

В.Э. Вильдеман
Ю.В. Соколкин
А.А. Ташкинов

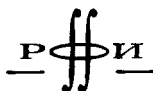
Механика
неупругого
деформирования
и разрушения
композиционных
материалов

Под редакцией Ю.В.Соколкина



МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1997

ББК 22.251
В 46
УДК 539.3



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 97-01-14070

Рецензент: доктор физико-математических наук профессор *Б.Е.Победра*

Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов.
/ Под ред. Ю.В. Соколкина. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 288 с. — ISBN 5-02-015078-9

Исследованы закономерности и модели процессов накопления повреждений, закритического деформирования и структурного разрушения композиционных материалов при квазистатическом нагружении. Рассмотрены постановки, методы и результаты решения стохастически и физически нелинейных краевых задач механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных сред. Изучены вопросы устойчивости процессов деформирования в зависимости от характеристик нагружающих систем. Получены новые результаты по прогнозированию эффективных свойств, расчету микронапряжений и микродеформаций для сред со случайной и периодической структурой.

Для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

Табл. 13. Ил. 65. Библиогр. 382 назв.

Научное издание

ВИЛЬДЕМАН Валерий Эврович
СОКОЛКИН Юрий Викторович
ТАШКИНОВ Анатолий Александрович

**БИБЛИОТЕКА
КОЛОХВА
ОСКОРКА**

МЕХАНИКА НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Редактор *Д.А.Миртова*
Компьютерная верстка *А.С.Фурсова*

ИНБ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

ИБ № 41865
ЛР № 020297 от 23.06.97
Подписано в печать 25.11.97. Формат 60×90/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19.8. Тираж 600 экз.
Заказ тип. № 2707 С-036.

Издательская фирма "Физико-математическая литература" РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

В 1603040000-036 64-98. Наука, I полугодие
053(02)-97
ISBN 5-02-015078-9

© В.Э. Вильдеман,
Ю.В. Соколкин,
А.А. Ташкинов, 1997

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Г л а в а 1	
Закономерности и модели процессов деформирования и разрушения композиционных материалов	15
1.1. Неупругое деформирование композитов и процессы структурного разрушения	16
1.2. Феноменологические модели механики разрушения	20
1.3. Закритическая стадия деформирования материалов	23
Г л а в а 2	
Структурно-феноменологическая модель механики микронеоднородных сред	28
2.1. Модели случайной и периодической кусочно-однородных сред	28
2.2. Краевые задачи механики композитов	31
2.3. Принцип локальности	37
Г л а в а 3	
Краевые задачи теории упругости композитов со случайной структурой	39
3.1. Моментные функции упругих свойств композитов	40
3.2. Постановка и решение стохастической краевой задачи в перемещениях в корреляционном приближении	43
3.3. Расчет характеристик полей деформаций и напряжений в компонентах дисперсно-упрочненных композитов	52
3.4. Статистические характеристики полей напряжений в матрице пористого материала	58

Глава 4

Метод периодических составляющих	68
4.1. Геометрические параметры композитов с квазипериодической структурой	68
4.2. Корреляционное, сингулярное и обобщенное сингулярное приближения метода периодических составляющих	72
4.3. Прогнозирование эффективных упругих свойств анизотропных композитов с квазипериодической структурой	82

Глава 5

Метод локального приближения	86
5.1. Упругая задача для композитов с периодической структурой	86
5.2. Термоупругая задача для композитов с периодической структурой	91
5.3. Упругопластическая задача для композитов с периодической структурой	93
5.4. Самосогласованный и модифицированный варианты метода локального приближения	95
5.5. Применение метода в механике композитов со случайной структурой	99

Глава 6

Краевая задача механики неупругого деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел	101
6.1. Определяющие соотношения деформационной теории поврежденных сред	102
6.2. Материальные функции деформационной теории поврежденных сред	107
6.3. Модели разрушения по совокупности критериев	110
6.4. Граничные условия с учетом свойств нагружающей системы	116
6.5. Краевая задача механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел	121

Глава 7

Математическое моделирование процессов микро- и макроразрушения композиционных материалов	127
7.1. Равновесные процессы структурного разрушения как причина деформационного разупрочнения	127
7.2. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение	135

7.3. Равновесные состояния поврежденной среды, реализуемые в условиях немонотонного нагружения	143
7.4. Кинетика разрушения волокнистых композитов с упруго-пластической матрицей	147
7.5. Вероятностное описание стохастических процессов структурного разрушения	153

Глава 8

Упругое деформирование и структурное разрушение слоистых композитов	157
8.1. Стохастическая краевая задача механики упругопластического деформирования слоистых композитов	157
8.2. Эффективные материальные функции деформационной теории поврежденных анизотропных сред	165
8.3. Закономерности упругопластического поведения при активном деформировании	173
8.4. Остаточные напряжения и деформации	177
8.5. Прогнозирование неупругого деформирования с учетом процессов структурного разрушения	180

Глава 9

Краевая задача механики устойчивого закритического деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения	186
9.1. Модели разупрочняющихся сред	187
9.2. Определяющие соотношения	197
9.3. О признаке закритической деформации и постулате устойчивости неупругого деформирования в связи со свойствами нагружающей системы	202
9.4. Оценка устойчивости процесса закритической деформации	205
9.5. Единственность решения краевых задач для тел с зонами разупрочнения	210
9.6. Экстремальные и вариационные принципы механики устойчивого закритического деформирования	214

Глава 10

Устойчивое закритическое деформирование материалов в элементах конструкций	221
10.1. Закритическое деформирование материалов при испытаниях на одноосное растяжение	221
10.2. Устойчивость закритического деформирования в опытах на изгиб. Высокотемпературные испытания циркониевой керамики	226

10.3. Закритическое деформирование толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления	232
10.4. Разрушение толстостенного цилиндра как потеря устойчивости процесса накопления повреждения	236
10.5. Численные алгоритмы решения задач механики закритического деформирования	239
10.6. Оценка устойчивости процесса разупрочнения при решении краевых задач методом конечных элементов	243
10.7. Проблема прогнозирования катастрофичности разрушения	245

Г л а в а 11

Закритическое деформирование элементов структуры композиционных материалов	246
11.1. Модели механического поведения элементов структуры и устойчивость закритического деформирования сферических включений	246
11.2. Устойчивость закритического деформирования элементов структуры слоистых композитов	249
11.3. Полидисперсная модель композита с поврежденными разупрочняющимися волокнами	252
11.4. Закоиомерности механического поведения композитов, связанные с закритическим деформированием однонаправленно армированных слоев	256
11.5. Напряженно-деформированные состояния волокнистых композитов на стадии закритического деформирования матрицы	261
Список литературы	266

Предисловие

Композиционные материалы нашли широкое применение в различных отраслях современной техники. Дальнейший прогресс в развитии многих направлений машиностроения в большой степени связан с увеличением доли использования таких материалов, а при создании новой аэрокосмической и специальной техники их роль становится решающей. Требования оптимального проектирования, сокращения времени и материальных затрат на экспериментальную отработку определили значительный интерес к совершенствованию методов прогнозирования деформационных и прочностных свойств композитов.

С другой стороны, развитие механики деформируемого твердого тела идет по пути усложнения исследуемых моделей и постановок задач. Исходя из модельных представлений механики, композиционный материал можно определить как неоднородную среду, описываемую с помощью разрывных по координатам быстроосциллирующих материальных функций, которые, как правило, считаются либо периодическими, либо случайными однородными. Необходимость разработки методов решения дифференциальных уравнений с такими коэффициентами привела к появлению относительно новой области математических исследований — теории осреднения дифференциальных операторов с частными производными, позволяющей получить решение исходной задачи с помощью более простых дифференциальных уравнений, называемых осредненными.

Проблема вычисления коэффициентов осредненных уравнений, известная в механике композитов как проблема прогнозирования эффективных характеристик, является одной из центральных, поскольку открывает возможность синтеза материалов с заранее заданным комплексом свойств, наилучшим образом соответствующих конкретным условиям эксплуатации. Каждой неоднородной среде ставится, таким образом, в соответствие некоторая анизотропная среда с эффективными свойствами, для которой удобно проводить расчеты кон-

струкций и деталей из композиционных материалов с использованием известных математических методов механики деформируемого твердого тела.

В то же время, исследование механического поведения элементов структуры с учетом концентрации неоднородных в пределах каждого из них полей напряжений и деформаций позволяет не только непосредственно определять эффективные свойства, но и дает обширную информацию о характере и особенностях деформирования и разрушения материалов в зависимости от реальной структуры композитов и их компонентов.

При работе над книгой авторы стремились к анализу результатов теоретических и экспериментальных исследований диссипативных процессов неупругого деформирования и разрушения анизотропных структурно-неоднородных тел. Большое внимание уделено изучению закономерностей закритической стадии деформирования, при реализации которой материал теряет свою несущую способность не сразу, а постепенно, что отражается на диаграмме деформирования в виде ниспадающей ветви.

Данное механическое явление (известное ранее) авторы обнаружили при решении задач механики упругопластического деформирования композиционных материалов с учетом структурного разрушения.

Однако стремление к адекватному описанию поведения конструкций и оптимальному с позиций сопротивления разрушению проектированию структуры создаваемых композиционных материалов привело к необходимости более раннего учета стадии разупрочнения (на этапе постановки задачи) в определяющих соотношениях и изучения условий закритического деформирования элементов структуры в составе композита.

В работе предложен подход, в рамках которого разрушение неоднородных тел рассматривается как результат потери устойчивости процессов деформирования на закритической стадии, сопровождающихся структурным разрушением. Новые математические модели позволяют естественным образом описывать стадии дисперсного накопления повреждений, локализации разрушения, а также слияния разрушенных зон с учетом пластических деформаций в неоднородных анизотропных средах с помощью специальных функций состояния материала, переход к нестабильной стадии моделировать с помощью критериев устойчивости накопления повреждений, а энергетические соотношения механики разрушения записывать с использованием параметров ниспадающих ветвей полных диаграмм деформирования.

В монографии исследуется понятие нагружающей системы и ее влияние на устойчивость диссипативных процессов. Дано изложение некоторых вопросов теории устойчивой закритической деформации. Традиционная для механики композитов проблема осреднения рассмотрена в новых аспектах, связанных с расширением физической базы используемых математических моделей.

Первая глава носит, в основном, обзорный характер (авторы, безусловно, не претендуют на исчерпывающую полноту изложения) и посвящена анализу теоретических и экспериментальных основ феноменологического описания процессов накопления повреждений, неупругого деформирования и разрушения твердых структурно-неоднородных тел. Рассматриваются основные закономерности этих процессов и проблемы их математического описания, связанные, в частности, с возможностью устойчивого накопления повреждений на закритической стадии деформирования.

Во второй главе сформулированы основные положения, гипотезы и ограничения структурно-феноменологической модели механики композитов. В рамках такой модели сплошной среды свойства компонентов задаются с помощью феноменологических уравнений и критериев, морфология структуры описывается случайными или периодическими индикаторными функциями, а макроскопические деформационные и прочностные свойства вычисляются после осреднения полей деформирования по элементарному макрообъему. Рассматривается модель кусочно-однородной среды, материальные функции определяющих уравнений которой представлены в виде статистически однородных функций координат, одновременно учитывающих случайность взаимного расположения элементов структуры и статистический разброс свойств компонентов. Дана общая постановка квазистатической краевой задачи для микронеоднородного тела в предположении малости деформаций и рассмотрен переход к краевой задаче для осредненных полей деформирования. Сформулирован принцип локальности, определяющий характер взаимного расположения и взаимодействия элементов структуры композитов с периодической и случайной структурой.

Третья глава посвящена построению нового приближенного решения стохастической задачи теории упругости микронеоднородных сред, названного полным корреляционным приближением, в перемещениях с учетом реального вида моментных функций упругих свойств. Рассматривается единая для большинства работ в этом направлении постановка статистически нелинейной краевой задачи в перемещениях с граничными условиями, обеспечивающими однородность ма-

кроскопических деформаций, и обосновывается возможность получения такого решения задачи с использованием тензора Кельвина-Соммильяны для однородной среды сравнения, когда при вычислении бинарных корреляционных тензоров деформаций удерживаются только члены бесконечного ряда, содержащие моментные функции упругих свойств с порядком не выше второго. Однако при вычислении бинарных корреляционных тензоров напряжений и условных моментов, характеризующих средние значения и дисперсии полей деформаций и напряжений в компонентах композитов, учитываются все слагаемые, в том числе и содержащие моментные функции упругих свойств третьего, четвертого и пятого порядков. Отличительная особенность решения заключается в том, что многоточечное приближение построено путем вычисления интегралов задачи по всей области статистической зависимости случайного поля упругих свойств с учетом явного вида моментных функций.

В четвертой главе представлен метод решения краевых задач механики микронеоднородных сред, названный методом периодических составляющих и основанный на выделении периодических составляющих из случайных полей упругих свойств, характеризующих локальной корреляционной функцией с областью отрицательных значений. Исходной краевой задаче для композитов со случайной структурой ставится в соответствие вспомогательная краевая задача с теми же граничными условиями для периодических композитов, при этом средние значения упругих модулей композитов случайной и периодической структуры совпадают. Случайные функции компонент вектора перемещений стохастической задачи представляются в виде двух слагаемых, одно из которых считается известным из решения задачи для композита периодической структуры. С использованием метода функций Грина для однородной среды сравнения осуществлен переход к интегро-дифференциальному уравнению для искомой составляющей поля перемещений. Построены различные приближения решения в перемещениях, представленного в виде ряда: корреляционное, сингулярное и обобщенное сингулярное.

В пятой главе изучается и обосновывается положение принципа локальности, связанное с существованием ближнего порядка в многочастичном взаимодействии элементов структуры композитов. Разработан метод анализа неоднородных полей деформирования в компонентах композитов, названный методом локального приближения. Суть метода заключается в замене краевой задачи для бесконечной области, заполненной микронеоднородной средой и находящейся в условиях произвольно заданного макрооднородного напряженного со-

стояния, краевой задачей для области, содержащей фрагмент структуры с малым числом включений. Метод развит для задач упругого, термоупругого и упругопластического деформирования композиционных материалов. Изложены самосогласованный и модифицированный варианты метода локального приближения.

В шестой главе дана постановка нелинейных краевых задач механики композитов, включающая новые определяющие соотношения неупругих анизотропных сред и совокупность критериев разрушения.

Тензорно-линейные определяющие уравнения содержат тензор поврежденности четвертого ранга, зависящий для склерономных сред от линейных и квадратичных инвариантов тензора деформаций, а критерии разрушения представляют собой условия достижения мерами тензора поврежденности своих предельных значений. Построенные определяющие соотношения и модели разрушения по совокупности критериев позволяют ставить и решать краевые задачи для многостадийных и многоуровневых процессов накопления повреждений с учетом перераспределения напряжений.

Отмечена зависимость устойчивости процессов накопления повреждений от механических свойств нагружающих систем. Влияние последних моделируется путем включения соответствующих операторов или коэффициентов в граничные условия краевых задач для рассматриваемых тел.

В седьмой главе рассмотрены вопросы математического моделирования процессов микро- и макроразрушения зернистых и волокнистых композиционных материалов. В рамках нелинейных моделей микромеханики композитов обоснована осуществимость за критического состояния материала, соответствующего ниспадающей ветви диаграммы деформирования и связанного с процессами структурного разрушения и трещинообразования.

Для различных макрооднородных напряженно-деформированных состояний установлено, что при достаточной жесткости системы нагружения процессы разрушения протекают в равновесном режиме, диаграмма деформирования не обрывается в наивысшей точке, а имеет ниспадающую ветвь. С уменьшением податливости нагружающей системы наблюдается рост предельных деформаций. Статистические характеристики прочности элементов структуры определяют параметры ниспадающей ветви, в частности, ее наклон. Площадь под равновесной диаграммой на за критической стадии деформирования может рассматриваться как характеристика вязкости разрушения для композита. Исследован эффект разносопротивляемости, заключаю-

щийся в зависимости механического поведения неоднородной среды от вида напряженно-деформированного состояния.

Проиллюстрированы результаты решения задачи об упругопластическом деформировании волокнистых композитов с учетом разрушения матрицы при нагружении в поперечной плоскости. Изложена разработанная методика учета стохастических процессов структурного разрушения, основанная на вычислении вероятностей микроразрушений по совокупности механизмов.

Восьмая глава посвящена исследованию упругопластического деформирования и структурного разрушения слоистых композитов. Рассматривается постановка и решение стохастических краевых задач в перемещениях и напряжениях для общего случая нелинейных определяющих соотношений пластически сжимаемых и случайно чередующихся слоев с учетом разброса прочностных свойств и возможных механизмов разрушения. Граничные условия задач соответствуют произвольно заданному макроскопически однородному деформированному или напряженному состоянию композита. Моделируются многостадийные процессы деформирования и разрушения слоистых композитов. В данной главе, как и в предыдущей, закритическая стадия деформирования, проявляющаяся в разупрочнении материала, обнаруживается при решении задач как результат структурного разрушения. Это позволяет на базе использования апробированных моделей механики композитов в ходе проведения вычислительных экспериментов исследовать основные закономерности закритического деформирования композиционных материалов различной структуры.

Приведены результаты прогнозирования эффективных свойств и расчета микронапряжений и микродеформаций упругопластических слоистых композитов при активном деформировании (нагружении) и разгрузке. Показано, что простому деформированию на макроуровне может соответствовать сложное деформирование и нагружение на уровне элементов структуры. Продемонстрирован вызванный разрушением элементов структуры эффект локальной разгрузки неразрушенных слоев при активном деформировании композита. Обнаруженные эффекты неупругого деформирования проиллюстрированы численными результатами.

В девятой главе анализируются положения механики устойчивого закритического деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения, вопросы формулировки соответствующих краевых задач и доказательства единственности их решений.

Рассмотрены различные варианты моделей разупрочняющихся сред и вопросы использования понятий и соотношений теории пла-

стичности, базирующейся на концепции существования предельных поверхностей в пространствах напряжений и деформаций, применительно к деформируемым телам на стадии разупрочнения. Сформулирован необходимый и дополнительный по отношению к постулату пластичности признак закритической деформации. Отличительной особенностью рассматриваемой постановки краевой задачи является замена критериев прочности на условия устойчивости закритической деформации. На основе подхода Друккера сформулирован расширенный постулат устойчивости для механической системы, включающей как исследуемое деформируемое тело, так и нагружающую систему. Как следствие, получено условие устойчивого деформирования разупрочняющегося материала. Отмечено стабилизирующее влияние нагружающей системы в случае достаточной ее жесткости.

Доказана теорема, согласно которой полученное неравенство устойчивости является достаточным условием единственности решения сформулированной краевой задачи для тел с зонами разупрочнения. Выведены экстремальные принципы механики закритического деформирования для тел с граничными условиями третьего рода. Получены соответствующие вариационные принципы.

Десятая глава посвящена проблеме изучения и использования условий устойчивого закритического деформирования материалов в элементах конструкций. Рассмотрены наиболее простые деформируемые тела, допускающие аналитическое решение нелинейной краевой задачи. Полученные решения, иллюстрируя закономерности изучаемого механического явления, являются, кроме того, элементами методического обеспечения некоторых экспериментальных исследований. Показано, что обеспечение условий равновесного накопления повреждений на закритической стадии деформирования является способом использования резервов несущей способности, которые могут быть весьма значительными, и целью оптимального проектирования конструкций на базе соответствующего развития численных методов решения краевых задач механики. Рассмотрен вопрос оценки устойчивости накопления повреждений на закритической стадии деформирования при решении краевых задач методом конечных элементов. Приведены аналитические и численные решения краевых задач, иллюстрирующие процессы развития зон разупрочнения в деформируемых телах. Обсуждается методология прочностного анализа на основе понятия "катастрофичность разрушения".

Одиннадцатая глава посвящена анализу условий устойчивости закритического деформирования элементов структуры гранулированных, слоистых и волокнистых композитов, а также исследованию раз-

вития зон пластичности, разупрочнения и разрушения в матрицах волокнистых композитов периодической структуры. Полученные условия устойчивости устанавливают ограничения на соотношение характеристик жесткости и параметров ниспадающей ветви полной диаграммы деформирования элементов структуры в зависимости от их объемной доли и жесткости нагружающей системы.

Для слоисто-волокнистых композитов выведены аналитические зависимости, позволяющие определить допустимый диапазон углов армирования. Обеспечение подобных условий связано с равновесным протеканием процесса накопления повреждений в элементах композитов и рассматривается как возможность повышения прочности и живучести материалов и конструкций. Результаты проиллюстрированы расчетами для углепластиков, стеклопластиков и боралюминия. На основе численного решения физически нелинейной краевой задачи механики закритического деформирования рассчитаны поля микронапряжений и микродеформаций для ячейки периодичности на разных стадиях процесса нагружения, вплоть до разрушения композита.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность Б.Д. Аннину, Г.А. Ванину, Б.Е. Победре, В.В. Стружанову, В.П. Тамужу, Т.Д. Шермергору за многократные доброжелательные и полезные дискуссии по ряду вопросов, вошедших в книгу.

Авторы благодарны своим коллегам — сотрудникам кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского государственного технического университета, принимавшим участие в обсуждении результатов исследований, и аспиранту А.В. Зайцеву за большую помощь в оформлении монографии.

Глава 1

Закономерности и модели процессов деформирования и разрушения композиционных материалов

Первые работы в области механики твердых структурно-неоднородных сред относятся к концу двадцатых годов нашего столетия, когда В. Фойгт [375] и А. Ройсс [364] предложили вычислять соответственно эффективные модули упругости и податливости микронеоднородных материалов по правилу механического смешивания. В 1946 г. И.М. Лифшиц и Л.Н. Розенцвейг [160] предложили метод расчета макросвойств поликристаллов на основе решения стохастической краевой задачи теории упругости. Впоследствии этот метод получил развитие в работах В.В. Болотина, В.А. Ломакина, Т.Д. Шермергора, С.Д. Волкова, Г.А. Ванина и их сотрудников, а также в работах М. Берана, Е. Кренера, Дж. Сендечки и др. Полученные результаты по прогнозированию эффективных свойств среды с разупорядченной структурой обобщены в монографиях [62, 130, 162, 172, 296, 320].

С начала шестидесятых годов во многом благодаря усилиям Э. Хашина, С. Штрикмана, Б. Розена [284, 338], Р. Хилла [286], а впоследствии С.Айзиковича и М. Арона [308], Р. Йеха [381] и других разрабатывается подход, связанный с применением вариационных методов для вычисления границ эффективных модулей гранулированных и волокнистых композитов. Для уточнения этих границ широкое распространение получили различные упрощенные модели структурно-неоднородных сред [130, 286], не учитывающие в полной мере взаимодействия между элементами структуры, но позволяющие получить достаточно простые аналитические выражения для макромоделей. Более перспективным в этом направлении может оказаться применение метода самосогласования [113, 338]

Один из главных недостатков вариационных методов и теории случайных функций механики структурно-неоднородных сред заключается в том, что в рамках этих подходов, как правило, не удается рассматривать такие эффекты, как геометрическая форма элементов структуры и неоднородность полей деформирования в каждом из структурных элементов. Поэтому актуальными остаются работы, в которых объектом исследования являются среды с регулярной структурой. В 1975 г. Н.С. Бахвалов предложил метод осреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами

[16, 17], который оказался очень эффективным в механике композитов [112] благодаря успешному развитию его в работах Б.Е. Победри и его учеников [69, 116, 204 и др.].

В последние три десятилетия механика композиционных материалов получила интенсивное развитие. Основные подходы и современные достижения механики композитов отражены в монографиях, учебной и справочной литературе [5, 6, 10, 25, 29, 30, 62, 130-132, 139, 142, 145, 149, 162, 168, 172, 181-183, 189, 190, 204, 212, 215, 220, 225, 240, 247, 258, 281, 292, 296 и др.].

Методы прогнозирования эффективных упругих свойств современных композитов достаточно хорошо разработаны. Достигнутые в линейной теории упругости результаты по прогнозированию эффективных свойств и сопутствующие им результаты по определению полей микронапряжений и микродеформаций являются хорошей базой для исследования упругопластических и прочностных свойств микронеоднородных материалов. Стремление к более полному использованию несущей способности ответственных конструкций неизбежно приводит к необходимости всесторонних исследований, предшествующих построению комплексных моделей деформирования и разрушения реальных материалов при сложном напряженном состоянии и нелинейных свойствах элементов структуры.

1.1. Неупругое деформирование композитов и процессы структурного разрушения

Механические микро- и макроскопические процессы в неоднородных материалах достаточно подробно изучались в рамках детерминированных и статистических моделей механики композитов. Преимущество статистических моделей состоит в том, что они естественным образом учитывают такой важный фактор реальной структуры композитов, как случайность взаимного расположения элементов и статистический разброс их свойств. Однако в статистической механике композитов до сих пор остается открытым вопрос о более полном, по сравнению с одноточечными приближениями, учете многочастичного взаимодействия компонентов. Поэтому в подавляющем большинстве работ в этом направлении анализ напряженно-деформированного состояния композитов ограничивается вычислением осредненных по компонентам полей деформирования. Вычисление и других статистических характеристик полей деформирования для случаев неизотропного и комбинированного нагружения, а также построение решений нелинейных краевых задач для процессов накопления пластических деформаций и повреждений в компонентах композитов с учетом неоднородности полей деформирования приобретает особо важное значение в задачах прогнозирования прочностных свойств.

Характерно, что свойства композиционных материалов могут принципиально отличаться от свойств составляющих компонентов. Например, отсутствие пластических изменений объема структурных элементов может сопровождаться пластическим изменением объема композита, из идеально пластических компонентов может быть создан упрочняющийся материал, из слабо упрочняющихся компонентов — сильно упрочняющийся и т.д. [79]. Это говорит о сложности и разнообразии рассматриваемого явления, теоретическое описание которого требует разработки специальных подходов и математических моделей. Успехи исследований в этой области отражены в работах [2, 11, 80, 91, 111, 180, 206, 222, 236, 300, 304, 305, 335, 367] и др.

Как отмечается в обзорной статье [2], физическое явление упруго-пластического поведения композиционных материалов и, главное, неоднородность его исследования были обнаружены задолго до создания соответствующей математической теории. Поэтому многие исследователи в середине шестидесятых годов обратились к анализу поведения материалов при помощи простых моделей. Модель в виде набора параллельных составных элементов использовалась для приближенного описания неупругого деформирования однонаправленного композита при растяжении поперек волокон. Некоторые ученые использовали модель коаксиальных цилиндров, предполагая простейшее напряженное состояние материала матрицы. Применялась аппроксимация реального материала бесконечной средой с расположенным в ней единственным армирующим элементом. Многие методики, применяемые до сих пор, основаны на использовании правила смеси, согласно которому делается предположение об однородности либо поля напряжений, либо поля деформаций. Различные модификации этого правила позволяют добиваться согласия с экспериментальными данными [149, 367].

К настоящему времени благодаря использованию численных методов механики деформируемого твердого тела и некоторых новых подходов, разработанных непосредственно для структурно-неоднородных тел, получены решения ряда задач неупругого деформирования с учетом сложного характера распределения напряжений и деформаций в структурных элементах. Применительно к волокнистым композитам это отражено, например, в работах [2, 9, 244, 306, 307, 345, 354, 355].

Композиционные материалы, рассматриваемые как однородные с эффективными свойствами, в зависимости от структуры могут быть как изотропными, так и анизотропными, даже если они состоят только из изотропных компонентов. Вопросам прогнозирования неупругих эффективных свойств изотропных композитов посвящены работы [80, 111, 237, 287] и др. При постановке задач определения эффективных характеристик анизотропных композиционных материалов возникает необходимость выбора теории пластичности анизотропного тела, позволяющей адекватно описать поведение эквивалентной однородной среды.

Вопросам построения определяющих соотношений механики пластического деформирования начально анизотропных материалов посвящено значительное число работ [65, 110, 138, 285, 291, 358 и др.]. Предложены различные варианты деформационной теории пластичности [66, 161, 197, 203] и теории течения [135, 169, 205]. Большое внимание уделено определению количества и структуры независимых инвариантов заданной совокупности тензоров. Рассматриваемый вопрос представляется весьма важным для механики композитов, однако, крайне ограниченное число работ по экспериментальному исследованию закономерностей деформирования анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния не позволяет в полной мере оценить достоверность и общность того или иного варианта теории пластичности анизотропных сред [126].

Исследование упругопластического поведения анизотропных композитов, таких как волокнистые однонаправленные и пространственно армированные, слоистые с однородными и неоднородными слоями, является довольно сложной проблемой. Решение задач механики композитов для этих материалов осуществляется преимущественно в некоторых наиболее простых случаях напряженного состояния, что, безусловно, является определенным научным достижением. Однако, такие решения, обычно, не позволяют построить все материальные функции, описывающие поведение композита при произвольном сложном напряженно-деформированном состоянии в рамках выбранной теории пластичности анизотропного тела.

Неупругое деформирование слоистых композитов при одноосном растяжении вдоль слоев исследовано, в частности, в работах [326, 343], при растяжении поперек слоев в [304, 343] и др. Авторами [312, 313] рассмотрено поведение композита в плоском напряженном состоянии, когда усилия, растягивающие в двух направлениях, лежат в плоскости, параллельной слоям, в работе [378] двухосное нагружение осуществлялось в ортогональной по отношению к слоям плоскости. В [326] рассчитаны кривые деформирования слоистого композита для некоторых случаев трехосного нагружения. Исследованию неупругого поведения композитов со слоями, армированными волокнами, посвящены также работы [33, 91, 238, 330, 333, 369] и др. Краткий обзор литературы по этому вопросу содержится в статье [206]. Следует отметить, что значительная часть результатов получена без учета межслойных взаимодействий. Как отмечено в [200], такое упрощение в некоторых случаях может оказаться слишком грубым. Это подтверждается тем, что разрушение слоистых конструкций часто происходит путем расслоения.

Слоистые композиционные материалы, состоящие из изотропных слоев, также привлекают внимание исследователей [7, 272, 370]. В монографии [172] приведено решение задачи прогнозирования эффективных свойств слоистых композитов с хаотически расположенными изотропными компонентами, обладающими малой физической нели-

нейностью, по методу малого параметра в предположении о достаточности первого нелинейного приближения. Работы [116, 117, 206] посвящены развитию методов вычислительной механики с целью прогнозирования упругопластического поведения слоистых материалов периодической структуры в произвольном напряженном состоянии. При этом использованы положения теории пластичности анизотропных сред, разработанной Б.Е. Победрей [203, 204].

Нелинейный характер зависимости между напряжениями и деформациями композиционных материалов может являться следствием не только пластического деформирования [329] и иметь место даже в случае линейно упругих компонентов [79, 84]. Это обусловлено тем, что полному (макроскопическому) разрушению изделий из композитов предшествует сложный процесс разрушения отдельных элементов структуры [380]. Изучение этого процесса важно не только для анализа условий образования макроскопической трещины, но и для исследования поведения материала под нагрузкой [332]. Проявления неупругих свойств композиционных материалов, вызванные полным или частичным разрушением отдельных элементов структуры, отмечены в работах [148, 333, 334] и др. В ряде случаев диаграмма деформирования не представляет собой плавную кривую — на ней появляются резкие разрывы и скачки [148, 346].

Модели деформирования композитов после начала разрушения слоев, или после так называемого "первого разрушения слоя" [289], описаны в работах [14, 92, 109, 144, 189, 226, 241, 289, 303, 327, 334] и др. Некоторые вопросы моделирования разрушения структурных элементов рассмотрены также в [12, 73, 84, 136, 141, 190, 220, 298, 368].

Каждый акт структурного разрушения сопровождается перераспределением напряжений в элементах композита, приводящим либо к продолжению, либо к прекращению разрушения при данном уровне внешней нагрузки.

Построение моделей неупругого деформирования композиционных материалов с учетом этих процессов выдвигает в качестве основных вопросы выбора критериев структурного разрушения и описания остаточных деформационных и прочностных свойств элементов неоднородной среды после выполнения тех или иных условий их разрушения. Важное значение при этом имеет тот факт, что элемент структуры композита может быть разрушен по различным механизмам. Например, в случае армированного монослоя возможно растрескивание или отслоение матрицы, расщепление, разрывы или выдергивание волокон и т.д. [190]. Эти и другие механизмы изменения несущей способности структурного элемента отождествляются с той или иной схемой изменения его жесткостных свойств [220, 363].

Как уже было отмечено, при исследовании композиционных материалов возникает необходимость привлечения вероятностных представлений и аппарата теории случайных функций, обусловленная случайным характером свойств, взаимного расположения

элементов структуры и, как следствие, стохастическим процессом их разрушения [12, 24, 62, 84, 162, 172, 190, 219, 220, 225, 247, 258, 296, 330 и др.].

Таким образом, в числе других проблем механики композиционных материалов актуальными являются развитие нелинейных моделей поведения композитов с учетом разрушения элементов структуры и разработка методов решения задач неупругого деформирования для различных случаев сложного напряженно-деформированного состояния.

1.2. Феноменологические модели механики разрушения

Различают два подхода к построению теорий в естественных и прикладных науках — феноменологический и структурный. Феноменологические модели строятся на основе эмпирических данных о поведении объекта. При этом не ставится задача объяснения или полного описания существа явлений. Структурный подход состоит в разработке моделей, которые позволяют описать и объяснить явления, исходя из внутренней структуры рассматриваемых объектов. Эти подходы тесно связаны между собой и должны взаимно обогащать друг друга [24]. Построение нелинейных моделей поведения среды с эффективными свойствами для описания деформирования композита, сопровождаемого разрушением элементов структуры, соответствует методологии феноменологического описания.

Необходимость и полезность феноменологических теорий была обоснована В.В. Новожиловым [188]. При этом допустимо установление различных уровней феноменологического описания. Например, накопление повреждений может моделироваться на основе рассмотрения в сплошной среде системы дисковых трещин или пор. Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым введен параметр поврежденности (или противоположный — сплошности), определяемый площадью трещин, приходящихся на единицу площади поперечного сечения тела [118, 217]. В то же время, этот параметр может и не отождествляться с какой-либо характеристикой конкретных дефектов и повреждений, если он входит в соотношения, связывающие осредненные величины. Это естественно, когда при определении материальных функций модели можно обойтись без прямых микроструктурных исследований, например, измерения площади разрывов.

Феноменологический подход к моделированию поврежденности материалов состоит в описании образования внутренних разрывов при помощи некоторых функций состояния материала. Эта идея нашла отражение в известных работах А.А. Ильюшина [104], В.В. Болотина [24], В.П. Тамужа и А.Ж. Лагэдиньша [259]. Она получила развитие благодаря усилиям многих других исследователей и явилась основой создания механики поврежденной сплошной среды [13, 156, 176, 288, 331, 347, 348, 353, 359, 371], в рамках которой повреждение материала

определяется как любое микроструктурное изменение, приводящее к какому-либо изменению механических свойств [176].

В настоящее время известно значительное количество скалярных и тензорных характеристик поврежденности. Работы [177, 356] представляют обоснование основных положений трехмерной теории анизотропной поврежденности и обзор публикаций, посвященных разработке соответствующих тензорных моделей. Феноменологическая модель сплошной среды, описывающая процессы зарождения и эволюции многочисленных дефектов, рассеянных по объему материала, представлена в [133]. В работах ряда авторов подход, основанный на позициях континуальной механики, используется для описания механического поведения поврежденных композиционных материалов [21, 129, 245, 256, 336, 379 и др.].

Изменение характеристик материала в процессе образования системы трещин рассмотрено в работах [225, 232, 257, 380] и др. Анализ свойств стохастически дефектных и трещиноватых сред посвящены также работы [21, 53, 178, 179, 187].

Процесс разрушения структурно-неоднородных сред носит многостадийный характер. Наиболее выражена стадия объемного, или рассеянного, разрушения, которая связана с объемным накоплением стабильных микротрещин и при достижении пороговой концентрации переходит через укрупнение и слияние на следующий масштабный уровень [225]. Кроме того, показано, что эффективные деформационные характеристики зависят от радиуса корреляции случайного множества дефектов [114, 225]. Естественно предположить, что характер взаимодействия микроповреждений определяет также условия макроразрушения неоднородной среды и, следовательно, ее прочностные свойства.

Многоуровневый характер формирования реакции материала внешнему механическому воздействию предопределяет возможность многоуровневого феноменологического описания. Каждый структурный уровень связан с некоторой системой элементов неоднородности (естественных или вызванных поврежденностью). Анализ введенных на структурном уровне напряжений и деформаций как осредненных величин служит средством исследования механического поведения материала в рамках соответствующего уровня феноменологии. Двухуровневое рассмотрение процессов деформирования и разрушения положено в основу классификации Давиденкова-Фридмана и структурно-феноменологического подхода в механике композитов [247].

Проблема описания перехода от микро- к макроразрушению является очень важной для механики композитов. При этом существует много различных исходных предпосылок и методов оценки прочности с позиций структурной механики. В настоящей работе развивается подход, согласно которому макроразрушение рассматривается как результат потери устойчивости сопряженного с накоплением поврежде-

ний процесса деформирования. Процесс нагружения упругопластической системы становится неустойчивым, если сколь угодно малому продолжению этого процесса соответствует катастрофическое развитие перемещений и деформаций [94]. Решающая роль особого рода нелинейности (ниспадающей ветви на диаграмме деформирования) в вопросах устойчивости, связанных с проблемой разрушения, была отмечена в работе [158]. Все физические процессы, протекающие в материале при нагружении, отражены на полных диаграммах деформирования, причем ниспадающие участки этих диаграмм соответствуют отдельным стадиям разрушения [155].

Возможность появления ниспадающего участка на диаграмме вследствие процесса трещинообразования и повреждения отмечена в [21, 133, 184, 371]. Такой характер поведения материала на заключительной стадии деформирования материала во многих случаях ассоциируется с формированием или развитием макродефекта [325, 382]. В связи с этим, наряду с явным описанием трещины в деформируемом теле, представляется перспективным феноменологическое направление механики разрушения, описывающее поведение материала на стадии формирования и роста макротрещины. Начало этому направлению положено С.Д. Волковым [56, 57]. Использование данного подхода связано с предположением, что механическое поведение сколь угодно малого объема материала при наличии разрывов, соизмеримых с его размерами, аналогично поведению макрообразца на заключительной стадии деформирования. Это в определенной степени отражает автоматическую модельность процесса разрушения [27].

Согласно гипотезе макрофизической определенности А.А. Ильюшина [204], каждой точке среды может быть поставлен в соответствие макрообразец в виде тела конечных размеров, находящийся в однородном напряженно-деформированном состоянии и на котором могут быть в принципе изучены все процессы, протекающие в изображаемой точке среды.

Указанное соответствие может быть установлено следующим образом: перемещения границ рабочей зоны воображаемого идеального однородного образца из материала, заполняющего элементарный деформируемый объем, в условиях однородного напряженного состояния при одинаковых нагрузках должны совпадать с перемещениями границ рабочей зоны экспериментального образца на всех стадиях деформирования, включая стадию формирования и роста макротрещины. На основе этих предположений могут быть использованы принятые в механике деформируемого твердого тела феноменологические уравнения и критерии.

Существует определенная аналогия и общность между подходами механики распространения трещин и феноменологической механикой разрушения. В частности, в рамках первой теории рассматриваются докритические диаграммы разрушения, представляющие собой зависимость между средним растягивающим напряжением в неповрежден-

ном сечении образца и длиной трещины при различных ее начальных значениях [119]. Геометрическое место критических (соответствующих динамическому росту трещин) точек индивидуальных кривых называется критической диаграммой разрушения. Естественно, что при испытаниях гладких образцов критическая точка соответствует пределу прочности.

Не рассматривая явным образом трещины и разрывы и описывая поведение материала с использованием ниспадающей ветви диаграммы деформирования, можно сделать вывод, что она по сути представляет собой также критическую диаграмму, поскольку является геометрическим местом критических точек для образцов с различной степенью поврежденности, получаемых в результате равновесного деформирования до той или иной степени и последующей упругой разгрузки.

При описании докритического роста дефекта используется также подход Дж. Р. Ирвина [194], состоящий в рассмотрении зависимости работы разрушения R от длины трещины как характеристики сопротивления росту трещины. Если в рамках феноменологического подхода под работой разрушения понимать диссипацию энергии, связанную с процессом накопления повреждений, то она может быть вычислена с использованием диаграммы деформирования на любом интервале деформаций. Получаемая таким образом графическая зависимость работы разрушения от деформации носит характер, аналогичный известным в механике разрушения R -кривым.

Феноменологический подход дает возможность не сталкиваться с проблемами моделирования сложной геометрии реальных трещин и разрывов в поврежденных структурно-неоднородных средах и определения площади поверхности разрушения, что осложняется ее неограниченным возрастанием по мере более детального рассмотрения. В то же время, он позволяет описывать все этапы повреждения, включая переход к нестабильной стадии, функциями состояния материала и использовать при этом энергетические соотношения механики разрушения и полные диаграммы деформирования материала.

1.3. Закритическая стадия деформирования материалов

Закритическое деформирование структурно-неоднородных сред, подверженных деструкции различной природы при механическом воздействии, является одним из важных механических процессов, требующих проведения специальных исследований. Критическое напряженно-деформированное состояние соответствует моменту достижения максимальных для данного материала в данных условиях значений напряжений, а закритическая стадия характеризуется снижением уровня напряжений при прогрессирующих деформациях [59, 196, 278]. Отмеченная особенность механического поведения свойственна металлам

[31, 120, 233], причем как для связи условных, так и истинных напряжений и деформаций [174], геологическим [52, 86, 198, 214, 250], керамическим [376], полимерным и композиционным [15, 23, 68, 85, 87, 270, 299, 368], а также другим материалам [82, 93].

Закритическая стадия деформирования материалов экспериментально исследовалась Я.Б. Фридманом и Б.А. Дроздовским [75, 279], Ф.С. Савицким и Б.А. Вандышевым [231], С.Д. Волковым с соавторами [143, 301], А.А. Лебедевым и Н.Г. Чаусовым [108, 120, 121, 150-155], В.В. Стружановым и В.И. Мироновым [255], Р.А. Васиным и др. [31].

Вопросы теоретического описания указанного механического явления рассматривались в работах С.Д. Волкова [54-62], В.А. Ибрагимова и В.Д. Ключникова [95, 96], А.М. Линькова [158, 159], Л.В. Никитина [184, 185] и Е.И. Рыжака [186, 227-230], А.Ф. Ревуженко и Е.И. Шемякина [224], В.В. Стружанова [251-255], Я.Б. Фридмана [278] и др. Следует отметить обобщающую монографию [255], а также работы З. Бажанта [314-317], А. Палмера, Д. Майера, Д. Друккера [192] и П. Пежины [196].

