N}_i N_p.$$

Кроме того в таких системах эпюру суммарных продольных сил обычно не строят, а ограничиваются вычислением их по формуле

$$N_i = \bar{N}_{1(i)} X_1 + \bar{N}_{2(i)} X_2 + \dots + \bar{N}_{n(i)} X_n + N_{p(i)}$$

где  $N_i$  - суммарная продольная сила в  $i$ -том стержне,

$\bar{N}_{k(i)}$  - продольная сила в  $i$ -том стержне основной системы от силы  $X_k = 1$ ,

$\bar{N}_{p(i)}$  - продольная сила в  $i$ -том стержне основной системы от внешней нагрузки.

Рассмотрим пример. Определить напряжения в стержнях статически неопределимой конструкции (рис.15.19а), если  $E_1 = E_2 = E$ ,  $F_1 = F_2 = F$ , а элемент  $AB$  абсолютно жесткий.

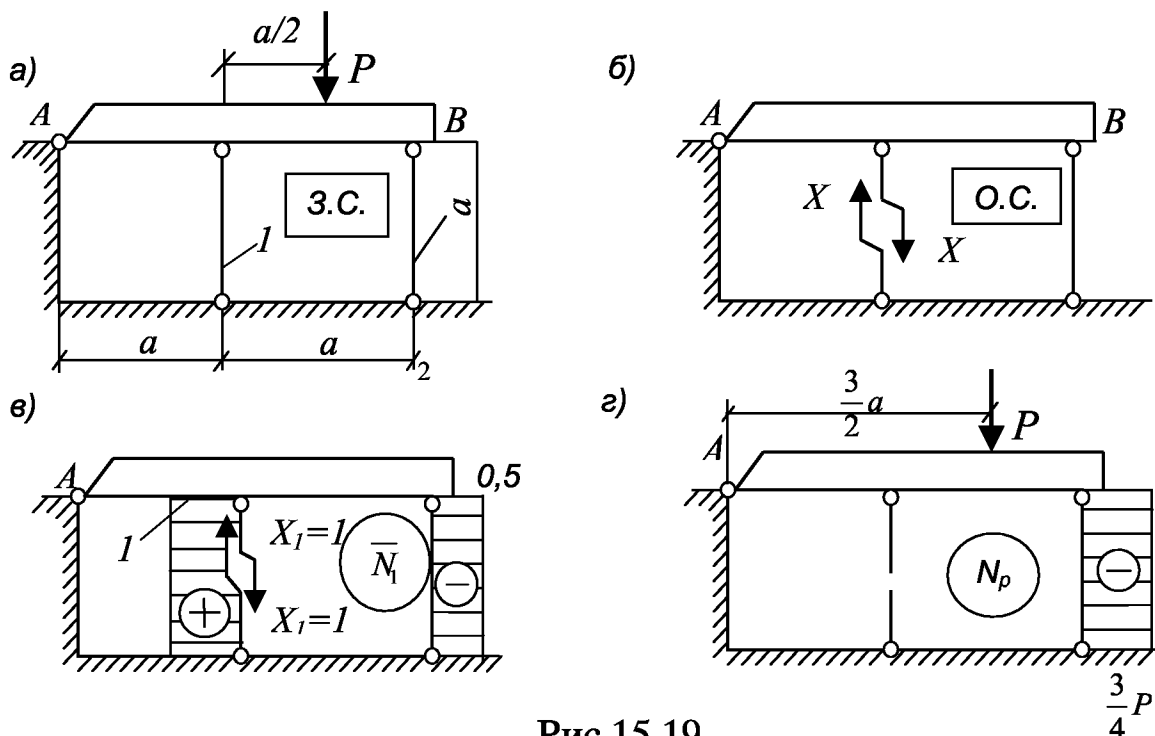


Рис.15.19

Определим степень статической неопределимости

$$L = 3K - \text{III} = 3 \cdot 2 - 5 = 1$$

и выберем основную систему (рис.15.19б). При такой основной системе лишним неизвестным  $x_1$  является продольная сила в стержне 1. Для определения ее составим каноническое уравнение

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Коэффициент  $\delta_{11}$  и свободный член  $\Delta_{1p}$  определили по способу Верещагина. Необходимые для этого эпюры  $N_p$  и  $N_1$  приведены на рис.15.19в,г). Перемножая их по способу Верещагина, получим

$$\delta_{11} = \bar{N}_1 N_1 = \frac{1 \cdot a \cdot 1}{EF} + \frac{0.5 \cdot a \cdot 0.5}{EF} = \frac{5a}{4EF},$$

$$\Delta_{1p} = \bar{N}_1 N_p = \frac{0.5 \cdot a \cdot \frac{3}{4}P}{EF} = \frac{3Pa}{8EF}.$$

Подставляя  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  в каноническое уравнение, получим

$$\frac{5a}{4EF}x_1 + \frac{3Pa}{8EF} = 0.$$

Откуда  $x_1 = -\frac{3P}{10} = -0.3P$ .

Теперь можно легко вычислить суммарные продольные силы в стержнях системы

$$N_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \approx 0.3P,$$

$$N_2 = -0.5x_1 - \frac{3}{4}P = -0.5(-0.3P) - \frac{3}{4}P = -0.6P,$$

а следовательно и напряжения

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = -\frac{0.3P}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{0.6P}{F}.$$

### 15.9 Определение начальных напряжений методом сил

В элементах статически неопределимых систем возникают напряжения даже при отсутствии внешних сил. Они могут быть вызваны изменением температуры, перемещениями отдельных связей или возникнуть при сборке конструкции из неточно изготовленных элементов. Такие напряжения называются начальными или монтажными. Их можно легко определить методом сил, если при составлении канонических уравнений добавить к свободным членам

перемещения, вызванные изменением температуры и заданными смещениями отдельных связей.

Например, для  $n$  раз статически неопределимой системы при совместном действии внешних сил, изменении температуры и заданных смещениях некоторых связей система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2p} + \Delta_{2t} + \Delta_{20} &= 0 \end{aligned}$$

.....

$$\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} + \Delta_{nt} + \Delta_{n0} = 0$$

где  $\Delta_{ip}$ ,  $\Delta_{it}$ ,  $\Delta_{i0}$  - перемещения в основной системе в направлении силы  $x_i$ , вызванные соответственно внешней нагрузкой, изменением температуры и заданными смещениями отдельных связей.

В балках и рамах для определения перемещений  $\Delta_{ip}$  обычно используют способ Верещагина, а перемещения  $\Delta_{it}$  определяют по формуле

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha(t_n + t_b)}{2} \omega(\bar{N}_i) + \sum \frac{\alpha(t_n - t_b)}{h} \omega(\bar{M}_i).$$

Перемещения  $\Delta_{i0}$  можно определить из геометрических соображений или по теореме взаимности работ. Если при выборе основной системы удалить из заданной системы те связи, в направлении которых заданы смещения  $\Delta_i$ , то  $\Delta_{i0} = -\Delta_i$ .

Рассмотрим пример. Определить напряжения на участках стержня (рис.15.20а), вызванные действием внешней силы  $P$ , изменением температуры на  $t$  градусов и неточностью изготовления стержня (он изготовлен короче на  $\Delta$ ), если  $EF = const$  и  $\alpha = const$ .

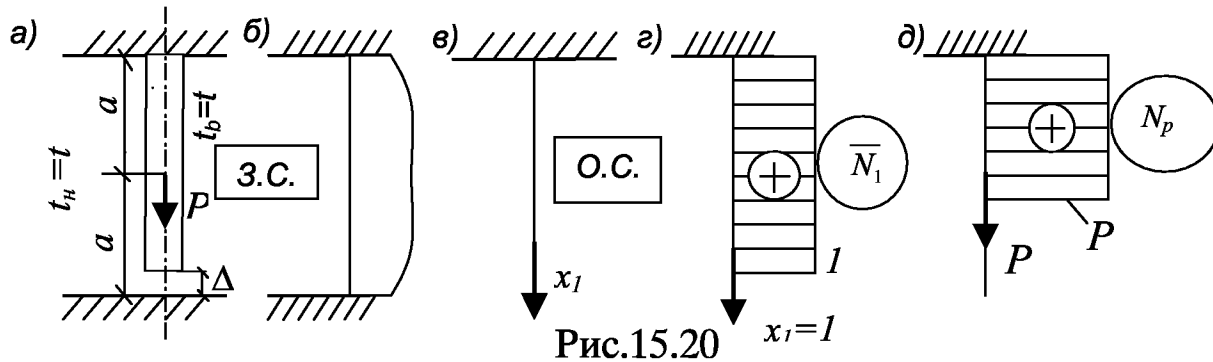
Определим степень статической неопределимости в предположении, что зазор  $\Delta$  закрыт (рис.15.20б).

$$L = 3K - III = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

но так как  $M = Q \equiv 0$ , то задачу можно решить как однажды статически неопределимую. Чтобы получить основную систему отбросим в заданной системе нижнюю опору и направим лишнее неизвестное  $x_1$  вниз, т.е. в направлении заданного смещения (рис.15.20в). При этом  $\Delta_{i0} = -\Delta$  и каноническое уравнение для определения лишнего неизвестного  $x_1$  будет иметь вид

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} = \Delta.$$

Перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  определим по способу Верещагина. Необходимые эпюры продольных сил  $\bar{N}_1$  и  $N_p$  приведены на чертеже.



$$\text{Имеем } \delta_{11} = \bar{N}_1 N_1 = \frac{1 \cdot 2a \cdot 1}{EF} = \frac{2a}{EF}, \quad \Delta_{1p} = \bar{N}_1 N_p = \frac{Pa \cdot 1}{EF} = \frac{Pa}{EF},$$

$$\Delta_{1t} = \alpha \frac{t+t}{2} 2a \cdot 1 = 2\alpha at.$$

Подставляя  $\delta_{11}$ ,  $\Delta_{1p}$  и  $\Delta_{1t}$  в каноническое уравнение, получим

$$\frac{2a}{EF} x_1 + \frac{Pa}{EF} + 2\alpha at = \Delta.$$

Откуда находим  $x_1 = -\frac{P}{2} + \left(\frac{\Delta}{2a} - \alpha t\right) EF$  и суммарные продольные силы и напряжения на участках стержня.

$$N_1 = -\frac{P}{2} + \left(\frac{\Delta}{2a} - \alpha t\right) EF, \quad N_2 = -\frac{P}{2} + \left(\frac{\Delta}{2a} - \alpha t\right) EF,$$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2F} + \left(\frac{\Delta}{2a} - \alpha t\right) E, \quad \sigma_2 = -\frac{P}{2F} + \left(\frac{\Delta}{2a} - \alpha t\right) E.$$

### 15.10 Порядок расчета статически неопределимых систем методом сил

1. Определить степень статической неопределимости системы.
2. Выбрать рациональную основную систему и записать систему канонических уравнений.
3. Построить в основной системе необходимые эпюры внутренних усилий от действия единичных лишних неизвестных и внешней нагрузки.
4. Определить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений.
5. Решить систему канонических уравнений.
6. Построить суммарные эпюры внутренних усилий.
7. Выполнить статические и деформативные проверки расчета.
8. Выполнить расчет на прочность и жесткость.



РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

16.1 Выбор рациональной основной системы

Неразрезными балками называются многопролетные статически неопределимые балки, не имеющие промежуточных шарниров (рис.16.1а).

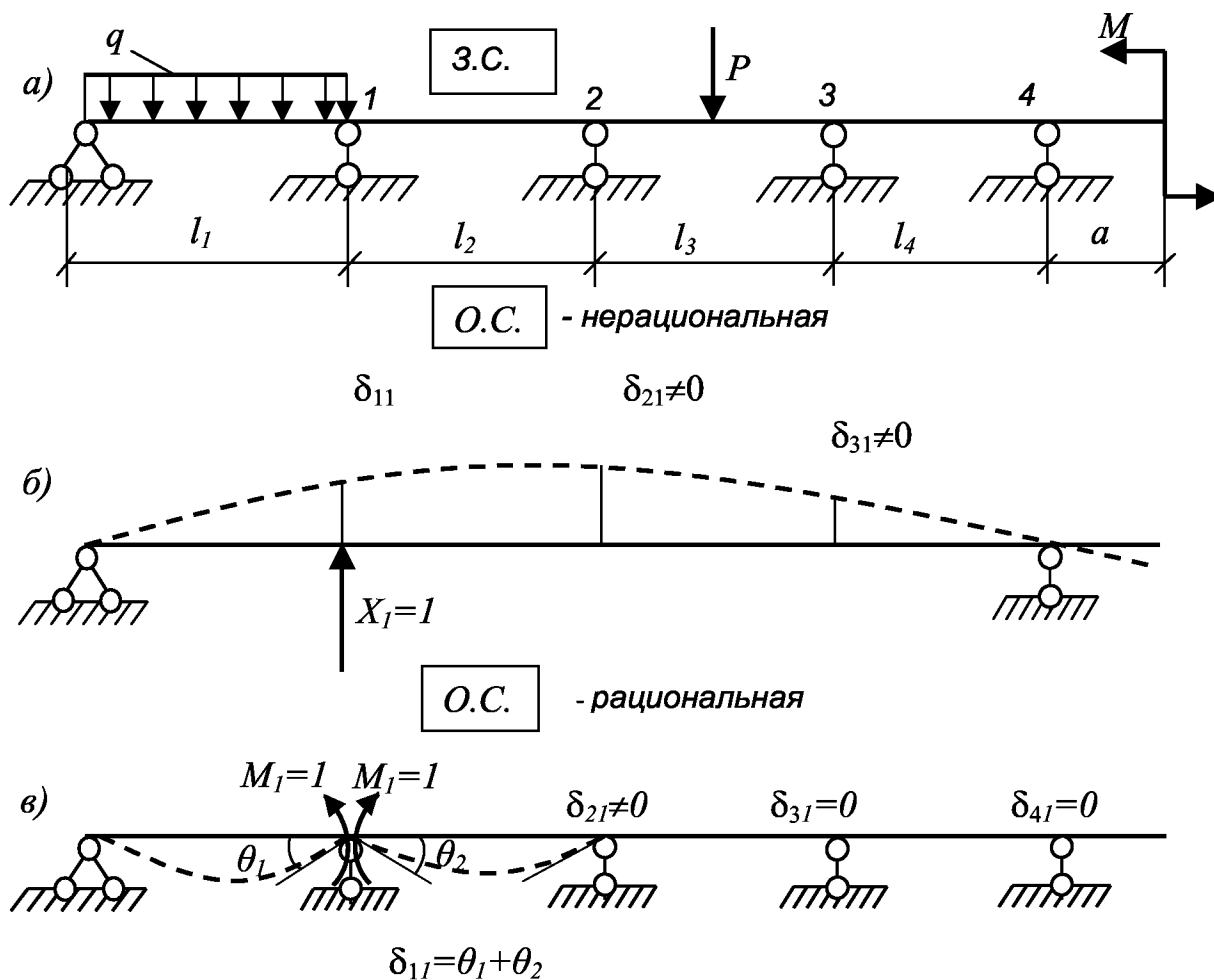


Рис.16.1.

Опоры и пролеты их принято нумеровать слева направо, как показано на рис.16.1а. Расчет неразрезных балок, как любых других статически неопределимых систем, можно выполнить методом сил. Для определения степени статической неопределимости удобно пользоваться формулой  $L = C - C_0$ . Но для обеспечения геометрической неизменяемости одного элемента на плоскости, достаточно трех связей, т.е.  $C = 3$ , поэтому

$$L = C - 3$$

- формула для определения степени статической неопределимости неразрезных балок, где  $C$  - общее число связей в системе.

В рассматриваемом примере  $C = 6$ , а  $L = 3$ . Поэтому при выборе основной системы в из заданной системы необходимо выбросить любые три связи, но такие, чтобы полученная система была геометрически неизменяемой и статически определимой. Рассмотрим два варианта основной системы. В первом варианте из заданной системы выбросим три опорные связи, предотвращающие вертикальные перемещения в точках 1,2 и 3 (рис.16.1б). За лишние неизвестные в этом случае принимаются реакции отброшенных связей, т.е. силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Очевидно, что в этой основной системе, представляющей собой один геометрически неизменяемый элемент, ни одно из побочных перемещений не обращается в нуль. Поэтому она является нерациональной.

Во втором варианте выбросим из заданной системы 3 внутренние связи, предотвращающие взаимный поворот сечений над опорами 1,2 и 3 (рис.16.1в). Такая основная система состоит из 4-х элементов, связанных между собой шарнирами, а за нижние неизвестные в ней приняты изгибающие моменты, действующие в опорных сечениях, т.е.  $X_1 = M_1$ ,  $X_2 = M_2$  и  $X_3 = M_3$ .

Проанализируем эту основную систему. При действии лишнего неизвестного  $M_1 = 1$  будут деформироваться только два смежных пролета, поэтому только перемещения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{21}$  отличны от нуля, а все остальные побочные перемещения равны нулю. Вследствие этого в первое каноническое уравнение войдут только два неизвестных опорных момента  $M_1$  и  $M_2$ , а в остальные уравнения - не более 3-х опорных момента. Следовательно, при такой основной системе многие побочные перемещения обращаются в нуль, вследствие чего в каждое каноническое уравнение войдет не более, чем три неизвестных момента, действующих в опорных сечениях двух смежных пролетов. Поэтому такая основная система считается рациональной.

## 16.2 Уравнение трех моментов

Рассмотрим два смежных пролета некоторой неразрезной балки при  $EJ = const$  во всех пролетах (рис.16.2а). Обозначим опоры и пролеты. Для расчета этой балки используем рациональную основную систему (рис.16.2б). Запишем  $n$ -е каноническое уравнение, которое выражает отсутствие взаимного угла поворота сечений в эквивалентной системе на  $N$ -ой опоре. Так как при действии опорного момента  $M_n$  деформируется только  $n$ -й и  $(n + 1)$ -й пролеты балки, то все перемещения за исключением

$\delta_{n,n-1}$ ,  $\delta_{n,n}$  и  $\delta_{n,n+1}$  будут равны нулю. Поэтому в  $n$ -е каноническое уравнение войдут только три неизвестных опорных момента  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  и  $M_{n+1}$ , т.е.

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{np} = 0$$

Для перемещений  $\delta_{ni}$  и  $\Delta_{np}$  построим эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия единичных лишних неизвестных и внешней нагрузки (рис.16.2в,г,д,е). Обозначим через  $\omega_n$  и  $\omega_{n+1}$  площади эпюры  $M_p$  соответственно в  $n$ -ом и  $(n+1)$ -ом пролетах. Расстояния от центров тяжести этих площадей соответственно до левой и правой опор обозначим через  $a_n$  и  $b_{n+1}$ .

Перемножая соответствующие эпюры между собой по Верещагину, получим:

$$\delta_{n,n-1} = \overline{M}_n \overline{M}_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \frac{1}{3} \frac{1}{EJ} = \frac{l_n}{6EJ};$$

$$\delta_{n,n} = \overline{M}_n \overline{M}_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_n \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} = \frac{1}{3EJ} (l_n + l_{n+1});$$

$$\delta_{n,n+1} = \overline{M}_n \overline{M}_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{n+1} \frac{1}{3} \frac{1}{EJ} = \frac{l_{n+1}}{6EJ};$$

$$\Delta_{n,n} = \overline{M}_n \overline{M}_p = \frac{1}{EJ} (\omega_n y_n + \omega_{n+1} y_{n+1}) = \frac{1}{EJ} \left( \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Выясним смысл слагаемых правой части. Для этого рассмотрим  $n$ -й пролет балки, загруженной фиктивной сосредоточенной силой  $P_\phi = \omega_n$  (рис.16.2ж).

От ее действия на опорах возникают реакции  $R_{n-1,n}^\phi$  и  $R_{n,n}^\phi$ , которые называются фиктивными.

Из условия равновесия  $\sum M_{n-1} = \omega_n a_n - R_{n,n}^\phi l_n = 0$ . Находим

$$R_{n,n}^\phi = \omega_n \frac{a_n}{l_n}.$$

Очевидно, что  $\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} = R_{n,n}^\phi$ .

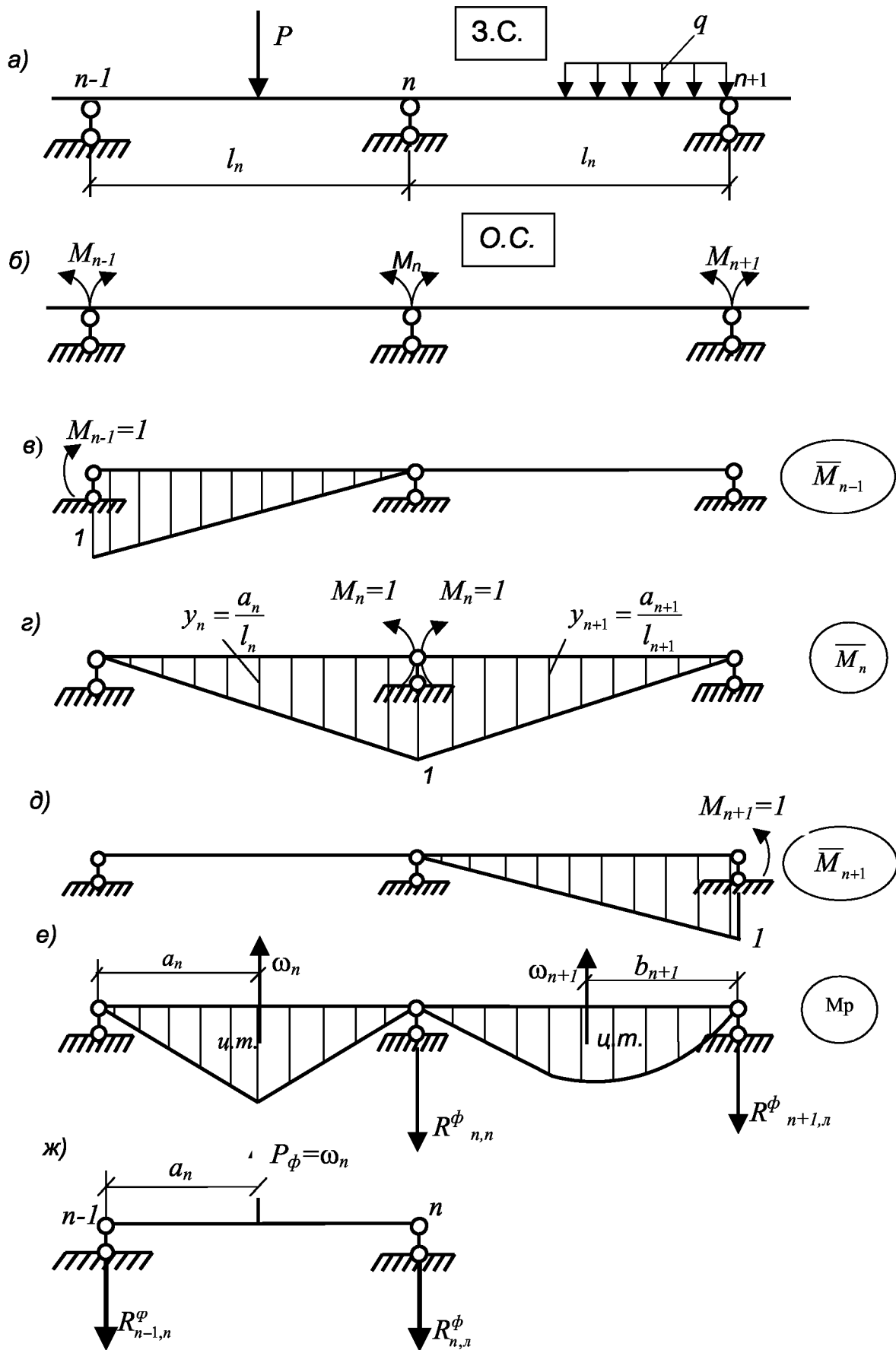


Рис.16.2

Учитывая это перемещение  $\Delta_{np}$  можно записать в виде:

$$\Delta_{np} = \frac{1}{EJ} (R_{n,l}^{\phi} + R_{n,n}^{\phi}).$$

Подставляя перемещения  $\delta_{ni}$  и  $\Delta_{np}$  в каноническое уравнение, получим:

$$\frac{l_n}{6EJ} M_{n-1} + \frac{1}{3EJ} (l_n + l_{n+1}) M_n + \frac{l_{n+1}}{6EJ} M_{n+1} + \frac{1}{EJ} (R_{n,l}^{\phi} + R_{n,n}^{\phi}) = 0.$$

Если умножить все уравнение на  $6EJ$  и перенести свободные члены в правую часть, то получим:

$$l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) M_n + l_{n+1} M_{n+1} = -6(R_{n,l}^{\phi} + R_{n,n}^{\phi})$$

Это уравнение связывает три опорных момента двух смежных пролетов балки (рис.16.3) и поэтому называется *уровнем трех моментов*.

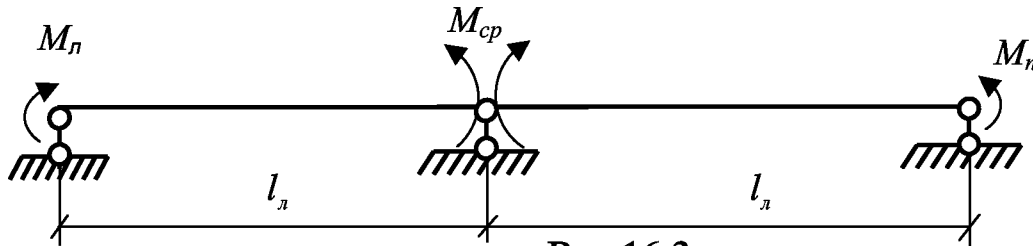


Рис.16.3

Для лучшего запоминания его часто записывают в виде:

$$l_l M_l + 2(l_l + l_n) M_{cp} + l_n M_n = -6(R_{cp,l}^{\phi} + R_{cp,n}^{\phi})$$

где  $R_{cp,l}^{\phi}$  и  $R_{cp,n}^{\phi}$  - фиктивные опорные реакции на средней опоре от нагрузки соответственно левого и правого пролетов. Они считаются положительными, если направлены вниз, т.е. от положительной эпюры моментов  $M_p$  фиктивные реакции тоже будут положительными.

Таких уравнений надо составить столько, сколько раз статически неопределима балка, последовательно принимая за среднее те опоры, над которыми ставились шарниры при выборе основной системы. В каждое из таких уравнений входит не более 3-х неизвестных опорных моментов, а в первое и последнее уравнения - только по два неизвестных момента.

Если левый или правый конец балки защемлен, то для удобства составления уравнений 3-х моментов защемление заменяют дополнительным пролетом нулевой длины.

Решение системы уравнений 3-х моментов можно легко выполнить методом исключения неизвестных и приступить затем к построению суммарных эпюр  $M$  и  $Q$ .

### 16.3 Способы построения суммарных эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

После определения опорных моментов для построения суммарных эпюр  $M$  и  $Q$  можно воспользоваться эквивалентной системой. Так как она состоит из ряда простых балок, нагруженных внешней нагрузкой и известными опорными моментами, то рассматривая каждую простую балку отдельно, можно легко определить реакции и поставить эпюры  $M$  и  $Q$ . Если при этом для каждой простой балки эпюры построены от одной базовой линии и в одном и том же масштабе, то полученные эпюры будут являться суммарными эпюрами  $M$  и  $Q$  для неразрезной балки.

Например, построим суммарные эпюры  $M$  и  $Q$  для изображенной ниже неразрезной балки (рис.16.4а) при известных опорных моментах  $M_1 = -a$ ,  $M_2 = -b$ .

Отдельные простые балки эквивалентной системы приведены на рис.16.4б. Определив опорные реакции  $R_0$ ,  $R_{1,l}$ ,  $R_{1,n}$ ,  $R_{2,l}$ ,  $R_{2,n}$  и  $R_3$  из условий равновесия каждой простой балочки, можно легко построить эпюры  $M$  и  $Q$  (рис.16.4в,г).

Суммарные опорные реакции на промежуточных опорах определяются по формуле

$$R_n = R_{n,l} + R_{n,n}$$

- формула для определения опорных реакций.

В расчетной практике при расчете многократно статически неопределимых балок часто используется иной способ построения суммарных эпюр  $M$  и  $Q$ .

На основании принципа независимости действия сил суммарный изгибающий момент в любом сечении неразрезной балки можно вычислить по формуле:

$$M = \bar{M}_1 M_1 + \bar{M}_2 M_2 + \dots + \bar{M}_n M_n + M_p.$$

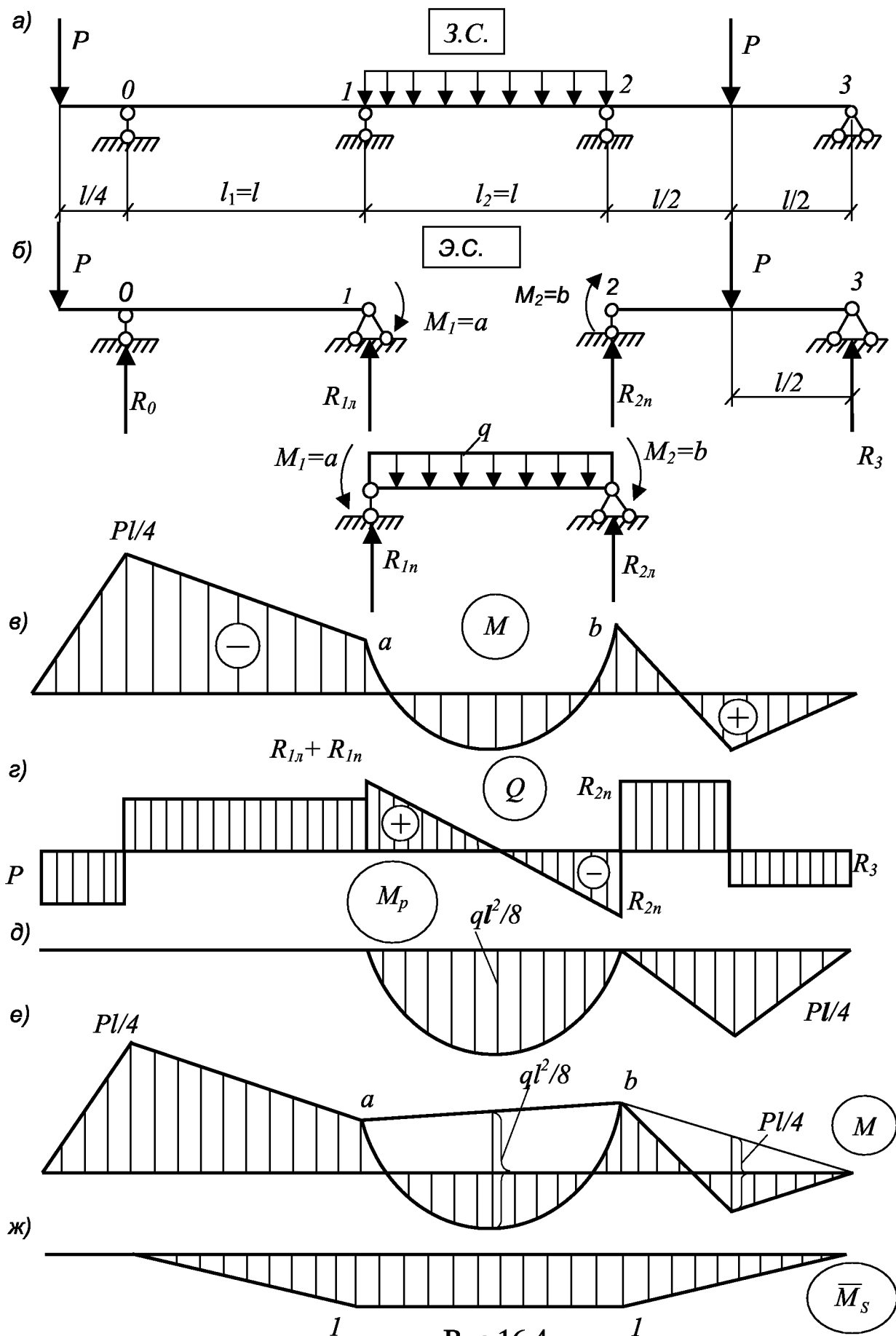


Рис.16.4

Из этой формулы следует, что для построения суммарной эпюры изгибающих моментов необходимо построить в основной системе эпюру изгибающих моментов от действия только опорных моментов и сложить ее с эпюрой  $M_p$ . Построим для примера суммарную эпюру изгибающих моментов этим способом для рассмотренной выше неразрезной балки (рис.16.4а).

Так как эпюра  $M_p$ , необходимая для вычисления фиксированных опорных реакций, уже построена (рис.16.4д) и известны опорные моменты  $M_1 = -a$ ,  $M_2 = -b$ ,  $M_0 = -\frac{Pl}{4}$ , то можно легко построить эпюру изгибающих моментов от действия только опорных моментов и сложить ее с эпюрой  $M_p$  в каждом пролете. Сложение выполнено на чертеже (рис.16.4).

После построения суммарной эпюры изгибающих моментов поперечные силы в сечениях балки можно определить по известной формуле для определения поперечных сил:

$$Q = Q_0 + \frac{M_n - M_x}{l}$$

и построить суммарную эпюру поперечных сил.

При известных поперечных силах суммарные опорные реакции можно определить из условий равновесия каждой опоры. Например, рассмотрим равновесие  $n$ -й опоры балки (рис.16.5)

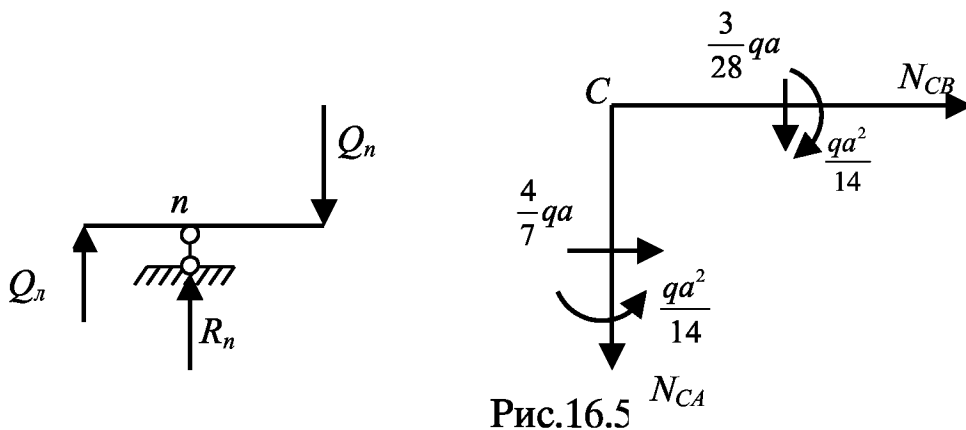


Рис.16.5

$$\sum Y = Q_n + R_n - Q_n = 0$$

Из этого уравнения находим:

$$R_n = Q_n - Q_l$$

- формула для определения опорных реакций.



Контроль правильности расчета неразрезных балок выполняется точно так же, как любой другой статически неопределимой системы. В расчетной практике при выполнении статических проверок обычно ограничиваются проверкой равновесия всей балки, а при выполнении деформативных - умножением по Верещагину суммарной эпюры изгибающих моментов  $M$  на суммарную эпюру изгибающих моментов в основной системе  $\bar{M}_s$  (рис.16.4ж) от действия единичных опорных моментов, т.е.

$$M \cdot \bar{M}_s = 0$$

- деформативная проверка.

### 16.4 Порядок расчета неразрезных балок

Проиллюстрируем порядок расчета неразрезных балок на конкретном примере. Выполним расчет изображенной ниже неразрезной балки (рис.16.6а)

Расчет выполняется в следующем порядке:

1. Определить степень статической неопределимости и изобразить рациональную основную систему (рис.16.6б).
2. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов  $M_p$  от нагрузки каждого пролета (рис.16.6в).
3. Определить фиктивные опорные реакции (рис.16.6в).

$$R_{1n}^{\phi} = R_{1l}^{\phi} = \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{Pl^2}{16}, \quad R_{2n}^{\phi} = R_{3n}^{\phi} = 0, \quad R_{3n}^{\phi} = R_{4l}^{\phi} = \frac{1}{2}\omega_3 = \frac{Pl^2}{12}$$

4. Составить уравнение 3-х моментов.

$$\begin{aligned} 0 + 2M_1(0+l) + IM_2 &= -6(R_{1,n}^{\phi} + R_{1,l}^{\phi}) - \text{для опоры N1,} \\ IM_1 + 2M_2(l+l) + IM_3 &= -6(R_{2,n}^{\phi} + R_{2,l}^{\phi}) - \text{для опоры N2,} \\ IM_2 + 2M_3(l+l) + IM_4 &= -6(R_{3,n}^{\phi} + R_{3,l}^{\phi}) - \text{для опоры N3,} \end{aligned}$$

5. Решить систему уравнения подставляя в уравнения 3-х моментов

фиктивные реакции и опорный момент  $M_4 = -\frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{ql^2}{8} = -\frac{Pl}{4}$ , получим:

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}Pl \\ M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}Pl \\ M_2 + 4M_3 = -\frac{Pl}{4} \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений методом исключений, находим:

$$M_1 = -0,168Pl, M_2 = -0,038P, M = -0,053Pl, M_3 = -0,25Pl$$

6. Построить суммарную эпюру изгибающего момента  $M$ . Это выполнено на рис.16.6г.

7. Построить суммарную эпюру  $Q$  по формуле

$$Q = Q_0 + \frac{M_n - M_l}{l}$$

$$Q_{12} = \frac{0.147Pl - (-0.168Pl)}{l/2} = 0.63P,$$

$$Q_{21} = \frac{-0.038Pl - (-0.147Pl)}{l/2} = -0.37P,$$

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{-0.053Pl - (-0.038Pl)}{l} = -0.015P,$$

$$Q_{34} = \frac{ql}{2} + \frac{-0.25Pl - (-0.053Pl)}{l} = 0.8P,$$

$$Q_{43} = \frac{ql}{2} - \frac{-0.25Pl - (-0.053Pl)}{l} = -1.2P,$$

$$Q_{34} = \frac{ql}{2} = P, \quad Q_{45} = 0.$$

Эпюра поперечных сил приведена на рис.16.6д.

8. Определить опорные реакции по формуле

$$R_n = Q_n - Q_l.$$

$$R_1 = 0.63P, \quad R_2 = -0.015P - (-0.37P) \approx 0.35P,$$

$$R_3 = 0.8P - (-0.015P) \approx 0.80P, \quad R_4 = P - (-1.2P) = 2.2P$$

9. Выполнить статическую проверку (рис.16.6е)

$$\sum Y_y = (0.63 + 0.35 + 0.82 + 2.2)P - P - 1.5l \frac{2P}{l} = -4P + 4P = 0$$

10. Выполнить деформативную проверку по формуле

$$M \cdot \bar{M}_s = 0$$

Эпюра  $\bar{M}_s$  приведена на рис.16.6ж.

11. Выполнить расчет балки на прочность и жесткость.

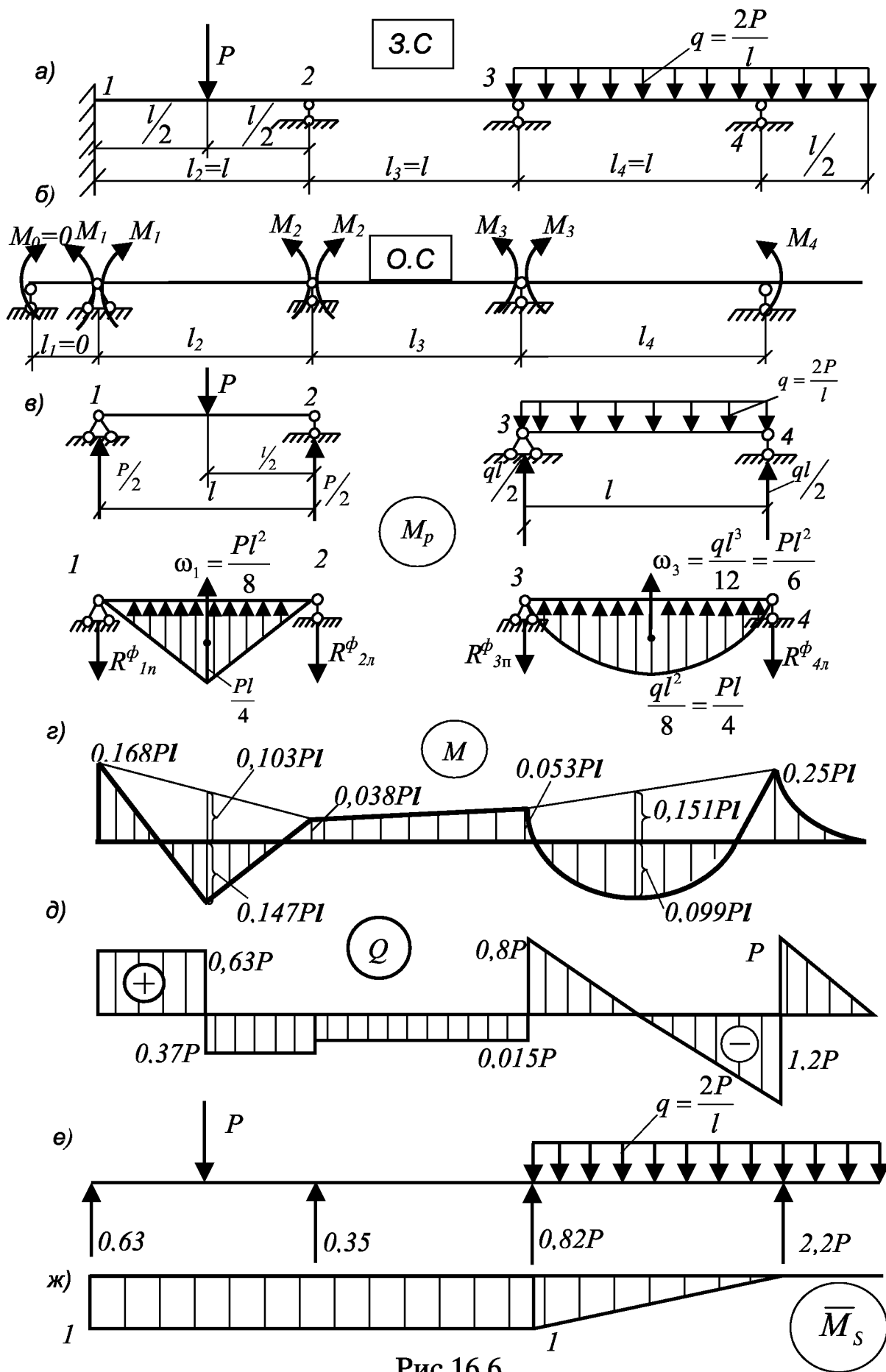


Рис.16.6

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ

17.1 Понятие о кривом стержне

В машиностроении часто встречаются элементы, осями которых являются плоские кривые линии. Такие элементы называются плоскими кривыми стержнями или брусьями. К ним относятся крюки, кольца, обода различных колес, арки, звенья цепей и т.д. (рис.17.1).

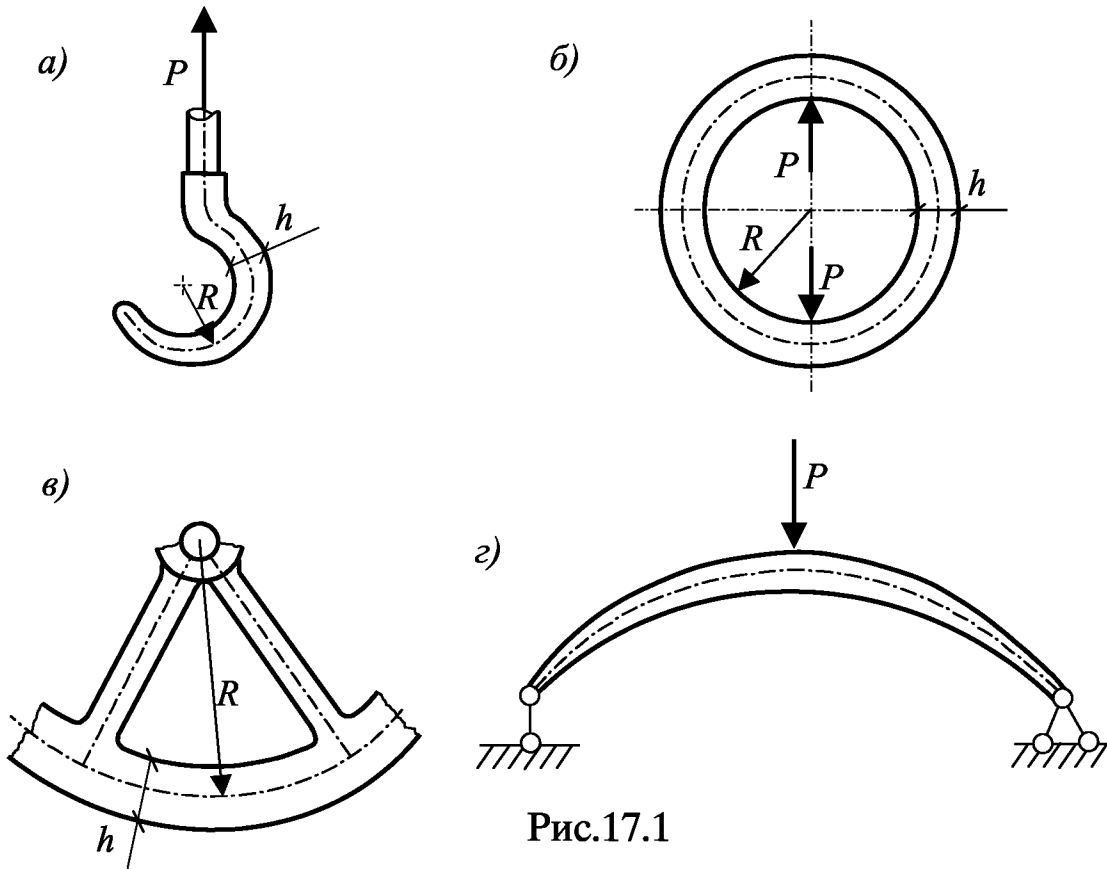


Рис.17.1

Основными параметрами кривого стержня являются:  $R$  - радиус кривизны оси и  $h$  - высота поперечного сечения.

Исследования показывают, что при изгибе характер распределения напряжений по высоте сечения кривого стержня определяется отношением  $h/R$ .

Если  $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ , то напряженное состояние кривого стержня практически ничем не будет отличаться от напряженного состояния прямого стержня. Такие кривые стержни  $\left(\frac{h}{R} < \frac{1}{5}\right)$  условно относятся к стержням

малой кривизны. Они рассчитываются на прочность по тем же формулам, что и прямые стержни  $\left( \sigma = \frac{My}{J}, \tau = \frac{aS}{bJ} \right)$ .

При  $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$  - напряжения в кривом стержне от изгиба будут существенно отличаться от напряжений в прямом стержне. Такие кривые стержни  $\left( \frac{h}{R} > \frac{1}{5} \right)$  условно относятся к стержням большой кривизны и рассчитываются на прочность по специальным формулам. Поэтому под кривыми стержнями обычно понимают только те стержни, у которых  $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$

### 17.2 Чистый плоский изгиб кривого стержня

Рассмотрим плоский кривой стержень изгибаемый моментами  $M$ , действующими в его плоскости (рис.17.2а). Предположим, что поперечное сечение имеет ось симметрии  $y_c O_1$ , расположенную тоже в плоскости кривизны стержня (рис.17.2б).

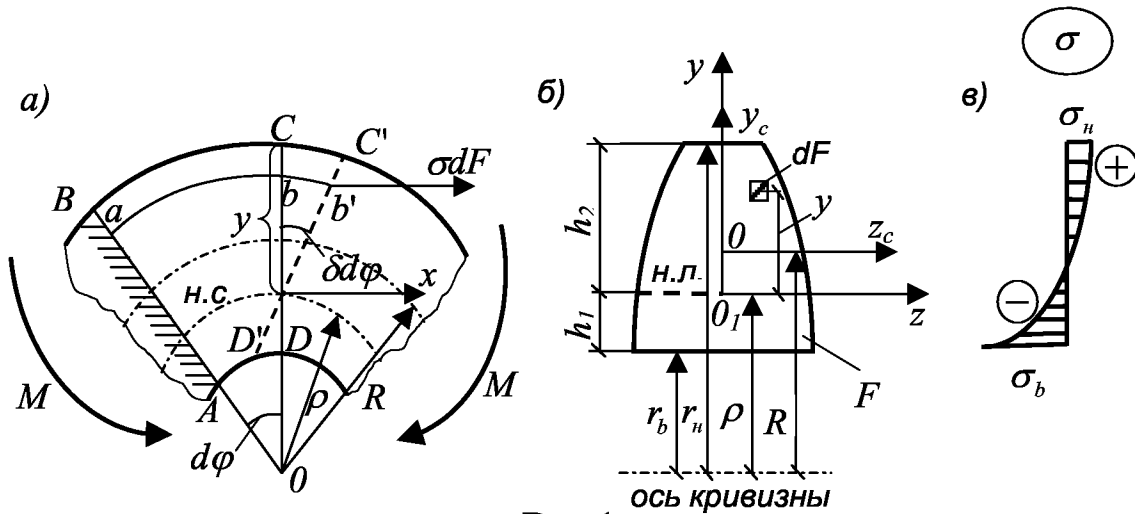


Рис.17.2

Пусть  $z_c O_1 y_c$  - главные центральные оси поперечного сечения.  $R$  - радиус кривизны стержня,  $r_b$  и  $r_n$  - соответственно радиусы внутренних и наружных волокон.

Рассмотрим деформации элемента  $ABCD$ . Как и в случае прямых стержней используем гипотезу плоских сечений. Правое сечение  $CD$  повернется относительно левого  $AB$  на некоторый угол  $\Delta(\alpha\phi)$  и займет положение  $C'D'$ . Совокупность волокон не изменивших своей длины

образует нейтральный слой. Обозначим радиус кривизны нейтрального слоя через  $\rho$  и предположим, что он не проходит через центр тяжести сечения. Поэтому нейтральная линия  $O_1z$  не совпадает с главной центральной осью инерции сечения  $Oz_c$ .

Определим относительное удлинение некоторого волокна в  $ab = (\rho + y)d\varphi$ , расположенного на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя.

Абсолютное удлинение этого волокна равно

$bb' = y\Delta(d\varphi)$ , поэтому  $E_{ab} = \frac{bb'}{ab} = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(\rho + y)d\varphi} = \frac{y}{\rho + y} = \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}$  - относительное

удлинение волокна  $ab$ .

Используя закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$  - получим

$$\sigma = \frac{y}{\rho + y} E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}$$

Далее рассмотрим равновесие левой части стержня  $\sum_{лев} P_x = \int_F \sigma dF = 0$ . Подставляя в это условие равновесия выражение для  $\sigma$ , получим

$E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{\rho + y} = 0$ , но  $E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0$ , поэтому  $\int_F \frac{y dF}{\rho + y} = 0 \Rightarrow \int_F \frac{(y + \rho - \rho) dF}{\rho + y} = \int_F dF - \rho \int_F \frac{dF}{\rho + y} = 0$ . Отсюда находим формулу для определения радиуса кривизны нейтрального слоя

$$\rho = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho + y}}$$

Здесь  $F$  - площадь поперечного сечения,  $\rho + y$  - известное расстояние от центра кривизны стержня до текущего волокна.

Составим еще одно условие равновесия левой части стержня

$$\sum_{лев} M_z = \int_F y \sigma dF - M = 0 \Rightarrow E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{\rho + y} = M.$$

Преобразуем подынтегральную функцию, т.е. добавим и вычтем  $\rho y$

$$E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{[(\rho + y)y - \rho y] dF}{\rho + y} = M \text{ или } E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \left( \int_F y dF + \int_F \frac{y dF}{\rho + y} \right) = M$$

поэтому  $E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{S}$ . Подставляя это выражение в формулу для напряжений, получим формулу для определения напряжений в кривом стержне при чистом изгибе

$$\sigma = \frac{My}{S(\rho + y)},$$

где  $M$  - изгибающий момент ( $M > 0$ , если он увеличивает кривизну),  
 $y$  - расстояние от нейтрального слоя до рассматриваемых волокон,  
 $\rho$  - радиус кривизны нейтрального слоя,  
 $S = F(R - \rho)$  - статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной линии.

$\lim_{\rho \rightarrow 0} S(\rho + y) = J$ , поэтому  $\sigma = \frac{My}{J}$ , т.е. переходит в формулу для определения напряжений в прямом стержне.

### 17.3 Расчет кривых стержней на прочность

Исследуем распределение нормальных напряжений по высоте сечения в плоском кривом стержне

$$\sigma = \frac{My}{S(\rho + y)} = \frac{M}{S} \frac{[(y + \rho) - \rho]}{\rho + y} = \frac{M}{S} \left(1 - \frac{\rho}{\rho + y}\right) = \frac{M}{S} \left(1 - \frac{\rho}{u}\right) = f(u)$$

- гипербола, т.к.  $\frac{M}{S} = const$  и  $\rho = const$ .

Следовательно, нормальные напряжения распределяются по высоте сечения кривого стержня по гиперболическому закону.

$$\sigma|_{y=0} = 0 \text{ на п.л. } \sigma|_{y=r-\rho} = \frac{M(r_n - \rho)}{S(\rho + r - \rho)} = \frac{Mh_2}{Sr_n},$$

$$\sigma_b = \sigma|_{y=-(\rho-r_b)} = -\frac{M(\rho - r_n)}{S(\rho - \rho + r_b)} = -\frac{Mh_1}{Sr_b},$$

где  $h_1$  и  $h_2$  - расстояние от нейтральной линии до крайних внутренних и наружных волокон соответственно.

Так как  $h_1 < h_2$ , а  $r_b \ll r_n$ , то  $|\sigma_b| > |\sigma_n|$  т.е. большие по абсолютной величине напряжения всегда действуют в кривом стержне на внутренней поверхности (рис.17.2в), поэтому условие прочности кривого стержня выражается формулой

$$|\sigma_b| \leq [\sigma].$$

В крайних наружных волокнах  $|\sigma_n| \leq [\sigma]$ , поэтому здесь при симметричных поперечных сечениях (рис.17.3а) материал используется

не эффективно. Как добиться эффективной работы материала во всем сечении кривого стержня?