Закономерности закритического деформирования горных пород, а также учета их при расчете и анализе напряженного состояния и устойчивости среды в окрестности горных выработок отражены в работах А. Драгона и З. Мруза [74], И.М. Петухова и А.М. Линькова [198, 199], А.Ф. Ревуженко [147, 223], А.Н. Ставрогина [213, 249] и А.Г. Протосени [134, 250], А.Б. Фадеева [214, 276] и др.

Материал на закритической стадии деформирования не удовлетворяет постулату Друккера [78] и классифицируется как реологически неустойчивый [184]. Однако многие реальные материалы адекватно описываются именно моделями реологически неустойчивых материалов [184]. При этом в замену требования реологической устойчивости выдвигается принцип устойчивости для тела в целом: состояние материала является реализуемым, если в этом состоянии он находится в составе устойчивой механической системы [184, 186].

Усовершенствование моделей материала с целью описания накопления повреждений на закритической стадии деформирования является важной задачей механики композитов. Уточненный расчет конструкций с использованием полных диаграмм требует, кроме того, развития методов решения краевых задач с учетом разупрочнения материала [57, 96, 199, 223, 252, 254] и получения условий устойчивости закритического деформирования в ослабленных зонах [61, 158, 227]. Естественно, что это должно базироваться на эффективных экспериментальных методах построения равновесных диаграмм деформирования [323].

В работах [186, 228-230] теоретически обоснована осуществимость состояний материала, соответствующих ниспадающей ветви диаграммы деформирования. На основе теорем Адамара и Ван Хофа [274], дающих локальные необходимые и достаточные условия устойчивости

для упругих тел, и их обобщений на случай упругопластических тел показано, что даже при наличии "падающей" диаграммы тело, закрепленное на границе с достаточной (даже не обязательно очень большой) жесткостью, может быть устойчиво. Нет принципиальных препятствий к регистрации таких состояний в эксперименте, в частности, при одноосном растяжении или сдвиге (в девиаторном смысле) деформировании, и интерпретации соответствующих экспериментальных данных в терминах присущего материалу свойства разупрочнения [186, 228].

Экспериментально подтверждено [107, 195, 231], что сопротивление разрушению определяется не только прочностными постоянными материала, но и зависит от жесткости нагружающей системы, в которую входят нагружающее устройство (испытательная машина, передающие нагрузки силовые и кинематические элементы конструкций, рабочие жидкость и газ) и само деформируемое тело, окружающее область повреждения [278]. При "мягком" нагружении, когда к находящемуся в однородном напряженном состоянии телу прикладываются не зависящие от его сопротивления силы, разрушение происходит при достижении максимальных напряжений.

В другом предельном случае, когда обеспечиваются заданные перемещения точек границы ("жесткое" нагружение), а также при конечной, как уже было отмечено, но достаточной жесткости нагружающей системы, возможно равновесное протекание процесса накопления повреждений, что и находит свое отражение на диаграмме деформирования в виде ниспадающей ветви.

В зависимости от условий нагружения каждая точка на ниспадающей ветви диаграммы деформирования может соответствовать моменту разрушения [107, 143]. Деформирование данного рода осуществимо лишь для локального объекта в составе механической системы с необходимыми свойствами. В противном случае происходит неравновесное накопление повреждений и макроразрушение как результат потери устойчивости процесса деформирования на закритической стадии. В области разупрочнения возможно также возникновение локализации деформации в виде полос сдвига [184, 221, 328, 360, 365]. Ниспадающая ветвь наблюдается тогда, когда есть механизмы и условия постепенной диссипации упругой энергии. Таким образом, рассматриваемые состояния материала можно назвать условно реализуемыми.

Возможно, для иллюстрации уместно использовать несколько отвлеченную аналогию. Деформирование разупрочняющейся среды устойчиво примерно в той же мере, в какой устойчива более или менее вязкая жидкость в некотором сосуде. Потеря устойчивости происходит, если стенки сосуда не обладают достаточной жесткостью. В данном случае роль сосуда аналогична роли нагружающей системы.

Основная трудность при экспериментальном построении полных диаграмм состоит в создании достаточной жесткости системы на-

гружения элемента материала. С этой целью разработаны устройства для увеличения жесткости стандартных машин [150], специальные образцы [120, 154, 301], а также испытательные машины с быстросрабатывающей обратной связью [301, 366].

Ниспадающая ветвь графика деформационной зависимости при испытаниях металлических образцов является отражением, большей частью, равновесного прорастания магистральной трещины [120]. В отдельных случаях это справедливо и для композитов [349, 361]. Вместе с тем, если прочностные и деформационные свойства элементов структуры неоднородной среды существенно отличаются, что характерно для большинства композиционных материалов, то формирование выраженной макротрещины может не происходить. Однако развитое дискретное рассеянное разрушение слабых элементов и в этом случае приводит к спаду на диаграмме [357]. Хаотичность включений обеспечивает последовательность возникновения зон разрушения в отдаленных друг от друга частях неоднородной среды, что создает преграду для локализации деформаций и позволяет с использованием вероятностных подходов определять связи между средним напряжением и средней деформацией [125]. Определенная структурная неоднородность обеспечивает преимущественный вид деформации, отличный от локализованного. В частности, для тел волокнистой структуры ниспадающий участок диаграммы возникает в результате последовательного обрыва неравнопрочных волокон [124]. Характер процесса разрушения неоднородных сред существенно зависит от хаотичности в расположении и степени разброса свойств элементов структуры, поэтому статистические характеристики прочности этих элементов во многом определяют параметры ниспадающей ветви, в частности, ее наклон, который отражает склонность материала к хрупкому разрушению.

Связь вида ниспадающих участков диаграммы с микромеханизмами и стадиями разрушения отмечена в работах [120, 121, 309, 310]. С.Д. Волковым высказана идея, что характер распределения напряжений в вершине трещины в принципе повторяет ниспадающий участок кривой на полной диаграмме деформирования материала, полученной при испытании гладкого образца [55, 59]. Проблема сингулярности задачи при этом решается автоматически вследствие убывания до нуля сопротивления материала в особой точке (вершина трещины), где деформация максимальна и равна предельной для полностью равновесного состояния [155]. Жесткость нагружающей системы для элемента материала у вершины трещины может быть конечной и достаточной для устойчивой закритической деформации в этой зоне, чем и объясняется возможность существования равновесных трещин.

Существует связь диаграммы деформирования с энергоемкостью процесса разрушения [210, 250]. Площадь под ниспадающей ветвью полной диаграммы определяет, вместе с тем, и работоспособность материала на стадии формирования макротрещины. С.Д. Волков пред-

положил связь этой величины с характеристиками трещиностойкости материалов [55]. К настоящему времени А.А. Лебедевым и Н.Г. Чаусовым разработан и экспериментально обоснован экспресс-метод оценки трещиностойкости пластичных материалов по параметрам ниспадающих участков полных диаграмм деформирования [151-153].

Необходимо учитывать тесную связь податливости нагружающей системы с кинетикой и локальностью процесса разрушения [278]. Например, в инженерной практике отмечено существенное отличие в характерах разрушения гидравлических и пневматических сосудов давления и трубопроводов. С точки же зрения традиционных постановок краевых задач эти случаи эквивалентны. В связи с этим, граничные условия, не учитывающие изменений внешних нагрузок, связанных с изменением конфигурации тела в процессе деформирования и повреждения, не вполне соответствуют реальным условиям работы элементов конструкций и производимых испытаний [55].

С этой точки зрения для более адекватного описания процессов деформирования, накопления повреждений и разрушения целесообразным является использование граничных условий третьего рода, позволяющих расширить физическую базу имеющихся моделей механики структурно-неоднородных сред, уточнить прочностные оценки, определить резервы несущей способности и прогнозировать катастрофичность разрушения конструкций.

Многие авторы отмечают привлекательность реализации закритической стадии деформирования в элементах конструкций или сооружений, что приводит к использованию их прочностных резервов и повышению их безопасности. Полнота реализации несущей способности материала определяется степенью закритической деформации. Кроме того, следует отметить важность практически не исследованной ранее задачи определения условий устойчивого закритического деформирования элементов структуры в составе композиционного материала как базы для создания материалов с повышенными механическими характеристиками.

Оптимальное (с точки зрения протекания процессов повреждения в равновесном режиме) проектирование требует математического описания закритического деформирования, которое не сводится лишь к аппроксимации диаграмм, имеющих ниспадающие участки. Не потеряли актуальность вопросы обоснования континуальных моделей разупрочняющихся сред и определения области их применимости. Возникает ряд математических проблем, связанных, в первую очередь, с анализом устойчивости процесса деформирования, единственности решения краевой задачи и возможной сменой типа дифференциальных уравнений [224], а также необходимостью учета свойств нагружающей системы, разработкой определяющих соотношений (даже для изотропных материалов), развитием численных методов и созданием эффективных итерационных процедур решения такого рода нелинейных задач.

Глава 2

Структурно-феноменологическая модель механики микронеоднородных сред

В предыдущей главе отмечено существование двух подходов к построению моделей механики — феноменологического и структурного. В работах ряда ученых получил распространение подход, развиваемый применительно к механике композитов и названный структурно-феноменологическим [247]. Он заключается в том, что общепринятые в механике деформируемого твердого тела феноменологические уравнения и критерии рассматриваются на нескольких, в частности — двух уровнях: микроскопическом (структурном), связанном с элементами структуры композита, и макроскопическом, отражающем поведение композиционного материала как однородного с эффективными свойствами. Связь между физическими величинами, установленная в рамках указанного подхода, определяет структурно-феноменологическую модель. В этой главе сформулированы основные положения принятого в данной работе теоретического исследования деформирования и разрушения композиционных материалов при квазистатических нагрузках в рамках подхода, связанного с постановкой и решением иерархической последовательности краевых задач. Привлечение вероятностных представлений и аппарата теории случайных функций позволяет изучать модели, одновременно учитывающие случайный характер свойств и взаимного расположения элементов структуры.

2.1. Модели случайной и периодической кусочно-однородных сред

При математическом моделировании процессов деформирования и разрушения композитов актуальным является развитие исследований, в которых материал рассматривается как микронеоднородная среда [62, 145, 296, 320 и др.].

Пусть область V с границей S содержит в себе множество непесекающихся областей ω_k , ограниченных поверхностями S_k . Для двухкомпонентных композитов часть $V_1 = \sum \omega_k$ области заполнена однородным в пределах ω_k материалом со свойствами $F_{ij}^{(1)}$ (первая фаза), а оставшаяся часть области $V_2 = V - V_1$ — однородным материалом со свойствами $F_{ij}^{(2)}$. Многосвязная поверхность $S_{12} = \sum S_k$ есть

межфазная поверхность, разделяющая структурные элементы композита. Часть $S^{(1)}$ поверхности S проходит через первую фазу, а другая часть $S^{(2)} = S - S^{(1)}$ — через вторую.

Если известна полная информация о характере взаимного расположения областей ω_k и заданы феноменологические модели фаз, то говорят, что построена модель кусочно-однородной (композиционной) среды.

Примем следующее определение. Подобласть V_l с характерным размером l называется представительным объемом области V (с характерным размером $L \gg l$) для непрерывной всюду внутри фаз V_1 и V_2 функции $g(\mathbf{r})$, если существует и ограничена осредненная величина

$$\bar{g} = \frac{1}{V_l} \int_{V_l} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

и если для любого положительного сколь угодно малого числа δ найдется такое положительное число γ , зависящее только от δ , что

$$\left| \frac{1}{V_{l+\gamma l}} \int_{V_{l+\gamma l}} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{V_l} \int_{V_l} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| < \delta. \quad (2.2)$$

Очевидно, для того чтобы данное определение было справедливо, а представительный объем V_l на физическом уровне строгости имел смысл элементарного макрообъема микронеоднородной среды, необходимо принять, что $L \gg l \gg l_\omega$ (где l_ω — характерный размер областей ω_k). При выполнении условия (2.2) можно пренебречь влиянием масштаба осреднения на значение осредняемой величины [72].

Модель механики микронеоднородной среды, рассматриваемая в дальнейшем для композитов, основана на допущении, что характерный размер l_ω областей ω_k много больше молекулярно-кинетических размеров и много меньше расстояний, на которых существенно меняются осредненные или макроскопические величины. Тогда для структурных элементов остаются справедливыми феноменологические уравнения и соотношения механики, т.е. элементарным микрообъемам dV , составляющим элементы структуры композитов и имеющим размер dl ($dl \ll l_\omega, dl/l_\omega \sim l/L$), приписываются свойства, экспериментально определяемые на образцах из материала фаз.

Это допущение представляет возможность, с одной стороны, выделить исследования поведения единичных неоднородностей и процессов около них (для материала в целом это микропроцессы), проводя их независимо с помощью моделей и методов механики деформируемого твердого тела. С другой стороны, позволяет описывать макроскопические процессы в среде как однородной, при этом результаты исследования микропроцессов будут использованы в континуальных

уравнениях с помощью некоторых осредненных параметров, отражающих, в частности, взаимодействие элементов структуры.

Пусть для каждого из компонентов композита, заполняющего объем V , тензоры напряжений и деформаций связаны с помощью операторов

$$\sigma_{pq} = F_{pq}^{(i)} \left(a_{kl}^{(i)}, \varepsilon_{kl} \right), \quad (2.3)$$

где $a_{kl}^{(i)}$ — материальные функции определяющих уравнений i -го компонента (фазы). Под компонентом композиционного материала будем понимать совокупность всех элементов структуры с одинаковыми физико-механическими свойствами.

Введем индикаторные функции структуры композита

$$\kappa^{(i)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{r} \in V_i; \\ 0, & \forall \mathbf{r} \notin V_i; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^f \kappa^{(i)}(\mathbf{r}) = 1, \quad (2.4)$$

где V_i — область, занимаемая i -м компонентом, f — число компонентов композита. Построим кусочно-непрерывные функции структурных свойств

$$a_{kl}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^f a_{kl}^{(i)} \kappa^{(i)}(\mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Теперь определяющие соотношения микронеоднородной среды

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = F_{ij} [a_{kl}(\mathbf{r}), \varepsilon_{kl}(\mathbf{r})] \quad (2.6)$$

представлены как уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами. При этом один из общих случаев представляет собой модель композита со случайной структурой, когда $\kappa^{(i)}(\mathbf{r})$ есть случайные однородные функции, а $a_{kl}^{(i)}$ содержат случайные величины, т.е. учитывается статистический разброс свойств структурных элементов. Для случайных индикаторных функций $\kappa^{(i)}(\mathbf{r})$ должны быть известны совокупности одно- и многоточечных плотностей вероятностей $h_{\alpha}^{(i)}$ или моментных функций $M_{\alpha}^{(i)}$, инвариантных относительно параллельного переноса системы координат [175]:

$$h_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\alpha}) = h_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}', \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}', \dots, \mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{r}'),$$

$$M_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\alpha}) = M_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}', \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}', \dots, \mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{r}'), \quad \alpha = \overline{1, \infty},$$

где \mathbf{r}' — произвольный радиус-вектор.

Связь между моментными функциями и плотностями вероятностей имеет вид

$$M_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^{(i)}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1) \kappa^{(i)}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}'_2) \dots \kappa^{(i)}(\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{r}'_{\alpha}) \times$$

$$\times h_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{\alpha}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{\alpha}.$$

В частном случае при $\alpha = 1$ приходим к понятию оператора осреднения случайных полей $\langle \dots \rangle$, который при выполнении условий статистической однородности и эргодичности эквивалентен оператору статистического осреднения. Для математического ожидания функций $\kappa^{(i)}(\mathbf{r})$ имеем

$$\langle \kappa^{(i)} \rangle \equiv M_1^{(i)}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^{(i)}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') h_1^{(i)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \text{const} \quad (2.7)$$

и, заменяя несобственный интеграл в (2.7) интегралом по элементарному макрообъему V_i при равномерных плотностях $h_1^{(i)}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условию нормирования $\int_{V_i} h_1^{(i)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$, получим

$$\langle \kappa^{(i)}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \kappa^{(i)}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \text{const}. \quad (2.8)$$

Аналогичным образом осуществляется переход для вычисления моментных функций высших порядков случайных однородных полей. Для композитов с периодической структурой индикаторные функции являются периодическими

$$\kappa^{(i)}(\mathbf{r}) = \kappa^{(i)}(\mathbf{r} + n\mathbf{b}),$$

где \mathbf{b} — постоянный вектор трансляции, n — произвольные целые числа.

Периодическая структура композитов может рассматриваться как возможная реализация случайной однородной структуры.

2.2. Краевые задачи механики композитов

Пусть напряжения в области V в отсутствие массовых сил удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2.9)$$

а малые деформации связаны с перемещениями соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.10)$$

В определяющих соотношениях (2.6) для композиционного материала, заполняющего область V , материальные функции $a_{kl}(\mathbf{r})$ образуют в соответствии с (2.5) случайные однородные поля, статистические характеристики которых считаем известными.

Допустим, что на части $S^{(q)}$ поверхности S области V заданы линейные граничные условия контактного типа [204]:

$$\left(c_{ij}^{(q)} \sigma_{jk} n_k + d_{ij}^{(q)} u_j \right) \Big|_{S^{(q)}} = N_i^{(q)}, \quad \sum_q S^{(q)} = S, \quad (2.11)$$

где $c_{ij}^{(q)}$, $d_{ij}^{(q)}$ — некоторые положительно определенные тензоры, n_i — вектор единичной нормали к поверхности S , $N_i^{(q)}$ — вектор контактных усилий.

Из условий (2.11), как частные случаи, вытекают граничные условия для области V в напряжениях, в перемещениях (при $N_i = k u_i^0$, когда k — размерная постоянная, а u_i^0 — заданный на границе вектор перемещений) и смешанного типа.

Уравнения (2.9), (2.6) и (2.10) совместно с граничными условиями (2.11) составляют краевую задачу для области V .

Соответственно, квазистатическая краевая задача в перемещениях заключается в решении уравнений, полученных последовательной подстановкой (2.10), (2.6) в (2.9), вида

$$F_{ij,j}(a_{kl}, u_n) = 0 \quad (2.12)$$

при удовлетворении граничным условиям

$$\left(c_{ij}^{(q)} F_{jk}(a_{ml}, u_n) n_k + d_{ij}^{(q)} u_j \right) \Big|_{S^{(q)}} = N_i^{(q)}. \quad (2.13)$$

При решении краевой задачи (2.12), (2.13) для композитов в силу разрывности материальных функций $a_{ij}(\mathbf{r})$ оператора \mathbf{F} необходимо разыскивать так называемое обобщенное решение.

Умножим уравнение (2.12) на произвольную достаточно гладкую функцию $w_i(\mathbf{r})$ и воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_V F_{ij,j}(u_n) w_i dV = - \int_V F_{ij}(u_n) w_{i,j} dV + \int_S F_{ij}(u_n) w_i n_j dS.$$

Граничные условия (2.13) преобразуем, умножив их левую и правую части на тензор $t_{in}^{(q)}$, обратный тензору $c_{jk}^{(q)}$, т.е. такой, что $t_{ij}^{(q)} c_{jk}^{(q)} = \delta_{ik}$:

$$F_{ij}(u_n) n_j \Big|_{S^{(q)}} = t_{in}^{(q)} \left(N_n^{(q)} - d_{nj}^{(q)} u_j \right).$$

Тогда под обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.13) будем понимать такое непрерывное векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, которое удовлетворяет тождеству

$$\int_V F_{ij}(u_n) w_{i,j} dV = \sum_q \int_{S^{(q)}} t_{in}^{(q)} \left(N_n^{(q)} - d_{nj}^{(q)} u_j \right) w_i dS \quad (2.14)$$

при произвольных вектор-функциях $w(\mathbf{r})$ [204].

Для композиционного материала можно дать и эквивалентное понятие обобщенного решения. Соответствующую задачу надо решить внутри каждого структурного элемента области V , материальные функции a_{ij} определяющих соотношений (2.6) которых непрерывны (т.е. отыскать классическое решение), а на межфазной поверхности S_{12} выполнить условия идеального контакта:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} n_j = \sigma_{ij}^{(2)} n_j.$$

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

В дальнейшем, говоря о решении краевых задач для композитов, будем понимать построение именно обобщенных решений.

Для моделирования процессов разрушения структурных элементов композитов предположим, что при выполнении условия

$$P_{pq}^{(i)}(b_{kl}^{(i)}, \sigma_{kl}) \geq 0, \quad (2.15)$$

где $P^{(i)}$, $b_{kl}^{(i)}$ — соответственно оператор критерия прочности и прочностные характеристики i -го компонента, в некоторой точке области V происходит частичная или полная потеря способности материала сопротивляться действию внутренних усилий, что находит свое отражение в изменении определяющих соотношений вида (2.3) для данной точки.

Непосредственно получить решение краевых задач механики деформирования и разрушения для систем уравнений (2.9), (2.6), (2.10) или (2.12) с учетом условия (2.15) обычно не удается, поскольку эти решения, как и коэффициенты уравнений являются быстро осциллирующими функциями координат. Поэтому широкое распространение получил подход, когда системе уравнений структурно-феноменологической модели ставится в соответствие система уравнений для осредненных напряжений, деформаций и перемещений, которые называют макроскопическими.

Например, в краевой задаче для упругих композитов вида

$$[C_{ijkl}(\mathbf{r})u_{k,l}(\mathbf{r})]_{,j} = 0, \quad u_i(\mathbf{r})|_S = u_i^0, \quad (2.16)$$

перейти к осредненным величинам можно следующим образом.

Пусть коэффициенты уравнений (2.16) являются быстроосциллирующими (случайными однородными или периодическими) кусочно-однородными функциями, причем во всех точках области V выполняется условие равномерной эллиптичности:

$$k_0 h_{ij} h_{ij} \leq C_{ijmn}(\mathbf{r}) h_{ij} h_{mn} \leq K_0 h_{ij} h_{ij},$$

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

где k_0 , K_0 — положительные скалярные величины.

Тогда решение краевой задачи (2.16) существует и единственно. Асимптотическое разложение этого решения по малому параметру $\alpha \sim l_\omega/L$:

$$u_i(\mathbf{r}) = u_i^*(\mathbf{r}) + \alpha u_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \alpha^2 u_i^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (2.17)$$

таково, что первое слагаемое ряда (2.17) является решением краевой задачи

$$C_{ijkl}^* u_{k,jl}^*(\mathbf{r}) = 0, \quad u_i^*|_S = u_i^0, \quad (2.18)$$

причем оператор краевой задачи (2.18) является равномерно эллиптическим

$$m_0 h_{ij} h_{ij} \leq C_{ijmn}^* h_{ij} h_{mn} \leq M_0 h_{ij} h_{ij}. \quad (2.19)$$

Из разложения (2.17), а также в силу существования и единственности решения краевой задачи (2.18) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_i(\mathbf{r}) - u_i^*(\mathbf{r})\| = 0. \quad (2.20)$$

Условие сходимости (2.20), в которых величины $u_i^*(\mathbf{r})$ имеют смысл осредненных (или макроскопических) перемещений в нормах различных пространств для случайных однородных, квазипериодических и периодических операторов показано в работах [127, 191, 234, 319].

В механике микронеоднородных сред от полей уравнений (2.6), (2.9), (2.10), называемых полями микро- или структурных перемещений, деформаций и напряжений, можно перейти к осредненным полям, используя понятие элементарного макрообъема V_i [62, 172, 296]. Напряженное состояние элементарных макрообъемов характеризуют тензором макронапряжений с компонентами σ_{ij}^* , а деформированное состояние — тензором макродеформаций с компонентами ε_{ij}^* . Сопротивление элементарных макрообъемов деформированию определяет связь макронапряжений и макродеформаций:

$$\sigma_{ij}^* = F_{ij}^*(\varepsilon_{kl}^*). \quad (2.21)$$

Если оператор F_{ij}^* инвариантен относительно параллельного переноса координат, то микронеоднородная среда является макрооднородной. Условию макрооднородности удовлетворяют, в частности, среды, материальные функции которых являются либо случайными однородными либо периодическими.

Для микронеоднородной области V со случайной структурой среды в краевых задачах с граничными условиями частного вида в перемещениях

$$u_i|_S = e_{ij}^0 r_j \quad (2.22)$$

или в напряжениях

$$\sigma_{ij} n_j|_S = N_i^0, \quad N_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j, \quad (2.23)$$

где e_{ij}^0 , σ_{ij}^0 — симметричные тензоры-константы, поля деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ являются случайными однородными (а для сред с периодической структурой — периодическими) всюду, за исключением малой окрестности, прилегающей к границе S . При граничных условиях общего вида (2.11) эти условия не выполняются и осредненные составляющие ε_{ij}^* и σ_{ij}^* полей деформаций и напряжений

являются функциями координат. В этом случае в предположении о достаточной гладкости осредненных полей $\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{r})$ и $\sigma_{ij}^*(\mathbf{r})$ справедлив приближенный подход, в соответствии с которым поля деформирования $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ в элементарном макрообъеме эквивалентны найденным из решения задач для области V в перемещениях при заданных макродеформациях $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^0$ (см. (2.22)) и в напряжениях при заданных макронапряжениях $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0$ (см. (2.23)).

Тогда осредненные (макроскопические) деформации и напряжения в каждой точке области V определяются путем осреднения по элементарному макрообъему V_i , выделенному вокруг этой точки:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma_{ij} dV, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \varepsilon_{ij} dV. \quad (2.24)$$

Для случайных однородных полей такое осреднение совпадает с осреднением оператором (...), введенным выражениями (2.7), (2.8). Постулируя при принятых условиях идеального контакта компонентов среды следующие свойства статистически осредненных полей:

$$\langle \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle_{,j}, \quad \langle u_{i,j}(\mathbf{r}) \rangle = \langle u_i(\mathbf{r}) \rangle_{,j}, \quad (2.25)$$

получаем из (2.9) макроскопические уравнения равновесия, а из (2.10) — геометрические уравнения:

$$\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{r}) = 0, \quad \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [u_{i,j}^*(\mathbf{r}) + u_{j,i}^*(\mathbf{r})]. \quad (2.26)$$

Теперь получена замкнутая система уравнений для макроскопических физических величин (т.е. построена макроскопическая модель композита), и основная задача заключается в отыскании вида оператора F_{ij}^* и определении его материальных функций. Макроскопические материальные функции могут быть найдены из испытаний образцов или вычислены при решении краевых задач структурно-феноменологических моделей композитов. Приближенно эти функции можно отыскать из решения задач для области V с граничными условиями частного вида (2.22) или (2.23).

Таким образом, краевой задаче механики композитов в рамках структурно-феноменологической модели:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = F_{ij}(\varepsilon_{kl}, \mathbf{r}), \\ \left(c_{ij}^{(q)} \sigma_{jk} n_k + d_{ij}^{(q)} u_j \right) \Big|_{S^{(q)}} = N_i^{(q)}, \quad \sum_q S^{(q)} = S \end{aligned} \quad (2.27)$$

ставится в соответствие краевая задача для однородной области с эффективными свойствами:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^*(\mathbf{r}) &= 0, \quad \epsilon_{ij}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^*(\mathbf{r}) + u_{j,i}^*(\mathbf{r})), \\ \sigma_{ij}^*(\mathbf{r}) &= F_{ij}^*(\epsilon_{kl}^*), \\ \left(c_{ij}^{(q)} \sigma_{jk}^* n_k + d_{ij}^{(q)} u_j^* \right) \Big|_{S^{(q)}} &= N_i^{(q)}, \quad \sum_q S^{(q)} = S \end{aligned} \quad (2.28)$$

и из решения последней находят осредненные составляющие полей деформирования.

Если наряду с процессами деформирования композита моделируются и процессы разрушения его компонентов, то в краевую задачу (2.27) включаются критерии прочности вида (2.15), и физические уравнения системы (2.28) отражают не только деформационные свойства элементов структуры, но их разрушение в процессе нагружения. Макроскопическая модель (2.28) в этом случае может быть дополнена критериальными соотношениями прочности

$$P_{ij}^*(b_{kl}^*, \sigma_{kl}^*) \geq 0, \quad (2.29)$$

оператор которых P^* и макроскопические материальные величины b_{kl}^* могут быть вычислены.

Двухступенчатая иерархия моделей композиционного материала позволяет разделить решение исходной краевой задачи механики деформирования и разрушения (2.6), (2.9) — (2.11), (2.15) на ряд последовательных этапов, связанных с построением макроскопических определяющих соотношений, решением краевой задачи для области с эффективным свойствами, отысканием структурных полей деформирования в элементарных макрообъемах, описанием процессов разрушения элементов структуры, оценкой вероятности разрушения элементарных макрообъемов (т.е. вероятности макроразрушения).

Как правило, при использовании нелинейных определяющих соотношений компонентов композита и учете процессов структурного разрушения возникает необходимость организации итерационных вычислительных процедур для решения нелинейных задач каждого из этапов — с одной стороны, и согласования этапов в общей последовательности — с другой. При этом в процессе деформирования исходно макрооднородная область V становится макронеоднородной, так как элементарные макрообъемы, выделенные вокруг различных точек, оказываются не одинаково нагруженными.

Данный приближенный подход позволил получить решения ряда прикладных задач, касающихся анализа механического поведения и прогнозирования несущей способности элементов конструкций из композиционных материалов: баллонов давления специального назначения, намотанных из стекло- и органопластиковых лент, кожухов авиационных двигателей, полученных выкладкой слоев из стекло-, органо-

и углеродных тканей, углерод-углеродных элементов сопловых блоков двигателей, крупногабаритных раструбов с теплозащитным слоем и других.

2.3. Принцип локальности

Исходная информация о структуре микронеоднородной среды, как уже отмечалось в § 2.1, может быть задана совокупностью моментных функций материальных тензорных или скалярных величин. Эти моментные функции строятся, как правило, экспериментально на реальных образцах или с помощью компьютерного моделирования случайных структур [62]. Исследования, проведенные в этой области показывают, что моментные функции второго и более высоких порядков композитов со случайными статистически однородными структурами являются локальными, причем размер области статистической зависимости для двухкомпонентных композитов матричного типа примерно равен половине среднего расстояния между включениями.

Если моментные функции структурных свойств микронеоднородной среды быстро затухают, то говорят, что в расположении элементов структуры имеет место ближний порядок [296].

При решении стохастических задач теории упругости композитов со случайной структурой свойство локальности моментных функций обычно постулировалось наряду с условием статистической однородности [320]. Известна также гипотеза предельной локальности моментных функций [62], позволяющая получать одноточечные приближения стохастических краевых задач и избегать трудностей, связанных с вычислением интегралов по областям статистической зависимости, в подынтегральные выражения которых входят моментные функции.

После того как свойство локальности моментных функций материальных свойств композитов со случайной структурой подтверждено многочисленными исследованиями, существует основа для его более глубокого использования в механике.

То же свойство локальности, но уже характеризующее взаимодействие элементов структуры, было отмечено в работах [28, 81, 183, 297]. Например, в работе [28] взаимодействие включений в матричном композите, вызывающее искажения в упругом поле матрицы, заменяется взаимодействием точечных мультиполей, мощность и порядок которых зависят от формы и свойств элементов структуры. В этой работе предложено выделять содержащий конечное число мультиполей ограниченный объем, в матрице которого генерируется упругое поле, адекватное упругому полю периодической задачи для матрицы с бесконечным числом включений.

Обобщая эти и другие результаты [29, 193, 247], связанные с проблемой взаимодействия многих тел, а также приведенные в работах

[97–100], можно отметить, что локальность во взаимодействии компонентов является физическим свойством композитов с периодическими и случайными структурами.

Итак, исходя из выше перечисленного, сформулируем принцип локальности следующим образом: *в расположении и взаимодействии компонентов композитов со случайной структурой имеет место ближний порядок.*

Признаком ближнего порядка в расположении является локальность моментных функций второго и более высоких порядков полей структурных физико-механических свойств. Ближний порядок во взаимодействии означает, что на формирование полей деформирования в некоторой подобласти, содержащей произвольно выделенное включение решающее влияние оказывают лишь ближайшие к ней включения из их произвольно большого (в том числе и бесконечного) множества.

На основе принципа локальности и в подтверждение его получены новые решения краевой задачи теории упругости композитов со случайной структурой (см. гл. 3), а также приведены два новых метода решения краевых задач механики композитов: метод периодических составляющих (см. гл. 4) и метод локального приближения (см. гл. 5).

Краевые задачи теории упругости композитов со случайной структурой

Рассматриваемая в данной главе стохастическая краевая задача теории упругости является основой статистической механики композитов со случайной структурой. Начало систематическому изучению этой задачи положено работой И.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга [160] применительно к поликристаллам, в дальнейшем многочисленные результаты были обобщены в монографиях [62, 130, 162, 172, 247, 296, 320 и др.]. При единой практически для всех работ в этом направлении постановке задачи, связанной с представлением упругих модулей микронеоднородной среды как случайных статистически однородных функций координат и выбором граничных условий в виде, обеспечивающим однородность макроскопических деформаций, а также общности подхода к решению с использованием метода функции Грина уравнений теории упругости в перемещениях для неограниченной изотропной или анизотропной среды существуют различия в получаемых результатах для эффективных свойств композитов и, в большей мере, для оценки полей напряжений и деформаций в компонентах композитов. Это обусловлено статистической нелинейностью исследуемой задачи и построением приближенных решений, которые неодинаково адекватны физической модели композита, в частности, его структуре.

Случайная структура композитов может быть описана с помощью совокупности моментных функций структурных модулей упругости [62, 352]. Так, двухточечная моментная функция характеризует взаимное расположение элементов структуры: степень и характер упорядоченности, трехточечная — форму включений, четырехточечная позволяет установить, как группируются включения и как они распределяются по размерам [352].

Ниже приведены результаты решения стохастической краевой задачи с учетом реального вида моментных функций упругих свойств двухфазных композитов. Построено полное корреляционное приближение задачи в перемещениях, когда при вычислении бинарных корреляционных тензоров деформаций удерживаются только члены бесконечного ряда, содержащие моментные функции упругих свойств с порядком не выше второго. Однако при вычислении бинарных корреляционных тензоров напряжений и условных моментов, характеризующих средние значения и дисперсии полей деформаций и напряжений

в компонентах композита, учитываются все слагаемые, соответствующие полученному корреляционному приближению задачи в перемещениях, в том числе и содержащие моментные функции упругих свойств третьего, четвертого и пятого порядков.

Результаты проиллюстрированы решением прикладных задач, связанных с определением статистических характеристик полей напряжений в компонентах дисперсно-упрочненного стеклопластика и в матрице пористого материала. Более полный анализ результатов для макроизотропных композитов, статистические характеристики полей деформирования для однонаправленно-армированных композитов, оценка прочности волокон и матрицы в оболочках содержится в работе [260].

3.1. Моментные функции упругих свойств композитов

Известно [62, 296], что для построения полного корреляционного приближения решения краевой задачи теории упругости микрогетерогенной среды в перемещениях с определением статистических характеристик случайных полей микронапряжений и микродеформаций в компонентах композита в качестве исходной информации о структуре материала необходима следующая совокупность моментных функций структурных модулей упругости: двухточечные и трехточечные моментные функции второго, третьего, четвертого и пятого порядков.

Для двухкомпонентного стохастически армированного композита с детерминированными свойствами компонентов корреляционная функция модулей упругости является финитной и имеет вид [62]

$$\langle C'_{ijmn}(\mathbf{r}) C'_{pqrs}(\mathbf{r}_1) \rangle = \left[\tilde{\lambda} \delta_{ij} \delta_{mn} + \tilde{\mu} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \right] \times \\ \times \left[\tilde{\lambda} \delta_{pq} \delta_{rs} + \tilde{\mu} (\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) \right] K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \quad (3.1)$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор математического ожидания; $\tilde{\lambda} = \lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}$; $\tilde{\mu} = \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$; $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ — коэффициенты Ламе соответственно первого и второго компонентов; δ_{ij} — символы Кронекера; $K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \langle \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}_1) \rangle$ — центральная моментная функция второго порядка случайной индикаторной функции $\kappa(\mathbf{r})$

$$\kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{r} \in V_1, \\ 0, & \forall \mathbf{r} \in V_2, \end{cases} \quad (3.2)$$

где V_1 и V_2 — части области $V = V_1 + V_2$, заполненные соответственно первым и вторым компонентом.

Моментная функция должна быть непрерывной и дифференцируемой [296, 320]. Предположим, что $\kappa(\mathbf{r})$ — статистически однородная

и изотропная функция. Тогда $K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = K_{\kappa}^{(2)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$. Как показано в [62], для гранулированных композитов, которые состоят из матрицы и хаотически расположенных в ней с объемным содержанием c_1 сферических включений одинаковых размеров, можно записать

$$K_{\kappa}^{(2)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = D_{\kappa}^{(2)} f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \quad (3.3)$$

где $D_{\kappa}^{(2)} = \langle \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}) \rangle = c_1(1 - c_1)$; $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$ — нормированная моментная функция.

Ранее для аппроксимации функции f были использованы выражения вида [248, 296]

$$f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = \exp(-\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \quad (3.4)$$

$$f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = \exp\left(-\frac{\alpha}{d}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\right) \left[\cos\left(\frac{b}{d}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\right) + \frac{d}{b} \sin\left(\frac{b}{d}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\right) \right]. \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) $\alpha = 3, 4$; $b = 5, 3$, причем значения констант α и b не зависят от содержания включений; d — размер области статистической зависимости [248], т.е. области, в которой значения локальной функции $K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ отличны от нуля.

Анализ экспериментальных данных [62, 248] и результатов численного моделирования структуры гранулированных композитов (объемная структура) и волокнистых однонаправленно армированных композитов (плоская структура) указывает на общую закономерность изменения нормированной моментной функции $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$ от модуля разности векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 , изображенную на рис. 3.1.

Для отыскания аналитического решения стохастической краевой задачи теории упругости необходимо аппроксимировать $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$ функцией с непрерывной первой производной в нулевой точке. С этой целью запишем нормированную функцию в виде

$$f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = \exp\left(-\frac{\alpha}{d^2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2\right) \left[\cos\left(\frac{b}{d^2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2\right) + a \sin\left(\frac{b}{d^2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2\right) \right], \quad (3.6)$$

где $\alpha = 5, 5$; $b = 3, 6$; $a = -1, 4$.

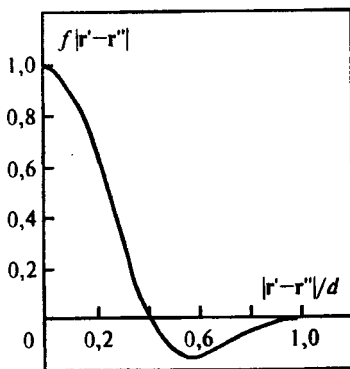


Рис. 3.1. Нормированная моментная функция случайного параметра

Формула (3.6) обобщает выражения типа (3.4), (3.5), хорошо описывает известные экспериментально построенные функции и не противоречит физическому смыслу корреляционной функции в окрестности нулевой точки.

Аналогичным образом в соответствии с [62, 248] может быть записано аналитическое выражение для моментной функции третьего порядка случайного параметра $\kappa(\mathbf{r})$:

$$K_{\kappa}^{(3)}(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = D_{\kappa}^{(3)} \exp\left(-\frac{\alpha}{2d^2}(|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}_1|^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2)\right) \times \\ \times \left[\cos\left(\frac{b}{2d^2}(|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}_1|^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2)\right) + \right. \\ \left. + a \sin\left(\frac{b}{2d^2}(|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}_1|^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2)\right) \right], \\ D_{\kappa}^{(3)} = \langle \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}) \rangle = c_1(1 - c_1)(1 - 2c_1), \quad (3.7)$$

где $D_{\kappa}^{(3)}$ — центральный момент третьего порядка параметра $\kappa(\mathbf{r})$. Из свойства индикаторной функции $\kappa(\mathbf{r})$ принимать значения, равные нулю либо единице, вытекают равенства:

$$\langle \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \rangle = \langle \kappa(0) \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \rangle = \langle \kappa(0) \kappa(0) \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \rangle = \dots, \\ \langle \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle \kappa(0) \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle \kappa(0) \kappa(0) \kappa(0) \kappa(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}_1) \rangle = \dots \quad (3.8)$$

С помощью предложенных формул (3.6) — (3.8) определяются остальные моментные функции третьего, четвертого и пятого порядков параметра $\kappa(\mathbf{r})$, необходимые для построения полного корреляционного приближения для полей деформаций и напряжений:

$$K_{\kappa}^{(3)}(0, 0, \mathbf{r}) = (1 - 2c_1)K_{\kappa}^{(2)}(0, \mathbf{r}), \quad (3.9)$$

$$K_{\kappa}^{(4)}(0, 0, 0, \mathbf{r}) = (1 - 3D_{\kappa}^{(2)})K_{\kappa}^{(2)}(0, \mathbf{r}), \quad (3.10)$$

$$K_{\kappa}^{(4)}(0, 0, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \equiv \langle \kappa'(0) \kappa'(0) \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}_1) \rangle = \\ = (1 - 2c_1)K_{\kappa}^{(3)}(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + D_{\kappa}^{(2)}K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \quad (3.11)$$

$$K_{\kappa}^{(4)}(0, 0, 0, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \equiv \langle \kappa'(0) \kappa'(0) \kappa'(0) \kappa'(\mathbf{r}) \kappa'(\mathbf{r}_1) \rangle = \\ = (1 - 3D_{\kappa}^{(2)})K_{\kappa}^{(3)}(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + D_{\kappa}^{(3)}K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \quad (3.12)$$

Таким образом, определены все структурные моментные функции, необходимые для построения полного корреляционного приближения решения стохастической краевой задачи теории упругости двухкомпонентных сред.

3.2. Постановка и решение стохастической краевой задачи в перемещениях в корреляционном приближении

Пусть структурно неоднородное тело V с границей S таково, что случайное поле структурных модулей упругости $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ является статистически однородным. На границе S заданы перемещения $u_i(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij}^* r_j$, причем ϵ_{ij}^* — произвольный симметричный тензор малых деформаций. Если элементы структуры тела прочно соединены по поверхности раздела, т.е. на этих поверхностях выполняются условия непрерывности перемещений $[u_i(\mathbf{r})]^+ = [u_i(\mathbf{r})]^-$ и напряжений $[\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})]^+ = [\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})]^-$, то $\epsilon_{ij}^* = \langle \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) \rangle$. Тогда стохастическая краевая задача теории упругости для тела V может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r})\epsilon_{kl}(\mathbf{r}), \\ \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}[u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})], \quad u_i(\mathbf{r})|_S = \epsilon_{ij}^* r_j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Случайные поля структурных напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ и деформаций $\epsilon_{ij}(\mathbf{r})$ статистически однородные, а краевая задача (3.13) статистически нелинейна, поскольку ее физические уравнения содержат произведение случайных полей.

В дальнейшем будем рассматривать краевую задачу для вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$. Из (3.13) следует, что этот вектор внутри тела V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \left[C_{ijmn}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_n} u_m(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad (3.14)$$

а на границе S удовлетворяет условию

$$u_i(\mathbf{r})|_S = e_{ij} r_j, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij}^*. \quad (3.15)$$

Возможность представления вектора перемещений на границе в виде (3.15) соответствует случаю, когда тело V находится в условиях макроскопически однородной деформации, т.е. во всех точках тела $u_i^*(\mathbf{r}) = e_{ij} r_j$.

Представим поля структурных модулей упругости и перемещений краевой задачи (3.14), (3.15) в виде

$$C_{ijmn}(\mathbf{r}) = \langle C_{ijmn}(\mathbf{r}) \rangle + C'_{ijmn}(\mathbf{r}), \quad u_i(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{r}) \rangle + u'_i(\mathbf{r}), \quad (3.16)$$

где $\langle u_i(\mathbf{r}) \rangle = u_i^*(\mathbf{r})$. Поскольку плавная составляющая $\langle u_i(\mathbf{r}) \rangle$ искомого быстро осциллирующего поля $u_i(\mathbf{r})$ в данной задаче известна, перейдем к краевой задаче относительно пульсаций вектора перемещения $u'_i(\mathbf{r})$. Эта краевая задача состоит из уравнений

$$\langle C_{ijmn} \rangle \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_n} u'_m(\mathbf{r}) = -\Pi_{ij,j}(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

где $\Pi_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}(\mathbf{r})\epsilon_{mn} + C'_{ijmn}(\mathbf{r})u'_{m,n}(\mathbf{r})$, и граничных условий

$$u'_i(\mathbf{r})|_S = 0. \quad (3.18)$$

Уравнения (3.17) можно рассматривать как уравнения краевой задачи теории упругости для однородного тела с тензором модулей упругости $\langle C_{ijmn} \rangle$ и перемещениями $u'_i(\mathbf{r})$, обусловленными действием случайных объемных сил $\Pi_{ij,j}(\mathbf{r})$. Если размеры тела V неограниченно велики по сравнению с размерами элементов структуры, то решение краевой задачи (3.17), (3.18) не зависит от формы границы S . Поэтому всюду внутри тела V , кроме малой окрестности, прилегающей к границе S , решение задачи (3.17), (3.18) можно представить с помощью тензора Кельвина–Соммильяны G_{ij} однородной среды, упругие свойства которой определяются тензором $\langle C_{ijmn} \rangle$ [62, 296]. Тензор \mathbf{G} вместе со своими производными обращается на бесконечности в нуль и удовлетворяет уравнению

$$\langle C_{ijmn} \rangle \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_n} G_{mk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta_{ik},$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ — обобщенная функция Дирака.

Если $\langle C_{ijmn} \rangle$ — изотропный тензор, то

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = A \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + B \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.19)$$

где коэффициенты A и B связаны с постоянными Ламе соотношениями:

$$A = \frac{\langle \lambda \rangle + 3\langle \mu \rangle}{8\pi\langle \lambda \rangle\langle \lambda + 2\mu \rangle} \quad B = \frac{\langle \lambda \rangle + \langle \mu \rangle}{8\pi\langle \lambda \rangle\langle \lambda + 2\mu \rangle}. \quad (3.20)$$

Возвращаясь к решению краевой задачи, имеем для неизвестного поля $u'_i(\mathbf{r})$ интегро-дифференциальное уравнение:

$$u'_i(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} \left\{ C_{kamn}(\mathbf{r}') [e_{mn} + u'_{m,n}(\mathbf{r}')] \right\} dr'. \quad (3.21)$$

Поверхностный интеграл в уравнении (3.21) отсутствует в силу условия (3.18).

Будем решать уравнение (3.21) методом последовательных приближений. Здесь приведем решение в первом (корреляционном) приближении, поскольку в дальнейшем ограничимся рассмотрением только этого приближения:

$$u'_i(\mathbf{r}) = \left[\int_V G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} C_{kamn}(\mathbf{r}') dr' \right] e_{mn}. \quad (3.22)$$

Таким образом, решение стохастической краевой задачи теории упругости в перемещениях (3.17), (3.18) имеет вид (в первом приближении)

$$u_i(\mathbf{r}) = e_{ij} r_j + E_{ikl}(\mathbf{r}) e_{kl}, \quad (3.23)$$

$$E_{ijm}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') C'_{knjm,n}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.24)$$

На основе решения (3.23) можно перейти к полям структурных деформаций и напряжений краевой задачи (3.13):

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \left\{ I_{ijmn} + \frac{1}{2} [E_{imn,j}(\mathbf{r}) + E_{jmn,i}(\mathbf{r})] \right\} e_{mn}, \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = [C_{ijmn} + C_{ijpq}(\mathbf{r}) E_{pmn,q}(\mathbf{r})] e_{mn}, \quad (3.26)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор четвертого ранга:

$$I_{ijmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}). \quad (3.27)$$

Выражения (3.25) и (3.26) показывают, что структурные поля деформирования краевой задачи (3.13) линейно зависят от заданных макродеформаций e_{ij} . Сомножители, заключенные в (3.25) и (3.26) в квадратные скобки, являются случайными однородными полями, определяемыми геометрией элементов структуры, их упругими свойствами и характером взаимного расположения.

На основе выражений для полей деформирования (3.23), (3.25), (3.26) можно перейти к решению задачи (3.13) в моментных функциях. Например, для моментной функции второго порядка случайного поля перемещений имеем

$$\langle u'_i(\mathbf{r}) u'_j(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle E_{imn}(\mathbf{r}) E_{jpp}(\mathbf{r}_1) \rangle e_{mn} e_{pp}. \quad (3.28)$$

Для моментной функции (3.28) поля $u_i(\mathbf{r})$ в корреляционном приближении с учетом линейности операторов осреднения и дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} & \langle u'_i(\mathbf{r}) u'_j(\mathbf{r}') \rangle = \\ & = \left[\iint_V G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{jl}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''') \langle C'_{kamn}(\mathbf{r}'') C'_{l\beta pq}(\mathbf{r}''') \rangle_{,\alpha\beta} d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \right] e_{mn} e_{pq}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для нахождения момента второго порядка поля $u_i(\mathbf{r})$ в корреляционном приближении по формуле (3.28) необходимо вычислять момент поля E_{ijm} :

$$\langle E_{ijn}(\mathbf{r}) E_{mpq}(\mathbf{r}') \rangle = \iint_V G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{ml}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle C'_{kajn}(\mathbf{r}') C'_{l\beta pq}(\mathbf{r}'') \rangle_{,\alpha\beta} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' . \quad (3.30)$$

Аналогичным образом определение момента второго порядка поля структурных деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, как это следует из (3.25), связано с вычислением момента поля $E_{ijm,k}$:

$$\begin{aligned} (E_{imn,s}(\mathbf{r})E_{jpr,t}(\mathbf{r})) &= \\ &= \iint_V G_{ik,s}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')G_{jl,t}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle C'_{k\alpha mn}(\mathbf{r}')C'_{i\beta pq}(\mathbf{r}'') \rangle_{,\alpha\beta} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Интегралы одинакового типа в формулах (3.30) и (3.31), содержащие тензор Кельвина–Сомильяны, можно рассматривать как несобственные, так как размер тела V неограниченно больше размера элементов структуры. Интегрирование по объему всего тела в этих формулах можно заменить интегрированием по области статистической зависимости случайного поля структурных модулей упругости — области, в которой значения локальной функции $K_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ отличны от нуля.

Новизна предлагаемого подхода заключается в том, что при построении решения интегрирование в (3.30), (3.31) проводится по всей области статистической зависимости поля $C_{ijmn}(\mathbf{r})$.

При вычислении интеграла (3.31) и аналогичных ему необходимы явные представления для поля $C_{ijmn}(\mathbf{r})$ через тензоры модулей упругости элементов структуры и функцию $\kappa(\mathbf{r})$, а именно, для рассматриваемого класса материалов:

$$C'_{ijmn}(\mathbf{r}) = \left(C_{ijmn}^{(1)} - C_{ijmn}^{(2)} \right) \kappa(\mathbf{r}), \quad (3.32)$$

Тогда моментные функции $K_{\mathbf{C}}^{(n)}$ порядка n поля $C_{ijmn}(\mathbf{r})$ записываются через моментные функции

$$K_{\mathbf{C}}^{(n)} = \underbrace{\left(C^{(1)} - C^{(2)} \right) \left(C^{(1)} - C^{(2)} \right) \dots \left(C^{(1)} - C^{(2)} \right)}_{n \text{ сомножителей}} K_{\kappa}^{(n)},$$

причем ранг тензора $K_{\mathbf{C}}^{(n)}$ равен $4n$. Раскладывая функцию (3.6) в ряд Тейлора, получим

$$f(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') (n'_{\alpha} n''_{\alpha})^s, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} f^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= \exp \left[-\frac{\alpha}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \times \\ &\times \left\{ \cos \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] + a \sin \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \right\}, \\ f^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= 2\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \exp \left[-\frac{\alpha}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{\alpha - ab}{d^2} \cos \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] + \frac{\alpha a + b}{d^2} \sin \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \right\}, \\ f^{(2)}(r', r'') &= 2r'^2 r''^2 \exp \left[-\frac{\alpha}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{\alpha^2 - 2\alpha ab - b^2}{d^4} \cos \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\alpha ab + a(\alpha^2 - b^2)}{d^4} \sin \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \right\}, \\ f^{(3)}(r', r'') &= \frac{4}{3} r'^3 r''^3 \exp \left[-\frac{\alpha}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 ab - 3\alpha b^2 + ab^3}{d^6} \cos \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a\alpha^3 + 3\alpha^2 b - 3\alpha ab^2 - b^3}{d^6} \sin \left[\frac{b}{d^2} (r'^2 + r''^2) \right] \right\}, \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

$r_j = r n_j$, n_j — направляющие косинусы, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \varphi \sin \theta, & n_2 &= \sin \varphi \sin \theta, & n_3 &= \cos \theta, \\ 0 \leq r &\leq \infty, & 0 \leq \varphi &\leq 2\pi, & 0 \leq \theta &\leq \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, выделена явная зависимость моментной функции (3.6) от углов и функций, определяющихся только модулями векторов. Представление (3.33) позволяет вычислить несобственные интегралы (3.31) последовательным интегрированием по модулям векторов и углам.

Подставляя соотношения (3.33) в (3.1), затем (3.19) и (3.1) в (3.31) и выбирая полюс в точке $\mathbf{r} = 0$, переходим к сферической системе координат. Используя введенные обозначения $n'_\alpha = r'_\alpha / r'$, $n''_\alpha = r''_\alpha / r''$ и известные соотношения

$$r_{,\alpha} = n_\alpha, \quad n_{k,i} = \frac{\delta_{ik} - n_i n_k}{r},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle E_{ikr,j}(\mathbf{r}) E_{mnp,q}(\mathbf{r}) \rangle &= [\tilde{\lambda} \delta_{\gamma\delta} \delta_{np} + \tilde{\mu} (\delta_{\gamma n} \delta_{\delta p} + \delta_{\gamma p} \delta_{\delta n})] \times \\ & \times [\tilde{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kr} + \tilde{\mu} (\delta_{\alpha k} \delta_{\beta r} + \delta_{\alpha r} \delta_{\beta k})] \times \\ & \times \int \int_{\mathbf{v}} [A n'_j \delta_{\alpha i} - B (n'_\alpha \delta_{ij} + n'_i \delta_{\alpha j}) + 3B n'_i n'_\alpha n'_j] \times \\ & \times [A n''_q \delta_{m\gamma} - B (n''_\gamma \delta_{mq} + n''_m \delta_{\gamma q}) + 3B n''_m n''_\gamma n''_q] \times \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \left[f_{r',r'',n'_\beta n''_\delta (n'_\omega n''_\omega)^s}^{(s)} + s f_{r',r'',n''_\delta (n'_\lambda n''_\lambda)^{s-1}}^{(s)} \frac{n''_\beta - n'_\beta (n'_\omega n''_\omega)}{r'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + s f_{,r'}^{(s)} n'_\beta (n'_\lambda n''_\lambda)^{s-1} \frac{n'_\delta - n''_\delta (n'_\omega n''_\omega)}{r''} + \\
 & + s(s-1) f^{(s)} (n'_\mu n''_\mu)^{s-2} \frac{[n''_\beta - n'_\beta (n'_\omega n''_\omega)] [n'_\delta - n''_\delta (n'_\lambda n''_\lambda)]}{r' r''} + \\
 & + s f^{(s)} (n'_\lambda n''_\lambda)^{s-1} \frac{[\delta_{\omega\beta} - n'_\omega n'_\beta] [\delta_{\omega\delta} - n''_\omega n''_\delta]}{r' r''} \Big] \times \\
 & \times \sin \theta' \sin \theta'' dr' dr'' d\varphi' d\varphi'' d\theta' d\theta''. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

При интегрировании в (3.34) по углам применяются известные формулы [247, 296]:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_i n_j \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_i n_j n_k n_l \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{и т.д.}$$

Вычислив интегралы (3.34) по модулям векторов с учетом их изменяемости в области статистической зависимости и углам и выполнив соответствующие свертки по повторяющимся индексам, получаем окончательное выражение для бинарного корреляционного тензора случайных деформаций:

$$\begin{aligned}
 K_\varepsilon^{(2)} \equiv \langle \varepsilon'_{m_1 n_1}(\mathbf{r}) \varepsilon'_{m_2 n_2}(\mathbf{r}) \rangle = D_k^{(2)} \sum_{k=1}^4 \left\{ \left[F_1^{(k)} e_{ii} e_{jj} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + \right. \right. \\
 F_2^{(k)} e_{ii} e_{jj} (\delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1 n_2} + \delta_{m_1 n_2} \delta_{n_1 m_2}) + F_3^{(k)} e_{ii} (e_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + e_{m_2 n_2} \delta_{m_1 n_1}) + \\
 + F_4^{(k)} e_{ii} (e_{m_1 m_2} \delta_{n_1 n_2} + e_{m_1 n_2} \delta_{n_1 m_2} + e_{n_1 m_2} \delta_{m_1 n_2} + e_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}) + \\
 F_5^{(k)} (e_{m_1 \alpha} e_{m_2 \alpha} \delta_{n_1 n_2} + e_{m_1 \alpha} e_{n_2 \alpha} \delta_{n_1 m_2} + e_{m_2 \alpha} e_{n_1 \alpha} \delta_{m_1 n_2} + e_{n_1 \alpha} e_{n_2 \alpha} \delta_{m_1 m_2}) + \\
 + F_6^{(k)} (e_{m_1 \alpha} e_{n_1 \alpha} \delta_{m_2 n_2} + e_{m_2 \alpha} e_{n_2 \alpha} \delta_{m_1 n_1}) + F_7^{(k)} e_{m_1 n_1} e_{m_2 n_2} + \\
 \left. + F_8^{(k)} (e_{m_1 n_2} e_{n_1 m_2} + e_{m_1 m_2} e_{n_1 n_2}) + F_9^{(k)} e_{ij} e_{ij} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \right] C^{(k)} \Big\}, \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

где $F_i^{(k)}$, $C^{(k)}$ — коэффициенты, зависящие только от упругих свойств и относительной объемной концентрации компонентов.

Аналитические выражения для вычисления тридцати шести коэффициентов $F_i^{(k)}$ и четырех коэффициентов $C^{(k)}$ полностью содержатся в работе [260]. Здесь для иллюстрации структуры этих выражений приведем лишь несколько из них:

$$F_1^{(1)} = \left\{ \frac{4\pi}{15} [5(A-B)\tilde{\lambda} - 4B\tilde{\mu}] \right\}^2, \quad F_9^{(1)} = 0,$$

$$F_1^{(1)} = -\frac{32}{75}\pi^2 \left[(A-B)\tilde{\lambda} - \frac{8}{7}B\tilde{\mu} \right]^2, \quad F_9^{(4)} = 2 \left(\frac{16}{35}\pi B\tilde{\mu} \right)^2, \quad (3.36)$$

$$C^{(1)} = C^{(4)} = 1 + \exp(-H_1^2\alpha) [(-H_1^2\alpha + H_1^2ab - 1) \cos(H_1^2b) + \\ + (-H_1^2\alpha a - H_1^2b - a) \sin(H_1^2b)] + \frac{5}{2}(H_2 - H_1), \quad (3.37)$$

где $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| = H_1$ и $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''| = H_2$ - первый и второй нули функции $K_\kappa^{(2)}(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)$ соответственно.

Таким образом, бинарный корреляционный тензор случайных деформаций с учетом положительной и отрицательной областей изменения функции $K_\kappa^{(2)}(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)$ определяется формулой (3.35).

Перейдем теперь к вычислению в рамках полного корреляционного приближения стохастической краевой задачи (3.14), (3.15) бинарного корреляционного тензора напряжений с учетом реального вида моментных функций упругих свойств.

Осреднив соотношение обобщенного закона Гука в (3.13), получаем пульсации случайных напряжений:

$$\sigma'_{ij} = (C'_{ijkl} + \langle C'_{ijpq} \rangle \Phi_{pqkl} + C'_{ijpq} \Phi_{pqkl} - \langle C'_{ijpq} \Phi_{pqkl} \rangle) \varepsilon_{kl}, \quad (3.38)$$

где $\Phi_{pqkl} = \frac{1}{2}(E_{pkl,q} + E_{qkl,p})$. Тогда для центрального момента второго порядка микронапряжений имеем

$$K_\sigma^{(2)} \equiv \langle \sigma'_{m_1 n_1}(\mathbf{r}) \sigma'_{m_2 n_2}(\mathbf{r}) \rangle = M_{m_1 n_1 k_1 l_1 m_2 n_2 k_2 l_2} e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}, \quad (3.39)$$

где

$$M_{m_1 n_1 k_1 l_1 m_2 n_2 k_2 l_2} = \langle C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle + \\ + \langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle + \langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle - \\ - \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle + \\ + \langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{j_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \\ + \langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \times \\ \times \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle. \quad (3.40)$$

Тензор M зависит только от структуры и свойств композита, поэтому определение его сводится к вычислению интегралов от моментных функций поля C .

Как видно из выражения (3.40), для вычисления статистических характеристик поля напряжений даже в корреляционном приближении необходимы моментные функции не только второго, но также третьего и четвертого порядков случайного поля упругих свойств. Моментные функции параметра $\kappa(\mathbf{r})$, используемые для определения корреляционного момента напряжений, определены в § 3.1.

Слагаемые в выражении (3.40) вычисляем изложенным выше методом. Здесь приведены только окончательные результаты расчетов (в проекциях на оси координат):

$$\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} = D_{\kappa}^{(2)} \left[\tilde{\lambda}^2 e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + \right. \\ \left. + 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu} e_{\alpha\alpha} (e_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + e_{m_2 n_2} \delta_{m_1 n_1}) + 4\tilde{\mu}^2 e_{m_1 n_1} e_{m_2 n_2} \right], \quad (3.41)$$

$$\langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2} = \\ = -\frac{4\pi}{15} D_{\kappa}^{(2)} \left\{ \left\{ 5(A - B)(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(\tilde{\lambda}) + 2[5(A - B)\tilde{\lambda} - 4B\tilde{\mu}](\tilde{\mu}) \right\} \times \right. \\ \left. \times (\tilde{\lambda} e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + 2\tilde{\mu} e_{\alpha\alpha} e_{m_2 n_2} \delta_{m_1 n_1}) + \right. \\ \left. + 4(5A + B)\tilde{\mu}(\tilde{\mu}) [\tilde{\lambda} e_{\alpha\alpha} e_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + 2\tilde{\mu} e_{m_1 n_1} e_{m_2 n_2}] \right\}; \quad (3.42)$$

слагаемое $\langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ можно найти, если в выражении (3.42) заменить индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно; слагаемое $\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ состоит из произведения двух сомножителей $\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1}$ и $\langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_2 l_2}$, причем

$$\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1} = -\frac{4\pi}{15} D_{\kappa}^{(2)} \left\{ \left[5(A - B)\tilde{\lambda}(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu}) - \right. \right. \\ \left. \left. - 8B\tilde{\mu}^2 \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_1 n_1} + 4(5A + B)\tilde{\mu}^2 e_{m_1 n_1} \right\}, \quad (3.43)$$

а $\langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_2 l_2}$ можно найти, если в выражении (3.43) заменить индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно:

$$\left(\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle + \langle C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle \right) e_{k_1 l_1} \times \\ \times e_{k_2 l_2} = -\frac{8\pi}{15} (1 - 2c_1) D_{\kappa}^{(2)} \left\{ \left[15(A - B)\tilde{\lambda}^2 + 20(A - B)\tilde{\lambda}\tilde{\mu} - 8B\tilde{\mu}^2 \right] \times \right. \\ \left. \times [\tilde{\lambda} e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + \tilde{\mu} e_{\alpha\alpha} (e_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + e_{m_2 n_2} \delta_{m_1 n_1})] + \right. \\ \left. + 2(5A + B)\tilde{\mu}^2 [\tilde{\lambda} e_{\alpha\alpha} (e_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} + e_{m_2 n_2} \delta_{m_1 n_1}) + 4\tilde{\mu} e_{m_1 n_1} e_{m_2 n_2}] \right\}; \quad (3.44)$$

сумму слагаемых

$$\left(\langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \right. \\ \left. + \langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle \right) e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

можно найти, если в правой части выражения (3.35) записать вместо $C^{(k)}$ соотношения $C^{\text{III}(k)}$

$$C^{\text{III}(1)} = C^{(1)}, \quad C^{\text{III}(2)} = \frac{1}{4}C^{(2)}, \quad C^{\text{III}(3)} = \frac{1}{4}C^{(3)}, \quad C^{\text{III}(4)} = \frac{1}{4}C^{(4)}. \quad (3.45)$$

и изменить $D_{\kappa}^{(2)}$ на $D_{\kappa}^{(3)}$, а $F_i^{(k)}$ на $\bar{F}_i^{(k)}$, равные соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^{(k)} = & 2 \left\{ \left[9F_1^{(k)} + 6 \left(F_2^{(k)} + F_3^{(k)} \right) + 4F_4^{(k)} + F_7^{(k)} \right] \tilde{\lambda}(\lambda) + \right. \\ & \left. + 2 \left(3F_1^{(k)} + 2F_2^{(k)} + F_3^{(k)} \right) \left(\tilde{\lambda}(\mu) + \tilde{\mu}(\lambda) \right) + 4F_1^{(k)} \tilde{\mu}(\mu) \right\}, \\ & \bar{F}_2^{(k)} = 8F_2^{(k)} \tilde{\mu}(\mu), \\ \bar{F}_3^{(k)} = & 2 \left(3F_3^{(k)} + 4F_4^{(k)} + F_7^{(k)} \right) \left(\tilde{\lambda}(\mu) + \tilde{\mu}(\lambda) \right) + 8F_3^{(k)} \tilde{\mu}(\mu), \\ & \bar{F}_4^{(k)} = 8F_4^{(k)} \tilde{\mu}(\mu), \quad \bar{F}_5^{(k)} = 8F_5^{(k)} \tilde{\mu}(\mu), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\bar{F}_6^{(k)} = 2 \left(4F_5^{(k)} + 3F_6^{(k)} + 2F_8^{(k)} \right) \left(\tilde{\lambda}(\mu) + \tilde{\mu}(\lambda) \right) + 8F_6^{(k)} \tilde{\mu}(\mu),$$

$$\bar{F}_7^{(k)} = 8F_7^{(k)} \tilde{\mu}(\mu), \quad \bar{F}_8^{(k)} = 8F_8^{(k)} \tilde{\mu}(\mu),$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_9^{(k)} = & 2 \left\{ \left[4F_5^{(k)} + 6F_6^{(k)} + 2F_8^{(k)} + F_9^{(k)} \right] \tilde{\lambda}(\lambda) + \right. \\ & \left. + \left(2F_6^{(k)} + 6F_9^{(k)} \right) \left(\tilde{\lambda}(\mu) + \tilde{\mu}(\lambda) \right) + 4F_9^{(k)} \tilde{\mu}(\mu) \right\}, \end{aligned}$$

где $F_i^{(k)}$ определяются соотношениями (3.36); слагаемое

$$\langle C_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

можно найти, если в правой части выражения (3.35) заменить $F_i^{(k)}$ на $\check{F}_i^{(k)}$, равные соответственно:

$$\check{F}_1^{(k)} = F_1^{(k)} (3\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle)^2 + \left(6F_2^{(k)} + 6F_3^{(k)} + 4F_4^{(k)} + F_7^{(k)} \right) \langle \lambda \rangle^2 +$$

$$+ 4 \left(2F_2^{(k)} + F_3^{(k)} \right) \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle, \quad \check{F}_2^{(k)} = 4F_2^{(k)} \langle \mu \rangle^2,$$

$$\check{F}_3^{(k)} = 2\langle \mu \rangle \left[\left(3F_3^{(k)} + 4F_4^{(k)} + F_7^{(k)} \right) \langle \lambda \rangle + 2F_3^{(k)} \langle \mu \rangle \right],$$

$$\check{F}_4^{(k)} = 4F_4^{(k)} \langle \mu \rangle^2, \quad \check{F}_5^{(k)} = 4F_5^{(k)} \langle \mu \rangle^2,$$

$$\check{F}_6^{(k)} = 2\langle \mu \rangle \left[\left(4F_5^{(k)} + 3F_6^{(k)} + 2F_8^{(k)} \right) \langle \lambda \rangle + 2F_6^{(k)} \langle \mu \rangle \right],$$

$$\check{F}_7^{(k)} = 4F_7^{(k)} \langle \mu \rangle^2, \quad \check{F}_8^{(k)} = 4F_8^{(k)} \langle \mu \rangle^2,$$

$$\check{F}_9^{(k)} = 2 \left(2F_5^{(k)} + 3F_6^{(k)} + F_8^{(k)} \right) \langle \lambda \rangle^2 + 4F_6^{(k)} \langle \lambda \rangle \langle \mu \rangle + F_9^{(k)} (3\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle)^2; \quad (3.47)$$

слагаемое $\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle$ можно найти, если в правой части выражения (3.35) вместо $D_k^{(2)} C^{(k)}$ записать $(1 - 2c_1) C^{III(k)} + D_k^{(2)} C^{(k)}$, а вместо $F_i^{(k)} - \check{F}_i^{(k)}$, заменив при этом в (3.47) $\langle \lambda \rangle$ и $\langle \mu \rangle$ на $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ соответственно.

Таким образом, все слагаемые в выражении (3.40) вычислены и бинарный корреляционный тензор напряжений построен.

3.3. Расчет характеристик полей деформаций и напряжений в компонентах дисперсно-упрочненных композитов

Средние деформации и корреляционные моменты деформаций в k -м компоненте композита определяются соотношениями [62]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_k = e_{ij} + c_k^{-1} \langle \kappa'_k \varepsilon'_{ij} \rangle, \quad (3.48)$$

где

$$c_k = \langle \kappa_k \rangle; \quad \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle_k = \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle + e_{ij} e_{mn} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_k \langle \varepsilon_{mn} \rangle_k + c_k^{-1} (\langle \kappa'_k \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle + e_{ij} \langle \kappa'_k \varepsilon'_{mn} \rangle + e_{mn} \langle \kappa'_k \varepsilon'_{ij} \rangle). \quad (3.49)$$

Вычисление средних деформаций в компонентах $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_k$ сводится, таким образом, к вычислению моментов вида $\langle \kappa'_k \varepsilon_{ij} \rangle$. Учитывая, что в случае двухкомпонентной среды $\kappa'_1 = \kappa'$, $\kappa'_2 = -\kappa'$, где $\kappa' = \kappa - c$, $\kappa = \kappa_1$, $c = c_1$, будем искать моменты вида $\langle \kappa'_k \varepsilon'_{ij} \rangle$, поскольку при $k = 2$ изменяется лишь знак.

Так как для пульсаций деформаций справедливо соотношение

$$\varepsilon'_{ij} = \Phi_{ijmn} e_{mn}, \quad (3.50)$$

то получаем

$$\langle \kappa'_k \varepsilon'_{ij} \rangle = \langle \kappa'_k \Phi_{ijmn} \rangle e_{mn}. \quad (3.51)$$

Интеграл $\langle \kappa'_k \Phi \rangle$ вычисляется аналогично тому, как это сделано выше.

Таким образом, для определения составляющих тензора средних деформаций в компонентах хаотически армированной среды получаем в корреляционном приближении:

$$\langle \kappa'_1 \varepsilon'_{ij} \rangle = -\langle \kappa'_2 \varepsilon'_{ij} \rangle = -\frac{4\pi}{15} D_k^{(2)} \{ [5(A - B)\tilde{\lambda} - 4B\tilde{\mu}] e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2(5A + B)\tilde{\mu} e_{ij} \}. \quad (3.52)$$

Перейдем теперь к определению корреляционного момента деформаций в компонентах. В выражении (3.49) все слагаемые, кроме

$\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle$, вычислены. Для отыскания $\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle$ требуется знать моментную функцию третьего порядка, которую аппроксимируем согласно [62, 248] выражением (3.7).

Дальнейшие вычисления $\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle$ проводим так же, как и при отыскании момента $\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle$. В результате получаем формулу, аналогичную (3.35), в правой части которой $F_i^{(k)}$ остаются равными (3.36), вместо $D_\kappa^{(2)}$ нужно записать $D_\kappa^{(3)}$, а вместо $C^{(k)}$ — выражения (3.45).

Таким образом, все слагаемые в формуле (3.49) определены, и корреляционный момент деформаций в компонентах композита вычислен.

На основе решения стохастической краевой задачи (3.13) теории упругости неоднородных сред со случайной структурой можно вычислять макроскопические модули упругости таких сред. Осредняя уравнение (3.26), для тензора макромодулей C_{ijkl}^* получим

$$C_{ijkl}^* = \langle C_{ijkl} \rangle + h_{ijkl}, \quad (3.53)$$

т.е. задача определения макромодулей сводится к вычислению поправки к средним модулям упругости $\langle C_{ijkl} \rangle$.

Для стохастически армированных композиционных материалов данная поправка получена в корреляционном приближении на основе гипотезы предельной локальности моментных функций поля [62, 247]:

$$h_{ijkl} = -\frac{4\pi}{15} D_\kappa^{(2)} \{ [15(A - B)\tilde{\lambda}^2 + 20(A - B)\tilde{\lambda}\tilde{\mu} - 8B\tilde{\mu}^2] \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ + 2(5A + B)\tilde{\mu}^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \}. \quad (3.54)$$

Учет координатной зависимости корреляционной функции модулей упругости не приводит к изменению результатов для эффективных свойств по сравнению с гипотезой предельной локальности.

Произведем расчет средних значений и корреляционных моментов напряжений в компонентах композита. Выше приведены формулы (3.48) и (3.49) для определения средних деформаций и корреляционных моментов в компонентах хаотически армированного композита. Эти же соотношения справедливы и для расчета соответствующих статистических характеристик напряжений, так как в них физический смысл величин не играет никакой роли.

Итак, для составляющих тензора средних напряжений в компонентах стохастически армированного композита согласно (3.48) имеем

$$\langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle_k = \langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle + c_k^{-1} \langle \kappa'_k \sigma'_{m_1 n_1} \rangle, \quad (3.55)$$

где $\langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle$ известно по (3.26), (3.53), (3.54) и остается вычислить момент $\langle \kappa'_k \sigma'_{m_1 n_1} \rangle$. В данном случае $\kappa'_1 = \kappa'$, $\kappa'_2 = -\kappa'$, $c = c_1$, поэтому будем искать момент вида $\langle \kappa' \sigma'_{m_1 n_1} \rangle$, поскольку при $k = 2$ изменяется лишь знак.

С учетом (3.38) получаем

$$\langle \kappa' \sigma'_{m_1 n_1} \rangle = (\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} \rangle + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle + \\ + \langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle) e_{k_1 l_1}. \quad (3.56)$$

Слагаемые в формуле (3.56) вычисляются аналогично тому, как это было сделано выше. В результате имеем

$$\langle \kappa' \sigma'_{m_1 n_1} \rangle = D_{\kappa}^{(2)} \left[\tilde{\lambda} - \frac{4\pi}{15} \left\{ 5(A - B) [3\tilde{\lambda}(\lambda) + 2(\tilde{\lambda}(\mu) + \tilde{\mu}(\lambda)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{\lambda}(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu})(1 - 2c)] - 8B\tilde{\mu}[(\mu) + \tilde{\mu}(1 - 2c)] \right\} \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_1 n_1} + \\ + \tilde{\mu} \left\{ 2 - \frac{16\pi}{15} [(5A + B)(\mu) + \tilde{\mu}(1 - 2c)] \right\} e_{m_1 n_1}. \quad (3.57)$$

Корреляционный момент случайных напряжений в соответствии с (3.49) запишется так:

$$\langle \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle_k = \langle \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle + \langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle \langle \sigma_{m_2 n_2} \rangle - \langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle_k \langle \sigma_{m_2 n_2} \rangle_k + \\ + c_k^{-1} (\langle \kappa'_k \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle + \langle \sigma_{m_2 n_2} \rangle \langle \kappa'_k \sigma'_{m_1 n_1} \rangle + \langle \sigma_{m_1 n_1} \rangle \langle \kappa'_k \sigma'_{m_2 n_2} \rangle). \quad (3.58)$$

В формуле (3.58) все слагаемые, кроме $\langle \kappa'_k \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle$, вычислены. Так как $\kappa'_1 = \kappa'$, $\kappa'_2 = -\kappa'$, будем искать момент $\langle \kappa' \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle$, который с учетом (3.38) принимает вид

$$\langle \kappa' \sigma'_{m_1 n_1} \sigma'_{m_2 n_2} \rangle = (\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle + \dots \\ \dots + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \dots \\ \dots + \langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle) e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}. \quad (3.59)$$

Все пятнадцать слагаемых правой части (3.59) указаны в [260].

Ниже будут приведены результаты вычисления слагаемых в выражении (3.59). Слагаемое

$$\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

можно найти, если в выражении (3.41) вместо $D_{\kappa}^{(2)}$ записать $D_{\kappa}^{(3)}$. Слагаемое

$$\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

равно соотношению (3.42), умноженному на $(1 - 2c)$. Сумму слагаемых

$$(\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 k_2 l_2} \rangle + \\ + \langle \kappa' C'_{m_1 n_1 k_1 l_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle) e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

можно найти, если в формуле (3.44) вместо сомножителя $(1 - 2c)$ записать $(1 - 3D_\kappa^{(2)})$,

$$\langle \kappa' C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2} = -\frac{4\pi}{15} \left(D_\kappa^{(2)} \right)^2 \times \\ \times \left(\tilde{\lambda} e_{\alpha\alpha} \delta_{m_2 n_2} + 2\tilde{\mu} e_{m_2 n_2} \right) \left\{ \left[5(A - B)\tilde{\lambda} \left(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu} \right) - 8B\tilde{\mu}^2 \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_1 n_1} + \right. \\ \left. + 4(5A + B)\tilde{\mu}^2 e_{m_1 n_1} \right\}. \quad (3.60)$$

Слагаемое $\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ можно найти, если в выражении (3.60) заменить индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно. Слагаемое $\langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ можно найти, если правую часть выражения (3.42) умножить на $(1 - 2c)$ и заменить индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно.

Слагаемое $\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ можно найти, если в выражении (3.35) заменить $C^{(k)}$ на $C^{\text{III}(k)}$ (3.45), $F_i^{(k)}$ — на $\check{F}_i^{(k)}$ (3.47) и $D_\kappa^{(2)}$ — на $D_\kappa^{(3)}$. Сумма слагаемых

$$\left(\langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle + \right. \\ \left. + \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \kappa' C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle \right) e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

находится, если в выражении (3.35) вместо $D_\kappa^{(2)} C^{(k)}$ записать $(1 + 2c)C^{\text{III}(k)} + D_\kappa^{(2)} C^{(k)}$, а вместо $F_i^{(k)}$ — $\check{F}_i^{(k)}$ (см. (2.46)). Имеет место равенство

$$\langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2} = \\ = -\frac{16\pi^2}{225} \left(D_\kappa^{(2)} \right)^2 \left\{ \left[5(A - B)(3\tilde{\lambda}(\lambda) + 2\langle \mu \rangle \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(\lambda)) - \right. \right. \\ \left. \left. - 8B\tilde{\mu}(\mu) \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_2 n_2} + 4(5A + B)\tilde{\mu}(\mu) e_{m_2 n_2} \right\} \times \\ \times \left\{ \left[5(A - B)\tilde{\lambda} \left(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu} \right) - 8B\tilde{\mu}^2 \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_1 n_1} + 4(5A + B)\tilde{\mu}^2 e_{m_1 n_1} \right\}, \quad (3.61)$$

слагаемое $\langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \rangle \langle \kappa' \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ может быть найдено, если в выражении (3.61) заменить индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно; слагаемое

$$\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$$

можно найти, если в правой части выражения (3.35) вместо $D_\kappa^{(2)} C^{(k)}$ записать $(1 - 3D_\kappa^{(2)})C^{\text{III}(k)} + D_\kappa^{(3)} C^{(k)}$, а вместо $F_i^{(k)}$ — $\check{F}_i^{(k)}$ (3.47), заменив при этом в (3.47) $\langle \lambda \rangle$ и $\langle \mu \rangle$ на $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ соответственно. Получим равенство

$$\langle \kappa' C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle \langle C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2} =$$

$$= \frac{16\pi^2}{225} (1 - 2c) \left(D_{\kappa}^{(2)} \right)^2 \left\{ \left[5(A - B)\tilde{\lambda}(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu}) - 8B\tilde{\mu}^2 \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_1 n_1} + \right. \\ \left. + 4(5A + B)\tilde{\mu}^2 e_{m_1 n_1} \right\} \left\{ \left[5(A - B)\tilde{\lambda}(3\tilde{\lambda} + 4\tilde{\mu}) - 8B\tilde{\mu}^2 \right] e_{\alpha\alpha} \delta_{m_2 n_2} + \right. \\ \left. + 4(5A + B)\tilde{\mu}^2 e_{m_2 n_2} \right\}; \quad (3.62)$$

а слагаемое $\langle \kappa' C'_{m_1 n_1 i_1 j_1} \Phi_{i_1 j_1 k_1 l_1} \rangle \langle C'_{m_2 n_2 i_2 j_2} \Phi_{i_2 j_2 k_2 l_2} \rangle e_{k_1 l_1} e_{k_2 l_2}$ найдем, если в выражении (3.62) заменим индексы m_1, n_1 на m_2, n_2 соответственно.

Таким образом, все слагаемые в соотношении (3.59) вычислены, а следовательно, определен и корреляционный момент (3.58) случайных напряжений в компонентах стохастически армированного композита.

В работе [260] содержится анализ сравнения результатов расчета бинарных корреляционных тензоров деформаций и напряжений, а также первого и второго моментов полей деформаций и напряжений в компонентах композитов на основе полученных в данной главе решений с результатами других авторов и экспериментальными данными.

Показано, что даже при изотропном деформировании (гидростатическое сжатие) дисперсно упрочненного стеклопластика, учет реального вида моментных функций упругих свойств приводит к существенному изменению бинарных корреляционных тензоров деформаций и напряжений по сравнению с результатами, полученными на основе гипотезы о предельной локальности [246], а также использования экспоненциальной координатной зависимости [296]. При этом упругие свойства и объемное содержание компонентов стеклопластика принимались следующими:

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= 70 \text{ ГПа}; & \nu^{(1)} &= 0, 2; & c_1 &= 0, 56; \\ E^{(2)} &= 6 \text{ ГПа}; & \nu^{(2)} &= 0, 25; & c_2 &= 0, 44. \end{aligned} \quad (3.63)$$

В задаче об одноосном растяжении отмечено практическое совпадение расчетных и экспериментальных значений средних деформаций в компонентах и качественное совпадение дисперсий.

В то же время обнаружено, что для некоторых вариантов расчета коэффициентов вариации случайных деформаций и напряжений в порошковых композитах (вольфрам-медь, железо-медь) и наполненных полимерах с учетом действительных моментных функций упругих свойств и с использованием гипотезы о их предельной локальности, результаты расчетов могут отличаться в два и более раз. Вычисление дисперсий напряжений в компонентах композитов без учета действительных моментных функций вообще приводит к нулевым и даже отрицательным значениям, что противоречит физическому смыслу.

В качестве иллюстрации в табл. 3.1 приведены средние значения и коэффициенты вариации деформаций и напряжений в компонентах стеклопластика (3.63), вычисленные с помощью соотношений (3.48), (3.55), (3.49), (3.58). Здесь же приведены и коэффициенты вариации

модулей объемного сжатия и сдвига. Видно, что учет реального взаимодействия компонентов при деформировании дает ненулевые значения коэффициентов вариации деформаций и напряжений в компонентах, сопоставимые с коэффициентами вариации случайных упругих модулей композита, что соответствует физической картине.

Таким образом, построено новое аналитическое решение стохастической краевой задачи теории упругости, позволяющее описывать сложное напряженно-деформированное состояние компонентов композита с помощью моментов первого и второго порядков структурных деформаций и напряжений. При этом удастся вычислять и дисперсии таких случайных напряжений, средние значения которых при заданных условиях нагружения равны нулю.