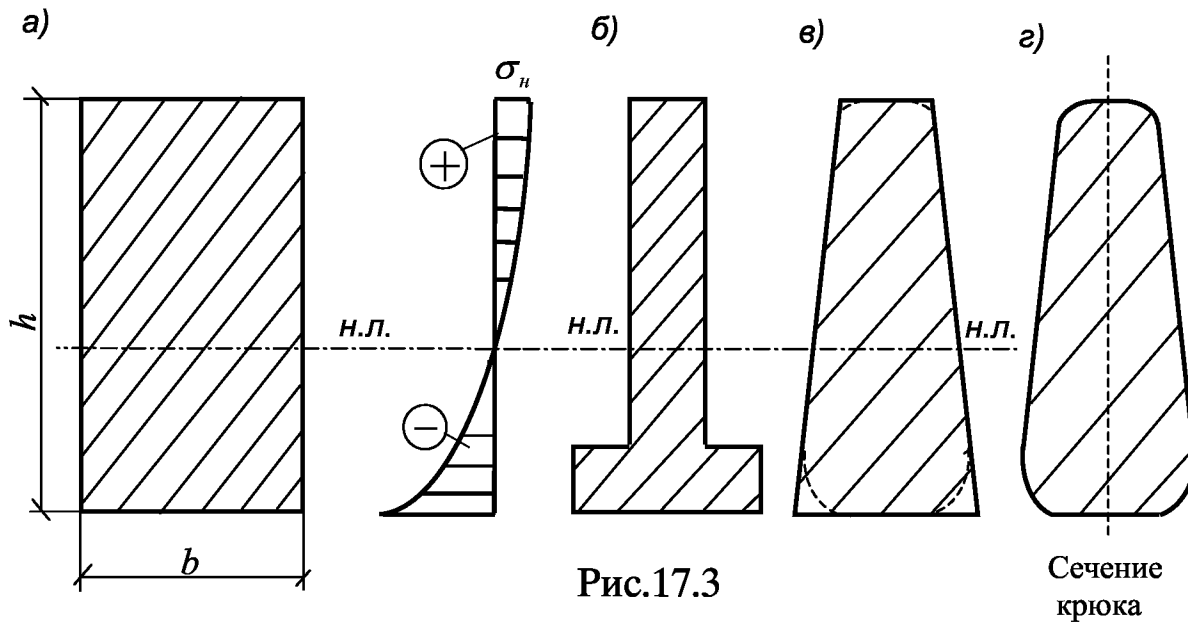


Рис.17.3

Очевидно, надо сделать так, чтобы в этой части сечения было как можно меньше материала, т.е. надо использовать несимметричные поперечные сечения, например, тавровое сечение (рис.17.3б) является наиболее рациональным для кривого стержня. Но такое сечение легко отлить, а отковать трудно, поэтому для элементов изготовленных путемковки используют трапециевидное сечение (рис.17.3в). Для того, чтобы уменьшить концентрацию напряжений в углах их округляют. В результате получают сечения, приведенные на рис.17.3г. Такое сечение является рациональным для кривых стержней изготовленных путемковки. Именно такое сечение имеют крюки различных подъемников, кранов и машин.

Если в основном сечении кривого стержня действуют изгибающий момент  $M$  и продольная сила  $N$ , то для определения напряжений по принципу наложения надо воспользоваться формулой

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{My}{S(\rho + y)}$$

В случае хрупкого материала для обеспечения прочности кривого стержня необходимо потребовать, чтобы напряжения в крайних волокнах  $|\sigma_b|$  и  $|\sigma_n|$  не превышали допускаемых на сжатие  $[\sigma_-]$  и на растяжение  $[\sigma_+]$ .



### 17.4 Определение радиуса кривизны нейтрального слоя

Для расчета кривого стержня на прочность необходимо, прежде всего, знать радиус кривизны нейтрального слоя  $\rho$ . Определим его для наиболее часто встречающихся в практике сечений:

а) *прямоугольного* (рис.17.4)

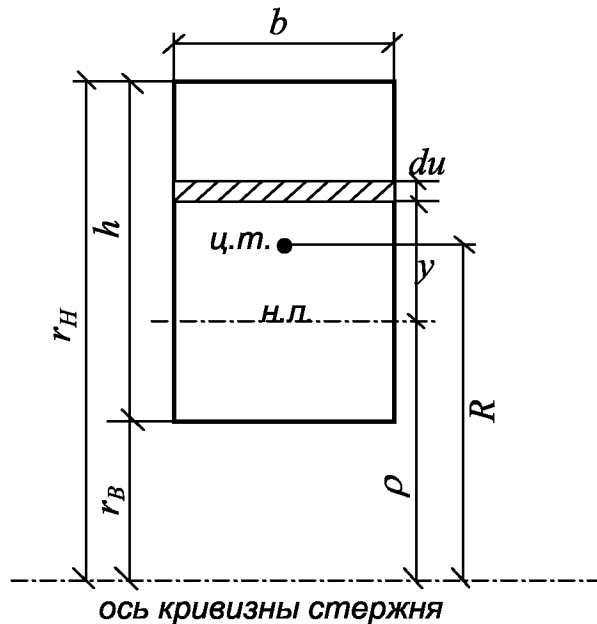


Рис.17.4

$P = \frac{F}{\int_F \rho + y}$  Так как  $F = bh$ , а  $\rho + y = u$  - известно, то  $dF = bdu$ , поэтому

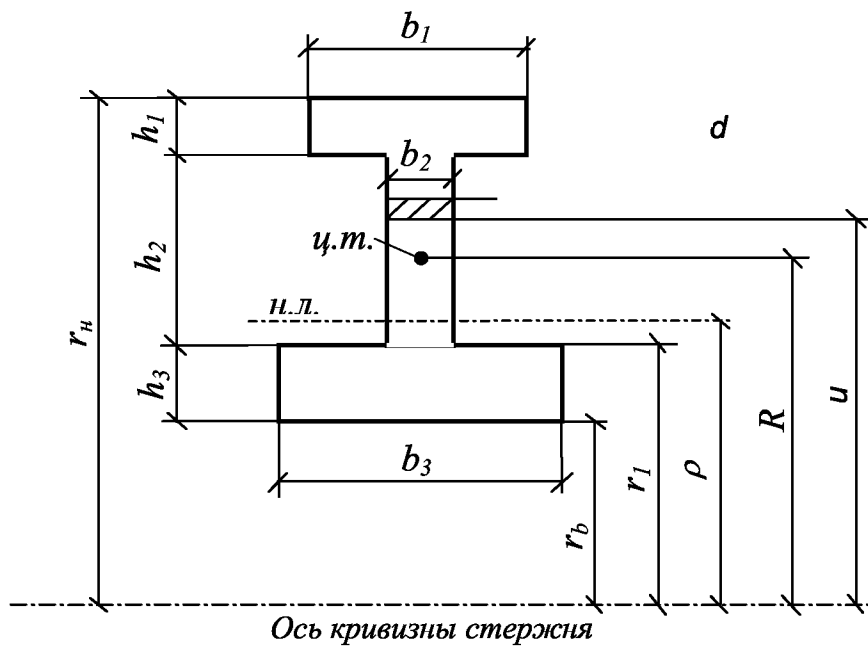
$$\int_F \frac{dF}{\rho + y} = b \int_{r_b}^{r_n} \frac{du}{u} = b \ln u \Big|_{r_b}^{r_n} = b \ln \frac{r_n}{r_b} \text{ и } \rho = \frac{bh}{b \ln \frac{r_n}{r_b}},$$

т.е.  $\rho = \frac{h}{\ln \frac{r_n}{r_b}}$  - формула для определения радиуса кривизны нейтрального слоя стержня прямоугольного сечения.

Если разложить  $\ln \frac{r_n}{r_b}$  - в ряд и удержать два члена разложения, то получим приближенную формулу для определения радиуса кривизны нейтрального слоя стержня прямоугольного сечения

$$\rho = R \left( 1 - \frac{h^2}{12R^2} \right).$$

б) *двутаверового* (рис.17.5)



В этом случае интегрирование выполняется также просто, как и для прямоугольного сечения. После выполнения его получим

$$\rho = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{r_H}{r_2} + b_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_3 \ln \frac{r_1}{r_b}}$$

Полагая в этой формуле  $b_1 = h_1 = 0$  или  $b_3 = h_3 = 0$ , получим радиус кривизны нейтрального слоя для таврового сечения.

в) *трапецидального* (рис.17.6)

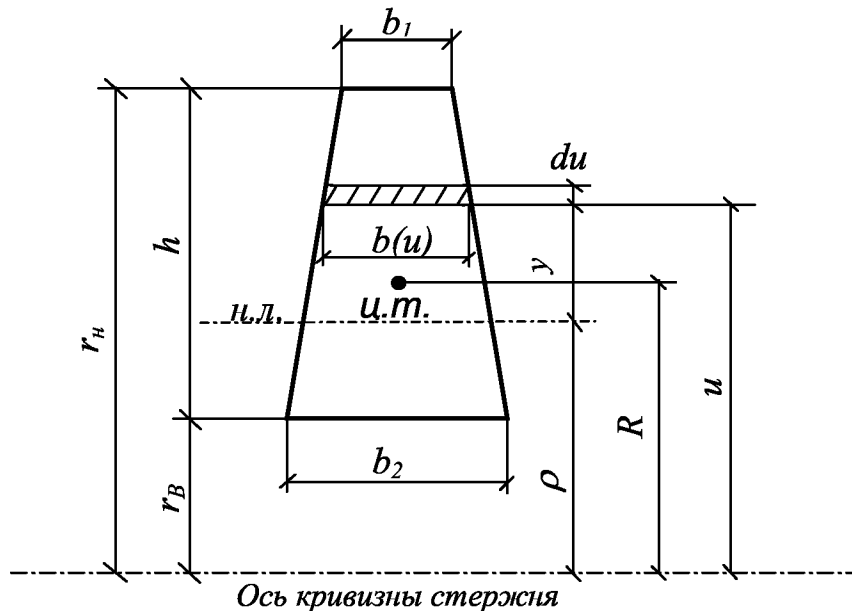


Рис.17.6

Имеем  $F = \frac{b_1 + b_2}{2} h$ ,  $\rho + y = u$ ,  $b(u) = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{r_u}{h}$ ,  $dF = b(u) du$ . Тогда

$$\int_F \frac{dF}{\rho + y} = \int_{r_b}^{r_u} \frac{du}{u} = \int_{r_b}^{r_u} \left[ b_1 + (b_2 - b_1) \frac{r_u}{h} \right] \frac{du}{u} = \left[ b_1 + (b_2 - b_1) \frac{r_u}{h} \right] \ln u \Big|_{r_b}^{r_u} - \frac{b_2 - b_1}{h} u \Big|_{r_b}^{r_u} =$$

$$= \left[ b_1 + (b_2 - b_1) \frac{r_u}{h} \right] \ln \frac{r_u}{r_b} - (b_2 - b_1)$$

и формула для определения радиуса кривизны нейтрального слоя приводится к виду

$$\rho = \frac{(b_1 + b_2)h}{2 \left[ b_1 + r_u \frac{b_2 - b_1}{h} \right] \ln \frac{r_u}{r_b} - (b_2 - b_1)}$$

Если в этой формуле  $b_1 = 0$ , то получим формулу для определения  $\rho$  для треугольного поперечного сечения. Для других сечений формула для  $\rho$  приводится в справочниках.

### 17.5 Определение перемещений плоских кривых стержней

В стержнях малой кривизны при определении перемещений можно пренебречь влиянием продольных и поперечных сил и пользоваться одночленной формулой Мора

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_k M_p dS}{EJ}$$

В случае плоского изгиба стержня большой кривизны при определении перемещений необходимо учитывать кривизну и совместное действие  $M$  и  $N$ . Сделаем это. Определим деформации элемента кривого стержня длиной  $dS$  (рис.17.7) при совместном действии  $M_p$  и  $N_p$ . Ими являются:  $d\theta$  - взаимный угол поворота сечений  $mn$  и  $m'n'$  и  $\Delta(dS)$  - абсолютное удлинение осевого волокна. Определим их

а) от действия  $M_p$  (рис.17.7а)

$$d\theta_1 = \Delta(d\varphi), \text{ но } E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M_p}{S}, \text{ поэтому } \Delta(d\varphi) = d\theta_1 = \frac{M_p d\varphi}{ES}, \text{ но } d\varphi = \frac{dS}{R},$$

$$\text{поэтому } d\theta_1 = \frac{M_p d\varphi}{ESR}, \Delta(dS)_1 = O_2 O_2' = d\theta_1 (R - \rho) = \frac{M_p dS}{ESR} (R - \rho) = \frac{M_p dS}{ESR},$$

(т.к.  $S = F(R - \rho)$ ).

б) от действия  $N_p$  (рис.17.7б)

$$d\theta_2 = \frac{N_p dS}{EFR}, \text{ а } \Delta(dS)_2 = \frac{N_p dS}{EF}.$$

в) от совместного действия  $M_p$  и  $N_p$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{M_p dS}{EFR} + \frac{N_p dS}{EF}.$$

Подставляя в формулу Максвелла-Мора вместо  $\Delta S_{(M_p)} = d\theta$ , а вместо  $\Delta dS_{(M_p)} = \Delta(dS)$ , получим

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{M}_k \left( \frac{M_p}{ESR} + \frac{N_p}{EFR} \right) dS + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{N}_k \left( \frac{M_p}{EFR} + \frac{N_p}{EF} \right) dS$$

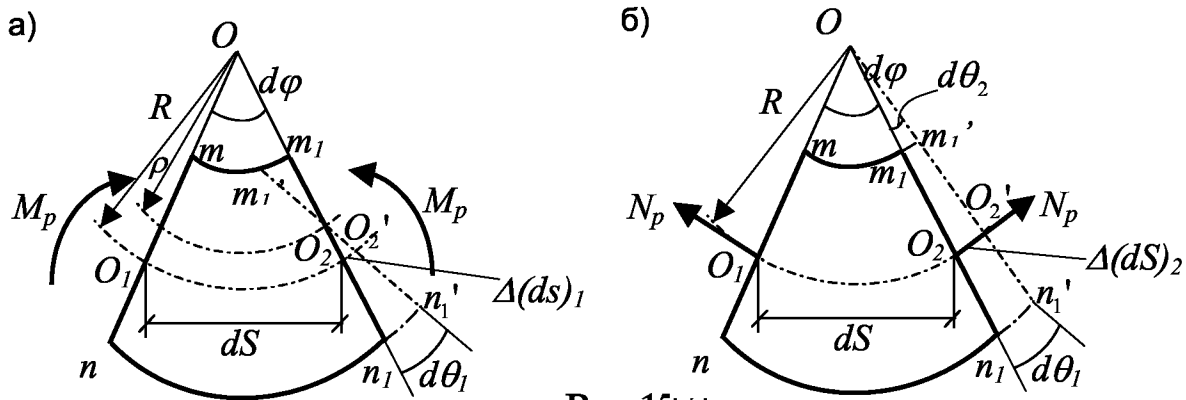


Рис.17.1

После группировки получим формулу для определения перемещения стержней большой кривизны

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left( \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} + \frac{\bar{N}_k M_p + \bar{M}_k N_p}{EFR} + \frac{\bar{M}_k M_p}{ESR} \right) dS$$

Здесь  $N_k$ ,  $M_k$  и  $N_p$ ,  $M_p$  - функции продольной силы и изгибающего момента на участке  $l_i$  соответственно от действия единичной обобщенной силы и внешней нагрузки;

$S = F(R - \rho)$  - статический момент площади поперечного сечения стержня относительно нейтральной линии.

Влиянием поперечных сил на перемещение в стержнях большой кривизны обычно не учитывается из-за малости.

## ГЛАВА 18

### СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Многие элементы конструкций кроме простых деформаций (растяжения, сжатия, изгиба, сдвига и кручения) испытывают более сложные, которые представляют собой различные сочетания простых деформаций. Например:

- 1) пространственный изгиб, косой изгиб;
- 2) изгиб с растяжением или сжатием;
- 3) внецентренное сжатие или растяжение;
- 4) изгиб с кручением и др.

Такие случаи сопротивления стержней называются *сложным сопротивлением*.

При сложной деформации в поперечных сечениях стержня возникает не одно, а несколько усилий. При расчетах жестких стержней на сложное сопротивление обычно исходят из принципа независимости действия сил. Он применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся сложные деформации.

#### 18.1 Пространственный изгиб

Пространственный изгиб вызывается внешними силами, расположенными в разных плоскостях, проходящих через ось балки (рис.18.1а). Изогнутая ось балки в этом случае является пространственной кривой.

Пространственный изгиб удобно приводить к изгибу в двух плоскостях. Для этого все нагрузки следует разложить на составляющие, лежащие в главных плоскостях  $xu$  и  $xz$ , где оси  $y$  и  $z$  главные оси инерции сечения (рис.18.1б). Вертикальные составляющие вызовут изгиб в вертикальной плоскости, а горизонтальные - в горизонтальной. В поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  и поперечные силы  $Q_z$ ,  $Q_y$ . Обычно действием поперечных сил пренебрегают и учитывают только изгибающие моменты.

Напряжения в любой точке поперечного сечения определяются как сумма нормальных напряжений, вызванных изгибом в обеих плоскостях

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{J_z} \pm \frac{M_y z}{J_y} \quad (18.1)$$

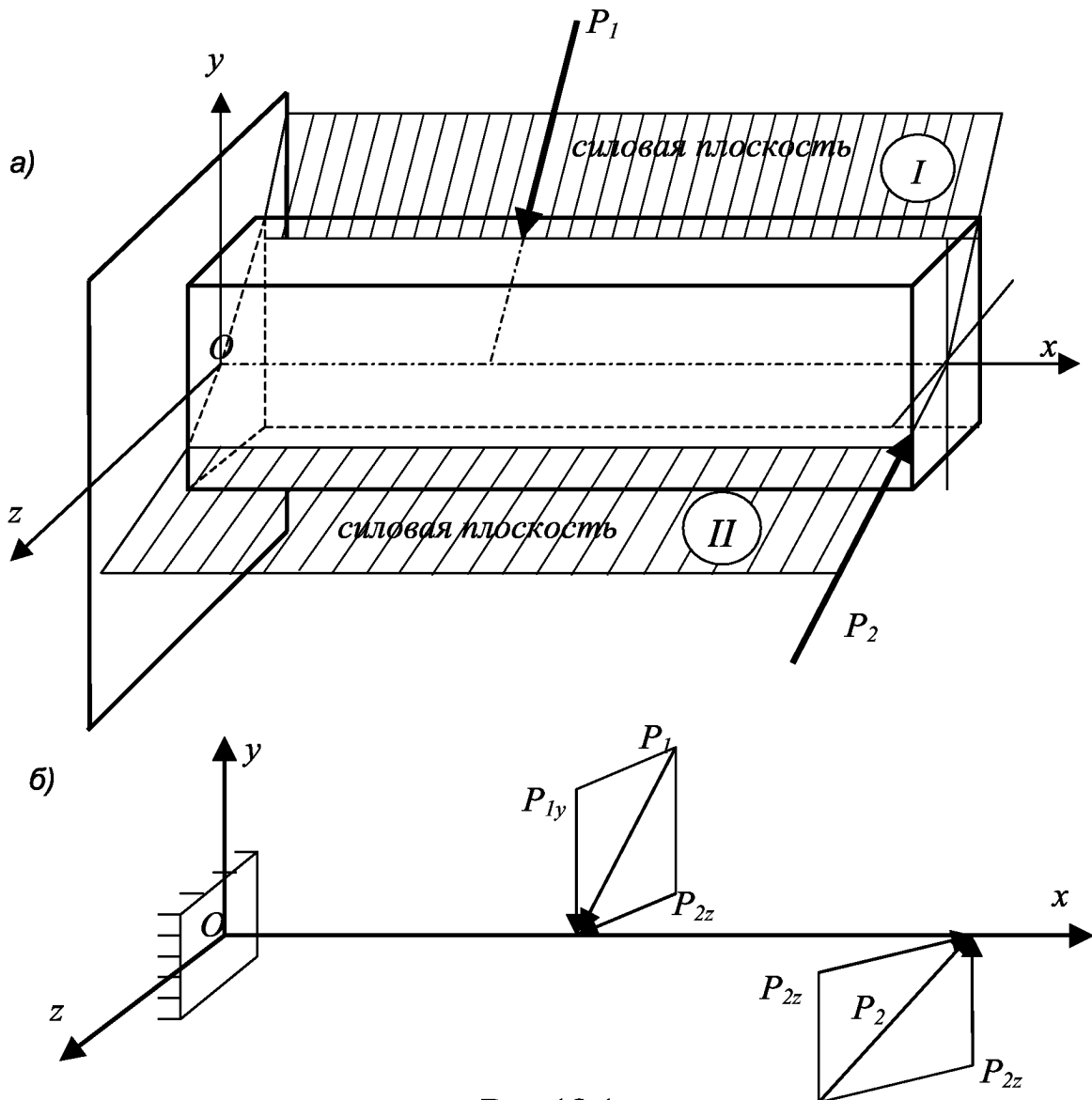


Рис.18.1

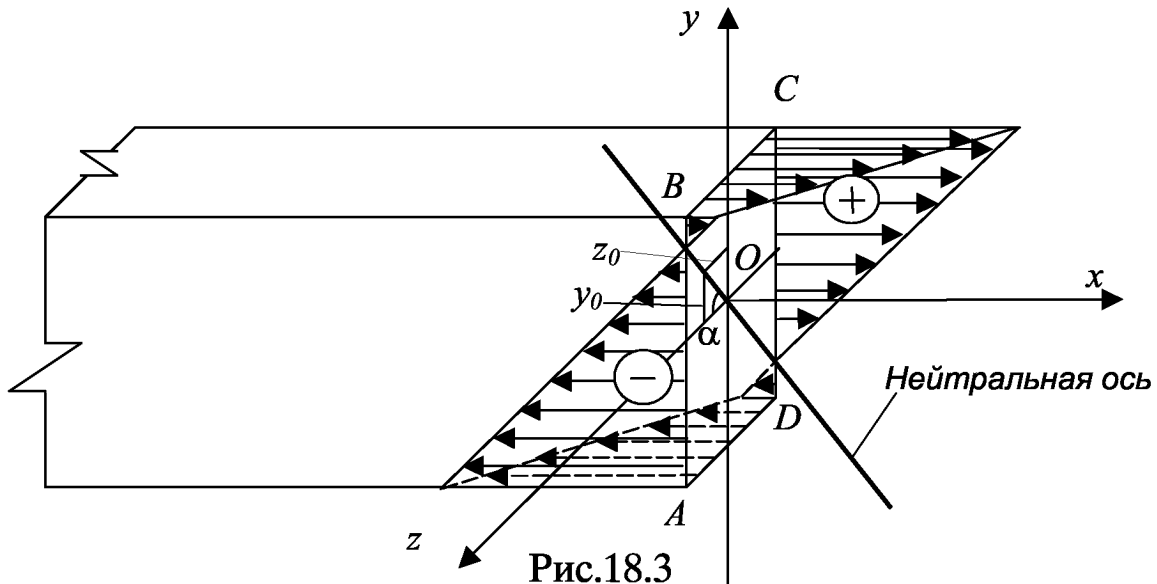
Знаки напряжений определяются изгибающими моментами и координатами точек сечения. Напряжения линейно зависят от координат точек сечения  $y$  и  $z$ . Эпюра напряжений ограничена плоскостью, которая с плоскостью поперечного сечения пересекается по прямой, напряжения в которой равны нулю. Эта прямая называется нейтральной осью (рис.18.2).

Уравнение нейтральной оси получим из уравнения (18.1), приравняв нормальные напряжения нулю. Координаты точек нейтральной оси обозначим  $Y_0$  и  $Z_0$ .

$$\frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0 \quad (18.2)$$

Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения, положение ее характеризуется углом наклона к оси  $Z$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{z_0} = \frac{M_y J_z}{M_z J_y} \quad (18.3)$$



Угол наклона нейтральной оси изменяется от сечения к сечению в зависимости от изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ .

Для подбора размеров поперечного сечения следует найти опасное сечение, в котором  $M_y$  и  $M_z$  одновременно достигают большого значения. таких сечений может быть несколько. Далее в опасном сечении надо найти опасные точки - это наиболее удаленные от нейтральной оси точки (точки A и C на рис.18.2), где  $Z$  и  $Y$  достигают максимального по абсолютной величине значения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} Y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} Z_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \quad (18.4)$$

Для сечений, симметричных относительно обеих главных осей, напряжения в крайних точках сечения определяется по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (18.5)$$

Условие прочности при пространственном изгибе имеет вид:

$$\boxed{\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]} \quad (18.6)$$

## 18.2 Косой изгиб

Косым называют такой изгиб, при котором все нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями.

В качестве примера рассмотрим балку, защемленную на одном конце и нагруженную на свободном конце силой  $P$  (рис.18.3).

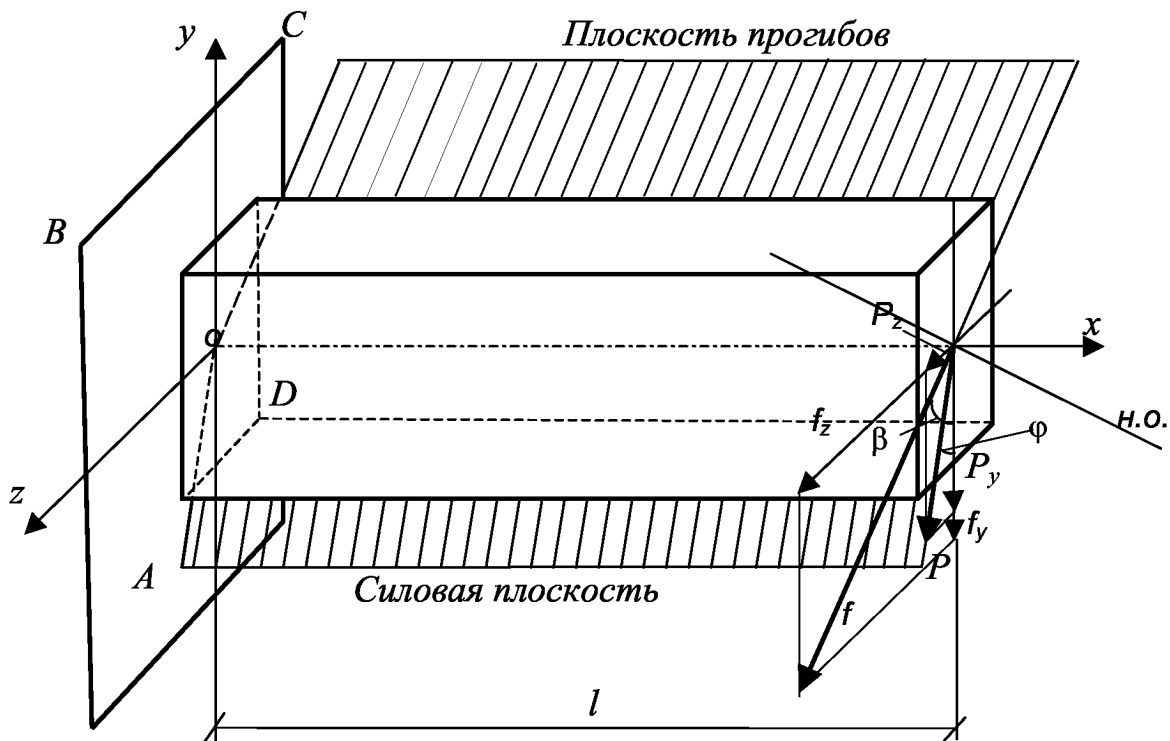


Рис.18.3

Сила  $P$  действует под углом  $\varphi$  к оси  $y$ . Разложим силу на составляющие, лежащие в главных плоскостях

$$P_y = P \cos \varphi$$

$$P_z = P \sin \varphi \quad (18.7)$$

Изгибающие моменты в произвольном сечении, взятом на расстоянии  $x$  от свободного конца, будут равны

$$M_y = P_z x = P_x \sin \varphi$$

$$M_z = P_y x = P_x \cos \varphi \quad (18.8)$$

таким образом, в каждом сечении одновременно действуют два изгибающих момента, которые создают изгиб в главных плоскостях. Поэтому кривой изгиб можно рассматривать как частный случай пространственного изгиба.

Напряжения в произвольной точке сечения определяются по зависимости (18.1). В опасном сечении (в защемлении) напряжения в угловых точках будут равны:



$$\begin{aligned}\sigma_A &= -\frac{P_y l}{W_z} - \frac{P_z l}{W_y}, \\ \sigma_B &= \frac{P_y l}{W_z} - \frac{P_z l}{W_y}, \\ \sigma_C &= \frac{P_y l}{W_z} + \frac{P_z l}{W_y}, \\ \sigma_D &= -\frac{P_y l}{W_z} + \frac{P_z l}{W_y}.\end{aligned}\tag{18.9}$$

Наибольшее растягивающее напряжение в точке С, а наибольшее сжимающее - в точке А. Для них и записывают условие прочности (18.6).

Положение нейтральной оси определим исходя из зависимостей (18.3) и (18.8).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y J_z}{M_z J_y} = \frac{\sin \varphi J_z}{\cos \varphi J_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{J_z}{J_y},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{J_z}{J_y}$$

(18.10)

Как видим, в общем случае, когда  $J_z \neq J_y$ ,  $\alpha \neq \varphi$ , т.е. нейтральная ось не перпендикулярна плоскости нагружения.

### 18.3 Определение перемещений при косом изгибе

Полное перемещение при косом изгибе определяется по принципу независимости действия сил, как геометрическую сумму перемещений в главных плоскостях.

Определим перемещение свободного конца балки. Воспользуемся способом перемножения эпюр (рис.18.4).

Вертикальное перемещение

$$f_y = \frac{1}{EJ_z} \omega_y = \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} P_y l^2 \frac{2}{3} l = \frac{P_y l^3}{3EJ_z}$$

Аналогично получим горизонтальное перемещение

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y}$$

Полное перемещение

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}$$

(18.11)

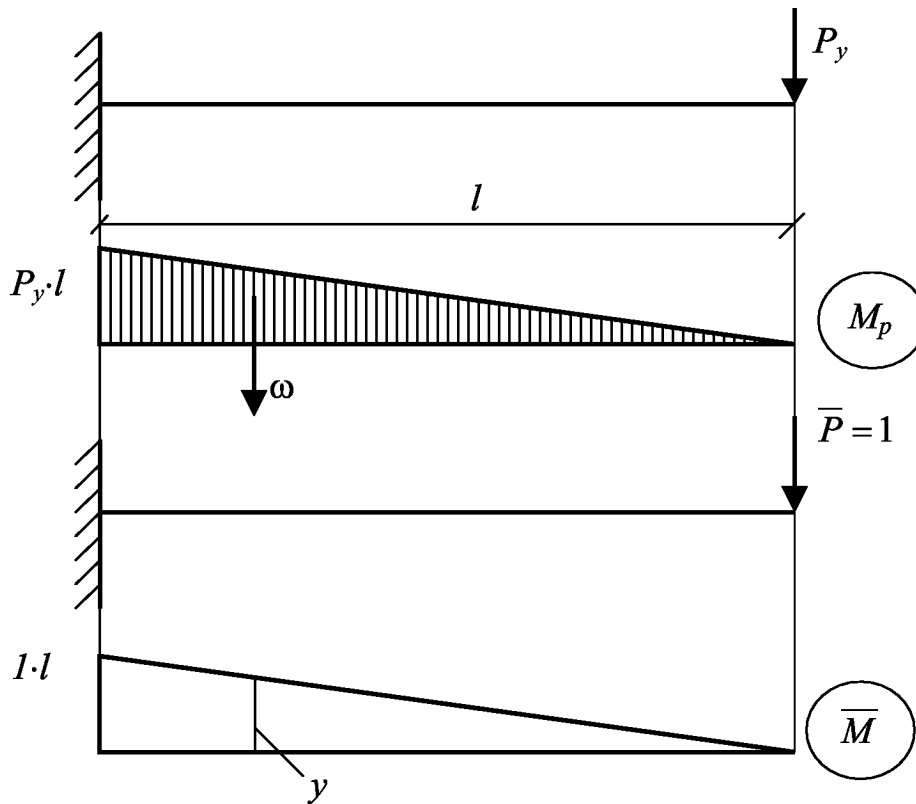


Рис.18.4

Направление полного перемещения определяется углом  $\beta$  (рис.18.5).

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{P_y J_z}{P_z J_y} = \frac{\sin\varphi J_z}{\cos\varphi J_y} = \operatorname{tg}\varphi \frac{J_z}{J_y} \quad (18.12)$$

Формула (18.12) идентична формуле (18.10). Это позволяет сделать заключение, что  $\beta = \alpha$ , т.е. направление прогиба перпендикулярно нейтральной оси, а следовательно, плоскость прогибов не совпадает с плоскостью нагружения.

Угол отклонения плоскости прогибов от главной оси (угол  $\beta$ ) будет тем большим, чем большим будет отклонение  $\frac{J_z}{J_y}$ . Поэтому для балок с упругим сечением, у которых отношение  $\frac{J_z}{J_y}$  велико, косой изгиб опасен, т.к. вызывает большие прогибы в плоскости наименьшей жесткости, а следовательно и большие напряжения.

Для балок у которых  $J_z = J_y$ , суммарный прогиб лежит в силовой плоскости и косой изгиб невозможен.

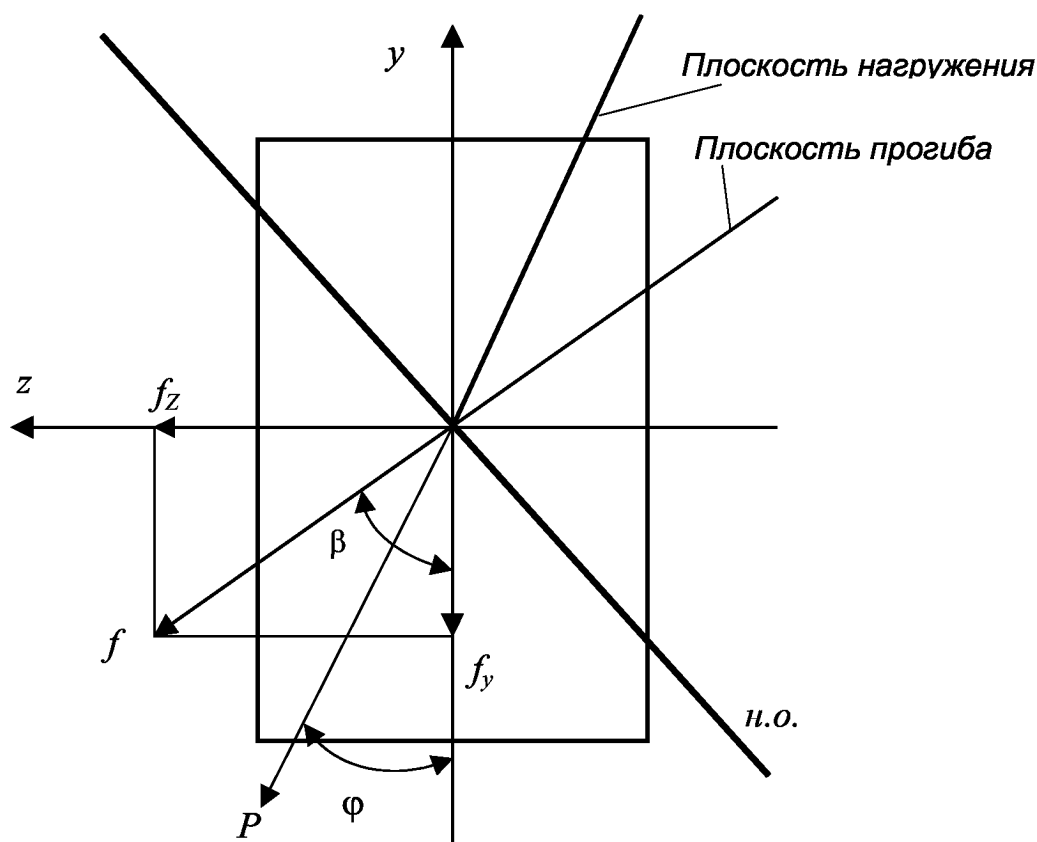


Рис.18.5

### 18.4 Изгиб с растяжением

При совместном действии изгиба и растяжения (рис.18.6) в поперечном сечении возникают нормальные напряжения, которые определяются согласно принципу независимости действия сил (касательными напряжениями при этом пренебрегаем)

Напряжения в произвольной точке будут равны

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{J_z} y \pm \frac{M_y}{J_y} z \quad (18.13)$$

Для сечений, симметричных относительно двух осей, напряжения в угловых точках будут равны:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (18.14)$$

Условие прочности примет вид:

$$\boxed{\frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]} \quad (18.15)$$

Если изгиб стержня происходит в одной из главных плоскостей, то в левой части уравнения будет только два слагаемых - от растяжения и плоского изгиба.

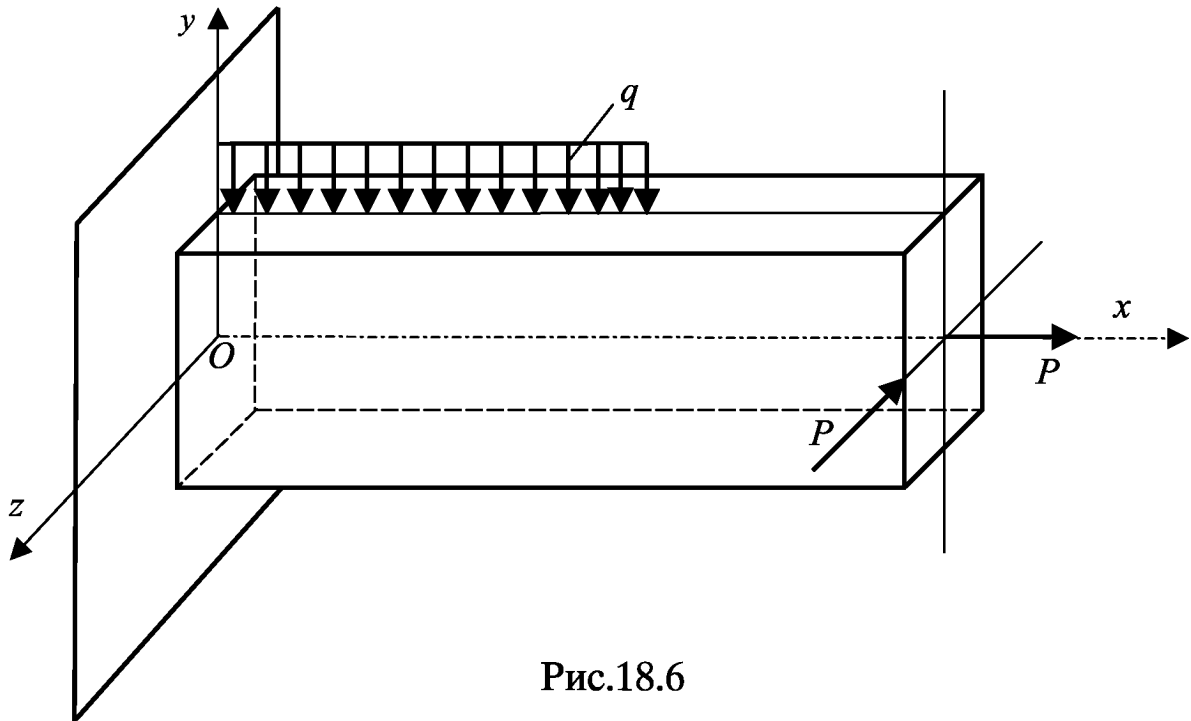


Рис.18.6

### 18.5 Внецентренное сжатие

Внецентренным сжатием называется сжатие, при котором сжимающая сила параллельна продольной оси стержня, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести сечения (рис.18.7а). Такая задача очень часто встречается в мостостроении и при расчете колонн зданий.

Обозначим координаты точки приложения силы  $Y_p$  и  $Z_p$ , а главные оси сечения  $y$  и  $z$  направим таким образом, чтобы координаты  $Y_p$  и  $Z_p$  были положительными. Если перенести силу  $P$  параллельно самой себе из точки  $A$  в центр тяжести сечения, то внецентренное сжатие можно представить как сумму трех простых деформаций: сжатия и изгиба в двух плоскостях (рис.18.7б).

$$M_y = PZ_p, \quad M_z = PY_p \quad (18.16)$$

Напряжения в произвольной точке сечения, лежащей в первом квадранте, с координатами  $y$  и  $z$  можно найти исходя из принципа независимости действия сил.

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_p F}{J_y} z + \frac{Y_p F}{J_z} y \right) \quad (18.17)$$

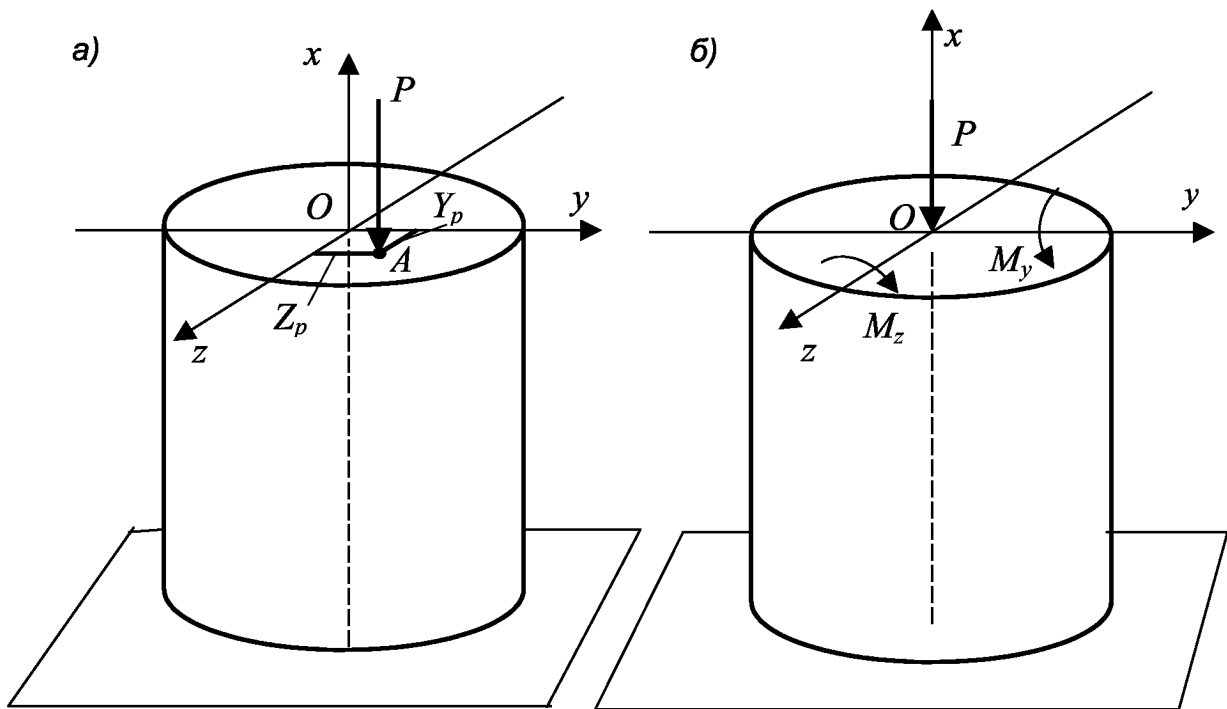


Рис.18.7

Отношения  $\frac{J_y}{F} = i_y^2$ ,  $\frac{J_z}{F} = i_z^2$  представляют собой квадраты радиусов инерции сечения. Тогда формула (18.17) может быть переписана в следующем виде:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_p}{i_y^2} z + \frac{Y_p}{i_z^2} y \right) \quad (18.18)$$

Получим формулу для определения напряжений в продольной точке сечения при внецентренном сжатии. Здесь  $z$  и  $y$  - координаты точки, в которой определяется напряжение. Обязательно необходимо учитывать знак координат. В случае внецентренного растяжения в формуле (18.18) нужно изменить знак "минус" на "плюс".

Определим положение нейтральной оси. Обозначим координаты точек нейтральной оси через  $Y_0$ ,  $Z_0$ . На нейтральной оси напряжения равны нулю. Приравняем правую часть уравнения (18.18) к нулю. Так как  $\frac{P}{F} \neq 0$ , получим

$$1 + \frac{Z_p}{i_y^2} Z_0 + \frac{Y_p}{i_z^2} Y_0 = 0 \quad (18.19)$$

Это уравнение прямой не проходящей через начало координат. Определим отрезки, отсекаемые нейтральной осью на координатных осях -  $a_y$ ,  $a_z$  (рис.18.8). Для этого в уравнении (18.19) сначала приравняем нулю  $Z_0$ .

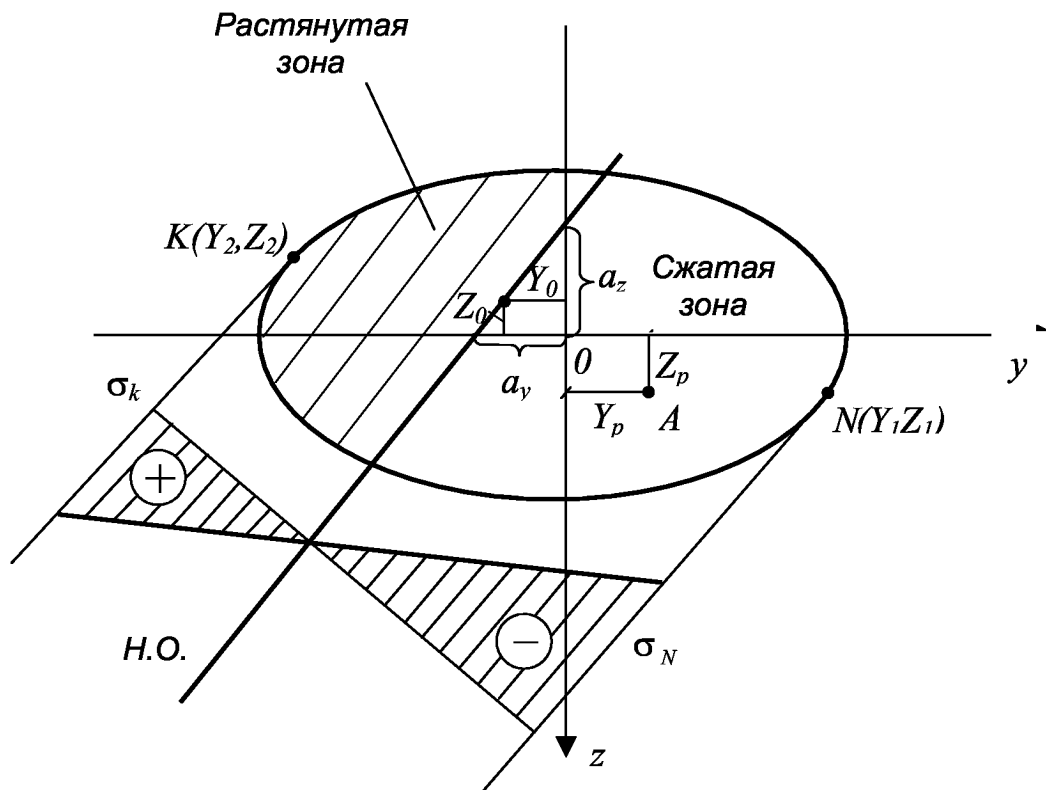


Рис.18.8

При  $Z_0 = 0$ ,  $Y_0 = a_y$ ,  $1 + \frac{Y_p}{i_z^2} a_y = 0$ ;

$$\boxed{a_y = -\frac{i_z^2}{Y_p}} \quad (18.20)$$

Затем возьмем  $Y_0 = 0$ , тогда  $Z_0 = a_z$ ,  $1 + \frac{Z_p}{i_y^2} a_z = 0$ ;

Знак "минус" в формулах (18.20) и (18.21) указывает на то, что точка приложения силы  $A$  и нейтральная ось всегда расположены по разные стороны от центра тяжести сечения. Положение нейтральной оси зависит от координат точки приложения нагрузки - чем ближе сила приложена к центру тяжести сечения, тем дальше от него расположена нейтральная ось. Если сила  $P$  приложена в точке, лежащей на оси  $y$  ( $Z_p = 0$ ), то нейтральная ось будет параллельна оси  $z$ :

$$a_z = -\frac{i_y^2}{Z_p} = -\frac{i_y^2}{0} = -\infty$$

Аналогично и для другой оси (рис.18.9).

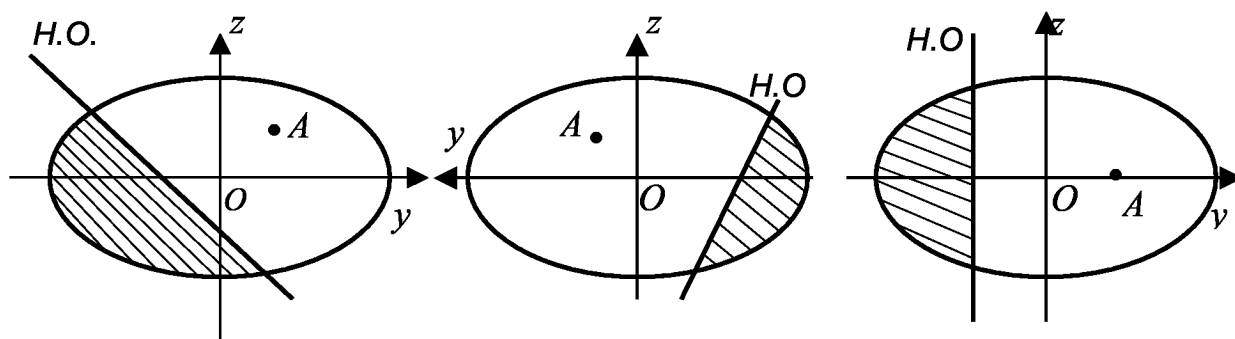


Рис.18.9

Нейтральная ось делит сечение на две зоны - сжатую и растянутую. Напряжения линейно зависят от расстояния от нейтральной оси. Проведем касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси, получим точки  $K$  и  $N$ . Если материал стержня не одинаково сопротивляется растяжению и сжатию (чугун, бетон, каменная кладка), то необходимо записать два условия прочности (на растягивающие и сжимающие напряжения).

$$\sigma_N = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_p}{i_y^2} Z_1 + \frac{Y_p}{i_z^2} Y_1 \right) \leq [\sigma_-] \quad (18.22)$$

$$\sigma_K = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Z_p}{i_y^2} Z_2 + \frac{Y_p}{i_z^2} Y_2 \right) \leq [\sigma_+]$$

### 18.6 Ядро сечения

Хотя до сих пор мы изображали нейтральную ось проходящей через сечение, в общем случае она может проходить и вне его. Действительно, если сила  $P$  приложена в центры тяжести, то нейтральная ось проходит в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределяются равномерно по сечению.

Иногда необходимо установить те возможные положения сжимающей силы, при которых напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Простейший пример представляет собой кирпичный столб, на который опирается ферма. Так как кирпичная кладка сравнительно хорошо работает на сжатие и почти не может воспринимать растягивающих напряжений, то желательно приложить силу так, чтобы во всех точках сечения возникали только сжимающие напряжения. Следовательно, нейтральная ось должна проходить вне сечения, она может только касаться его, но не должна пересекать.

Найдем очертание такого конура, внутри которого должна находиться сжимающая сила, параллельная так, чтобы напряжения

по всему сечению были одного знака. Площадь, заключенную внутри такого контура, называют ядром сечения.

Таким образом, ядром сечения называется область вокруг центра тяжести сечения, характерная тем, что всякая продольная сила, расположенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. Если силу приложить на границе ядра сечения, то нейтральная ось будет касательной к контуру.

Для построения ядра сечения необходимо рассмотреть различные положения касательных к контуру сечения, предполагая, что они представляют собой нейтральные линии и найти координаты граничных точек ядра сечения, а затем, по этим точкам очертить само ядро сечения.

Из формул (18.20) и (18.21) можно получить координаты границ ядра сечения:

$$y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a_y} \quad (18.23)$$

Детали построения ядра сечения выясним на примерах.

*Пример 1.* Построить ядро сечения для круглого сечения (рис.18.10). Предположим, что нейтральная ось совпадает с прямой  $AB$ . Отрезки, которые отсекает нейтральная ось на координатных осях, равны:

$$a_y = -R, \quad a_z = \infty.$$

Координаты границ ядра сечения находим по зависимостям (18.23):

$$y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{J_z}{Fa_y} = \frac{\pi D^4 \cdot 4 \cdot 2}{64\pi D^2 D} = \frac{D}{8} = \frac{R}{4},$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a_y} = 0$$

Точка  $I$  находится на границе ядра сечения, ее координаты

$$y_{\text{я}} = \frac{R}{4}, \quad z_{\text{я}} = 0.$$

Ввиду симметрии сечения достаточно рассмотреть одно положение касательной к сечению. Ядро сечения круга также будет кругом с радиусом  $\frac{R}{4}$ .



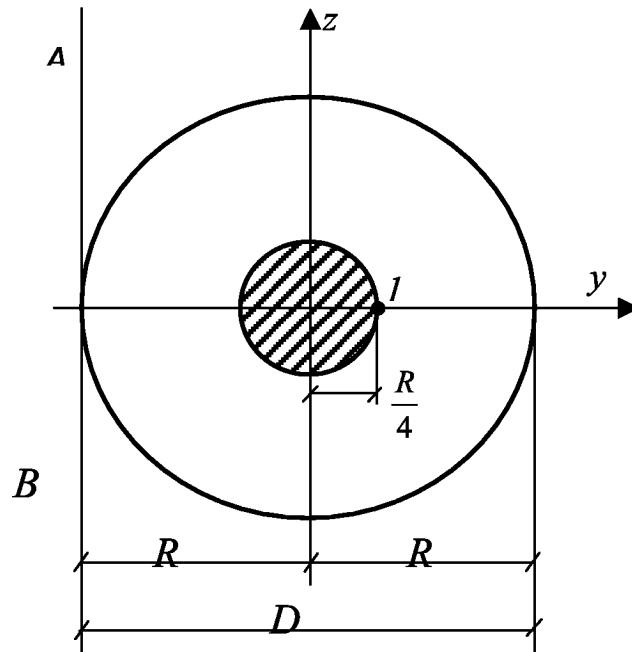


Рис.18.10

**Пример 2.** Построить ядро сечения прямоугольника (рис.18.11). Совместим вначале нейтральную ось со стороной *AB* (положение *I-I*)

$$a_y = -\frac{b}{2}; \quad a_z = \infty.$$

$$y_{я} = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{J_z}{Fa_y} = \frac{b^3 \cdot 2}{12bh^3} = \frac{b}{6}$$

$$z_{я} = -\frac{i_y^2}{a_y} = 0.$$

Определены координаты границы ядра сечения 1. Совместим теперь нейтральную ось со стороной *BC* (положение *II-II*).

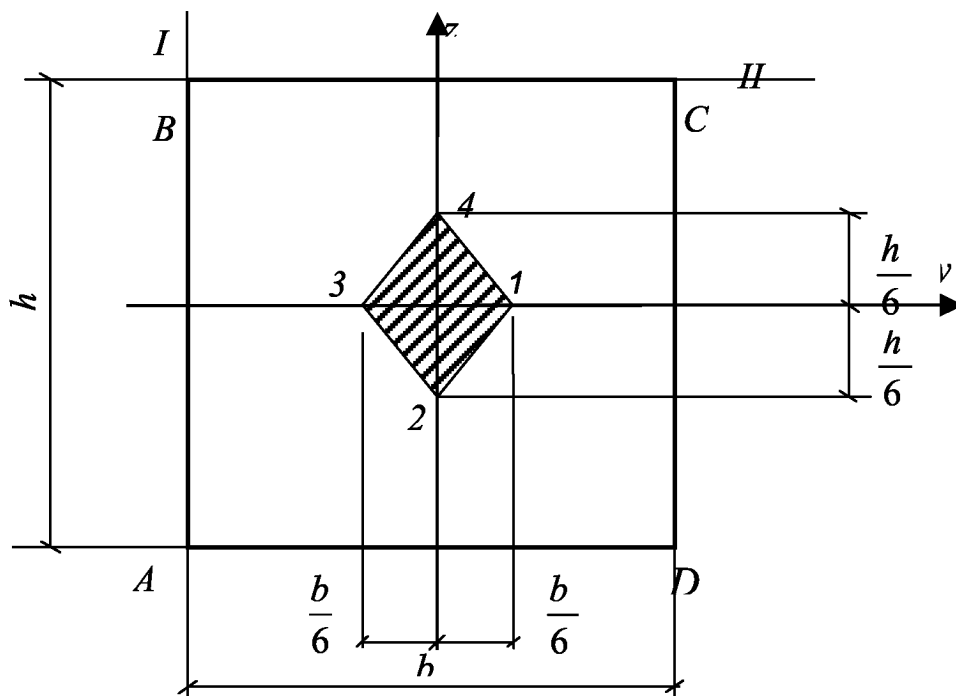


Рис.18.11

Имеем

$$a_y = \infty, \quad a_z = \frac{h}{2}.$$

Тогда координаты точки 2 границы ядра сечения будут

$$y_я = 0, \quad z_я = -\frac{h}{2}.$$

Легко убедиться в том, что положению касательной  $CD$  соответствует точка 3  $\left(-\frac{b}{6}, 0\right)$ , а  $AD$  - точка 4  $\left(0, \frac{b}{6}\right)$ .