Т а б л и ц а 3.1

**Коэффициенты вариации модулей,
средние деформации, напряжения (ГПа)
и коэффициенты вариации деформаций и напряжений
в компонентах стеклопластика (3.63)**

Гидростатическое растяжение $e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0,001$			Чистый сдвиг $e_{12} = e_{21} = 0,001$			Одноосное деформирование $e_{11} = 0,001$		
c_1	0,4	0,56	c_1	0,4	0,56	c_1	0,4	0,56
V_μ	1,000	0,764	V_μ	1,000	0,764	V_μ	1,000	0,764
V_K	0,952	0,736	V_K	0,952	0,736	V_K	0,952	0,736
$\langle \epsilon_{11} \rangle_1 \cdot 10^3$	0,412	0,673	$\langle \epsilon_{12} \rangle_1 \cdot 10^3$	0,392	0,664	$\langle \epsilon_{11} \rangle_1 \cdot 10^3$	0,399	0,667
$V_{\epsilon_{11}}^{(1)}$	2,489	1,036	$V_{\epsilon_{12}}^{(1)}$	1,478	0,541	$V_{\epsilon_{11}}^{(1)}$	1,921	0,756
$\langle \epsilon_{11} \rangle_2 \cdot 10^3$	1,392	1,416	$\langle \epsilon_{12} \rangle_2 \cdot 10^3$	1,405	1,428	$\langle \epsilon_{11} \rangle_2 \cdot 10^3$	1,401	1,424
$V_{\epsilon_{11}}^{(2)}$	0,639	0,536	$V_{\epsilon_{12}}^{(2)}$	0,319	0,293	$V_{\epsilon_{11}}^{(2)}$	0,456	0,395
$\langle \sigma_{11} \rangle_1$	0,047	0,078	$\langle \sigma_{12} \rangle_1$	0,023	0,039	$\langle \sigma_{11} \rangle_1$	0,031	0,052
$V_{\sigma_{11}}^{(1)}$	1,665	0,648	$V_{\sigma_{12}}^{(1)}$	1,469	0,540	$V_{\sigma_{11}}^{(1)}$	1,787	0,696
$\langle \sigma_{11} \rangle_2$	0,016	0,016	$\langle \sigma_{12} \rangle_2$	0,007	0,007	$\langle \sigma_{11} \rangle_2$	0,010	0,010
$V_{\sigma_{11}}^{(2)}$	0,378	0,329	$V_{\sigma_{12}}^{(2)}$	0,313	0,290	$V_{\sigma_{11}}^{(2)}$	0,420	0,364

В работе [260] такое же решение приведено для однонаправленно армированных композитов с изотропными и трансверсально-изотропными волокнами.

В развитие предлагаемого подхода исследована модель двухфаз-

ного поликристалла [268], когда одной из фаз материала являлись поры, а другой — хаотически ориентированные трансверсально-изотропные кристаллиты углерода. Такая постановка задачи связана с прогнозированием механических свойств пироуглеродных матриц углерод-углеродных композитов [269].

Ниже рассмотрен частный случай полученного в § 3.3 решения, представляющий интерес для практических приложений.

3.4. Статистические характеристики полей напряжений в матрице пористого материала

Построение адекватных моделей прогнозирования прочностных свойств пористых сред сдерживается отсутствием решений ряда прикладных задач микромеханики композитов. К числу таких задач относится и задача о концентрации микронапряжений в матрице среды с учетом реальной структуры при произвольно заданном на макроуровне сложном напряженном или деформированном состоянии. Несомненный научный и практический интерес представляют оценки случайных полей деформирования, позволяющие рассчитать средние и бинарные корреляционные тензоры микронапряжений и микродеформаций в матрице пористых сред.

Стохастическая краевая задача в перемещениях для области V , ограниченной гладкой поверхностью S и заполненной пористой средой, в случае заданного тензором e_{ij} макроскопически однородного деформированного состояния имеет вид

$$C_{ijkl}^{(m)} \{ [1 - \kappa(\mathbf{r})] u_{k,l}(\mathbf{r}) \}_{,j} = 0, \quad u_i(\mathbf{r})|_S = e_{ij} r_j, \quad (3.64)$$

где $C_{ijkl}^{(m)}$ — компоненты тензора модулей упругости матрицы, u — вектор структурных перемещений, $\kappa(\mathbf{r})$ — случайная индикаторная функция, описывающая распределение пор в матрице. Функция $\kappa(\mathbf{r})$ введена условием

$$\kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{r} \in V - V_m, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \in V_m. \end{cases}$$

Тогда величина

$$c_p = \langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle = \frac{V - V_m}{V} = \text{const}$$

будет характеризовать относительную пористость материала. Из общего решения стохастической краевой задачи теории упругости композитов (§ 3.2) можно построить корреляционное приближение задачи (3.64) и для полей деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ получить решение в виде

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = e_{ij} + \frac{1}{2} [E_{imn,j}(\mathbf{r}) + E_{jmn,i}(\mathbf{r})] e_{mn}, \quad (3.65)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = [1 - \kappa(\mathbf{r})] \left[C_{ijkl}^{(m)}(\mathbf{r}) + C_{ijpq}^{(m)}(\mathbf{r}) E_{pkl,q}(\mathbf{r}) \right] e_{kl}, \quad (3.66)$$

где $E_{ijm,k}(\mathbf{r})$ — статистически однородное поле, производное от функции $\kappa(\mathbf{r})$ и зависящее от упругих свойств матрицы и относительной пористости.

Расчет безусловных моментов второго порядка структурных полей деформирования — бинарных корреляционных тензоров микродеформаций и микронапряжений, а также статистических характеристик полей деформаций и напряжений в матрице пористого материала связан с необходимыми предположениями относительно геометрии пор и характера их расположения в матрице.

Пусть поры представляют собой одинаковые сферы, однородно и изотропно расположенные в матрице. Анализ результатов численного моделирования хаотических структур приводит к аппроксимирующим выражениям (3.3), (3.6), (3.7) для моментных функций второго и третьего порядков индикатора $\kappa(\mathbf{r})$, причем $D_{\kappa}^{(2)} = c_p(1 - c_p)$, $D_{\kappa}^{(3)} = c_p(1 - c_p)(1 - 2c_p)$.

Тогда безусловные корреляционные тензоры деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} могут быть вычислены по ранее полученному в § 3.2, 3.3 решению для дисперсно-упрочненных двухкомпонентных композитов с учетом явного вида структурных моментных функций. Так, безусловные дисперсии деформаций вычисляются согласно формуле

$$\begin{aligned} D_{ijmn}^{\varepsilon} &\equiv \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle = \langle \Phi_{ij\alpha\beta} \Phi_{mnpq} \rangle e_{\alpha\beta} e_{pq}, \\ \Phi_{ijmn} &= \frac{1}{2} (E_{imn,j} + E_{jmn,i}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

а для безусловных дисперсий напряжений имеем

$$\begin{aligned} D_{ij\alpha\beta}^{\sigma} &\equiv \langle \sigma'_{ij} \sigma'_{\alpha\beta} \rangle = C_{ijmn}^{(m)} C_{\alpha\beta pq}^{(m)} \left[c_p(1 - c_p) I_{mnmkl} I_{pqst} + \right. \\ &+ \langle \kappa'^2 \Phi_{mnmkl} \rangle I_{pqst} + \langle \kappa'^2 \Phi_{pqst} \rangle I_{mnmkl} - (1 - c_p) \langle \kappa' \Phi_{mnmkl} \rangle I_{pqst} - \\ &- (1 - c_p) \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle I_{mnmkl} - \langle \kappa' \Phi_{mnmkl} \rangle \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle + \\ &\left. + \langle (1 - c_p - \kappa')^2 \Phi_{mnmkl} \Phi_{pqst} \rangle \right] e_{kl} e_{st}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор четвертого ранга.

Из выражения (3.68) видно, что для вычисления бинарного корреляционного тензора напряжений даже в корреляционном приближении стохастической задачи (3.64) в перемещениях необходимы моментные функции не только второго, но также и третьего и четвертого порядков случайного поля упругих свойств. Однако с учетом приведенных ранее соотношений между моментными функциями $K_{\kappa}^{(2)}$ и $K_{\kappa}^{(3)}$ индикатора $\kappa(\mathbf{r})$ и моментными функциями высших порядков и формулы

(3.65), а также линейности операторов статистического осреднения и дифференцирования, можно записать

$$\langle \kappa'^2 \Phi_{mnkl} \rangle = (1 - 2c_p) \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle,$$

$$\langle \kappa'^2 \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle = c_p(1 - c_p) \langle \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle + (1 - 2c_p) \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle.$$

Тогда из (3.68) следует

$$\begin{aligned} D_{ij\alpha\beta}^\sigma &= C_{ijmn}^{(m)} C_{\alpha\beta pq}^{(m)} [c_p(1 - c_p) I_{mnkl} I_{pqst} - \\ &- c_p \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle I_{pqst} - c_p \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle I_{mnkl} - \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle + \\ &+ (1 - c_p) \langle \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle - \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle] e_{kl} e_{st}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

Перейдем теперь к анализу полей деформирования в матрице пористой среды, т.е. к вычислению условных моментов случайных деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$.

Для тензора средних деформаций в матрице $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_m$ имеем общую формулу

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_m = e_{ij} - \frac{1}{1 - c_p} \langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle, \quad (3.70)$$

а, принимая во внимание (3.65), получим

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_m = e_{ij} - \frac{1}{1 - c_p} \langle \kappa' \Phi_{ijmn} \rangle e_{mn}. \quad (3.71)$$

Для тензора средних напряжений в матрице $\langle \sigma_{ij} \rangle_m$, определяемого из решения краевой задачи в перемещениях (т.е. когда заданы макродеформации e_{ij}) имеем общую формулу

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_m = \langle \sigma_{ij} \rangle - \frac{1}{1 - c_p} \langle \kappa' \sigma'_{ij} \rangle, \quad (3.72)$$

а, принимая во внимание

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left[(1 - c_p) C_{ijkl}^{(m)} - C_{ijmn}^{(m)} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle \right] e_{kl},$$

$$\langle \kappa' \sigma'_{ij} \rangle = \left[-c_p(1 - c_p) C_{ijkl}^{(m)} + c_p C_{ijmn}^{(m)} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle \right] e_{kl},$$

получим

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_m = \left[C_{ijkl}^{(m)} - \frac{1}{1 - c_p} C_{ijmn}^{(m)} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle \right] e_{kl}. \quad (3.73)$$

Очевидно, что к этому же результату приводит и соотношение

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_m = C_{ijkl}^{(m)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_m$$

с использованием (3.71).

В случае, если заданы не макродеформации $\varepsilon_{ij}^* = e_{ij}$, а макронапряжения $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$, для средних напряжений в матрице существует точное тривиальное решение

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_m = \frac{1}{1 - c_p} s_{ij}. \quad (3.74)$$

Для тензоров дисперсий деформаций \mathbf{T}^ε и напряжений \mathbf{T}^σ в матрице, т.е. условных корреляционных тензоров полей деформирования $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, имеют место общие формулы

$$\begin{aligned} T_{ijmn}^\varepsilon \equiv \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle_m &= \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle + e_{ij} e_{mn} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_m \langle \varepsilon_{mn} \rangle_m - \\ &- \frac{1}{1 - c_p} (\langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle + \langle \kappa' \varepsilon'_{ij} \rangle e_{mn} + \langle \kappa' \varepsilon'_{mn} \rangle e_{ij}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} T_{ijkl}^\sigma \equiv \langle \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \rangle_m &= \langle \sigma'_{ij} \rangle_m \langle \sigma'_{kl} \rangle_m + \langle \sigma_{ij} \rangle_m \langle \sigma_{kl} \rangle_m - \langle \sigma_{ij} \rangle_m \langle \sigma_{kl} \rangle_m - \\ &- \frac{1}{1 - c_p} (\langle \kappa' \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \rangle + \langle \kappa' \sigma'_{ij} \rangle \langle \sigma_{kl} \rangle + \langle \kappa' \sigma'_{kl} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle). \end{aligned} \quad (3.76)$$

После необходимых преобразований получим

$$\begin{aligned} T_{ijmn}^\varepsilon \equiv & \left[\langle \Phi_{ij\alpha\beta} \Phi_{mnpq} \rangle - \frac{1}{1 - c_p} \langle \kappa' \Phi_{ij\alpha\beta} \Phi_{mnpq} \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(1 - c_p)^2} \langle \kappa' \Phi_{ij\alpha\beta} \rangle \langle \kappa' \Phi_{mnpq} \rangle \right] e_{\alpha\beta} e_{pq}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} T_{ija\beta}^\sigma &= C_{ijmn}^{(m)} C_{\alpha\beta pq}^{(m)} \left[c_p (1 - c_p) \langle \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle - \frac{1}{1 - c_p} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle - \right. \\ & - \frac{1}{(1 - c_p)^2} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle - \frac{2c_p - 3c_p^2}{1 - c_p} \langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle I_{pqst} - \\ & \left. - \frac{2c_p - 3c_p^2}{1 - c_p} \langle \kappa' \Phi_{pqst} \rangle I_{mnkl} \right] e_{kl} e_{st}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

В расчетные формулы для безусловных дисперсий деформаций и напряжений (3.67), (3.69), средних деформаций и напряжений в матрице (3.71), (3.72), дисперсий деформаций и напряжений в матрице (3.77), (3.78) входят моменты второго $\langle \kappa' \Phi_{mnkl} \rangle$, $\langle \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle$ и третьего $\langle \kappa' \Phi_{mnkl} \Phi_{pqst} \rangle$ порядков.

Эти моменты найдены вычислением несобственных интегралов последовательным интегрированием по модулям векторов и углам после соответствующих разложений функций $K_\kappa^{(2)}$ и $K_\kappa^{(3)}$, а также их производных (§ 3.2, 3.3). Полученные решения реализованы в программах численных расчетов для произвольно заданного тензором e_{ij} макроскопического деформированного состояния.

Ниже приведены результаты для статистических характеристик полей деформирования пористых сред при некоторых частных случаях заданного макроскопического напряженно-деформированного состояния материала. Упругие свойства матрицы заданы величинами: $E_m = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_m = 0,3$.

Пусть гидростатическое сжатие пористого материала задано давлением s , при этом $\sigma_{ij}^* = -s\delta_{ij}$. Тогда макроскопические деформации e_{ij} заданы соотношениями

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = e_{ij} = -\frac{s}{3K^*} \delta_{ij} = -e\delta_{ij},$$

где K^* — эффективный модуль объемного сжатия. Поля микронапряжений и микродеформаций являются изотропными. В монографии [296] для этого частного случая нагружения в предположении о виде структурной корреляционной функции

$$K_\kappa^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = D_\kappa^{(2)} \exp\left(-\frac{1}{a}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\right)$$

получены простые формулы для безусловных дисперсий тензоров напряжений и деформаций двухкомпонентных гранулированных композитов:

$$D_{ijkl}^\varepsilon = \frac{9D_\kappa e^2}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} \frac{1}{15} \delta_{ijkl}, \quad D_\kappa = \frac{E_m^2}{9(1 - \nu_m)^2} c_p(1 - c_p), \quad (3.79)$$

где $\delta_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$,

$$D_{ijkl}^\sigma = 2e^2 \left[\frac{36}{5} \frac{D_\kappa \langle \mu^2 \rangle}{\langle \lambda + 2\mu \rangle^2} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{2}{15} \frac{D_\kappa \langle \mu \rangle^2}{\langle \lambda + 2\mu \rangle^2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right]. \quad (3.80)$$

Безусловные дисперсии компонент тензора деформаций

$$D_{\varepsilon_{11}} \equiv \langle \varepsilon'_{11} \varepsilon'_{11} \rangle = D_{\varepsilon_{22}} = D_{\varepsilon_{33}},$$

$$D_{\varepsilon_{12}} \equiv \langle \varepsilon'_{12} \varepsilon'_{12} \rangle = D_{\varepsilon_{13}} = D_{\varepsilon_{23}}$$

как частный случай формул (3.79), (3.80) для пористых сред вычисляются так:

$$D_{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{5} \left(\frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m} \right)^2 \frac{c_p}{1 - c_p} e^2,$$

$$D_{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{15} \left(\frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m} \right)^2 \frac{c_p}{1 - c_p} e^2,$$

а для дисперсий напряжений справедливы формулы

$$D_{\sigma_{11}} = \frac{8}{15} \left(\frac{E_m}{1 - \nu_m} \right)^2 c_p(1 - c_p) e^2,$$

$$D_{\sigma_{12}} = \frac{1}{15} \left(\frac{E_m}{1 - \nu_m} \right)^2 c_p (1 - c_p) e^2.$$

Эти же величины можно представить через безразмерные коэффициенты H и Q

$$D_{\epsilon_{11}} = H_{\epsilon_{11}} e^2, \quad D_{\epsilon_{12}} = H_{\epsilon_{12}} e^2, \quad D_{\sigma_{11}} = Q_{\sigma_{11}} s^2, \quad D_{\sigma_{12}} = Q_{\sigma_{12}} s^2, \quad (3.81)$$

значения которых приведены в табл. 3.2 по результатам трех различных вариантов расчета: верхнее значение — расчет с использованием гипотезы о предельной локальности [62], среднее значение — расчет по формулам монографии [352], нижнее значение — расчет по формулам данной работы с учетом реального вида моментных функций упругих свойств. Видно, что первый вариант приводит к нулевым значениям безусловных дисперсий сдвиговых деформаций и касательных напряжений, что противоречит физическому смыслу.

Т а б л и ц а 3.2

**Характеристики полей деформирования
в пористом материале при гидростатическом сжатии
(сравнение результатов, $\sigma_{ij}^* = -\delta_{ij}$, МПа)**

Пористость c_p	Безразмерные коэффициенты (3.81)			
	$H_{\epsilon_{11}}$	$H_{\epsilon_{12}}$	$Q_{\sigma_{11}}$	$Q_{\sigma_{12}}$
0,10	$4,2581 \cdot 10^{-2}$	0	0,1100	0
	$7,6544 \cdot 10^{-2}$	$2,5548 \cdot 10^{-2}$	0,02209	0,00276
	$2,5797 \cdot 10^{-1}$	$1,3761 \cdot 10^{-1}$	0,1402	0,01285
0,15	$6,7629 \cdot 10^{-2}$	0	0,1723	0
	$1,2173 \cdot 10^{-1}$	$4,0576 \cdot 10^{-2}$	0,03781	0,00472
	$4,0970 \cdot 10^{-1}$	$2,1854 \cdot 10^{-1}$	0,2315	0,02379
0,20	$9,5802 \cdot 10^{-2}$	0	0,2388	0
	$1,7245 \cdot 10^{-1}$	$5,7483 \cdot 10^{-2}$	0,05822	0,007278
	$5,8041 \cdot 10^{-1}$	$3,0960 \cdot 10^{-1}$	0,3439	0,03308
0,25	$1,2775 \cdot 10^{-1}$	0	0,3082	0
	$2,2993 \cdot 10^{-1}$	$7,6644 \cdot 10^{-2}$	0,08521	0,01065
	$7,7390 \cdot 10^{-1}$	$4,1282 \cdot 10^{-1}$	0,4867	0,06375

В таблицах 3.3 — 3.6 приведены впервые рассчитанные на основе решения стохастической краевой задачи микромеханики характеристики напряжений в матрице пористого материала: дисперсии компо-

Т а б л и ц а 3.3

**Характеристики напряжений
в матрице пористого материала
при гидростатическом сжатии ($\sigma_{ij}^* = -\delta_{ij}$, МПа)**

Статистические характеристики	Пористость c_p	Напряжения	
		$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$	$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23}$
Средние напряжения в матрице $\langle \sigma \rangle_m$, МПа	0,05	-1,053	
	0,10	-1,111	
	0,15	-1,175	0
	0,20	-1,245	
	0,25	-1,321	
Дисперсии напряжений в матрице $D_\sigma^{(m)}$, МПа ²	0,05	$1,613 \cdot 10^{-2}$	$5,550 \cdot 10^{-3}$
	0,10	$3,347 \cdot 10^{-2}$	$1,428 \cdot 10^{-2}$
	0,15	$6,940 \cdot 10^{-2}$	$2,798 \cdot 10^{-2}$
	0,20	$1,307 \cdot 10^{-1}$	$4,976 \cdot 10^{-2}$
	0,25	$2,368 \cdot 10^{-1}$	$8,500 \cdot 10^{-2}$
Среднеквадра- тические откло- нения напряже- ний в матрице $S_\sigma^{(m)} = \sqrt{D_\sigma^{(m)}}$, МПа	0,05	-0,127	0,0745
	0,10	-0,183	0,119
	0,15	-0,263	0,167
	0,20	-0,362	0,223
	0,25	-0,487	0,292
Коэффициенты вариации напря- жений в матрице $k_\sigma^{(m)} = S_\sigma^{(m)} / \langle \sigma \rangle_m$	0,05	0,121	
	0,10	0,165	
	0,15	0,224	Не существуют
	0,20	0,290	
	0,25	0,368	

нент тензора напряжений, среднеквадратические отклонения и коэффициенты вариации. Особый интерес представляют характеристики тех компонент, средние значения которых равны нулю.

Очевидно, что решение рассматриваемой стохастической задачи при малом содержании пор ($c_p = 0,05$) может быть проверено сравнением с известными результатами задачи о сферической полости в бесконечно протяженном теле [282]. Так, для оценки максимальных значений случайных напряжений в предположении о нормальном законе распределения напряжений в компонентах композитов может быть использована формула

Т а б л и ц а 3.4

**Характеристики напряжений
в матрице пористого материала
при чистом сдвиге ($\sigma_{12}^* = 1$ МПа)**

Статистические характеристики	Пористость c_p	Напряжения			
		$\sigma_{11} = \sigma_{22}$	σ_{33}	σ_{12}	$\sigma_{13} = \sigma_{23}$
Средние напряжения в матрице $\langle \sigma \rangle_m$, МПа	0,05	0	0	1,053	0
	0,10			1,111	0
	0,15			1,177	
	0,20			1,251	
	0,25			1,336	
Дисперсии напряжений в матрице $D_\sigma^{(m)}$, МПа ²	0,05	$1,322 \cdot 10^{-2}$	$6,013 \cdot 10^{-4}$	$5,611 \cdot 10^{-3}$	$2,057 \cdot 10^{-3}$
	0,10	$3,361 \cdot 10^{-2}$	$1,529 \cdot 10^{-3}$	$1,532 \cdot 10^{-2}$	$5,230 \cdot 10^{-3}$
	0,15	$6,547 \cdot 10^{-2}$	$2,979 \cdot 10^{-3}$	$3,204 \cdot 10^{-2}$	$1,019 \cdot 10^{-2}$
	0,20	$1,162 \cdot 10^{-1}$	$5,288 \cdot 10^{-3}$	$6,109 \cdot 10^{-2}$	$1,809 \cdot 10^{-2}$
	0,25	$1,994 \cdot 10^{-1}$	$9,072 \cdot 10^{-3}$	$1,126 \cdot 10^{-1}$	$3,103 \cdot 10^{-2}$
Среднеквадратические отклонения напряжений в матрице $S_\sigma^{(m)} = \sqrt{D_\sigma^{(m)}}$, МПа	0,05	0,115	0,0245	0,0749	0,0454
	0,10	0,183	0,0391	0,124	0,0723
	0,15	0,256	0,0546	0,179	0,101
	0,20	0,341	0,0727	0,247	0,134
	0,25	0,447	0,0952	0,336	0,176
Коэффициенты вариации напряжений в матрице $k_\sigma^{(m)} = S_\sigma^{(m)} / \langle \sigma \rangle_m$	0,05	Не существует	Не существует	0,0711	Не существует
	0,10	вуют	вуют	0,111	вуют
	0,15			0,152	
	0,20			0,196	
	0,25			0,251	

$$\sigma_{ij}^{\max} \approx \langle \sigma_{ij} \rangle_m + 3S_{\sigma_{ij}}, \quad S_{\sigma_{ij}} = \sqrt{\langle \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \rangle_m}.$$

При всестороннем растяжении (сжатии) расчетное значение коэффициента концентрации нормальных напряжений в матрице пористого материала (см. табл. 3.3) составляет 1,42, в то время как точное значение этого коэффициента в задаче о сферической полости равно 1,5. В этом случае можно утверждать о количественном совпадении результатов. При одноосном растяжении (например, вдоль оси x_1)

Т а б л и ц а 3.5

**Характеристики напряжений
в матрице пористого материала
при одноосном растяжении ($\sigma_{11}^* = 1$ МПа)**

Статистические характеристики	Пористость c_p	Напряжения			
		σ_{11}	$\sigma_{22} = \sigma_{33}$	$\sigma_{12} = \sigma_{13}$	σ_{23}
Средние напряжения в матрице $\langle \sigma \rangle_m$, МПа	0,05	1,053	0	0	0
	0,10	1,111			
	0,15	1,176			
	0,20	1,249			
	0,25	1,331			
Дисперсии напряжений в матрице $D_\sigma^{(m)}$, МПа ²	0,05	$1,607 \cdot 10^{-2}$	$3,948 \cdot 10^{-4}$	$1,589 \cdot 10^{-3}$	$4,686 \cdot 10^{-5}$
	0,10	$4,226 \cdot 10^{-2}$	$1,010 \cdot 10^{-3}$	$4,065 \cdot 10^{-3}$	$1,161 \cdot 10^{-4}$
	0,15	$8,517 \cdot 10^{-2}$	$1,985 \cdot 10^{-3}$	$7,951 \cdot 10^{-3}$	$2,221 \cdot 10^{-4}$
	0,20	$1,564 \cdot 10^{-1}$	$3,571 \cdot 10^{-3}$	$1,412 \cdot 10^{-2}$	$3,934 \cdot 10^{-4}$
	0,25	$2,775 \cdot 10^{-1}$	$6,223 \cdot 10^{-3}$	$2,417 \cdot 10^{-2}$	$6,823 \cdot 10^{-4}$
Среднеквадратические отклонения напряжений в матрице $S_\sigma^{(m)} = \sqrt{D_\sigma^{(m)}}$, МПа	0,05	0,127	0,0199	0,0399	0,00685
	0,10	0,206	0,0318	0,0638	0,0108
	0,15	0,292	0,0446	0,0892	0,149
	0,20	0,395	0,0598	0,119	0,0198
	0,25	0,527	0,0789	0,156	0,261
Кoeffициенты вариации напряжений в матрице $k_\sigma^{(m)} = S_\sigma^{(m)} / \langle \sigma \rangle_m$	0,05	0,120	Не существуют	Не существуют	Не существуют
	0,10	0,185			
	0,15	0,248			
	0,20	0,317			
	0,25	0,396			

расчетное значение коэффициента концентрации для напряжений σ_{11} (см. табл. 3.5) составляет 1,41, при точном решении 2,045, а для напряжений $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ расчетное значение 0,06, при точном — 0,1485.

При чистом сдвиге расчетное значение коэффициента концентрации касательных напряжений (см. табл. 3.4) равно 1,27, а точное 1,91. В этих случаях наблюдается лишь качественное совпадение, которое для результатов, полученных в рамках вероятностного и детерминированного подходов, можно считать удовлетворительным.

Т а б л и ц а 3.6

Характеристики напряжений в матрице пористого материала при сложном напряженном состоянии ($\sigma_{11}^* = -\sigma_{22}^* = 1$ МПа)

Статистические характеристики	Пористость c_p	Напряжения			
		$\sigma_{11} = -\sigma_{22}$	σ_{33}	σ_{12}	$\sigma_{13} = \sigma_{23}$
Средние напряжения в матрице $\langle \sigma \rangle_m$, МПа	0,05	1,053	0	0	0
	0,10	1,111			
	0,15	1,177			
	0,20	1,251			
	0,25	1,336			
Дисперсии напряжений в матрице $D_\sigma^{(m)}$, МПа ²	0,05	$1,883 \cdot 10^{-2}$	$6,013 \cdot 10^{-4}$	0	$2,057 \cdot 10^{-3}$
	0,10	$4,893 \cdot 10^{-2}$	$1,529 \cdot 10^{-3}$		$5,230 \cdot 10^{-3}$
	0,15	$9,751 \cdot 10^{-2}$	$2,979 \cdot 10^{-3}$		$1,019 \cdot 10^{-2}$
	0,20	$1,773 \cdot 10^{-1}$	$5,288 \cdot 10^{-3}$		$1,809 \cdot 10^{-2}$
	0,25	$3,120 \cdot 10^{-1}$	$9,072 \cdot 10^{-3}$		$3,103 \cdot 10^{-2}$
Среднеквадратические отклонения напряжений в матрице $S_\sigma^{(m)} = \sqrt{D_\sigma^{(m)}}$, МПа	0,05	0,137	0,0245	0	0,0454
	0,10	0,221	0,0391		0,0723
	0,15	0,312	0,0546		0,101
	0,20	0,421	0,0727		0,134
	0,25	0,559	0,0952		0,176
Коэффициенты вариации напряжений в матрице $k_\sigma^{(m)} = S_\sigma^{(m)} / \langle \sigma \rangle_m$	0,05	0,130	Не существуют	Не существуют	Не существуют
	0,10	0,199			
	0,15	0,265			
	0,20	0,337			
	0,25	0,418			

Вычисленные с учетом реального вида моментных функций дисперсии напряжений, в пользу достоверности значений которых свидетельствуют и соответствующие физической картине коэффициенты вариации, позволяют построить новые критерии прочности пористых материалов, адекватно отражающие процессы деформирования и разрушения структурно неоднородных сред [187].

Глава 4

Метод периодических составляющих

Среди особенностей современных методов решения стохастических задач механики композитов как недостаток отмечалось отсутствие связи этих методов с известными, хорошо разработанными методами для детерминированных (в том числе периодических) неоднородных сред [29, 277]. В то же время для широкого класса структурных стохастических моделей композитов детерминированная периодическая структура может рассматриваться как реализация случайной структуры. Это справедливо, когда для случайной однородной индикаторной функции $\kappa(\mathbf{r})$ корреляционная функция имеет область отрицательных значений.

В методе периодических составляющих используется разложение случайных полей на детерминированные, соответствующие периодической структуре, и случайные составляющие. Применительно к стохастической краевой задаче теории упругости композитов со случайной структурой (см. гл. 3) данное разложение позволяет учесть некоторые факторы (например, относительное объемное содержание, связанность и геометрическую форму компонентов), общие для случайной и периодической структур, в решении краевой задачи для периодической среды, а случайность взаимного расположения включений — в решении стохастической краевой задачи.

Без уменьшения общности предлагаемого метода периодических составляющих его реализация дана для композитов с квазипериодической структурой, когда геометрия случайной структуры синтезируется путем внесения разупорядоченности в исходную периодическую структуру. Это упрощает процедуру вычисления параметров случайной структуры и составляет основу анализа влияния степени разупорядоченности случайной структуры на эффективные свойства и поля деформирования композитов.

4.1. Геометрические параметры композитов с квазипериодической структурой

Рассмотрим простейшие двухфазные квазипериодические модели, когда форма и размер включений детерминированы, а их случайные положения могут быть заданы вероятностным законом только для вектора \mathbf{a} случайных отклонений центров от узлов периодической ре-

шетки. Будем считать, что включения не могут выйти за границы ячеек, и реализацию структуры композита можно представить совокупностью независимых реализаций соответствующей ячейки квазипериодичности. Упругие свойства включений и матрицы детерминированы и известны: C_{ijmn}^f и C_{ijmn}^m — компоненты тензоров упругих свойств фаз (величины, относящиеся к включениям, обозначим индексом f , а к матрице — индексом m).

Представим случайное поле упругих свойств композита в виде

$$C_{ijmn}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}^f \kappa(\mathbf{r}) + C_{ijmn}^m [1 - \kappa(\mathbf{r})] \quad (4.1)$$

через индикаторную функцию $\kappa(\mathbf{r})$, для которой очевидно, что

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} \kappa(\mathbf{r}) = \kappa^p(\mathbf{r})$$

есть периодическая функция, $\langle \kappa \rangle = \langle \kappa^p \rangle = c_f$ — относительное объемное содержание включений в композите (величины, относящиеся к периодической среде, обозначим индексом p). Установлена зависимость

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa^p(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad (4.2)$$

между индикаторными функциями κ и κ^p для каждой ячейки квазипериодической структуры.

Совокупность центральных многоточечных моментных функций $\langle \kappa'(\mathbf{r})\kappa'(\mathbf{r}_1) \rangle$, $\langle \kappa'(\mathbf{r})\kappa'(\mathbf{r}_1)\kappa'(\mathbf{r}_2) \rangle$, ... полностью характеризует геометрию случайной структуры композита [62, 247, 296]. Было предположено, что ориентация вектора \mathbf{a} не имеет преобладающих направлений в плоскости и его модуль $|\mathbf{a}|$ равномерно распределен на отрезке $[0, \Delta_{\max}]$. Параметр ячейки Δ_{\max} — радиус предельной окружности, выход за которую центра включения считаем невозможным, так как это приводит к пересечению включением границы ячейки.

Параметр Δ_{\max} рассчитан для плоских структур с ячейкой периодичности типа "круг в квадрате" по формуле $\Delta_{\max} = T/2 - r_f$, где $T = r_f \sqrt{\pi/c_f}$ — период неразупорядоченной структуры. Установлено качественное и количественное соответствие вида корреляционных функций для реальных волокнистых матричных однонаправленных композитов [62] и для исследуемой квазипериодической модели, например, их локальность и существование области отрицательных значений.

Рассмотрим формулировку и доказательство свойства смешанных центральных моментов случайных индикаторных функций $\kappa(\mathbf{r})$ и $\kappa^p(\mathbf{r})$.

Свойство. Отношение смешанного центрального момента $\langle \kappa'(\kappa^p)^{n-1} \rangle$ к центральному моменту $\langle \kappa'^n \rangle$ есть величина, не зависящая от порядка n .

Доказательство. Центральный момент $\langle \kappa'^n \rangle$ может быть, вычислен по формуле

$$\langle \kappa'^n \rangle = c_f(1 - c_f) [(1 - c_f)^{n-1} - (-c_f)^{n-1}], \quad (4.3)$$

а для смешанного центрального момента справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle \kappa' (\kappa'^p)^{n-1} \rangle &= (-c_f)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left\langle \kappa \left(\frac{\kappa^p}{c_f} \right)^k \right\rangle + \\ &+ (-c_f)^k \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left\langle \left(\frac{\kappa^p}{c_f} \right)^k \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функция $\kappa^p(\mathbf{r})$, как предел функции $\kappa(\mathbf{r})$, является случайной при неопределенном для фиксированной точки положении начала системы координат, связанной с периодической структурой, и для обеих функций выполняются условия однородности и эргодичности. Из аналогии с равенством вида $\langle \kappa^k \rangle = c_f = \text{const}(k)$ очевидно, что $\langle \kappa (\kappa^p)^k \rangle = = V_{11} = \text{const}(k)$, так как произведение $\kappa (\kappa^p)^k$ имеет реализации $\{1, 0\}$ соответственно с вероятностями V_{11} и $1 - V_{11}$.

Величина V_{11} характеризует упорядоченность квазипериодической структуры. Ее геометрический смысл заключается в том, что если квазипериодическую структуру мысленно наложить на периодическую с совмещением узлов периодической решетки, то относительное объемное содержание пересечений включений в области V и есть V_{11} . В общем случае $c_f^2 \leq V_{11} \leq c_f$. Используем характеристику упорядоченности V_{11} в преобразовании формулы (4.4) к виду

$$\begin{aligned} \langle \kappa' (\kappa'^p)^{n-1} \rangle &= (-c_f)^{(n-1)} \left[V_{11} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \frac{1}{c_f^k} + c_f - V_{11} \right] + \\ &+ (-c_f)^n \left[c_f \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \frac{1}{c_f^k} + 1 - c_f \right] \end{aligned}$$

и, так как $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k / c_f^k = (1 - 1/c_f)^{n-1}$, смешанный центральный момент можно вычислить по формуле

$$\langle \kappa' (\kappa'^p)^{n-1} \rangle = (V_{11} - c_f^2) [(1 - c_f)^{n-1} - (-c_f)^{n-1}]. \quad (4.5)$$

Центральные моменты $\langle \kappa'^n \rangle$ и $\langle \kappa' (\kappa'^p)^{n-1} \rangle$ определены соответственно в формулах (4.3) и (4.5), следовательно

$$\frac{\langle \kappa' (\kappa'^p)^{n-1} \rangle}{\langle \kappa'^n \rangle} = p, \quad p = \frac{V_{11} - c_f^2}{c_f(1 - c_f)} = \text{const}(n). \quad (4.6)$$

Доказательство закончено.

Коэффициент периодичности $p \in [1, 0]$ при фиксированном значении объемного относительного содержания включений c_f есть функция от характеристики упорядоченности структуры V_{11} , в предельных случаях имеем: $p = 1$, когда $V_{11} = c_f$, например, если $|a| = 0$ и $p = 0$, когда $V_{11} = c_f^2$, например для структуры типа "статистическая смесь", у которой полностью отсутствует корреляция между реализациями физико-механических свойств в различных точках среды [247, 296].

Задача вычисления коэффициента периодичности p сведена к расчету характеристики упорядоченности V_{11} в формуле (4.6). Рассмотрим вычисление V_{11} и p для различных структур.

Для однонаправленного волокнистого композита вектор отклонений \mathbf{a} волокон лежит в плоскости $r_1 r_2$, следовательно, для такого композита достаточно рассмотреть плоскую модель ячейки типа "круг в квадрате". В общем, случае считаем, что $|a| \in [0, \Delta]$, где $\Delta = k\Delta_{\max}$, $k \in [0, 1]$ — степень разупорядоченности волокон. Вычисление V_{11} свелось к задаче осреднения площади кругового сегмента, являющейся функцией случайного параметра a . Таким образом, для расчета коэффициента периодичности может быть получена формула

$$p = 1 - \frac{1}{\pi(1 - c_f)} \left[2 \left(1 - \frac{1}{4t^2} \right) \arcsin(t) + \left(t^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} - 1 \right)} \right], \quad (4.7)$$

где

$$t = \begin{cases} 1, & \text{если } k\Delta_{\max} > 2r_f, \\ \frac{k\Delta_{\max}}{2r_f}, & \text{если } k\Delta_{\max} < 2r_f. \end{cases}$$

В частном случае, когда $c_f \in [\pi/36, \pi/4]$, имеем равенство вида $t = k\Delta_{\max}/2r_f$ для всех $k \in [0, 1]$. Наряду с коэффициентом p будем использовать коэффициент хаотичности $h = 1 - p$. Численный расчет показал, что при фиксированном значении c_f увеличение степени разупорядоченности k приводит к уменьшению как V_{11} , так и p . При максимально возможном содержании волокон $c_f = \pi/4$ разупорядоченность волокон из-за уплотнения укладки становится невозможной и значение коэффициента хаотичности h равно 0, соответственно $p = 1$.

Для композита с ориентированными пластинчатыми включениями вектор отклонений \mathbf{a} направлен вдоль оси r_3 перпендикулярно плоскости включений. Будем считать, что его координата a_3 распределена по равномерному закону на отрезке $[-\Delta, \Delta]$, где $\Delta = k\Delta_{\max}$, $\Delta_{\max} = (H - b)/2$ (H и b — соответственно высота ячейки и толщина пластинчатого включения), $c_f = b/H$ есть величина объемного относительного содержания таких включений в композите. Вычисление характеристики V_{11} свелось к задаче осреднения площади прямоугольника, являющейся функцией случайного параметра a_3 . Формула

расчета коэффициента периодичности p будет иметь вид

$$p = \begin{cases} \frac{c_f}{1 - c_f} \left(\frac{1}{k(1 - c_f)} - 1 \right), & \text{если } c_f \in \left[0, \frac{k}{2 + k} \right], \\ 1 - \frac{k}{4c_f}, & \text{если } c_f \in \left[\frac{k}{2 + k}, 1 \right]. \end{cases} \quad (4.8)$$

В частном случае, когда $c_f \in [1/3, 1]$, $p = 1 - k/(4c_f)$ для всех $k \in [0, 1]$. Степень разупорядоченности k более сильно влияет на коэффициенты p и h для композита с ориентированными пластинчатыми включениями, чем для волокнистого однонаправленного композита, особенно, когда $c_f \in [0, 0,5]$.

4.2. Корреляционное, сингулярное и обобщенное сингулярное приближения метода периодических составляющих

Для композитов с квазипериодической структурой стохастическая краевая задача теории упругости в перемещениях имеет вид

$$[C_{ijmn}(\mathbf{r})u_{m,n}(\mathbf{r})]_{,j} = 0, \quad u_i|_S = e_{ij}r_j, \quad (4.9)$$

где коэффициенты $C_{ijmn}(\mathbf{r})$ дифференциального оператора — периодические быстроосциллирующие функции. Дифференциальные уравнения соответствующей осредненной краевой задачи

$$C_{ijmn}^* u_{m,jn}^*(\mathbf{r}) = 0$$

включают в себя тензор эффективных упругих свойств квазипериодической среды. Тензор C^* может быть вычислен по найденному решению $u(\mathbf{r})$ стохастической краевой задачи (4.9).

Известные методы решения [62, 172, 296] стохастической краевой задачи (4.9) основаны на разложении коэффициентов $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ и искомого поля перемещений $u_i(\mathbf{r})$ на осредненные и пульсационные составляющие. При этом, нулевым приближением для поля является осредненное решение $\langle u_i(\mathbf{r}) \rangle$. В работе [62] и других было показано, что корреляционные функции упругих свойств матричных композитов имеют область отрицательных значений. Существование области отрицательных значений установлено и для корреляционных функций квазипериодических композитов. Наличие области отрицательных значений есть признак присутствия периодических составляющих в соответствующих случайных полях [32]. Поэтому ниже на примере решения задачи (4.9) рассмотрим метод периодических составляющих, основанный на выделении из коэффициентов $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ и искомого

поля перемещений $u_i(\mathbf{r})$ соответственно периодических коэффициентов $C_{ijkl}^p(\mathbf{r})$ и решения $u_i^p(\mathbf{r})$ краевой задачи для композита с периодической структурой

$$[C_{ijmn}^p(\mathbf{r})u_{m,n}^p(\mathbf{r})]_{,j} = 0, \quad u_i^p(\mathbf{r})|_S = e_{ij}r_j. \quad (4.10)$$

Решение краевой задачи (4.10) известно [204, 18]:

$$\begin{aligned} u_i^p(\mathbf{r}) &= e_{ij}r_j + F_{imn}^p(\mathbf{r})e_{mn}, \\ \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) &= e_{ij} + \frac{1}{2} [F_{imn,j}^p(\mathbf{r}) + F_{jmn,i}^p(\mathbf{r})] e_{mn}, \\ \sigma_{ij}^p(\mathbf{r}) &= C_{ijkl}^p(\mathbf{r}) [e_{kl} + F_{ikl,j}^p(\mathbf{r})e_{kl}], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $F_{ijk}^p(\mathbf{r})$ есть "локальная" функция, определяемая из решения задачи на ячейке периодичности. Тензор эффективных упругих свойств C^{*p} композита с периодической структурой может быть вычислен по формуле

$$C_{ijmn}^{*p} = \langle C_{ijmn}^p \rangle + \langle C_{ijkl}^p F_{kmn,l}^p \rangle.$$

Таким образом, принятые разложения вида

$$C_{ijmn}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}^p(\mathbf{r}) + C_{ijmn}^0(\mathbf{r}), \quad u_i(\mathbf{r}) = u_i^p(\mathbf{r}) + u_i^0(\mathbf{r})$$

позволили от краевой задачи (4.5) с неоднородными граничными условиями для поля перемещений $u_i(\mathbf{r})$ перейти к решению краевой задачи

$$[C_{ijmn}(\mathbf{r})u_{m,n}^0(\mathbf{r})]_{,j} = - [C_{ijmn}^0(\mathbf{r})u_{m,n}^p(\mathbf{r})]_{,j}, \quad u_i^0|_S = 0 \quad (4.12)$$

с однородными граничными условиями для искомого поля отклонений $u_i^0(\mathbf{r})$.

Применим для решения задачи (4.12) метод функций Грина, используя функцию $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, удовлетворяющую уравнению

$$\langle C_{ijmn} \rangle G_{mk,jn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

и вместе со своими производными обращаясь на бесконечности в нуль; $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ — обобщенная дельта-функция. В дифференциальном уравнении (4.12) тензор $C_{ijmn}(\mathbf{r})$ представим суммой осредненной $\langle C_{ijmn} \rangle$ и пульсационной $C'_{ijmn}(\mathbf{r})$ составляющих. Краевая задача для отклонений $u_i^0(\mathbf{r})$ примет вид

$$\langle C_{ijmn} \rangle u_{m,jn}^0(\mathbf{r}) = -f_i(\mathbf{r}), \quad u_i^0(\mathbf{r})|_S = 0, \quad (4.13)$$

где

$$f_i(\mathbf{r}) = [C_{ijmn}^0(\mathbf{r})u_{m,n}^p(\mathbf{r}) + C'_{ijmn}(\mathbf{r})u_{m,n}^p(\mathbf{r})]_{,j}.$$

Преобразуем задачу (4.13) к интегро-дифференциальному уравнению

$$u_i^0(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) f_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (4.14)$$

решение которого рассмотрим в корреляционном, сингулярном и обобщенном сингулярном приближениях.

Корреляционное приближение. Корреляционным или первым приближением решения уравнения (4.14) по аналогии с работами [62, 130, 296] является функция вида

$$u_i^{0(1)}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) [C_{jstmn}^0(\mathbf{r}_1) u_{m,n}^p(\mathbf{r}_1)]_s d\mathbf{r}_1. \quad (4.15)$$

Решение $u_i^{0(1)}(\mathbf{r})$ имеет линейную зависимость от компонент заданного тензора e_{ij} деформаций композита

$$u_i^{0(1)}(\mathbf{r}) = T_{imn}(\mathbf{r}) e_{mn},$$

где

$$T_{imn}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) [C_{jstpq}^0(\mathbf{r}_1) N_{pqmn}^p(\mathbf{r}_1)]_s d\mathbf{r}_1, \\ N_{ijmn}^p = I_{ijmn} + \frac{1}{2} [F_{imn,j}^p(\mathbf{r}) + F_{jmn,i}^p(\mathbf{r})]. \quad (4.16)$$

В корреляционном приближении метода периодических составляющих, когда отклонения $u_i^0(\mathbf{r})$ определены в формулах (4.15) и (4.16), поля перемещений $u_i(\mathbf{r})$, деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ и напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ могут быть вычислены по зависимостям вида:

$$u_i(\mathbf{r}) = [\delta_{im} r_n + F_{imn}^p(\mathbf{r}) + T_{imn}(\mathbf{r})] e_{mn}, \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \left[I_{ijmn} + \frac{1}{2} (F_{imn,j}^p(\mathbf{r}) + F_{jmn,i}^p(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + T_{imn,j}(\mathbf{r}) + T_{jmn,i}(\mathbf{r})) \right] e_{mn}, \quad (4.17) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}(\mathbf{r}) [I_{mnpq} + F_{mpq,n}^p(\mathbf{r}) + T_{mpq,n}(\mathbf{r})] e_{pq}.$$

Соответственно для тензора C^* эффективных упругих свойств композита имеем

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn}^{*p} + \langle C_{ijpq}^0 N_{pqmn}^p \rangle + \langle C_{ijpq}^0 T_{pqmn} \rangle. \quad (4.18)$$

Статистические характеристики полей деформирования (4.17) можно представить в виде безусловных и условных многоточечных моментных функций по общим формулам, приведенным в гл. 3.

В корреляционном приближении метода периодических составляющих удалось учесть неоднородность полей деформирования в элементах структуры композита. При расчете тензора C^* эффективных упругих свойств квазипериодического композита основные свойства структуры (такие как непрерывность матрицы и дискретность включений, их форма и ориентация, объемное содержание) учитываются тензором C^{*p} эффективных упругих свойств композита с периодической структурой, а разупорядоченность квазипериодической структуры — соответствующими поправками в формуле (4.18).

Сингулярное приближение. Сингулярное приближение основано на использовании в решении задачи (4.9) только сингулярной составляющей второй производной функции Грина $G_{im,nj}(r, r_1)$ вида $\Gamma_{ijmn}\delta(r - r_1)$. В работе [296] приведена формула

$$\frac{1}{2} (\Gamma_{ijmn} + \Gamma_{jimn}) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \Lambda_{ij}^{-1} n_{mn} \sin \Theta d\Theta d\varphi = J_{ijmn}, \quad (4.19)$$

где через Q обозначена поверхность эллипсоида $\sum_{i=1}^3 r_i^2/q_i^2 = 1$. Считаем, что $q_i = r_f + \Delta_i$, где Δ_i есть известные границы возможных значений $[-\Delta_i, \Delta_i]$ для i -й компоненты вектора отклонений a . В зависимости (4.19) введены обозначения:

$$\Lambda_{ij} = \langle C_{imnj} \rangle n_{mn}, \quad n_{ij} = n_i n_j, \quad n_1 = \frac{1}{q_1} \sin \Theta \cos \varphi, \\ n_2 = \frac{1}{q_2} \sin \Theta \sin \varphi, \quad n_3 = \frac{1}{q_3} \cos \Theta, \quad (4.20)$$

через φ и Θ обозначены полярные углы в сферической системе координат.

Решения для поля отклонений $u_i^0(r)$, для полей деформирования, связанных с $u_i^0(r)$ зависимостями (4.17), и для тензора C^* эффективных упругих свойств (4.18) можно получить методом последовательных приближений

$$u_i^0(r) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_i^{0(k)}(r),$$

где каждое последующее после (4.16) приближение вычисляется по рекуррентной зависимости

$$u_i^{0(k)}(r) = \int_V G_{ij}(r, r_1) [C_{j smn}^0(r_1) u_{m,n}^p(r_1) + \\ + C'_{j smn}(r_1) u_{m,n}^{0(k-1)}(r_1)]_s dr_1.$$

Однако возможен и другой подход [296, 235], позволяющий построить сингулярное приближение метода периодических составляющих для решения стохастической задачи (4.9).

Интегро-дифференциальное уравнение (4.14) преобразуем с использованием теоремы Гаусса-Остроградского и учетом равенства нулю функции Грина, когда $\mathbf{r} \in S$ области V , к виду

$$u_i^0(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij,s}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) [C_{j smn}^0(\mathbf{r}) u_{m,n}^p(\mathbf{r}_1) + C'_{j smn}(\mathbf{r}_1) u_{m,n}^0(\mathbf{r}_1)] d\mathbf{r}_1$$

и после дифференцирования получим уравнение для градиентов $u_{i,j}^0(\mathbf{r})$ поля отклонений $u_i^0(\mathbf{r})$

$$u_{i,j}^0(\mathbf{r}) = \int_V G_{ip,sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) [C'_{psmn}(\mathbf{r}_1) u_{m,n}^p(\mathbf{r}_1) + C'_{psmn}(\mathbf{r}_1) u_{m,n}^0(\mathbf{r}_1)] d\mathbf{r}_1.$$

В сингулярном приближении для отклонений

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [u_{i,j}^0(\mathbf{r}) + u_{j,i}^0(\mathbf{r})]$$

поля деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ можно записать уравнение вида

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) = J_{ijps} \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) [C_{psmn}^0(\mathbf{r}_1) \varepsilon_{mn}^p(\mathbf{r}_1) + C'_{psmn}(\mathbf{r}_1) \varepsilon_{mn}^0(\mathbf{r}_1)] d\mathbf{r}_1,$$

а после интегрирования получить линейное алгебраическое уравнение

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) = J_{ijps} [C_{psmn}^0(\mathbf{r}) \varepsilon_{mn}^p(\mathbf{r}) + C'_{psmn}(\mathbf{r}) \varepsilon_{mn}^0(\mathbf{r})]. \quad (4.21)$$

Поля деформирования в формулах (4.17) и статистические характеристики этих полей могут быть вычислены через найденное из уравнения (4.21) поле отклонений $\varepsilon_{mn}^0(\mathbf{r})$.

Рассмотрим вычисление тензора \mathbf{C}^* эффективных упругих свойств квазипериодического композита в сингулярном приближении метода периодических составляющих.

Тензор \mathbf{C}^* связан с полем отклонений $\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})$ зависимостью (4.18). Для его вычисления достаточно знать лишь осредненные (соответственно по включениям $\langle \dots \rangle_f$ и матрице $\langle \dots \rangle_m$) значения деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_f = X_{ijmn}^f e_{mn}, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_m = X_{ijmn}^m e_{mn}$$

или их разность вида $\tilde{X}_{ijmn} e_{mn}$ (где $\tilde{X}_{ijmn} = X_{ijmn}^f - X_{ijmn}^m$), так как тензор \mathbf{C}^* связан с $\tilde{\mathbf{X}}$ зависимостью

$$C_{ijmn}^* = \langle C_{ijmn} \rangle + c_f(1 - c_f) \tilde{C}_{ijpq} \tilde{X}_{pqmn}, \quad (4.22)$$

где $\tilde{C}_{ijmn} = C_{ijpq}^f - C_{ijpq}^m$. Аналогично для композита с периодической структурой имеем

$$C_{ijmn}^{*p} = \langle C_{ijmn} \rangle + c_f(1 - c_f)\tilde{C}_{ijpq}\tilde{X}_{pqmn}^p. \quad (4.23)$$

Тогда, ограничиваясь вычислением только осредненных по элементам структуры полей деформаций, отклонения $\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})$ можно представить через пульсации индикаторных функций в виде

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) = \left[\tilde{X}_{ijmn}\kappa'(\mathbf{r}) - \tilde{X}_{ijmn}^p\kappa'^p(\mathbf{r}) \right] e_{mn}. \quad (4.24)$$

Поле отклонений $C_{ijmn}^0(\mathbf{r})$ тоже выразим через пульсации индикаторных функций:

$$C_{ijmn}^0(\mathbf{r}) = \tilde{C}_{ijmn} [\kappa'(\mathbf{r}) - \kappa'^p(\mathbf{r})]. \quad (4.25)$$

Осредним теперь уравнение (4.21) с использованием формул (4.24), (4.25), предварительно умножив его левую и правую части на тензор пульсаций с компонентами $C_{ijmn}'(\mathbf{r}) = \tilde{C}_{ijmn}\kappa'(\mathbf{r})$. В результате получим осредненное уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijrs}\tilde{X}_{rsmn}\langle\kappa'^2\rangle e_{mn} &= \tilde{C}_{ijrs}\tilde{X}_{rsmn}\langle\kappa'\kappa'^p\rangle e_{mn} + \\ &+ \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klmn} [\langle\kappa'^2\rangle - \langle\kappa'\kappa'^p\rangle] e_{mn} + \\ &+ \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klpt} \left[\tilde{X}_{ptmn}\langle\kappa'^3\rangle - \tilde{X}_{ptmn}^p \langle\kappa'(\kappa'^p)^2\rangle \right] e_{mn}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

которое должно выполняться для любого симметричного тензора макродеформаций композита.

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijrs}\tilde{X}_{rsmn}\langle\kappa'^2\rangle &= \tilde{C}_{ijrs}\tilde{X}_{rsmn}^p\langle\kappa'\kappa'^p\rangle + \\ &+ \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klmn} [\langle\kappa'^2\rangle - \langle\kappa'\kappa'^p\rangle] + \\ &+ \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klpt} \left[\tilde{X}_{ptmn}\langle\kappa'^3\rangle - \tilde{X}_{ptmn}^p \langle\kappa'(\kappa'^p)^2\rangle \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

а с учетом формул (4.22), (4.23) получаем уравнение

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^* - \langle C_{ijmn} \rangle &= (C_{ijmn}^{*p} - \langle C_{ijmn} \rangle) \frac{\langle\kappa'\kappa'^p\rangle}{c_f(1 - c_f)} + \\ &+ \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klmn} \left[1 - \frac{\langle\kappa'\kappa'^p\rangle}{c_f(1 - c_f)} \right] c_f(1 - c_f) + \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl} \times \\ &\times \left[(1 - 2c_f)(C_{klmn}^* - \langle C_{klmn} \rangle) - \frac{\langle\kappa'(\kappa'^p)^2\rangle}{c_f(1 - c_f)} (C_{klmn}^{*p} - \langle C_{klmn} \rangle) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Искомый тензор C^* является решением уравнения (4.28), в котором центральные смешанные моменты индикаторных функций могут быть вычислены как частные случаи доказанной зависимости (4.6) по формулам:

$$\frac{\langle \kappa' \kappa'^p \rangle}{c_f(1-c_f)} = p, \quad \frac{\langle \kappa' (\kappa'^p)^2 \rangle}{c_f(1-c_f)} = p(1-2c_f).$$

Следовательно, тензор C^* есть решение уравнения

$$C_{ijmn}^* - \langle C_{ijmn} \rangle = p(C_{ijmn}^{*p} - \langle C_{ijmn} \rangle) + (1-p)c_f(1-c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klmn} + \\ + (1-2c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}[C_{klmn}^* - \langle C_{klmn} \rangle - p(C_{klmn}^{*p} - \langle C_{klmn} \rangle)], \quad (4.29)$$

в которое как параметр вошел коэффициент периодичности структуры p .

Анализ полученного уравнения (4.29) построим на основе введенного тензора Ω вида

$$\Omega_{ijmn} = C_{ijmn}^* - \langle C_{ijmn} \rangle - p(C_{ijmn}^{*p} - \langle C_{ijmn} \rangle), \quad (4.30)$$

который однозначно связан с искомым тензором C^* эффективных свойств композита. Задача, таким образом, сведена к решению уравнения

$$\Omega_{ijmn} = (1-p)c_f(1-c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\tilde{C}_{klmn} + (1-2c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}\Omega_{klmn}. \quad (4.31)$$

Тензор Ω , как решение уравнения (4.31), можно представить в виде

$$\Omega_{ijmn} = (1-p)(C_{ijmn}^{*0} - \langle C_{ijmn} \rangle), \quad (4.32)$$

через C_{ijmn}^{*0} обозначен тензор эффективных упругих свойств среды типа "статистическая смесь", вычисленный с использованием сингулярного приближения в работах [62, 172, 296]:

$$C_{ijmn}^{*0} = \langle C_{ijmn} \rangle + c_f(1-c_f)L_{ijrs}^{-1}\tilde{C}_{rspt}J_{ptkl}\tilde{C}_{klmn},$$

где $L_{ijmn} = I_{ijmn} - (1-2c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rsmt}$, тензор J определен зависимостью (4.19).

Из полученных соотношений (4.30) и (4.32) следует, что тензор C^* эффективных упругих свойств квазипериодического композита в сингулярном приближении метода периодических составляющих может быть вычислен по формуле

$$C_{ijmn}^* = pC_{ijmn}^{*p} + (1-p)A_{ijmn}^{rhhkz}C_{rhhks}^c, \quad (4.33)$$

в которой A_{ijmn}^{rhhkz} есть компоненты тензора анизотропии разупорядоченности включений, введенный в решение (4.33) равенством $C_{ijmn}^{*0} =$

$= A_{ijmn}^{rhks} C_{rhks}^{*c}$, в котором тензор C^{*c} эффективных свойств относится к среде типа "статистическая смесь", когда в формулах (4.19), (4.20) параметры $\Delta_i = \text{const}(i)$.

Если тензор C^* необходимо найти для композита с изотропной разупорядоченностью включений, то компоненты тензора анизотропии — $A_{ijmn}^{rhks} = I_{ijrh} I_{mks}$, и формула (4.33) преобразуется к виду

$$C_{ijmn}^* = p C_{ijmn}^{*p} + (1-p) C_{ijmn}^{*c} \quad (4.34)$$

или

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn}^{*p} + R_{ijmn},$$

где $R_{ijmn} = h(C_{ijmn}^{*c} - C_{ijmn}^{*p})$ — поправка к тензору C^{*p} эффективных упругих свойств композита с периодической структурой, вносимая разупорядоченностью включений.

В корреляционном приближении, когда у второй производной тензора Грина учитывается лишь сингулярная составляющая, решение для тензора C^* нельзя представить в виде (4.33), (4.34).

Обобщенное сингулярное приближение. В обобщенном сингулярном приближении в отличие от рассмотренного решение стохастической краевой задачи (4.9) может быть получено на основе функции Грина $G_{ij}^{(E)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ для однородной среды сравнения, тензор упругих свойств которой обозначим через E . Сингулярное приближение по отношению к обобщенному сингулярному приближению является частным случаем, когда $E_{ijmn} = \langle C_{ijmn} \rangle$. Функция Грина среды сравнения удовлетворяет уравнению

$$E_{ijmn} G_{mk,jn}^{(E)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

и вместе со своими производными обращается в ноль на бесконечности.

Краевая задача с однородными граничными условиями для отклонений $u_i^0(\mathbf{r})$ аналогична задаче (4.13) и имеет вид

$$E_{ijmn} u_{m,n}^0(\mathbf{r}) = -f_i^{(E)}(\mathbf{r}), \quad u_i^0(\mathbf{r})|_S = 0,$$

где

$$f_i^{(E)}(\mathbf{r}) = [C_{ijmn}^0(\mathbf{r}) u_{m,n}^p(\mathbf{r}) + C_{ijmn}^v(\mathbf{r}) u_{m,n}^0(\mathbf{r})]_{,j},$$

нецентрированные отклонения обозначены через компоненты тензора $C_{ijmn}^v(\mathbf{r}) = C_{ijmn}(\mathbf{r}) - E_{ijmn}$. Задачу (4.13) преобразуем к интегродифференциальному уравнению

$$u_i^0(\mathbf{r}) = \int_V G_{ij}^{(E)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) f_j^{(E)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (4.35)$$

Схема решения интегродифференциального уравнения (4.35) аналогична рассмотренной в сингулярном приближении. В результате

поле отклонений $\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})$ в обобщенном сингулярном приближении можно найти из решения линейного алгебраического уравнения

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) = J_{ijps}^{(E)} [C_{psmn}^0(\mathbf{r})\varepsilon_{mn}^p(\mathbf{r}) + C_{psmn}^v(\mathbf{r})\varepsilon_{mn}^0(\mathbf{r})], \quad (4.36)$$

в котором тензор $\mathbf{J}^{(E)}$ отличается от \mathbf{J} в формуле (4.19) видом тензора Λ , так как в зависимости (4.20) для Λ_{ij} компоненты $\langle C_{ijmn} \rangle$ надо заменить на E_{ijmn} .

Поля деформирования и их статистические характеристики могут быть вычислены по формулам (4.17) и решению $\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})$ уравнения (4.36).

Формула для вычисления компонент C_{ijmn}^* тензора эффективных упругих свойств композитов с квазипериодической структурой в обобщенном сингулярном приближении по виду совпадает с решением (4.33), а в частном случае — с решением (4.34). Тензор C_{ijmn}^{*0} отличается от аналогичного в зависимости (4.32) видом входящего в нее тензора \mathbf{L} . Здесь

$$L_{ijmn} = I_{ijmn} - (1 - 2c_f)\tilde{C}_{ijrs}J_{rsmn}^{(E)} - \tilde{C}_{ijrs}J_{rskl}^{(E)}\tilde{E}_{klpt}\tilde{C}_{ptmn}^{-1},$$

где использовано обозначение вида $\tilde{E}_{ijmn} = \langle C_{ijmn} \rangle - E_{ijmn}$.

Вид тензора \mathbf{C}^{*c} в обобщенном сингулярном приближении известен, например, для изотропных и трансверсально-изотропных композитов [62, 172, 296]. Так для изотропного композита со стохастическим дисперсным армированием в работе [296] дано решение

$$C_{ijmn}^{*c} = \left(K^{*c} - \frac{2}{3}\mu^{*c} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{*c}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}), \quad (4.37)$$

где объемный модуль K^{*c} и модуль сдвига μ^{*c} композита определены формулами:

$$K^{*c} = \langle K \rangle - \frac{c_f(1 - c_f)\tilde{K}^2}{c_f K_m + (1 - c_f)K_f + b_K},$$

$$\mu^{*c} = \langle \mu \rangle - \frac{c_f(1 - c_f)\tilde{\mu}^2}{c_f \mu_m + (1 - c_f)\mu_f + b_\mu},$$

где $b_K = \frac{4}{3}\mu^E$, $b_\mu = \mu^E \frac{9K^E + 8\mu^E}{6(K^E + 2\mu^E)}$, константы K^E и μ^E — соответственно объемный модуль и модуль сдвига изотропного тензора E_{ijmn} среды сравнения. Решение для тензора \mathbf{C}^{*c} в сингулярном приближении будем иметь, когда $K^E = \langle K \rangle$, $\mu^E = \langle \mu \rangle$.

Пять независимых компонент трансверсально-изотропного тензора \mathbf{C}^{*c} волокнистого композита со стохастическим однонаправленным вдоль оси r_3 армированием будут вычисляться по формулам [296]:

$$C_{1111}^{*c} = k^{*c} + m^{*c}, \quad C_{1122}^{*c} = k^{*c} - m^{*c}, \quad C_{1133}^{*c} = t^{*c},$$

$$C_{3333}^{*c} = n^{*c}, \quad C_{1313}^{*c} = p^{*c}, \quad C_{1212}^{*c} = m^{*c}$$

с учетом введенных обозначений:

$$k^{*c} = \langle k \rangle - \frac{c_f(1-c_f)\tilde{k}^2}{k_m c_f + k_f(1-c_f) + \mu^E},$$

$$m^{*c} = \langle \mu \rangle - \frac{c_f(1-c_f)\tilde{\mu}^2}{\mu_m c_f + \mu_f(1-c_f) + \mu^E \frac{3k^E + \mu^E}{3k^E + 7\mu^E}},$$

$$p^{*c} = \langle \mu \rangle - \frac{c_f(1-c_f)\tilde{\mu}^2}{\mu_m c_f + \mu_f(1-c_f) + \mu^E},$$

$$t^{*c} = 2k^{*c}\nu_{13}^{*c}, \quad n^{*c} = E_3^{*c} + 4k^{*c}(\nu_{13}^{*c})^2,$$

$$E_3^{*c} = \langle E \rangle + \frac{4c_f(1-c_f)\tilde{\nu}^2}{\frac{c_f}{k_f} + \frac{1-c_f}{k_m} + \frac{1}{\mu^E}}, \quad \nu_{13}^{*c} = \langle \nu \rangle + \frac{c_f(1-c_f)\tilde{\nu} \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m} \right)}{\frac{c_f}{k_m} + \frac{1-c_f}{k_f} + \frac{1}{\mu^E}},$$

где ν_f и ν_m — коэффициенты Пуассона; k_f и k_m — объемные модули упругости при плоской деформации соответственно включений и матрицы, для упругих изотропных сред $k = \lambda + \mu$, где λ и μ — константы Ламе. Решение для тензора C^{*c} в сингулярном приближении будем иметь, когда $k^E = \langle k \rangle$, $\mu^E = \langle \mu \rangle$.

Таким образом, в формулу обобщенного сингулярного приближения для компонент тензора эффективных упругих свойств

$$C_{ijmn}^* = pC_{ijmn}^{*p} + (1-p)A_{ijmn}^{rhhk} C_{rhhk}^{*c}$$

как параметр вошел тензор упругих свойств E среды сравнения. Например, для композита с квазипериодической структурой можно считать, что тензор упругих свойств среды сравнения совпадает с тензором C^{*p} эффективных упругих свойств композита с периодической структурой.

Самосогласованное решение по методу периодических составляющих получим из обобщенного сингулярного приближения, принимая $E_{ijmn} = C_{ijmn}^*$, т.е. приравнивая упругие свойства среды сравнения к искомым эффективным свойствам композита. В этом случае вместо формул (4.33), (4.34) имеем системы нелинейных алгебраических уравнений относительно независимых компонент тензора C^* , решение которых требует применения численных методов.

4.3. Прогнозирование эффективных упругих свойств анизотропных композитов с квазипериодической структурой

На основе решений (4.33), (4.34) можно вычислить тензор C^* эффективных упругих свойств любого анизотропного композита с двухфазной квазипериодической структурой и дать оценку влияния степени разупорядоченности элементов структуры на численные значения каждой компоненты C_{ijmn}^* . Рассмотрим расчет компонент C_{ijmn}^* для двух анизотропных композитов: с разупорядоченными в плоскости $r_1 r_2$ однонаправленными вдоль оси r_3 волокнами и с разупорядоченными вдоль оси r_3 ориентированными пластинчатыми включениями. Для первого композита, когда разупорядоченность становится бесконечно малой, структура вырождается в периодическую с тетрагональной симметрией, для второго — пластинчатые включения объединяются в систему с трансверсально-изотропной симметрией периодических тонких слоев.

Однонаправленный волокнистый композит. Расчетные значения эффективных технических постоянных композитов с квазипериодической структурой приведены в табл. 4.1. Для композитов с содержанием волокон $c_f = 0, 4, 0,55$ и $0,70$ даны значения эффективных упругих постоянных волокнистого композита с периодической структурой (когда параметр структуры k равен нулю) [11, 16] и относительные отклонения от этих значений для композитов с различной степенью разупорядоченности структуры ($k = 0,7$ и $k = 1$), вычисленные с использованием формул (4.34) и (4.38) в сингулярном приближении метода периодических составляющих.

На рис. 4.1 приведены графики для относительных отклонений значений компонент тензора эффективных модулей композитов с квазипериодической структурой от соответствующих значений для композитов с периодической структурой во всем диапазоне изменения объемной концентрации волокон c_f . В расчетах для табл. 4.1 и рис. 4.1 принималось $\mu_f/\mu_m = 20$, $\nu_m = 0,39$, $\nu_f = 0,20$.

Анализ полученных результатов показывает, что разупорядоченность структуры оказывает заметное влияние лишь на значения продольного и, в меньшей степени, поперечного модулей сдвига однонаправленного волокнистого композита в области средних значений объемной концентрации во-

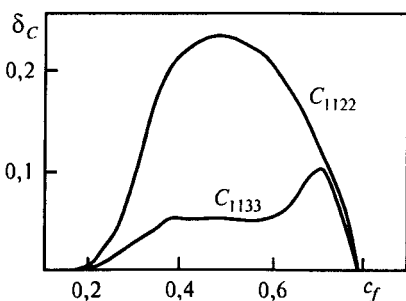


Рис. 4.1. Относительные отклонения δ_C компонент тензора C^* от компонент тензора C^{*P}

локон ($c_j \approx 0,40$). В области малых значений параметра c_j имеем $C_{ijmn}^{*p} \approx C_{ijmn}^{*0}$, а в области высоких значений ограничена возможность разупорядоченности структуры, поэтому эффективные свойства композитов с квазипериодической и периодической структурами практически совпадают.

Т а б л и ц а 4.1

**Эффективные упругие свойства
однонаправленных волокнистых композитов
с квазипериодической структурой**

Характеристики структуры			Модули Юнга E^*/E_m		Модули сдвига μ^*/μ_m		Коэффициенты Пуассона	
c_j	k	Δ	E_3^*	$E_1^* = E_2^*$	μ_{13}^*	μ_{12}^*	ν_{12}^*	ν_{13}^*
0,40	0	1	7,52	2,59	2,15	1,74	0,44	0,31
	0,7	0,80	0,2%	6,8%	21,4%	19,8%	-2,9%	3,8%
	1	0,72	0,2%	9,7%	30,5%	28,2%	-4,1%	5,3%
0,55	0	1	10,0	3,9	3,1	2,3	0,4	0,3
	0,7	0,87	0,1%	4,8%	17,2%	18,9%	-1%	3,1%
	1	0,82	0,1%	6,9%	24,5%	27,0%	-1,4%	4,3%
0,70	0	1	12,4	6,5	5,2	3,6	0,3	0,2
	0,7	0,94	0%	1,6%	6,1%	8,4%	0,6%	1,4%
	1	0,92	0,1%	2,2%	8,8%	11,9%	0,8%	2,0%

Сравнение результатов расчетов эффективных свойств по методу периодических составляющих с данными работы [8], когда стохастические задачи для волокнистых композитов с квазипериодической структурой решались в реализациях с использованием метода локального приближения, свидетельствует о качественном и количественном их совпадении.

Композит с ориентированными пластинчатыми включениями. Рассмотрим прогнозирование эффективных упругих свойств композита с ориентированными пластинчатыми включениями. Считаем, что пластинчатые включения имеют такую форму, что компоненты тензора C^{*c} могут быть рассчитаны по формуле (4.37), когда тензор упругих свойств среды сравнения такой, что $E_{ijmn} = \langle C_{ijmn} \rangle$. Компоненты тензора C^{*p} композита с слоистой периодической структурой могут быть рассчитаны по формулам из работы [204], коэффициент периодичности p для рассматриваемой квазипериодической структуры — по формуле (4.8).

Рассмотрим случай, когда пластинчатые включения есть ориентированные дисковые трещины или поры, слияние которых в макротрещины проявляется в увеличении упорядоченности структуры и соответственно в увеличении коэффициента p . Пусть заданы характеристики такой структуры: относительное объемное содержание пор $c_1 = c_f$, степень разупорядоченности $k = 0,7$ и 1 , модуль Юнга E_m и коэффициент Пуассона ν_m матрицы (или неповрежденного материала) соответственно 15 ГПа и $0,25$. Из расчетов следует, что при фиксированном значении концентрации c_1 с увеличением степени разупорядоченности k убывают численные значения компонент, не содержащих индекс "3": C_{1111}^* , C_{1122}^* , C_{1212}^* и другие, а остальные ненулевые компоненты тензора C^* возрастают.

Степень анизотропии упругих свойств композита с ориентированными пластинчатыми порами может существенно изменяться от степени разупорядоченности k . Так численный расчет показал, что если $c_1 = 0,4$, то с ростом степени разупорядоченности k от 0 до 1 отношение модуля E_3^* к E_1^* изменяется от 0 до $0,5$.

Численный расчет эффективных модулей Юнга E_3^* и сдвига μ_{13}^* сравним с известными решениями. В работе [168] получены формулы расчета этих модулей для материала с ориентированными дисковыми трещинами в различных приближениях:

а) по модели Фойгта

$$\frac{E_3^{*F}}{E_m} = 1 - \frac{16}{3} \frac{(1 - \nu_m)^2}{1 - 2\nu_m} c_1, \quad \frac{\mu_{13}^{*F}}{\mu_m} = 1 - \frac{16}{3} \frac{1 - \nu_m}{2 - \nu_m} c_1, \quad (4.39)$$

б) по модели Ройсса

$$\frac{E_3^{*R}}{E_m} = \left[1 + \frac{16}{3} (1 - \nu_m^2) c_1 \right]^{-1}, \quad \frac{\mu_{13}^{*R}}{\mu_m} = \left[1 + \frac{16}{3} \frac{1 - \nu_m}{2 - \nu_m} c_1 \right]^{-1}. \quad (4.40)$$

Плоскости трещин параллельны плоскости $r_1 r_2$, отношение величины раскрытия трещины к диаметру порядка $\pi/2$. Формулы (4.39) и (4.40) были получены на основе решения задачи об одиночной трещине в упругой изотропной среде, модули Юнга и сдвига которой E_c и μ_c приравнены соответственно к E_m и μ_m .

Решения (4.39) и (4.40) слабо учитывают взаимодействие трещин при высоких степенях заполнения c_f и несколько лучше, если положить, что $E_c = E_m(1 - c_1)$, $\mu_c = \mu_m(1 - c_1)$ (модель Ройсса):

$$\frac{E_3^{*R}}{E_m} = \left[1 + \frac{16}{3} (1 - \nu_m^2) \frac{c_1}{1 - c_1} \right]^{-1}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\mu_{13}^{*R}}{\mu_m} = \left[1 + \frac{16}{3} \frac{1 - \nu_m}{2 - \nu_m} \frac{c_1}{1 - c_1} \right]^{-1}.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 4.2. Численные значения модуля Юнга E_3^* материала с ориентированными дисковыми порами,

вычисленные в сингулярном приближении метода периодических составляющих по формуле (4.34), практически для всех концентраций $c_1 \in [0, 1]$ близки к решению (4.41), а когда $c_1 \in [0, 0,3]$, то и к решению (4.40) модели Ройсса.

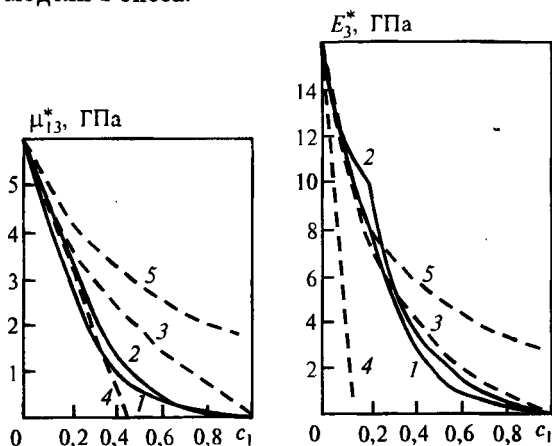


Рис. 4.2. Эффективные упругие свойства материала с ориентированными дисковыми порами: 1 — расчет по формуле (4.34) при $k = 0,7$; 2 — (4.34) при $k = 1$; 3 — (4.41); 4 — (4.39); 5 — (4.40)

Полученное при этом решение для модуля сдвига μ_{13}^* практически совпадает с решением (4.39) модели Фойгта, когда $c_1 \in [0, 0,3]$.

Метод локального приближения

При исследовании механического поведения композиционных материалов хорошим приближением являются модели сред с периодической структурой. Предполагается, что в элементарном макрообъеме таких сред поля деформирования являются периодическими, т.е. для расчета структурных напряжений и деформаций и вычисления эффективных свойств можно рассматривать периодические задачи, принимая во внимание, что осредненные по ячейкам периодичности напряжения должны быть равны заданным макроскопическим. В настоящее время разработаны эффективные методы решения периодических задач [29, 71, 204], используемые в механике композитов.

В данной главе рассмотрен метод, основанный на принципе локальности и использующий эффект ближнего порядка во взаимодействии неоднородностей. Это обстоятельство является важным, так как позволяет использовать метод локального приближения для изучения сред как с периодической, так и со случайной структурой. Результаты численного решения тестовых задач подтвердили достоверность метода локального приближения [247].

Хотя изложение метода дано для двухкомпонентных композитов матричного типа с изотропными элементами структуры, его можно обобщить и для сред с более сложными структурными свойствами.

5.1. Упругая задача для композитов с периодической структурой

Рассмотрим периодическую задачу теории упругости для неоднородных сред матричного типа. Пусть \mathbf{a} — вектор трансляции, смещением на который ячейки периодичности можно синтезировать структуру среды. Систему уравнений запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= \lambda(\mathbf{r})\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}[u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (5.1)$$

причем постоянные Ламе $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ в физических уравнениях являются кусочно-однородными периодическими функциями. Условия пе-

риодичности для искомым полей деформирования

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{a}), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \quad (5.2)$$

и заданные макронапряжения $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$, т.е.

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = s_{ij}, \quad (5.3)$$

позволяют выделить единственное решение системы (5.1). Определив напряжения и деформации во всех точках объема V ячейки периодичности, соответствующие заданным макронапряжениям, можно вычислить и макроскопические модули упругости среды.

Включения при деформировании сред матричного типа взаимодействуют друг с другом посредством упругих полей матрицы (за исключением не рассматриваемого здесь предельного случая, когда включения касаются друг друга). Если включения в матрице расположены далеко друг от друга, то упругое поле матрицы вокруг произвольно выделенного включения, как и упругое поле самого включения, определяется только особенностями совместного деформирования этого включения и матрицы и не зависит от наличия или отсутствия других включений. Тогда механика деформирования среды с малой концентрацией включений может быть построена на основе решения задачи об изолированном включении. Согласно такому решению искажения, вызываемые в упругом поле матрицы инородным включением, затухают на расстоянии порядка трех-четырех характерных размеров включения [302].

Таким образом, если структура среды такова, что включения не взаимодействуют друг с другом, то за пределами области затухания поля напряжений и деформаций в матрице являются однородными. Легко показать, что структурные напряжения в этой области равны заданным макроскопическим, т.е. $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = s_{ij}$. Это следует из эквивалентности объемного и поверхностного осреднения и условия однородного распределения напряжений на поверхности ячейки периодичности V .

Для расчета напряжений и деформаций во включениях и областях неоднородного напряженно-деформированного состояния матрицы достаточно решить систему уравнений (5.1) для области V с граничными условиями

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r})|_{S_V} = s_{ij}, \quad (5.4)$$

где S_V — поверхность типового элемента V . Замена условий (5.2), (5.3) граничными условиями (5.4) дает возможность использовать для решения краевой задачи (5.1), (5.4) такой универсальный метод, каким является метод конечных элементов.

С помощью аналитических методов бывает удобнее решать задачу о деформировании неограниченного пространства, в центре которого

находится единственное включение. Система уравнений (5.1) тогда дополняется условиями на бесконечности

$$\sigma_{ij}^{\infty}(\mathbf{r}) = s_{ij}. \quad (5.5)$$

В некоторых случаях для включений канонической формы получено точное решение задачи (5.1), (5.5) [130, 302].

Вычисление макроскопических модулей осуществляется в два этапа. В начале по формуле

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.6)$$

находят макроскопические деформации $\epsilon_{ij}^* = e_{ij}$, соответствующие макронапряжениям $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$, а затем путем обращения макроскопических физических уравнений

$$s_{ij} = C_{ijmn}^* e_{mn} \quad (5.7)$$

определяют эффективные характеристики.

При произвольной объемной концентрации элементов структуры требуется учитывать взаимодействие включений друг с другом посредством упругих полей, вызываемых в матрице. Задача о распределении структурных переменных деформирования с учетом многочастичного взаимодействия связана с проблемой о взаимодействии многих тел. Структурные переменные на поверхности S_V ячейки периодичности V распределены неоднородно и заранее неизвестны.

Пусть геометрический центр произвольной ячейки периодичности совпадает с началом координат. Окружим выделенный типовой элемент (ячейку периодичности) несколькими слоями аналогичных типовых элементов в соответствии со структурой рассматриваемой среды и поместим полученный ансамбль ω_{Σ} в область Ω (схема с одним слоем для сред с гексагональной и тетрагональной структурой изображена на рис. 5.1).

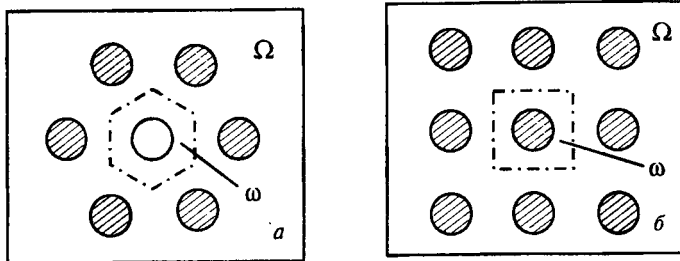


Рис. 5.1. К построению расчетной схемы для сред с гексагональной (а) и тетрагональной (б) структурой

Область $\Omega_1 = \Omega - \omega_\Sigma$ заполнена однородным материалом со свойствами матрицы.

Предположим, что мы знаем распределение напряжений на поверхности S_V типового элемента V регулярной структурно-неоднородной среды, соответствующих данной структуре и свойствам элементов структуры, а также заданным макронапряжениям $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$. Если "вырезать" центральный элемент ω области Ω и по свободному контуру приложить известные напряжения (т.е. считать ω генератором напряженно-деформированного состояния области Ω), то на достаточном удалении от ансамбля ω_Σ в области Ω возникнет однородное напряженно-деформированное состояние, т.е. $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}_{ij} = \text{const}$. Но тогда можно рассмотреть и альтернативную задачу о генерировании упругого поля в центральном элементе ω области Ω с помощью сложного, но однородного напряженного состояния, заданного на бесконечности области Ω .

Действительно, пусть для области Ω напряжения заданы на бесконечности

$$\sigma_{ij}^\infty(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}_{ij} = \psi_{ij}. \quad (5.8)$$

В результате взаимодействия центрального включения с матрицей и со смежными включениями в ячейке ω будут действовать неоднородно распределенные напряжения. Осредненные по ω напряжения, соответствующие заданным на бесконечности ψ_{ij} , обозначим через q_{ij} . В силу локальности взаимодействия включений можно предположить, что распределение напряжений и деформаций в центральном элементе ω области Ω совпадает с распределением структурных переменных $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ в ячейке периодичности среды при макронапряжениях $\sigma_{ij}^* = q_{ij}$. Другими словами, решение краевой задачи для области Ω с граничными условиями (5.8) в центральном элементе ω адекватно решению периодической задачи (5.1), (5.2) при условии

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = q_{ij}. \quad (5.9)$$

Перейдем теперь к вопросу о том, можно ли подобрать такие напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$, которые бы генерировали в элементе ω области Ω распределение напряжений и деформаций, одинаковое с распределением в ячейке периодичности переменных деформирования, удовлетворяющих заранее заданным макронапряжениям $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$.

При упругом деформировании элементов структуры справедлива линейная зависимость между заданными макронапряжениями s_{ij} и искомыми граничными условиями $\hat{\sigma}_{ij}$ краевой задачи для области

$$s_{ij} = A_{ijmn} \hat{\sigma}_{mn}. \quad (5.10)$$

Компоненты тензора A_{ijmn} определяются путем решения последовательности краевых задач для области Ω (в общем случае несимметричного включения таких задач шесть), когда на бесконечности задано одноосное растяжение и чистый сдвиг.

Так как компоненты тензора A_{ijmn} определяются однозначно и система уравнений (5.10) имеет единственное решение, то напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$, найденные из (5.10), будут единственным образом генерировать поля деформирования в центральном элементе ω области Ω , соответствующие заданным макронапряжениям s_{ij} .

Теперь осреднением по области ω можно найти компоненты тензора макродеформаций $\epsilon_{ij}^* = e_{ij}$, соответствующие макронапряжениям $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$, и вычислить значения компонент тензора C^* . В упругом случае эти значения не зависят от конкретного макроскопического напряженно-деформированного состояния среды. Поэтому для расчета эффективных свойств упругое поле в области ω можно генерировать произвольно заданными на бесконечности области Ω напряжениями $\hat{\sigma}_{ij} = \psi_{ij}$.