Так как при переходе нейтральной оси с одной стороны на другую она поворачивается вокруг угловой точки сечения, то точка приложения силы перемещается по прямой, образуя коридор ядра.

Таким образом, ядро сечения прямоугольника является ромб с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения.

### 18.7 Изгиб с кручением

Рассмотрим горизонтальный ломаный стержень  $ABC$ , жестко закрепленный на одном конце и нагруженный вертикальной силой  $P$  на другом (рис.18.12). Сила  $P$  вызывает изгиб стержня  $AB$  и изгиб и кручение стержня  $BC$ .

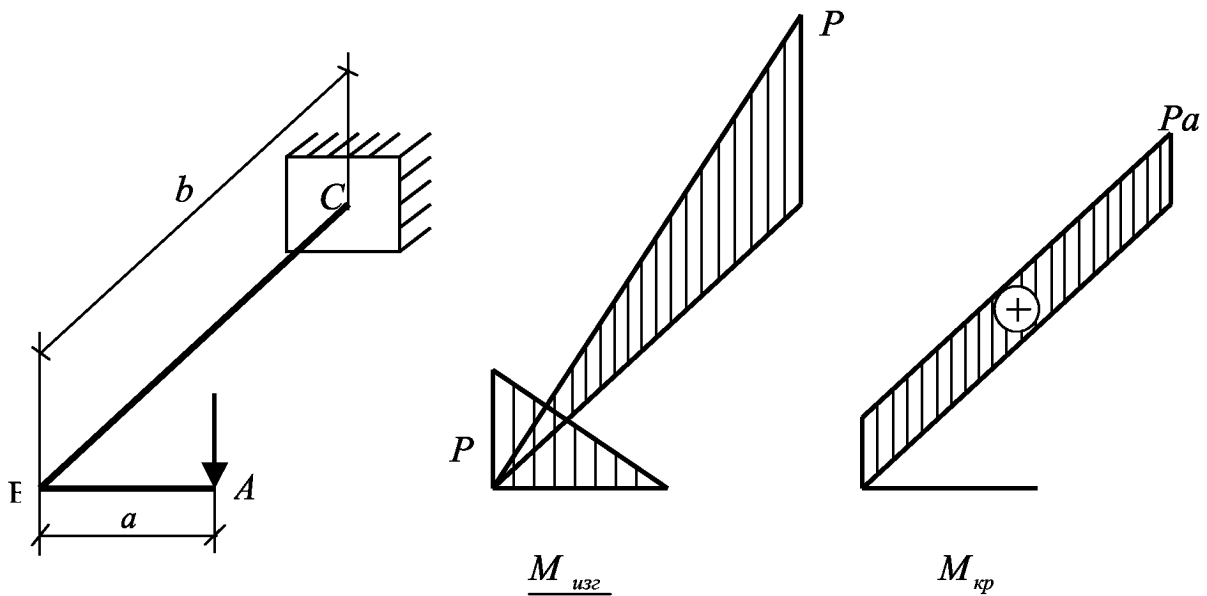


Рис.18.12

Совместное действие изгиба и кручения является наиболее характерным случаем нагружения валов. Силы, действующие на валы (давления на зубья шестерен, натяжения ремней, собственный вес вала и шкивов и т.п.) вызывают его изгиб и кручение.

Для расчета вала в первую очередь надо установить опасные сечения. с этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  и крутящего момента  $M_{кр}$ .

Нагрузки, действующие на вал, раскладываем на составляющие вдоль координатных осей (рис.18.13), а затем строим эпюры.

При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента

$$M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

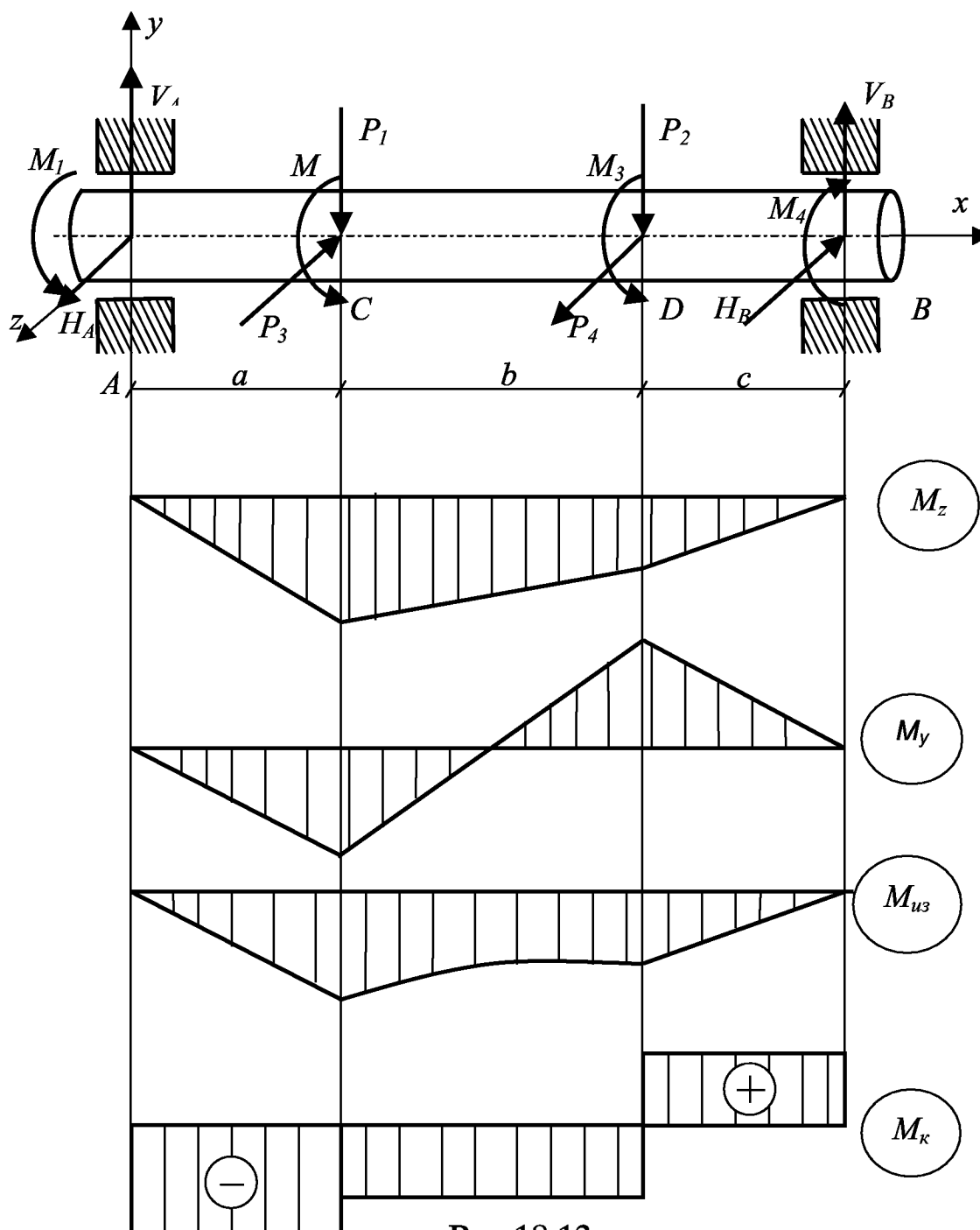


Рис.18.13

Вектор момента  $M_{изг}$  в разных сечениях может иметь различные направления, поэтому даже при отсутствии распределенной нагрузки эпюра  $M_{изг}$  может быть криволинейной.

Сопоставляя эпюры  $M_{изг}$  и  $M_{кр}$  находим опасное сечение (это может быть сечение  $C$  или  $D$ ).

Определим опасные точки сечения. От скручивания вала возникают касательные напряжения, которые по сечению распределяются равномерно.

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$$

При изгибе возникают нормальные и касательные напряжения. Так как касательные напряжения от изгиба очень малы по сравнению с касательными напряжениями от кручения, то ими пренебрегаем. Нормальные напряжения также по сечению распределяются неравномерно.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_z}$$

Как видно, опасными являются точки, расположенные у края сечения, где нормальные и касательные напряжения достигают максимального значения (рис.18.14).

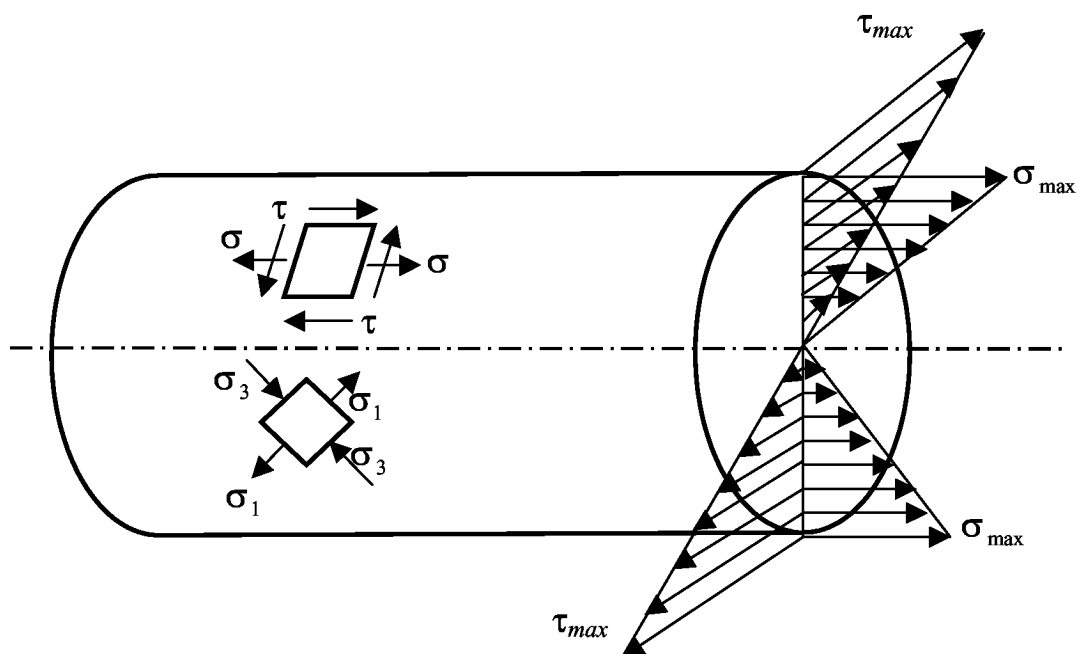


Рис.18.14

Определим, в каком напряженном состоянии находится материал вала. Для этого у края сечения выделим элемент и рассмотрим, какие напряжения действуют на его гранях. По четырем его граням

действуют касательные напряжения, а к двум из этих граней приложены еще и нормальные напряжения (рис.18.14). Таким образом, при изгибе с кручением материал вала находится в плоском напряженном состоянии. Совершенно аналогичные напряжения на гранях мы имели при поперечном изгибе балок. Этот случай напряженного состояния был рассмотрен при расчете балок по главным напряжениям.

Чтобы записать условие прочности нужно привлечь теории прочности. Для пластичных материалов используют третью и четвертую теории прочности.

По III теории условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Учитывая, что для круглого сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_z, \quad \text{имеем}$$

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{III}} = \sqrt{\frac{M_{\text{изг}}^2}{W_z^2} + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{4W_z^2}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_z}$$

Числитель представляет собой приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию изгибающего и крутящего моментов.

$$M_{\text{прив}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$$

Тогда условие прочности имеет вид:

$$\frac{M_{\text{прив}}^{\text{III}}}{W_z} \leq [\sigma]$$

Аналогично можно получить условие прочности и по IV теории

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{M_{\text{изг}}^2}{W_z^2} + 3 \frac{M_{\text{кр}}^2}{4W_z^2}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0.75M_{\text{кр}}^2}}{W_z};$$

$$M_{\text{прив}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0.75M_{\text{кр}}^2};$$

$$\frac{M_{\text{прив}}^{\text{IV}}}{W_z} \leq [\sigma]$$

Полученные условия прочности позволяют выполнять три вида расчетов на прочность: проверочный, проектировочный и определять допустимую нагрузку на вал.

Приведенные зависимости полностью применимы и к стержням кольцевого сечения.

## ГЛАВА 19

### РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ (ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

До сих пор определение размеров поперечных сечений различных стержней мы производили из условий прочности. Для стержня, растянутого или сжатого силой  $P$ , например, мы пользовались условием

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$$

при котором предполагалось, что разрушение наступает в том случае, когда напряжения станут равными пределу прочности  $\sigma_{\text{н}}$  (для хрупкого материала) или пределу текучести  $\sigma_T$  (для пластичного материала). Никаких принципиальных различий между деформацией растяжения и сжатия мы не делали, учитывали только площадь поперечного сечения стержня и характеристики прочности материала. Длина стержня и формы поперечного сечения во внимание не принимались.

Всегда ли это правильно?

Возьмем деревянную чертежную линейку и приложим к ней продольную сжимающую нагрузку. Постепенно ее увеличивая, заметим, что ось сначала остается почти прямолинейной, а затем при некоторой нагрузке она внезапно искривляется и может сломаться. Заметим, что с изменением длины стержня изменяется и разрушающая нагрузка, чем длиннее стержень, тем при меньшей нагрузке он разрушается. Кроме того, при сжатии длинных стержней изменение формы поперечного сечения (при прочих равных условиях) так же вызывает изменение разрушающей нагрузки.

Очевидно, что в различных элементах конструкций соотношение между длиной сжатого стержня и размерами его поперечного сечения должно быть подобрано таким образом, чтобы обеспечить надежную работу конструкции. Решение этого вопроса и составляет содержание задачи, рассматриваемой в данной лекции.

## 19.1 Понятие об устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня и критической силе

Из механики известно, что равновесие твердых тел может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным (рис.19.1).

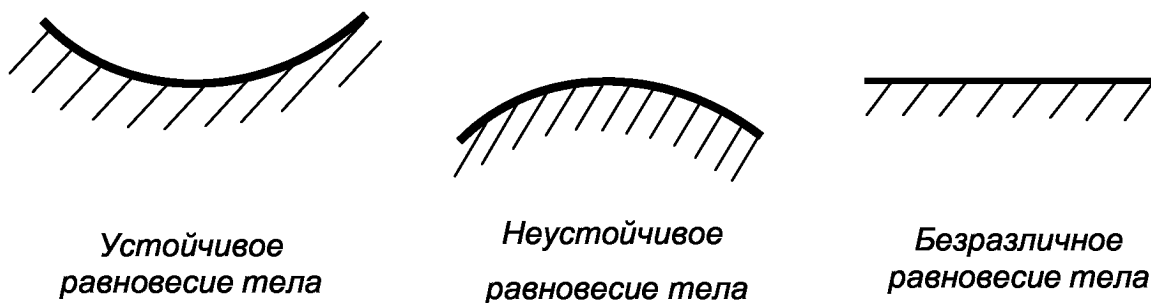


Рис.19.1

Аналогично этому равновесие упругих систем может быть устойчивым и неустойчивым.

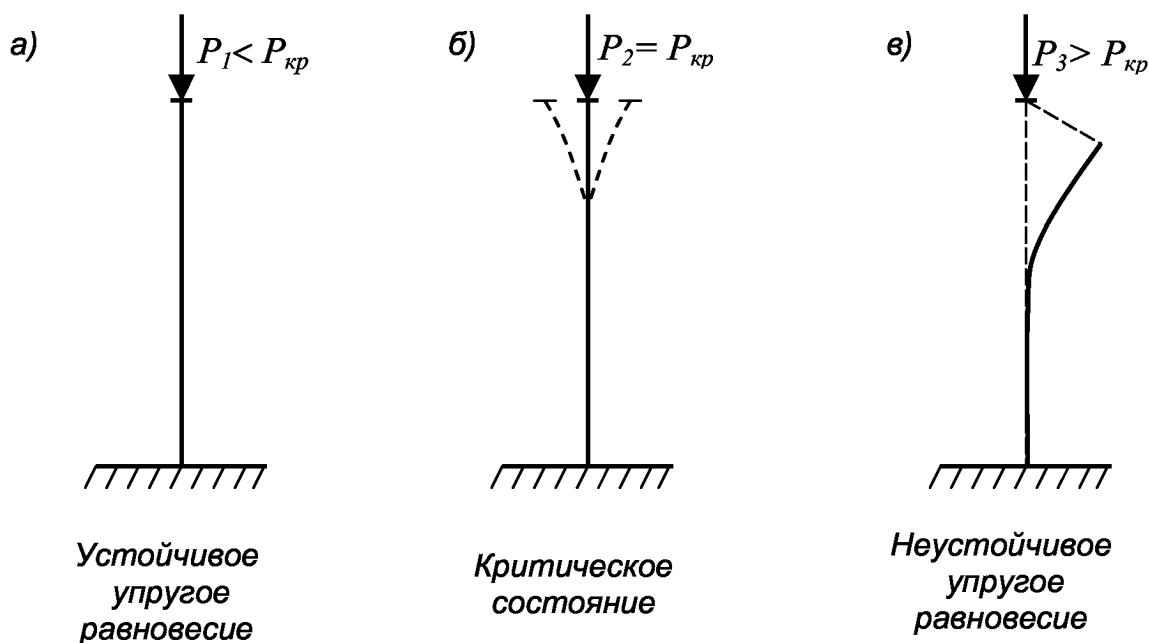
Рассмотрим тонкий стержень, испытывающий сжатие с постепенно возрастающей нагрузкой ( $P_1 < P_2 < P_3$ ).

При малой сжимающей силе  $P_1$  ось стержня остается прямолинейной. Даже если стержень отклонить сравнительно малой горизонтально приложенной силой, то после ее удлинения, стержень снова возвратится в свое первоначальное положение. Такое упругое равновесие называется устойчивым (рис.19.2а).

При большом значении сжимающей силы  $P_3$  после незначительного отклонения стержня в сторону ось стержня искривляется, стержень не может возвратиться в первоначальное положение, продолжает еще более искривляться под действием сжимающей силы. Это неустойчивая форма упругого равновесия. Происходит потеря устойчивости (рис.19.2в). Такой случай изгиба называют *продольным изгибом*, т.е. изгибом, вызванным сжимающей силой, действующей вдоль оси стержня.

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит очень сильное нарастание прогибов при малом нарастании сжимающей силы.

Продольный изгиб является опасным, разрушения от него происходят внезапно, его нельзя допускать. История техники отмечает целый ряд крупных катастроф вследствие потери устойчивости сжатыми элементами конструкций.



Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначальную прямолинейную форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия (рис.19.2б).

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической и обозначается  $P_{кр}$ .

С момента наступления критического состояния до момента разрушения остаточные деформации нарастают крайне быстро и практически нет времени для принятия мер по предотвращению катастрофы.

Для обеспечения устойчивости в сооружениях допускаются нагрузки, которые значительно меньше критических, т.е. должно выполняться условие

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y} \quad (19.1)$$

где  $[P]$  - допускаемая на стержень нагрузка,  $n_y$  - коэффициент запаса устойчивости, зависящий, в основном, от материала.

Для дерева принимают  $n_y = 2,8 - 3,2$ ,

для стали  $n_y = 1,8 - 3,0$ ,

для чугуна  $n_y = 5,0 - 5,5$ .

Следовательно, чтобы производить расчеты сжатых стержней на устойчивость, необходимо изучить способы определения критических нагрузок  $P_{кр}$ .



Первые исследования устойчивости сжатых стержней были проведены в XVIII столетии академиком Российской Академии наук Л.Эйлером (1707-1793гг.). В дальнейшем большая работа в области теоретического и экспериментального исследования вопросов устойчивости была проведена отечественными учеными Ф.С.Ясинским, А.Н.Динником, С.П.Тимошенко. Блестящим развитием всех работ в области упругой устойчивости является теория, созданная выдающимся ученым В.З.Власовым. Исследования устойчивости упругих систем продолжают и в настоящее время, т.к. с развитием техники число задач, возникающих в этой области, и сложность их непрерывно возрастают.

### 19.2 Формула Эйлера для определения критической силы

Рассмотрим стержень постоянного сечения, оба конца которого закреплены шарнирно (рис.3). Стержень сжимается критической силой, ось стержня немного искривилась, т.е. рассматриваются малые перемещения. Задавшись искривлением оси стержня, найдем величину осевой сжимающей силы, при котором такое искривление возможно. Будем считать, что напряжения в стержне при том не превосходят предела пропорциональности.

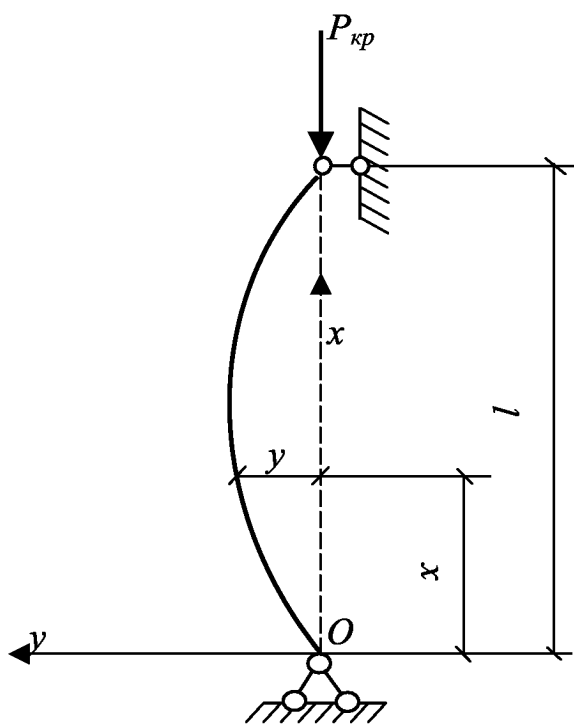


Рис.19.3

Начало координат в точке  $O$ , ось  $x$  направлена вдоль оси стержня, ось  $y$  - влево. Прогиб в произвольном сечении  $x$  равен  $y$ .

Воспользуемся приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (19.2)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M(x) = -P_{kp} y \quad (19.3)$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P_{kp}}{EJ} y = 0.$$

Обозначим

$$\frac{P_{kp}}{EJ} = k^2 \quad (19.4)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (19.5)$$

Это однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения можно записать в виде гармонической функции

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (19.6)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий.

1-е условие:

при  $x = 0$ ,  $y = 0$  или  $y|_{x=0} = 0 + B \cdot 1 = 0$ , т.е.  $B = 0$ .

Уравнение (19.6) принимает вид:

$$y = A \sin kx \quad (19.7)$$

т.е. стержень изгибается по синусоиде.

2-е условие:

при  $x = l$ ,  $y = 0$  или  $y|_{x=l} = A \sin kl = 0$ .

Произведение двух сомножителей равно нулю, что возможно лишь в том случае, если один из сомножителей равен нулю.

Разберем оба случая.

Если допустить, что  $A = 0$ , то  $y(x)$  всегда равен нулю и прогиба вообще не существует. Это решение противоречит принятому предположению о том, что стержень уже прогнулся, т.е.  $A \neq 0$ .

Следовательно, должно выполняться условие  $\sin kl = 0$ , откуда

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

где  $n$  - любое целое число.

Все ли значения  $n$  применимы в данной задаче?

Рассмотрим условие (19.4). Из него следует, что если  $k = 0$ , то  $P_{кр} = 0$ , т.е. стержень не нагружен, а это противоречит условию задачи. Следовательно, значение  $k = 0$  нужно исключить из решения.

В общем случае имеем:

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (19.8)$$

Подставим это значение в уравнение (19.4), получим

$$\frac{P_{кр}}{EJ} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad \text{или} \quad P_{кр} = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2} \quad (19.9)$$

Для инженерных расчетов практический интерес представляет собой наименьшее значение сжимающей силы, при котором происходит продольный изгиб, поэтому следует принять  $n = 1$ .

Тогда уравнение (19.7) примет вид:  $y = A \sin \frac{\pi}{l} x$ , т.е. стержень изгибается по синусоиде с одной полуволной.

При  $x = \frac{l}{2}$  - прогиб максимален:  $y|_{x=l/2} = A \sin \frac{\pi}{l} \frac{l}{2} = A = y_{\max}$ .

При  $n = 2$  и  $n = 3$  соответствует форма потери устойчивости по двум и трем полуволнам синусоиды (рис.19.4). Исследования, проведенные Лагранжем, показали, что только первая форма изгиба является устойчивой, а все остальные могут быть лишь при наличии промежуточных опор (в точках перегиба).

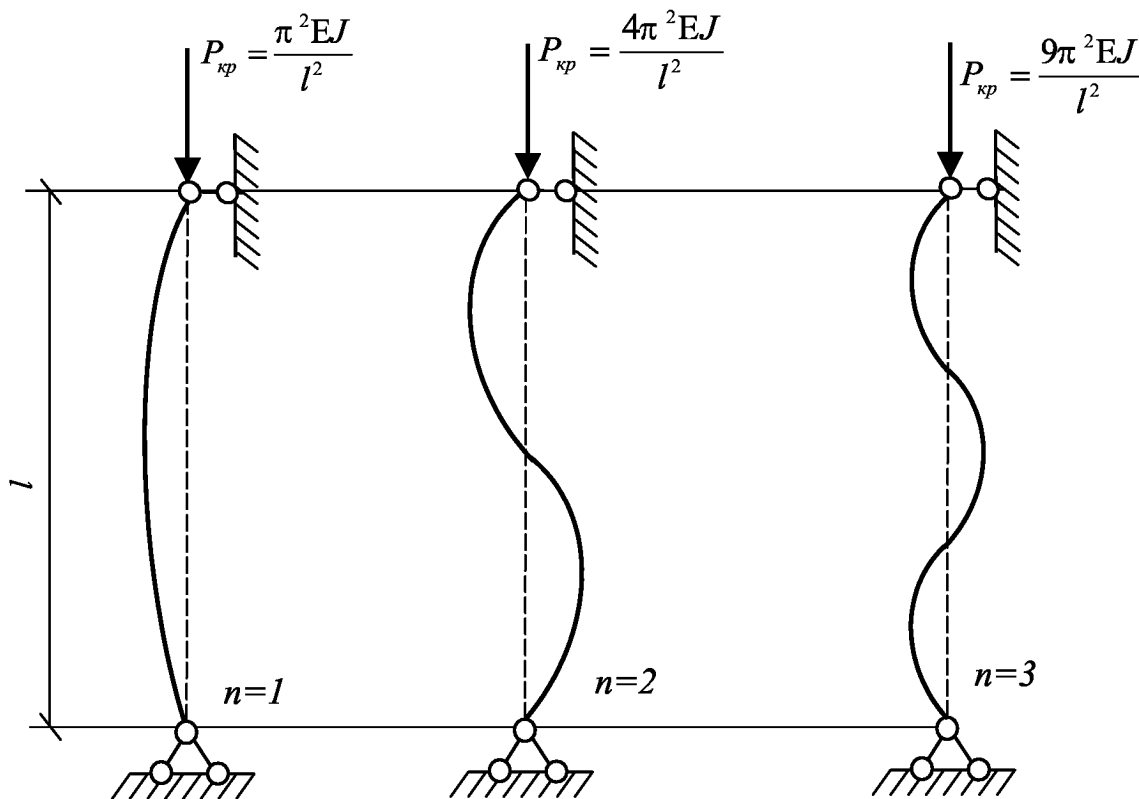


Рис.19.4

Потеря устойчивости стержня происходит в плоскостях наименьшей жесткости  $J_z = J_{\min}$ , поэтому при определении критической силы надо учитывать наименьший осевой момент инерции сечения.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} \quad (19.10)$$

Это формула Эйлера для определения критической силы для стержня с двумя шарнирно закрепленными концами (основной случай). Формула получена Эйлером в 1744 году.

**Величина критической силы прямо пропорциональна наименьшей жесткости сечения и обратно пропорциональна квадрату длины стержня.**

Как видно из формулы Эйлера, величина критической силы зависит от геометрических характеристик стержня ( $J_{\min}$ ,  $l$ ) и модуля упругости материала, но не зависит от прочности характеристик материала. Так, например,  $P_{кр}$  практически не зависит от марки стали.

Предельная же растягивающая сила зависит от прочностных характеристик (в зависимости от марки стали она будет различной) и не зависит от длины стержня. Таким образом, выясняется резкое отличие между работой стержня на растяжение и сжатие.

### **19.3 Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы**

Выше был рассмотрен так называемый основной случай закрепления концов сжатого стержня, когда оба конца стержня закреплены шарнирно. На практике применяются и другие способы закрепления концов стержня.

Рассмотрим, как влияют условия закрепления на величину критической силы.

Случай второй - один конец стержня жестко защемлен, а второй - свободен (рис.19.5а).

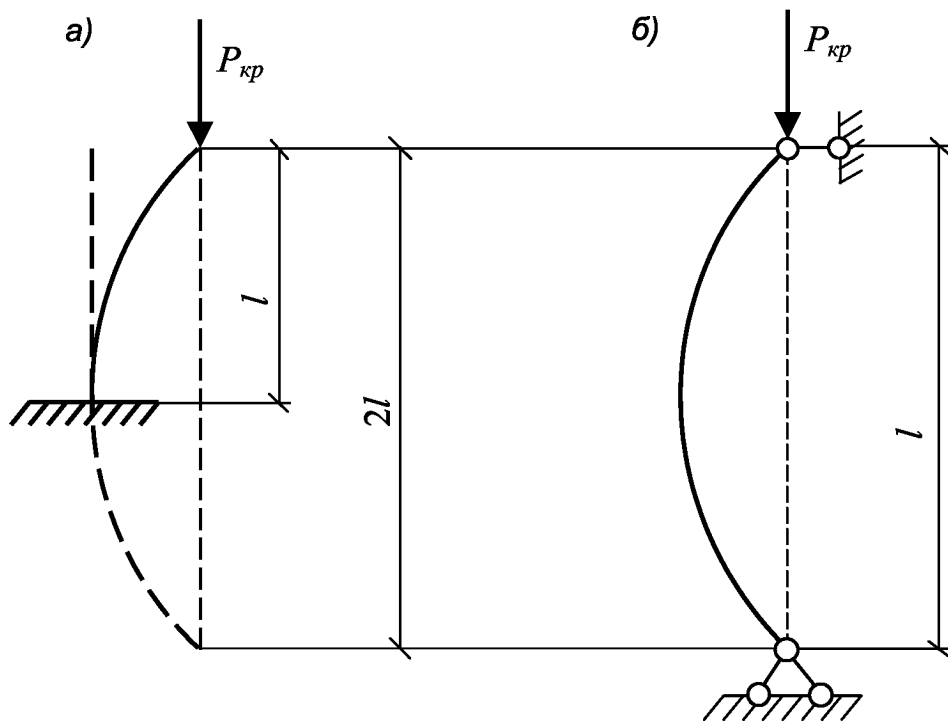


Рис.19.5

При потере устойчивости верхний конец стержня отклонится на некоторую величину и повернется, нижний заземленный конец останется вертикальным. Изогнутая ось получится такая же, как для одной половины стержня первого случая (рис.19.5б).

Для получения полного соответствия с первым случаем продолжим мысленно прогнутую ось стержня вниз. Тогда форма потери устойчивости будет полностью совпадать с первым случаем. Отсюда можно сделать вывод, что критическая сила для этого случая будет такая же, как и для шарнирно закрепленного по концам стержня длиной  $2l$ . Тогда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2} \quad (19.11)$$

Третий случай - оба конца стержня жестко закреплены (рис.19.6)

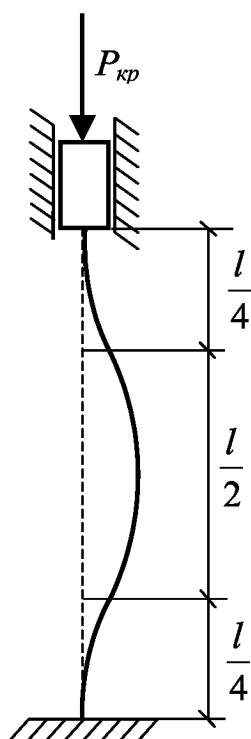


Рис.19.6

После потери устойчивости концы стержня не поворачиваются. Средняя часть длиной  $l/2$  вследствие симметрии будет работать в таких же условиях, что и стержень с шарнирно опертыми концами, но длиной  $l/2$ . Тогда исходя из формулы (19.10), получим:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad (19.12)$$

Четвертый случай - один конец стержня жестко защемлен, а другой закреплен шарнирно. В этом случае верхняя часть стержня длиной приблизительно равной  $\frac{2}{3}l$  имеет вид полувогнутой синусоиды и находится в таких же условиях, что и стержень с шарнирными опорами на концах (рис.19.7)

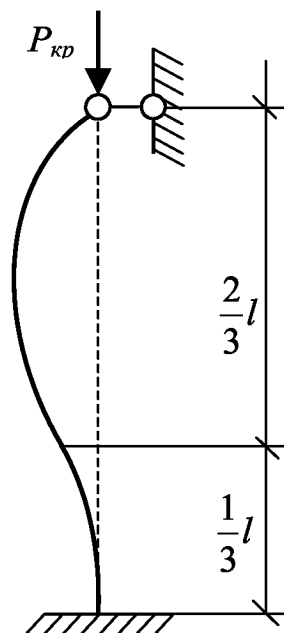


Рис.19.7

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0.7l)^2} \quad (19.13)$$

Анализируя выражения (19.10) - (19.13), приходим к выводу, что чем более жестко закреплены концы стержня, тем большую нагрузку он может воспринимать.

Зависимость (19.10) - (19.13) можно объединить в одну формулу:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (19.14)$$

где  $\mu l = l_{\text{прив}}$  - приведенная длина стержня,

$\mu$  - коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления концов стержня (рис.8),

$l$  - фактическая длина стержня.

Понятие о приведенной длине стержня впервые было введено профессором Петербургского института путей сообщения Феликсом Станиславовичем Ясинским в 1892 году.

Необходимо также отметить, что при составлении формул для определения критических сил в стержнях с различными условиями опирания использовалась аналогия в формах потери устойчивости отдельных участков. Однако эти решения можно получить так же строго математически. Для этого нужно записать для каждого случая дифференциальное уравнение упругой линии

при потере устойчивости, решить его удовлетворяя граничным условиям.

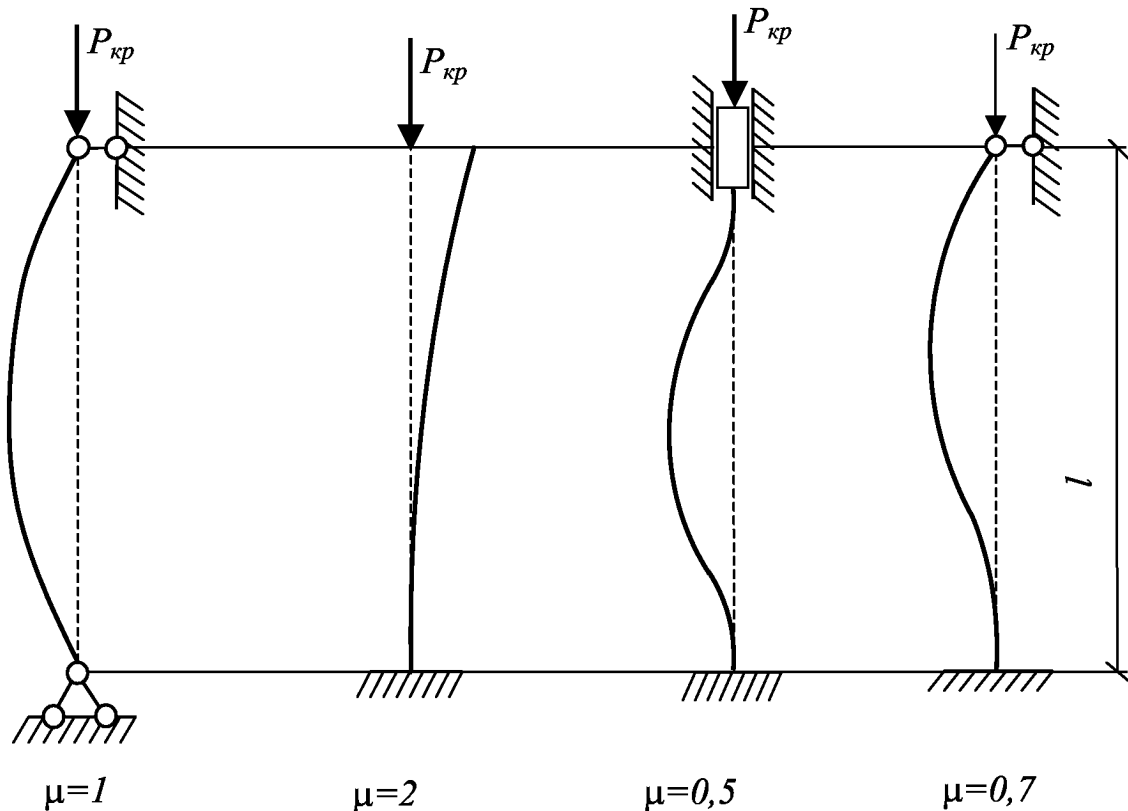


Рис.19.8

#### 19.4 Пределы применимости формулы Эйлера

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии в предположении, что материал следует закону Гука. Следовательно, формула Эйлера применима лишь в том случае, когда критические напряжения не превышают предела пропорциональности, т.е.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}$$

Определим критические напряжения.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 F}$$

Учтем, что

$$\frac{J_{\min}}{F} = i_{\min}^2$$

где  $i_{\min}$  - наименьший из главных радиусов инерции поперечного сечения стержня.

Получим



$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\min}}\right)^2}$$

Отношение приведенной длины стержня к радиусу инерции сечения называется гибкостью и обозначается  $\lambda$ . Это безразмерная величина  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ .

Окончательно получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Гарантией применимости формулы Эйлера будет тот случай, когда критические напряжения станут равными пределу пропорциональности, т.е.

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{пред}^2} = \sigma_{пц}$$

Следовательно

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$$

Определим предел применимости формулы Эйлера для стержней, изготовленных из стали марки Ст.3, для которой модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ , предел пропорциональности  $\sigma_{пц} = 200 \text{ МПа}$ , предел текучести  $\sigma_{\tau} = 240 \text{ МПа}$ .

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100.$$

Таким образом, формула Эйлера для остальных стержней может быть использована только в том случае, если их гибкость больше ста. В противном случае применение формулы Эйлера опасно.

Аналогичным образом можно вычислить предел применимости формулы Эйлера и для любого другого материала зная значение его модуля упругости и предел пропорциональности. Для чугуна формула Эйлера применима при гибкости  $\lambda \geq 80$ , для сосны при  $\lambda \geq 110$ .

### 19.5. Построение графика зависимости критических напряжений от гибкости. Формула Ясинского

Построим график зависимости критических напряжений от гибкости стержня, изготовленного из стали марки Ст.3. Если на оси ординат (рис.19.9) отложить величину предела пропорциональности ( $\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$ ) и провести из полученной точки прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку  $K$ , абсцисса которой и есть  $\lambda_{\text{пред}}$ . Слева от  $K$  гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений, большие предела пропорциональности, т.е. всегда переоценивает действительную устойчивость стержня.

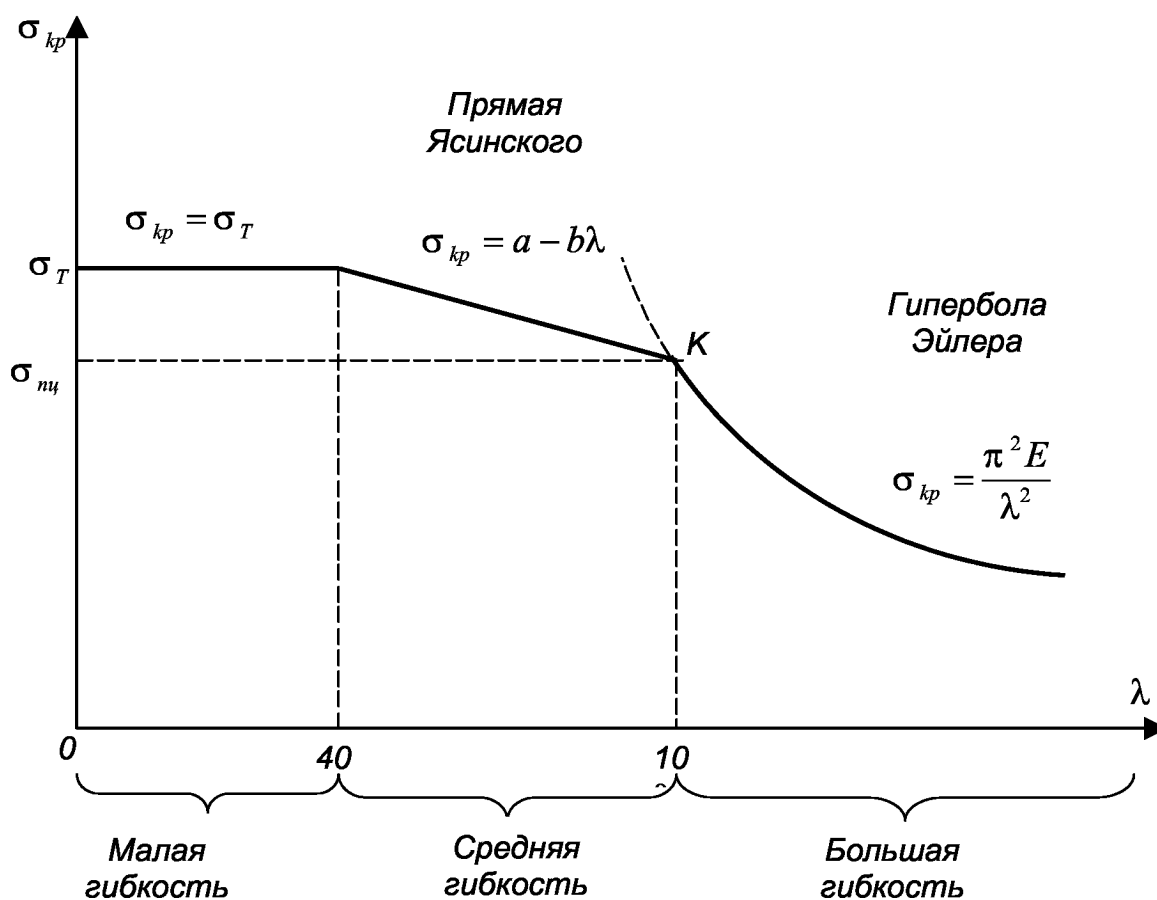


Рис.19.9

Теоретическое решение задачи от устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому обычно пользуются эмпирическими формулами. Профессор Ясинский Ф.С. собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу

стержней и составил таблицы критических напряжений для стержней разной гибкости.

Опыты показали, что короткие стержни с малой гибкостью ( $0 < \lambda < 40$ ) не теряют устойчивости, а разрушаются от простого сжатия, когда напряжения в них достигают предела текучести, т.е. для них  $\sigma_{кр} = \sigma_T$ .

Для стержней средней гибкости ( $40 < \lambda < 100$ ) Ясинским предложена эмпирическая зависимость:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

где  $a$  и  $b$  - коэффициенты, зависящие от материала.

Для стали Ст.3  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Для дерева (сосна)  $a = 29,3$  МПа,  $b = 0,194$  МПа.

Таким образом, график состоит из трех частей: гиперболы Эйлера для стержней большой гибкости; наклонной прямой для стержней средней гибкости и горизонтальной или слабонаклонной прямой для стержней малой гибкости.

Подобные графики можно построить и для других материалов.

### 19.6. Расчеты сжатых стержней на устойчивость при помощи коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие. Проверочный и проектировочный расчеты

Для сжатых стержней должны быть произведены две проверки: на прочность

$$\sigma = \frac{P}{F_{нетто}} \leq [\sigma_-], \quad \text{где} \quad [\sigma_-] = \frac{\sigma_0}{n_0},$$

на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{F_{бретто}} \leq [\sigma_y], \quad \text{где} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma_y]$  и допускаемое напряжение на прочность  $[\sigma_-]$  взаимно связаны. Составим отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр} n_0}{n_y \sigma_0}, \quad \text{или} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр} n_0}{n_y \sigma_0} [\sigma_-]$$

Обозначив  $\frac{\sigma_{кр} n_0}{n_y \sigma_0} = \varphi$ , получим

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_-]$$

где  $\varphi$  - коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на простое сжатие. Он всегда меньше единицы.

Коэффициент  $\varphi$  зависит от материала стержня и гибкости и принимается по соответствующим таблицам.

Условие устойчивости принимает вид:

$$\frac{N}{F_{бр}} \leq \varphi [\sigma_-]$$

При расчете на устойчивость местные ослабления сечений практически не влияют на величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь поперечного сечения  $F_{бр}$ .

Различают два вида расчетов на устойчивость сжатых стержней - проверочный и проектировочный.

#### *Проверочный расчет сжатых стержней*

Порядок расчета следующий:

1). Зная размеры и форму поперечного сечения определить площадь сечения  $F_{бр}$  и минимальный момент инерции  $J_{\min}$ .

2). Вычислить минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

3). По таблице найти значение коэффициента  $\varphi$ .

4). Проверить условие устойчивости

$$\frac{N}{F_{бр}} \leq \varphi [\sigma_-]$$

#### *Проектировочный расчет*

Условие устойчивости содержит две неизвестные величины, которые зависят одна от другой - площадь сечения и коэффициент  $\varphi$ . Поэтому задача решается методом последовательных приближений. Обычно в первом приближении берут  $\varphi_1 = 0.5 \div 0.6$ , находят площадь сечения и устанавливают фактическое значение  $\varphi_1'$ . При большом отличии  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$  выполняется второе приближение,  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}$ .

Если требуется третье приближение, то  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$ , и т.д.

### 19.7 О выборе материала и рациональной формы поперечного сечения сжатых стержней

Для стержней большой гибкости ( $\lambda > \lambda_{пред}$ )  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ , т.е. модуль упругости  $E$  является единственной механической характеристикой материала, определяющей критические напряжения. Так как модули упругости  $E$  для различных сталей почти одинаковы, то применять высокопрочные стали для гибких стержней нецелесообразно.

Для стержней малой гибкости (они не теряют устойчивости, а разрушаются от простого сжатия) использование сталей повышенной прочности будет целесообразным. Так как продольный изгиб происходит всегда в плоскости наименьшей жесткости, то при проектировании сжатых стержней надо стремиться к тому, чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми. Поэтому применять двутавровые и сплошные прямоугольные сечения нерационально. При заданной площади сечения выгоднее будет такое сечение, у которого материал распределен по возможности дальше от главных центральных осей инерции. Поэтому кольцевое сечение в этом отношении значительно выгоднее, чем сплошное круглое. Столь же рациональны и коробчатые тонкостенные сечения. Однако при значительном уменьшении толщины стенок пустотелых стержней может произойти местная потеря устойчивости. Чтобы предотвратить это ставят ребра жесткости (рис.19.10). Самой экономичной конструкцией сжатых стержней являются решетчатые стержни.

Для стержней, у которых осевые моменты инерции различны, можно добиться равной устойчивости в двух плоскостях различным образом закрепляя концы стержня.

### 19.8. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим деформации стержней, представленных на рис.19.11.

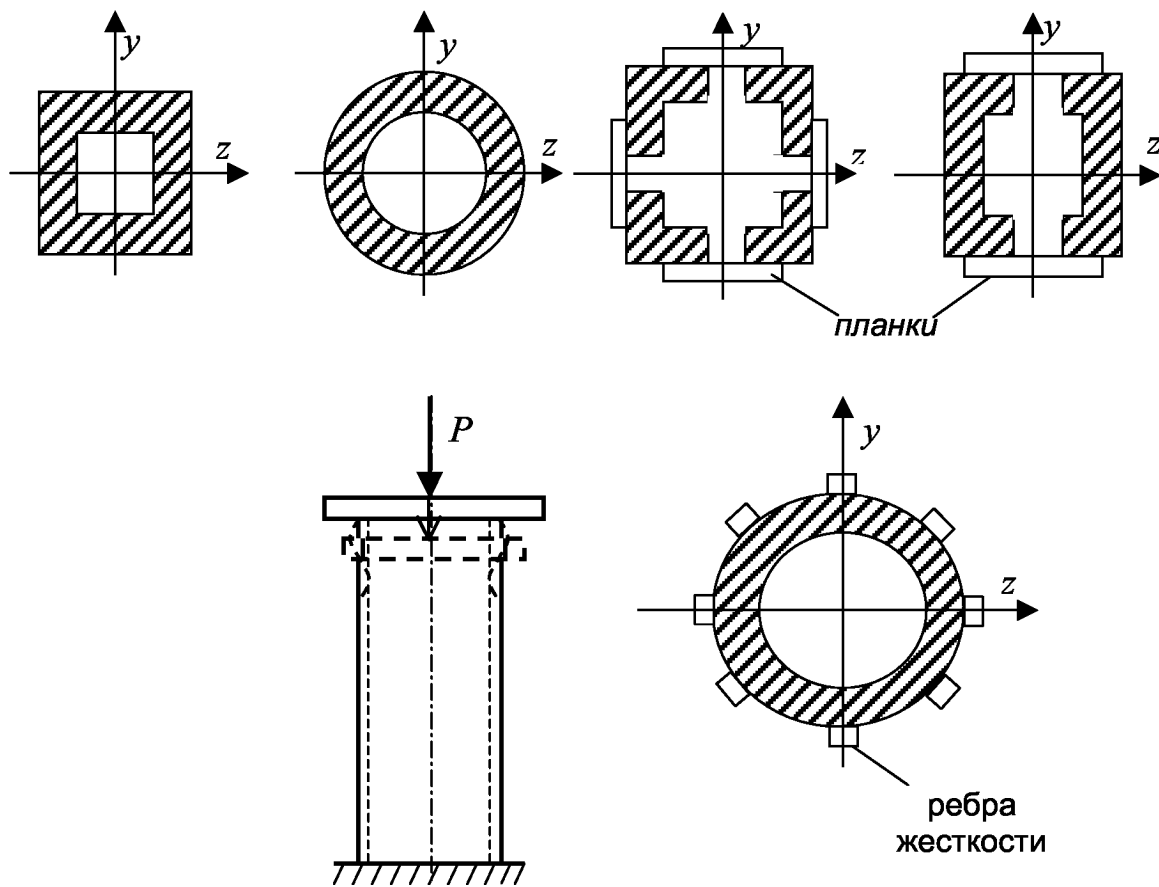


Рис.19.10

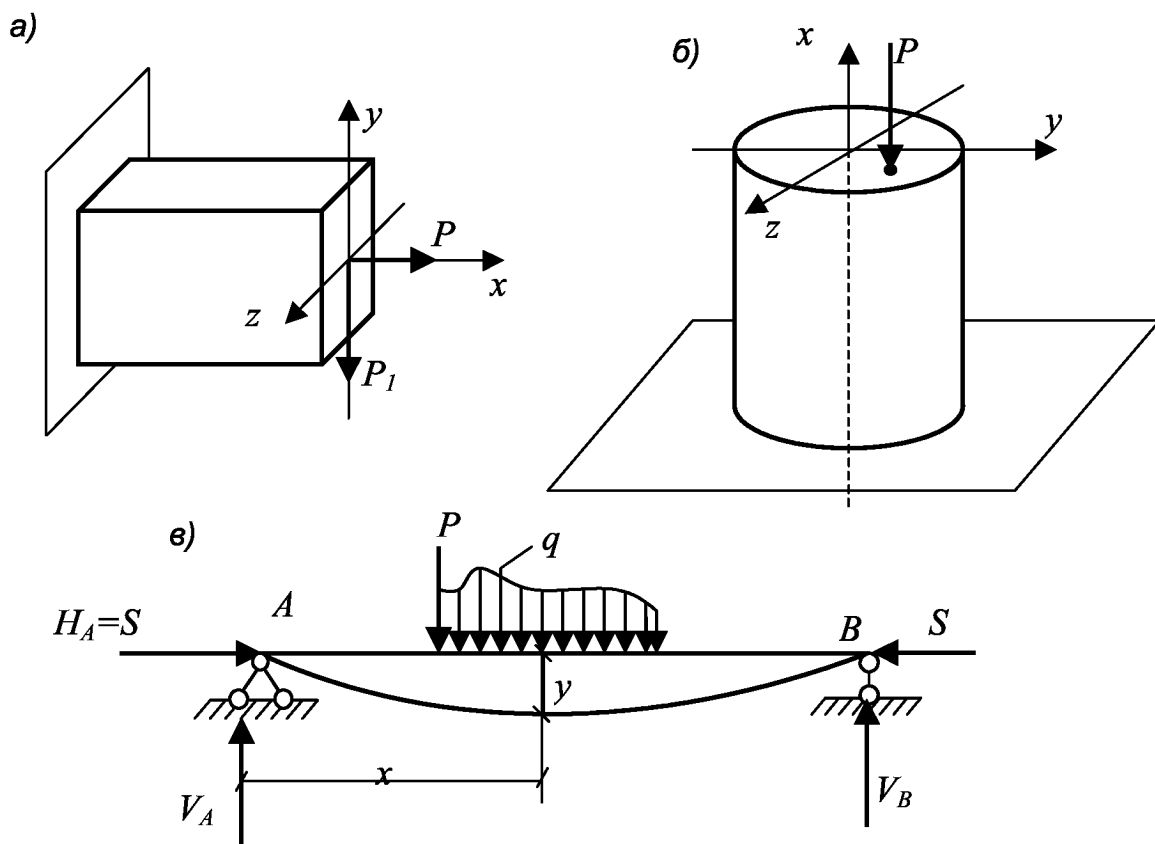


Рис.19.11

Первый стержень (рис.19.11а) испытывает деформацию изгиба с растяжением, второй стержень (рис.19.11б) - внецентренное сжатие, которое можно рассматривать как сумму простых 3-х деформаций: центрального сжатия и изгиба в двух плоскостях. В обоих случаях, используя принцип независимости действия сил, напряжения определяются от каждой простой деформации отдельно и суммируются. Например, напряжения в произвольной точке сечения в первом случае равны:

$$\sigma_i = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z y}{J_z},$$

во втором случае

$$\sigma_i = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}$$

При определении деформаций коротких жестких стержней также применяют принцип независимости действия сил, так как деформации их малы и не зависят от последовательности приложения нагрузки. Расчет производится по недеформируемой схеме.

Рассмотрим третий стержень (рис.19.11в). Поперечная нагрузка  $P, q$  вызывает его изгиб, сжимающая сила  $S$ , приложенная в сечении  $B$ , вызывает его сжатие. Прогиб в произвольном сечении  $x$  равен  $y$ .

Применим ли в этом случае принцип независимости действия сил?

Рассмотрим раздельное действие нагрузки.

Поперечная нагрузка вызывает прогиб  $y_0$  (рис.19.12а), силы  $S$  прогибов не вызывают (рис.19.12б).

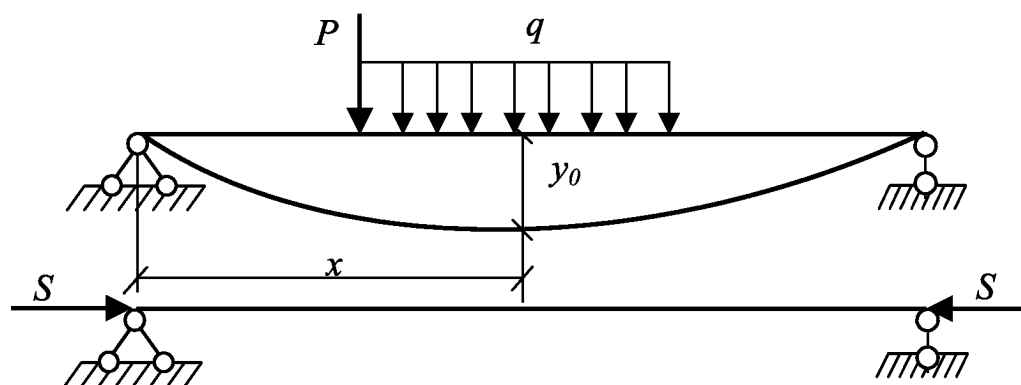


Рис.19.12

Но совершенно очевидно, что при совместном действии этих нагрузок силы  $S$  будут вызывать дополнительный изгиб стержня и

поэтому полный прогиб больше суммы прогибов, возникающих при раздельном действии поперечных и продольных сил. таким образом, в этом случае неприменим принцип независимости действия сил и расчет следует производить по деформированной схеме. Изгибающий момент от сжимающей силы  $S$  необходимо определять с учетом прогибов оси балки.

Изгиб прямого бруса, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты как от продольных, так и от поперечных нагрузок, называется *продольно-поперечным*.

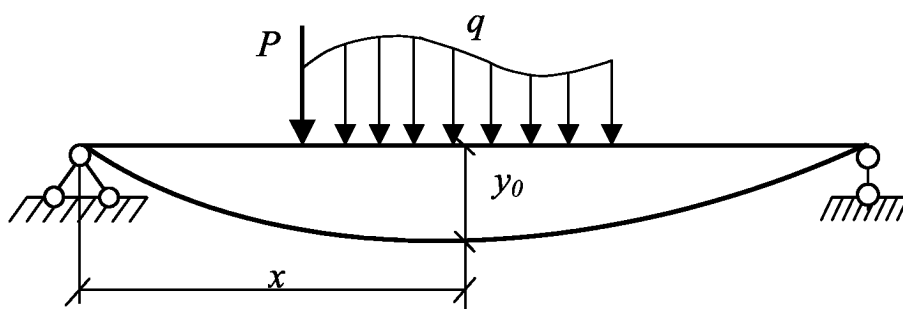


Рис.19.13

Изгибающий момент в поперечном сечении (рис.19.13) равен:

$$M(x) = M_0 + Sy, \quad (19.15)$$

где  $M_0$  - изгибающий момент от поперечной нагрузки,

$Sy$  - дополнительный изгибающий момент, вызываемый осевой силой  $S$ .

Приближенное уравнение изогнутой оси балки при чистом изгибе имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ} \quad (19.16)$$

Подставим значение (19.15) в уравнение (19.16)

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-M_0 - Sy}{EJ}} \quad (19.17)$$

Получили приближенное уравнение изогнутой оси балки при продольно-поперечном изгибе. Точное решение этого уравнения требует больших вычислений и преобразований. Задача особенно усложняется, если поперечная нагрузка делит балку на несколько участков, для каждого из которых следует составлять дифференциальное уравнение и производить его интегрирование.



### 19.9 Приближенный способ расчета при продольно-поперечном изгибе

Уравнение (19.17) представим в следующем виде:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + M_0 = -Sy \quad (19.18)$$

Полный прогиб "y" состоит из двух частей:

- 1) прогиба от поперечной нагрузки –  $y_0$  и
- 2) дополнительного прогиба, возникающего от действия силы  $S$ , он равен  $y - y_0$ .

Под действием только поперечной нагрузки

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{-M_0}{EJ} \quad \text{или} \quad M_0 = EJ \frac{d^2 y_0}{dx^2} \quad (19.19)$$

Подставим (19.19) в (19.18), получим:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} - EJ \frac{d^2 y_0}{dx^2} = -Sy$$

или

$$\frac{d^2 (y - y_0)}{dx^2} = \frac{-Sy}{EJ} \quad (19.20)$$

Будем предполагать, что дополнительные прогибы, вызванные действием сжимающей осевой силой, как и при продольном изгибе изменяются по закону синуса, т.е.

$$y - y_0 = f \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (19.21)$$

где  $f$  - стрела прогиба.

В этом предположении и заключается приближенность решения.

Продифференцируем дважды выражение (19.21)

$$\begin{aligned} \frac{d(y - y_0)}{dx} &= \frac{\pi}{l} f \cos \frac{\pi}{l} x, \\ \frac{d^2 (y - y_0)}{dx^2} &= -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi}{l} x = -\frac{\pi^2}{l^2} (y - y_0). \end{aligned} \quad (19.22)$$

Подставим в (19.20)

$$-\frac{\pi^2}{l^2} (y - y_0) = -\frac{Sy}{EJ} \quad (19.23)$$

Найдем полный прогиб "y".

$$y - y_0 = -\frac{Sy}{EJ \pi^2} \quad \text{или} \quad y - \frac{Sy}{EJ \pi^2} = y_0$$

$$y \left( 1 - \frac{S}{\frac{EJ\pi^2}{l^2}} \right) = y_0 \quad \text{или} \quad y = \frac{y_0}{1 - \frac{S}{\frac{EJ\pi^2}{l^2}}} \quad (19.24)$$

Выражение  $\frac{EJ\pi^2}{l^2}$  по внешнему виду совпадает с формулой Эйлера для критической силы сжатого стержня, имеющего шарнирные опоры на обоих концах. Поэтому это выражение принято называть *эйлеровой силой*

$$\frac{EJ\pi^2}{l^2} = P_0. \quad (19.25)$$

Тогда формула (19.23) перепишется так:

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{S}{P_0}} - \quad (19.26)$$

- формула для определения прогибов при совместном действии продольных и поперечных нагрузок.

Эйлерова сила в формулу (19.26) введена чисто формально. Различие между  $P_{кр}$  и  $P_0$  заключается в следующем:

I. Формула

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (19.27)$$

применима лишь при условии, что гибкость стержня больше предельной (т.е. только для стержней большой гибкости). Понятие эйлеровой силы  $P_0$  не связано с этим ограничением.

II. В формулу (19.27) входит минимальный момент инерции, а при вычислении эйлеровой силы следует брать момент инерции относительно той из главных осей инерции, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки.

Приближенной формулой прогибов (19.26) можно пользоваться и при других способах закрепления концов балки. Тогда эйлерову силу следует вычислять по общей формуле

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (19.28)$$

где  $\mu$  - коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня.

Формулой (19.26) нельзя пользоваться в том случае, если отношение  $\frac{S}{P_0}$  близко к единице. Она применима, когда сжимающая сила находится в интервале  $0 \leq S \leq 0.8P_0$ .

Если  $S \approx P_0$ , то необходимо интегрировать точное дифференциальное уравнение

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{M_0 + Sy}{EJ}$$

Отношение  $\frac{S}{P_0}$  является критерием жесткости, при  $\frac{S}{P_0} \approx 0$  - жесткая балка, при  $\frac{S}{P_0} \approx 1$  - гибкая балка.

Наибольшие сжимающие напряжения в поперечном сечении балки при продольно-поперечном изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M(x)}{W_z} = \frac{S}{F} + \frac{M_0}{W_z} + \frac{Sy}{W_z},$$

с учетом (19.26) имеем:

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M_0}{W_z} + \frac{Sy_0}{W_z} \frac{1}{1 - \frac{S}{P_0}} \quad (19.29)$$

Из формулы (19.29) видно, что напряжения не пропорциональны нагрузке, они растут быстрее нагрузки. Незначительное увеличение нагрузки может вызвать значительное увеличение напряжений и привести к разрушению балки. Поэтому расчет сжато-изогнутых балок следует вести не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке.

Условие прочности по методу допускаемых нагрузок имеет вид:

$$P_{\max} \leq [P], \quad (19.30)$$

где допускается нагрузка

$$[P] = \frac{P_{\text{разр}}}{n}, \quad (19.31)$$

где  $n$  - коэффициент запаса прочности.

### 19.10 Определение допускаемой нагрузки при продольно-поперечном изгибе

Из условия прочности следует, что максимальные (предельные) напряжения не должны превышать предела текучести материала

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_T, \quad (19.32)$$

или

$$\frac{S_{\text{пред}}}{F} + \frac{M_{0 \text{ пред}}}{W_z} + \frac{S_{\text{пред}} y_{\text{пред}}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (19.33)$$

Здесь:  $S_{\text{пред}}$  - предельная сжимающая сила, ее нужно выразить через изгибающую силу.

$$S_{\text{пред}} = K[P]n,$$

где  $K$  - коэффициент пропорциональности,  $y_{\text{пред}}$  - предельный (максимально возможный) прогиб в сжатом сечении.

$$y_{\text{пред}} = \frac{y_{0 \text{ пред}}}{1 - \frac{S_{\text{пред}}}{P_s}}$$

*Пример.* Определить допускаемую нагрузку для простой балки. Предельная сила и поперечная нагрузка должны выражаться через один параметр. Пусть, например,  $S = 100P$ , тогда

$$S_{\text{пред}} = 100[P]n$$

Максимальный изгибающий момент от действия поперечной силы:

$$M_{0 \text{ пред}} = \frac{[P]nl}{4}$$

Прогиб под силой:

$$y_0 = \frac{Pl^3}{48EJ},$$

тогда

$$y_{0 \text{ пред}} = \frac{[P]nl^3}{48EJ}$$

Подставим полученные значения в условие прочности

$$\frac{100[P]n}{F} + \frac{[P]nl}{4W_z} + \frac{100[P]n}{W_z} \frac{\frac{[P]nl^3}{48EJ}}{1 - \frac{100[P]n}{P_s}} = \sigma_T$$

После некоторых преобразований получим квадратное уравнение

$$a[P]^2 + b[P] + c = 0$$

Решив это уравнение, получим значение допускаемой нагрузки.

Сжато-изогнутые стержни также рассчитываются на устойчивость.

## ГЛАВА 20

# ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

### 20.1 Понятие об усталости материалов

Многие элементы машин и конструкций в процессе эксплуатации испытывают напряжения, периодически меняющиеся во времени. Например, такие напряжения испытывают детали кривошипно-шатунного механизма двигателей внутреннего сгорания, валы трансмиссий, лопатки турбин, рельсы и оси железнодорожных вагонов, пролетные строения мостов и др.

Под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок. Как правило, разрушение деталей происходит без видимых остаточных деформаций даже в тех случаях, когда они изготовлены из пластических материалов.

Исследование поверхностей излома деталей, разрушенных от действия циклических напряжений показало, что они имеют две ярко выраженные зоны (рис.20.1)

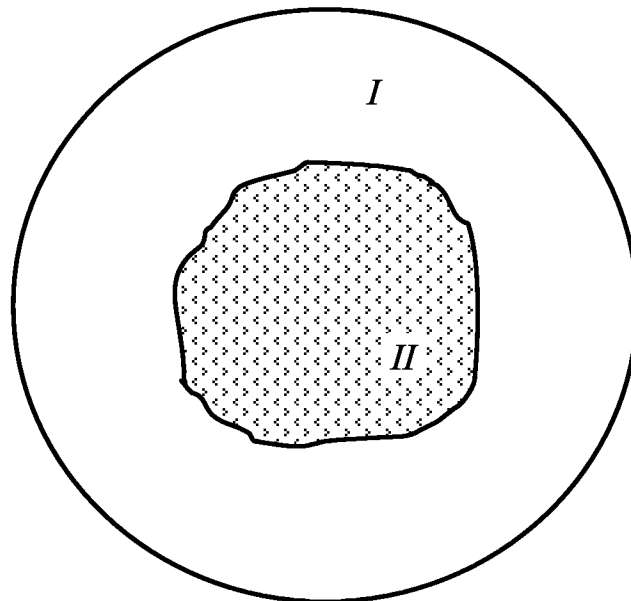


Рис.20.1

Одна из них (I) - гладкая, грани кристаллов смятые, часто имеет налет ржавчины, образованная вследствие постепенного развития трещины; другая (II) - крупнозернистая, имеет характерную для данного материала кристаллическую структуру, образовавшуюся при

окончательном изломе ослабленного трещиной сечения детали. Основываясь на этих наблюдениях были высказаны предположения о том, что причиной разрушения материалов является изменение кристаллической структуры, вызванное действием циклических напряжений. Материал как бы "устает" от действия таких напряжений. Поэтому процесс разрушения материалов при действии переменных напряжений был назван *усталостью*, а способность материалов сопротивляться разрушению при их действии - *выносливостью*.

Остановимся кратко на механизме явления усталости.

Большинство материалов, используемых в технике являются поликристаллическими веществами, состоящими из отдельных зерен и не представляют собой однородного монолита, каким считают материал согласно гипотезам механики материалов. Зерна большинства металлов представляют собой совокупность кристаллов, которые в свою очередь, состоят из системы взаимодействующих между собой атомов, расположенных в строго определенном для данного материала порядке.

Деформация материала связана с искажением кристаллической решетки и изменением межатомных расстояний. Если нагрузки небольшие, то взаимодействие между атомами не нарушается и при разгрузке искажения решетки исчезают. При больших нагрузках в кристаллических зернах по некоторым плоскостям, которые называются *плоскостями скольжения*, происходят необратимые сдвиги. Получившиеся при этом новые образования оказываются более прочным в результате усиления плоскостей скольжения внутри отдельных зерен. Однако процесс сдвига сопровождается появлением зон, где атомные связи нарушаются и появляются микротрещины.

При повторном циклическом нагружении в неблагоприятно расположенных зернах материала происходит накопление микротрещин, которые растут и сливаются в макротрещину. Макротрещина является очагом концентрации напряжений у ее краев, она начинает расти при повторном приложении нагрузки.

Из сказанного видно, что механизм образования трещин и разрушения материалов при циклическом действии нагрузки весьма сложен и до конца не изучен. Природа усталостного разрушения обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Поэтому модель сплошной среды не является применяемой для ее исследования. Для создания теоретических основ усталостной прочности и разрушения материалов необходимо изучить

межатомные и межкристаллические связи с учетом квантового характера их взаимодействия.

Однако физика твердого тела в настоящее время находится еще в такой стадии развития, что не в состоянии служить базой для создания такой теории. Решение этой задачи имеет очень важное практическое значение. Опыт показывает, что до 90% всех поломок деталей машин и конструкций происходит от усталости материала. Эти поломки очень опасны и нередко приводят к тяжелым катастрофам, сопровождающимся человеческими жертвами и большими материальными потерями.

Поэтому приходится решать вопросы усталостной прочности материалов экспериментальными методами. Объединение и систематизация экспериментальных данных и представляет собой в настоящее время содержание теории усталостной прочности.

## 20.2 Основные характеристики циклов

Напряжения в элементах конструкции могут изменяться во времени закономерно или хаотически. При рассмотрении сопротивления материалов действию переменных нагрузок в большинстве случаев встречающихся на практике предполагаются возникающие при этом напряжения являются периодическими функциями времени  $\sigma = f(t)$ .

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется *циклом напряжений*.

Рассмотрим какие напряжения действуют в материале оси движущегося железнодорожного вагона (рис.20.2а).

Эпюры изгибающего момента и поперечной силы представлены на рис.20.2б. Определим напряжения в произвольной точке  $A(y,z)$ , расположенной на поверхности оси, на участке чистого изгиба.

$$\sigma = \frac{P_{\alpha} z}{J} = \frac{Pa}{J} R \sin \omega t$$

Обозначим через  $\sigma_{\alpha} = \frac{Pa}{J} R$  - амплитуду напряжений, тогда

$$\sigma = \sigma_{\alpha} \sin \omega t$$

График зависимости нормальных напряжений в точке  $A$  от времени представлен на рис.20.3.

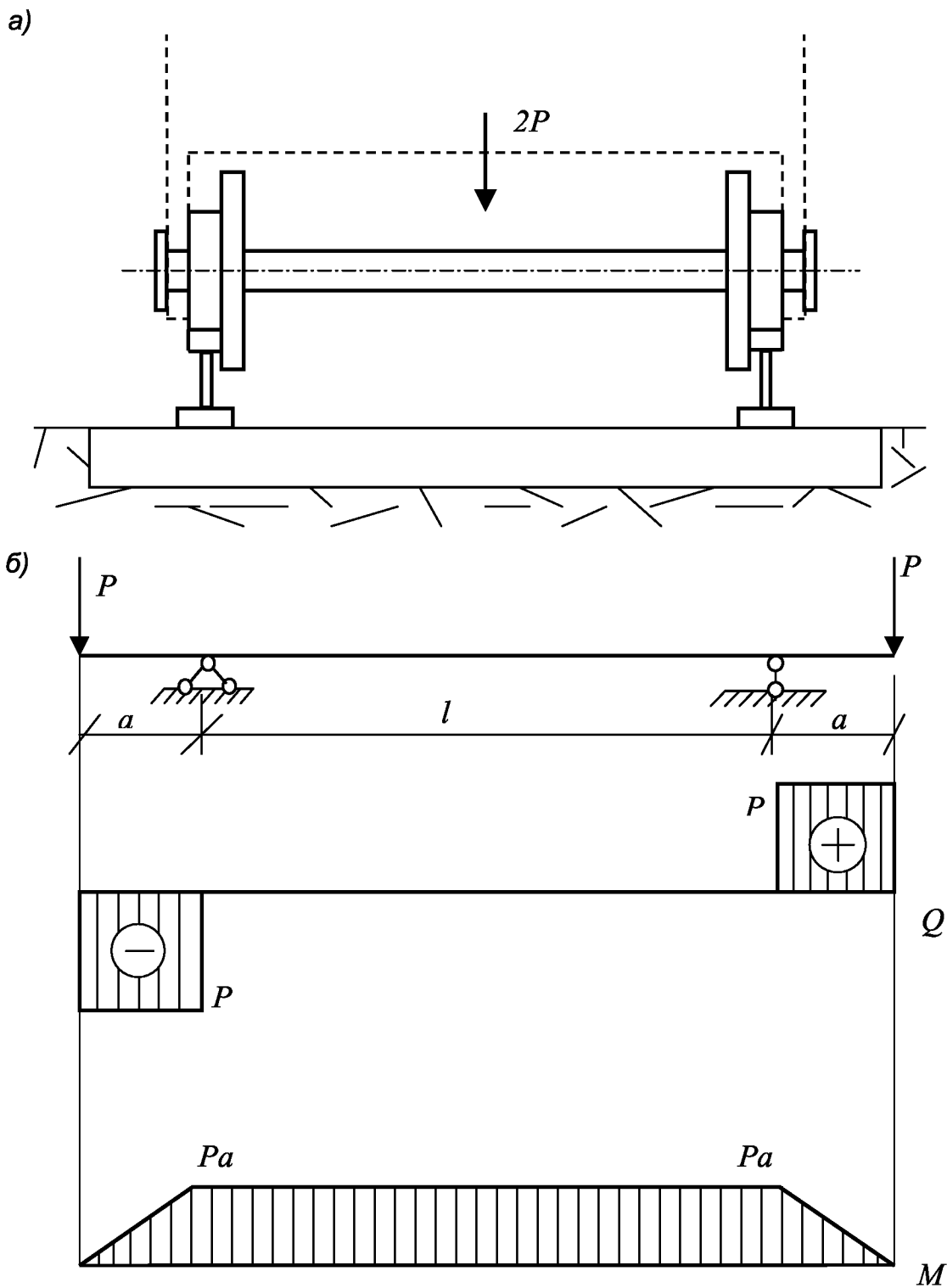


Рис.20.2

Наибольшие и наименьшие напряжения цикла обозначаются  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . Их отношение называется *коэффициентом асимметрии цикла*.

$$\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = r$$



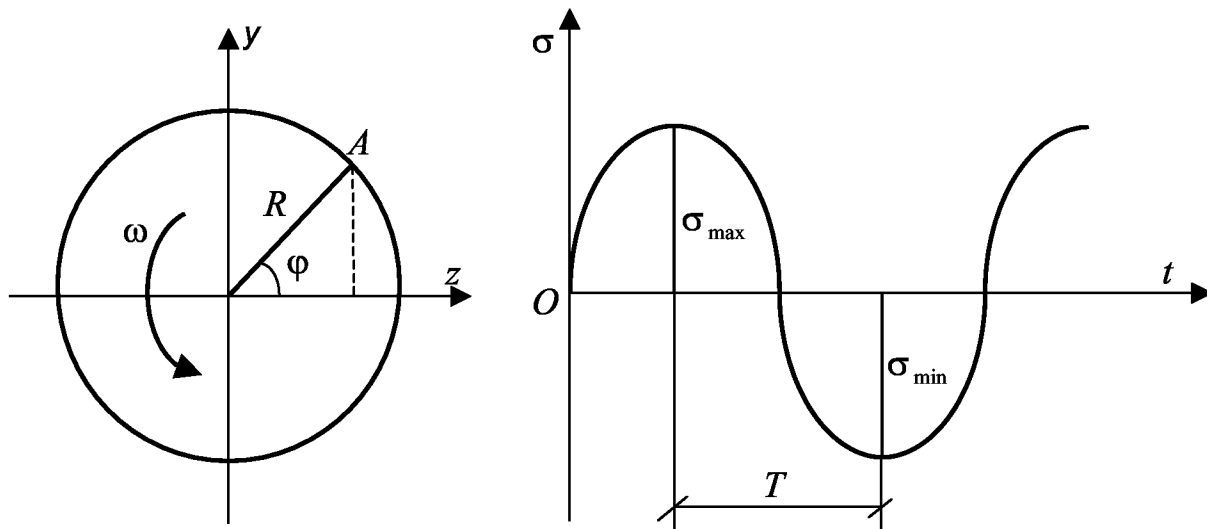


Рис.29.3

В случае, когда:

$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ,  $r = -1$ , то цикл называется симметричным,

$\sigma_{\max} \neq -\sigma_{\min}$  - асимметричный цикл,

$\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  - одного знака ( $r > 0$ ) - цикл знакопостоянный,

$\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  - разных знаков ( $r < 0$ ) - цикл знакопеременный,

$\sigma_{\max} = 0$  или  $\sigma_{\min} = 0$  - цикл пульсационный.

Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии, называются подобными. Коэффициент асимметрии изменяется от  $-1$  до  $+1$ .

В случае асимметричных циклов изменение напряжений во времени задается функцией

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t.$$

график которой представлен на рис.20.4.

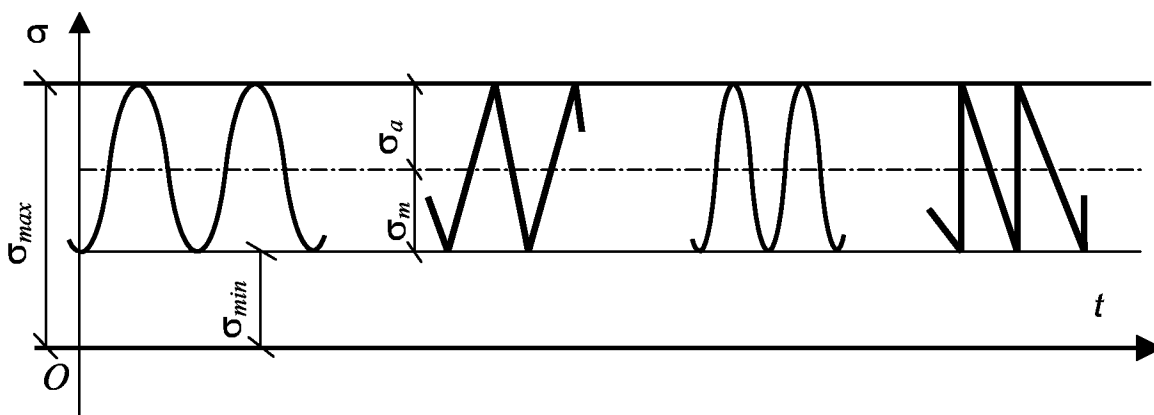


Рис.20.4

Здесь через  $\sigma_m$  обозначено среднее напряжение цикла, а  $\sigma_a$  - амплитуда цикла. Очевидно, что

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

### 20.3 Предел усталостной прочности и его определение

Как отмечалось ранее, появление и развитие усталостных трещин обусловлено действием переменных во времени напряжений. С другой стороны практика показывает, что при правильном расчете детали машин и элементы конструкций могут подвергаться циклическим нагрузкам неограниченно долго не разрушаясь. Основной проблемой расчетов на выносливость является определение условий, при которых появляются и развиваются усталостные трещины.

Эта проблема решается экспериментально путем проведения специальных испытаний. Наиболее широкое распространение получили испытания на усталость при чистом изгибе и симметричном цикле изменения напряжений возникающих при вращении круглого образца (рис.20.5). Расчетная схема представлена на рис.20.5.

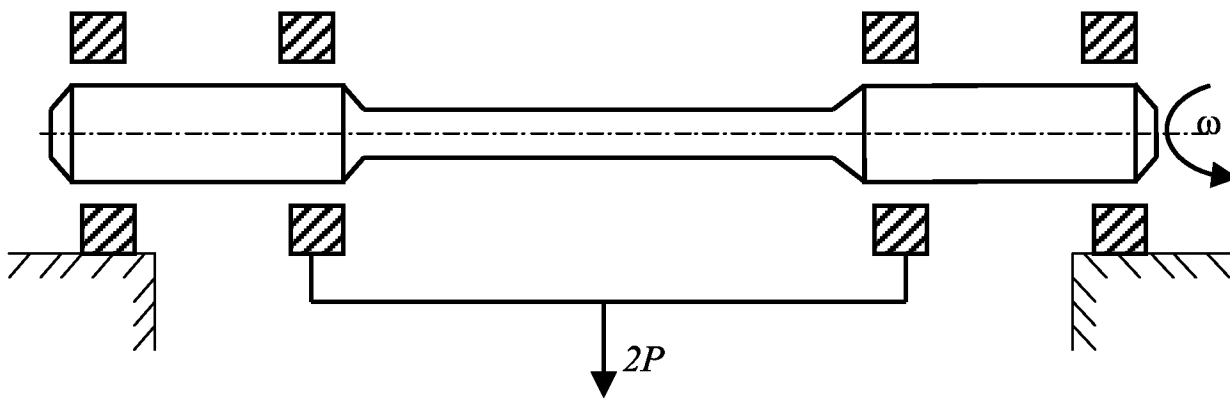


Рис.20.5

Для испытаний изготавливают партию одинаковых образцов (6 - 12мм) диаметром  $d = 7 - 10$ мм. Образцы испытывают при различных условиях нагрузки. На правый образец дают нагрузку, вызывающую напряжения незначительно меньше предела прочности, например, 0,8 - 0,7, а на последующие снижают нагрузку. В результате испытаний определяют число циклов  $N$ , которое выдержал образец до разрушения. По полученным опытным данным строят график зависимости  $f_{\max} = f(N)$  который называется *кривой усталости* или *кривой Веллера* в честь

немецкого ученого, основоположника научного подхода к изучению проблем усталостной прочности. На рис.20.6 представлена кривая усталости для образцов из черных металлов (стали, чугуна и т.п.), а на рис.20.7 для цветных металлов (меди, бронзы, алюминия и т.п.).

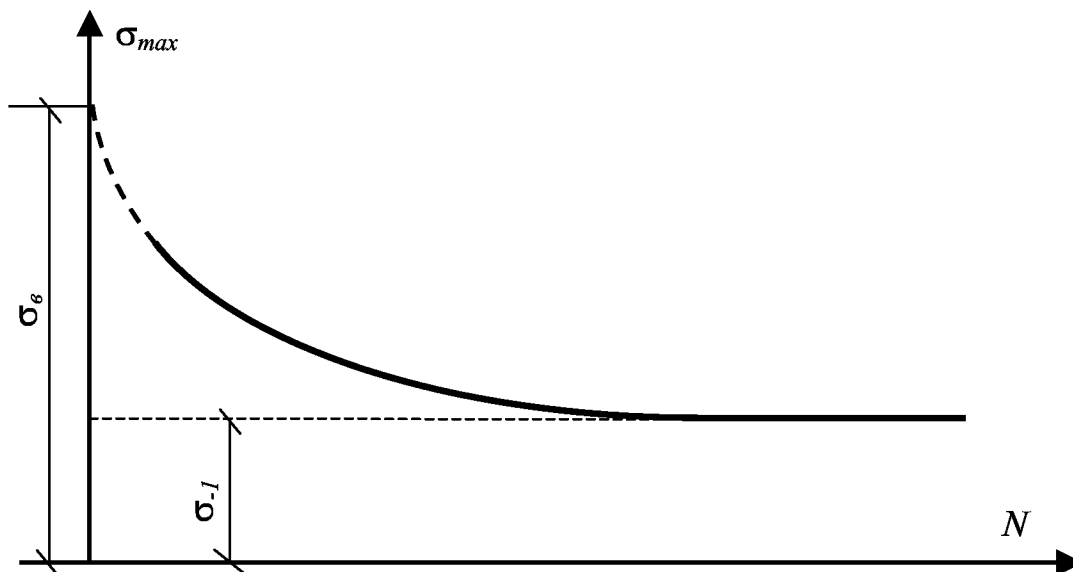


Рис.20.6

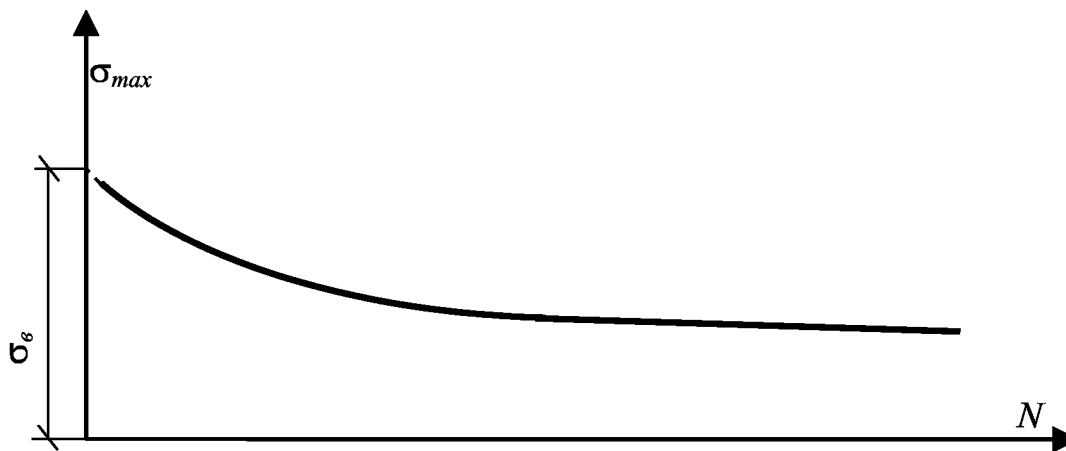


Рис.20.7

Из графика рис.20.6 видно, что с уменьшением  $\sigma_{max}$  число циклов  $N$  до разрушения быстро возрастает и кривая асимптотически приближается к некоторой прямой - асимптоте. Асимптота отсекает на оси ординат значение напряжения, при котором материал не разрушается при любом числе циклов. Это напряжение называется *пределом выносливости* или *пределом усталостной прочности* и обозначается  $\sigma_r$ . Индекс  $r$  - коэффициент асимметрии. для симметричного цикла  $r = -1$ . Опыты показывают, что для

большинства черных металлов кривая выносливости и ее асимптота практически сливаются при  $N = 10^7$ , это число циклов называется базой. Исходя из этого полагают, что если образец не разрушился до  $10^7$  циклов, то он не разрушится и при более длительных испытаниях.

Из рассмотрения характера кривой выносливости для цветных металлов (рис.20.7) видно, что она не с ростом  $N$  спадает постепенно, не имеет асимптоты ни при каком числе циклов. Это значит, что для таких материалов не существует такого числа циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы и при дальнейших испытаниях, т.е. не существует истинного предела выносливости. Поэтому в подобных случаях за базу испытаний принимают  $N = 10^8$ , а максимальное напряжение при котором образец не разрушается при таком числе циклов называется *условным пределом усталости*.

Если максимальные напряжения цикла превышают предел усталостной прочности, то в материале образца будут развиваться усталостные трещины, что приведет к его разрушению.

По кривой Веллера часто бывает трудно определить предел усталостной прочности, так как она медленно приближается к асимптоте. Поэтому при ее построении часто используют в качестве абсциссы не  $N$ , а  $1/N$  или  $\ln N$ . Соответствующие графики представлены на рис.20.8 и рис.20.9.

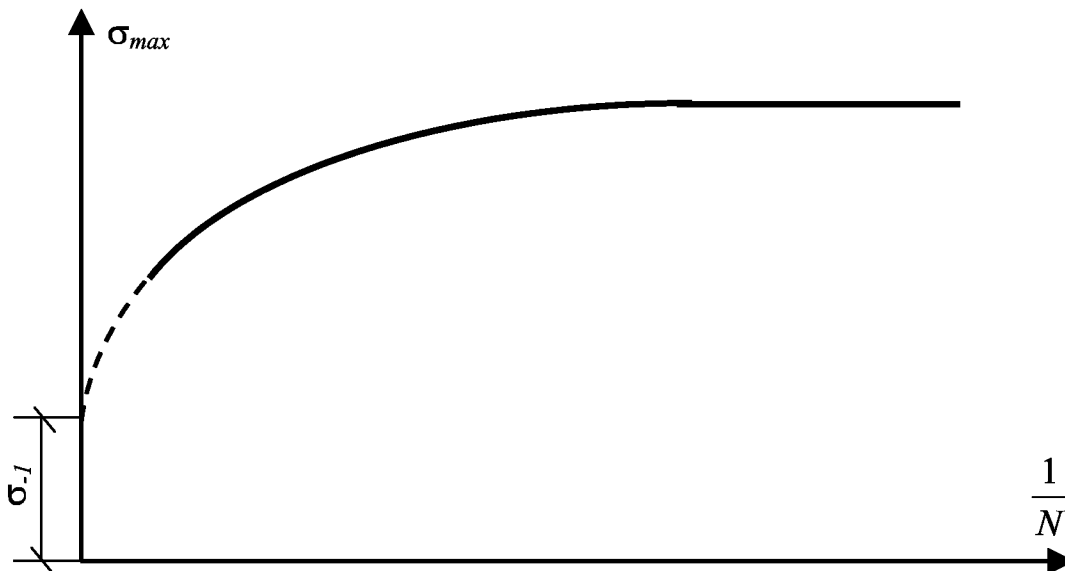


Рис.20.8

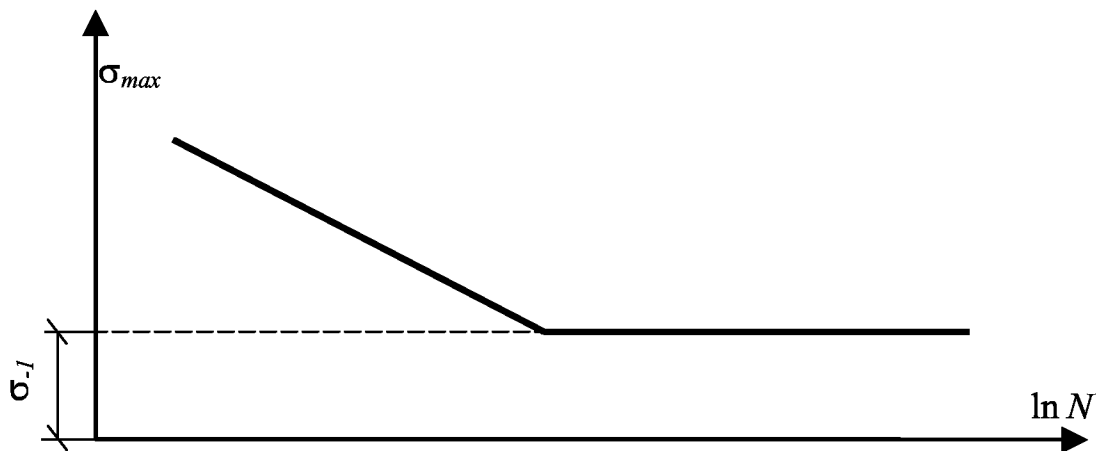


Рис.20.9

По этим графикам предел выносливости определяется более точно.

При испытаниях на усталость наблюдается большой разброс экспериментальных данных и для получения достоверных данных требуется испытание большого числа образцов с последующей статистической обработкой результатов. Поэтому испытания на усталость являются трудоемкой и длительной операцией. В связи с этим представляет большой практический интерес установление связи между пределом выносливости с известными прочностными характеристиками материала. На основании многочисленных экспериментальных данных установлены следующие эмпирические зависимости:

а) для черных металлов:  $n$

$$\sigma_{-1}^n = (0.4 \div 0.5)\sigma_B - \text{при изгибе};$$

$$\sigma_{-1}^o = 0.28\sigma_B - \text{при растяжении-сжатии};$$

$$\tau_{-1} = 0.22\sigma_B - \text{при кручении}.$$

б) для цветных металлов:  $n$

$$\sigma_{-1}^n = (0.24 \div 0.5)\sigma_B - \text{при изгибе}.$$

в) для стали:

$$\sigma_{-1}^o = 0.7\sigma_{-1}^n;$$

$$\tau_{-1} = 0.55\sigma_{-1}^n.$$

г) для чугуна:

$$\sigma_{-1}^o = 0.65\sigma_{-1}^n;$$

$$\tau_{-1} = 0.8\sigma_{-1}^n.$$

Приведенные выше соотношения следует применять с осмотрительностью, т.к. они являются весьма приближенными.

Из вышесказанного следует, что предел усталостной прочности не является характеристикой, только свойств материала, как например для упругости коэффициент Пуассона. Он зависит так же от условий эксперимента, а расчетное напряжение для образца не определяет полностью процесс усталостного разрушения.

#### 20.4 Влияние параметров цикла на усталостную прочность материалов

На величину предела усталостной прочности образцов и деталей влияет целый ряд различных факторов. Кроме физических свойств материалов к ним относятся: параметры циклов, концентрация напряжений, абсолютные размеры образца, состояние его поверхности и др.

Процесс образования и распространения усталостных трещин связан с накоплением пластических деформаций. Поэтому, как следует из опыта, на усталостную прочность влияют в основном наибольшие и наименьшие напряжения цикла и не влияет закон изменения напряжений внутри цикла. Следовательно, циклы, показанные на рис.20.4 равноценны с точки зрения их влияния на усталостную прочность. Учитывая это для упрощения все испытания обычно выполняются только при синусоидальном цикле, т.е. при

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t$$

Основное влияние на усталостную прочность материала оказывает коэффициент асимметрии  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ , т.е.  $\sigma = f(r) = \sigma_r$ .

Характер этой зависимости устанавливают экспериментально. Для этого изготавливают (6 - 7) партий одинаковых образцов по (6 - 10) штук в каждой партии. Каждую партию образцов испытывают при постоянных средних напряжениях и различных амплитудах. В результате испытаний каждой партии образцов определяют наибольшую амплитуду напряжений  $\sigma_a$ , при которой образец не разрушается ни при каком числе циклов. По результатам испытаний строят график зависимости  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ , который называется *диаграммой усталостной прочности* или *диаграммой предельных циклов* (рис.20.10).

По оси ординат диаграммы откладывается значение амплитудного  $\sigma_a$ , а по оси абсцисс  $\sigma_m$  - среднего напряжения предельного цикла.

Каждая пара напряжений, определяющая предельный цикл, изображается точкой на кривой  $AB$  (рис.20.10). Эта кривая на оси ординат отсекает отрезок  $AO$ , равный пределу выносливости для симметричного цикла  $\sigma_{-1}$ , а на оси абсцисс - отрезок  $OB$ , равный пределу прочности  $\sigma_B$ . Очевидно, что

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_r,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

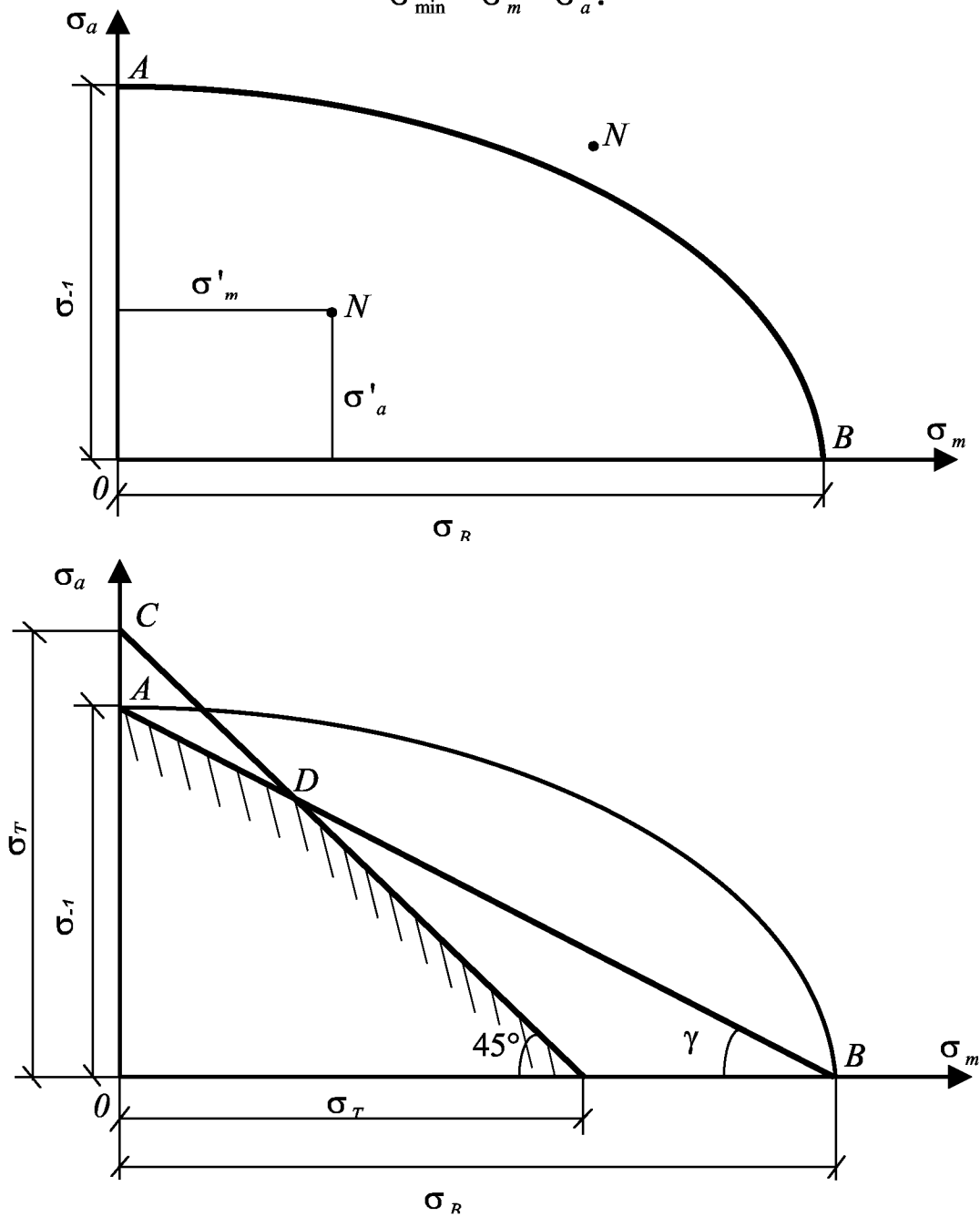


Рис.20.10

При симметричном цикле  $\sigma_m = 0$  и следовательно предел усталости  $\sigma_{-1}$  минимален.

По этой диаграмме легко определить состояние детали, работающей при заданных напряжениях цикла  $\sigma'_a$  и  $\sigma'_m$ . Для этого на диаграмму надо нанести точку  $N(\sigma'_m, \sigma'_a)$ . Если точка  $N$  окажется ниже кривой  $AB$ , то материал будет работать неограниченно долго не разрушаясь. Если точка  $N$  окажется выше кривой  $AB$ , то материал разрушится после нескольких циклов перемен напряжений. Следовательно сама оценка усталостной прочности выполняется просто. Однако построение диаграммы связано с выполнением трудоемких и длительных испытаний. Поэтому для упрощения на практике часто кривую  $AB$  заменяют прямой (см. рис.20.10). Уравнение этой прямой в отрезках по координатным осям имеет вид

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_B} = 1$$

В результате мы отсекаем некоторую область диаграммы, это идет в запас прочности. Область, занятая треугольником  $ABO$  – это область безопасных циклов, с точки зрения усталостной прочности. Но при  $\sigma_{\max} > \sigma_T$  деталь может выйти из строя из-за появления больших пластических деформаций. Поэтому из диаграммы следует исключить зону пластичности, т.е. ограничить диаграмму циклами для некоторых  $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ . Для этого из точки  $L$  расположенной на оси абсцисс и соответствующей напряжению  $\sigma_T$  проведем прямую под углом  $45^\circ$  до пересечения с осью ординат в точке  $C$ . Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} + \frac{\sigma_m}{\sigma_T} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что ниже прямой  $CL$   $\sigma_a + \sigma_m \leq \sigma_T$ , т.е.  $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ . Таким образом  $OACL$  является зоной безопасных циклов по усталости и текучести. Полученная диаграмма называется *схематизированной диаграммой усталостной прочности материала*.

## 20.5 Влияние концентрации напряжений на предел выносливости

Наиболее важным фактором, снижающим предел выносливости, является концентрация напряжений, вызванная резким изменением формы и (или) размеров детали. Концентрация напряжений содействует



зарождению усталостной трещины, которая, развиваясь, приводит к разрушению детали.

При оценке влияния концентрации напряжений на усталостную прочность образца определяют предел выносливости  $\sigma_{-1}$  при симметричных циклах на гладких образцах и на образцах таких же размеров с концентратором напряжений  $\sigma_{-1k}$ . Величина

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$$

называется *эффективным коэффициентом концентрации напряжений*.

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений имеют меньшие значения, чем *теоретические коэффициенты концентрации*  $\alpha_{\sigma}$ , определяемые в предположении упругого поведения материала. Снижение эффекта концентрации напряжений за счет реальных свойств материалов при циклических нагрузках учитывается *коэффициентом чувствительности*

$$q = \frac{K_{\sigma_{-1}}}{\alpha_{\sigma_{-1}}}$$

Значение коэффициента чувствительности для различных материалов приводятся в справочной литературе. Так для высокопрочных сталей  $q \approx 1$ , для углеродистых сталей  $q = 0,6 \dots 0,8$ , для чугуна  $q = 0$ . Следовательно, чем прочнее материал, тем чувствительнее он к концентрации напряжений.

Зная коэффициент чувствительности, можно по  $\alpha_{\sigma}$  определить значение эффективного коэффициента концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma} (\alpha_{\sigma} - 1).$$

## 20.6 Влияние чистоты обработки поверхности на усталостную прочность

С улучшением чистоты обработки поверхности усталостная прочность материала повышается, так как уменьшается количество очагов концентрации напряжений на поверхности. В расчетах это учитывается *коэффициентом качества поверхности*

$$\beta_{nc} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1n}},$$

где  $\sigma_{-1}$  - предел выносливости стандартного полированного образца,

$\sigma_{-1n}$  - предел выносливости стандартного образца с заданной чистотой обработки поверхности.

С повышением прочности материала коэффициент  $\beta_{n\sigma}$  возрастает. Для уменьшения  $\beta_{n\sigma}$  применяют обкатку поверхности роликами или обливку дробью. В некоторых учебных пособиях влияние чистоты обработки поверхности детали на усталостную прочность учитывается коэффициентом  $\varepsilon_{n\sigma} = 1/\beta_{n\sigma}$ .

### 20.7 Влияние размеров на усталостную прочность материала

С увеличением абсолютных размеров деталей усталостная прочность материала снижается, так как в деталях больших размеров имеется больше внутренних дефектов и других очагов зарождения усталостных трещин. Это учитывается в расчетах специальным коэффициентом  $\beta_{m\sigma}$ , который называется *масштабным фактором*

$$\beta_{m\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1m}}$$

Здесь  $\sigma_{-1}$  - предел выносливости стандартного образца ( $d = 7 \text{--} 10 \text{ мм}$ ),

$\sigma_{-1m}$  - предел выносливости геометрически подобного образца, заданных размеров.

Масштабный фактор зависит от прочности материала. С повышением ее  $\beta_{m\sigma}$  возрастает. Иногда в качестве масштабного фактора используется коэффициент  $\varepsilon_{m\sigma} = 1/\beta_{m\sigma}$ .

Среда, паузы в испытаниях, тренировки, температура и т.д. тоже оказывают влияние на усталостную прочность материала, но они присутствуют не всегда. Поэтому учитываются только в специальных случаях.

Наличие всех основных факторов, снижающих усталостную прочность, учитывается в расчетах общим коэффициентом снижения усталостной прочности

$$K_{\sigma D} = K_{\sigma} \beta_{n\sigma} \beta_{m\sigma}.$$

## 20.8 Практические расчеты на выносливость

Все расчеты на выносливость выполняются как проверочные в следующем порядке:

- 1) определяют геометрические размеры деталей без учета циклического действия нагрузки, но по сниженным допускаемым напряжениям;
- 2) определяют все коэффициенты снижения усталостной прочности материала ( $K_{\sigma}$ ,  $\beta_{n\sigma}$ ,  $\beta_{m\sigma}$ ), используя для этого графики и таблицы.
- 3) определяют фактический коэффициент запаса усталостной прочности  $n$ . Если  $n \geq [n]$ , то усталостная прочность будет обеспечена, где  $[n]$  - нормативный коэффициент. Он зависит от назначения детали, условий работы, материала, концентрации и т.д. Обычно  $[n] = 1,4 \dots 3$ .

Методика определения фактического коэффициента запаса усталостной прочности зависит от типа напряженного состояния детали и параметров цикла. Рассмотрим несколько случаев.

### *1. Определение запаса усталостной прочности при линейном н.с. и симметричном цикле*

Если известны:

$\sigma_{-1}$  - предел выносливости материала и

$K_{\sigma D}$  - общий коэффициент снижения усталостной прочности, то

$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}$  - предел выносливости детали, и

$n = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}}$  - коэффициент запаса усталостной прочности.

Следовательно,

$n = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \sigma_{\max}}$  - фактический коэффициент запаса усталостной прочности.

### *2. Определение запаса усталостной прочности при линейном напряженном состоянии и асимметричном цикле*

Воспользуемся схематизированной диаграммой усталостной прочности (рис.20.11), построенной по 3-м характеристикам материала:

$$\sigma_{-1}, \sigma_T \text{ и } \sigma_B.$$



Обозначим через  $\psi_\sigma = \text{tg}\gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$ , тогда  $n = \frac{OK}{ON} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}$ ..

Опыты показывают, что наличие факторов, снижающих усталостную прочность оказывает влияние только на предельные амплитуды цикла и не влияет на  $\sigma_m$ , поэтому коэффициент запаса устойчивой прочности при линейном напряженном состоянии и асимметричном цикле имеет вид:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда  $ON$  пересекает прямую  $DL$  в точке  $K(\sigma''_m, \sigma''_a)$ . Имеем  $n = \frac{\sigma''_{\max}}{\sigma_{\max}}$ , но на прямой  $DL$   $\sigma''_{\max} = \sigma''_m + \sigma''_a = \sigma_T$ , поэтому коэффициент запаса по условию текучести имеет вид:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}$$

При выполнении аналитических расчетов на выносливость не известно какую прямую пересечет  $ON$  в предельном состоянии. Поэтому определяют коэффициент запаса по усталости  $n$  и по текучести  $n_T$ . За расчетный принимают меньшее значение, т.е. требуют, чтобы  $n \geq [n]$ .

Аналогично определяются фактические коэффициенты запаса усталостной прочности при других видах деформаций. Например, при кручении коэффициент запаса усталостной прочности определяется по формулам:

а) при линейном напряженном состоянии и симметричном цикле

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_{\max}}$$

б) при линейном напряженном состоянии и асимметричном цикле

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} \text{ - по усталости } n_T = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m} \text{ - по текучести.}$$

### **3. Определение запаса усталостной прочности при плоском напряженном состоянии и асимметричном цикле**

В этом случае для определения общего коэффициента запаса усталостной прочности используют эмпирическую зависимость

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

откуда

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

- общий коэффициент запаса усталостной прочности.

Здесь  $n_\sigma$  и  $n_\tau$  - коэффициент запаса усталостной прочности по  $\sigma$  и  $\tau$ .

При синхронном изменении  $\sigma$  и  $\tau$  их можно определить по тем же формулам, что при линейном напряженном состоянии.

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi_\tau \tau_m}.$$

При несинхронном изменении  $\sigma$  и  $\tau$  коэффициенты  $n_\sigma$  и  $n_\tau$  вычисляются по формулам, которые приводятся в специальных курсах и справочниках.

## ГЛАВА 21

### РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

#### 21.1 Особенности напряженного состояния оболочек

В различных областях техники широко применяются такие криволинейные элементы конструкций и детали машин, у которых один размер (толщина) значительно меньше двух других. Это цистерны, паровые котлы, газгольдеры, нефтебаки, воздушные и газовые баллоны, резервуары водонапорных башен, части корпусов ракет, самолетов, турбин и т.д.

Такие элементы с точки зрения расчета их на прочность и жесткость относятся к *оболочкам*. Геометрическое место точек, равноотстоящих от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединой поверхностью*. Если срединная поверхность образует сферу, конус, цилиндр или их части, то оболочку называют соответственно сферической, конической и цилиндрической.

В общем случае в сечениях оболочки действуют погонные (отнесенные к единице длины сечения) усилия и моменты (рис.21.1)

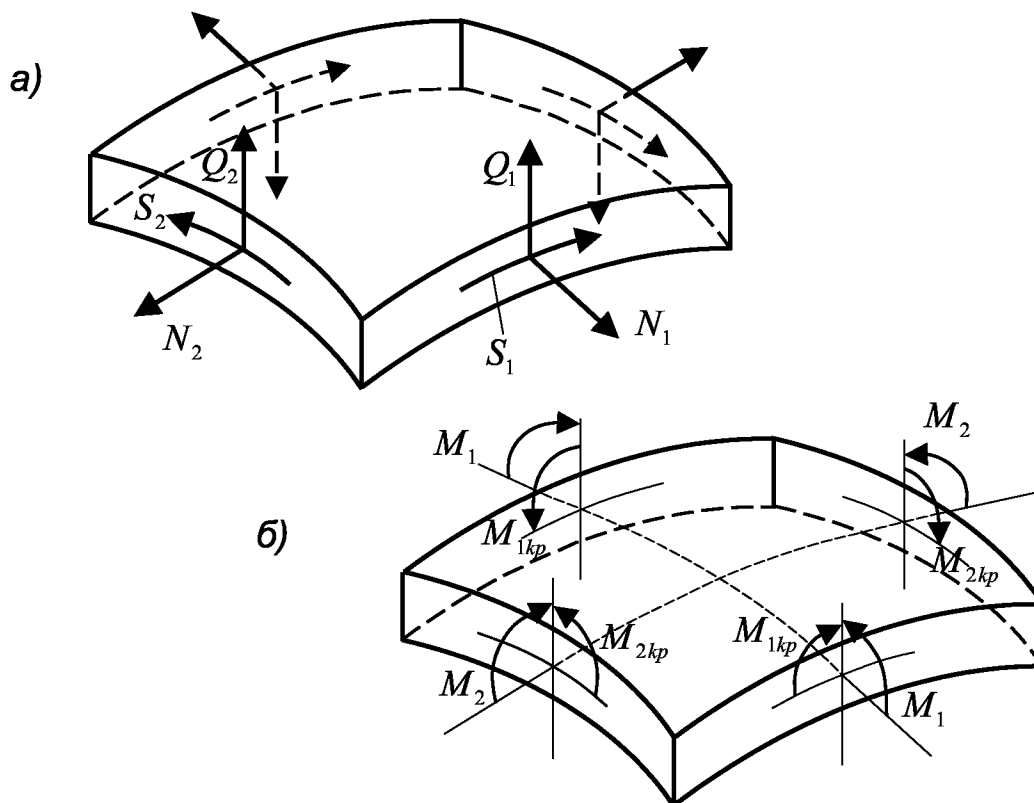


Рис.21.1

$N_1$  и  $N_2$  - нормальные усилия;

$S_1$  и  $S_2$  - касательные (сдвигающие) усилия;

$Q_1$  и  $Q_2$  - поперечные силы;

$M_1$  и  $M_2$  - изгибающие моменты;

$M_{12}$  и  $M_{21}$  - крутящие моменты.