Осредненные по ω напряжения $\sigma_{ij}^* = q_{ij}$ и деформации $\epsilon_{ij}^* = g_{ij}$ однозначно определяют значения эффективных характеристик посредством равенства

$$q_{ij} = C_{ijmn}^* g_{mn}.$$

Рассмотрим вопрос о минимальном количестве окружающих центральный элемент ω области Ω слоев типовых элементов, необходимом для получения достоверного результата решения периодической задачи (5.1)—(5.3). Следуя принципу локальности, можно предположить, что достаточно ограничиться только одним окружающим слоем.

Для проверки этого предположения был проведен численный эксперимент. Одно и то же решение периодической задачи получено в центральном элементе ω области Ω с одним и двумя окружающими слоями типовых элементов. Естественно, что граничные условия краевой задачи для области Ω различны для разного числа окружающих слоев. Другими словами, значения компонент тензора A в равенстве (5.10) зависят от выбранного числа окружающих элемент ω слоев типовых элементов.

Варьирование в процессе численного эксперимента в широком диапазоне упругих свойств и относительной объемной концентрации элементов структуры позволяет сделать вывод о том, что периодическую задачу о деформировании неограниченной среды можно свести к краевой задаче для области, в центре которой находится конечное (причем достаточно малое) число типовых элементов.

При реализации краевых задач для области Ω не всегда удается воспользоваться аналитическими методами. С точки зрения удобства применения численных методов область Ω можно ограничить произ-

вольной поверхностью S_{Ω} , на которой задается однородное распределение напряжений:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r})|_{S_{\Omega}} = \hat{\sigma}_{ij},$$

где напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ определяются из (5.10). Для того чтобы исключить влияние границы S_{Ω} на упругое поле в центральном элементе ω , характерный размер области Ω должен быть в 2,5 — 3 раза больше, чем характерный размер ансамбля ω_{Σ} .

5.2. Термоупругая задача для композитов с периодической структурой

Рассмотрим периодическую задачу несвязанной термоупругости о медленном однородном изменении температуры на величину ΔT композита матричного типа. Систему уравнений такой задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= C_{ijmn}(\mathbf{r})[\varepsilon_{mn}(\mathbf{r}) - \alpha_{mn}(\mathbf{r})\Delta T], \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}[u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (5.11)$$

где α — тензор коэффициентов теплового расширения.

При изотропных элементах структуры физические уравнения системы (5.1)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})[\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}) - 3\alpha(\mathbf{r})\Delta T]\delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{r})[\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \alpha(\mathbf{r})\Delta T\delta_{ij}]$$

содержат кусочно-однородную периодическую функцию $\alpha(\mathbf{r})$, причем $\alpha_{ij}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})\delta_{ij}$.

Если макроскопическая модель неоднородной среды обладает прямой анизотропией, то для данной задачи имеем

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0, \quad (5.12)$$

т.е. в этом случае макроскопическое уравнение Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijmn}^*(\varepsilon_{mn}^* - \alpha_{mn}^*\Delta T) \quad (5.13)$$

вырождается в равенство

$$\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij}^*\Delta T. \quad (5.14)$$

Таким образом, в ячейке периодичности среды необходимо отыскать распределение напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, удовлетворяющее системе уравнений (5.11) и условиям периодичности (5.2).

После осреднения структурных деформаций по объему ячейки V расчет коэффициентов теплового расширения с использованием выражения (5.14) не представляет трудностей.

Как и в упругой задаче, выделим среды с малой концентрацией включений. В этом случае можно воспользоваться решением задачи для неограниченного пространства, содержащего изолированное включение. Так как взаимодействие включений отсутствует, то вблизи поверхности ячейки периодичности температурные структурные напряжения равны нулю. Поэтому, рассматривая включение в неограниченном пространстве, можно применять как аналитические, так и численные методы, когда исследуется термоупругое деформирование области V со свободной поверхностью.

Перейдем теперь к расчетной схеме метода локального приближения для периодической задачи термоупругости с учетом многочастичного взаимодействия включений.

Рассмотрим область Ω с ансамблем ω_{Σ} в центре, аналогичную введенной в §5.1. Будем параллельно рассматривать два варианта расчетной схемы: с ансамблем ω'_{Σ} , когда центральную область ω окружает один слой типовых элементов, и с ансамблем ω''_{Σ} , когда окружающих слоев два. Если во всех точках области Ω медленно изменить температуру на одно и то же значение ΔT , то напряжения в матрице, вызываемые ансамблем ω_{Σ} вследствие разницы коэффициентов теплового расширения структурных компонентов, затухнут за пределами некоторой окрестности ансамбля ω_{Σ} . Характерный размер этой окрестности не превышает трех характерных размеров ансамбля ω_{Σ} . Нас же интересует распределение напряжений и деформаций в центральной области ω и на ее границе S_{ω} . В силу локальности взаимодействия включений это распределение моделирует распределение структурных переменных в ячейке периодичности при изменении температуры последней на ту же самую величину ΔT .

Однако только при температурном взаимодействии на область Ω поле структурных переменных в центральном элементе ω области Ω не будет совпадать с решением периодической задачи (5.11), (5.1). Индикатором подобного несоответствия будет невыполнение условия (5.12), связанного с истинным распределением температурных структурных напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$.

В зависимости от рассматриваемого варианта будем иметь

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \psi'_{ij} \quad \text{для } \omega'_{\Sigma}, \quad \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \psi''_{ij} \quad \text{для } \omega''_{\Sigma}. \quad (5.15)$$

Таким образом, при однородном изменении температуры области Ω в элементе ω генерируются поля деформирования $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, $\epsilon_{ij}(\mathbf{r})$, аналогичные тем, которые возникли бы в ячейке периодичности при одновременном температурном воздействии (медленное однородное изменение температуры на величину ΔT) и силовом нагружении (когда действуют макронапряжения, определяемые выражением (5.15)).

Тогда для генерирования собственно термоструктурных полей на бесконечности области Ω (или на ее границе S_Ω — при численной реализации решения краевых задач) необходимо задать однородное распределение напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$, "снимающее" в центральном элементе ω упругие напряжения и деформации, которые соответствуют макро-напряжениям $\sigma_{ij}^* = \psi_{ij}$.

Согласно (5.10) компоненты тензора $\hat{\sigma}_{ij}$ в зависимости от варианта ω_Σ области Ω вычисляются по формулам

$$\hat{\sigma}'_{ij} = -A'_{ijmn} \psi'_{mn} \quad \text{для } \omega'_\Sigma, \quad \hat{\sigma}''_{ij} = -A''_{ijmn} \psi''_{mn} \quad \text{для } \omega''_\Sigma.$$

Значения компонент A'_{ijmn} и A''_{ijmn} должны быть найдены из решения соответствующих упругих периодических задач.

Проведенные исследования посредством численной реализации соответствующих краевых задач несвязанной термоупругости для различных структур и соотношений упругих свойств структурных компонентов показали, что независимо от числа окружающих элемент ω слоев типовых элементов с помощью специально подобранных для области Ω граничных условий в центральном элементе ω генерируется одно и то же распределение переменных деформирования, удовлетворяющее условию (5.12).

Таким образом, метод локального приближения можно применять для определения термоструктурных напряжений и деформаций в композитах с периодической структурой и последующего вычисления по формуле (5.14) эффективных коэффициентов теплового расширения.

5.3. Уруголастическая задача для композитов с периодической структурой

Рассмотрим обобщение метода локального приближения на случай, когда связь между напряжениями и деформациями для элементов структуры не является линейной. Физические уравнения системы (5.1) представим в виде

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda \left(\mathbf{r}, \bar{j}_\epsilon^{(2)} \right) \epsilon_{kk}(\mathbf{r}) \delta_{ij} + 2\mu \left(\mathbf{r}, \bar{j}_\epsilon^{(2)} \right) \epsilon_{ij}(\mathbf{r}), \quad (5.16)$$

где $\bar{j}_\epsilon^{(h)}$ — инварианты тензора ϵ .

Тогда уруголастическая периодическая задача включает в себя уравнения (5.1), (5.16) и условия (5.2), (5.3), причем имеется в виду, что физические уравнения системы (5.1) заменены уравнениями (5.16).

Естественно, что при нелинейных законах деформирования элементов структуры нелинейными будут и свойства макроскопической модели неоднородной среды. Поэтому для построения в явном виде

зависимостей эффективных свойств от инвариантов $j_i^{(h)}$ тензора макродеформаций ϵ^* необходимо решить последовательность периодических задач с различными условиями (5.3), вычисляя каждый раз по осредненным напряжениям и деформациям значения макромодулей с помощью формулы (5.7).

Для сред с малой концентрацией включений решение периодической задачи может быть получено на основе решения краевой задачи для ячейки периодичности с условиями на поверхности ячейки $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = s_{ij}$.

В соответствии со схемой метода локального приближения упругопластическая периодическая задача для неоднородных сред с учетом многочастичного взаимодействия заменяется краевой задачей для области Ω с ансамблем ω_Σ . В силу ближнего порядка во взаимодействии включений, поля напряжений и деформаций в центральном элементе ω при заданных на границе области Ω напряжениях $\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}$ и в ячейке периодичности при $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$ совпадают, причем тензор $\hat{\sigma}$ находят по заданному тензору s . В упругом случае из (5.10) справедливо

$$\hat{\sigma}_{ij} = B_{ijmn} s_{mn}, \quad (5.17)$$

где компоненты тензора B есть константы, не зависящие от макронапряжений s_{ij} . При нелинейных законах деформирования элементов структуры вместо (5.17) необходимо записать

$$\hat{\sigma}_{ij} = F_{ij}(s), \quad (5.18)$$

или, другими словами, тензор B зависит от конкретных значений макронапряжений.

Для определения граничных условий (тензора $\hat{\sigma}$) краевой задачи для области Ω при упругопластическом деформировании элементов структуры неоднородной среды рассмотрим следующий итерационный процесс.

1. Считаем, что упругая периодическая задача решена методом локального приближения и компоненты тензора B , соответствующие упругому решению, известны.

2. В качестве первого приближения $\hat{\sigma}_{ij}^{(1)}$ для граничных условий области Ω возьмем напряжения, определяемые из условия

$$\hat{\sigma}_{ij}^{(1)} = B_{ijmn} s_{mn}.$$

3. Решаем краевую задачу для области Ω с граничными условиями $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}$, находим поле напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r})$ в центральном элементе ω и вычисляем тензор макронапряжений

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = s_{ij}^{(1)},$$

соответствующий граничным условиям $\hat{\sigma}_{ij}^{(1)}$. Если заданные макронапряжения таковы, что структурные напряжения не превышают пределов пропорциональности элементов структуры, то получим $s_{ij}^{(1)} = s_{ij}$, и решение задачи в элементе ω области Ω является искомым решением периодической задачи. В противном случае $s_{ij}^{(1)} \neq s_{ij}$.

4. По найденным в первом приближении тензорам $\hat{\sigma}^{(1)}$ и $s^{(1)}$ вычисляем новые значения компонент тензора $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)}$, чтобы выполнялось равенство

$$\hat{\sigma}_{ij}^{(1)} = B_{ijmn}^{(1)} s_{mn}^{(1)}.$$

5. Находим второе приближение для граничных условий $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}$ из условия

$$\hat{\sigma}_{ij}^{(2)} = B_{ijmn}^{(1)} s_{mn}.$$

Далее вновь решаем краевую задачу для области Ω с найденными во втором приближении напряжениями $\hat{\sigma}_{ij}^{(2)}$ на границе области, определяем поле напряжений $\sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$ в центральном элементе ω и соответствующий тензору $\hat{\sigma}^{(2)}$ тензор макронапряжений $s^{(2)}$. Потом уточняем значения компонент тензора \mathbf{B} , отыскиваем новые граничные условия и т.д.

Итерационный процесс продолжаем до достижения необходимой точности

$$\|s_{ij}^{(m)} - s_{ij}^{(m-1)}\| < \gamma.$$

Нетрудно заметить, что процедура определения тензора $\hat{\sigma}$, соответствующего заданным макронапряжениям $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$ при применении метода локального приближения для решения нелинейных периодических задач, во многом аналогична методу упругих решений. Отличие заключается в том, что заранее неизвестен вид зависимости $\hat{\sigma}_{ij} \sim s_{ij}$, и на каждом шаге итерационного процесса надо решать нелинейную краевую задачу для кусочно-однородной области.

5.4. Самосогласованный и модифицированный варианты метода локального приближения

В механике композитов для вычисления эффективных свойств известны различные схемы расчета по методу самосогласования [115, 130, 142, 340, 296]. Впервые такая схема была разработана А. Хершем [339] и Е. Кренером [351] применительно к описанию поведения поликристаллических материалов. Такие материалы однофазны, но благодаря случайной ориентации анизотропных кристаллитов в них существуют скачкообразные изменения свойств при переходе через границы структурных элементов.

Кристаллит рассматривают как сферическое или эллипсоидное включение, внедренное в бесконечную среду с неизвестными изотропными (при отсутствии преимущественных направлений ориентации) упругими свойствами. На бесконечности или большом удалении от включения задают однородные напряжения, и ориентационно среднее напряжение во включении полагают равным соответственно значению приложенного напряжения. В результате получают уравнения, из которых можно определить эффективные свойства.

Развитие расчетной схемы по методу самосогласования для композитов было дано Р. Хиллом [340] и Б. Будянским [321]. Каждую фазу композита поочередно рассматривают как единичное сферическое или эллипсоидальное включение в бесконечной матрице с неизвестными эффективными свойствами. Использование однородных условий для напряжений или деформаций на бесконечности позволяет определить соответствующие осредненные поля во включении. После того как это выполнено для всех фаз, осредненные по фазам композита поля известны через свойства этих фаз и эффективные свойства. Таким образом, можно построить систему уравнений для определения эффективных параметров упругости через свойства фаз и их объемные доли.

Безусловно, эта расчетная схема чрезмерно произвольна в отношении геометрических характеристик модели композита. При вычислении средних по фазам полей каждую фазу рассматривают как включение, даже если в действительности в композите она полностью непрерывна.

Е. Кернером [344] и К. Ван-дер-Подем [374] была предложена расчетная схема по методу самосогласования, известная из монографии [142] как трехфазная модель композита и отчасти свободная от недостатков предыдущей расчетной схемы. Для двухфазного композита случайной структуры со сферическими или цилиндрическими включениями в матрице бесконечная область содержит единичное составное сферическое или цилиндрическое включение, причем геометрия составного включения определяется объемным содержанием фаз. В случае однородных условий для напряжений (деформаций) на бесконечности такая модель композита эквивалентна однородной среде с эффективными свойствами при условии, что энергия деформирования обеих систем одинакова при равенстве осредненных напряжений (деформаций).

Аналогом данной расчетной схемы для композитов периодической структуры является бесконечная область, содержащая единичный типовой элемент. Здесь удается учесть геометрию и характер взаимного расположения включений, однако решение краевой задачи связано, как правило, уже с применением численных методов.

Естественным обобщением рассмотренных вариантов является самосогласованный вариант развиваемого в данной главе метода локального приближения.

Например, для композитов периодической структуры ансамбль ω_{Σ} , содержащий центральную и смежные с ней ячейки периодичности, помещали в бесконечную область с неизвестными эффективными свойствами и заданными на бесконечности однородными условиями для напряжений. В отличие от схем, построенных в § 5.1–5.3, напряжения на бесконечности равны заданным макронапряжениям для композита в целом. Удельная потенциальная энергия деформирования композита считалась равной вычисленной в результате осреднения по центральной ячейке периодичности. При этом учитывалась не только геометрия структуры композита, но и многочастичное взаимодействие включений, что позволяет после определения эффективных свойств генерировать в центральной ячейке ω области Ω распределение напряжений и деформаций такое же, как в ячейке периодичности композита.

В случае нелинейных определяющих соотношений для компонентов композита эффективные свойства вычисляются с помощью итераций, причем на каждом шаге корректируются свойства среды, в которую погружен ансамбль ω_{Σ} .

С точки зрения численной реализации самосогласованный вариант метода локального приближения не имеет преимуществ перед схемой, используемой в § 5.1–5.3, но представляет интерес как возможное развитие метода самосогласования.

Модифицированный вариант метода локального приближения связан с повышением эффективности применения численных методов.

Например, для композитов периодической структуры можно построить расчетную схему, состоящую только из центральной ячейки периодичности и смежных ячеек, причем решение отыскивается только в центральной ячейке. Поскольку отклонение решения от периодического в задаче для полуплоскости периодической структуры при однородно распределенных напряжениях на поверхности полуплоскости затухает по экспоненциальному закону на расстоянии, равном размеру ячейки [193], то поля деформирования в центральной ячейке ω ансамбля ω_{Σ} будут близки к полям в ячейке периодичности композита. Необходимо лишь установить соответствие между заданным для композита тензором макронапряжений с компонентами $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$ и напряжениями $\hat{\sigma}_{ij}$ на границе $S_{\omega_{\Sigma}}$ ансамбля ω_{Σ} .

Для вычисления напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$ краевой задачи через заданные макронапряжения s_{ij} предлагается следующий подход.

Из решения последовательности задач для области ω_{Σ} на осевое растяжение и сдвиг определяются компоненты тензора A , удовлетворяющего равенству

$$s_{ij} = A_{ijmn} \hat{\sigma}_{mn}^{(0)}, \quad (5.19)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}^{(0)}$ — однородно распределенные на границе $S_{\omega_{\Sigma}}$ единичные напряжения. В качестве первого приближения для граничных условий выбираются однородные по границе $S_{\omega_{\Sigma}}$ напряжения

$$\hat{\sigma}_{ij}^{(1)} = B_{ijmn} s_{mn}, \quad B_{ijpq} A_{pqmn} = I_{ijmn}. \quad (5.20)$$

Решается краевая задача для области ω_{Σ} с граничными условиями $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}$ и отыскивается поле напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r})$ в центральной ячейке ω , причем $\langle \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle_{\omega} = s_{ij}$.

Находится второе приближение для граничных условия $\hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$, перенося напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ на границе центральной ячейки ω на соответствующие (в силу симметрии структуры и периодичности исходной задачи) участки границы $S_{\omega_{\Sigma}}$.

Решается краевая задача с новыми условиями $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}$, отыскивается поле напряжений $\sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$ и вычисляются осредненные по ячейке ω напряжения $\langle \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle_{\omega}$.

Если условие $\langle \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle_{\omega} = s_{ij}$ не выполняется, то проводится перенормировка напряжений $\hat{\sigma}_{ij}^{(2)}$ в каждой точке границы и вновь решается задача.

Итерационный процесс продолжается до получения необходимой точности во всех точках центральной ячейки:

$$\left\| \sigma_{ij}^{(m)} - \sigma_{ij}^{(m-1)} \right\| < \gamma,$$

где γ — малое заданное число.

Для организации вычислений по полученной расчетной схеме удобен метод блоков [105, 171]. В данном случае в качестве блоков использовали однотипные ячейки периодичности области ω , поэтому матрицу влияния [207] в упругой задаче строили только для одного блока. Разработанный алгоритм и программа его реализации для построения матрицы влияния неоднородной ячейки периодичности приводят как к сокращению входных данных, так и к уменьшению объема вычислений.

Решение задачи с нелинейными определяющими соотношениями для компонентов композита производили согласно методу переменных параметров упругости. На каждом шаге итерации вычисляется матрица жесткости суперэлемента (центральной ячейки ω области ω_{Σ}), которая содержит переменные параметры, зависящие от достигнутого уровня пластических деформаций. Считали, что при переходе к следующему шагу матрицы влияния всех ячеек области ω_{Σ} одинаковы. Итерационный процесс по граничным условиям с однородно распределенными напряжениями осуществляли аналогично тому, как это было сделано в § 5.3, причем одновременно с изменением матрицы влияния. Эти условия ускоряют сходимость итерационного процесса, когда на каждом шаге итерации решается краевая задача с новыми граничными условиями и матрицами влияния блоков. Итерационный

процесс продолжали до совпадения осредненных напряжений $\langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle_\omega$ с заданными макроскопическими s_{ij} с необходимой точностью.

Результаты вычислений показали, что для решения упругой плоской задачи достаточно двух итераций, а для упругопластической задачи необходимо 5-6 итераций. При этом напряжения во включениях и матрице композита, вычисленные по схеме метода локального приближения и с помощью его модифицированного варианта, практически совпадают.

В монографии [10] приведены результаты исследования методом локального приближения (модифицированный вариант) механического поведения однонаправленных композитов на основе титана с волокнами бора, борсика, молибдена и высокопрочной стали при осевом растяжении в поперечной плоскости. Вычислены эффективные упругие постоянные и коэффициенты теплового расширения с учетом частного вида анизотропии механических свойств, построены эпюры напряжений в характерных сечениях ячейки периодичности. Исследованы закономерности процессов зарождения и развития пластических деформаций в титановой матрице в зависимости от свойств и объемного содержания волокон.

5.5. Применение метода в механике композитов со случайной структурой

Метод локального приближения основан на наличии ближнего порядка во взаимодействии элементов структуры. Это свойство деформирования структурно-неоднородных сред не зависит от конкретного характера взаимного расположения элементов структуры и их формы, поэтому метод может быть применен и в механике композитов со случайной структурой.

Пусть имеется алгоритм численного моделирования случайной структуры по заданным моментным функциям случайного поля $C(\mathbf{r})$ структурных модулей упругости [62]. Из полученной реализации случайной структуры произвольным образом выделим ансамбль ω_Σ , содержащий одно включение в центре и окружающие его ближайшие включения. Этот ансамбль поместим в область Ω , в которой на достаточном удалении от ω_Σ будем задавать не зависящие от координат детерминированные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$. Выделим в ансамбле ω_Σ центральную стохастическую ячейку, продолжив до пересечения перпендикуляры к серединам отрезков, соединяющих центры включений (рис. 5.2). Построение

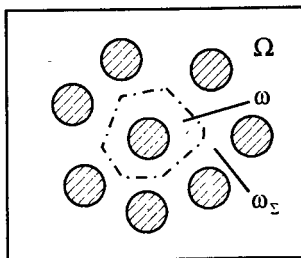


Рис. 5.2. К построению расчетной схемы метода локального приближения для сред матричного типа со случайной структурой

расчетной схемы метода локального приближения закончено. Теперь надо найти такой тензор $\hat{\sigma}_{ij}$, чтобы после решения краевой задачи для области Ω и осреднения поля напряжений по объему стохастической ячейки получить макронапряжения σ_{ij}^* , равные заданным s_{ij} . В общем случае, для разупорядоченных сред тензор \mathbf{B} в выражении $\hat{\sigma}_{ij} = B_{ijmn} \varepsilon_{mn}$ есть случайный тензор, но для каждого конкретного ансамбля ω_{Σ} реализации структуры компоненты тензора являются детерминированными константами. Тензор \mathbf{B} , соответствующий данному ансамблю ω_{Σ} , определяют, решив для области Ω последовательность краевых задач, когда от нуля отлична лишь одна из компонент тензора $\hat{\sigma}_{ij}$.

Поскольку предлагаемый подход позволяет получить решение стохастической краевой задачи теории упругости неоднородных сред в реализациях, необходимо построить решения краевых задач для области Ω в центральной стохастической ячейке, каждый раз выбирая новый ансамбль ω_{Σ} из их представительной выборки заранее заданной совокупности. Затем, осредняя по реализациям, находят моментные функции или плотности вероятностей инвариантов полей структурных напряжений и деформаций, а также эффективные свойства композитов со случайной структурой.

Аналогичное обобщение метода локального приближения справедливо для термоупругих и упругопластических задач механики композитов со случайной структурой.

Краевая задача механики неупругого деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел

Неупругое поведение материалов, обусловленное диссипацией энергии, объясняется различными механизмами для металлов, полимеров, керамики и композитов на их основе. Это приводит к континуальным моделям, в которых состояние исследуемого материала, обусловленное внешним воздействием, отождествляется с некоторой величиной, называемой поврежденностью. Математические соотношения, которые содержат скалярные и (или) тензорные характеристики поврежденности, часто оказываются очень близкими для разнообразных физических процессов. В данной работе используется один из подходов, когда функция поврежденности явным образом выделяется в определяющих соотношениях, а условиями разрушения (или появления критических напряженных состояний) являются условия достижения некоторыми инвариантными мерами функции поврежденности своих критических значений [104, 247, 258 и др.].

Анализ деформирования и разрушения композитов включает в себя описание изменения деформационных свойств и накопления повреждений в компонентах композитов, предшествующих макроразрушению. В настоящей главе рассмотрены определяющие соотношения, описывающие деформирование анизотропных, в частных случаях, ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных сред, построенные с использованием тензора поврежденности четвертого ранга. Использована теория пластичности анизотропных сред, предложенная Б.Е. Победрей [203, 204]. Рассмотрено применение совокупности критериев для моделирования актов разрушения по различным механизмам. Предложено использование в задачах механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных сред граничных условий контактного типа, коэффициенты которых могут трактоваться как интегральные жесткостные характеристики механических систем, передающих нагрузки деформируемым телам, но непосредственно не включаемых в постановки краевых задач. Это позволяет более адекватно описать реальные условия нагружения и учесть факторы, играющие, как будет показано в дальнейшем, определяющую роль в формировании условий макроразрушения.

Некоторые из рассматриваемых в настоящей главе вопросов отражены также в работах авторов [35–37, 43, 48, 49, 247].

6.1. Определяющие соотношения деформационной теории поврежденных сред

Своеобразие поведения конкретного класса материалов в зависимости от условий их деформирования проявляется прежде всего в определяющих соотношениях. При их формулировке должны выполняться общие положения, такие как тензорность, принципы детерминизма, локального действия, материальной индифферентности (объективности), затухающей памяти и второе начало термодинамики [209].

В работе [245] накопление структурных повреждений композиционных материалов описано случайными функциями микро- и макроскопической поврежденности скалярного типа. Дальнейшее развитие и обоснование идея этого феноменологического описания получила в работе [247], а определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений σ с тензором деформаций ϵ для среды с микроповреждениями, представлены с использованием тензора поврежденности четвертого ранга Ω в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(I_{klmn} - \Omega_{klmn})\epsilon_{mn}, \quad (6.1)$$

где C — тензор упругих модулей, $I_{klmn} = (\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})/2$ — единичный тензор, δ_{kn} — символ Кронекера. Как и ранее, латинские индексы могут принимать значения 1, 2 и 3, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Все процессы, приводящие к некоторому изменению свойств материала, описываются в рассматриваемой модели с помощью тензора оператора поврежденности Ω , компоненты которого однозначно определяются процессом деформирования (нагружения). Это означает, что в общем случае тензор напряжений в любой момент времени может быть определен, если известны значения тензора деформаций во все предшествующие времена. В случае, когда для определения напряжений достаточно знания деформаций только в настоящий момент времени, тензор Ω является функцией. Зависимость свойств материала от температуры или других факторов также может быть учтена с помощью тензора поврежденности.

Разрешим однозначно соотношения (6.1) относительно деформаций, записав

$$\epsilon_{ij} = J_{ijkl}(I_{klmn} + \Psi_{klmn})\sigma_{mn}, \quad (6.2)$$

с помощью тензора упругих податливостей J и тензора увеличения податливости Ψ , определяемых из условий

$$C_{ijkl}J_{klmn} = I_{ijmn}, \\ C_{ijkl}(I_{klpq} - \Omega_{klpq})J_{pqrs}(I_{rsmn} + \Psi_{rsmn}) = I_{ijmn}. \quad (6.3)$$

Упругопластическое деформирование среды, сохраняющей изотропию свойств, можно описать с помощью изотропного тензора поврежденности:

$$\Omega_{klmn} = \omega_1 \delta_{kl} \delta_{mn} + \omega_2 (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}). \quad (6.4)$$

Соотношения (6.1) в этом случае сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= [3K(1 - \kappa)V_{ijmn} + 2G(1 - g)H_{ijmn}] \varepsilon_{mn}, \\ V_{ijkl} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad H_{ijkl} = I_{ijkl} - V_{ijkl}, \\ \kappa &= 3\omega_1 + 2\omega_2, \quad g = 2\omega_2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где K и G — модули объемного сжатия и сдвига. Величины κ и g выражают изменение деформационных свойств, определяющих поведение материалов при гидростатическом давлении и чистом сдвиге соответственно. Из соотношений (6.5) следует, что инварианты тензора напряжений

$$\bar{j}_\sigma^{(1)} = \sigma_{kk}/3, \quad \bar{j}_\sigma^{(2)} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}} \quad (6.6)$$

связаны с инвариантами тензора деформаций

$$\bar{j}_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_{kk}, \quad \bar{j}_\varepsilon^{(2)} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}}, \quad (6.7)$$

при записи которых использованы обозначения:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}/3, \quad (6.8)$$

следующими уравнениями:

$$\bar{j}_\sigma^{(1)} = K(1 - \kappa) \bar{j}_\varepsilon^{(1)}, \quad \bar{j}_\sigma^{(2)} = 2G(1 - g) \bar{j}_\varepsilon^{(2)}. \quad (6.9)$$

Особенность определяющих соотношений (6.5) заключается в том, что в общем случае они предполагают нелинейную зависимость относительного изменения объема от гидростатического давления. Хотя классические эксперименты Баушингера, Бриджмена [19, 20] и опыты других исследователей подтверждают нелинейный характер этой зависимости, однако, при тех значениях давлений, которые обычно встречаются в технических расчетах, для металлов и их сплавов нелинейность весьма мала. В теории пластичности ею принято пренебрегать.

Существенную нелинейность зависимости изменения объема от гидростатического давления проявляют некоторые полимеры [283]. Значительные пластические объемные изменения свойственны пористым материалам [79, 141]. Это может быть справедливо и для других неоднородных тел [166, 275]. Структурная неоднородность приводит к тому, что напряжения в компонентах композита, находящегося

под действием всестороннего сжатия, не являются чисто гидростатическими [289]. Вследствие этого композиции из материалов, каждый из которых в отдельности деформируется упруго при гидростатическом силовом воздействии, могут обнаружить при аналогичном воздействии пластические деформации за счет неупругого формоизменения компонентов. Пластические изменения объема будут существенны, если модули объемного сжатия элементов структуры отличаются значительно [79].

В случае одноосного растяжения поведение материала, для которого справедливы определяющие соотношения (6.5), может быть описано уравнениями

$$\sigma_{33} = E(1 - e)\varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu(1 - \eta)\varepsilon_{33},$$

$$e = \frac{G\kappa(1 - g) + 3Kg(1 - \kappa)}{G(1 - g) + 3K(1 - \kappa)}, \quad \eta = \frac{KG(\kappa - g)}{(K - \frac{2}{3}G)[K(1 - \kappa) + \frac{1}{3}G(1 - g)]}, \quad (6.10)$$

где E и ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала в неповрежденном состоянии.

Частным случаем тензора поврежденности четвертого ранга является скалярная функция поврежденности Ω . Обращаясь к соотношениям (6.1), с учетом $\Omega_{klmn} = \Omega I_{klmn}$ получим физические уравнения простого вида

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}(1 - \Omega)\varepsilon_{mn}.$$

Модель деформирования, построенная на основе скалярной функции поврежденности, описывает лишь равномерное по объему, не зависящее от ориентации нагрузки накопление повреждений, при котором относительное изменение всех деформационных свойств одинаково, тип анизотропии, естественно, сохраняется. В рамках этой модели для изотропного материала предполагается, что $\kappa = g$, $\nu = \text{const}$. Скалярная функция Ω эквивалентна параметру поврежденности Качанова.

Если компоненты тензора Ω изотропного материала определить таким образом, чтобы $\kappa = 0$, т.е. не учитывать неупругое изменение объема, то функция поврежденности g совпадет с известной функцией пластичности Ильюшина, а соотношения (6.5) с уравнениями теории малых упругопластических деформаций при активном нагружении.

Для разгрузки от достигнутого в процессе пропорционального нагружения уровня напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$ запишем линейные соотношения

$$\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = (3KV_{ijmn} + 2GH_{ijmn})(\varepsilon_{mn} - \bar{\varepsilon}_{mn}). \quad (6.11)$$

Физические уравнения (6.2) для рассматриваемой изотропной среды после введения изотропного тензора

$$\Psi_{klmn} = \psi_1 \delta_{kl} \delta_{mn} + \psi_2 (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \quad (6.12)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= [3R(1 + \tau)V_{ijmn} + 2T(1 + \tau)H_{ijmn}]\sigma_{mn}, \\ r &= 3\psi_1 + 2\psi_2, \quad \tau = 2\psi_2.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Упругие коэффициенты податливости R и T однозначно определяются упругими модулями K и G , а функции увеличения податливости r и τ функциями поврежденности κ и g :

$$R = \frac{1}{9K}, \quad T = \frac{1}{4G}, \quad r = \frac{\kappa}{1 - \kappa}, \quad \tau = \frac{g}{1 - g}. \quad (6.14)$$

Поведение трансверсально изотропного материала, не изменяющего тип анизотропии в процессе деформирования, может быть описано соотношениями (6.1) с помощью тензора поврежденности, компоненты которого определяются формулой

$$\begin{aligned}\Omega_{ijkl} &= \omega_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \omega_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \omega_3 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} + \omega_4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{kl} + \\ &+ \omega_5 \delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3} + \omega_6 (\delta_{il} \delta_{j3} \delta_{k3} + \delta_{ik} \delta_{j3} \delta_{l3} + \delta_{jk} \delta_{i3} \delta_{l3} + \delta_{jl} \delta_{i3} \delta_{k3}).\end{aligned}\quad (6.15)$$

При этом ω_α ($\alpha = 1, \dots, 6$) являются независимыми функциями, а ω_6 вычисляется на основании условия

$$\Omega_{3311} = \frac{l}{n} (\Omega_{3333} - \Omega_{1111} - \Omega_{1122}) + \frac{2k}{n} \Omega_{1133}. \quad (6.16)$$

Упругие константы трансверсально изотропной среды l, n, k, G_\perp и G_\parallel определяются через компоненты тензора упругих модулей C :

$$\begin{aligned}k &= (C_{1111} + C_{1122})/2, \quad l = C_{1133}, \quad n = C_{3333}, \\ G_\perp &= C_{1212}, \quad G_\parallel = C_{1313}.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Представим определяющие соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 &= k(1 - \kappa)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + l(1 - \varphi)\varepsilon_{33}, \\ (\sigma_{11} - \sigma_{22})/2 &= G_\perp(1 - \rho_\perp)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{33} &= l(1 - \varphi)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + n(1 - \xi)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2G_\perp(1 - \rho_\perp)\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G_\parallel(1 - \rho_\parallel)\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2G_\parallel(1 - \rho_\parallel)\varepsilon_{23}.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Все компоненты тензора поврежденности могут быть определены пятью независимыми функциями $\kappa, \varphi, \xi, \rho_\perp$ и ρ_\parallel с учетом (6.15), (6.16) и следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\Omega_{1111} &= \frac{1}{2} \left(\rho_\perp - \frac{l^2}{kn - l^2} \varphi + \frac{kn}{kn - l^2} \kappa \right), \quad \Omega_{3333} = \frac{kn}{kn - l^2} \left(\xi - \frac{l^2}{kn} \varphi \right), \\ \Omega_{1133} &= \frac{1}{2} \frac{ln}{kn - l^2} (\varphi - \xi), \quad \Omega_{1313} = \frac{1}{2} \rho_\parallel, \quad \Omega_{1212} = \frac{1}{2} \rho_\perp.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Если ввести четыре независимых инварианта тензора деформаций трансверсально изотропной среды [204]

$$j_{\epsilon}^{(1)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}, \quad j_{\epsilon}^{(2)} = \epsilon_{33},$$

$$j_{\epsilon}^{(3)} = \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}, \quad j_{\epsilon}^{(4)} = \sqrt{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2} \quad (6.20)$$

и четыре инварианта тензора напряжений

$$j_{\sigma}^{(1)} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2, \quad j_{\sigma}^{(2)} = \sigma_{33},$$

$$j_{\sigma}^{(3)} = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad j_{\sigma}^{(4)} = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}, \quad (6.21)$$

то соотношения (6.18) можно записать в инвариантной форме:

$$j_{\sigma}^{(1)} = k(1 - \kappa)j_{\epsilon}^{(1)} + l(1 - \varphi)j_{\epsilon}^{(2)}, \quad j_{\sigma}^{(2)} = l(1 - \varphi)j_{\epsilon}^{(1)} + n(1 - \xi)j_{\epsilon}^{(2)},$$

$$j_{\sigma}^{(3)} = 2G_{\perp}(1 - \rho_{\perp})j_{\epsilon}^{(3)}, \quad j_{\sigma}^{(4)} = 2G_{\parallel}(1 - \rho_{\parallel})j_{\epsilon}^{(4)}. \quad (6.22)$$

При разгрузке эти соотношения приобретают вид

$$j_{\sigma}^{(1)} - \tilde{j}_{\sigma}^{(1)} = k(j_{\epsilon}^{(1)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(1)}) + l(j_{\epsilon}^{(2)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(2)}),$$

$$j_{\sigma}^{(2)} - \tilde{j}_{\sigma}^{(2)} = l(j_{\epsilon}^{(1)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(1)}) + n(j_{\epsilon}^{(2)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(2)}),$$

$$j_{\sigma}^{(3)} - \tilde{j}_{\sigma}^{(3)} = 2G_{\perp}(j_{\epsilon}^{(3)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(3)}), \quad j_{\sigma}^{(4)} - \tilde{j}_{\sigma}^{(4)} = 2G_{\parallel}(j_{\epsilon}^{(4)} - \tilde{j}_{\epsilon}^{(4)}),$$

где величины, помеченные волнистой чертой, соответствуют пластическому состоянию, достигнутому к началу разгрузки.

Уравнения (6.2) для трансверсально изотропной среды сведем к следующей системе определяющих соотношений:

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = P(1 + \pi)(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 - L(1 + \chi)\sigma_{33},$$

$$(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})/2 = Q_{\perp}(1 + q_{\perp})(\sigma_{11} - \sigma_{22}),$$

$$\epsilon_{33} = N(1 + \zeta)\sigma_{33} - \frac{1}{2}L(1 + \chi)(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \epsilon_{12} = 2Q_{\perp}(1 + q_{\perp})\sigma_{12},$$

$$\epsilon_{13} = 2Q_{\parallel}(1 + q_{\parallel})\sigma_{13}, \quad \epsilon_{23} = 2Q_{\parallel}(1 + q_{\parallel})\sigma_{23}. \quad (6.23)$$

Дальнейший переход к соотношениям в инвариантном виде является очевидным.

Коэффициенты податливости можно определить, зная упругие постоянные, входящие в уравнения (6.18):

$$P = \frac{n}{nk - l^2}, \quad L = \frac{l}{nk - l^2}, \quad N = \frac{k}{nk - l^2}, \quad Q_{\perp} = \frac{1}{4G_{\perp}}, \quad Q_{\parallel} = \frac{1}{4G_{\parallel}}. \quad (6.24)$$

Функции увеличения податливости, входящие в предлагаемые уравнения (6.24), связаны с упругими константами и функциями поврежденности трансверсально изотропного материала:

$$\begin{aligned} \pi &= \Phi(1 - \xi) - 1, & \chi &= \Phi(1 - \varphi) - 1, & \zeta &= \Phi(1 - \kappa) - 1, \\ q_{\parallel} &= \frac{\rho_{\parallel}}{1 - \rho_{\parallel}}, & q_{\perp} &= \frac{\rho_{\perp}}{1 - \rho_{\perp}}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $\Phi = (nk - l^2)/(nk(1 - \xi)(1 - \kappa) - l^2(1 - \varphi)^2)$.

Соотношения (6.1) применительно к ортотропному материалу запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{1111}(1 - \lambda_1)\varepsilon_{11} + C_{1122}(1 - \lambda_4)\varepsilon_{22} + C_{1133}(1 - \lambda_6)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= C_{1122}(1 - \lambda_4)\varepsilon_{11} + C_{2222}(1 - \lambda_2)\varepsilon_{22} + C_{2233}(1 - \lambda_5)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{1133}(1 - \lambda_6)\varepsilon_{11} + C_{2233}(1 - \lambda_5)\varepsilon_{22} + C_{3333}(1 - \lambda_3)\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2C_{1212}(1 - \lambda_7)\varepsilon_{12}, & \sigma_{23} &= 2C_{2323}(1 - \lambda_8)\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{13} &= 2C_{1313}(1 - \lambda_9)\varepsilon_{13}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Независимые функции поврежденности λ_{α} ($\alpha = 1, \dots, 9$) однозначно связаны с компонентами тензора Ω для рассматриваемого материала.

6.2. Материальные функции деформационной теории поврежденных сред

Функции (или константы), по которым можно полностью восстановить связь тензора напряжений и тензора деформаций следуя определяющим соотношениям, описывающим данную модель механики деформируемого твердого тела, называются материальными функциями (или константами) [204].

Рассматривая тензорно линейные определяющие соотношения, приходим к выводу, что в случае изотермических процессов и склерономной изотропной среды функции κ и g зависят только от двух инвариантов тензора деформаций, а r и τ — от двух инвариантов тензора напряжений. При этом если тензоры σ и ε являются потенциальными, т.е. существуют скалярные функции W и w такие, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6.27)$$

то эти инварианты определяются формулами (6.7) и (6.6), а для функций $\kappa(\bar{j}_{\varepsilon}^{(1)}, \bar{j}_{\varepsilon}^{(2)})$, $g(\bar{j}_{\varepsilon}^{(1)}, \bar{j}_{\varepsilon}^{(2)})$, $r(\bar{j}_{\sigma}^{(1)}, \bar{j}_{\sigma}^{(2)})$, $\tau(\bar{j}_{\sigma}^{(1)}, \bar{j}_{\sigma}^{(2)})$ справедливы связывающие их уравнения

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{j}_\epsilon^{(1)}} = \frac{1}{2} \frac{K \bar{j}_\epsilon^{(1)}}{G \bar{j}_\epsilon^{(2)}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \bar{j}_\sigma^{(1)}} = \frac{9}{2} \frac{R \bar{j}_\sigma^{(1)}}{T \bar{j}_\sigma^{(2)}} \frac{\partial r}{\partial \bar{j}_\sigma^{(2)}}. \quad (6.28)$$

В частном случае, когда поведение изотропного материала описывается функциями $\kappa(\bar{j}_\epsilon^{(1)})$, $g(\bar{j}_\epsilon^{(2)})$, $r(\bar{j}_\sigma^{(1)})$, $\tau(\bar{j}_\sigma^{(2)})$, что не противоречит условиям потенциальности, для их определения достаточно двух независимых экспериментов. Например, по результатам испытаний на кручение тонких трубчатых образцов может быть получена зависимость $\bar{j}_\sigma^{(2)} \sim \bar{j}_\epsilon^{(2)}$, и построены функции $g(\bar{j}_\epsilon^{(2)})$, $\tau(\bar{j}_\sigma^{(2)})$. Знание зависимости $\sigma_{33} \sim \epsilon_{33}$, обнаруженной в результате испытаний на одноосное растяжение, позволяет вычислить связь первых инвариантов $\bar{j}_\sigma^{(1)} \sim \bar{j}_\epsilon^{(1)}$, определив значение $\bar{j}_\sigma^{(2)}$ по напряжениям σ_{33} и $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, получив значение второго инварианта тензора деформаций с использованием функции $\tau(\bar{j}_\sigma^{(2)})$ и найдя деформации $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$, соответствующие вычисленной величине $\bar{j}_\epsilon^{(2)}$. На основании зависимости $\bar{j}_\sigma^{(1)} \sim \bar{j}_\epsilon^{(1)}$, строятся функции $\kappa(\bar{j}_\epsilon^{(1)})$ и $r(\bar{j}_\sigma^{(1)})$, т.е. для них выбирается вид аналитических зависимостей и определяются все константы.