Система дифференциальных уравнений теории оболочек очень сложная и ее решение связано с большими математическими трудностями. В некоторых частных случаях эта система уравнений значительно упрощается и допускает аналитическое решение. В частности, если оболочка представляет собой тело вращения и нагрузка симметрична относительно оси вращения, то задача называется осесимметричной. В этом случае

$$M_{12} = M_{21} = S_1 = S_2 = 0, \quad Q_1 = 0 \text{ (или } Q_2 = 0)$$

Решение задачи также упрощается, если, анализируя геометрию оболочки, характер действующей нагрузки и закрепления краев можно сделать вывод, и то какие-либо усилия или моменты малы по сравнению с остальными.

В частности, если принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по толщине и изгиб отсутствует, т.е.

$$M_{12} = M_{21} = M_1 = M_2 = 0, \quad Q_1 = Q_2 = 0,$$

то получим уравнения *безмоментной теории оболочек*. Следует заметить, что многие элементы машиностроительных и строительных конструкций рассчитывают по безмоментной теории.

Наиболее простыми являются уравнения осесимметричной безмоментной теории оболочек. В этом случае отличными от нуля будут только нормальные усилия  $N_1$  и  $N_2$ .

Вопросы общей теории оболочек не рассматриваются в курсе механики материалов, они представляют собой самостоятельный раздел механики деформируемого твердого тела. Мы рассмотрим только задачи осесимметричной безмоментной теории оболочек.

## 21.2 Определение напряжений в осесимметричных оболочках по безмоментной теории

Рассмотрим осесимметричную оболочку толщиной  $h$  находящуюся под действием давления  $P$  газа, воды или сыпучих материалов (рис.21.2)



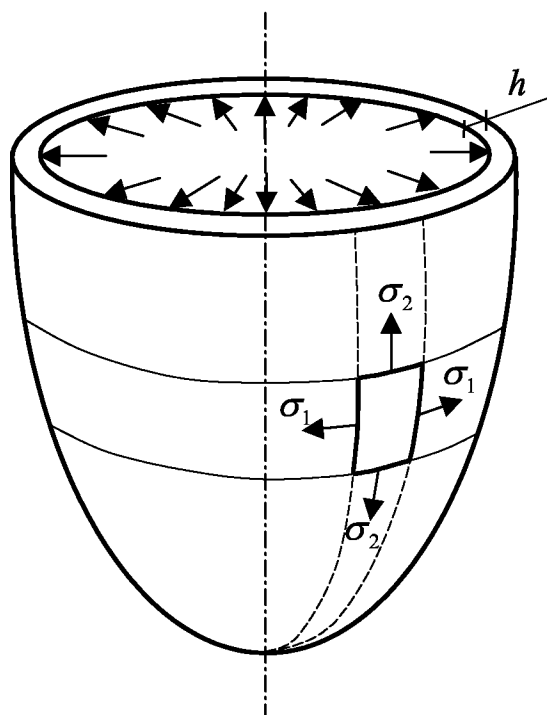


Рис.21.2

Обозначим  $\rho_1$  и  $\rho_2$  радиусы кривизны оболочки в окружном и меридиональном направлениях. Предположим, что толщина оболочки мала по сравнению с радиусами кривизны, давление  $P$  может меняться по высоте оболочки, но постоянно в окружном направлении, свободный край оболочки закреплен так, что на него могут действовать только усилия, касательные к меридиональным кривым. Тогда оболочка будет находиться в осесимметричном безмоментном напряженном состоянии.

Выделим из оболочки двумя меридиональными и двумя осевыми сечениями элемент  $ABCD$  (рис.21.3).

Длины граней элементов обозначим  $dS_1$  и  $dS_2$ . На этих гранях элемента действуют нормальные усилия  $N_1$  и  $N_2$ , вызванные напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . На гранях  $AB$  и  $CD$  усилия  $N_2$  и напряжения  $\sigma_2$  отличаются на величину приращения  $dN_2$  и  $d\sigma_2$ .

Составим условия равновесия элемента  $ABCD$ , приравнявая сумму проекций всех сил на нормаль к нему к нулю. В результате получим

$$2N_1 dS_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 dS_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_1 + N_2) dS_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} - P dS_1 dS_2 = 0$$

Слагаемое  $N_2 dS_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2}$  имеет более высокий порядок малости

по сравнению с другими слагаемыми и им можно пренебречь. Учитывая, что углы  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$  малые и что  $dS_1 = \rho_1 d\varphi_1$ ,  $dS_2 = \rho_2 d\varphi_2$  находим:

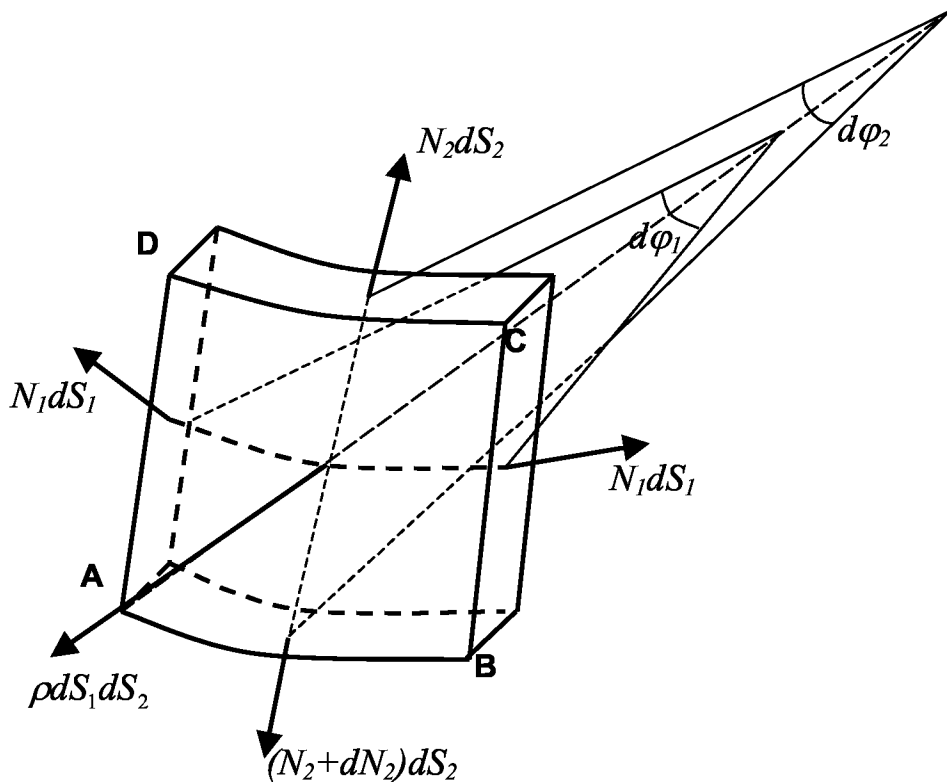


Рис.21.3

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{dS_1}{\rho_1}, \quad \sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{dS_2}{\rho_2}$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, преобразуем их к виду:

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = P$$

Нормальные усилия связаны с напряжениями зависимостями

$$N_1 = \sigma_1 h, \quad N_2 = \sigma_2 h.$$

Подставив их в предыдущее равенство, получим формулу Лапласа

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{P}{h}$$

В этой формуле два неизвестных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Для их определения необходимо еще одно уравнение. Дополнительное уравнение составим рассматривая равновесие конечной части оболочки отсеченной коническим нормальным сечением (рис.21.4).

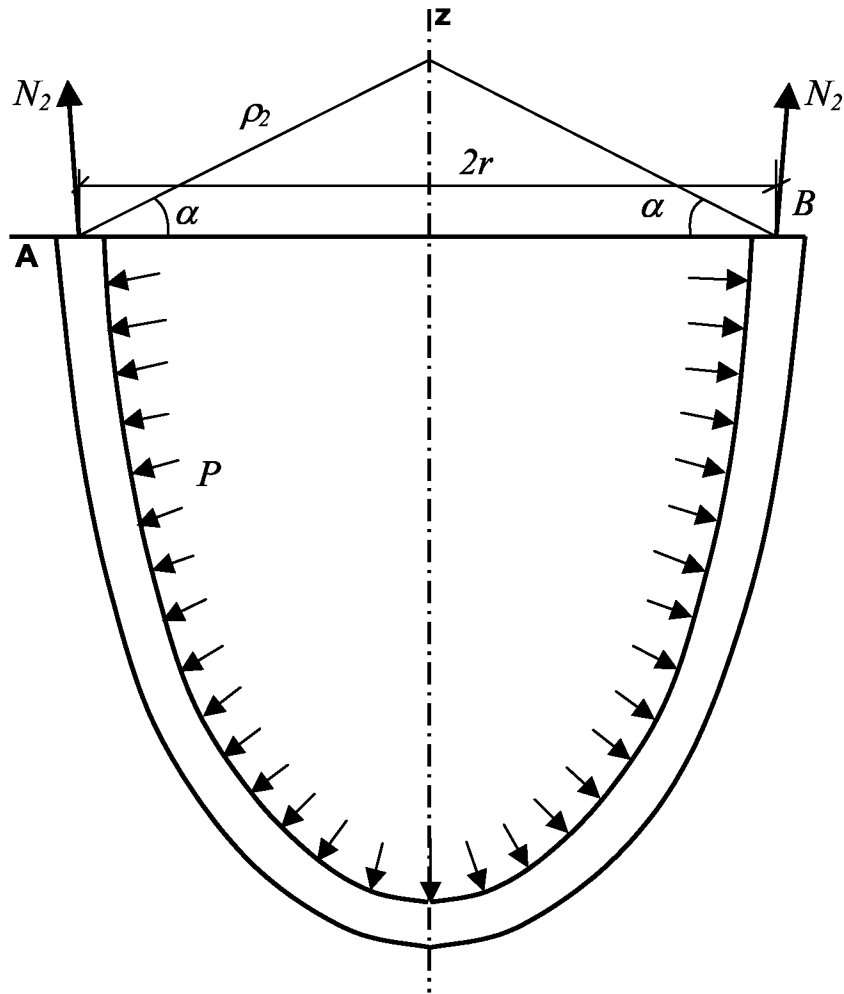


Рис.21.4

По контуру сечения  $AB$  действуют погонные усилия  $N_2$ , результирующая вертикальная составляющая которого равна  $\sigma_2 2\pi r h \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол наклона между касательной к контуру и осью вращения оболочки. Проектируя все силы на вертикальную ось, получим:

$$\sum P_z = \sigma_2 2\pi r h \cos \alpha - P = 0$$

где  $P$  - вертикальная составляющая равнодействующей внешних сил, действующих на отсеченную часть оболочки. Из этого уравнения определяем меридиональное напряжение

$$\sigma_2 = \frac{P}{2\pi r h \cos \alpha}$$

Если оболочка находится под действием внутреннего давления газа  $P$ , то  $P = \rho \pi r^2$  и

$$\sigma_2 = \frac{Pr}{2\pi \cos \alpha}.$$

В случае оболочки, заполненной жидкостью

$$P = \gamma H \pi r^2 + Q,$$

где  $\gamma$  - вес единицы объема жидкости;

$H$  - толщина слоя жидкости над сечением  $AB$ ;

$Q$  - вес жидкости в части оболочки, расположенной ниже сечения  $A_1B_1$ .

Меридиональное напряжение в этом случае равно:

$$\sigma_2 = \frac{\gamma H \pi r^2 + Q}{2\pi r h \cos \alpha}$$

Напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются главными напряжениями. Третье главное напряжение, напряжение, направленное по нормали к срединной поверхности оболочки. В тонкостенных оболочках оно значительно меньше  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Действительно

$$\sigma_3 \approx P, \quad \sigma_1 \approx \frac{P\rho_1}{h} \quad \text{или} \quad \frac{P\rho_2}{h}$$

Поэтому  $\sigma_3$  в расчетах тонкостенных оболочек учитывается двухосным. Для расчета на прочность оболочек следует пользоваться теориями прочности.

**Пример 1. Расчет цилиндрического баллона заполненного газом, давление которого равно  $P$  (рис.21.5).**

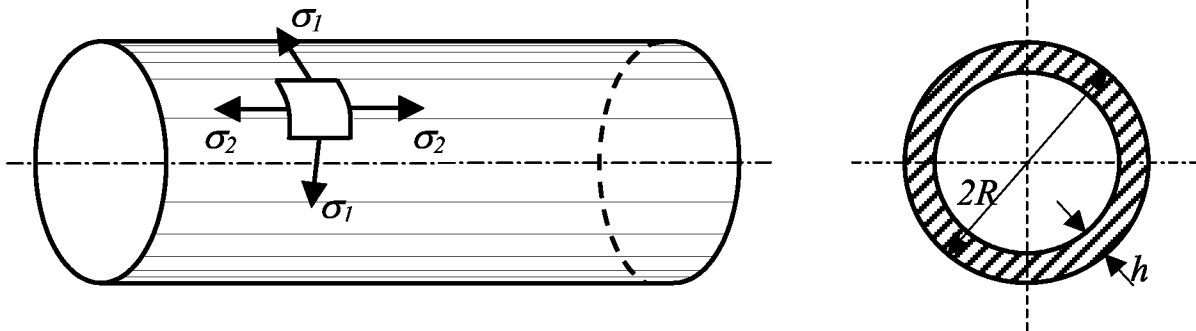


Рис.21.5

В этом случае  $\rho_2 = \infty$ ,  $\rho_1 = R$ .

Из формулы Лапласа:

$$\frac{\sigma_1}{R} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{P}{h}$$

Находим

$$\sigma_1 = \frac{PR}{h}$$

Для определения  $\sigma_2$  проведем сечение  $A_1B_1$  и рассмотрим равновесие любой из частей баллона

$$\sum P_z = \pi R^2 \rho - \sigma_2 2\pi R = 0$$

Откуда

$$\sigma_1 = \frac{PR}{2h}$$

Следовательно, окружные напряжения  $\sigma_1$  вдвое больше меридиональных  $\sigma_2$ .

Для оценки прочности баллона воспользуемся теориями прочности:

1. По первой теории прочности:

$$\sigma_{\text{эkv}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma],$$

т.е.

$$\sigma_1 = \frac{PR}{2h} \leq [\sigma] \quad \text{или}$$

$$h \geq \frac{PR}{[\sigma]}$$

2. По второй теории прочности:

$$\sigma_{\text{эkv}}^{II} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 \leq [\sigma]$$

$$\frac{PR}{h} - \mu \frac{PR}{2h} \leq [\sigma], \quad h \geq \frac{PR}{[\sigma]} (1 - 0.5\mu)$$

3. По третьей теории прочности:

$$\text{так как } \sigma_3 = 0, \text{ то } \sigma_{\text{эkv}}^{III} = \sigma_1 = \sigma_{\text{эkv}}^I.$$

4. По четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{эkv}}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]$$

Подставляя сюда выражения для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получим

$$h \geq \frac{PR \sqrt{3}}{[\sigma] 2}$$

**Пример 2. Расчет на прочность шарового котла (рис.21.6).**

В этом случае вследствие центральной симметрии

$$\rho_1 = \rho_2 = R, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Поэтому из формулы Лапласа получим

$$\sigma = \frac{PR}{2h}.$$

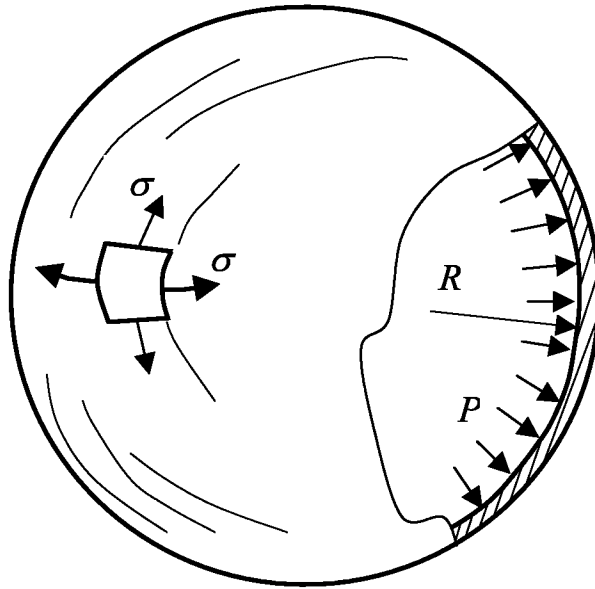


Рис.21.6

Из условия прочности по первой, третьей и четвертой теориям прочности имеем:

$$h \geq \frac{PR}{2[\sigma]}$$

По второй теории прочности

$$h \geq \frac{PR}{2[\sigma]}(1 - \mu).$$

**Пример 3. Расчет на прочность конического резервуара (рис.21.7) заолненного жидкостью с объемной плотностью  $\gamma$ .**

В этом случае

$$\rho_1 = \frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}, \quad \rho_2 = \infty, \quad P = \gamma(H - z)$$

Из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_1}{\frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{\gamma(H - z)}{h}$$

находим

$$\sigma_1 = \frac{\gamma(H - z)z \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha}$$

Для определения воспользуемся формулой для меридионального напряжения в случае резервуара, заолненного жидкостью. В этом случае:

$$P = \gamma(H - z)\pi z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{3}\pi z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \gamma\pi z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left(H - \frac{2}{3}z\right)$$

Тогда

$$\sigma_2 = \frac{\gamma z \left(H - \frac{2}{3}z\right) \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha}.$$

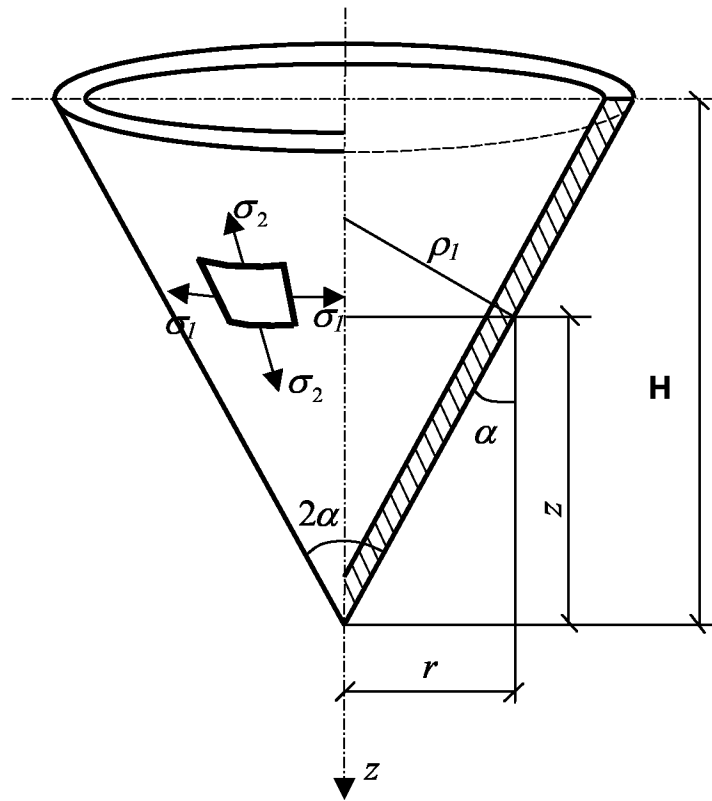


Рис.21.7

Исследования показали, что  $\sigma_1$  достигает максимума при  $z = H/2$  и равно

$$\sigma_1^{\max} = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha},$$

а  $\sigma_2$  - при  $z = \frac{3}{4}H$  и равно

$$\sigma_2^{\max} = \frac{3\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha}.$$

Поэтому для оценки прочности конического резервуара следует рассматривать несколько сечений и найти наиболее неблагоприятное сочетание напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

## ГЛАВА 22

### РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

В различных отраслях техники используются толстостенные цилиндры, работающие при действии внутреннего и (или) внешнего давления, такие как: сосуды высокого давления, стволы артиллерийских орудий, втулки с прессовыми насадками, быстровращающиеся диски и т.д. При их расчетах теория расчета тонкостенных оболочек не применяется, так как гипотезы, положенные в ее основу, не выполняются. Методы расчета толстостенных цилиндров нагруженных внешним и внутренним давлением разработаны французским ученым Г.Ляме. Поэтому эта задача называется задачей Ляме.

#### 22.1 Толстостенный цилиндр под действием внутреннего и наружного давления (задача Ляме)

Цилиндр считается толстостенным, если отношение толщины его стенки к среднему радиусу больше одной десятой.

Рассмотрим толстостенный цилиндр с внутренним радиусом  $r_1$  и наружным –  $r_2$  находящийся под действием внутреннего  $p_1$  и наружного  $p_2$  давления (рис.22.1). Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузки напряжения и деформации тоже будут симметричными относительно оси и одинаковыми во всех поперечных сечениях. Поэтому из цилиндра можно вырезать двумя поперечными сечениями кольцо толщиной  $l = 1$  и рассмотреть его напряженное состояние.

Выделим в этом кольце двумя радиальными сечениями, образующими между собой угол  $d\varphi$  и двумя окружными сечениями, отстоящими друг от друга на  $dr$ , бесконечно малый элемент  $ABCD$  (рис.22.2). Вследствие симметрии этот элемент в процессе деформации перекашиваться не будет, поэтому на гранях его касательные напряжения отсутствуют и действуют только главные нормальные напряжения. Нормальные напряжения на цилиндрической поверхности с радиусом  $r$  равны  $\sigma_r$ ; с радиусом  $r + dr$  - равны  $\sigma_r + d\sigma_r$ . Нормальные напряжения в окружном направлении (тангенциальные) равны  $\sigma_t$ .

Третье главное напряжение  $\sigma_z$ , действует на площадках совпадающих с поперечным сечением. Его величина зависит от



условий нагруження циліндра осевими силами по торцям. В  
 случае, когда на цилиндр действует продольная сила  $N$ , осевые  
 напряжения равны

$$\sigma_z = \frac{N}{(r_2^2 - r_1^2)}.$$

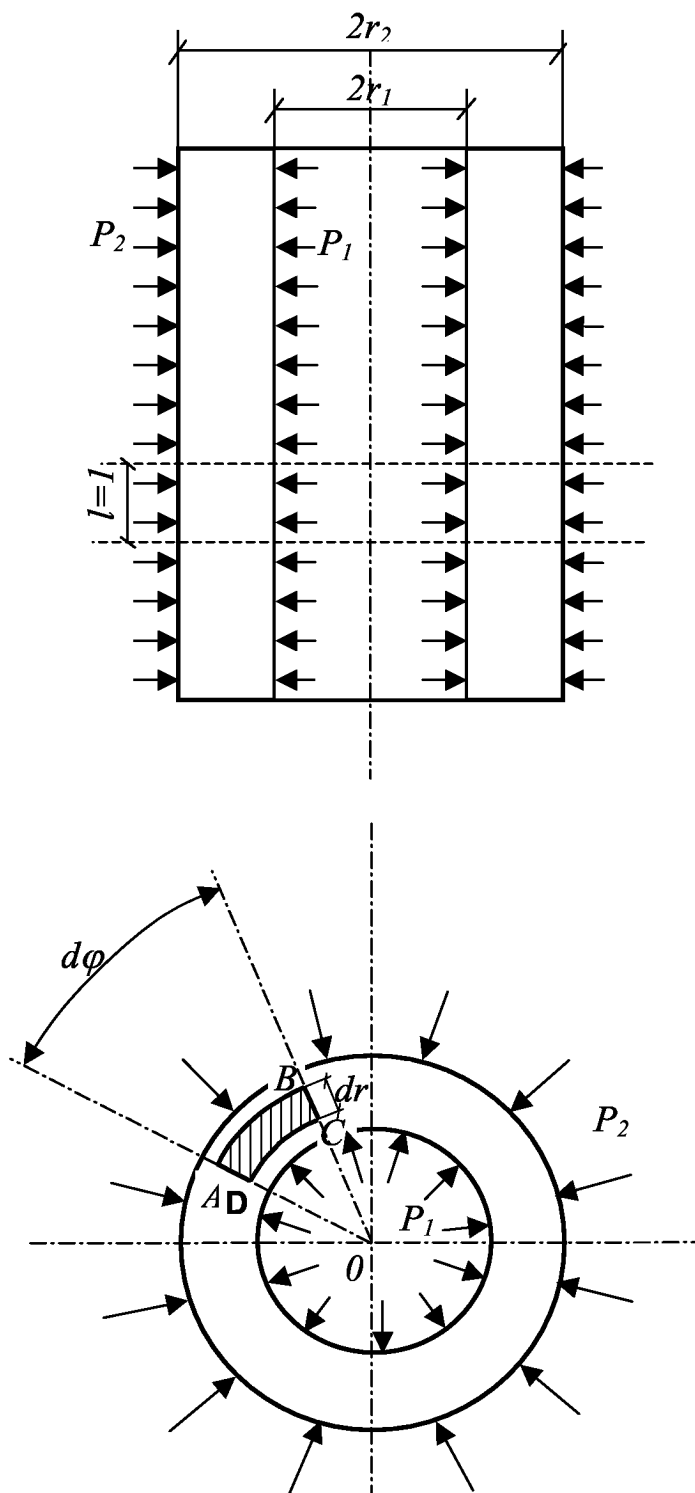


Рис.22.1

При расчетах толстостенных цилиндров нельзя считать, что  $\sigma_t = const$  по толщине цилиндра и пренебрегать величиной радиальных напряжений  $\sigma_r$ , так как они могут быть того же порядка, что и  $\sigma_t$ . Поэтому расчет толстостенных цилиндров нельзя производить по безмоментной теории тонкостенных оболочек, т.е. пользоваться формулами, полученными нами в предыдущей главе.

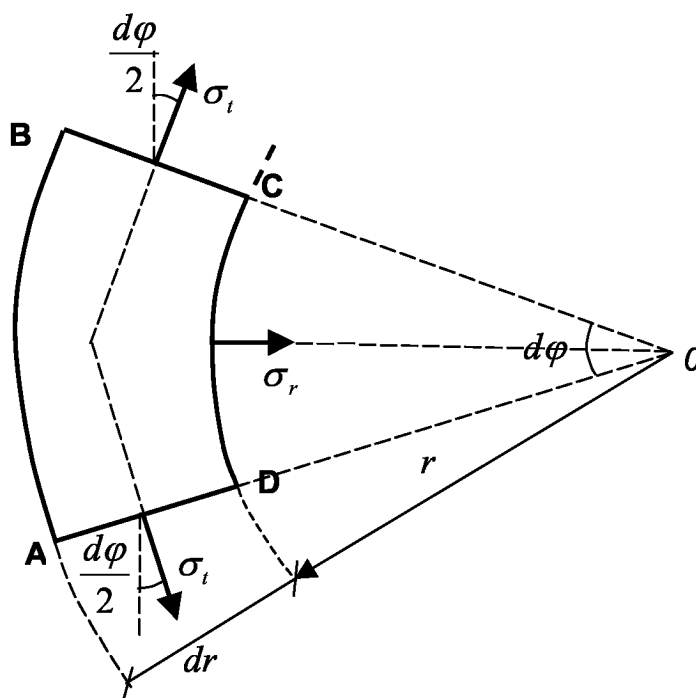


Рис.22.2

При закрытых с торцов цилиндрах их можно определить из условия равновесия ( $\sum P_z = 0$ ) части цилиндра, так как на достаточном удалении от днщ напряжения  $\sigma_z$  распределяются по поперечному сечению равномерно. Составим уравнение равновесия части цилиндра.  $\sum P_z = P_1 \pi r_1^2 - P_2 \pi r_2^2 - \sigma_z (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = 0$ . Из этого уравнения получим

$$\sigma_z = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Для определения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  составим условие равновесия бесконечно малого элемента ABCD (рис.22.2). Спроектируем все устойчивые силы на направление вдоль радиуса цилиндра.

$$\sum P_r = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\phi - \sigma_r r d\phi - 2\sigma_t dr \sin \frac{d\phi}{2} = 0$$

Учитывая, что  $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$  для малых углов и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка малости, получим

$$\sigma_r dr + r d\sigma_r - \sigma_t dr = 0$$

Так как в этом уравнении два неизвестных, а других уравнений равновесия составить нельзя, то задача является статически неопределимой. Для ее решения следует составить уравнения совместности деформаций элементов цилиндра.

Радиальные перемещения произвольной точки цилиндра обозначим  $u$ . Она является функцией радиуса  $r$  и не изменяется по длине цилиндра. Рассмотрим деформацию элемента (рис.22.3). Вследствие осевой симметрии радиальные  $\varepsilon_r$  и тангенциальные  $\varepsilon_t$  относительные деформации зависят только от  $u$ . Точка  $A$ , вследствие деформации получает перемещение  $u$ , а точка  $B$  - перемещение  $u + du$ . Тогда

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}.$$

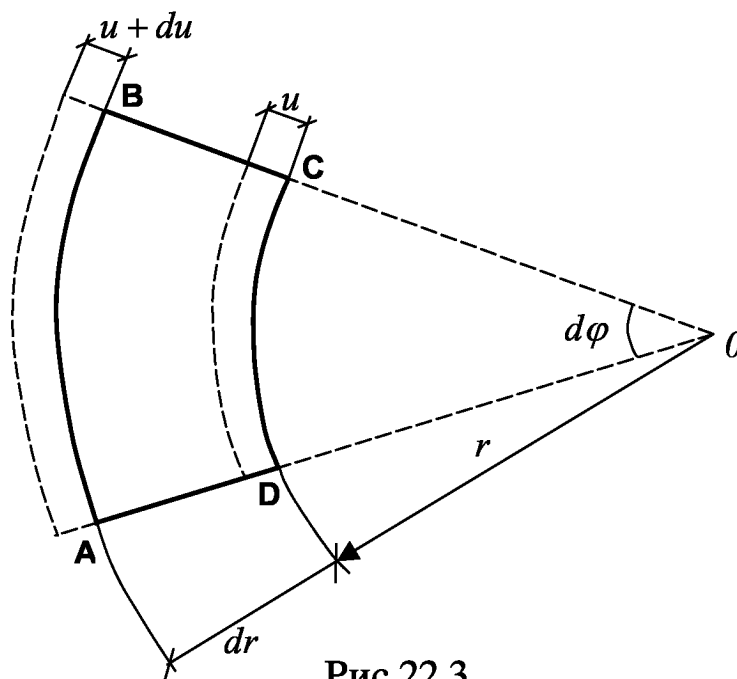


Рис.22.3

Длина отрезка окружности  $CD$  до деформации равна  $2\pi r$ . После деформации радиус увеличился на величину  $u$  и длина отрезка стала равной  $2\pi(r + u)$ . Следовательно

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}.$$

Относительная деформация цилиндра в осевом направлении постоянна по всему сечению, т.е.

$$\varepsilon_z = const$$

Будем рассматривать это соотношение как условие совместности деформаций. Выразим  $\varepsilon_z$  через напряжения из обобщенного закона Гука.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)] = const.$$

Так как  $E$  и  $\mu$  - постоянные, характеризующие механические свойства материала цилиндра, а  $\sigma_z = const$ , то

$$\sigma_r + \sigma_t = A = const$$

- это соотношение является условием совместности деформации.

Отсюда находим  $\sigma_t = A - \sigma_r$  и подставляя в уравнение равновесия получим  $2\sigma_r dr + r d\sigma_r = A dr$ . Левую часть уравнения можно записать в виде  $\frac{1}{r} d(\sigma_r r^2) = A dr$ . Интегрируя это уравнение

находим  $\sigma_r r^2 = A \frac{r^2}{2} + B$ . Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий на поверхностях цилиндра

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_1} = -P_1, & -P_1 r_1^2 = \frac{A}{2} r_1^2 + B \\ \sigma_r|_{r=r_2} = -P_2, & -P_2 r_2^2 = \frac{A}{2} r_2^2 + B \end{cases}$$

Решив эту систему совместно, получим:

$$\frac{A}{2} = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = -\frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Подставим значения  $\frac{A}{2}$  и  $B$  в формулу для  $\sigma_r$ , получим:

$$\sigma_r = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Формулу для  $\sigma_t$  получим из уравнения совместности деформаций.

$$\sigma_t = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Перемещение  $u$  найдем используя выражение для  $\varepsilon_r$  и обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_t)]$$

Подставляя выражения для напряжений, получим

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} - \frac{\mu}{E} \sigma_r r$$

Это формулы Ляме для определения радиальных перемещений в толстостенных цилиндрах.

Следует иметь в виду, что приведенные выше формулы для определения перемещений и напряжений справедливы для сечений удаленных от торцов цилиндра.

Рассмотрим два частных случая загрузки цилиндра.

1). *Цилиндр нагружен только внутренним давлением;  $P_1 = P$ ,  $P_2 = 0$ .*

Формулы для напряжений и перемещений в этом случае имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) P, \quad \sigma_t = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) P.$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{P r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 P}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}.$$

Эпюры распределения напряжений по толщине цилиндра построенные по этим формулам приведены на рис.22.4. Напряжения по толщине цилиндра изменяются по гиперболическим законам, причем  $\sigma_r$  всюду сжимающее, а  $\sigma_t$  - растягивающее.

На наружной поверхности (при  $r = r_2$ )

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} P$$

На внутренней поверхности (при  $r = r_1$ )

$$\sigma_r = -P, \quad \sigma_t = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} P.$$

Наибольшие значения  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  действуют на внутренней поверхности цилиндра. Следовательно, наиболее опасными с точки зрения прочности цилиндра являются точки расположенные на внутренней поверхности.

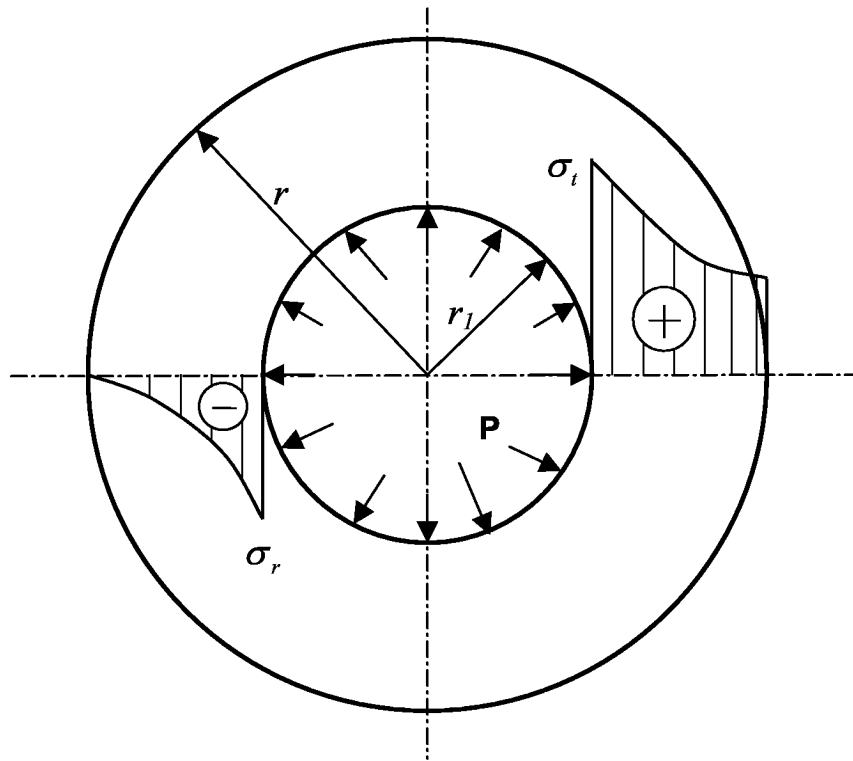


Рис.22.4

Исследуем, как изменяются напряжения  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  в зависимости от толщины цилиндра  $h$ . Пусть  $r_2 = r_1 + h$ . Тогда

$$\sigma_t|_{r=r_1} = \frac{(r_1 + h)^2 + r_1^2}{h(2r_1 + h)} P, \quad \sigma_t|_{r=r_2} = \frac{2r_1^2}{h(2r_1 + h)} P.$$

Радиальные напряжения не зависят от толщины цилиндра: на внутренней поверхности  $\sigma_r = P$ , на наружной -  $\sigma_r = 0$ .

При малом значении  $h$

$$\sigma_t|_{r=r_1} \approx \sigma_t|_{r=r_2} \approx \frac{r_1}{h} P.$$

Таким образом, в тонкостенных цилиндрах тангенциальные напряжения  $\sigma_t$  распределяются почти равномерно по толщине, и относятся к величине радиальных напряжений  $\sigma_r$ , как  $\frac{r_1}{h}$ .

Если толщина цилиндра увеличивается и  $r_2 = \infty$ , выражения для напряжений принимают вид:

$$\sigma_r = -\frac{r_1^2}{r^2} P, \quad \sigma_t = -\frac{r_1^2}{r^2} P$$

На внутренней поверхности  $\sigma_t = -\sigma_r = P$ .

2). Цилиндр нагружен только внешним давлением  $P_2 = P$ ,  $P_1 = 0$ .

Из формул Ляме в этом случае получим:

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) P, \quad \sigma_t = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) P.$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{P r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 P}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}.$$

Графики распределения напряжений по толщине цилиндра построенные по этим формулам приведены на рис.22.5. Из графиков видно, что  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  - отрицательны во всех точках.

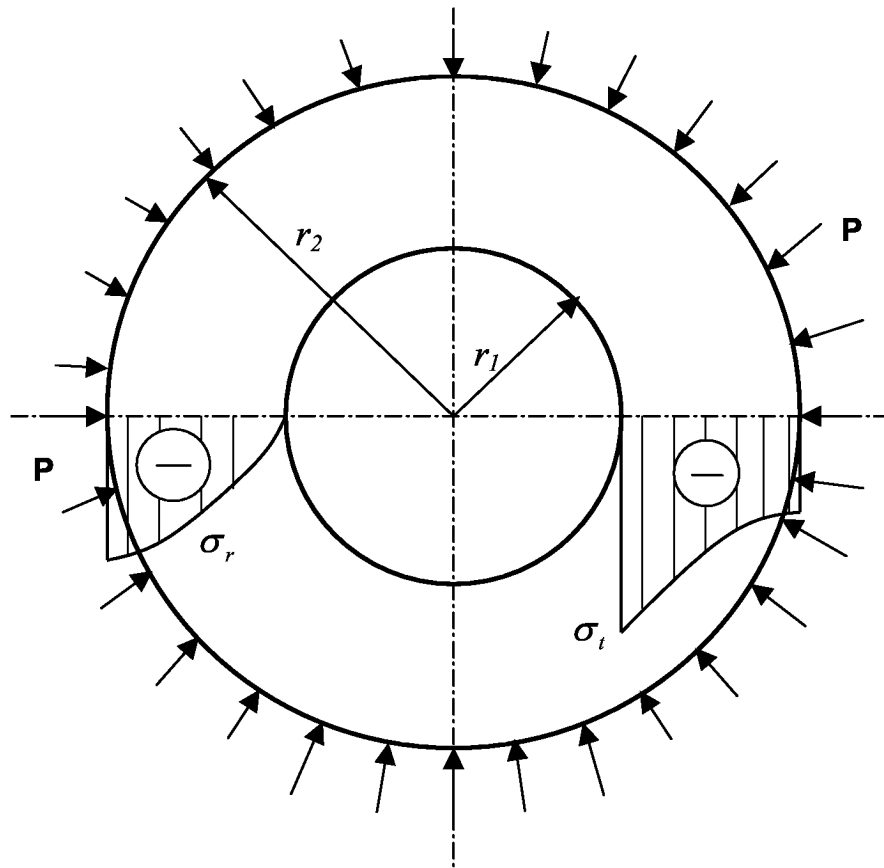


Рис.22.5

На внутренней поверхности (при  $r = r_1$ )

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} P.$$

На наружной поверхности (при  $r = r_2$ )

$$\sigma_r = -P, \quad \sigma_t = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} P.$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения  $\sigma_t$  действуют на внутренней поверхности цилиндра. Следовательно,

наиболее опасным с точки зрения прочности цилиндра и при действии внешнего давления являются точки расположенные на внутренней поверхности цилиндра.

Из рассмотренных примеров следует, что для хрупкого материала более опасным является случай действия внутреннего давления, так как возникают большие растягивающие напряжения  $\sigma_t$ , которые могут привести к разрушению. При действии внутреннего давления  $P_1 = P$  и увеличении толщины стенки, т.е. при  $r_2 = \infty$ ,  $\sigma_{t\max} = P$ ,  $\sigma_r = -P$ . Используя III-ю теорию прочности  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ , получим  $P - (-P) \leq [\sigma]$ ,  $P \leq \frac{[\sigma]}{2}$  т.е. давление в цилиндре не должно превосходить некоторой постоянной величины.

Используя третью теорию прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_t - \sigma_r \leq [\sigma]$$

получим

$$P \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

Следовательно, не зависимо от толщины стенки цилиндр не может выдержать внутреннего давления большего  $\frac{[\sigma]}{2}$ . Объясняя это тем, что с увеличением радиуса напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  убывают пропорционально  $r^2$  и материал наружных слоев цилиндра работает малоэффективно. Таким образом, увеличение толщины стенки цилиндра  $h$  может служить средством увеличения прочности только до определенной ее величины  $h_0$ .

Для повышения прочности толстостенных цилиндров используют на практике другой способ - способ, основанный на использовании составных цилиндров.

## 22.2 Расчет составных цилиндров

Конструкцию и расчет цилиндров соединенных с натягом предложил русский ученый академик Гадолин А.В. (1828 – 1892 г.г.) в связи с разработкой методов повышения прочности стволов артиллерийских орудий.

Пусть мы имеем два цилиндра (рис.22.6). Внутренний радиус одного цилиндра равен  $r_1$ , наружный -  $r_c$ . У другого



цилиндра наружный радиус  $r_2$ , а внутренний  $r_c - \Delta$ . Если большой цилиндр нагреть, то малый может быть свободно вставлен внутрь его. После остывания внешний радиус внутреннего цилиндра уменьшится на величину  $u_1$ , а внутренний радиус внешнего цилиндра увеличится на величину  $u_2$ . При этом должно выполняться условие

$$u_2 - u_1 = \Delta$$

и между цилиндрами возникает контактное давление  $P_k$ .

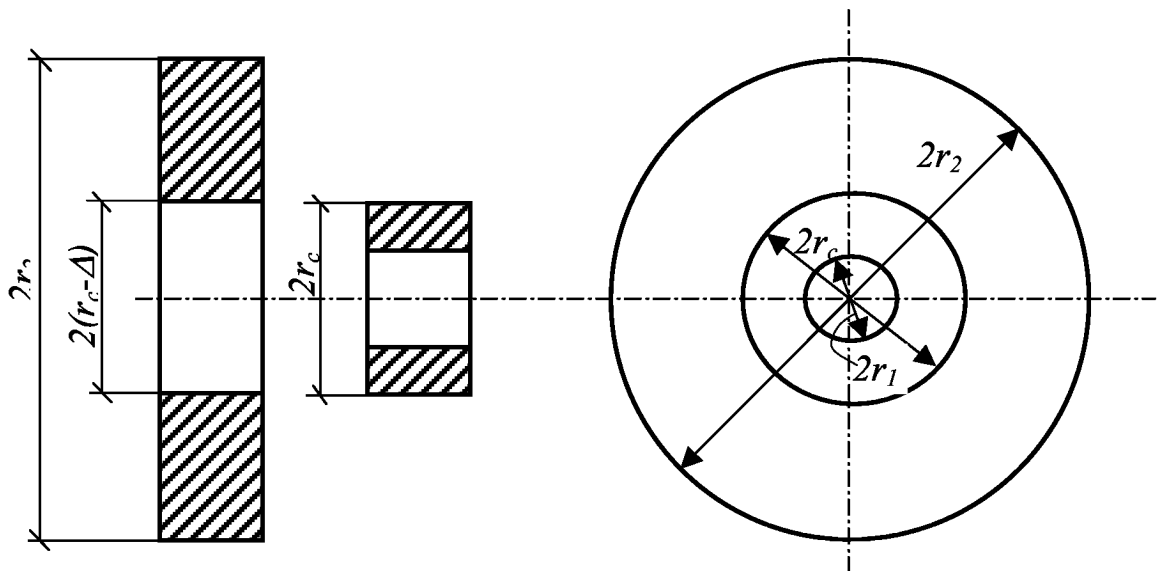


Рис.22.6

Перемещение  $u_1$  определим по формуле Ляме, если положить в ней  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = P_r$ , а  $r_2 = r = r_c$

$$u_1 = -\frac{1-\mu}{E} \frac{r_c^3}{r_c^2 - r_1^2} P_k - \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_c}{r_c^2 - r_1^2} P_k$$

Положив  $P_2 = 0$ ,  $P_1 = P_k$ , а  $r_1 = r_c$  определим перемещение  $u_2$

$$u_2 = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_c^3}{r_2^2 - r_c^2} P_k + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_c}{r_2^2 - r_1^2} P_k$$

Если оба цилиндра изготовлены из одного материала, то контактное давление определяется по формуле:

$$P_k = \frac{E\Delta}{2r_c^3} \frac{(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Таким образом, в результате посадки внутренний цилиндр оказался под давлением внешнего давления  $P_k$ , а внешний - под действием такого внутреннего давления. Напряжения в цилиндрах, вызванные этим давлением определяются по приведенным выше формулам. Эпюра их распределения показана на рис.22.7.

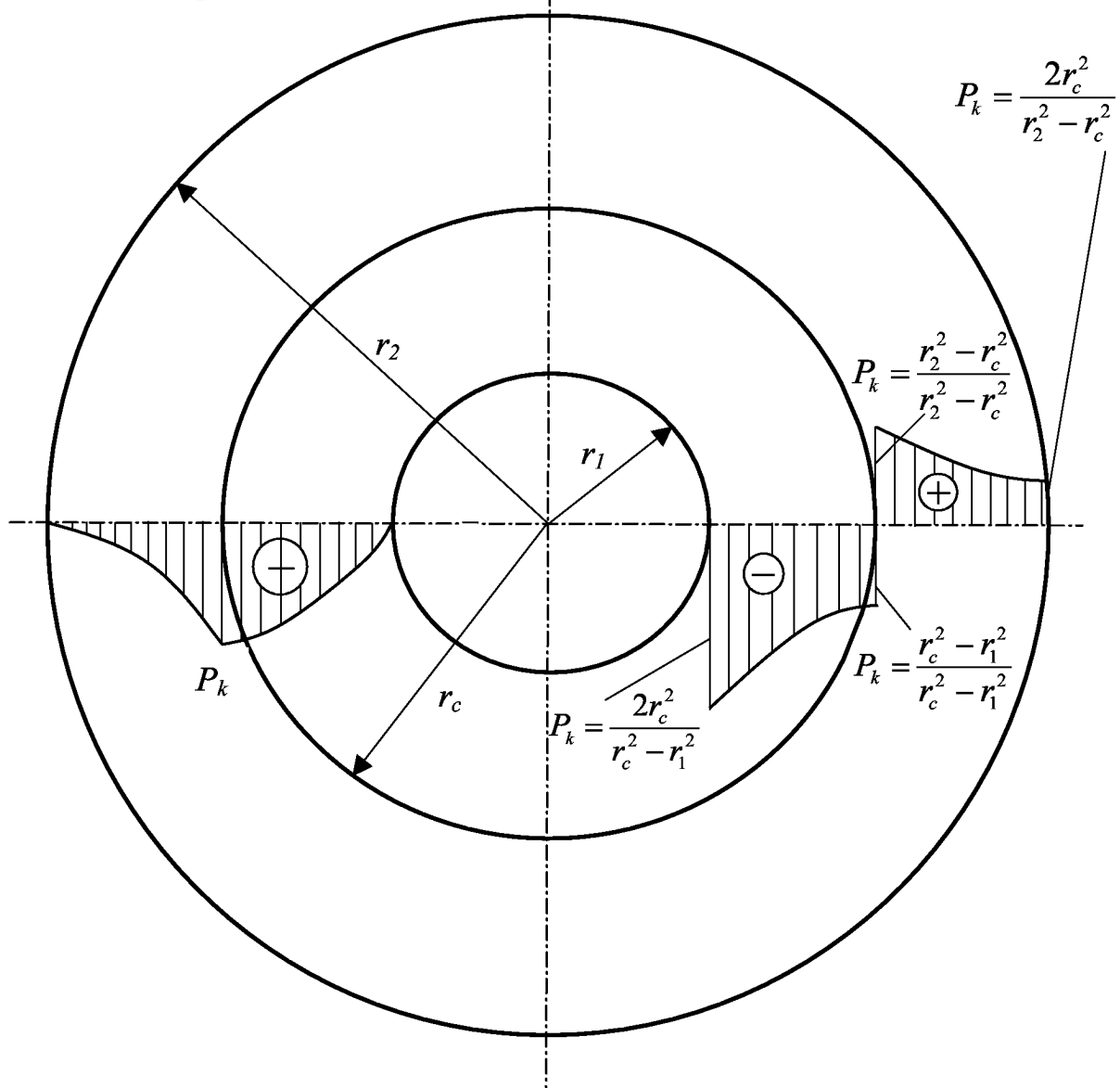


Рис.22.7

При действии внутреннего давления  $P$  составной цилиндр будет работать как единое целое. В нем возникнут дополнительные напряжения, которые определяются

формулами Ляме, как для цельного цилиндра, при действии внутреннего давления. На рис.22.8 показаны пунктирными линиями. Действительные напряжения в составном цилиндре получаются алгебраическим суммированием этих дополнительных напряжений с напряжениями, вызванными предварительным натягом (рис.22.8).

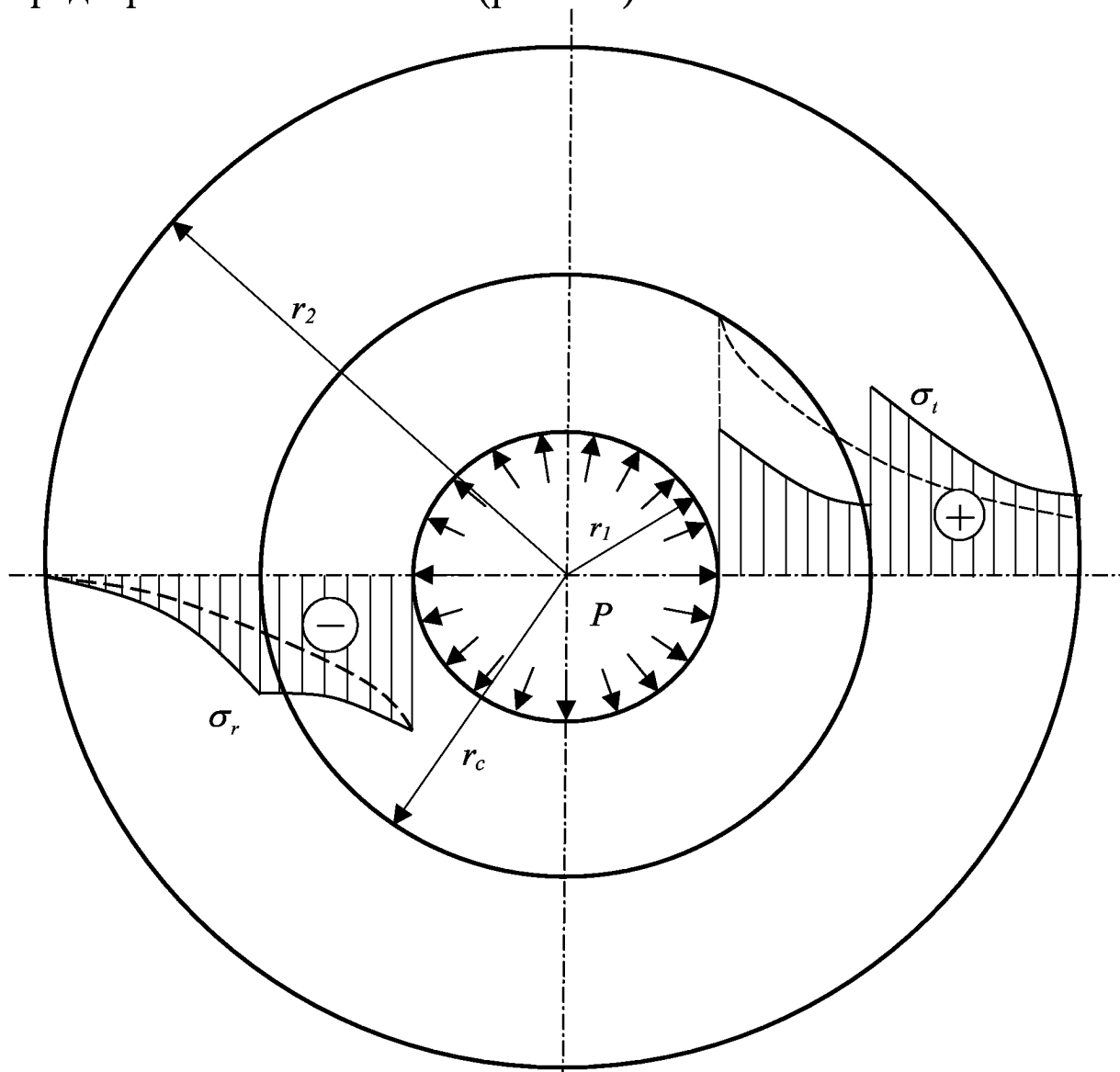


Рис.22.8

Следует иметь в виду, что вследствие натяга увеличиваются напряжения в зоне контакта у внешнего цилиндра. По этому натяг следует подбирать так, чтобы была обеспечена прочность как внутреннего, так и внешнего цилиндра. Условие равнопрочности цилиндров имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}|_{r=r_1} = \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}|_{r=r_c}$$

Таким образом, исследование составных цилиндров соединенных с натягом позволяет получить более благоприятное с точки зрения прочности распределения напряжений, чем в случае сплошной трубы. Поэтому такие цилиндры применяются в тех случаях, когда имеет место высокое внутреннее давление.

В технике применяется также метод упрочнения цилиндров, оснований на использовании пластических деформаций материала. Суть метода заключается в следующем. Распределение напряжений аналогичное тому, которое имеет место в составном цилиндре, можно получить и в сплошном. Для этого следует загрузить цилиндр высоким внутренним давлением, с таким расчетом, чтобы во внутренних его слоях возникали остаточные пластические деформации. После снятия внутреннего давления в цилиндре останутся такие напряжения, что внутренняя часть будет в состоянии растяжения (рис.22.9).

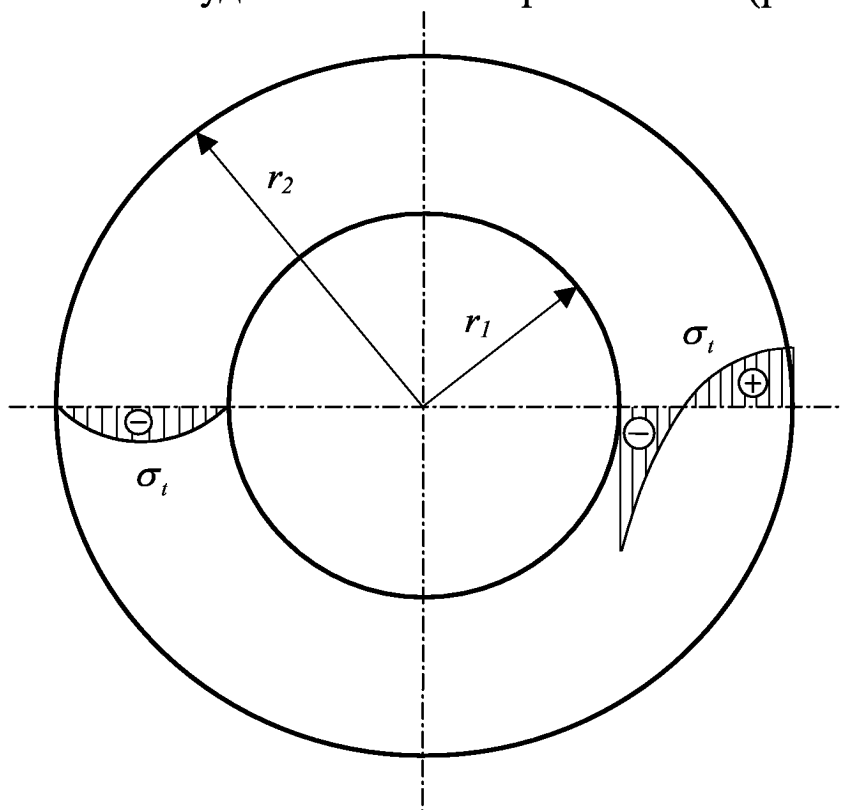


Рис.22.9

В дальнейшем при нагрузке цилиндра внутренним давлением остаточные напряжения суммируются с рабочими так, что во внутренних слоях имеет место снижение результирующих напряжений по сравнению с полученными по формулам Ляме.

## ГЛАВА 23

### РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

До сих пор рассматривались случаи действия на тело статических нагрузок, которые прикладывались постепенно, без ускорений.

Рассмотрим действие динамической нагрузки, которая сравнительно быстро изменяет свою величину или положение (например, движущаяся машина, поезд).

Действие динамических нагрузок характеризуется наличием сил инерции, равных произведению массы тела на его ускорение и направленных в сторону, противоположную ускорению  $|Q| = ma$ . Силы инерции вызывают дополнительные напряжения и деформации, которые необходимо учитывать.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на принципе Даламбера. Согласно этому принципу всякое движущееся тело может рассматриваться в равновесии, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции.

То есть, если силы инерции известны, то внутренние усилия определяются обычным путем - методом сечений.

#### 23.1 Учет сил инерции и определение напряжений при равноускоренном движении

Рассмотрим задачу о расчете троса, поднимающего груз  $P$  с ускорением  $a$  (рис.23.1).

Площадь поперечного сечения троса -  $F$ , объемный вес материала троса -  $\gamma$ .

Если груз находится в покое или поднимается равномерно, т.е. без ускорения (рис.23.1а), то на расстоянии  $x$  от груза продольная сила будет равна

$$N_{cm} = P + \gamma Fx \quad (23.1)$$

где  $\gamma Fx$  - вес участка троса длиной  $x$ . Если груз поднимается с ускорением (рис.23.1б), возникает сила инерции  $Q_{ин}$ , направленная вниз.

$$|Q|_{ин} = ma = \frac{P + \gamma Fx}{g} a. \quad (23.2)$$

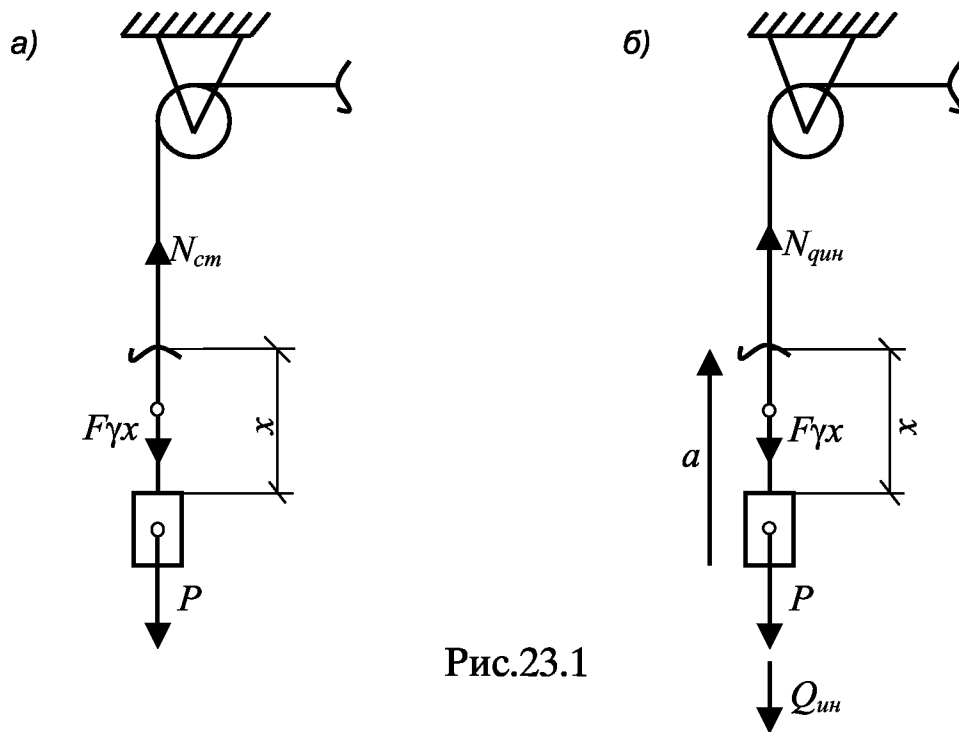


Рис.23.1

Здесь  $g = 9.81 \text{ М/с}^2$  - ускорение свободного падения.

$$N_{дин} = P + \gamma Fx + Q_{дин} = P + \gamma Fx + \frac{P + \gamma Fx}{g} a = (P + \gamma Fx) \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \quad (23.3)$$

Обозначим

$$\left( 1 + \frac{a}{g} \right) = K_D, \quad (23.4)$$

где  $K_D$  - динамический коэффициент.

Тогда продольная сила определяется как произведение статической продольной силы на динамический коэффициент

$$\boxed{N_{дин} = K_D N_{см}} \quad (23.5)$$

Определим динамическое напряжение:

$$\sigma_{дин} = \frac{N_{дин}}{F} = K_D \frac{N_{см}}{F},$$

$$\boxed{\sigma_{дин} = K_D \sigma_{см}} \quad (23.6)$$

Если груз опускается с ускорением  $a$ , то величина  $a$  будет входить в формулу (23.4) со знаком "минус". При свободном падении груза при  $a = -g$ ,  $K_D = 0$ , т.е. трос будет следовать за грузом без натяжения,  $\sigma_{дин} = 0$ .

### 23.2 Определение напряжений и перемещений при ударе

Под ударом понимается взаимодействие движущихся навстречу друг другу тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени.

Ударная нагрузка является динамической. Время удара измеряется в тысячных, а иногда и миллионных долях секунды, а сила удара достигает большой величины, например, действие кузнечного молота на кусок металла, удар падающего груза при забивке свай и др.

За очень малый промежуток времени скорость ударяющегося тела становится равной нулю. В этот момент напряжения и деформации в системе достигают наибольших значений. Целью расчета на удар и является определение наибольших деформаций и напряжений.

Система, подвергающаяся удару, может испытывать различные деформации: сжатие, растяжение, изгиб, кручение, изгиб с кручением и др. Поэтому различают продольный, поперечный, скручивающий удары (рис.23.2).

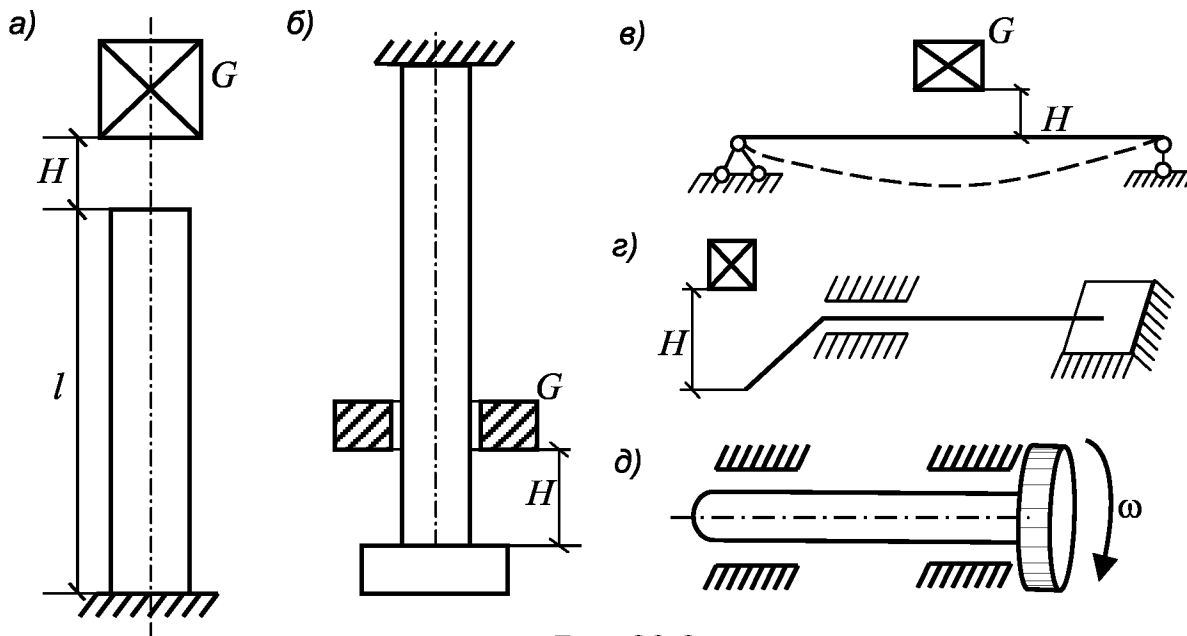


Рис.23.2

На рис.23.2а и 23.2б показаны продольные удары - сжимающий и растягивающий, на рис 23.2в - показан поперечный изгибающий удар.

Скручивающий удар имеет место при падении груза  $G$  с высоты  $H$  или при резком снижении угловой скорости  $\omega$  вала с маховиком, например, при внезапной его остановке (рис.23.2г,д).

Точное решение задачи о напряжениях и деформациях при ударе затруднительно, потому что неизвестен закон изменения скорости при соударении тел, и, следовательно, действующих при ударе нагрузок, неизвестны силы сопротивления при ударе, чрезвычайно сложен закон распространения скорости деформации в системе, воспринимающей удар.

В практике применяют упрощенные методы расчета, основанные на следующих основных допущениях:

- 1) деформации стержня от ударяющего груза распространяются по всей длине стержня, они подчиняются закону Гука и подобны деформациям, возникающим от статического приложения того же груза. Поэтому связь между динамическими силами и перемещениями остается такой же, как и при статической нагрузке;
- 2) опорные устройства, как правило, полагают абсолютно жесткими;
- 3) ударяющее тело является абсолютно жестким и при ударе не отскакивает от системы.

Изучение напряжений и деформаций при ударе основано на использовании закона сохранения энергии. При этом предполагается, что кинетическая энергия падающего груза  $A$  численно равна потенциальной энергии деформации упругой системы  $U$ .

$$\boxed{A = U} \quad (23.7)$$

Рассмотрим сначала расчет на удар в случаях, когда масса упругого тела, подвергающаяся удару, мала и ею можно пренебречь.

### ***Продольный удар***

Груз  $G$  падает с высоты  $H$  и ударяется о стержень, вызывая его сжатие на величину  $\Delta_{дин}$ , которая больше деформации стержня  $\Delta_{ст}$  при статическом действии груза  $G$  (рис.23.3).

Кинетическая энергия падающего груза равна

$$A = G(H + \Delta_{дин}) \quad (23.8)$$

Потенциальная энергия численно равна площади треугольника диаграммы  $P_{дин} - \Delta_{дин}$  (рис.23.4).



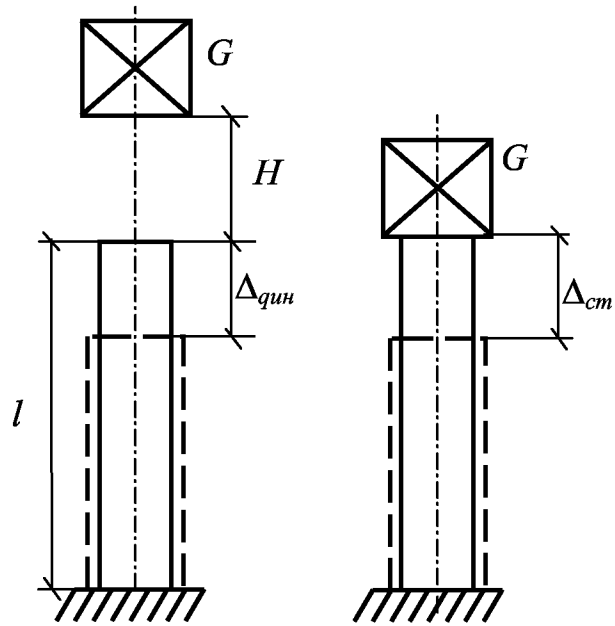


Рис.23.3

$$U = \frac{1}{2} P_{дин} \Delta_{дин} \quad (23.9)$$

С учетом зависимости (23.7) имеем

$$G(H + \Delta_{дин}) = \frac{1}{2} P_{дин} \Delta_{дин} \quad (23.10)$$

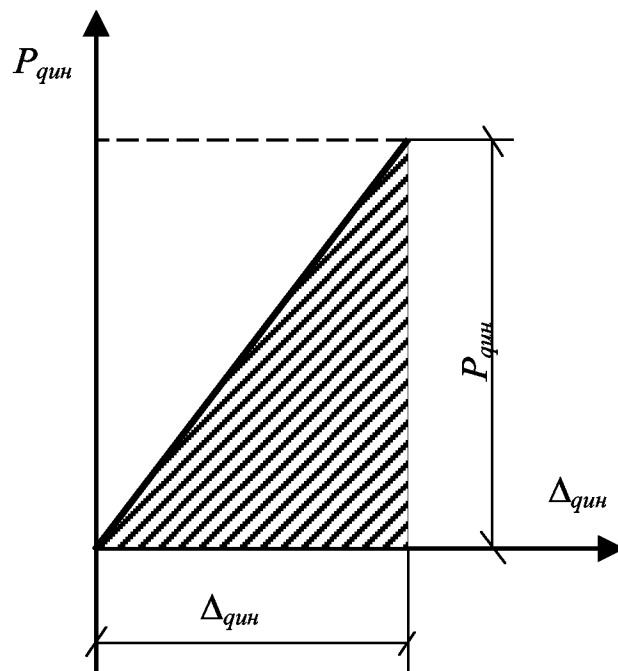


Рис.23.4

Выразим нагрузки через деформации

$$\Delta_{cm} = \frac{Gl}{EF} \Rightarrow G = \Delta_{cm} \frac{EF}{l} \quad (23.11)$$

$$\Delta_{дин} = \frac{P_{дин} l}{EF} \Rightarrow P_{дин} = \Delta_{дин} \frac{EF}{l} \quad (23.12)$$

Выражения (23.11) и (23.12) подставим в (23.10). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} \frac{EF}{l} (H + \Delta_{дин}) &= \frac{1}{2} \Delta_{дин}^2 \frac{EF}{l}, \\ \Delta_{cm} H + \Delta_{cm} \Delta_{дин} - \frac{1}{2} \Delta_{дин}^2 &= 0, \\ \Delta_{cm}^2 H - 2\Delta_{cm} \Delta_{дин} - 2H\Delta_{cm} &= 0 \end{aligned} \quad (23.13)$$

Получим квадратное уравнение для определения  $\Delta_{дин}$ .

$$\Delta_{дин} = \Delta_{cm} \pm \sqrt{\Delta_{cm}^2 + 2H\Delta_{cm}} \quad (23.14)$$

В формуле (23.14) перед корнем следует взять знак "+", так как  $\Delta_{дин} > \Delta_{cm}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{дин} &= \Delta_{cm} + \sqrt{\Delta_{cm}^2 + 2H\Delta_{cm}} = \Delta_{cm} + \Delta_{cm} \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}} = \\ &= \Delta_{cm} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}} \right) = \Delta_{cm} K_D \end{aligned} \quad (23.15)$$

Динамический коэффициент будет равен

$$\boxed{K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}}} \quad (23.16)$$

Зная коэффициент можно определить и напряжения

$$\sigma_{дин} = K_D \sigma_{cm}$$

Динамический коэффициент зависит от величины  $\Delta_{cm} = \frac{Gl}{EF}$ .

Следовательно, напряжения при ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня  $F$  (как при статическом приложении нагрузки), но и от длины стержня и жесткости материала  $E$ . Чем больше длина  $l$ , тем напряжения при ударе будут меньшими, с увеличением модуля упругости напряжения увеличиваются.

С целью уменьшения динамических напряжений в технике используются различные амортизаторы, увеличивающие податливость стержня (резиновые прокладки, пружины) (рис.23.5).

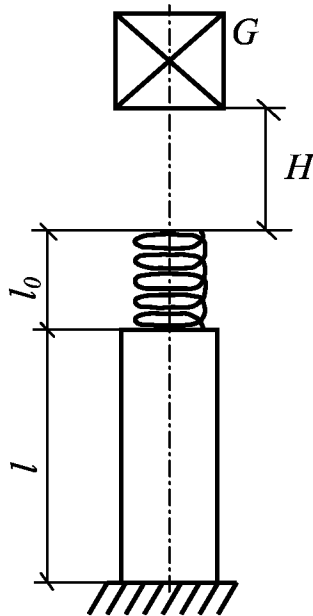


Рис.23.5

В этом случае

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}^{стержня} + \Delta_{ст}^{пружины}}} \quad (23.17)$$

Пружины подбирают таким образом, чтобы уменьшить динамический коэффициент в 3-6 раз.

Рассмотрим частные случаи.

1). При мгновенном приложении нагрузки, когда  $H = 0$

$$K_D = 2 \quad (23.18)$$

т.е. напряжения и перемещения в два раза больше, чем при статическом приложении.

2 ). Если высота падения груза  $H$  велика  $\left(\frac{2H}{\Delta_{ст}} \gg 1\right)$ , то единицей в подкоренном выражении (23.15) можно пренебречь, тогда

$$K_D = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}} \quad (23.19)$$

3 ). При очень больших величинах  $\frac{2H}{\Delta_{ст}}$  можно пренебречь единицей и перед корнем. Тогда

$$K_D = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}}} \quad (23.20)$$

Если известна скорость падения груза, а не высота падения, то динамический коэффициент может быть выражен через скорость.

При свободном падении

$$V^2 = 2gH, \quad 2H = \frac{V^2}{g}.$$

Используя зависимость (23.19), имеем

$$K_D = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}}} = 1 + \frac{V}{\sqrt{g\Delta_{cm}}} \quad (23.21)$$

### 23.3 Определение динамического коэффициента при продольном ударе стержней с переменным поперечным сечением

Сравним прочность двух стержней, подвергающихся продольному удару. Один стержень имеет постоянную площадь сечения  $F$ , а другой на участке длиной  $l_1$  имеет площадь сечения  $F$ , а в пределах остальной длины стержня -  $nF$ , где  $n > 1$  (рис.23.6).

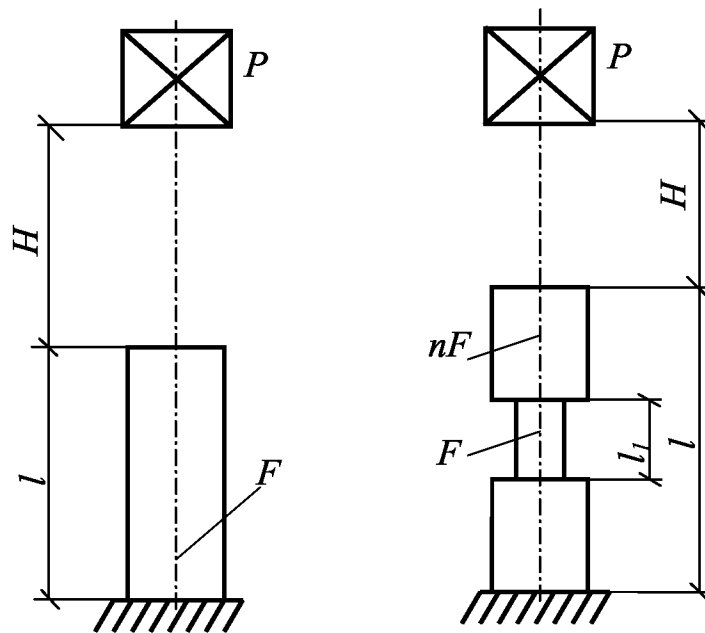


Рис.23.6

При статическом воздействии груза  $P$  оба бруса равнопрочны, т.к. наибольшие напряжения (при расчете без учета концентрации напряжений) в каждом из них

$$\sigma_{cm} = \frac{P}{F}$$

При ударном действии нагрузки динамический коэффициент по формуле (23.20) для первого бруса равен

$$K_D^I = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}^I}} = \sqrt{\frac{2HEF}{Pl}}, \text{ где } \Delta_{cm}^I = \frac{Pl}{EF}$$

Для второго бруса

$$\Delta_{cm}^{II} = \frac{P(l-l_1)}{EnF} + \frac{Pl_1}{EF}.$$

Если длина  $l_1$  очень мала, что имеет место, например, при наличии поперечных выточек, то приближенно можно принять

$$\Delta_{cm}^{II} = \frac{Pl}{EnF}.$$

Динамический коэффициент для второго стержня

$$K_D^{II} = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}^{II}}} = \sqrt{\frac{2HENF}{Pl}} = K_D^I \sqrt{n}, \quad (23.22)$$

т.е. в  $\sqrt{n}$  раз больше, чем для первого стержня. Таким образом, второй брус при ударном действии нагрузки менее прочен, чем первый. Поэтому оказывается более выгодным уменьшение площади сечения по всей длине стержня.

В качестве примера можно привести болт, передающий от одной части конструкции на другую растягивающий удар. Участок болта с нарезкой, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Обрыв болта весьма вероятен. Для улучшения конструкции надо сделать его площадь всюду (или почти всюду) равной площади по внутреннему диаметру нарезки. Этого можно достигнуть или обтачиванием болта, или высверливанием в нем канала (рис.23.7).

#### **23.4 Определение допустимых напряжений и расчет на прочность при ударе**

Зная величину динамического напряжения можно записать условие прочности

$$\sigma_{дин} \leq [\sigma_D], \quad (23.23)$$

где  $[\sigma_D]$  - допускаемая величина нормальных напряжений при ударе.

Для пластичного материала

$$[\sigma_D] = \frac{\sigma_T}{n_D}. \quad (23.24)$$

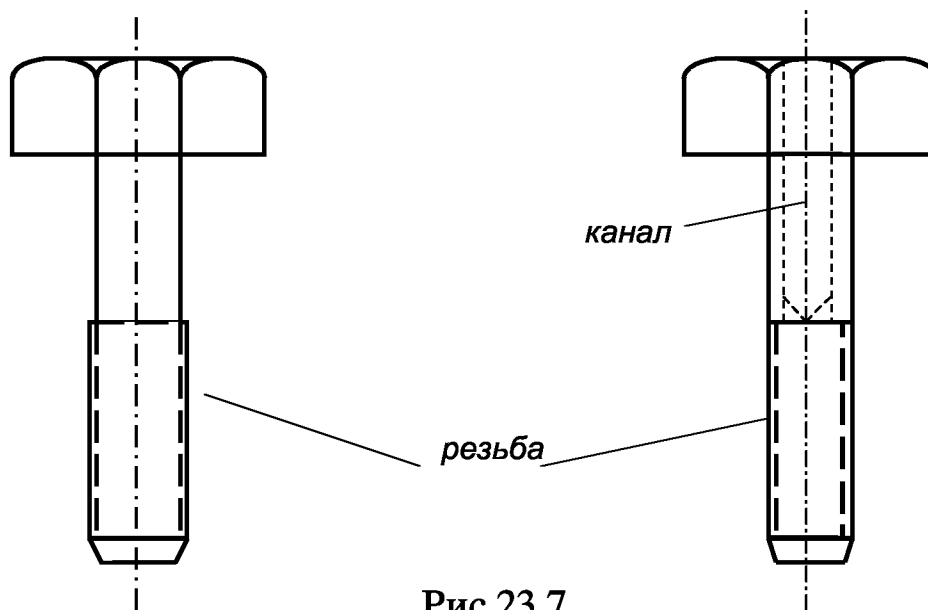


Рис.23.7

Величину коэффициента запаса  $n_d$  можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса  $n_0$  при статическом действии нагрузок (т.е. 1,4 - 1,6), так как динамичность уже учтена динамическим коэффициентом. Однако, учитывая, что рассмотрен приближенный метод расчета на удар, этот коэффициент принимают несколько повышенным - до 2. Кроме того, обычно в этих случаях применяют материал более высокого качества в отношении однородности и пластических свойств.

### 23.5 Поперечный изгибающий удар

Рассмотрим балку, свободно лежащую на двух шарнирных опорах. Балка изгибается под действием груза  $P$ , падающего с высоты  $H$  (рис.23.8).

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формуле, аналогичной зависимости (23.16):

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{cm}}}, \quad (23.25)$$

где  $f_{cm}$  - прогиб балки в месте падения груза при статическом его приложении.

Если  $a - b = \frac{l}{2}$ , то  $f_{cm} = \frac{Pl^3}{48EJ}$ ,  $f_{дин} = K_D f_{cm}$ ,  $\sigma_{дин} = K_D \sigma_{cm}$ .

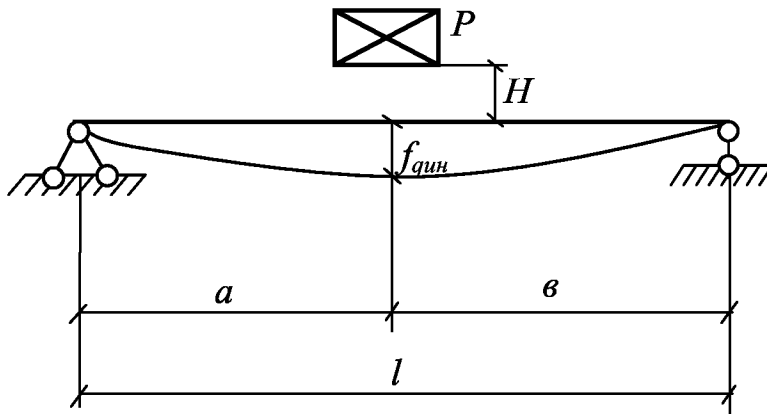


Рис.23.8

Так же, как и при продольном ударе, внезапное приложение нагрузки на балку вызывает напряжение

$$\sigma_{дин} = 2\sigma_{cm}$$

Условие прочности при изгибающем ударе имеет такой же вид, как и при продольном, т.е.

$$\sigma_{дин} \leq [\sigma_{д}]$$

### 23.6 Крутильный удар

Определим динамический крутящий момент и динамическое напряжение, возникающее в сечении вала при ударе, вызванном внезапной остановкой его левого конца  $A$ .

Пусть вал с диском (массой), момент инерции которого относительно продольной оси вращения равен  $J_m$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Если внезапно остановить левый конец стержня, то вся кинетическая энергия, которой обладает диск, обратится в потенциальную энергию деформации вала (рис.23.9).

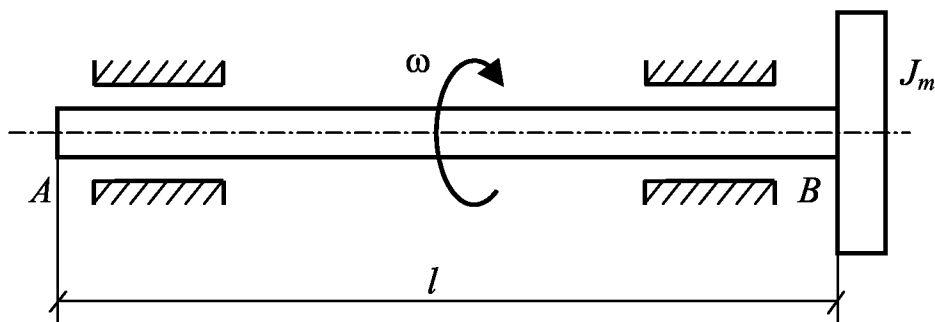


Рис.23.9

Энергия диска вызывает динамический крутящий момент.  
Кинетическая энергия диска

$$A = J_m \frac{\omega^2}{2}. \quad (23.26)$$

Потенциальная энергия, накопленная в бруске:

$$U = \frac{M_{дин} \Phi_{дин}}{2}, \quad (23.27)$$

где  $M_{дин}$  - статически действующий крутящий момент, эквивалентный по результатам своего действия явлению крутящего удара (углы закручивания равны);

$\Phi_{дин}$  - динамический угол закручивания бруса.

Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$J_m \frac{\omega^2}{2} = \frac{M_{дин} \Phi_{дин}}{2}. \quad (23.28)$$

Учитывая, что  $\Phi_{дин} = \frac{M_{дин} l}{GJ_k}$ , получим

$$J_m \frac{\omega^2}{2} = \frac{M_{дин}^2 l}{2GJ_k},$$

откуда

$$M_{дин} = \omega \sqrt{\frac{J_m GJ_k}{l}}, \quad (23.29)$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения системы;

$GJ_k$  - жесткость сечения бруса при кручении;

$J_m$  - момент инерции массы диска относительно оси вращения;

$l$  - длина части бруса, подвергающейся деформации.

Зная  $M_{дин}$ , находим максимальное напряжение при крутящем ударе, как при статическом кручении.

$$\tau_{дин} = \frac{M_{дин}}{W_k},$$

для круглого сечения  $\tau_{дин} = \frac{M_{дин}}{W_p}. \quad (23.30)$

Динамический угол закручивания

$$\Phi_{дин} = \frac{M_{дин} l}{GJ_k} = \omega \sqrt{\frac{J_m l}{GJ_k}}. \quad (23.31)$$

### 23.7 Учет массы тела, испытывающего удар

Если груз падает на стержень, обладающий значительной массой, то решение значительно усложняется. Можно применить приближенное решение, оно сводится к замене реальной массы



стержня приведенной массой, сосредоточенной в месте удара. Учет массы тела может оказать существенное влияние на динамические напряжения.

Если груз  $G$  падает на стержень, вес которого  $Q$  значителен, то динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm} \left(1 + \beta \frac{Q}{G}\right)}}, \quad (32)$$

где  $H$  - высота падения;  $G$  - вес падающего груза;  $Q$  - вес ударяемого стержня;  $\beta$  - коэффициент приведения массы стержня. Он зависит от способов закрепления концов стержня и вида удара (продольный, поперечный и т.д.). Для определения коэффициента  $\beta$  рассматривают кинетическую энергию стержня при его движении вследствие удара.

Рассмотрим частные случаи.

1) *Продольный удар.* Стержень постоянного сечения  $F$  зашпелен одним концом. Объемный вес материала  $\gamma$ . Будем считать, что в момент удара верхний конец ударяемого стержня получает скорость  $V$ . Скорость нижележащих сечений изменяется по линейному закону, достигая нулевого значения в нижнем сечении стержня (рис.23.10).

Скорость движения произвольного сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от нижнего сечения, будет равна

$$V(x) = V \frac{x}{l}. \quad (23.33)$$

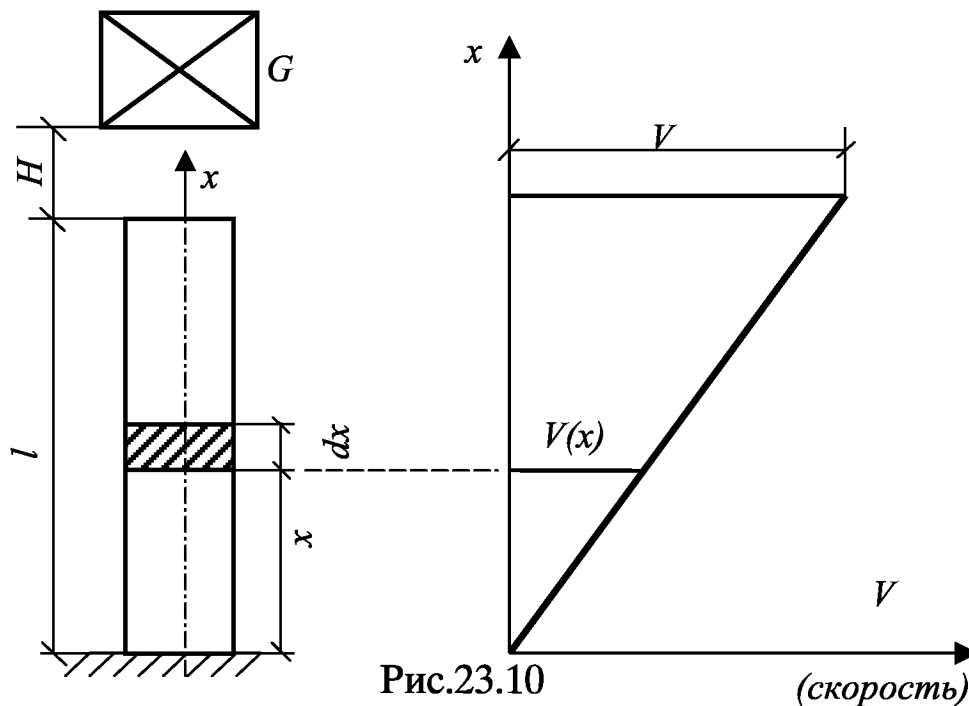


Рис.23.10

(скорость)

Так как частицы стержня движутся, то стержень обладает кинетической энергией. Кинетическая энергия элементарной частицы стержня длиной  $dx$  будет равна:

$$dA = \frac{dmV(x)^2}{2} = \frac{F\gamma dx}{g} \frac{V(x)^2}{2}.$$

Кинетическая энергия всего стержня с учетом (23.33) равна

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l \frac{F\gamma}{g} \frac{V(x)^2}{2} dx = \int_0^l \frac{F\gamma}{2g} V^2 \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{F\gamma V^2}{2gl} \int_0^l x^2 dx = \frac{F\gamma V^2}{2gl} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} \frac{F\gamma l}{g} \frac{V^2}{2} = \\ &= \frac{1}{3} m \frac{V^2}{2} = \frac{m_{прив}}{2} \end{aligned}$$

где  $m_{прив}$  - приведенная масса стержня, а коэффициент приведения в этом случае  $\beta = \frac{1}{3}$ .

2) *Поперечный удар.* В этом случае, если балка постоянного поперечного сечения закреплена одним концом и испытывает удар груза на свободном конце (рис.23.11) коэффициент приведения массы балки аналогично можно получить равным  $\beta = \frac{33}{140}$ .

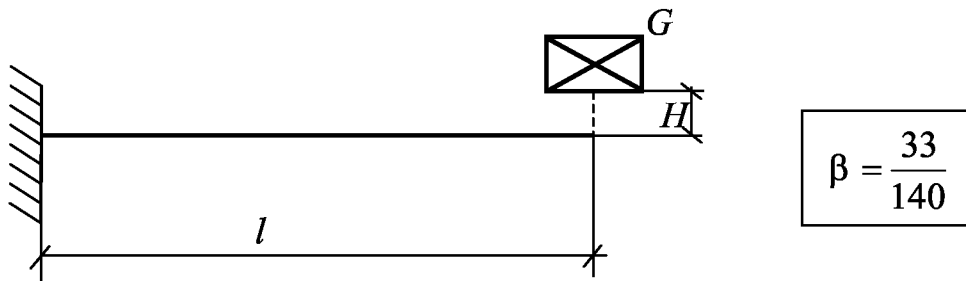


Рис.23.11

Для балки, закрепленной шарнирно (рис.23.12)

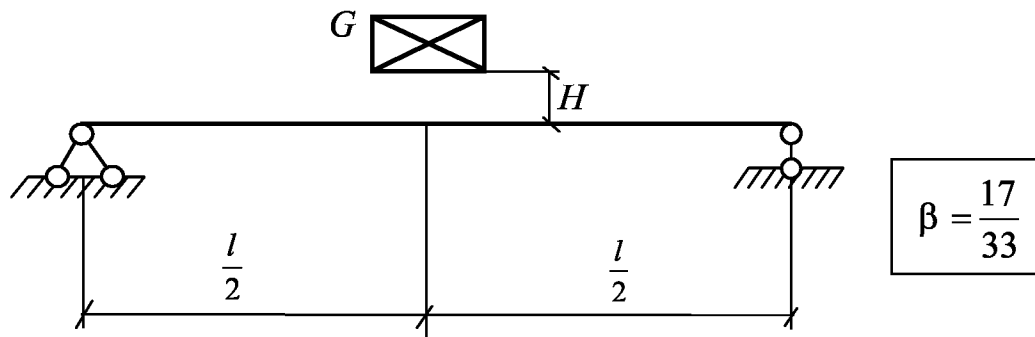


Рис.23.12

Учет массы ударяемого стержня может значительно уменьшить динамический коэффициент.

## ГЛАВА 24

### КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

#### 24.1 Основные понятия теории колебаний

Колебательные процессы встречаются в различных областях физики и техники. Эти процессы имеют общие характерные черты и специфические математические методы их исследования. Наука, изучающая такие явления и процессы, называется теорией колебаний. Особое значение имеет теория колебаний в инженерном деле при кручении вибрации деталей машин, элементов конструкций и сооружений, а также оценка их прочности. В некоторых случаях прочная и жесткая конструкция с точки зрения статического действия нагрузки, может разрушиться под действием сравнительно небольших периодически действующих сил. Поэтому изучение колебаний упругих систем имеет важное значение для инженеров-механиков и строителей.

Рассмотрим механические колебания систем, которые изучаются в сопротивлении материалов и являются основными расчетными схемами при оценке прочности строительных и машиностроительных конструкций.

При изучении колебаний одним из наиболее важных параметров упругих систем является число степеней свободы.

Количество независимых параметров, определяющих положение системы в любой момент времени называется *числом степеней свободы*. Следует иметь в виду, что число степеней свободы определяется выбором расчетной схемы, т.е. степенью приближения с которой исследуется реальный объект. Так к примеру балку можно рассматривать как систему с одной, двумя,  $n$  и бесконечным числом степеней свободы.

Колебательные процессы, встречающиеся в технике разделяются на периодические и непериодические. Мы будем рассматривать только периодические процессы. При периодических колебаниях функции, описывающие системы являются периодическими, т.е. повторяются через равные промежутки времени  $T$ , которые называются *периодом колебаний*. Исследуя колебания упругих систем, различают собственные и вынужденные колебания.

*Собственные свободные колебания* возникают в упругой системе, которая будучи выведенной из состояния равновесия кратковременным внешним воздействием продолжает движение под действием внутренних упругих сил. Собственные колебания продолжаются до тех пор, пока полученная, вследствие внешнего воздействия на систему, энергия не израсходуется на работу по преодолению сил трения.

*Вынужденные колебания* происходят в упругой системе под действием периодически изменяющихся во времени внешних сил, не зависящих от колебаний системы. В отличие от собственных, вынужденные колебания не затухают, несмотря на наличие сил трения. Это связано с тем, что система получает энергию со стороны возмущающих воздействий, которая расходуется на преодоление имеющегося сопротивления.

Колебания упругих систем классифицируют также по виду деформаций упругих элементов конструкций. Стержневые системы могут совершать продольные, поперечные или крутильные колебания.

*Продольными называются колебания*, при которых перемещения всех точек стержня происходят в направлении продольной оси. Такие колебания приводят к равномерному по поперечному сечению растяжению и сжатию стержня.

*Поперечными называются колебания*, при которых все точки стержня перемещаются перпендикулярно оси стержня. Напряженное состояние стержня в этом случае такое же, как при статическом изгибе балки, поэтому такие колебания называются так же изгибными.

*Крутильными называются колебания*, которые сопровождаются деформацией кручения. Такие колебания, как правило, возникают в валах, работающих на кручение.

## **24.2 Собственные колебания упругой системы с одной степенью свободы**

Задачи о колебании систем с одной степенью свободы рассматриваются в курсах теоретической механики. В качестве таких систем рассматривают обычно груз, подвешенный на нерастяжимой нити или на пружине, и совершающий гармонические колебания около положения равновесия.

Мы рассмотрим балку на двух опорах, из абсолютно упругого материала на которую действует груз весом  $P$  (рис.24.1).

Если весом балки можно пренебречь по сравнению с весом груза  $P$ , то ее можно рассматривать как систему с одной степенью свободы.

При составлении уравнений движения груза используем принцип Даламбера, который заключается в том, что к движущейся с ускорением системе можно применять уравнения равновесия статики, если силы инерции включить в число внешних сил.

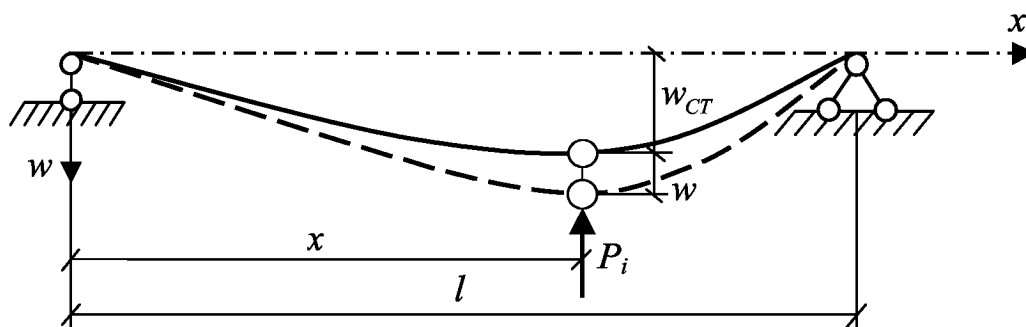


Рис.24.1

Пусть в некоторый момент времени  $t$  груз  $P$  переместился на величину  $w$  от положения статического равновесия  $w_{ст}$  (рис.24.1). В процессе движения на груз действуют силы упругости балки  $P_i$ , и силы инерции. Силы упругости равны

$$P_i = \frac{w}{\delta},$$

где  $\delta$  - прогиб балки от действия силы  $P = 1$ .

Сила инерции равна произведению массы на ускорение и направлена против ускорения

$$P_i = -\frac{P}{g} \frac{d^2 w}{dt^2}$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

Спроектировав все силы, действующие на груз, на вертикальную ось получим уравнение свободных колебаний балки с грузом как системы с одной степенью свободы.

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{w}{\delta} = 0$$

Запишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = 0$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$  - круговая частота собственных колебаний системы ( $c^{-1}$ ).

Решение этого уравнения имеет вид

$$w = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

где  $A_1$  и  $A_2$  - постоянные интегрирования, которые зависят от положения и скорости массы в начальный момент  $t = 0$ .

Выражение для  $w$  можно представить в виде

$$w = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Здесь постоянными являются амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$ , значения которых определяются из начальных условий. График изменения  $w$  во времени представлен на рис.24.2

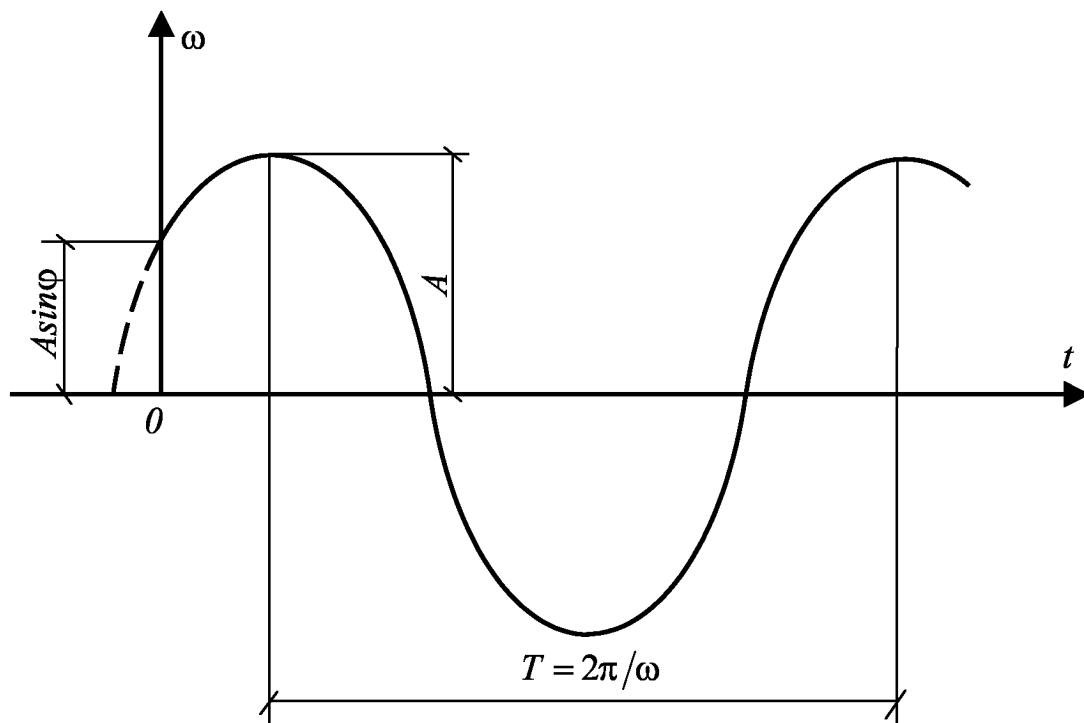


Рис.24.2

Из этого уравнения и графика видно, что при изменении  $\omega t$  на  $2\pi$  прогиб  $w$  не изменится. Следовательно, упругая система за время  $t = 2\pi/\omega$  совершает одно колебание, а за  $t = 2\pi - \omega$  колебаний. Поэтому  $\omega$  называется круговой частотой. Период колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{P\delta}{g}}.$$

В качестве примера рассмотрим балку на двух опорах пролетом  $l$  постоянного поперечного сечения. На балку действует груз весом  $P$ , расположенный посередине пролета (рис.24.3).

Отклоним балку с грузом вниз на величину  $\Delta$  от положения статического равновесия и отпустим в момент времени  $t=0$ . Такому возмущению системы соответствуют начальные условия

$$w = \Delta, \quad \frac{dw}{dt} = V = 0, \quad \text{при } t = 0.$$

Используя уравнение движения груза и начальные условия найдем уравнения для определения постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} A \sin \varphi &= \Delta \\ A \omega \cos \varphi &= 0 \end{aligned}$$

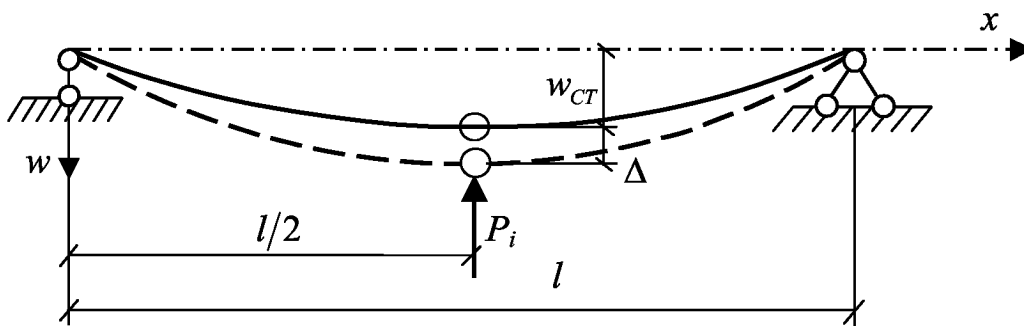


Рис.24.3

Из этих уравнений находим  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $A = \Delta$ . Следовательно, уравнение свободных колебаний для рассматриваемого случая имеет вид

$$w = \Delta \cos \omega t$$

Учитывая, что  $\delta = \frac{l^3}{48EJ}$  находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}} = \sqrt{\frac{48gEJ}{Pl^3}}$$

$$w_{\max} = \Delta + \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

где  $EJ$  - жесткость балки при изгибе.

Определим максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$ , возникающие в сечениях балки.

В каждый момент времени на балку действует вес груза  $P$  и силы инерции, которые как отмечалось выше равны

$$P_i = \frac{P d^2 w}{g dt^2} = \frac{48 \Delta E J}{l^3} \cos \omega t$$

Максимальный изгибающий момент возникает в точке приложения груза. Он равен

$$M_{\max} = \frac{12 \Delta E J}{l^2} + \frac{Pl}{4}$$

Определим максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$ , возникающие в сечениях балки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{12 \Delta E y_{\max}}{l^2} + \frac{Pl}{4W}$$

где  $W$  - момент сопротивления,  $y_{\max}$  - расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки.

### 24.3 Вынужденные колебания системы с одной степенью свобода

Пусть на балку кроме сосредоточенного груза  $P$  действует периодическая возмущающая сила

$$P(t) = P_0 \sin \beta t$$

где  $P_0$  - амплитуда возмущающей силы,  $\beta$  - ее частота (рис.24.4).

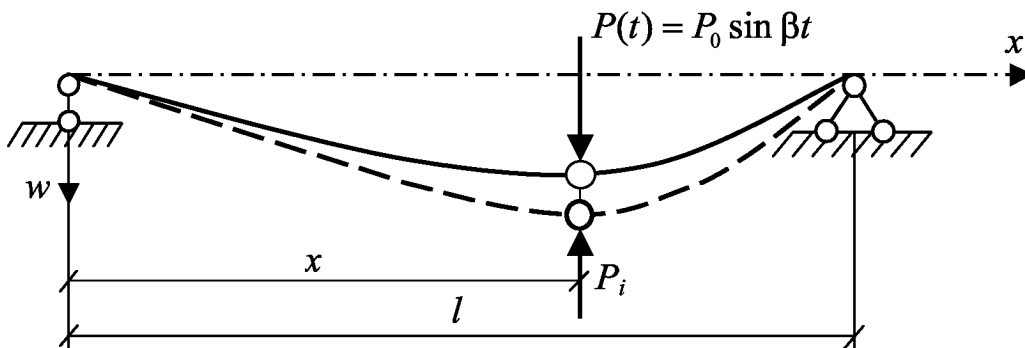


Рис24.4

Тогда, как отмечалось выше, упругая система будет совершать вынужденные колебания. Для составления уравнения движения в этом случае кроме сил упругости и инерции следует учесть и возмущающую силу. В результате получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы

$$\frac{P d^2 w}{g dt^2} + \frac{w}{\delta} = P_0 \sin \beta t$$

Представим это уравнение в виде

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = g \sin \beta t$$



где  $g = \frac{gP_0}{P}$ .

Таким образом, получено неоднородное (с правой частью) дифференциальное уравнение второго порядка. Полное его решение состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения описывает свободные колебания системы и получено нами ранее. Частное решение неоднородного уравнения описывает вынужденные колебания и представляется в виде

$$W_* = C \sin \beta t$$

Подставляя его в дифференциальное уравнение и учитывая, что

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -C\beta^2 \sin \beta t$$

получим

$$C = \frac{q}{\omega^2 - \beta^2}.$$

Тогда решение уравнения для вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы можно представить

$$w = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{q}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t$$

Здесь первое слагаемое в правой части характеризуют свободные колебания, а второе слагаемое характеризует вынужденные колебания системы, которые происходят с частотой возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A_0 = \frac{q}{\omega^2 - \beta^2}.$$

Представим ее в виде

$$A_0 = P_0 \delta \frac{\omega^2}{\omega^2 - \beta^2} = w_{ст}(P_0) K_g,$$

где  $w_{ст} = P_0 \delta$  - прогиб балки от статического действия силы  $P_0$ ;

$$K_g = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2/\omega^2} - \text{динамический коэффициент.}$$

График зависимости  $K_g$  от отношения  $\beta^2/\omega^2$  представлен на рис.24.5

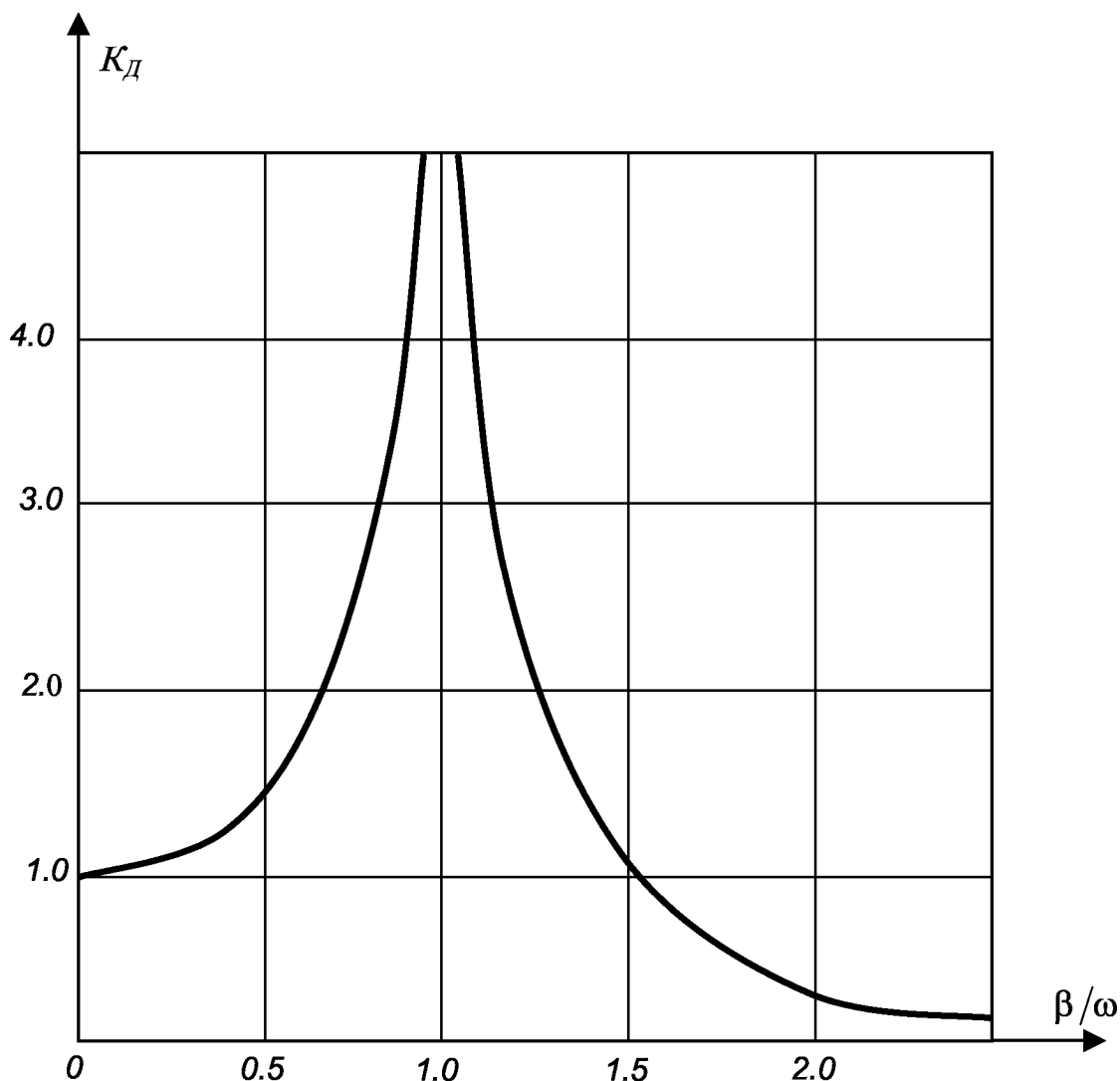


Рис.24.5

Из этого графика видно, что при  $\beta/\omega = 0$ ,  $K_g = 1$  амплитуда вынужденных колебаний незначительно отличается от прогиба балки при статической нагрузке. При  $\beta/\omega = 1$ ,  $K_g \rightarrow \infty$ , т.е.  $A_0 \rightarrow \infty$ .