Соотношения между напряжениями и деформациями (6.18) и (6.24), предложенные для описания неупругого поведения трансверсально изотропных материалов, содержат материальные функции, зависящие в общем случае от четырех независимых инвариантов, что определяется тензорной линейностью соотношений и типом анизотропии среды [203]. В качестве аргументов материальных функций могут быть использованы инварианты тензоров деформаций и напряжений, заданные уравнениями (6.20) и (6.21):

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa(j_\epsilon^{(1)}, \dots, j_\epsilon^{(4)}), \quad \varphi = \varphi(j_\epsilon^{(1)}, \dots, j_\epsilon^{(4)}), \quad \xi = \xi(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}), \\ \rho_\perp &= \rho_\perp(j_\epsilon^{(1)}, \dots, j_\epsilon^{(4)}), \quad \rho_\parallel = \rho_\parallel(j_\epsilon^{(1)}, \dots, j_\epsilon^{(4)}), \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \pi &= \pi(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}), \quad \chi = \chi(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}), \quad \zeta = \zeta(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}), \\ q_\perp &= q_\perp(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}), \quad q_\parallel = q_\parallel(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Функции (6.29) и (6.30) не могут быть независимыми, если предполагается потенциальность тензора напряжений, так как для функций $W(j_\epsilon^{(1)}, \dots, j_\epsilon^{(4)})$ и $w(j_\sigma^{(1)}, \dots, j_\sigma^{(4)})$ справедливы условия (6.27) и следующие:

$$j_\sigma^{(i)} = \frac{\partial W}{\partial j_\epsilon^{(i)}}, \quad j_\epsilon^{(i)} = \frac{\partial w}{\partial j_\sigma^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6.31)$$

Следовательно, существует связь между функциями (6.29):

$$k j_\epsilon^{(1)} \frac{\partial \kappa}{\partial j_\epsilon^{(2)}} + l j_\epsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_\epsilon^{(2)}} = l j_\epsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_\epsilon^{(1)}} + n j_\epsilon^{(2)} \frac{\partial \xi}{\partial j_\epsilon^{(1)}},$$

$$\begin{aligned}
 k j_{\varepsilon}^{(1)} \frac{\partial \kappa}{\partial j_{\varepsilon}^{(3)}} + l j_{\varepsilon}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_{\varepsilon}^{(3)}} &= G_{\perp} j_{\varepsilon}^{(3)} \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial j_{\varepsilon}^{(1)}}, \\
 k j_{\varepsilon}^{(1)} \frac{\partial \kappa}{\partial j_{\varepsilon}^{(4)}} + l j_{\varepsilon}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_{\varepsilon}^{(4)}} &= 4 G_{\parallel} j_{\varepsilon}^{(4)} \frac{\partial \rho_{\parallel}}{\partial j_{\varepsilon}^{(1)}}, \\
 l j_{\varepsilon}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_{\varepsilon}^{(3)}} + n j_{\varepsilon}^{(2)} \frac{\partial \xi}{\partial j_{\varepsilon}^{(3)}} &= G_{\perp} j_{\varepsilon}^{(3)} \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial j_{\varepsilon}^{(2)}}, \\
 l j_{\varepsilon}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial j_{\varepsilon}^{(4)}} + n j_{\varepsilon}^{(2)} \frac{\partial \xi}{\partial j_{\varepsilon}^{(4)}} &= 4 G_{\parallel} j_{\varepsilon}^{(4)} \frac{\partial \rho_{\parallel}}{\partial j_{\varepsilon}^{(2)}}, \\
 G_{\perp} j_{\varepsilon}^{(3)} \frac{\partial \rho_{\perp}}{\partial j_{\varepsilon}^{(4)}} &= 4 G_{\parallel} j_{\varepsilon}^{(4)} \frac{\partial \rho_{\parallel}}{\partial j_{\varepsilon}^{(3)}}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

На основании (6.31) выводятся аналогичные уравнения для функций (6.30).

Деформационная теория пластичности анизотропных сред обладает достаточной общностью, однако, ее применение при решении конкретных практических задач может вызвать затруднения, связанные с экспериментальным определением функций многих аргументов. В связи с этим возникает необходимость, с одной стороны, развития методов прогнозирования материальных функций анизотропных композитов по свойствам компонентов, с другой — разумного упрощения определяющих соотношений. В [204] рассмотрены понятия упрощенной теории, для которой $\kappa = \varphi = \xi = 0$, $\rho_{\perp} = \rho_{\perp}(j_{\varepsilon}^{(3)}, j_{\varepsilon}^{(4)})$, $\rho_{\parallel} = \rho_{\parallel}(j_{\varepsilon}^{(3)}, j_{\varepsilon}^{(4)})$, и простейшей теории: $\kappa = \varphi = \xi = 0$, $\rho_{\perp} = \rho_{\perp}(j_{\varepsilon}^{(3)})$, $\rho_{\parallel} = \rho_{\parallel}(j_{\varepsilon}^{(4)})$.

Экспериментальное построение материальных функций в рамках упрощенной теории осуществляется на основе проведения серии экспериментов по совместному кручению и растяжению либо кручению и действию внутреннего давления для тонкостенного цилиндрического образца, если ось трансверсальной изотропии направлена по радиусу. Если принять простейшую теорию, то достаточно будет провести два эксперимента, например, растяжение и кручение образца.

Для ортотропного тела аргументами материальных функций являются шесть инвариантов тензора деформаций:

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon}^{(1)} &= \varepsilon_{11}, & I_{\varepsilon}^{(2)} &= \varepsilon_{22}, & I_{\varepsilon}^{(3)} &= \varepsilon_{33}, \\
 I_{\varepsilon}^{(4)} &= \varepsilon_{12}, & I_{\varepsilon}^{(5)} &= \varepsilon_{23}, & I_{\varepsilon}^{(6)} &= \varepsilon_{13}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Аналогично вводятся и инварианты тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 I_{\sigma}^{(1)} &= \sigma_{11}, & I_{\sigma}^{(2)} &= \sigma_{22}, & I_{\sigma}^{(3)} &= \sigma_{33}, \\
 I_{\sigma}^{(4)} &= \sigma_{12}, & I_{\sigma}^{(5)} &= \sigma_{23}, & I_{\sigma}^{(6)} &= \sigma_{13}.
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Следует отметить, что инварианты тензоров деформаций и напряжений совпадают с компонентами этих тензоров, как это зафиксировано в уравнениях (6.33) и (6.34), только в специально выбранной системе координат, оси которой совпадают с главными осями ортотропии.

Экспериментальное определение функций от шести аргументов представляется мало реальным. Поэтому следует каким-то образом (на основе теоретического прогноза или установочных экспериментов) упростить определяющие соотношения. В основу упрощения может быть положена гипотеза о линейной связи инвариантов $I_{\sigma}^{(\alpha)}$ и $I_{\epsilon}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), т.е. $\lambda_{\beta} = 0$ при $\beta = 1, \dots, 6$. В рамках простейшей теории, кроме последней гипотезы, могут быть приняты также следующие зависимости: $I_{\sigma}^{(\gamma)} = I_{\sigma}^{(\gamma)}(I_{\epsilon}^{(\gamma)})$ для $\gamma = 4, 5, 6$. Как видно из соотношений (6.26), для определения этих зависимостей, т.е. построения материальных функций $\lambda_7(I_{\epsilon}^{(4)})$, $\lambda_8(I_{\epsilon}^{(5)})$ и $\lambda_9(I_{\epsilon}^{(6)})$, необходимо осуществить в экспериментах сдвиги по трем взаимно ортогональным плоскостям, параллельным главным осям ортотропии.

Вопрос о применимости той или иной теории для описания поведения композита должен решаться в каждом конкретном случае на основании данных экспериментов или результатов теоретического прогнозирования. Естественно, что теоретическое прогнозирование также нуждается в экспериментальном подтверждении, однако, объем экспериментальных исследований в этом случае может быть несравнимо меньшим, чем при построении всех материальных функций только на основании опытных данных.

6.3. Модели разрушения по совокупности критериев

Полному (макроскопическому) разрушению элементов конструкций из неоднородных материалов предшествует сложный процесс потери несущей способности отдельных элементов структуры. Каждый акт структурного разрушения сопровождается перераспределением напряжений, приводящим либо к продолжению, либо к прекращению разрушения при данном уровне внешней нагрузки. Изучение кинетики этого процесса важно как для анализа условий образования макротрещины, так и для исследования механического поведения деформируемого материала. Следствием указанного процесса является нелинейный характер зависимости между напряжениями и деформациями структурно-неоднородных сред, который определяется не только пластическим деформированием и может иметь место даже в случае линейно упругих компонентов. Построение структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения с учетом структурного разрушения выдвигает в качестве основных вопросы

выбора критериев прочности элементов среды, а также описания их деформационных и прочностных свойств после выполнения тех или иных условий разрушения [36]. Необходимо установление точной доли нагрузки, которую разрушенный элемент воспринимает или передает соседним [34]. Важное значение при этом имеет тот факт, что структурный элемент может быть разрушен по различным механизмам.

Феноменологическая оценка разрушения твердого тела на основании критерия прочности в общем случае ничего не говорит о характере тех процессов, которые привели к потере несущей способности, хотя некоторые критерии могут иметь определенную физическую интерпретацию. Использование совокупности критериев может позволить в рамках феноменологического подхода различать механизмы разрушения. Концепция описания критического состояния материала с помощью более чем одного уравнения ярко выражена в теории прочности Я.Б. Фридмана [67]. В работе А.А. Ильюшина [104] введено понятие повреждения частицы материала и на основании мер повреждений записана совокупность критериев прочности, каждый из которых соответствует разрушению определенного типа.

Следуя [104], будем считать, что некоторые меры тензора поврежденности $M_n(\Omega)$, называемые мерами повреждений и являющиеся функциями компонент Ω , могут быть использованы для построения критериев разрушения (или, как будет показано в гл. 5, критериев закритической стадии деформирования) изотропных и анизотропных материалов. Пусть существуют константы критической поврежденности материала Ω_n^{cr} такие, что если для любого n

$$M_n(\Omega) < \Omega_n^{cr}, \quad (6.35)$$

то состояние частицы прочно, а если для некоторого $n = k$

$$M_k(\Omega) \geq \Omega_k^{cr}, \quad (6.36)$$

то происходит (при невыполнении условий устойчивости процесса закритической деформации, о чем будет сказано далее) разрушение "типа k ". Стремление к учету хотя бы двух различных видов разрушения (например, от отрыва и от сдвига) приводит к необходимости рассмотрения не менее двух мер повреждений.

Для неупругих склерономных материалов при однократном нагружении критерий разрушения (6.36) эквивалентен одному из неравенств

$$f_n(j_\varepsilon^{(1)}, \dots, j_\varepsilon^{(m)}) \geq C_n, \quad (6.36)$$

где $j_\varepsilon^{(m)}$ — независимые инварианты тензора деформаций, C_n — константы материала, f_n — некоторые универсальные функции.

Для изотропных сред, не проявляющих деформационную анизотропию, инвариантными мерами тензора Ω являются функции k и g . Допустим, что существуют критические (соответствующие критическим состояниям материала) значения функций поврежденности

при растяжении κ_{cr}^+ , сжатии κ_{cr}^- и сдвиге g_{cr} , а критерии разрушения могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi_1(\kappa, \kappa_{cr}^-) = 0, \quad \Phi_2(\kappa, \kappa_{cr}^+) = 0, \quad \Phi_3(g, g_{cr}) = 0. \quad (6.38)$$

Если κ и g являются функциями единственных аргументов: $\kappa(\bar{j}_\epsilon^{(1)})$ и $g(\bar{j}_\epsilon^{(2)})$, то критериям (6.38) соответствуют условия прочности

$$\bar{j}_\epsilon^{(1)} > \bar{j}_{\epsilon cr}^{(1)-}, \quad \bar{j}_\epsilon^{(1)} < \bar{j}_{\epsilon cr}^{(1)+}, \quad \bar{j}_\epsilon^{(2)} < \bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)}. \quad (6.39)$$

Простейшие условия критических состояний для трансверсально-изотропных и ортотропных сред записываются аналогично:

$$j_\epsilon^{(n)} = j_{\epsilon cr}^{(n)}, \quad I_\epsilon^{(n)} = I_{\epsilon cr}^{(n)}. \quad (6.40)$$

При этом используются наборы независимых инвариантов (6.20) и (6.33).

Представляется целесообразным рассмотрение моделирования разрушения еще в одном аспекте, а именно, с точки зрения необходимости учета многостадийности процесса потери несущей способности и пригодности для описания этой особенности деформирования материалов также совокупности критериев.

Вследствие неоднородности напряженного состояния, что особенно характерно для композитов, в объеме деформируемого тела возникают зоны, для которых не выполняются условия прочности. Ответить на вопрос, приведет ли разрушение микрочастицы к разрушению деформируемого тела, можно только, описав процесс перераспределения напряжений и, возможно, возникающего разрушения соседних частиц. Естественно, что для этого необходимо иметь данные или сделать предположения о том, какими свойствами обладает частица материала, разрушенная по некоторому механизму. Возможно, в результате перераспределения напряжений эта частица и далее будет вносить свой вклад в сопротивление внешней нагрузке.

Предположим, что разрушение по одному из критериев приводит к потере материалом способности сопротивляться воздействию лишь определенного вида, т.е. к частичной потере несущей способности. Формально это может быть выражено в скачкообразном увеличении до единицы некоторых компонент тензора поврежденности. Условием полной потери несущей способности элементарного объема материала будем считать удовлетворение всей совокупности критериев разрушения. Согласно этим предположениям тело, находящееся в условиях однородного напряженного состояния, может потерять способность воспринимать нагрузку, действующую к моменту этой потери, в результате совершения одного или нескольких актов разрушения различных типов, не испытав, однако, полной потери несущей способности. Благодаря коллективному взаимодействию частиц структурно-неоднородного тела (или однородного в неоднородном поле напряже-

ний) их прочностные ресурсы в некоторых случаях могут быть использованы более полно.

Схемы изменения характеристик поврежденности в зависимости от типа разрушения и соответствующие критерии частичной потери несущей способности для изотропных, трансверсально изотропных и ортотропных материалов приведены в таблицах 6.1, 6.2 и 6.3.

Т а б л и ц а 6.1

Совокупность критериев разрушения и схема изменения характеристик изотропных сред

Вариант	Механизм разрушения	Критерий	Поврежденность	
			κ	ξ
1	Сдвиг	$\bar{j}_e^{(2)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(2)}$ $\bar{j}_e^{(1)} < 0$	κ^0	1
2	Сдвиг	$\bar{j}_e^{(2)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(2)}$ $\bar{j}_e^{(1)} > 0$	1	1
3	Сдвиг	$\bar{j}_e^{(2)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(2)}$	κ^0	1
	Отрыв	$\bar{j}_e^{(1)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(1)}$	1	1

Т а б л и ц а 6.2

Совокупность критериев разрушения и схема изменения характеристик трансверсально изотропных сред

Вариант	Частичная потеря несущей способности	Критерий	Поврежденность				
			κ	φ	ξ	ρ_{\perp}	ρ_{\parallel}
1	От растяжения (сжатия) вдоль слоев (поперек волокон)	$\bar{j}_e^{(1)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(1)}$	1	1	ξ^0	1	ρ_{\parallel}^0
2	От растяжения (сжатия) поперек слоев (вдоль волокон)	$\bar{j}_e^{(2)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(2)}$	κ^0	1	1	ρ_{\perp}^0	1
3	От формоизменения в плоскости слоев (поперек волокон)	$\bar{j}_e^{(3)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(3)}$	1	1	ξ^0	1	ρ_{\parallel}^0
4	От продольного сдвига	$\bar{j}_e^{(4)} = \bar{j}_{e\text{сг}}^{(4)}$	κ^0	1	1	ρ_{\perp}^0	1

Краевые задачи механики композитов часто являются стохастическими, так как содержат случайные величины, функции и поля. Вероятностный характер задач обусловлен не только случайной структурой, но и недетерминированностью материальных функций, входящих в определяющие соотношения, компонентов композитов и статистическим разбросом их прочностных свойств в условиях (6.35).

Т а б л и ц а 6.3

Совокупность критериев разрушения и схема изменения характеристик ортотропных сред

Вариант	Механизм частичной потери несущей способности	Критерий	Поврежденность								
			λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
1	Отрыв при растяжении в направлении x_1	$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{cr}$	1	λ_2^0	λ_3^0	1	λ_5^0	1	1	λ_8^0	1
2	Отрыв при растяжении в направлении x_2	$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{cr}$	λ_1^0	1	λ_3^0	1	1	λ_6^0	1	1	λ_9^0
3	Отрыв при растяжении в направлении x_3	$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{cr}$	λ_1^0	λ_2^0	1	λ_4^0	1	1	λ_7^0	1	1
4	Сдвиг в плоскости x_1x_2	$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{cr}$	1	1	λ_3^0	1	1	1	1	1	1
5	Сдвиг в плоскости x_2x_3	$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}^{cr}$	λ_1^0	1	1	1	1	1	1	1	1
6	Сдвиг в плоскости x_1x_3	$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^{cr}$	1	λ_2^0	1	1	1	1	1	1	1

В качестве инвариантных детерминированных мер процессов структурного разрушения можно использовать одно- и многоточечные вероятности микроразрушений для каждого возможного механизма. Определим их следующими соотношениями:

$$P_k(r) = P[M_k(\Omega, r) \geq \Omega_k^{cr}(r)],$$

$$P_k(r_1, r_2) = P[M_k(\Omega, r_1) \geq \Omega_k^{cr}(r_1), M_k(\Omega, r_2) \geq \Omega_k^{cr}(r_2)] \text{ и т.д.,}$$

где $P[a]$ — вероятность события a .

В наиболее простом случае предполагается, что представительный элементарный объем композита содержит элементы структуры, разрушенные по всем вероятным механизмам из рассматриваемой сово-

купности, и объемные доли этих элементов могут быть рассчитаны на основании односточечных вероятностей микроразрушений. Итерационная процедура решения нелинейной в физическом и статистическом смысле краевой задачи продолжается до тех пор, пока из сравнения решений на j -м и $(j + 1)$ -м шаге во всех точках объема не будут выполняться условия для всех возможных значений k :

$$|M_k^{(j+1)}(\Omega) - M_k^{(j)}(\Omega)| < \delta, \quad |P_k^{(j+1)} - P_k^{(j)}| < \varepsilon,$$

где δ и ε — малые положительные наперед заданные величины.

Выполнение второй группы условий свидетельствует о том, что заданные воздействия (например, макронапряжения) приводят к разрушению компонентов композита, но недостаточны для разрушения элементарного макрообъема, т.е. макрочастицы композита в целом.

Одно из направлений теории накопления повреждений структурно-неоднородных тел связано с установлением функциональных связей между вероятностями микро- и макроразрушений.

Постановка краевой задачи для тела, при деформировании которого возможно появление зон разрушения, может быть облегчена, если в определяющих соотношениях явным образом учесть скачкообразное изменение деформационных свойств материала. С этой целью введем индикаторный тензор P — тензор изменения деформационных свойств в критических поврежденных состояниях, компоненты которого могут скачком изменять свои значения от нуля до единицы в случае невыполнения соответствующего условия прочности из совокупности.

Определяющие соотношения запишем в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(I_{klmn} - \Omega_{klmn})(I_{mnpq} - P_{mnpq})\varepsilon_{pq} \quad (6.41)$$

с использованием тензоров, описывающих деформационные свойства среды: упругие (тензор C), неупругие (тензор Ω), а также и прочностные (тензор P). Для изотропного материала

$$P_{ijmn} = p_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + p_2 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad \kappa^I = 3p_1 + 2p_2, \quad g^I = 2p_2,$$

$$\sigma_{ij} = [3K(1 - \kappa)(1 - \kappa^I)V_{ijmn} + 2G(1 - g)(1 - g^I)H_{ijmn}]\varepsilon_{mn}.$$

Индикаторные функции $\kappa^I(\kappa, g)$ и $g^I(\kappa, g)$ задаются с помощью обобщенных функций и констант κ_{cr}^+ , κ_{cr}^- и g_{cr} .

Рассмотрим выражение для коэффициента Пуассона поврежденного материала, соответствующее данным уравнениям состояния:

$$\nu_{dam} = \frac{K(1 - \kappa)(1 - \kappa^I) - (2/3)G(1 - g)(1 - g^I)}{2K(1 - \kappa)(1 - \kappa^I) + (2/3)G(1 - g)(1 - g^I)}.$$

Как видно, известным теоретическим пределам изменения коэффициента Пуассона от -1 до $0,5$ [106] соответствуют значения $\kappa^I = 1$

(при $g^I \neq 1$) и $g^I = 1$ (при $\kappa^I \neq 1$). Если $\kappa^I = 1$, то изменение объема тела не вызывает в нем напряжений, а при $g^I = 1$ напряжения не сопровождают формоизменение.

Таким образом, коэффициент Пуассона можно рассматривать как параметр, отражающий для данного материала соотношение двух свойств: сопротивляемости изменению объема и сопротивляемости формоизменению.

В дальнейшем функции $\kappa^I(\kappa, g)$ и $g^I(\kappa, g)$ будем задавать так, чтобы коэффициент поперечной деформации изотропной среды был положительным, поскольку это в большей степени соответствует опыту.

6.4. Граничные условия с учетом свойств нагружающей системы

Важность понятия "нагружающая система" с точки зрения исследования процессов деформирования и разрушения была отмечена в [278]. Дадим следующее определение этого понятия.

Нагружающая система — это совокупность твердых, жидких и/или газообразных тел, деформирующихся в результате передачи нагрузки рассматриваемой области. При изменении состояния, например, при повреждении среды, в этой области внешняя по отношению к ней нагрузка изменяется в зависимости от упругих свойств и конструктивного устройства нагружающей системы.

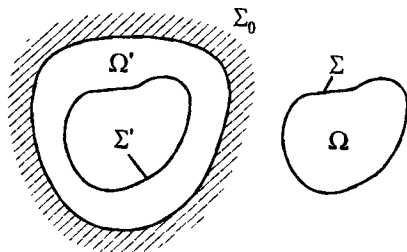


Рис. 6.1. Модель нагружающей системы

Непосредственное включение нагружающей системы как совокупности деформируемых тел в расчетную схему или краевую задачу является далеко не всегда рациональным и часто невозможным, так как приводит к неоправданному усложнению рассматриваемой области. Учесть же влияние нагружающей системы, тем не менее, можно на основе введения характеризующего "оператора влияния" [105], устанавливающего связь силовых и кинематических величин во всех граничных точках нагружающей системы, которые могут вступить во взаимодействие с исследуемой областью. При этом, характеризующий оператор должен строиться для нагружающей системы в отдельности, без учета деформируемого тела. Влияние нагружающей системы может быть учтено путем включения указанного оператора в краевые условия для деформируемой области.

Рассмотрим изображенные на рис. 6.1 деформируемое тело Ω с границей Σ и в отдельности от него некоторую фиктивную ограниченную двусвязную область упругого материала Ω' с жестко закреп-

ленной внешней границей и внутренней поверхностью Σ' , мало отличающейся от Σ . Деформируемое тело Ω' будет в дальнейшем играть роль нагружающей системы.

В каждой точке $\mathbf{r} \in \Omega'$ справедливы уравнения равновесия, геометрические соотношения Коши и физические уравнения теории упругости. К точкам поверхности Σ' приложим усилия $-S_i^0$, такие что вызванные ими перемещения $-u_i^0$ граничных точек обеспечат совпадение конфигураций поверхностей Σ' и Σ .

Связь указанных величин описывается уравнениями [207]:

$$u_i^0(\mathbf{r}') = \int_{\Sigma} G_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) S_j^0(\mathbf{r}) d\Sigma, \quad (6.42)$$

где $G_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ — тензор Грина для области Ω' .

Указанный тензор характеризует свойство податливости тела Ω' как нагружающей системы и устанавливает связь между перемещениями точек границы области Ω' и вызвавшими их усилиями, приложенными на той же границе, при отсутствии тела Ω . Если известен характеризующий свойство жесткости нагружающей системы тензор $N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, то в аналогичных условиях отсутствия тела Ω можно записать и обратные соотношения:

$$S_i^0(\mathbf{r}') = \int_{\Sigma} N_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) u_j^0(\mathbf{r}) d\Sigma, \quad (6.43)$$

Тензор $N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, как и тензор Грина, однозначно определяется упругими свойствами и геометрией тела Ω' .

Построение тензоров $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ и $N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ представляет собой специальную задачу, которая в случае дискретного представления эквивалентна задаче нахождения матрицы влияния Ильюшина [105, 207] или обратной ей.

Мысленно поместим внутрь области Ω' тело Ω без деформации последнего, поскольку осуществленные перемещения точек поверхности обеспечивают совпадение конфигураций Σ' и Σ . Идеально скрепив тела по границе раздела, снимем усилия $-S_i^0$. В результате совместной деформации двух областей на границе $\Sigma \in \Omega$ возникнут усилия

$$S_i(\mathbf{r}') = S_i^0(\mathbf{r}') - \int_{\Sigma} N_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}) d\Sigma, \quad (6.44)$$

а точки границы раздела претерпят перемещения

$$u_i(\mathbf{r}') = u_i^0(\mathbf{r}') - \int_{\Sigma} G_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) S_j(\mathbf{r}) d\Sigma. \quad (6.45)$$

Представим связь величин $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$ в тензорно линейной записи:

$$S_i^0 = R_{ij}u_j^0, \quad u_i^0 = Q_{ij}S_j^0, \quad R_{ik}Q_{kj} = \delta_{ij}. \quad (6.46)$$

Соответствующие коэффициенты пропорциональности $R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{u}^0)$ и $Q_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{S}^0)$ при заданных во всех точках границы значениях $u_i^0(\mathbf{r})$ и $S_i^0(\mathbf{r})$, согласно (6.42) и (6.43), находятся из уравнений

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}')u_j^0(\mathbf{r}') &= \int_{\Sigma} N_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r})u_j^0(\mathbf{r})d\Sigma, \\ Q_{ij}(\mathbf{r}')S_j^0(\mathbf{r}') &= \int_{\Sigma} G_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{r})S_j^0(\mathbf{r})d\Sigma. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Если принять допущение, что величины $(S_i^0 - S_i)$ в произвольной точке границы с текущей координатой \mathbf{r} не зависят от величин $(u_i^0 - u_i)$ во всех точках границы, кроме рассматриваемой, а изменение коэффициентов жесткости $R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ на интервале от \mathbf{u}^0 до \mathbf{u} пренебрежимо мало, то уравнения (6.44) для всех $\mathbf{r} \in \Sigma$ можно представить в упрощенном варианте:

$$S_i^0(\mathbf{r}) - S_i(\mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{u}^0)u_j(\mathbf{r}). \quad (6.48)$$

В результате принятия аналогичных упрощающих гипотез из (6.45), (6.42) и (6.46) следуют уравнения

$$u_i^0(\mathbf{r}) - u_i(\mathbf{r}) = Q_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{S}^0)S_j(\mathbf{r}) \quad (6.49)$$

и становится очевидным переход к граничным условиям контактного типа [202], сформулированным с учетом конечной и ненулевой жесткости нагружающей системы [49]:

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r}) + R_{ij}(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})]|_{\Sigma_S} = S_i^0(\mathbf{r}), \quad (6.50)$$

$$[u_i(\mathbf{r}) + Q_{ij}(\mathbf{r})\sigma_{jk}(\mathbf{r})n_k(\mathbf{r})]|_{\Sigma_u} = u_i^0(\mathbf{r}), \quad (6.51)$$

где $n_k(\mathbf{r})$ — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности тела Ω в точке с координатой \mathbf{r} .

Величины S_i^0 и u_i^0 на границе $\Sigma = \Sigma_S + \Sigma_u$ связаны соотношениями (6.46), из которых следует взаимная обратность уравнений (6.50) и (6.51), что в общем случае позволяет использовать граничные условия одного вида для всей поверхности.

Согласно рассмотренным краевым условиям, на части границы области Ω номинально, т.е. без учета ее сопротивления внешней нагрузке, заданы перемещения $u_i^0(\mathbf{r} \in \Sigma_u)$ в соответствии с выбранной программой деформирования. На другом участке поверхности также номинально, в данном случае без учета деформации тела Ω и, соответственно, перемещений его граничных точек, заданы внешние усилия $S_i^0(\mathbf{r} \in \Sigma_S)$, определяемые выбранной программой нагружения.

Действительные перемещения u_i и усилия $S_i = \sigma_{ij}n_j$ определяются взаимодействием деформируемого тела и нагружающей системы.

Такой же вид имеют граничные условия, если устройство нагружающей системы таково, что изменение прикладываемого внешнего усилия в любой точке границы определяется только вызванным деформацией тела перемещением указанной точки и не зависит (или почти не зависит) от перемещений всех других точек границы. В этом случае жесткость и податливость нагружающей системы определяются следующим образом:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{u}^0) = \frac{\partial S_i^0(\mathbf{r})}{\partial u_j^0(\mathbf{r})}, \quad Q_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{S}^0) = \frac{\partial u_i^0(\mathbf{r})}{\partial S_j^0(\mathbf{r})}, \quad (6.52)$$

В приведенных граничных условиях явным образом учитывается изменение внешних нагрузок, связанное с изменением конфигурации тела вследствие деформации или повреждения, чем обычно пренебрегают, когда деформации малы. Однако, подобно тому, как малые деформации могут привести к весьма большим напряжениям и являются предметом изучения механики деформируемого твердого тела, так и малые перемещения границ при высокой жесткости системы нагружения являются причиной резкого изменения внешних нагрузок и заслуживают внимания. Это, по-видимому, в первую очередь, относится к задачам теории устойчивости и механики разрушения.

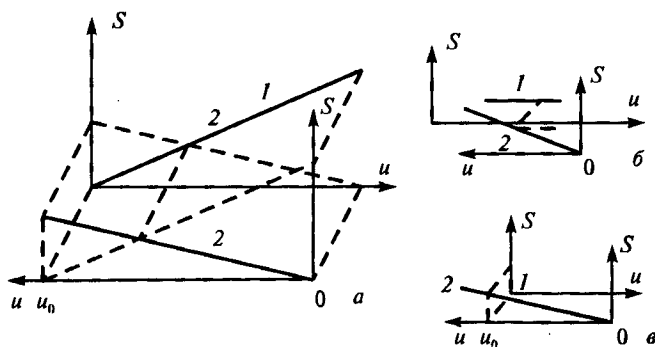


Рис. 6.2. Иллюстрация взаимодействия нагружающей системы (характеристика 1) и деформируемого тела (характеристика 2): а — общий одномерный случай, б — абсолютно "мягкое" нагружение, в — абсолютно "жесткое" нагружение

Рассмотренные граничные условия дополняют задачу информацией о свойствах нагружающей системы и позволяют описывать перераспределение механической энергии между ней и деформируемым телом при повреждении последнего.

Соотношения (6.50) и (6.51) относятся к известному, так называемому, третьему типу краевых условий в задачах математической физики, согласно которым на границе задаются не значения функции

(первый тип краевых условий, задача Дирихле) или ее производной (второй тип, задача Неймана) в отдельности, а некоторая их комбинация [242, 271].

В предельных случаях "мягкого" или "жесткого" нагружений (при $R_{ij} = 0$ либо $Q_{ij} = 0$, на участке свободной поверхности $S_i^0 = 0$ и $R_{ij} = 0$) граничные условия (6.50) и (6.51) по форме совпадают с традиционно используемыми.

Схематично взаимодействие деформируемого тела и нагружающей системы проиллюстрировано на рис. 6.2. Некоторые варианты граничных условий, записанные с учетом жесткости нагружающего устройства, для различных технических систем приведены в работе [49]. Здесь же отмечено, что повышение жесткости нагружающего

устройства осуществимо с помощью специальных технических средств, например, клина или накладок.

Приведенная формулировка граничных условий позволяет учесть отличие реального процесса нагружения или деформирования от номинально задаваемого. Важной характеристикой режима нагружения является его скорость. Покажем, что реальная скорость нагружения отличается от номинальной в зависимости от свойств нагружающей системы.

Рис. 6.3. Степень отличия реальных скоростей нагружения и деформирования от номинальных в зависимости от жесткости нагружающей системы

Пусть краевая задача решена, и известна связь между усилиями и перемещениями любой точки на границе тела при заданных условиях нагружения:

$$S_i = H_{ij}u_j, \quad u_i = P_{ij}S_j, \quad H_{ij}P_{jk} = \delta_{ik}. \quad (6.53)$$

Здесь H_{ij} и P_{ij} — коэффициенты, определяемые свойствами деформируемого тела. С учетом последних соотношений из уравнений (6.46), (6.50) и (6.51) следует, что

$$S_i = \frac{S_k^0}{\delta_{ik} + P_{ij}P_{jk}}, \quad u_i = \frac{u_k^0}{\delta_{ik} + Q_{ij}H_{jk}}. \quad (6.54)$$

Если свойства нагружающей системы и деформируемого тела не зависят от времени, то становятся очевидными соотношения, связывающие скорости изменения силовых и кинематических величин ($\dot{S}_i^0 = dS_i^0/dt$, $\dot{S}_i = dS_i/dt$, $\dot{u}_i^0 = du_i^0/dt$, $\dot{u}_i = du_i/dt$):

$$\dot{S}_i = \frac{\dot{S}_k^0}{\delta_{ik} + P_{ij}P_{jk}}, \quad \dot{u}_i = \frac{\dot{u}_k^0}{\delta_{ik} + Q_{ij}H_{jk}}. \quad (6.55)$$

В одномерном случае последние соотношения проиллюстрированы на рис. 6.3. Чем выше жесткость нагружающей системы, тем ближе режим деформирования к $u^0(t)$. Чем выше податливость нагружающей системы, тем ближе режим нагружения к $S^0(t)$.

Таким образом, реальная скорость нагружения отличается от номинальной при ненулевой жесткости нагружения, а реальная скорость перемещения граничных точек отличается от номинальной при ненулевой податливости нагружения.

Из уравнений (6.54) следует еще один вывод: пропорциональное нагружение имеет место, если номинально задаваемые усилия могут быть представлены соотношениями в виде $S_k^0 = \lambda \tilde{S}_k$, где λ — параметр нагружения, а величины \tilde{S}_k изменяются таким образом, что вектор с компонентами $(\delta_{ik} + R_{ij}P_{jk})^{-1} \tilde{S}_k$ остается неизменным.

6.5. Краевая задача механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел

Для описания процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел используем описанную во второй главе двухуровневую структурно-феноменологическую модель механики композиционных материалов [247]. Пусть некоторое тело содержит в себе множество разделенных отчетливыми границами однородных элементов структуры с различными механическими свойствами, а характерные размеры элементов много больше молекулярно-кинетических размеров и много меньше расстояний, на которых существенно меняются средние или макроскопические параметры.

Исследование механического поведения элементов структуры будем осуществлять на основе моделей механики деформируемого твердого тела, выделив элементарные микрообъемы dV , имеющие размеры во много раз меньшие, чем характерные размеры неоднородностей, и приписав им свойства, определяемые экспериментально на однородных образцах.

Макроскопические процессы деформирования композитов также опишем в рамках представлений однородной сплошной среды, выделив из композиционного тела элементарный макрообъем dV . Размеры элементарного макрообъема, как было отмечено, находятся в отношении того же порядка к размерам тела, что и размеры элементарного микрообъема к характерному размеру элемента структуры. Объем dV должен содержать достаточно большое число элементов структуры, чтобы быть представительным и обладать эффективными свойствами. Справедливость постулата макрофизической определенности на макроуровне означает, что существуют образцы конечных размеров из композита, которые могут считаться квазиоднородными и на которых можно экспериментально установить связь между процессами изменения средних напряжений и деформаций.

Будем считать, что все уравнения и критерии, относящиеся к однородным материалам и приведенные в настоящей главе, пригодны для описания поведения композитов на структурном уровне. Тогда структурные (или микро-) напряжения при заданных массовых силах X удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) + X_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.56)$$

а тензор структурных деформаций связан с вектором структурных перемещений соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})]. \quad (6.57)$$

В этом случае определяющие соотношения микронеоднородной среды

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \mathfrak{D}_{ij}[a_{kl}(\mathbf{r}), \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}), f_m, C_m] \quad (6.58)$$

представлены как уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Через коэффициенты $a_{kl}(\mathbf{r})$, определенные с использованием индикаторных функций $\kappa^{(i)}(\mathbf{r})$ (2.4) согласно (2.5), задается исходная информация о структуре и свойствах среды. Эти коэффициенты являются либо детерминированными периодическими, либо случайными однородными функциями.

Совокупность критериев разрушения (или критических состояний) для элементов структуры представляется в виде

$$f_m(b_1, \dots, b_n, j_\varepsilon^{(1)}, \dots, j_\varepsilon^{(n)}) = C_m, \quad (6.59)$$

где

$$b_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^j b_k^{(i)} \kappa^{(i)}(\mathbf{r}), \quad C_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^j C_k^{(i)} \kappa^{(i)}(\mathbf{r}),$$

b_k — коэффициенты, являющиеся структурными параметрами когезионного разрушения, C_k — прочностные характеристики элементов структуры.

Уравнения (6.56) — (6.59) совместно с граничными условиями (6.50) и (6.51) образуют постановку статической краевой задачи механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. Кроме того, напряжения и перемещения на поверхности раздела элементов структуры удовлетворяют условиям контакта, а постановка задачи может быть дополнена условиями адгезионного разрушения.

Для любого распределения в теле Ω с границей Σ напряжений σ_{ij} , уравновешенного внешними S_i и массовыми силами X_i , и для любого поля перемещений u_i с соответствующим ему распределением деформаций ε_{ij} справедливо уравнение:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} X_i u_i d\Omega + \int_{\Sigma} S_i u_i d\Sigma. \quad (6.60)$$

Приведенное тождество называется уравнением виртуальных работ [128] или математическим выражением известной теоремы Клапейрона [201]. Согласно граничным условиям (6.50) и (6.51),

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} X_i u_i d\Omega + \int_{\Sigma_S} (S_i^0 - R_{ik} u_k) u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_u} (u_i^0 - Q_{ik} S_k) S_i d\Sigma. \quad (6.61)$$

Разделение поверхностного интеграла на два является необязательным, поскольку используемые граничные условия могут быть приведены к единому виду на всей поверхности.

Полученное соотношение позволяет дать несколько отличную от традиционной формулировку теоремы Клапейрона.

Теорема 6.1. Пусть $\forall r \in \Omega$ справедливы (6.56) и (6.57), а $\forall r \in \Sigma(\Omega)$ $\sigma_{ij} n_j = S_i^0 - R_{ij} u_j$, тогда работа номинально заданных граничных усилий на действительных перемещениях определяется соотношением

$$\int_{\Sigma} S_i^0 u_i d\Sigma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - X_i u_i) d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij} u_j u_i d\Sigma, \quad (6.62)$$

включающем удвоенное значение упругой энергии нагружающей системы, соответствующее действительным перемещениям граничных точек.

Если $\forall r \in \Sigma(\Omega)$ $u_i = u_i^0 - Q_{ij} \sigma_{jk} n_k$, то работа действительных усилий на номинально заданных перемещениях, определяемая по формуле

$$\int_{\Sigma} u_i^0 S_i d\Sigma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - X_i u_i) d\Omega + \int_{\Sigma} Q_{ij} S_j S_i d\Sigma, \quad (6.63)$$

включает в себя удвоенное значение упругой энергии нагружающей системы, соответствующее действительным граничным усилиям.

Ограничимся рассмотрением макроскопически однородных композиционных материалов. Для установления связи макронапряжений и макродеформаций:

$$\sigma_{ij}^* = \mathfrak{S}_{ij}^*(a_{kl}, \varepsilon_{kl}^*) \quad (6.64)$$

также могут быть использованы определяющие соотношения, выведенные в настоящей главе. Входящие в них материальные функции, выражающие эффективные свойства рассматриваемых композитов, будем определять на основании решения сформулированной краевой задачи для представительного объема при условиях на границе Σ_V :

$$[s_{ij} n_j(\mathbf{r}) + R_{ij}(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r})]_{\Sigma_V} = S_i^0(\mathbf{r}) \quad (6.65)$$

или

$$[e_{ij} r_j + Q_{ij}(\mathbf{r}) \sigma_{jk}(\mathbf{r}) n_k(\mathbf{r})]_{\Sigma_V} = u_i^0(\mathbf{r}), \quad (6.66)$$

особенность которых, связанная с учетом жесткости или податливости нагружающей системы, заключается в том, что вид функций $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$, обеспечивающих реализацию макронапряжений $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$ или макродеформаций $\epsilon_{ij}^* = e_{ij}$, должен быть задан, но может быть заранее не известен. В этом случае необходима организация специальных итерационных процедур корректировки функций $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$.

Определив из решения краевой задачи в n -м приближении усилия $S_i^{(n)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})$ и перемещения $u_i^{(n)}(\mathbf{r})$ граничных точек области при заданных значениях $S_i^{0(n)}(\mathbf{r})$ или $u_i^{0(n)}(\mathbf{r})$, можно вычислить характеристики жесткости $H_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ и податливости $P_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ деформируемой системы, введенные в § 6.4:

$$S_i^{(n)}(\mathbf{r}) = H_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})u_j^{(n)}(\mathbf{r}), \quad u_i^{(n)}(\mathbf{r}) = P_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})S_j^{(n)}(\mathbf{r}). \quad (6.67)$$

В общем случае, указанная операция связана с рассмотрением совокупности краевых задач при различных наборах функций $S_i^{0(n)}(\mathbf{r})$ и $u_i^{0(n)}(\mathbf{r})$. Очередное приближение вычисляется при значениях

$$\begin{aligned} S_i^{0(n+1)}(\mathbf{r}) &= [\delta_{ik} + R_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})P_{jk}^{(n)}(\mathbf{r})]s_{ki}n_i(\mathbf{r}), \\ u_i^{0(n+1)}(\mathbf{r}) &= [\delta_{ik} + Q_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})H_{jk}^{(n)}(\mathbf{r})]e_{ki}r_l. \end{aligned} \quad (6.68)$$

В результате последовательных приближений определяются функции $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$, обеспечивающие с допустимой погрешностью в объеме dV макрооднородное напряженно-деформированное состояние.