Таким образом, когда частота вынужденных колебаний  $\beta$  приближается к частоте собственных колебаний  $\omega$ , амплитуда вынужденных колебаний  $A_0$ , а, следовательно, и напряжения в сечениях балки, неограниченно возрастают. Это явление в технике называется *резонансом*.

Заметим, что в реальных конструкциях всегда наблюдается затухание собственных колебаний из-за наличия сил сопротивления, которые следует учитывать при их расчете.

#### 24.4 Учет влияния сил сопротивления

Природа сил сопротивления может быть разной: сопротивление среды, трение в шарнирах, внутреннее трение между частицами материала и т.д. Их зависимость от характеристик движения системы зачастую бывает сложной и трудно поддается определению. Поэтому часто, для упрощения решения задачи, принимают ее пропорциональной скорости движения

$$R = -\alpha \frac{dw}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2w}{dt^2} + 2n \frac{dw}{dt} + \omega^2 w = 0,$$

где  $2n = \frac{\alpha g}{P}$ .

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$w = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ .

Из полученного выражения видно, что амплитуда колебаний уменьшается, а частота  $\omega_1$  зависит от затухания (рис.24.6)

В случае, когда на систему действует возникающая сила, как в рассмотренном выше случае, ее колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dt^2} + 2n \frac{dw}{dt} + \omega^2 w = q \sin \beta t.$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение и, как отмечалось выше, его решение состоит из общего решения однородного и частного неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения представлено выше, а решение неоднородного будем искать в виде

$$w_* = AC_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t.$$

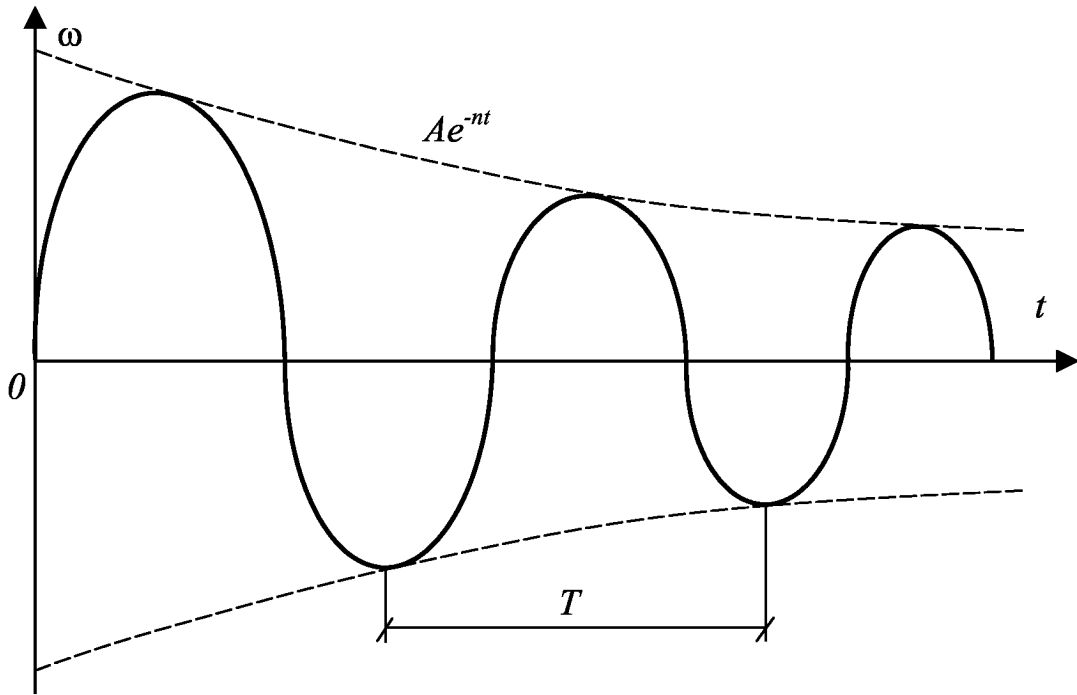


Рис.24.6

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  подберем так, чтобы уравнение удовлетворялось тождественно. Тогда

$$C_1 = \frac{q(\omega^2 - \beta^2)}{(\omega^2 - \beta^2) + 4\beta^2 n^2},$$

$$C_2 = \frac{2q\beta n}{(\omega^2 - \beta^2) + 4\beta^2 n^2},$$

а частное решение неоднородного уравнения представим в виде

$$w_* = A_0 \sin(\beta t + \psi),$$

где  $A_0 = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \beta^2) + 4\beta^2 n^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta n}{\omega^2 - \beta^2}.$

Динамический коэффициент в этом случае имеет вид

$$K_g = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2/\omega^2) + 4\beta^2 n^2/\omega^4}}$$

Как видно из этой формулы, коэффициент динамичности зависит от отношения частот вынужденных и собственных колебаний и от величины затухания. Кривые зависимости  $K_g$  от отношения  $\beta/\omega$  для некоторых значений  $\gamma = nT$  представлены на рис.24.7.

При наличии затухания ( $n \neq 0$ ) величина  $K_g$  всегда остается конечной, но при  $\beta = \omega$  имеет максимум равный  $K_g = \frac{\omega^2}{4\beta n}.$

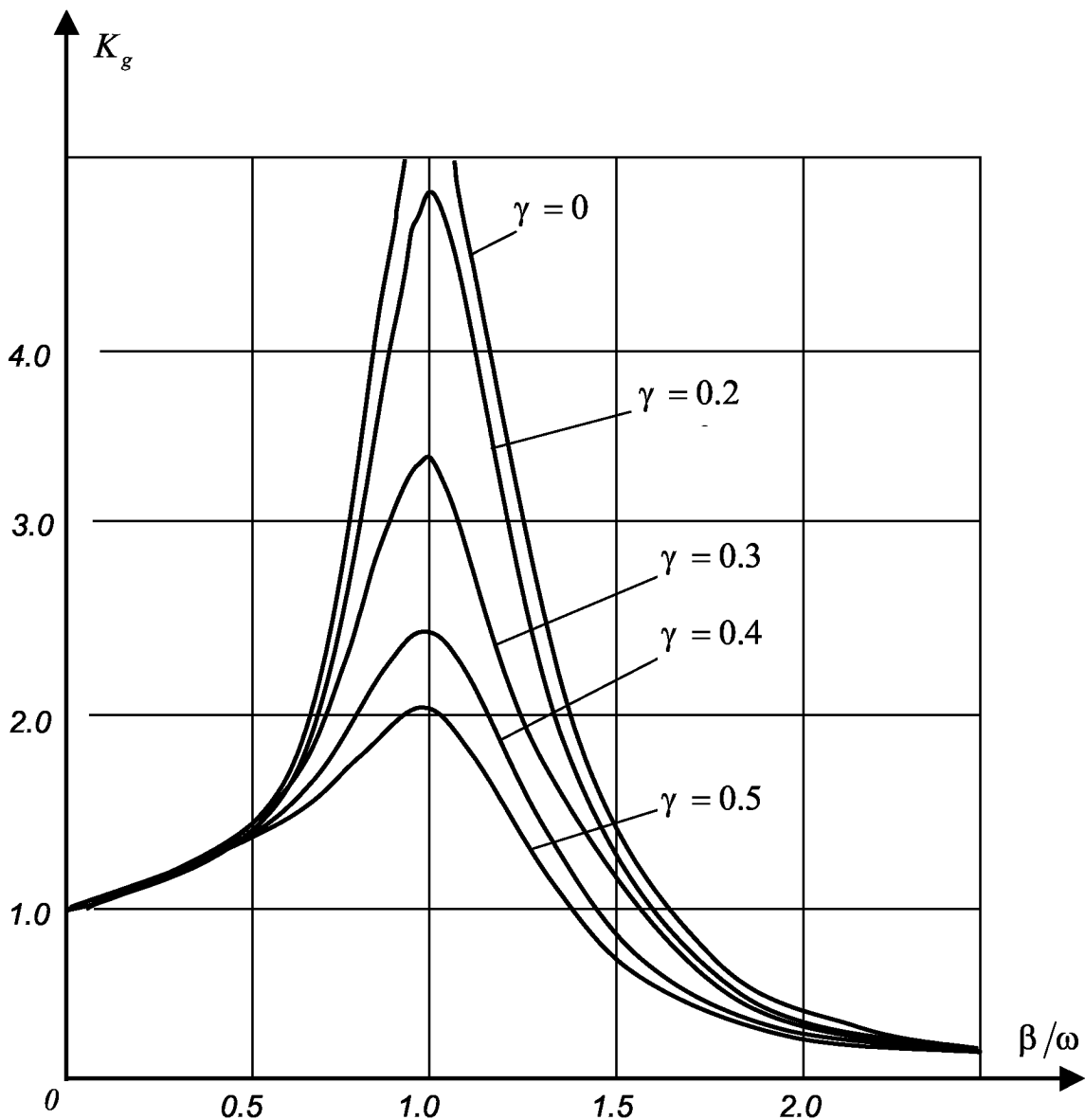


Рис.24.7

### 24.5 Расчет консольной балки на действие периодической нагрузки

Рассмотрим консольную балку длиной  $l$ , к свободному концу которой приложена нагрузка изменяющаяся по закону

$$P(t) = P_0 \cos \beta t.$$

Начальные условия зададим в виде  $w = 0$  и  $\frac{dw}{dt} = 0$  при  $t = 0$ .

Пренебрегая весом балки, будем рассматривать ее как систему с одной степенью свободы. Используя полученное нами решение и начальные условия, найдем постоянные уравнения для определения постоянных интегрирования

$$A \sin \varphi + \frac{q}{\omega^2 - \beta^2} = 0, \quad \omega A \cos \varphi = 0$$

Откуда находим  $\varphi = \pi/2$ ,  $A = -\frac{q}{\omega^2 - \beta^2}$ .

Тогда внутренние колебания балки описываются функцией

$$w = \frac{q}{\omega^2 - \beta^2} (\cos \beta t - \cos \omega t).$$

Для определения динамических напряжений, возникающих в балке при вынужденных колебаниях, необходимо определить напряжения от статического действия силы  $P_0$  и умножить на коэффициент динамичности.

$$\sigma_D = \sigma_{ст} K_g$$

В случае действия периодической нагрузки на упругую систему основной задачей является исследование резонансных режимов ее работы. Если расчет указывает на опасность резонанса, следует умножить частоту собственных колебаний конструкции  $\omega$  или частоту вынужденных колебаний возникающей нагрузки  $\beta$ . Во многих случаях частота  $\beta$  не подлежит корректировке, тогда следует изменить массу и (или) жесткость конструкции и тем самым изменить частоту  $\omega$ . Обычно требуется выполнение соотношения  $\beta \leq 0.7\omega$ . Для некоторых типов машин и конструкций (самолеты, турбины и т.д.) разрешается принимать  $\beta \geq 1.3\omega$ . Это связано с тем, что при приложении возникающих нагрузок максимальное амплитудное значение колебаний достигается не сразу, требуется некоторое время для "раскачки" системы. Поэтому быстрый переход через резонанс в таких случаях не представляет опасности для прочности конструкции.

#### 24.6 Определение критической скорости вращения вала

Валы являются одним из наиболее распространенных быстровращающихся элементов машин. При их изготовлении и эксплуатации практически всегда имеется эксцентриситет в распределении масс и, как следствие, возникают силы инерции, вызывающие поперечные колебания валов. Как показывает опыт, при некоторых вполне определенных угловых скоростях вращения возникают большие прогибы системы, она становится динамически неустойчивой (попадает в резонанс). Число

оборотов, при котором обнаруживается явление резонанса называется *критическим*. Если число оборотов вала больше критического, то прогибы уменьшаются.

Для объяснения этого явления рассмотрим с угловой скоростью  $\omega$  вертикальный вращающийся вал с одним диском, весом  $Q$  посередине (рис.24.8)

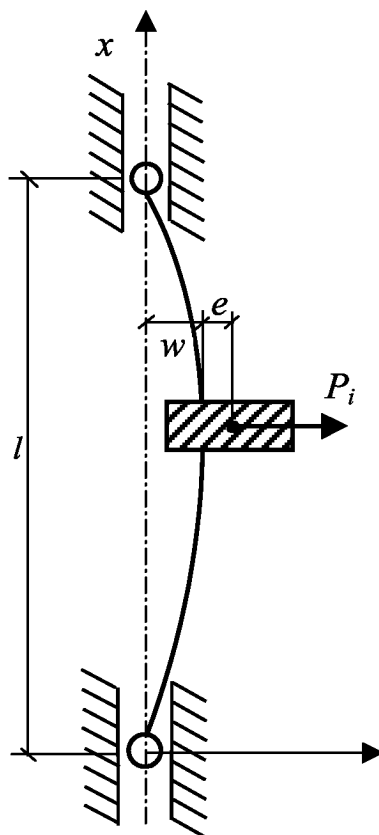


Рис.24.8

Предположим, что диск посажен с эксцентриситетом  $e$ . Будем рассматривать эту упругую систему как колебательную, а силы инерции несбалансированной массы - как возмущающие силы. При вращении вала с угловой скоростью  $\omega$  на диск будет действовать центробежная сила инерции

$$P_i = \frac{Q}{g} \omega^2 (w + l),$$

где  $w$  - прогиб вала в месте посадки диска;  
 $g$  - ускорение свободного падения.

Упругая реакция вала, как показано в предыдущей лекции, равна

$$P_i = \frac{w}{\delta},$$

где  $\delta$  - прогиб вала в месте посадки диска от действия единой силы, в рассматриваемом случае  $\delta = \frac{l^3}{48EJ}$ .

Спроектировав все силы, действующие на вал, на горизонтальную ось получим уравнение для определения  $w$

$$\frac{Q}{g} \omega^2 (w + l) = \frac{w}{\delta}$$

или учитывая, что

$$\omega_c^2 = \frac{g}{Q\delta}$$

представляет собой квадрат собственной частоты поперечных колебаний вала, перепишем это уравнение в виде

$$\omega^2 (w + l) = \omega_c^2 w.$$

Из этого уравнения

$$w = \frac{l}{\frac{\omega_c^2}{\omega} - 1}.$$

Из этого уравнения видно, что при  $\omega = \omega_c$  наступает резонанс. Критическая скорость вращения вала

$$\omega_{kp} = \omega_c = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}}.$$

Учитывая, что  $\omega_{kp} = \frac{\pi n_{kp}}{30}$ , получим формулу для критического числа оборотов вала

$$n_{kp} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{Q\delta}}.$$

## 24.7 Свободные колебания унругой системы с несколькими степенями свободы

До сих пор мы рассматривали только колебательные системы с одной степенью свободы. На практике же часто встречаются другие системы, расчетная схема которых не может быть приведена к системам с одной степенью свободы. Их следует рассматривать как системы с двумя, тремя и т.д. системами свободы. Изучение колебаний системы с  $n$  степенями свободы приведем на примере невесомой балки с  $n$  сосредоточенными массами. Рассмотрим балку длиной  $l$  на двух опорах с  $n$



сосредоточенными массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , расположенными в точках с координатами соответственно рис.24.9.

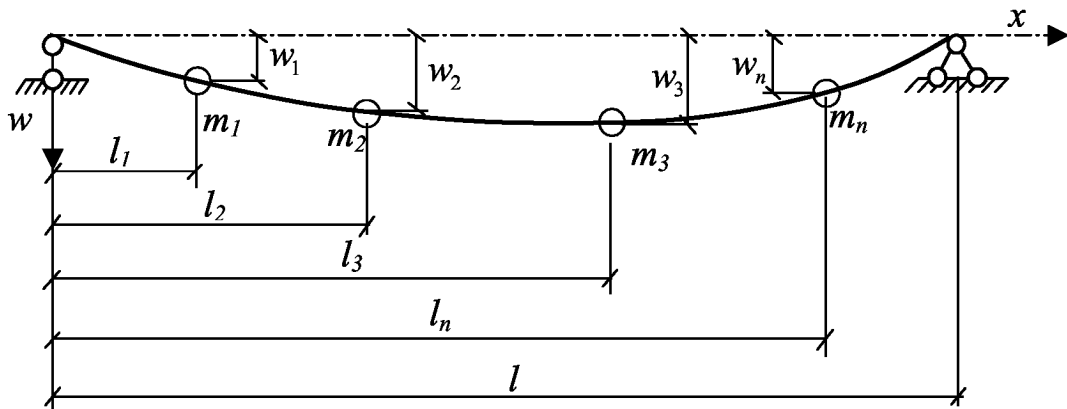


Рис.24.9

В процессе движения на балку действуют силы инерции

$$P_i^k = -m_k \frac{d^2 w_k}{dt^2},$$

где  $w_k$  - прогиб балки в точке расположения массы  $m_k$ . Используя принцип суперпозиции, найдем прогибы балки в точках расположения масс

$$w_1 = \delta_{11} P_i^1 + \delta_{12} P_i^2 + \dots + \delta_{1n} P_i^n$$

$$w_2 = \delta_{21} P_i^1 + \delta_{22} P_i^2 + \dots + \delta_{2n} P_i^n$$

.....

$$w_n = \delta_{n1} P_i^1 + \delta_{n2} P_i^2 + \dots + \delta_{nn} P_i^n$$

Перепишем эту систему уравнений в более компактном виде с учетом выражения для  $P_i^k$

$$w_k = -\sum_{l=1}^n m_l \frac{d^2 w_l}{dt^2} \delta_{kl}.$$

Здесь  $\delta_{kl}$  - прогиб балки в  $n$ -ой точке от действия силы  $P_i = 1$ , приложенной в  $l$ -ой точке. Для его вычисления можно воспользоваться интегралом Максвелла-Мора или способом Верещагина.

Таким образом, мы получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которая описывает свободные колебания системы с  $n$  степенями свободы. Решение этой системы будем искать в виде

$$w_k = A_k \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A_k$  и  $\omega$  - неизвестные амплитуды, и частота собственных колебаний балки.

Дифференцируя это выражение дважды по времени, получим

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} = A_k \omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставив эти выражения в полученную систему, будем иметь однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд и частот

$$\begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) A_1 + m_2 \delta_{12} \omega^2 A_2 + \dots + m_n \delta_{1n} \omega^2 A_n &= 0 \\ m_2 \delta_{21} \omega^2 A_1 + (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) A_2 + \dots + m_n \delta_{2n} \omega^2 A_n &= 0 \end{aligned}$$

.....

$$m_1 \delta_{n1} \omega^2 A_1 + m_2 \delta_{n2} \omega^2 A_2 + \dots + (m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1) A_n = 0$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_n$ . Она имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение только в том случае, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ m_2 \delta_{21} \omega^2 & m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_2 \delta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \omega^2 & m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Записав определитель в развернутом виде и обозначив через  $a_k$  коэффициенты при различных степенях  $\omega$  получим уравнение  $n$ -ой степени для квадрата частоты

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots + (-1)^n a_n \omega^{2n} = 0.$$

Решив это уравнение, получим  $n$  корней, т.е.  $n$  частот собственных колебаний балки  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Каждой собственной частоте соответствуют  $n$  значений амплитуды  $A_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ).

Тогда общее решение исходной системы дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$w_k = \sum_{l=1}^n A_{kl} \sin(\omega_l t + \varphi_l).$$

В предыдущих разделах было показано, что колебания упругих систем с  $n$  степенями свободы описываются системой  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Также установлено, что для таких систем существует  $n$  собственных частот и собственных форм колебаний.

## 24.8 Свободные колебания балки с двумя сосредоточенными массами

В частном случае, когда на балке расположены только два груза  $m_1$  и  $m_2$  в полученных выше формулах следует  $n$  положить равным двум.

В частности линейные алгебраические уравнения для амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned}(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1)A_1 + m_2\delta_{12}\omega^2 A_2 &= 0 \\ m_2\delta_{21}\omega^2 A_1 + (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1)A_2 &= 0\end{aligned}$$

Тогда определитель, системы алгебраических уравнений для определения собственных частот будет равен

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

или в развернутом виде

$$1 - \omega^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + \omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 = 0.$$

Из этого уравнения получим два значения для частоты собственных колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2)^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}.$$

Пусть  $m_1 = m_2 = m$ , а координаты их приложения  $l_1 = \frac{1}{3}l$ ,  $l_2 = \frac{2}{3}l$ .

Тогда, полагая жесткость балки постоянной  $EJ = const$ , найдем способом Верещагина.

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EJ}.$$

Квадраты частот собственных колебаний балки в этом случае будут

$$\omega_1^2 = \frac{162EJ}{5ml^3}, \quad \omega_2^2 = \frac{2430EJ}{5ml^3}$$

Так как определитель системы линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд равен нулю, то эти уравнения линейно зависимы. Поэтому для каждого значения  $\omega$  мы можем определить только отношение амплитуд. В рассматриваемом случае

$$A_{11} = A_{12} = A_1, \quad A_{21} = -A_{22} = A_2.$$

Таким образом, мы имеем два линейно независимых решения, соответствующие двум формам колебаний: при  $\omega = \omega_1$

$$w_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad w_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

и при  $\omega = \omega_2$

$$w_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad w_2 = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Эти формы колебаний показаны на рис.24.10.

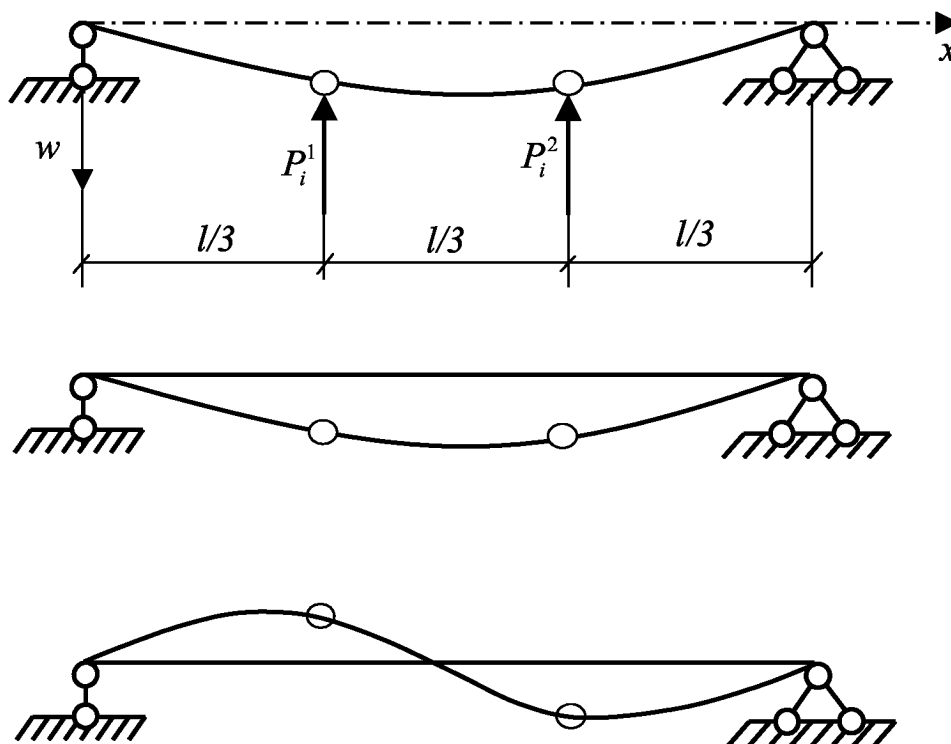


Рис.24.10

Общее решение системы имеет вид:

$$w_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$w_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются из начальных условий.

## 24.9 Продольные колебания стержней

Модель системы с  $n$  степенями свободы не всегда оказывается приемлемой при кручении колебаний реальных упругих конструкций. В таких случаях следует учитывать, что масса системы распределяется непрерывно, т.е. рассматривать модель системы с бесконечным числом степеней свободы.

Для систем с бесконечным числом степеней свободы ( $n = \infty$ ), т.е. для систем с распределенными массами наблюдается качественное отличие уравнений описывающих колебательные движения и свойств решений этих уравнений. Одной из

простейших моделей таких систем является стержень, в котором возбуждаются предельные колебания.

Рассмотрим однородный призматический стержень длиной  $l$ , и площадью поперечного сечения  $F$ , и плотностью материала  $\rho$ . Выделим двумя перпендикулярными сечениями оси стержня, элемент стержня длиной  $dx$  (рис.24.11)

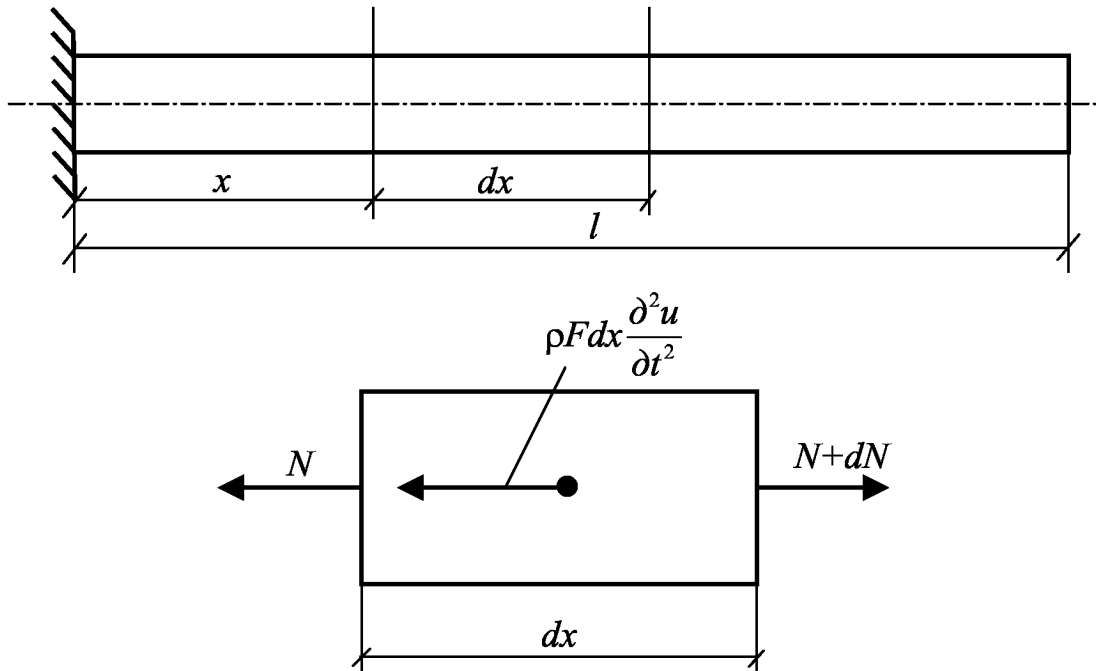


Рис.24.11

На этот элемент действуют нормальные усилия  $N$  и  $N + dN$ , а также силы инерции

$$P_1 = \rho E dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

где  $u$  - осевое перемещение в рассматриваемом сечении.

Используя принцип Даламбера, составим условия равновесия элемента стержня

$$\rho E dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} dx .$$

Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Запишем уравнение движения стержня в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

где  $c^2 = E/\rho$  - скорость распространения волн деформации в стержне.

Таким образом, уравнением свободных продольных колебаний стержня является дифференциальное уравнение с частными производными гиперболического типа. Неизвестная функция  $u$  зависит от двух переменных  $x$  и  $t$ . Решение этого уравнения будем искать в виде

$$r(x_1, t) = f(x) \sin(\omega t + \varphi).$$

Для определения вида функции  $f(x)$  подставим  $u(x, t)$  в уравнение движения. После преобразования получим уравнение для определения  $f$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\omega x}{c} + A_2 \cos \frac{\omega x}{c}.$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  зависят от условий закрепления стержня. Для определенности предположим, что левый конец стержня закреплен  $u = 0$ , а правый - свободен  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , тогда

$$A_2 = 0, \quad A_1 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0.$$

Так как нас интересует нетривиальное решение, то из последнего равенства следует, что

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0 \text{ или } \frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2} (2n - 1),$$

где  $n$  - любое целое число. Таким образом, стержень обладает бесконечным множеством частот собственных колебаний

$$\omega_n = \frac{\pi c}{2l} (2n - 1)$$

Каждой собственной частоте колебаний  $\omega_n$  соответствует определенная форма собственных колебаний

$$f_n(x) = A_n \sin \frac{(2n - 1)\pi x}{2l}.$$

Возникновение той или иной формы колебаний зависит от начальных условий. В общем случае решение записывается в виде суперпозиции собственных форм колебаний

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n - 1)\pi x}{2l} \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

где  $A_n$  и  $\varphi_n$  - постоянные, которые определяются из начальных условий.

### 24.10 Крутильные колебания стержней

Рассмотрим вал в форме однородного цилиндрического стержня крутильной жесткостью  $GJ_\rho$ , плотность материала которого  $\rho$ . Выделим двумя сечениями, перпендикулярными оси вала, элемент длиной  $dx$  (рис.24.12).

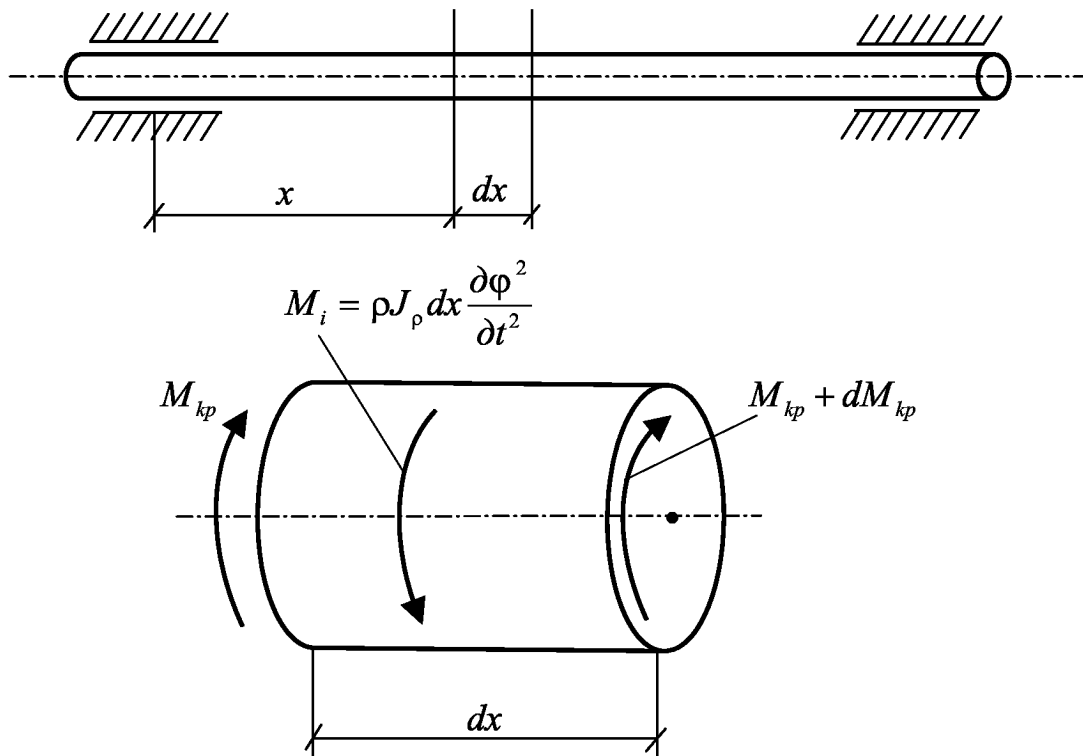


Рис.24.12

На этот элемент действуют крутящие моменты  $M_{kp}$  и  $M_{kp} + dM_{kp}$ , а также момент, вызванный инерцией вращения вала

$$M_i = \rho J_\rho dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где  $J_\rho$  - полярный момент инерции,

$\varphi$  - угол закручивания сечения  $x$  относительно начала отсчета.

Составим уравнение равновесия вала с учетом сил инерции

$$\rho J_\rho dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{kp}}{\partial x} dx.$$

Относительный угол закручивания  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  связан с крутящим моментом зависимостью

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{M_{kp}}{GJ_{\rho}}$$

Учитывая это, получим уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

где  $c^2 \frac{G}{\rho}$  - скорость распространения кручения деформаций в стержне.

Это уравнение в точности совпадает с уравнением продольных колебаний стержня. Следовательно, совпадают их решения.

### 23.11 Поперечные колебания стержней

Пусть однородный стержень длиной  $l$  с постоянной жесткостью на изгиб  $EJ$  и плотностью материала  $\rho$  свободно опирается на опоры в точках  $A$  и  $B$  (рис.24.13)

Для вывода уравнения поперечных колебаний стержня выделим двумя сечениями, перпендикулярными его оси, элемент длиной  $dx$ . Силы, действующие на элемент, показаны на рис.24.13. Интенсивность сил инерции массы балки, направленных перпендикулярно оси балки равна

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

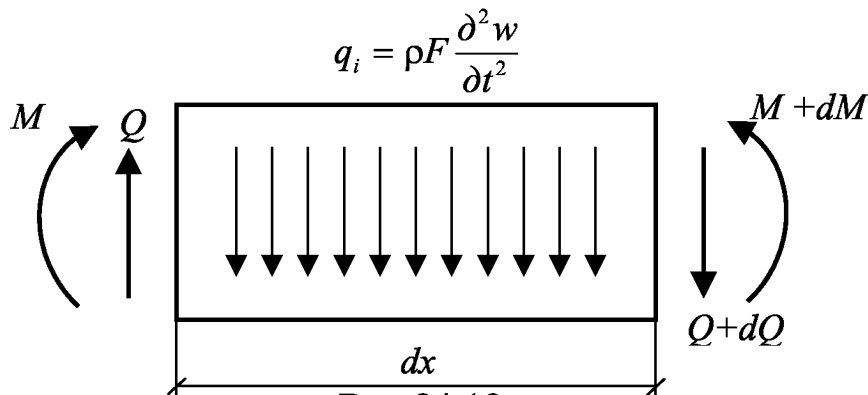
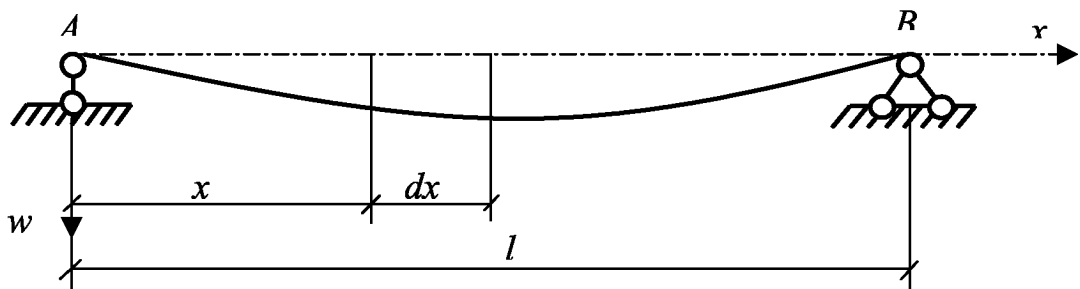


Рис.24.13



Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, включая силы инерции, на нормаль к оси балки. В результате получим

$$\rho F dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q}{\partial x} dx.$$

Используем дифференциальные зависимости при изгибе

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$$

Подставим полученное выражение в предыдущее равенство, получим *дифференциальное уравнение свободных колебаний балки*

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,}$$

где  $c^2 = \frac{EJ}{\rho F}$  - скорость распространения изгибных деформаций в стержне.

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$w(x, t) = f(x) \sin(\omega t + \varphi).$$

Уравнение для определения функции  $f(x)$  в этом случае будет

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$$

Общее решение его может быть записано в виде

$$f(x) = A_1 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} x + A_2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c}} x + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} x + A_4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{c}} x$$

Постоянные интегрирования  $A_1, A_2, A_3, A_4$  определяются из условий закрепления балки. В случае балки шарнирной опертой на концах с учетом дифференциальных зависимостей имеем

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0.$$

Учитывая, что  $\sin(\omega t + \varphi)$  не зависит от  $x$ , получим условия для определения постоянных интегрирования

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0$$

Здесь штрихом обозначена производная по  $x$ . В результате получим  $A_2 = A_4 = 0$  и

$$\begin{aligned} A_1 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} l &= 0 \\ -A_1 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l + A_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{c}} l &= 0 \end{aligned}$$

Эта система линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $A_1$  и  $A_3$ . Она имеет нетривиальное решение если ее определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l & sh \sqrt{\frac{\omega}{c}} l \\ -\sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l & sh \sqrt{\frac{\omega}{c}} l \end{vmatrix} = 0$$

В развернутом виде это равенство имеет вид:

$$\sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l \cdot sh \sqrt{\frac{\omega}{c}} l = 0$$

Учитывая, что  $sh \sqrt{\frac{\omega}{c}} l = 0$  только при  $\sqrt{\frac{\omega}{c}} l = 0$ , получим условие

$$\sin \sqrt{\frac{\omega}{c}} l = 0, \quad \frac{\omega}{c} l^2 = \pi^2 n^2.$$

Следовательно, как и в случае продольных колебаний, при поперечных колебаниях балки имеется бесконечное множество частот собственных колебаний.

$$\omega_k = \frac{\pi^2 n^2 c}{l^2} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

Каждой собственной частоте колебаний  $\omega_n$  соответствует определенная форма собственных колебаний

$$f_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Первые три собственные формы колебаний балки представлены на рис.24.14.

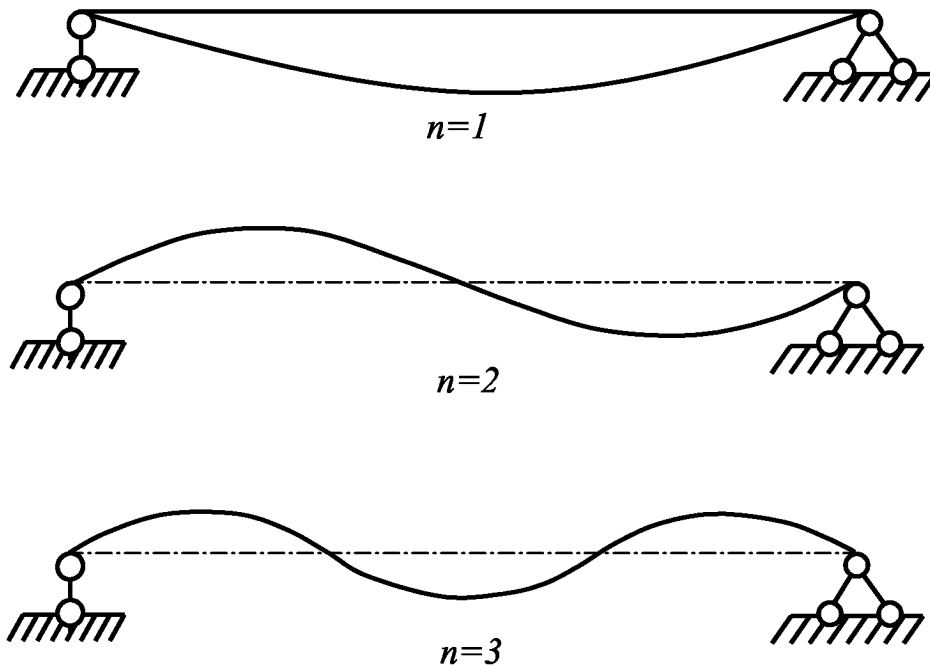


Рис.24.14

Выражения для прогибов в общем случае свободных колебаний балки имеет вид

$$w'(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n).$$

Постоянные  $A_n$  и  $\varphi_n$  определяются из начальных условий, которые представляют собой распределение прогибов и их скорости по длине балки в начальный момент при  $t = 0$ .

## ГЛАВА 25

### РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В последние годы в теории и практике механики материалов все чаще применяются различные численные методы. В начале это были в основном вариационные методы и метод конечных разностей. Сейчас наибольшее применение нашли проекционные методы расчета конструкций, деталей машин и т.д. На сегодня наиболее распространенным является метод конечных элементов (МКЭ). Эти тенденции можно проследить по соответствующим учебникам, статьям и другой научной литературе.

В последнее десятилетие наряду с МКЭ развиваются другие, часто более прогрессивные численные методы. К их числу относится метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) и его численная реализация метод граничных элементов (МГЭ). Подробное описание МГИУ выходит за пределы данной книги. Кратко для большинства задач МГИУ, в сравнении с МКЭ, можно характеризовать как более сложный с математической точки зрения, но более быстрый численный метод расчета. Основным преимуществом МГИУ является понижение порядка решаемой задачи на единицу.

В данной главе будут рассмотрено применение МГИУ к наиболее простым, линейным задачам механики материалов – к стержням и балкам. Так как задача линейная, то границей будут только две точки – начало и конец стержня или балки, т.е. решаемая задача становится ноль мерной.

#### 25.1 Расчет стержней МГИУ

Здесь будем рассматривать только статические задачи расчета стержней постоянного поперечного сечения. Кратко будут повторены основные результаты главы 5.

##### 25.1.1 Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения  $F$ , на который действуют внешние силы, направленные вдоль продольной оси, или нагрузки, равнодействующая которых направлена также вдоль продольной оси. При такой постановке

задачи в поперечных сечениях стержня возникает только один силовой фактор – продольная сила. Т.е., имеем случай простой деформации растяжения или сжатия. В дальнейшем будем рассматривать в основном только растяжение, а при сжатии будем считать, что условие устойчивости соблюдается всегда.

Рассмотрим такой стержень (Рис.25.1).

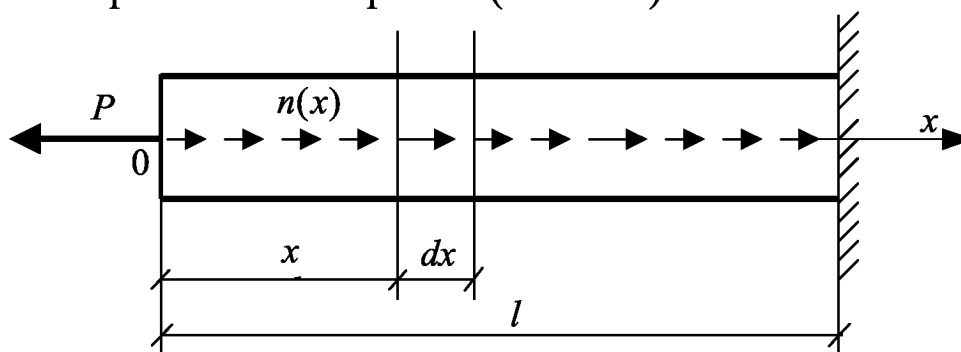


Рис.25.1

Выделим из стержня элемент длиной  $dx$  на расстоянии  $x$  от левого конца стержня (начала координат).

На выделенный элемент действует нагрузка  $n(x)$ , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости  $dx$  и уравнивающие продольные силы (положительные для определенности): в левом сечении  $N$ , в правом  $N + dN$ , где  $dN$  - приращение продольной силы на участке длиной  $dx$  (Рис.25.2).

*Уравнение равновесия* – сумма проекций всех сил, приложенных к элементу

$$\sum P_x = 0: \quad -N + n(x)dx + (N + dN) = 0 \quad (25.1)$$

$$n = -\frac{dN}{dx} \quad (25.2)$$

Это дифференциальная зависимость между  $n(x)$  и  $N$ . Из (25.2) получим

$$dN = -n(x)dx \quad (25.3)$$

$$N = -\int_0^l n(x)dx + C_1 \quad (25.4)$$

Считаем, что *гипотеза плоских сечений* выполняется

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \quad (25.5)$$

*Закон Гука* при растяжении-сжатии

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EF} \quad (25.6)$$

здесь  $E$  - модуль деформации (упругости) материала стержня

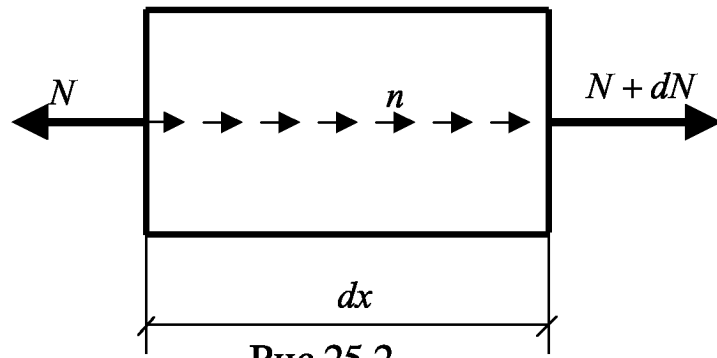


Рис.25.2

Если обозначить через  $du$  удлинение стержня  $dx$ , то его удельное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (25.7)$$

Сравнивая формулы (25.6) и (25.7) получим

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EF} \quad (25.8)$$

Продифференцируем (25.8) еще раз. Учтя (25.2) получим

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{N}{EF} = \frac{1}{EF} \frac{dN}{dx} = -\frac{n(x)}{EF} \quad (25.9)$$

Запишем теорему взаимности работ Бетти в интегральной форме

$$\int_0^l u' n' dx + u' N'|_0^l = \int_0^l u n' dx + u N'|_0^l \quad (25.10)$$

здесь  $u'$ ,  $n'$ ,  $N'$  - параметры одного состояния стержня,  $u$ ,  $n$ ,  $N$  - параметры другого состояния стержня.

Пусть надлежит определить параметры последнего состояния  $u$ ,  $n$ ,  $N$ , а штрихованные принадлежат вспомогательному состоянию.

Из (25.10) можем получить

$$\int_0^l (u' n - u n') dx + (Nu' - N' u)|_0^l = 0 \quad (25.11)$$

или, используя обозначения теории потенциалов ( $u' = U^*(x, \xi)$  и  $n' = N^*(x, \xi)$ ), и выбрав во вспомогательном состоянии нагрузкой дельта-функцию Дирака  $n' = \delta(x, \xi)$ , получим

$$\int_0^l (U^*(x, \xi) n(x) - u(x) \delta(x, \xi)) dx + (N(x) U^*(x, \xi) - N^*(x, \xi) u(x))|_0^l = 0$$

Воспользуемся основным свойством дельта-функции

$$\int u(x) \delta(x, \xi) dx = u(\xi)$$

Тогда теореме взаимности можно записать следующим образом

$$u(\xi) = \int_0^l U^*(x, \xi) n(x) dx + (U^*(x, \xi) N(x) - u(x) N^*(x, \xi)) \Big|_0^l \quad (25.12)$$

Это уравнение и есть *основное уравнение МГИУ для расчета стержней*.

**25.1.2 Фундаментальные решения для стержней**

Положим в (25.9)  $n = \delta(x, \xi)$  и переходя к обозначениям теории потенциалов получим

$$\frac{d^2 U^*(x, \xi)}{d^2 x} = -\frac{\delta(x, \xi)}{EF} \quad (25.13)$$

где  $u = U^*(x, \xi)$ ,  $N = N^*(x, \xi)$ .

Чтобы получить фундаментальное решение для удлинения стержня можно просто проинтегрировать уравнение (25.13)

$$\int \frac{d^2 U^*(x, \xi)}{d^2 x} dx = -\int \frac{\delta(x, \xi)}{EF} dx \Rightarrow \frac{dU^*(x, \xi)}{dx} = -\frac{sign(x - \xi)}{2EF}, \quad (25.14)$$

здесь использовалась известная формула для дифференцирования дельта-функции  $\delta(x, \xi) = sign(x - \xi)$

$$\int \frac{dU^*(x, \xi)}{dx} dx = -\int \frac{sign(x - \xi)}{2EF} dx \Rightarrow U^*(x, \xi) = -\frac{|x - \xi|}{2EF} \quad (25.15)$$

Формула (25.15) и является *фундаментальным решением для удлинения стержня*.

Аналогично поступим и с фундаментальным решением для продольной силы. Приравняем (25.8) и (25.14) получим

$$\frac{N^*(x, \xi)}{EF} = -\frac{sign(x - \xi)}{2EF} \Rightarrow N^*(x, \xi) = -\frac{1}{2} sign(x - \xi) \quad (25.16)$$

Вставим полученные фундаментальные решения в основное уравнение МГИУ для стержней (25.12):

$$u(\xi) = U^*(l, \xi) N(l) - u(l) N^*(l, \xi) - U^*(0, \xi) N(0) + u(0) N^*(0, \xi) + \int_0^l U^*(x, \xi) n(x) dx \quad (25.17)$$

$$u(\xi) = -\frac{|l - \xi|}{2EF} N(l) + u(l) \frac{1}{2} sign(l - \xi) + \frac{|0 - \xi|}{2EF} N(0) - u(0) \frac{1}{2} sign(0 - \xi) - \int_0^l \frac{|x - \xi|}{2EF} n(x) dx \quad (25.18)$$

$$\text{или } u(\xi) = -\frac{|l-\xi|}{2EF}N(l) + u(l)\frac{1}{2} + \frac{|0-\xi|}{2EF}N(0) + u(0)\frac{1}{2} - \int_0^l \frac{|x-\xi|}{2EF}n(x)dx \quad (25.19)$$

Эти выражения содержат четыре неизвестные  $u(l)$ ,  $u(0)$ ,  $N(l)$  и  $N(0)$ . Половина из них известна из граничных условий. Составив уравнения (25.19) для начала и конца стержня (границ), можем найти оставшиеся неизвестные. Однако, иногда бывает проще использовать уравнение, аналогичное (25.19) для продольной силы. Получим его дифференцированием (25.17) по  $\xi$

$$\begin{aligned} \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{dU^*(l,\xi)}{d\xi}N(l) - \frac{dN^*(l,\xi)}{d\xi}u(l) - \frac{dU^*(0,\xi)}{d\xi}N(0) + \\ + \frac{dN^*(0,\xi)}{d\xi}u(0) + \int_0^l \frac{dU^*(x,\xi)}{d\xi}n(x)dx \end{aligned} \quad (25.20)$$

Фундаментальные решения (25.20) имеют вид

$$\frac{dU^*(x,\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( -\frac{|x-\xi|}{2EF} \right) = \frac{\text{sign}(x-\xi)}{2EF} \quad (25.21)$$

$$\frac{dN^*(x,\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( -\frac{1}{2}\text{sign}(x-\xi) \right) = \frac{1}{2}2\delta(x,\xi) = \delta(x,\xi) \quad (25.22)$$

Учтя, выражение (25.8), (25.21) и (25.22), из (25.20) получим

$$\begin{aligned} \frac{N(\xi)}{EF} = \frac{\text{sign}(l-\xi)}{2EF}N(l) - \delta(l,\xi)u(l) - \frac{\text{sign}(0-\xi)}{2EF}N(0) + \\ + \delta(0,\xi)u(0) + \int_0^l \frac{\text{sign}(x-\xi)}{2EF}n(x)dx \end{aligned} \quad (25.23)$$

$$N(\xi) = \frac{N(l)}{2} - \delta(l,\xi)EF \cdot u(l) + \frac{N(0)}{2} + \delta(0,\xi)EF \cdot u(0) + \frac{1}{2} \int_0^l \text{sign}(x-\xi)n(x)dx \quad (25.24)$$

Дельта-функцию в (25.24) в обоих случаях принимаем равной нулю, исходя из следующих рассуждений: эта функция по определению может быть либо нулем, либо бесконечностью, но бесконечность нас не может устроить (например, не может быть бесконечных прогибов).

Это *второе основное уравнение МГИУ для усилий*. Из уравнений (25.19) и (25.24) составляют СЛАУ. После ее решения все параметры на границе (в двух точках – начале и конце



стержня) будут известны. Запишем полученные основные уравнения МГИУ

$$\begin{cases} u(\xi) = -\frac{|l-\xi|}{2EF}N(l) + u(l)\frac{1}{2} + \frac{|0-\xi|}{2EF}N(0) + u(0)\frac{1}{2} - \int_0^l \frac{|x-\xi|}{2EF}n(x)dx \\ N(\xi) = \frac{N(l)}{2} + \frac{N(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^l \text{sign}(x-\xi)n(x)dx \end{cases} \quad (25.25)$$

**Замечание.** Граничных уравнений (25.25) всего 4: для  $u(0)$ ,  $u(l)$ ,  $N(0)$  и  $N(l)$ , а неизвестных всего 2. Таким образом, имеем произвол в выборе уравнений.

Вычислим *частный случай* объемных интегралов с учетом  $n(x) = n$

$$\begin{aligned} \int_0^l |x-\xi|dx &= \int_0^\xi |x-\xi|dx + \int_\xi^l |x-\xi|dx = -\int_0^\xi (x-\xi)dx + \int_\xi^l (x-\xi)dx = \\ &= -\frac{(x-\xi)^2}{2} \Big|_0^\xi + \frac{(x-\xi)^2}{2} \Big|_\xi^l = -\frac{1}{2}(0-\xi^2) + \frac{1}{2}(l-\xi)^2 = \frac{1}{2}(2\xi^2 + l^2 - 2l\xi) \\ \int_0^l \text{sign}(x-\xi)dx &= \int_0^\xi \text{sign}(x-\xi)dx + \int_\xi^l \text{sign}(x-\xi)dx = -\int_0^\xi dx + \int_\xi^l dx = -\xi + l - \xi = l - 2\xi \end{aligned}$$

*Разрешающие уравнения (25.25) приобретают вид*

$$\begin{cases} u(\xi) = -\frac{|l-\xi|}{2EF}N(l) + u(l)\frac{1}{2} + \frac{|0-\xi|}{2EF}N(0) + u(0)\frac{1}{2} - \frac{n}{4EF}(2\xi^2 + l^2 - 2l\xi) \\ N(\xi) = \frac{N(l)}{2} + \frac{N(0)}{2} + \frac{n}{2}(l - 2\xi) \end{cases} \quad (25.26)$$

### 25.1.3 Примеры применения МГИУ к стержням

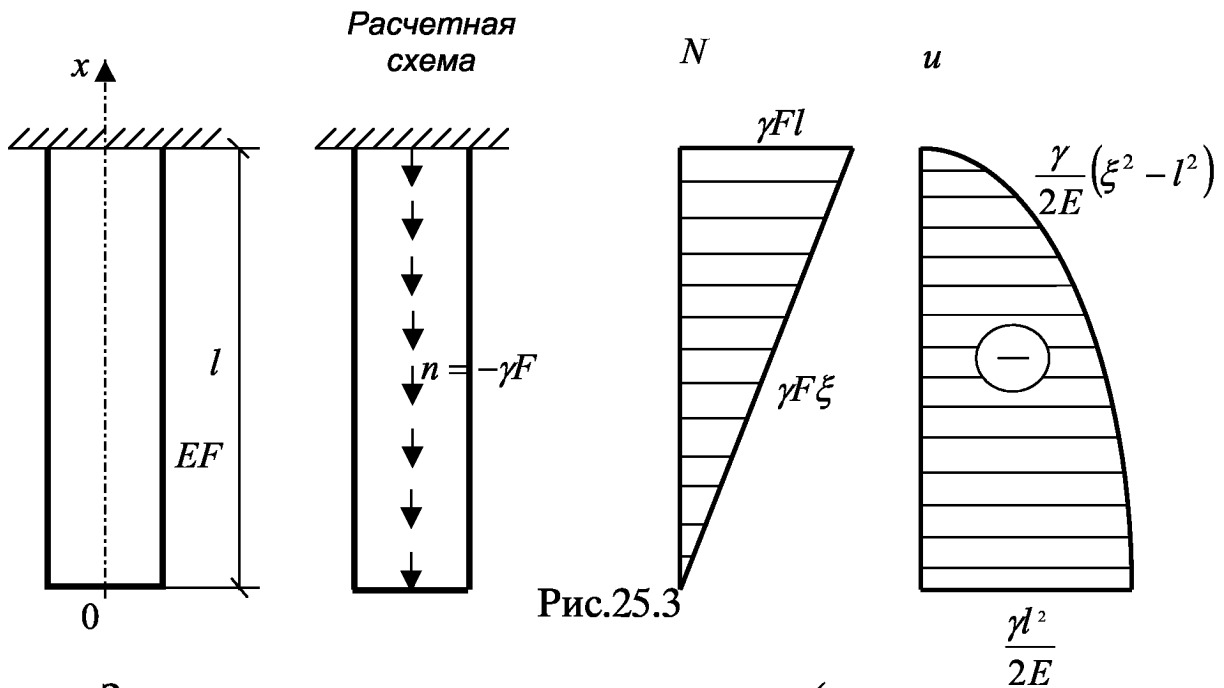
**Пример 1.** Защемленный стержень постоянного сечения под собственным весом ( $\gamma$ -объемный вес материала стержня). (Рис.25.3)

Граничные условия:  $N(0) = 0$ ,  $u(l) = 0$ .

Неизвестные:  $N(l)$  и  $u(0)$ .

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из уравнений (25.26) с учетом граничных условий и очевидного равенства  $n(x) = -\gamma F$  будет иметь вид:

$$\begin{cases} u(\xi) = -\frac{|l-\xi|}{2EF} N(l) + u(0) \frac{1}{2} + \frac{\gamma F}{4EF} (2\xi^2 + l^2 - 2l\xi) \\ N(\xi) = \frac{N(l)}{2} - \frac{1}{2} (l - 2\xi) \gamma F \end{cases} \quad (25.27)$$



Запишем уравнения для неизвестных (пока используем два уравнения из (25.27) по своему выбору):

$$\begin{cases} u(0) = -\frac{|l-0|}{2EF} N(l) + \frac{1}{2} u(0) + \frac{\gamma}{4E} (2 \cdot 0^2 + l^2 - 2l \cdot 0) \\ N(l) = \frac{N(l)}{2} - \frac{\gamma F}{2} (l - 2l) \end{cases}$$

Здесь в первом уравнении  $\xi = 0$ , а во втором  $\xi = l$ .

Из второго уравнения  $N(l) = \gamma Fl$ . Подставив данное выражение в первое уравнение получим

$$u(0) = -\frac{\gamma Fl^2}{2EF} + \frac{1}{2} u(0) + \frac{\gamma l^2}{4E} = -\frac{2\gamma l^2}{4E} + \frac{1}{2} u(0) + \frac{\gamma l^2}{4E} = -\frac{\gamma l^2}{4E} + \frac{1}{2} u(0)$$

$$\frac{1}{2} u(0) = -\frac{\gamma l^2}{4E} \Rightarrow u(0) = -\frac{\gamma l^2}{2E}$$

Результаты совпадают с соответствующими формулами главы 5.

Запишем уравнения для внутренних точек:

$$\begin{cases} u(\xi) = -\frac{|l-\xi|}{2EF} \gamma F l - \frac{1}{2} \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{\gamma F}{4EF} (2\xi^2 + l^2 - 2l\xi) \\ N(\xi) = \frac{\gamma F l}{2} - \frac{1}{2} (l-2\xi) \gamma F \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\xi) = \frac{\gamma}{2E} \left( -(l-\xi)l - \frac{l^2}{2} + \frac{1}{2} (2\xi^2 + l^2 - 2l\xi) \right) = \\ = \frac{\gamma}{2E} (-l^2 + l\xi + \xi^2 - l\xi) = \frac{\gamma}{2E} (\xi^2 - l^2) \\ N(\xi) = \frac{\gamma F l}{2} - \frac{1}{2} (l-2\xi) \gamma F = \frac{\gamma F}{2} (l-l+2\xi) = \gamma F \xi \end{cases}$$

Этот результат также верен.

**Пример 2.** Условия примера 1 сохраняются, но нагрузкой является сила  $P$ , приложенная в начале координат и направленная вниз. Собственным весом стержня пренебрегаем.

Граничные условия:  $u(l) = 0$ ,  $N(0) = 0$

Неизвестные:  $u(0)$  и  $N(l)$ .

Нагрузка:  $n(x) = -P \cdot \delta(x)$

Первое из уравнений (25.1) приобретает вид:

$$u(\xi) = -\frac{(l-\xi)}{2EF} N(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{|0-\xi|}{2EF} n(x) dx$$

здесь нуль под интегралом в числителе, так как сила приложена в точке нуль.

При  $\xi = 0$  получаем 
$$u(0) = -\frac{(l-0)}{2EF} N(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{|0-0|}{2EF} n(x) dx$$

При  $\xi = l$  получаем 
$$u(0) = -\frac{(l-l)}{2EF} N(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{|0-l|}{2EF} n(x) dx$$

В первом уравнении интеграл равен нулю. Вычислим интегралы из второго уравнения

$$\int_0^l |x-l| dx = \int_0^l (l-x) dx = l \int_0^l dx - \int_0^l x dx = l^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = l^2 - \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2}$$

Получили СЛАУ:

$$\begin{cases} u(0) = -\frac{l}{2EF} N(l) + \frac{1}{2} u(0) - 0 \\ 0 = 0 + \frac{1}{2} u(0) + \frac{Pl}{2EF} \end{cases}$$

Из второго уравнения  $u(0) = -\frac{Pl}{EF}$ , из первого  $N(l) = P$ .

Сделаем проверку:  $\sum P_x = 0$ :  $-P + N(0) = 0$ ,  $-P + P = 0$ . Все верно!

### 25.1.4 Вывод матричного уравнения

Запишем первое из уравнений (25.25) при  $\xi = 0$  и при  $\xi = l$ :

$$\begin{cases} u(0) = -\frac{l}{2EF} N(l) + 0 \cdot N(0) + \frac{1}{2} u(l) - \frac{1}{2} \text{sign}(0 - (0 + \varepsilon)) u(0) - \int_0^l \frac{x}{2EF} n(x) dx \\ u(l) = 0 \cdot N(l) + \frac{l}{2EF} \cdot N(0) + \frac{1}{2} \text{sign}(l - (l - \varepsilon)) u(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{|x-l|}{2EF} n(x) dx \\ u(0) = -\frac{l}{2EF} N(l) + 0 \cdot N(0) + \frac{1}{2} u(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{x}{2EF} n(x) dx \\ u(l) = 0 \cdot N(l) + \frac{l}{2EF} \cdot N(0) + \frac{1}{2} u(l) + \frac{1}{2} u(0) - \int_0^l \frac{|x-l|}{2EF} n(x) dx \end{cases}$$

Запишем эти уравнения в матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{l}{2EF} \\ \frac{l}{2EF} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \int_0^l \frac{x}{2EF} n(x) dx \\ \int_0^l \frac{|x-l|}{2EF} n(x) dx \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} &= \frac{l}{2EF} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \frac{1}{2EF} \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение к виду, удобному для программирования для чего перенесем все неизвестные влево:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \frac{l}{2EF} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} &= -\frac{1}{2EF} \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \frac{l}{2EF} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} &= -\frac{1}{2EF} \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \frac{l}{EF} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = -\frac{1}{EF} \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \\
& \begin{vmatrix} EF & -EF \\ -EF & EF \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\int_0^l x \cdot n(x) dx \\ -\int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \\
& \begin{vmatrix} -EF & EF \\ EF & -EF \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix} \\
& \boxed{\begin{vmatrix} -EF & EF & 0 & -l \\ EF & -EF & l & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \\ N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix}} \quad (25.28)
\end{aligned}$$

Уравнение (25.28) и является *основным уравнением МГИУ в матричной форме для стержней*. Или если обозначить

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -EF & EF & 0 & -l \\ EF & -EF & l & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{vmatrix} u(0) \\ u(l) \\ N(0) \\ N(l) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot n(x) dx \\ \int_0^l (l-x)n(x) dx \end{vmatrix}$$

то получим матричное уравнение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (25.29)$$

Решим *пример 1*, используя матричное уравнение (25.28):

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -EF & EF & 0 & -l \\ EF & -EF & l & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ 0 \\ 0 \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l x \cdot (-\gamma F) dx \\ \int_0^l (l-x)(-\gamma F) dx \end{vmatrix} \\
& \begin{vmatrix} -EF & EF & 0 & -l \\ EF & -EF & l & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u(0) \\ 0 \\ 0 \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\gamma Fl^2}{2} \\ \frac{\gamma Fl^2}{2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Получили уравнения

$$-EF \cdot u(0) - l \cdot N(l) = -\frac{\gamma F \cdot l^2}{2}$$

$$EF \cdot u(0) = -\frac{\gamma F \cdot l^2}{2}$$

Из последнего уравнения  $u(0) = -\frac{\gamma \cdot l^2}{2E}$ , из первого -  $N(l) = \gamma Fl$ .

### 25.1.5 Учет граничных условий

Единственность решения (25.28) и (25.29) достигается при помощи исключения двух неизвестных за счет граничных условий. Будем рассматривать три классических условия:

- 1) жесткое защемление  $u = 0$ ;
- 2) свободное опирание  $u = 0$ ;
- 3) свободный край  $N = 0$ .

Опишем все возможные случаи при равенстве нулю известных граничных условий.

1.  $u(0) = 0$   $u(l) = ?$   
 $N(0) = ?$   $N(l) = 0$

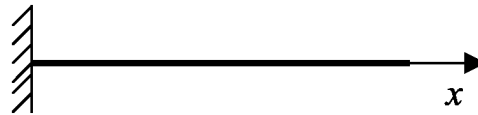


Рис.25.4

Матричное уравнение приобретает вид

$$\begin{vmatrix} EF & 0 \\ -EF & l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(l) \\ N(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l xn(x)dx \\ \int_0^l (l-x)n(x)dx \end{vmatrix} \quad (25.30)$$

2.  $u(0) = ?$   $u(l) = 0$   
 $N(0) = 0$   $N(l) = ?$

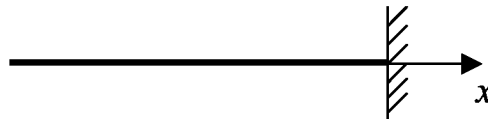


Рис.25.5

Матричное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -EF & -l \\ EF & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l xn(x)dx \\ \int_0^l (l-x)n(x)dx \end{vmatrix} \quad (25.31)$$

3.  $u(0) = 0$   
 $N(0) - ?$

$u(l) - ?$   
 $N(l) = 0$

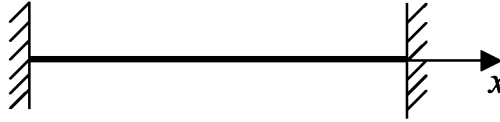


Рис.25.6

и все остальные 3 варианта. Т.е. для расчета стержня МГИУ все равно, защемление или опирание.

$$\begin{vmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l xn(x)dx \\ \int_0^l (l-x)n(x)dx \end{vmatrix} \quad (25.32)$$

Теперь попробуем решить *пример 2* (сила растягивает стержень и приложена на конце)

Начальные условия:  $u(0) - ?$ ;  $u(l) = 0$ ;  $N(0) = 0$ ;  $N(l) - ?$

Данному случаю соответствует СЛАУ (25.31)

$$\begin{vmatrix} -EF & -l \\ EF & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^l xn(x)dx \\ \int_0^l (l-x)n(x)dx \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -EF & -l \\ EF & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u(0) \\ N(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\int_0^l l \cdot P dx \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -EF \cdot u(0) - l \cdot N(l) = 0 \\ EF \cdot u(0) + 0 \cdot N(l) = -Pl \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем  $u(0) = -\frac{Pl}{EF}$ .

Из первого  $EF \frac{Pl}{EF} - l \cdot N(l) = 0$   $N(l) = -P$ .

**Пример 3.** Решим стержень, изображенный на рис.25.7:

$$\begin{matrix} u(0) = 0 & N(0) - ? \\ u(l) = 0 & N(l) - ? \end{matrix}$$

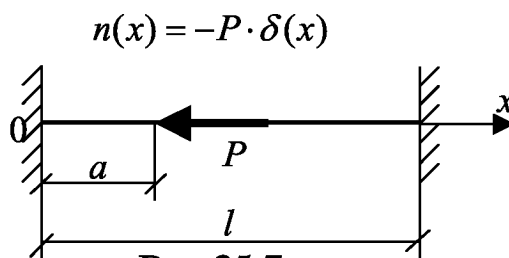


Рис.25.7

Имеем случай СЛАУ (25.32). После подстановки нагрузки получаем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N(0) \\ N(l) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\int_0^l a \cdot P \cdot \delta(a-0) dx \\ -\int_0^l (l-a) P \cdot \delta(a-l) dx \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -l \cdot N(l) = -Pa \int_0^l \delta(a-0) dx \\ l \cdot N(0) = -(l-a) P \int_0^l \delta(a-l) dx \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -l \cdot N(l) = -Pa \cdot \text{sign}(a-0) \\ l \cdot N(0) = -(l-a) P \cdot \text{sign}(a-l) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -l \cdot N(l) = -Pa \\ l \cdot N(0) = (l-a) P \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} N(l) = -\frac{Pa}{l} \\ N(0) = \frac{P(l-a)}{l} \end{cases} &\text{Проверка: } \sum P_x = 0: \quad N(0) + P + N(l) = 0 \Rightarrow \\ \frac{P(l-a)}{l} - P + \frac{Pa}{l} = 0 &\Rightarrow P - \frac{Pa}{l} - P + \frac{Pa}{l} = 0. \text{ Все верно.} \end{aligned}$$

## 25.2 Расчет балок МГИУ

В данном разделе рассматриваются балки, т.е. линейные объекты, описанные в главе 8. Как и для стержней, повторим основные формулы и зависимости.

### 25.2.1 Постановка задачи об изгибе балки

Рассмотрим балку с внешней распределенной нагрузкой  $q_y$ , направленной вверх, вдоль положительной оси  $y$  (Рис.25.8).

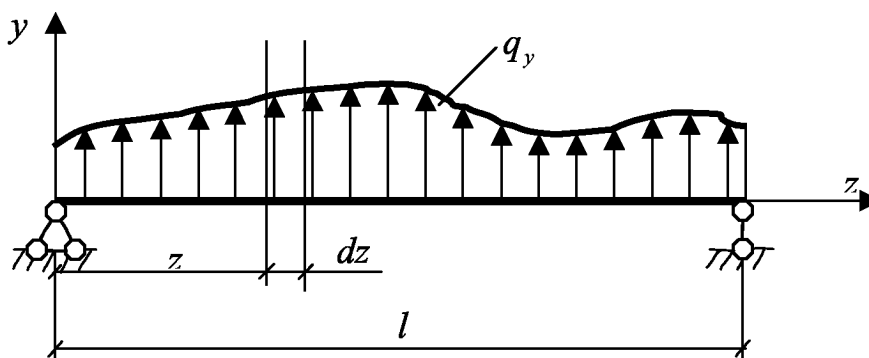


Рис.25.8



Выделим в произвольном месте балки элемент длиной  $dz$ . Рассмотрим выделенный элемент (Рис.25.9). Предположим, что поперечные силы и изгибающие моменты, которыми заменяем отброшенные части балки, положительны. Кроме этого, ввиду малости  $dz$ , считаем  $q_y$  интенсивностью равномерно распределенной нагрузки.

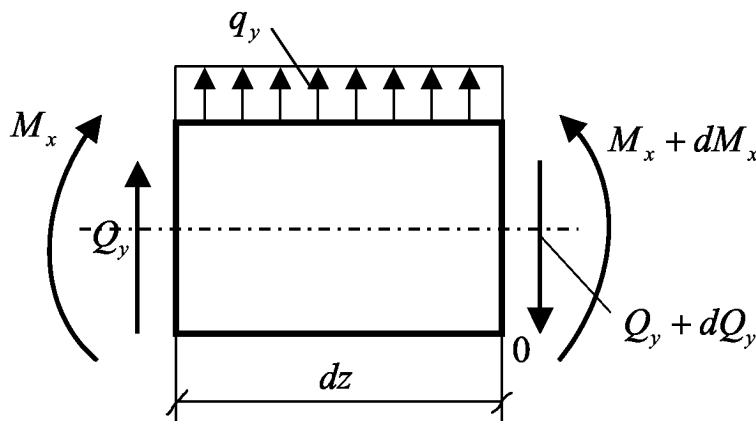


Рис.25.9

Составим для данного элемента два уравнения равновесия:

$$\sum P_y = 0: \quad Q_y + q_y dz - (Q_y + dQ_y) = 0 \quad (25.33)$$

$$\sum M_o = 0: \quad M_x + Q_y dz + q_y dz \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0 \quad (25.34)$$

Из уравнений (25.33) и (25.34) можно получить известные дифференциальные зависимости при изгибе (см. главу 8):

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad (25.35)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = q_y \quad (25.36)$$

### 25.2.2 Вывод основных уравнений МГИУ для балок

Запишем теорему взаимности работ (теорему Бетти):

$$\int_0^l q' w dz + (Q' w + M' \theta)|_0^l = \int_0^l q w' dz + (Q w' + M \theta')|_0^l \quad (25.37)$$

здесь параметры со штрихами соответствуют вспомогательному состоянию балки, а без штрихов заданному. Именно они и не известны. В уравнении (25.37) и дальше  $w$  - прогиб балки,  $\theta$  - угол поворота,  $Q$  - поперечная сила,  $M$  - изгибающий момент. Для упрощения записи все индексы опущены.

В обеих частях уравнения (левой и правой) вторые члены физически являются интегралами по границе балки  $\partial\Omega$ , но  $\partial\Omega = [0, l]$  - всего две точки.

Теперь осталось правильно выбрать вспомогательное состояние. Перепишем (25.37) в обозначениях теории потенциалов, заменив внешнюю нагрузку  $q' = q'(z) = \delta(z, \xi)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta(z, \xi) w(z) dz + (Q^*(z, \xi) w(z) + M^*(z, \xi) \theta(z)) \Big|_0^l = \\ = \int_0^l q(z) W^*(z, \xi) dz + (Q(z) W^*(z, \xi) + M(z) \Theta^*(z, \xi)) \Big|_0^l \end{aligned} \quad (25.38)$$

Здесь величины со звездочками – фундаментальные решения. Перепишем (25.38), учтя свойство  $\delta(x, \xi)$  – дельта функции Дирака

$$\int_0^l \delta(x, \xi) w(z) dz = w(\xi),$$

и перенеся все кроме этого члена в правую часть:

$$\begin{aligned} w(\xi) = \int_0^l q(z) W^*(z, \xi) dz + (Q(z) W^*(z, \xi) + M(z) \Theta^*(z, \xi) - \\ - w(z) Q^*(z, \xi) - \theta(z) M^*(z, \xi)) \Big|_0^l \end{aligned} \quad (25.39)$$

Это и есть *основное уравнение МГИУ*. Точка  $\xi$  принимает значения 0 и  $l$ . Всего в (25.39) неизвестных 4:  $w(z)$ ,  $\theta(z)$ ,  $M(z)$  и  $Q(z)$ . (Точка  $\xi$  одна из точек  $z$ ). Две из них известны из граничных условий. Т.о., остается одно уравнение и 2 неизвестных. Для замыкания системы получим второе разрешающее уравнение, для чего продифференцируем (25.39) по  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} dz + \left( Q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} + M(z) \frac{d\Theta^*(z, \xi)}{d\xi} - \right. \\ \left. - w(z) \frac{dQ^*(z, \xi)}{d\xi} - \theta(z) \frac{dM^*(z, \xi)}{d\xi} \right) \Big|_0^l \end{aligned} \quad (25.40)$$

Уравнения (25.39) и (25.40) приводят к однозначному решению балок МГИУ.

### 25.2.3 Граничные условия

Ограничимся только тремя классическими типами граничных условий:

- свободное опирание  $w = 0, \quad M = 0$  (25.41)

- жесткая заделка  $w = 0, \quad \theta = 0$  (25.42)

- свободный конец  $Q = 0, M = 0$  (25.43)

### 25.2.4 Пример №1 расчета балки МГИУ

Рассмотрим консольную балку длиной  $l$  на которую приложена сила  $P$  в конце (Рис.25.10).

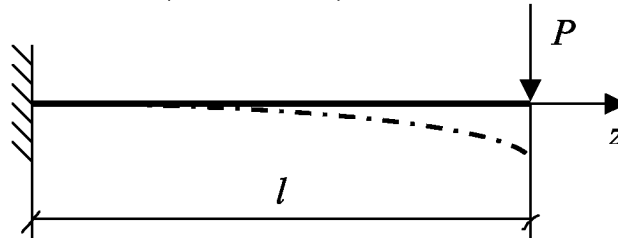


Рис.25.10

Граничные условия рассматриваемой консольной балки:

- на левом краю (при  $z = 0$ ):  $w(0) = 0, \theta(0) = 0;$  (А)

- на правом краю (при  $z = l$ ):  $Q(l) = 0, M(l) = 0.$  (В)

Запишем уравнения (25.39) и (25.40) применительно к рассматриваемой консольной балке:

$$w(\xi) = \int_0^l q(z)W^*(z, \xi)dz - w(l)Q^*(l, \xi) - \theta(l)M^*(l, \xi) -$$

$$- Q(0)W^*(0, \xi) - M(0)\Theta^*(0, \xi)$$

$$\theta(\xi) = \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} dz - w(l) \frac{dQ^*(l, \xi)}{d\xi} - \theta(l) \frac{dM^*(l, \xi)}{d\xi} -$$

$$- Q(0) \frac{dW^*(0, \xi)}{d\xi} - M(0) \frac{d\Theta^*(0, \xi)}{d\xi}$$

Уравнения (25.39') и (25.40') просто интегральные уравнения для внутренних точек  $z$  и  $\xi$ . Чтобы данные уравнения стали граничными (ГИУ) необходимо составить 4 уравнения, положив в первых двух  $\xi = 0$ , а в оставшихся  $\xi = l$ .

К решению данного примера мы еще вернемся.

### 25.2.5 Зависимости между неизвестными

Используя результаты главы 8 можно записать выражения для угла поворота  $\theta$ , изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ , как функции от прогиба  $w$ :

$$\frac{dw}{dz} = \theta, \quad (25.44)$$

из  $\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI}$  получим  $M = EI \frac{d^2w}{dz^2},$  (25.45)

из (26.35):  $\frac{dM}{dz} = Q$  получим  $Q = EI \frac{d^3w}{dz^3}$  (25.46)

Здесь  $EI = const$  - жесткость балки при изгибе.

### 25.2.6 Фундаментальные решения

Идея получения фундаментального решения для прогибов заключается в решении дифференциального уравнения относительно  $w$ , в которое входит и нагрузка  $q$ . (Это вообще какая-то нагрузка, в частном случае это интенсивность распределенной нагрузки). При этом нагрузка предполагается равной дельта функции Дирака.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI}$$

Воспользовавшись (25.36) получим:

$$\frac{d^4w}{dz^4} = \frac{q}{EI}$$

Это уравнение которое мы ищем. Оно связывает  $w$  и  $q$ . Положим  $q = \delta(z, \xi)$ :

$$\frac{d^4W^*(z, \xi)}{dz^4} = \frac{\delta(z, \xi)}{EI} \quad (25.47)$$

Искомое фундаментальное решение имеет вид

$$W^*(z, \xi) = \frac{1}{2} \frac{|z - \xi|^3}{3!EI} \quad (25.48)$$

Получим 4 первые производные от  $W^*(z, \xi)$  по  $z$ :

$$\frac{d}{dz} W^*(z, \xi) = \frac{|z - \xi|^2}{4EI} \quad (25.49)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} W^*(z, \xi) = \frac{|z - \xi|}{2EI} \quad (25.50)$$

$$\frac{d^3}{dz^3} W^*(z, \xi) = \frac{\text{sign}(z - \xi)}{2EI} \quad (25.51)$$

$$\frac{d^4}{dz^4} W^*(z, \xi) = \frac{\delta(z - \xi)}{EI} \quad (25.52)$$

Получим *фундаментальные решения уравнения (25.39)*:

$$\text{из (25.44) и (25.49):} \quad \Theta^*(z, \xi) = \frac{|z - \xi|^2}{4EI} \quad (25.53)$$

$$\text{из (25.45) и (25.50):} \quad M^*(z, \xi) = \frac{1}{2}|z - \xi| \quad (25.54)$$

$$\text{из (25.46) и (25.51):} \quad Q^*(z, \xi) = \frac{1}{2} \text{sign}(z - \xi) \quad (25.55)$$

Получим *фундаментальные решения уравнения (25.40)*:

$$\frac{d}{d\xi} W^*(z, \xi) = -\frac{|z - \xi|^2}{4EI} \quad (25.56)$$

$$\frac{d}{d\xi} \Theta^*(z, \xi) = -\frac{|z - \xi|}{2EI} \quad (25.57)$$

$$\frac{d}{d\xi} M^*(z, \xi) = -\frac{1}{2} \text{sign}(z - \xi) \quad (25.58)$$

$$\frac{d}{d\xi} Q^*(z, \xi) = -\delta(z, \xi) \quad (25.59)$$

В последнем выражении пропадает 2 в знаменателе, т.к.  $|x|'' = (\text{sign } x)' = 2\delta(x)$ .

После подстановки фундаментальных решений (25.47), (25.53) - (25.55), (25.56) - (25.59) в уравнения МГИУ (25.39) и (25.40) решение задачи, с точки зрения теории, можно считать выполненным.

Одной из основных особенностей применения МГИУ является вычисление интегралов с особенностями. При расчете балок МГИУ ядра не содержат особенностей, да и интегралы по границе все вырожденные, т.к. граница – всего 2 точки. Интегрировать придется только по объему, т.е. только по длине балки, да и только там, где приложена распределенная нагрузка.

### 25.2.7 Продолжение решения примера №1

В нашем примере, т.к. на всей длине балки внешняя нагрузка – сила  $P$  действует только в одной точке  $z=l$ , то интегрировать в уравнениях (25.39) и (25.40) нечего (интегралы вырождаются):

$$\int_0^l W^*(z, \xi) \cdot \delta(z - l) dz = \frac{1}{12EI} \int_0^l |z - \xi|^3 \delta(z - l) dz = -\frac{|l - \xi|}{12EI}$$

$$\int_0^l \frac{d}{d\xi} W^*(z, \xi) dz = \frac{d}{d\xi} W^*(z, \xi) = -\frac{|l-\xi|^2}{4EI}$$

Запишем интегральные уравнения (25.39') и (25.40'), подставив в них выше записанные выражения и соответствующие фундаментальные решения:

$$w(\xi) = -P \frac{|l-\xi|^3}{12EI} - \frac{1}{2} \text{sign}(l-\xi) w(l) - \frac{1}{2} |l-\xi| \theta(l) - \frac{|0-\xi|^3}{12EI} Q(0) - \frac{|0-\xi|^2}{4EI} M(0) \quad (25.39'')$$

$$\theta(\xi) = -P \frac{|l-\xi|^2}{4EI} + \delta(l, \xi) w(l) - \frac{1}{2} \text{sign}(l-\xi) \theta(l) + \frac{|0-\xi|^2}{4EI} Q(0) + \frac{|0-\xi|}{2EI} M(0) \quad (25.40'')$$

Чтобы получить ГИУ нужно записать эти уравнения при  $\xi = 0$  и при  $\xi = l$ :

$$w(0) = -P \frac{|l-0|^3}{12EI} - \frac{1}{2} \text{sign}(l-0) w(l) - \frac{1}{2} |l-\xi| \theta(l) - 0 - 0$$

$$w(l) = -P \frac{|l-l|^3}{12EI} - \frac{1}{2} \text{sign}(l-l) w(l) - \frac{1}{2} |l-l| \theta(l) - \frac{|0-l|^3}{12EI} Q(0) - \frac{|0-l|^2}{4EI} M(0)$$

$$\theta(0) = -P \frac{|l-0|^2}{4EI} + \delta(l, 0) w(l) - \frac{1}{2} \text{sign}(l-0) \theta(l) + 0 + 0$$

$$\theta(l) = -P \frac{|l-l|^2}{4EI} + \delta(l, l) w(l) - \frac{1}{2} \text{sign}(l-l) \theta(l) + \frac{|0-l|^2}{4EI} Q(0) + \frac{|0-l|}{2EI} M(0)$$

Получили СЛАУ  $\dim = 4$ . Решение ее не составляет труда, однако не определены коэффициенты с  $\delta$  и  $\text{sign}$ . Рассмотрим их:

1)  $\delta$ -дельта функция введенная Дираком в 1926 г. Ее определение:

$$\delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \neq 0 \\ \infty & \text{при } z = 0 \end{cases}, \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = 1$$

Когда пишется  $\delta(z, \xi)$ , то нужно понимать это так, что функция в скобках есть расстояние между точками (векторами)  $z$  и  $\xi$ . Теперь понятно, что  $\delta(l, 0) = 0$ . При рассмотрении другой дельта функции можно применить такой прием

$$\delta(l, l) = \delta(l, l - \varepsilon) = 0$$

2) Функция знака по определению  $\text{sign } z = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ , следовательно,  $\text{sign}(l-0) = 1$ . С  $\text{sign}(l-l)$  поступим аналогично  $\delta(l, l)$ :

$$\text{sign}(l-l) = \text{sign}(l - (l - \varepsilon)) = \text{sign}(-\varepsilon) = -1$$

Подставим все известные значения в систему и решим ее:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{Pl^3}{12EI} - \frac{1}{2}w(l) - \frac{l}{2}\theta(l) - 0 - 0 \\ w(l) = 0 + \frac{1}{2}w(l) - 0 + \frac{l^3}{12EI}Q(0) + \frac{l^2}{4EI}M(0) \\ 0 = -\frac{Pl^2}{4EI} + 0 - \frac{1}{2}\theta(l) + 0 + 0 \\ \theta(l) = 0 + 0 + \frac{1}{2}\theta(l) - \frac{l^2}{4EI}Q(0) - \frac{l}{2EI}M(0) \end{cases}$$

Из третьего уравнения получим  $\theta(l) = -\frac{Pl^2}{2EI}$ . Тогда из первого уравнения

$$\frac{1}{2}w(l) = -\frac{Pl^3}{12EI} + \frac{l}{2} \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^3}{6EI} \Rightarrow w(l) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Второе и четвертое уравнения создают систему:

$$\begin{cases} \frac{l^3}{12EI}Q(0) + \frac{l^2}{4EI}M(0) = \frac{1}{2}w(l) = \frac{Pl^3}{6EI} \\ -\frac{l^2}{4EI}Q(0) - \frac{l}{2EI}M(0) = \frac{1}{2}\theta(l) = -\frac{Pl^2}{4EI} \end{cases}$$

Решив систему получим  $Q(0) = -P$ ,  $M(0) = Pl$ . Пример решен. Теперь для того, чтобы получить значения прогибов и углов поворота внутри области необходимо подставить полученные граничные значения в уравнения (25.39'') и (25.40''). Чтобы получить значения изгибающих моментов и поперечных сил необходимо уравнение (25.40'') преобразовать в соответствии с выражениями (25.45) и (25.46).

Таким образом, при применении МГИУ к балкам стирается разница между статически определимыми и неопределимыми балками.

### 25.2.8 Основные уравнения МГИУ в матричной форме

Исходными для этого будут уравнения (25.39) и (25.40):

$$w(\xi) = (Q(z) \cdot W^*(z, \xi) + M(z) \cdot \Theta^*(z, \xi) - w(z) \cdot Q^*(z, \xi) - \theta(z) \cdot M^*(z, \xi)) \Big|_0^l + \int_0^l q(z) W^*(z, \xi) dz$$

$$\theta(\xi) = \left( Q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} + M(z) \frac{d\Theta^*(z, \xi)}{d\xi} - w(z) \frac{dQ^*(z, \xi)}{d\xi} - \theta(z) \frac{dM^*(z, \xi)}{d\xi} \right) \Big|_0^l + \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} dz$$

Сделаем подстановку в этих уравнениях:

$$w(\xi) = Q(l) \cdot W^*(l, \xi) - Q(0) \cdot W^*(0, \xi) + M(l) \cdot \Theta^*(l, \xi) - M(0) \cdot \Theta^*(0, \xi) - w(l) \cdot Q^*(l, \xi) + w(0) \cdot Q^*(0, \xi) - \theta(l) \cdot M^*(l, \xi) + \theta(0) \cdot M^*(0, \xi) + \int_0^l q(z) \cdot W^*(z, \xi) dz$$

$$\theta(\xi) = Q(l) \frac{dW^*(l, \xi)}{d\xi} - Q(0) \frac{dW^*(0, \xi)}{d\xi} + M(l) \frac{d\Theta^*(l, \xi)}{d\xi} - M(0) \frac{d\Theta^*(0, \xi)}{d\xi} - w(l) \frac{dQ^*(l, \xi)}{d\xi} + w(0) \frac{dQ^*(0, \xi)}{d\xi} - \theta(l) \frac{dM^*(l, \xi)}{d\xi} + \theta(0) \frac{dM^*(0, \xi)}{d\xi} + \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} dz$$

Запишем эти уравнения для границы, т.е. при  $\xi = 0$  и  $\xi = l$

$$(25.60) \quad \begin{pmatrix} w(0) \\ w(l) \\ \theta(0) \\ \theta(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W^*(0,0) & W^*(l,0) & -\Theta^*(0,0) & \Theta^*(l,0) \\ -W^*(0,l) & W^*(l,l) & -\Theta^*(0,l) & \Theta^*(l,l) \\ \frac{dW^*(0,0)}{d\xi} & \frac{dW^*(l,0)}{d\xi} & \frac{d\Theta^*(0,0)}{d\xi} & \frac{d\Theta^*(l,0)}{d\xi} \\ \frac{dW^*(0,l)}{d\xi} & \frac{dW^*(l,l)}{d\xi} & \frac{d\Theta^*(0,l)}{d\xi} & \frac{d\Theta^*(l,l)}{d\xi} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Q(0) \\ Q(l) \\ M(0) \\ M(l) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} Q^*(0,0) & -Q^*(l,0) & M^*(0,0) & -M^*(l,0) \\ Q^*(0,l) & -Q^*(l,l) & M^*(0,l) & -M^*(l,l) \\ \frac{dQ^*(0,0)}{d\xi} & \frac{dQ^*(l,0)}{d\xi} & \frac{dM^*(0,0)}{d\xi} & \frac{dM^*(l,0)}{d\xi} \\ \frac{dQ^*(0,l)}{d\xi} & \frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} & \frac{dM^*(0,l)}{d\xi} & \frac{dM^*(l,l)}{d\xi} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w(0) \\ w(l) \\ \theta(0) \\ \theta(l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^l q(z) W^*(z,0) dz \\ \int_0^l q(z) W^*(z,l) dz \\ \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z,l)}{d\xi} dz \\ \int_0^l q(z) \frac{dW^*(z,l)}{d\xi} dz \end{pmatrix}$$

В выражении (25.60) нужно понимать второй символ в скобках так:  $0 = 0 + \varepsilon$ ,  $l = l - \varepsilon$ , так как все ранее написанные уравнения записаны для внутренних точек, и формально писать для граничных точек эти уравнения мы не имеем право. Но



можно все же эти уравнения использовать и в граничных точках, сделав предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

С учетом этого замечания запишем фундаментальные решения (25.48), (25.53)-(25.59), входящие в (25.60):

$W^*(z, \xi) = \frac{ z - \xi ^3}{12EI}$	$W^*(0,0) = W^*(0,0 + \varepsilon) = 0, \quad W^*(l,0) = \frac{l^3}{12EI},$
$\Theta^*(z, \xi) = \frac{ z - \xi ^2}{4EI}$	$W^*(0,l) = \frac{l^3}{12EI}, \quad W^*(l,l) = \frac{ l - (l - \varepsilon) ^3}{12EI} = 0;$
$M^*(z, \xi) = \frac{1}{2} z - \xi $	$\Theta^*(0,0) = 0, \quad \Theta^*(l,0) = \frac{l^2}{4EI},$
$Q^*(z, \xi) = \frac{1}{2} \text{sign}(z - \xi)$	$\Theta^*(0,l) = \frac{l^2}{4EI}, \quad \Theta^*(l,l) = \frac{ l - (l - \varepsilon) ^2}{4EI} = 0;$
$\frac{dW^*(z, \xi)}{d\xi} = -\frac{ z - \xi ^2}{4EI}$	$M^*(0,0) = 0, \quad M^*(l,0) = \frac{l}{2},$
$\frac{d\Theta^*(z, \xi)}{d\xi} = -\frac{ z - \xi }{2EI}$	$M^*(0,l) = \frac{l}{2}, \quad M^*(l,l) = 0;$
$\frac{dM^*(z, \xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \text{sign}(z - \xi)$	$Q^*(0,0) = \frac{1}{2} \text{sign}(0 - (0 + \varepsilon)) = -\frac{1}{2}, \quad Q^*(l,0) = \frac{1}{2},$
$\frac{dQ^*(z, \xi)}{d\xi} = -\delta(z, \xi)$	$Q^*(0,l) = \frac{1}{2} \text{sign}(0 - l) = -\frac{1}{2}, \quad Q^*(l,l) = \frac{1}{2} \text{sign}(l - (l - \varepsilon)) = \frac{1}{2};$
$\frac{dM^*(z, \xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \text{sign}(l - (l - \varepsilon)) = -\frac{1}{2};$	$\frac{dW^*(0,0)}{d\xi} = 0, \quad \frac{dW^*(l,0)}{d\xi} = -\frac{l^2}{4EI},$
$\frac{dQ^*(0,0)}{d\xi} = -\delta(0,0)$	$\frac{dW^*(0,l)}{d\xi} = -\frac{l^2}{4EI}, \quad \frac{dW^*(l,l)}{d\xi} = 0; \quad (25.61)$
$\frac{dQ^*(l,0)}{d\xi} = -\delta(l,0)$	$\frac{d\Theta^*(0,0)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\Theta^*(l,0)}{d\xi} = -\frac{l}{2EI},$
$\frac{dQ^*(0,l)}{d\xi} = -\delta(0,l)$	$\frac{d\Theta^*(0,l)}{d\xi} = -\frac{l}{2EI}, \quad \frac{d\Theta^*(z, \xi)}{d\xi} = 0;$
$\frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} = -\delta(l,l)$	$\frac{dM^*(0,0)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \text{sign}(0 - (0 + \varepsilon)) = \frac{1}{2},$
$\frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} = -\delta(l,l)$	$\frac{dM^*(l,0)}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dM^*(0,l)}{d\xi} = \frac{1}{2},$
$\frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} = -\delta(l,l)$	$\frac{dM^*(z, \xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2} \text{sign}(l - (l - \varepsilon)) = -\frac{1}{2};$
$\frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} = -\delta(l,l)$	$\frac{dQ^*(0,0)}{d\xi} = \frac{dQ^*(l,0)}{d\xi} = \frac{dQ^*(0,l)}{d\xi} = \frac{dQ^*(l,l)}{d\xi} = 0.$

Матричное уравнение (25.60) с учетом (25.61) будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} w(0) \\ w(l) \\ \theta(0) \\ \theta(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{l^3}{12EI} & 0 & \frac{l^2}{4EI} \\ \frac{l^3}{12EI} & 0 & -\frac{l^2}{4EI} & 0 \\ 0 & -\frac{l^2}{4EI} & 0 & -\frac{l}{2EI} \\ \frac{l^2}{4EI} & 0 & \frac{l}{2EI} & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} Q(0) \\ Q(l) \\ M(0) \\ M(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{l}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} w(0) \\ w(l) \\ \theta(0) \\ \theta(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \int_0^l \frac{z^3}{12EI} q(z) dz \\ \int_0^l \frac{|z-l|^3}{12EI} q(z) dz \\ -\int_0^l \frac{z^2}{4EI} q(z) dz \\ -\int_0^l \frac{|z-l|^2}{4EI} q(z) dz \end{vmatrix}$$

Упростим последнее уравнение, перенеся все неизвестные вправо.

Это и есть уравнение для балок, решаемых МГИУ, в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & l & 0 & -\frac{l^2}{2EI} & 0 & -\frac{l^2}{6EI} \\ 1 & -1 & -l & 0 & \frac{l^2}{2EI} & 0 & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{l}{EI} & 0 & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{l}{EI} & 0 & -\frac{l^2}{2EI} & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} w(0) \\ w(l) \\ \theta(0) \\ \theta(l) \\ M(0) \\ M(l) \\ Q(0) \\ Q(l) \end{vmatrix} = \frac{1}{2EI} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \int_0^l z^3 q(z) dz \\ \frac{1}{3} \int_0^l (l-z)^3 q(z) dz \\ -\int_0^l z^2 q(z) dz \\ -\int_0^l (l-z)^2 q(z) dz \end{vmatrix}$$

(25.62)

Рассмотрим несколько примеров решения балок с использованием уравнения (25.62).

### 25.2.9 Примеры решения балок МГИУ

Все примеры решены в среде MATHCAD 2001 в символьном виде. Ниже приведены листинги соответствующих программ. На взгляд авторов язык MATHCAD настолько прост,

т.е.

$$\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

.....

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right]$$

что листинги не требуют дополнительных пояснений.

т.е.

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right]$$

2. en

$$\text{car } (T^{-1})^2 = \frac{1}{c^2} =$$

$$\frac{1}{(0,3)} = \frac{100}{0,3} = 333,33 =$$

$$= \frac{1}{2,7} =$$

$$\text{car } \frac{1}{2,7} = \frac{20}{2,7} \quad \text{MU} =$$

$$\text{Finis } \left( \begin{array}{c} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \end{array} \right)$$

3. en

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(0,3)} = \frac{100}{0,3} = \frac{10000}{3}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(0,3)} = \frac{10000}{3} = \frac{10000}{3}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(0,3)} = \frac{10000}{3} = \frac{10000}{3}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{(0,3)} = \frac{10000}{3} = \frac{10000}{3}$$

— 3

Finis

$$\left( \begin{array}{c} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \end{array} \right)$$

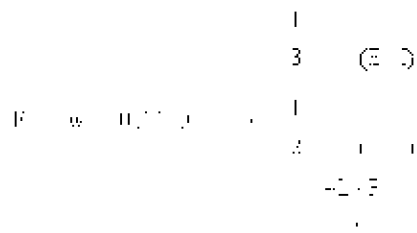
IV

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - M^* = 0$$

$$\Rightarrow -1 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - M^* = 0$$

$$M^* = \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} = -1.5$$

$$M^* = -1.5$$



### Правила знаков

1. Реакции имеют знак, противоположный полученному при решении, т.е.

$$R = -Q, \quad M = -M^*$$

Положительные направления опорных реакций:

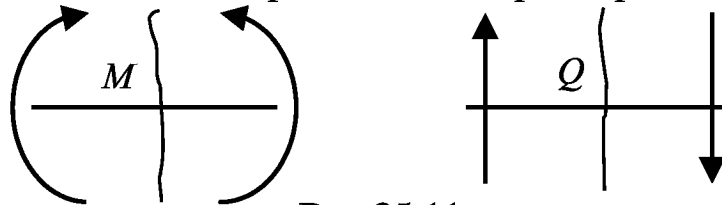


Рис.25.11

2. Прогибы положительны, если их направление совпадает с направлением внешней нагрузки.
3. Углы поворота положительны, если поворачивают нормаль против часовой стрелки.

## Литература

1. Сопротивление материалов/Под ред. Акад. АН Украины Писаренко Г.С.-К.: Вища школа, 1986. – 775с.
2. Сопротивление материалов/Под ред. Смирнова А.Ф.-К.: Вища школа, 1975. – 480с.
3. Федосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986 – 512с.
4. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1965. Т.1. –364с. Т.2. – 480 с.
5. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. - М.: Мир, 1976. – 669 с.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов/Под ред. Беляева Н.М. – М.: Наука, 1966. – 348с.
7. Сборник задач по сопротивлению материалов/Под ред. Качурина В.К. – М.: Наука, 1972. – 432с.
8. Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов». – М.: Машиностроение, 1980. – 224с.
9. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1975. – 287с.
- 10.Цурпал И.А., Барабан Н.П., Швайко В.М. Сопротивление материалов. Лабораторные работы. – К.: Вища школа, 1978. – 192с.
- 11.Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов. – М.: Высш. шк., 1995. – 560с.

# CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	11
<b>Chapter 1. Fundamental principles of material science</b> .....	12
1.1 Problems, purpose and object of mechanics of materials.....	12
1.2 Brief historical remarks on a development of mechanics of materials.....	13
1.3 Structures. Typical forms of elements of engineering constructions.....	16
1.4 External forces and their classification.....	19
1.5 Main hypothesis and principles of mechanics of materials.....	21
<b>Chapter 2. Internal forces and stresses. Method of section</b> .....	23
2.1 Concept of internal interaction and stresses.....	23
2.2 Internal forces.....	25
2.3. Representation of internal forces through external.....	27
<b>Chapter 3. Diagrams of internal forces</b> .....	30
3.1 Main rules for a diagram creation.....	30
3.2 Specific feature of diagram creation in a beam.....	32
3.3 Differential relations in a case of bending.....	35
3.4 Specific feature of diagram creation in a rigid frame.....	37
3.5 Specific feature of diagram creation in a curvilinear beams.....	38
3.6 Specific feature of diagram creation in a space rigid frame.....	39
<b>Chapter 4. Geometrical properties of plane sections</b> .....	41
4.1 Introduction.....	41
4.2 Static moments of a plane area.....	42
4.3 Moments of inertia of a plane area.....	44
4.4 Calculation of moments of inertia for simple sections.....	45
4.5 Determination of moments of inertia with respect to parallel axis.....	47
4.6 Determination of moments of inertia with respect to rotate axis.....	50
4.7 Principal axis and principal moments of inertia.....	51
4.8 Mohr's circle for moments of inertia.....	52
4.9 Definition of principal axis and principal moments of inertia for composed sections.....	55
<b>Chapter 5. Extension and compression</b> .....	58
5.1 Deformation under extension and compression.....	58
5.2 Stress under extension and compression.....	60
5.3 Test of materials under extension.....	62
5.4 Stress concentration.....	69
5.5 Permissible stress. Strength analysis using permissible stress.....	72
5.6 Taking into account of a bar weight.....	74
5.7 Bar of equal resistance.....	76
5.8 Stepped bar.....	78

<b>Chapter 6. Theory of stress-strain state</b> .....	80
6.1 Concept of stress at a point.....	80
6.2 Reciprocity of shearing stress.....	82
6.3 Principal directions and principal stress.....	83
6.4 Axial stress state.....	83
6.5 Plane stress state.....	84
6.6 Mohr's stress circle.....	86
6.7 General stress state.....	88
6.8 Strain state.....	92
6.9 Generalized Hooke's law.....	96
6.10 Strain energy.....	97
<b>Chapter 7. Criteria of strength</b> .....	98
7.1 Aim of strength criteria.....	98
7.2 Criterion of the maximal normal stress.....	100
7.3 Criterion of the maximal deformation.....	101
7.4 Criterion of the maximal shearing stress.....	101
7.5 Criterion of a density of strain energy of shape change.....	102
7.6 Mohr's strength criterion.....	105
<b>Chapter 8. Flexure</b> .....	108
8.1 Deformations under flexure and main hypothesis.....	108
8.2 Definition of stress under pure bending.....	110
8.3 Rational shape of a cross section.....	115
8.4 Definition of strength using normal stress.....	115
8.5 Shearing stress in a bending beam.....	117
8.6 Shearing stress distribution along a cross section of beam.....	120
8.7 Definition of strength using shearing stress.....	123
8.8 Analysis of stress state of beam. Definition of strength using principal stress.....	123
8.9 Trajectories of principal stress.....	126
<b>Chapter 9. Definition of beam deformation</b> .....	128
9.1 Basic concepts.....	128
9.2 Differential equations of an elastic curve of beam.....	129
9.3 Definition of beam deflection by integration of differential equations of a elastic curve of beam.....	131
9.4 Method of initial parameters.....	134
<b>Chapter 10. Additional problems in deflection theory</b> .....	139
10.1 Deflection of a thin-walled beam.....	139
10.2 Methods of structures strength definition.....	144
<b>Chapter 11. Design of a beam with variable cross section</b> .....	150
11.1 Local change of shape and extent.....	151
11.2 Stepped beam.....	151
11.3 Beam, which equally resists to bending.....	152
<b>Chapter 12. Shear</b> .....	156
12.1 Concept of cut and shear. Deformation of shear.....	156



12.2 Stress under shear. Hooke's law .....	157
12.3 Strength definition under shear .....	163
12.4 Design of connections under deformation of shear. Calculation of rivet and weld connections .....	164
<b>Chapter 13. Torsion</b> .....	174
13.1 Introduction .....	174
13.2 Torsion of a circular shaft .....	174
13.3 Calculation of a cylindrical spring .....	182
13.4 Membrane analogy in torsion .....	186
13.5 Torsion of noncircular members .....	187
13.6 Torsion of a thin-walled shaft .....	188
13.7 Closed cross sections .....	189
13.8 Opened cross sections .....	192
<b>Chapter 14. General methods of deformation calculation</b> .....	194
14.1 Work of external forces .....	194
14.2 Work of internal forces .....	196
14.3 Possible work of external and internal forces. General Mohr's formulae for deformation definition .....	199
14.4 Definition of deformation in a truss .....	201
14.5 Definition of deformations in a beam and a rigid frame. Ve- reschaguin's method .....	202
14.6 Definition of deformations under temperature loading .....	207
14.7 Theorems of reciprocity .....	209
14.8 Castigliano's theorem .....	210
<b>Chapter 15. Statically indeterminate systems</b> .....	213
15.1 Concept of a rate of statically indetermination .....	213
15.2 Calculation of statically indeterminate systems by force method	215
15.3 Definition of coefficients and free members of canonical equations .....	218
15.4 Design of a final diagram for internal forces .....	220
15.5 Verification of statically indeterminate system calculation by force method .....	223
15.6 Definition of deformation in statically indeterminate systems	224
15.7 Method of canonical equations simplification .....	226
15.8 Calculation of statically indeterminate systems, which mem- bers are under tension or compression .....	228
15.9 Definition of initial stress by force method .....	230
15.10 Procedure of statically indeterminate system calculation by force method .....	232
<b>Chapter 16. Design of statically indeterminate beams</b> .....	233
16.1 Choice of a rational main system .....	233
16.2 Equation of three moments .....	234
16.3 Methods of final diagrams creation for bending moment and transverse loading .....	238

16.4 Procedure of a statically indeterminate beam calculation.....	241
<b>Chapter 17. Design plane a curved beam</b> .....	244
17.1 Concept of a curved beam.....	244
17.2 Pure bending of a plane curved beam.....	245
17.3 Strength design of a curved beam.....	247
17.4 Definition of a neutral layer's curvature radius.....	249
17.5 Definition of deformation of a plane curved beam.....	251
<b>Chapter 18. Combined loading</b> .....	253
18.1 Space deflection.....	253
18.2 Unsymmetrical bending.....	255
18.3 Stress definition under unsymmetrical bending.....	257
18.4 Bending with tension.....	259
18.4 Bending with tension.....	260
18.6 Kernel of cross section.....	263
18.7 Bending with torsion.....	266
<b>Chapter 19. Stability of a compressed column</b> .....	270
19.1 Concept of stability of linear form of compressed column and critical loading.....	271
19.2 Euler's formula for critical force.....	273
19.3 Influence of end conditions on critical loading.....	276
19.4 Limits of Euler's formula.....	280
19.5 Diagram for critical loading versus slenderness ratio. Yasin-sky's formula.....	282
19.6 Calculation of a compressed column using ratio of permissible stress. Calculation and design of columns.....	283
19.7 Choice of column material and optimal form of a cross section.....	285
19.8 Eccentric loads.....	285
19.9 Approximate calculation in case of eccentric loads.....	289
19.10 Definition of permissible load in case of eccentric loads.....	292
<b>Chapter 20. Resistance to failure under repeated loading</b> .....	293
20.1 Concept of fatigue.....	293
20.2 Main characteristics of cycle.....	295
20.3 Limit of resistance to failure and its definition.....	298
20.3 Limit of resistance to failure and its definition.....	302
20.5 Influence of stress concentration on resistance to failure.....	304
20.6 Influence of surface polishing on resistance to failure.....	305
20.7 Influence of scale factor on resistance to failure.....	306
20.8 Design of resistance to failure.....	307
<b>Chapter 21. Calculation of a thin shell</b> .....	311
21.1 Stress-strain state of a shell.....	311
21.2 Stress definition in axisymmetric shell using momentless theory.....	312
<b>Chapter 22. Calculation of a thick cylinder</b> .....	320
22.1 Thick cylinder under internal and external pressure (Lame's problem).....	320

22.2 Calculation of a composed cylinder .....	328
<b>Chapter 23. Strength calculations under dynamic loading</b> .....	<b>333</b>
23.1 Consideration of inertia forces and stress calculation under uniformly accelerated motion .....	333
23.2 Calculation of stress and strain under impact load .....	334
23.3 Impact factor and its definition .....	340
23.4 Strength calculations under impact loading .....	341
23.5 Transverse impact loading .....	342
23.6 Torsional impact loading .....	343
23.7 Taking into account mass of an impacted body .....	344
<b>Chapter 24. Vibration of an elastic system</b> .....	<b>347</b>
24.1 Basic concepts of theory of vibration .....	347
24.2 Free vibration of an elastic system with one degree of freedom .....	348
24.3 Forced vibration of an elastic system with one degree of freedom .....	352
24.4 Consideration of damping forces .....	355
24.5 Calculation of a cantilever beam under periodic loading .....	357
24.6 Definition of critical velocity of shaft rotation .....	358
24.7 Free vibration of an elastic system with several degrees of freedom .....	360
24.8 Free vibration of beam with two concentrated masses .....	363
24.9 Longitudinal oscillation of a bar .....	364
24.10 Torsion oscillation of a shaft .....	367
24.11 Transverse oscillation of a beam .....	368
<b>Chapter 25. Application of the boundary element method to bar and beam</b> .....	<b>372</b>
25.1 Calculation of bar by BIEM .....	372
25.1.1 Statement of the problem and basis equations .....	372
25.1.2 Fundamental solution for bar .....	375
25.1.3 Some examples of BIEM application to bars .....	377
25.1.4 Main matrix equation .....	380
25.1.5 Consideration of boundary conditions .....	382
25.2 Calculation of beam by BIEM .....	384
25.2.1 Statement of the problem of beam bending .....	384
25.2.2 Basis equations of BIEM for beams .....	385
25.2.3 Boundary conditions .....	386
25.2.4 Example №1 of beam calculation by BIEM .....	387
25.2.5 Equations for unknown functions .....	387
25.2.6 Fundamental solutions for beam .....	388
25.2.7 Example №1. Continuation .....	389
25.2.8 Main equations of BIEM in matrix form .....	391
25.2.9 Some examples of BIEM application to beams .....	395
<b>References</b> .....	<b>398</b>
<b>Contents</b> .....	<b>399</b>

Учебное издание  
**Зозуля Владимир Васильевич**  
**Мартыненко Александр Витальевич**  
**Лукин Александр Николаевич**

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

*Издано в авторской редакции*

Художник обложки О.Ю. Полтавская

---

Подп. в печать 2.11.2001. Формат 60x84/32.  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Dutch.  
Усл. печ. л. 23,5. Уч.-изд. л. 28,3. Тираж 500 экз.  
Изд. № 58/3.

Издательство Национального университета внутренних дел.  
Украина, Харьков, пр. 50-летия СССР, 27.