При постановке краевой задачи для ячейки периодичности в случае, когда заданы макродеформации, могут быть использованы граничные условия (6.66). В связи с этим, остановимся на вопросе определения характеристик жесткости нагружающей системы $R_{ij}(\mathbf{r})$ (или податливости $Q_{ij}(\mathbf{r})$) применительно к анализу неоднородных сред периодической структуры.

Система нагружения по отношению к локальной зоне (ячейке периодичности) — это окружающая ее область материала, в пределах которой затухает возмущение, вызванное деформацией рассматриваемой локальной зоны. Опираясь на рассмотренный в § 2.3 принцип локальности, сделаем предположение в отношении характеристик жесткости нагружающей системы. Зависимость указанных характеристик от координат на границе выделенной локальной зоны определяется преимущественно расположением, формой, размерами и свойствами лишь ближайших к ней элементов структуры.

Учет свойств среды, заполняющей всю оставшуюся область затухания локальных возмущений, также необходим, но на основе сделанного предположения достаточно использовать информацию об эффективных свойствах среды.

Пусть геометрический центр произвольной ячейки периодичности совпадает с началом координат. Окружим выделенный типовой элемент структуры (ячейку периодичности) несколькими слоями аналогичных типовых элементов в соответствии со структурой рассматриваемой среды и поместим полученный ансамбль $\tilde{\omega}$ в область Ω (схема с одним слоем для сред с гексагональной и тетрагональной структурами изображена на рис. 6.4).

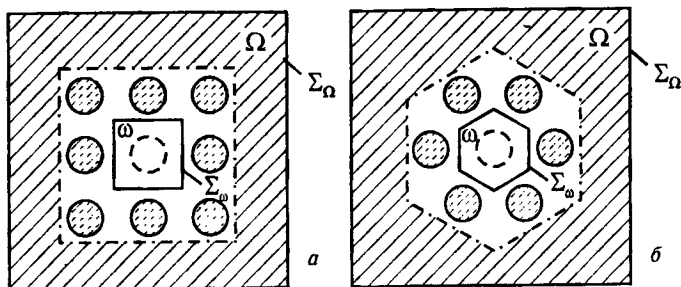


Рис. 6.4. К определению свойств нагружающей системы для среды с тетрагональной структурой (а) и для среды с гексагональной структурой (б)

Область $\Omega_1 = \Omega - \tilde{\omega}$ заполнена однородным материалом с заранее неизвестными эффективными свойствами.

Предположим, что мы знаем распределение напряжений на поверхности ячейки периодичности, соответствующих данной структуре и свойствам элементов, а также заданным макронапряжениям либо макродеформациям. Если мысленно "вырезать" центральный элемент ω области Ω и по свободному контуру приложить известные напряжения (т.е. считать ω генератором напряженно-деформированного состояния области Ω), то по мере удаления от ансамбля $\tilde{\omega}$ напряженно-деформированное состояние будет стремиться к однородному, а значение напряжений будет убывать. На достаточном удалении напряжения станут равны нулю. Это говорит об ограниченности области взаимодействия деформируемого материала ячейки периодичности с окружающей средой.

Следовательно, данная область взаимодействия и является нагружающей системой. Информацию о ее свойствах наиболее полно в численной реализации представляет матрица влияния, связывающая силы и перемещения во всех узлах на поверхности Σ_ω области $\Omega - \omega$.

Характеристики жесткости и податливости нагружающей системы на границе ячейки периодичности Σ_ω могут быть найдены из соотношений (6.46) в результате решения краевой задачи для области $\Omega - \omega$ при граничных условиях

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_\Omega} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_\omega} = S_i^0 \quad \text{либо} \quad u_i|_{\Sigma_\omega} = u_i^0. \quad (6.69)$$

Размер области Ω подбирается таким образом, чтобы значения

определяемых величин $R_{ij}(\mathbf{r})$ и $Q_{ij}(\mathbf{r})$ практически не изменялись при увеличении указанного размера.

В ряде случаев при заданных значениях макродеформаций перемещения точек на границе ячейки определяются из условий симметрии и периодичности. При этом анализ полей напряжений и деформаций в средах с регулярной структурой с учетом влияния нагружающей системы может быть осуществлен на базе решения краевой задачи для ячейки периодичности с граничными условиями (6.66) при использовании итерационной процедуры (6.68) корректировки функций $u_i^0(\mathbf{r})$.

При заданных макронапряжениях распределение структурных напряжений на границе ячейки периодичности при произвольной объемной концентрации элементов структуры заранее не известно. В этом случае можно воспользоваться предложенным авторами [247] и изложенным в пятой главе методом локального приближения, который позволяет от постановки задачи для представительного объема перейти к краевой задаче для ограниченного ансамбля структурных элементов, окруженного областью однородного материала. Если в качестве такого однородного материала выбрать среду с эффективными свойствами, то при достаточных размерах указанной области метод локального приближения позволит явным образом учесть влияние нагружающей системы на диссипативные процессы, проходящие в центральной ячейке.

Глава 7

Математическое моделирование процессов микро- и макроразрушения композиционных материалов¹

Макроскопическое разрушение неоднородных сред является результатом накопления повреждений на различных структурных уровнях. В условиях достаточной жесткости нагружающей системы процессы структурного разрушения композиционных материалов могут протекать в равновесном режиме и приводить к появлению таких эффектов неупругого поведения, как ниспадающая ветвь на диаграмме деформирования.

В настоящей главе исследуются основные закономерности квазистатических процессов деформирования, накопления повреждений и разрушения зернистых и волокнистых композитов. Анализируются зависимости инвариантов макронапряжений от инвариантов макродеформаций при различных схемах пропорционального макродеформирования, которые являются основой для построения определяющих соотношений на стадии деформационного разупрочнения. Исследуются вопросы многостадийности процессов накопления повреждений и условия перехода от микро- к макроразрушению. Обнаружен эффект роста предельных деформаций при увеличении коэффициентов жесткости нагружающей системы, входящих в граничные условия.

Разрабатывается новый вероятностный подход к моделированию стохастических процессов структурного разрушения, учитывающий все вероятные акты микроразрушений по совокупности критериев.

Некоторые из рассматриваемых в настоящей главе вопросов отражены также в работах авторов [42–46, 264].

7.1. Равновесные процессы структурного разрушения как причина деформационного разупрочнения

Для исследования кинетики накопления повреждений в неоднородных средах существует подход, в соответствии с которым материал заменяется системой структурных элементов с разными прочностными и,

¹ Параграфы 7.1–7.3 написаны при участии А.В. Зайцева

в общем случае, жесткостными характеристиками, а процесс накопления повреждений сводится к последовательному выходу из строя этих элементов. При этом, поскольку предполагается "квантовый" характер разрушения, в расчет принимаются усредненные по структурным элементам напряжения, а не коэффициенты интенсивности напряжений [225].

В качестве модели представительного объема зернистого композита, заполняющего область в виде куба, рассмотрим совокупность изотропных упруго-хрупких элементов структуры, каждый из которых ассоциирован с тетраэдральным конечным элементом. Будем считать, что структурные элементы рассматриваемого композиционного материала однородны и прочно соединены по границе раздела. Геометрия и взаимное расположение элементов заданы и не изменяются в процессе деформирования и разрушения среды, которая обладает свойством макроскопической однородности.

Пусть $\bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}(\mathbf{r})$ — инвариант тензора деформаций, соответствующий пределу прочности при формоизменении. В зависимости от вида напряженно-деформированного состояния реализуются различные повреждения при выполнении условия $\bar{j}_e^{(2)}(\mathbf{r}) \geq \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}$: полное разрушение элемента структуры в области положительных значений первого инварианта тензора деформаций и сохранение способности сопротивляться только гидростатическому сжатию в случае $\bar{j}_e^{(1)} \leq 0$. Скачкообразное изменение деформационных свойств описывается входящими в определяющие соотношения (6.5) материальными функциями вида

$$g(\bar{j}_e^{(2)}) = \begin{cases} 0, & \bar{j}_e^{(2)} < \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}, \\ 1, & \bar{j}_e^{(2)} \geq \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}; \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\kappa(\bar{j}_e^{(1)}, \bar{j}_e^{(2)}) = \begin{cases} 0, & (\bar{j}_e^{(2)} < \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}) \vee (\bar{j}_e^{(2)} \geq \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)} \wedge \bar{j}_e^{(1)} \leq 0), \\ 1, & \bar{j}_e^{(2)} \geq \bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)} \wedge \bar{j}_e^{(1)} > 0; \end{cases} \quad (7.2)$$

Инварианты тензоров структурных напряжений $\bar{j}_\sigma^{(*)}$ и деформаций $\bar{j}_e^{(*)}$ заданы уравнениями (6.6) и (6.7).

Деформирование и структурное разрушение среды будем исследовать как единый процесс, описываемый при квазистатическом нагружении краевой задачей, состоящей из замкнутой системы уравнений (6.5), (6.56), (6.57), (7.1), (7.2) и граничных условий (6.65).

Пусть случайные прочностные константы элементов структуры соответствуют трехпараметрическому распределению Вейбулла, функция распределения вероятностей которого:

$$F(\bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)} - \bar{j}_{e0}^{(2)}}{\bar{j}_{e\text{ cr}}^{(2)} - \bar{j}_{e0}^{(2)}} \right)^b \right], \quad (7.3)$$

где $\bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)} \geq 0$ — параметр минимальной прочности, $\bar{j}_{\epsilon a}^{(2)}$ — параметр характеристической прочности, $b > 0$ — параметр формы.

Параметры распределения связаны с коэффициентом вариации k_V и математическим ожиданием ($\bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)}$) случайной величины следующими соотношениями:

$$\bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)} = \langle \bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)} \rangle \left[1 - \frac{k_V C_1}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} \right], \quad \bar{j}_{\epsilon a}^{(2)} = \frac{k_V \langle \bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)} \rangle}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} + \bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)},$$

где $C_1 = \Gamma(1 + 1/b)$, $C_2 = \Gamma(1 + 2/b)$, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Методы статистического моделирования [190] позволяют получить случайные значения прочностных констант, описываемые законом (7.3). В частности, применение программ системы "Дубна" [83] позволяет генерировать псевдослучайные числа ξ , равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$ с периодом 2^{29} . В этом случае прочностные константы, соответствующие заданному распределению, определяются по формуле

$$\bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)} = \bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)} + (\bar{j}_{\epsilon a}^{(2)} - \bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)}) (-\ln \xi)^{1/b}. \quad (7.4)$$

Рассмотрим некоторые результаты численного моделирования процессов деформирования и накопления повреждений неоднородной среды с использованием описанной математической модели. Расчеты методом конечных элементов при пошаговом пропорциональном изменении значений компонент тензора макродеформаций были проведены для реализации представительного объема, содержащего 3072 элемента структуры с различными прочностными и одинаковыми упругими константами: $G = 4 \cdot 10^4$ МПа, $K = 6,7 \cdot 10^4$ МПа, $\langle \bar{j}_{\epsilon cr}^{(2)} \rangle = 2,5 \cdot 10^{-3}$, $k_V = 0,3$, $b = 3$.

Статистическая проверка соответствия полученных величин предполагаемому закону распределения осуществлялась с использованием критериев χ^2 Пирсона, Колмогорова–Смирнова и ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова с уровнем значимости 0,05 [3, 26].

На рис. 7.1 приведены расчетные зависимости для макронапряжений при пропорциональном макродеформировании рассматриваемой структурно-неоднородной среды по схеме: $\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,5 \epsilon_{33}^*$. Как видим, диаграмма деформирования в режиме предельно "жесткого" нагружения содержит множество скачков и не обрывается в наивысшей точке, а имеет ниспадающую ветвь. Скачки на диаграмме и ее нелинейный характер вызваны процессом структурного разрушения, который носит равновесный характер, начинается на восходящей части диаграммы и завершается, когда макронапряжения снижаются практически до нуля, а объемная доля разрушенных элементов достигает 59,1%.

Отметим, что подобные скачки на диаграммах деформирования композитов наблюдались рядом ученых при проведении эксперимен-

тальных исследований и также связывались ими с разрушением элементов структуры [215, 281, 324, 346]. Аналогичное явление, названное прерывистым деформированием, было обнаружено экспериментаторами при растяжении поликристаллических материалов, для которых на "жестких" испытательных машинах были получены равновесные диаграммы деформирования с ниспадающей ветвью [20], подобные приведенным.

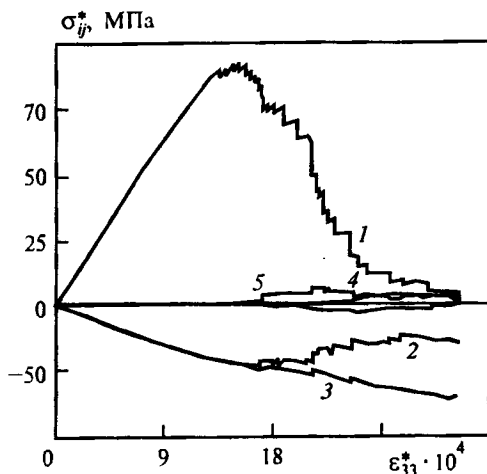


Рис. 7.1. Диаграммы деформирования композита при чистом формоизменении ($\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,5\epsilon_{33}^*$): 1 — σ_{33}^* , 2 — σ_{11}^* , 3 — σ_{22}^* , 4 — σ_{12}^* , 5 — σ_{13}^* , 6 — σ_{23}^*

Использование "жесткой" испытательной машины, на которой реализуется заданный процесс деформирования, а нагрузка является регистрируемой переменной, позволяет фиксировать зубцы на диаграммах (например, опыты Элам [20, с. 192 и 193]). В случае же "мягкого" нагружения, когда задается процесс изменения нагрузок, а деформация является регистрируемой переменной, прерывистости проявляются в форме ступеней на графике зависимости напряжение-деформация (например, опыт Белла [20, с. 279]).

На рис. 7.2 приведены расчетные зависимости макронапряжений от отрицательных макродеформаций ϵ_{33}^* при нулевых ϵ_{11}^* и ϵ_{22}^* . Поскольку исследуемый материал начально квазимакроизотропен, его механическое поведение характеризуется зависимостями двух инвариантов тензора макронапряжений $j_{\sigma}^{(*)}$ от двух инвариантов тензора макродеформаций $j_{\epsilon}^{(*)}$, вычисляемых также по формулам (6.6) и (6.7), но для макроразмеров σ_{ij}^* и ϵ_{ij}^* . Соответствующие зависимости и кривая накопления повреждений представлены на рис. 7.3. Точки А и А' на данных рисунках относятся к одному напряженно-деформированному состоянию, соответствующему началу закритической стадии дефор-

мирования, о чем свидетельствует начавшийся спад значений второго инварианта тензора макронапряжений, хотя, как видим, указанные точки не являются точками максимума на кривых макронапряжений и первого инварианта. Поврежденность среды в этом состоянии составляет 13,5%. В результате реализации закритической стадии деформирования в ходе численного эксперимента была достигнута степень поврежденности, составляющая 70,8% (точки B и B').

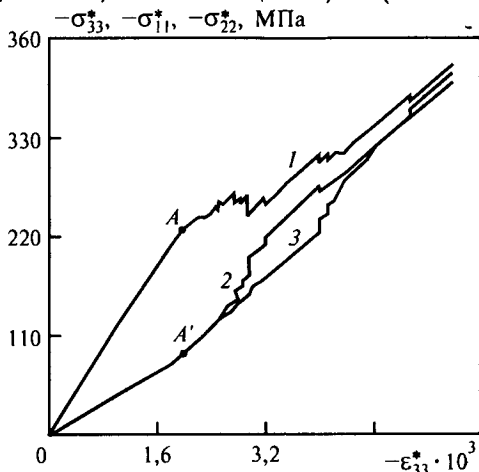


Рис. 7.2. Диаграммы одноосиного деформирования композита ($\epsilon_{33}^* < 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = 0$): 1 — σ_{33}^* , 2 — σ_{11}^* , 3 — σ_{22}^*

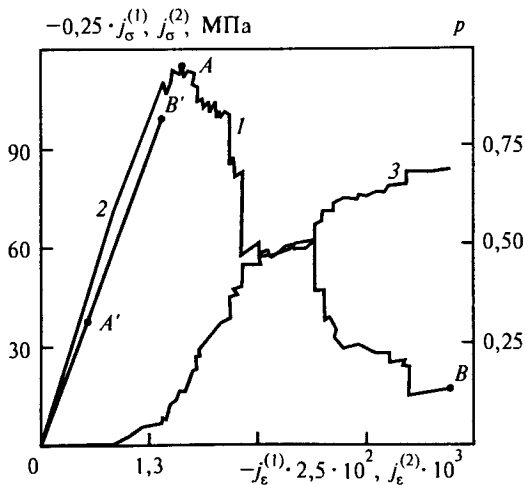


Рис. 7.3. Диаграммы одноосиного деформирования композита ($\epsilon_{33}^* < 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = 0$) в инвариантном виде и кривая накопления повреждений: 1 — $j_{\sigma}^{(2)}$, 2 — $j_{\sigma}^{(1)}$, 3 — $p(j_{\epsilon}^{(2)})$

В рассмотренных случаях наблюдались признаки некоторой деформационной анизотропии, вызванной неоднородным по объему накоплением повреждений. Этим объясняется расхождение зависимостей для σ_{11}^* и σ_{22}^* , как и появление ненулевых, хотя и малых, значений касательных напряжений. Однако на заключительной стадии процесса деформирования, проиллюстрированного на рис. 7.2, значения макронапряжений σ_{11}^* , σ_{22}^* и σ_{33}^* постепенно сближаются. Это связано с тем, что по мере увеличения доли разрушенных от сдвига, но сопротивляющихся сжатию, структурных элементов, неоднородная среда все более приобретает свойства сыпучего материала в условиях гидростатического сжатия.

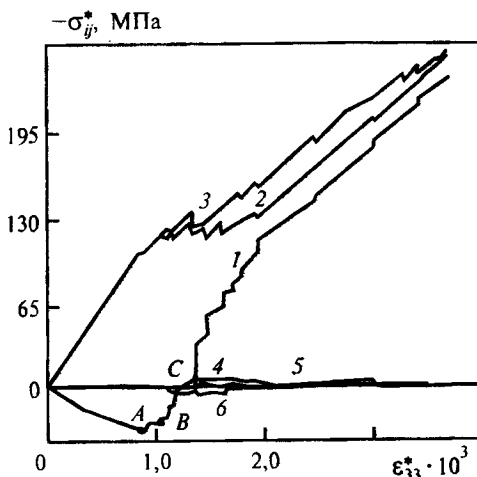


Рис. 7.4. Диаграммы деформирования зернистого композита ($\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -\epsilon_{33}^*$): 1 — σ_{33}^* , 2 — σ_{11}^* , 3 — σ_{22}^* , 4 — σ_{12}^* , 5 — σ_{13}^* , 6 — σ_{23}^*

Аналогичным образом ведет себя материал и при деформировании по схеме: $\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -\epsilon_{33}^*$. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 7.4 и 7.5. Также имеет место ниспадающая ветвь на зависимости $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(2)}$ для макровеличин. Причем, снижение напряжений начинается в точке А на диаграмме $\sigma_{33}^* \sim \epsilon_{33}^*$, чему соответствуют точки А и А' на рис. 7.5, при относительно небольшой доле разрушенных элементов — 4,9%. Однако лишь в точке В (соответственно В') при поврежденности 13,8% достигается максимальное значение второго инварианта тензора макронапряжений. Снижение напряжений обусловлено ростом доли разрушенных от сдвига и не сопротивляющихся объемоизменению элементов структуры.

В точке С на рис. 7.4 (соответственно С и С' на рис. 7.5) достигается степень повреждения 26,8%. Несмотря на то, что кривая $\sigma_{33}^* \sim \epsilon_{33}^*$ при этом приближается к нулевой отметке, потери несущей способности композита не происходит. Продолжение чи-

сленного эксперимента приводит к изменению знака компоненты σ_{33}^* тензора макронапряжений. Процессы перераспределения напряжений приводят к восстановлению способности сопротивляться гидростатическому сжатию у части структурных элементов, разрушенных ранее от формоизменения, и появлению признаков деформационной анизотропии. Зависимость между первыми инвариантами тензоров макронапряжений и макродеформаций при осуществляемом сжатии остается практически линейной. Изменение наклона ниспадающей ветви на участке DE кривой $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(2)}$ можно объяснить постепенным приобретением поврежденной средой свойств материала способного сопротивляться только гидростатическому сжатию. Деформирование неоднородного тела было остановлено при достижении степени поврежденности 78,6% (точки E и E').

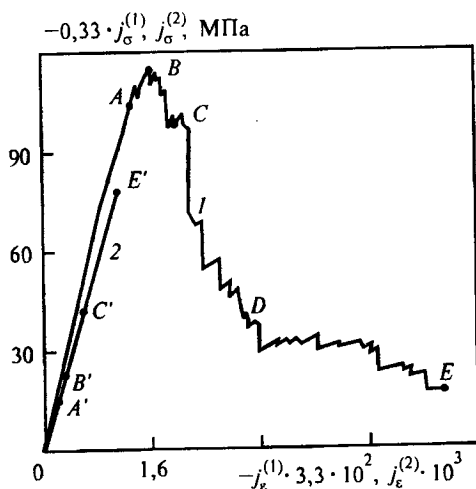


Рис. 7.5. Диаграммы деформирования в инвариантном виде ($\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -\epsilon_{33}^*$): 1 — $j_{\sigma}^{(2)}$, 2 — $j_{\sigma}^{(1)}$

Таким образом, полученные расчетные данные свидетельствуют о том, что структурное разрушение является, по крайней мере, одной из причин экспериментально подтвержденного существования ниспадающей ветви и скачков на диаграммах деформирования структурно-неоднородных материалов. Этот вывод согласуется с результатами, опубликованными в работах [125, 220].

С точки зрения построения определяющих соотношений представляет интерес зависимость сопротивления конструкционных материалов от вида напряженно-деформированного состояния [170], в частности, поведение квазиизотропной неоднородной среды при различных соотношениях шаровой и девиаторной частей тензора макродеформаций, или первого и второго инвариантов того же тензора. Очевидно,

что в условиях пропорционального "жесткого" нагружения это соотношение является постоянным.

На рис. 7.6 проиллюстрировано влияние макрооднородного напряженно-деформированного состояния на зависимость второго инварианта тензора макронапряжений от второго инварианта тензора макродеформаций.

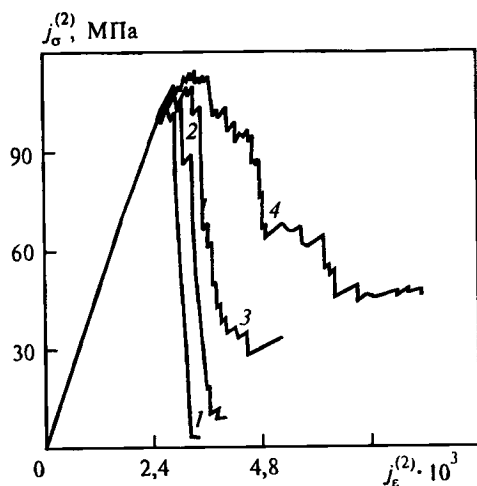


Рис. 7.6. Влияние вида напряженного состояния на характер деформирования: 1 — $\epsilon_{33}^* = 1,6\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = 0,1\epsilon$; 2 — $\epsilon_{33}^* = 1,4\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,1\epsilon$; 3 — $\epsilon_{33}^* = 1,2\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,3\epsilon$; 4 — $\epsilon_{33}^* = \epsilon$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,5\epsilon$ ($\epsilon > 0$)

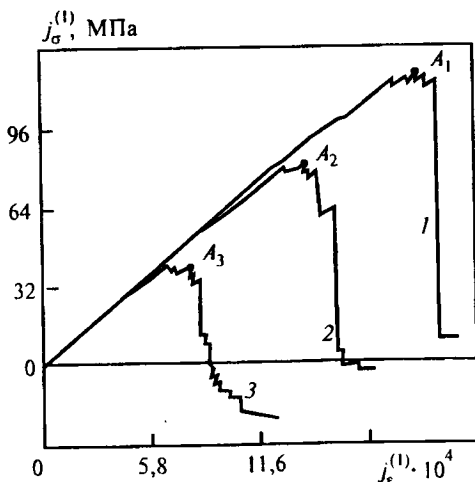


Рис. 7.7. Влияние вида напряженного состояния на характер деформирования: 1 — $\epsilon_{33}^* = 1,6\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = 0,1\epsilon$; 2 — $\epsilon_{33}^* = 1,4\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,1\epsilon$; 3 — $\epsilon_{33}^* = 1,2\epsilon$, $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = -0,3\epsilon$ ($\epsilon > 0$)

Единой кривой на закритической стадии деформирования не наблюдается: чем интенсивнее согласно выбранной схеме нагружения растет положительное значение $j_\varepsilon^{(1)}$ по мере роста $j_\varepsilon^{(2)}$, тем круче снижается диаграмма. Наиболее пологая ниспадающая ветвь (кривая 4) отмечена в случае, когда шаровая часть тензора макродеформаций отсутствовала. В то же время, на предел прочности первый инвариант тензора макродеформаций влияет не так существенно. В рассмотренных случаях максимально достигнутое значение $j_\sigma^{(2)}$ изменялось в пределах 10%.

Следует отметить также, что точки максимума на диаграммах $j_\sigma^{(1)} \sim j_\varepsilon^{(1)}$, приведенные на рис. 7.7, практически отвечают точкам максимума на диаграммах $j_\sigma^{(2)} \sim j_\varepsilon^{(2)}$: обозначениями A_k отмечены состояния материала, соответствующие максимумам на k -х кривых, представленных на рис. 7.6. При этом, максимально достижимое значение $j_\sigma^{(1)}$, в отличие от $j_\sigma^{(2)}$, очень существенно зависит от вида напряженно-деформированного состояния. Это свидетельствует о том, что переход на закритическую стадию деформирования определяется значением второго инварианта тензора макронапряжений, а спад по первому инварианту начинается как следствие достижения критического поврежденного состояния, вызвавшего спад диаграммы $j_\sigma^{(2)} \sim j_\varepsilon^{(2)}$. Достигнутое к этому моменту значение $j_\sigma^{(1)}$ может быть самым различным в зависимости от схемы нагружения.

Приведенные на рис. 7.6 и 7.7 кривые приводят к выводу, что процессу закритической деформации, отличающемуся большей положительной шаровой составляющей тензора макродеформаций, соответствует более крутой спад на диаграммах деформирования.

7.2. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение

На основе предложенной модели структурно-неоднородной среды исследуем вопросы многостадийности процессов накопления повреждений и влияния свойств нагружающей системы на формирование условий, определяющих переход от микро- к макроразрушению.

Обратим внимание на особенности учета граничных условий (6.50) и (6.51), записанных в приращениях, поскольку рассматривается пошаговое нагружение, при решении краевых задач методом конечных элементов. Проведем дискретизацию деформируемого тела Ω на N конечных элементов $\Omega^{(e)} \subset \Omega$. В дальнейшем все величины, относящиеся к конечному элементу, будут отмечены верхним индексом e . Пусть $[R]$ — симметричная матрица характеристик нагружающей системы, определенная в каждой точке поверхности Σ . Тогда составляющие $\{dS^{(e)}\}$ вектора свободных членов узлового ансамбля $\{dS\}$, соответствующие приращению номинально заданной распределенной

на участке Σ_S поверхностной нагрузки dS^0 , представим следующим образом:

$$\{dS^{(e)}\}_S = \int_{\Sigma_S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{dS^0\} d\Sigma - \int_{\Sigma_S^{(e)}} [N^{(e)}]^T [R] [N^{(e)}] d\Sigma \{du^{(e)}\}, \quad (7.5)$$

где $[N^{(e)}]$ — матрица функций формы, а $\{du^{(e)}\}$ — вектор узловых перемещений конечного элемента, $\Sigma_S^{(e)} \subset \Sigma_S$. Из равенств (6.46) следует, что выражение (7.5) может быть записано в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \{dS^{(e)}\}_u &= \int_{\Sigma_u^{(e)}} [N^{(e)}]^T [R] \{du^0\} d\Sigma - \\ &- \int_{\Sigma_u^{(e)}} [N^{(e)}]^T [R] [N^{(e)}] d\Sigma \{du^{(e)}\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

в случае необходимости учета на части Σ_u границы тела ($\Sigma_u^{(e)} \subset \Sigma_u$) программно задаваемого распределения приращения вектора перемещений du^0 .

Представим интегралы во вторых слагаемых уравнений (7.5) и (7.6) в виде симметричной локальной матрицы жесткости нагружающей системы $[\tilde{R}^{(e)}]$, имеющей такую же размерность, что и матрица жесткости конечного элемента $[K^{(e)}]$ (естественно, что для конечных элементов, находящихся внутри тела, матрица $[\tilde{R}^{(e)}]$ — нулевая). В ходе традиционной [88] последовательности построения разрешающей системы уравнений с использованием, в частности, связи $\{du^{(e)}\} = [L^{(e)}]\{dU\}$, где $\{dU\}$ — вектор перемещений узлового ансамбля, получим

$$\begin{aligned} \{dS\} &= [\tilde{K}]\{dU\}, \\ [\tilde{K}] &= [K] + [K'] = \sum_{e=1}^N \left\{ [L^{(e)}]^T \left([K^{(e)}] + [\tilde{R}^{(e)}] \right) [L^{(e)}] \right\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Матрицу $[\tilde{K}]$ назовем обобщенной матрицей жесткости узлового ансамбля. В случае предельно "мягкого" нагружения $[K']$ вырождается в нулевую. В другом предельном случае $[\tilde{K}]$ является матрицей жесткости узлового ансамбля с удовлетворенными методом подавления кинематическими граничными условиями.

На рис. 7.8а представлены расчетные диаграммы одноосного сжатия для одной из реализаций случайной структуры представительного объема зернистого композита. Принималась упрощающая гипотеза о равномерности распределения коэффициентов жесткости R_{ij} по поверхности неоднородного тела и возможности представления вида

$$R_{ij} = R_1 \sigma_{i1} \sigma_{j1} + R_2 \sigma_{i2} \sigma_{j2} + R_3 \sigma_{i3} \sigma_{j3}.$$

В этом случае локальная матрица $[\tilde{R}^{(e)}]$ является диагональной. Внешнее стеснение предполагалось абсолютно мягким в направлениях x_1, x_2 и имеющим конечную жесткость в направлении x_3 .

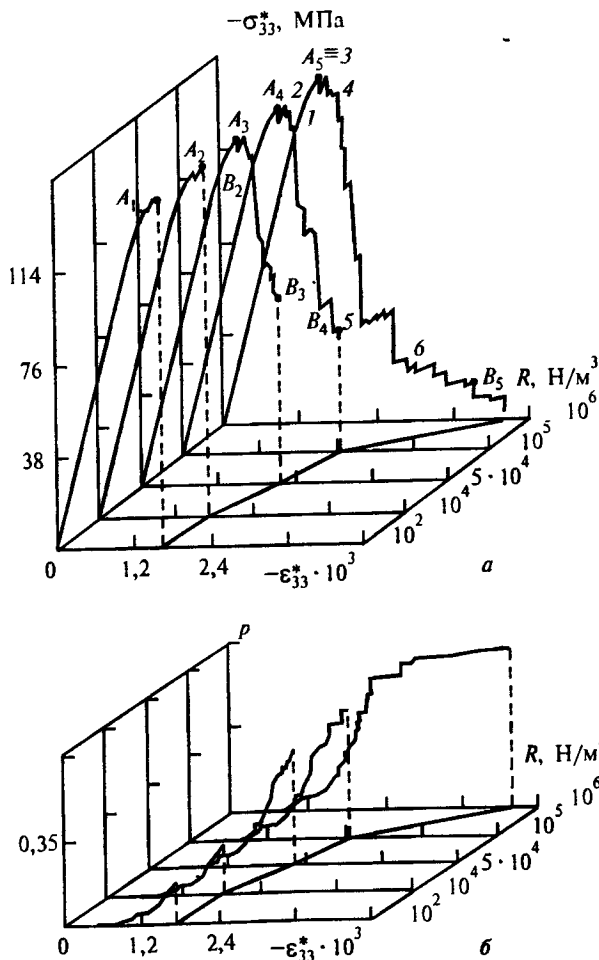


Рис. 7.8. Расчетные диаграммы деформирования зернистого композита при одноосном сжатии (а) и соответствующие кривые накопления повреждений (б) при различной жесткости нагружающей системы

Изменение относительной объемной доли p элементов структуры, потерявших в процессе деформирования способность сопротивляться формоизменению, показано на рис. 7.8б. Точкам максимума A_i на

диаграммах соответствует уровень поврежденности 16,7%. Равновесные состояния композита, непосредственно предшествующие макроразрушению, отмечены на рис. 7.8а точками B_i .

В результате осреднения по двадцати реализациям установлено, что коэффициент вариации для значений максимальных макронапряжений и предельных, соответствующих макроразрушению, макродеформаций не превышает 3%.

Макроскопическое разрушение композита как результат потери устойчивости процесса деформирования ослабленного повреждениями материала определялся отсутствием в математическом смысле решения краевой задачи при нарушении положительной определенности обобщенной матрицы жесткости узлового ансамбля $[\tilde{K}]$.

В режиме пропорционального "мягкого" нагружения ($R = R_{33} \leq \leq 10^2 \text{ Н/м}^3$) диаграммы деформирования, построенные при численном моделировании испытания на одноосное сжатие обрываются в наивысших точках A_5 при напряжении $-143,4 \text{ МПа}$ и деформации $-1,7 \cdot 10^3$. На восходящем участке диаграммы деформирования коэффициент жесткости R не оказывает заметного влияния на механическое поведение неоднородного тела.

В результате одноосного сжатия материала с жесткостью $R = 10^4 \text{ Н/м}^3$ удалось зарегистрировать равновесные состояния на участке A_2B_2 , а с жесткостью $R = 5,0 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ — на участке A_3B_3 . Макроразрушение композита происходит в первом случае как результат неустойчивого развития кластеров локализованного разрушения при $\epsilon_{33}^* = -1,8 \cdot 10^{-3}$ ($\sigma_{33}^* = -140,1 \text{ МПа}$, $p = 20,3\%$), а во втором вследствие относительной стабилизации этого процесса лишь при $\epsilon_{33}^* = -2,3 \cdot 10^{-3}$ ($\sigma_{33}^* = -77,5 \text{ МПа}$, $p = 42,2\%$), что на 5,5% и 35,3% соответственно больше уровня предельных деформаций при "мягком" нагружении.

При $R = 10^5 \text{ Н/м}^3$ развитие структурного разрушения протекает в целом в равновесном режиме до деформации $\epsilon_{33}^* = -2,5 \cdot 10^{-3}$ и доли повреждений 51,6%. Формирование макродефекта завершается неустойчивым развитием и, как следствие, потерей несущей способности материала при напряжении $-49,8 \text{ МПа}$. Диаграмма деформирования, построенная при $R = 10^6 \text{ Н/м}^3$, не отличается от кривой, регистрируемой в режиме абсолютно "жесткого" нагружения. В этом случае макроскопическое разрушение композита происходит вследствие устойчивого развития макродефекта при $\sigma_{33}^* = -3,0 \text{ МПа}$, значении предельной деформации $\epsilon_{33}^* = -4,3 \cdot 10^{-3}$ и степени поврежденности среды 64,3%.

Как видим, описание процессов деформирования и разрушения в рамках рассматриваемой модели структурно-неоднородной среды позволяет регистрировать и исследовать эффект роста предельных деформаций при увеличении жесткости нагружающей системы.

Для объяснения полученного эффекта механического поведения воспользуемся энергетическим подходом механики разрушения [194]

и рассмотрим соотношение между расходуемой (сумма приращений энергии упругой деформации ΔW и работы разрушения ΔA_f) и подводимой (приращение работы внешних сил ΔA_e) энергиями при виртуальном, в данном случае не приращении длины трещины, а увеличении доли разрушенных элементов и, следовательно, приращении критической деформации неоднородной среды, вызванных мгновенно действующим возмущением.

При этом под работой разрушения понимается диссипация энергии, связанная с процессом накопления повреждений. Для элементарного объема материала работа разрушения и увеличение потенциальной энергии упругого деформирования составляют удельную работу деформации, которая на любом интервале деформации находится как площадь под кривой равновесной диаграммы.

На участке упругого деформирования работа деформации равна приращению упругой энергии (работа разрушения равна нулю), на площадке текучести приращение упругой энергии отсутствует, а работа деформации равна работе разрушения, точнее, диссипации энергии при пластическом деформировании. На участке ниспадающей ветви работа разрушения больше, чем работа деформации. Это отличие тем сильнее, чем круче спадает диаграмма на заключительной стадии деформирования. Процесс разрушения дополнительно (кроме притока энергии извне) поддерживается за счет освобождения потенциальной энергии упругого деформирования.

Приращение работы внешних сил связано с перемещениями точек границы деформируемого тела, обусловленными уменьшением его жесткости в процессе разрушения. В рассматриваемом случае неравенство

$$\Delta A_e < \Delta W + \Delta A_f \quad (7.8)$$

является по сути условием устойчивости процессов структурного разрушения и критического деформирования композита. Оно свидетельствует о том, что самопроизвольное (без увеличения внешней нагрузки) продолжение разрушения невозможно, поскольку для совершения работы разрушения не хватает подводимой и освобождающейся энергии. Невыполнение неравенства соответствует лавинообразному росту дефектов, т.е. динамическому разрушению.

В частности, для находящегося в макрооднородном напряженно-деформированном состоянии представительного объема неоднородной среды в виде прямоугольного параллелепипеда, на гранях которого заданы уравнениями (6.65), (6.66) усилия и (или) перемещения, условие (7.8) может быть записано следующим образом:

$$\delta\sigma_{ij}^* \delta\varepsilon_{ij}^* \Omega + \sum_{m=1}^3 R_{ij}^{(m)} \delta\varepsilon_{jk}^* r_k^{(m)} \delta\varepsilon_{il}^* r_l^{(m)} \Sigma^{(m)} > 0, \quad (7.9)$$

где $\delta\sigma_{ij}^*$ и $\delta\varepsilon_{ij}^*$ — кинематически допустимые вариации, индекс m относится к грани с нормалью $\mathbf{n}^{(m)}$ и площадью $\Sigma^{(m)}$. Таким образом,

равновесный процесс структурного разрушения ослабленного материала возможен только в особых условиях, определяемых жесткостью внешнего стеснения.

Отметим и еще одну закономерность деформирования. В структуре неоднородного тела обнаружены локальные области, лавинообразное разрушение которых не зависит ни от жесткости внешнего стеснения тела, ни от шага нагружения. Это свидетельствует о локальной потере устойчивости процесса накопления повреждений. Подобная, дискретная, диссипация энергии наблюдается на закритической стадии деформирования и проявляется в виде отдельных более или менее протяженных срывов на диаграммах. Наблюдается смена стадий стабильного и нестабильного структурного разрушения. Данное явление происходит вследствие того, что, как было показано, процесс структурного разрушения неоднородного тела осуществляется за счет не только внешнего (нагружающая система), но и внутреннего источника подводимой механической энергии. Последний связан с освобождением потенциальной энергии упругого деформирования при разгрузке элементов структуры в объеме тела, окружающем области самоподдерживаемого, или, по терминологии Е.И. Шемякина [295], свободного разрушения. Поэтому даже в случае предельно "жесткого" монотонного нагружения характер накопления повреждений на структурном уровне полностью не контролируется.

Рассмотрим корреляционное описание структурных повреждений, дающее основу для исследования характера взаимодействия и эволюции повреждений в процессе нагружения неоднородных тел. Введем случайную единичную функцию множества точек представительного объема Ω композита, заданных детерминированным радиус-вектором r :

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1, & \forall r \in \Omega_f, \\ 0, & \forall r \in \Omega \setminus \Omega_f, \end{cases}$$

выделив область разрушенного материала Ω_f . Тогда математическое ожидание и дисперсия случайного поля определяются равенствами

$$\langle \lambda(r) \rangle = p, \quad D_\lambda = \langle \lambda'(r) \lambda'(r) \rangle = p(1 - p),$$

где $\lambda'(r) = \lambda(r) - p$ — пульсация индикаторного параметра. Вычисление корреляционных функций поврежденной структуры неоднородного тела

$$K_\lambda(\Delta r) = \langle \lambda'(r) \lambda'(r + \Delta r) \rangle = \langle \lambda(r) \lambda(r + \Delta r) \rangle - p^2 \quad (7.10)$$

будем проводить при помощи алгоритма, использованного для экспериментального построения этих функций по микрошлифам стеклопластиков [62].

Обозначив, как и ранее, через $P[A]$ — вероятность события A , рассмотрим первое слагаемое формулы (7.10):

$$\langle \lambda(r)\lambda(\hat{r}) \rangle = P[r \in \Omega_f \wedge \hat{r} \in \Omega_f] = P_{11}(r, \hat{r})p. \quad (7.11)$$

Построим вспомогательную координатную сетку и осуществим перебор возможных пар узлов. Если N — число событий $r \in \Omega_f \wedge \hat{r} \in \Omega_f$, а M — число событий $r \in \Omega_f$, то условную вероятность $P_{11}(r, \hat{r})$ в формуле (7.11) определим соотношением

$$P_{11}(r, \hat{r}) = P[\hat{r} \in \Omega_f | r \in \Omega_f] = N/M.$$

Таким образом, задача построения корреляционных функций может быть сведена к задаче нахождения геометрических вероятностей.

На рис. 7.9 приводятся нормированные корреляционные функции поврежденной структуры композита

$$\tilde{K}_\lambda(\Delta r) = K_\lambda(\Delta r)D_\lambda = (P_{11}(r, r + \Delta r) - p)/(1 - p) \quad (7.12)$$

для равновесных состояний, обозначенных точками 1–6 на рис. 7.8а. В качестве характерного размера элемента структуры \bar{k} принималось ребро куба, объем которого равен объему структурного элемента. Для построения функций был выбран шаг вспомогательной координатной сетки $0,04\bar{k}$, соответствующий 10^9 точкам усреднения по формуле (7.12).

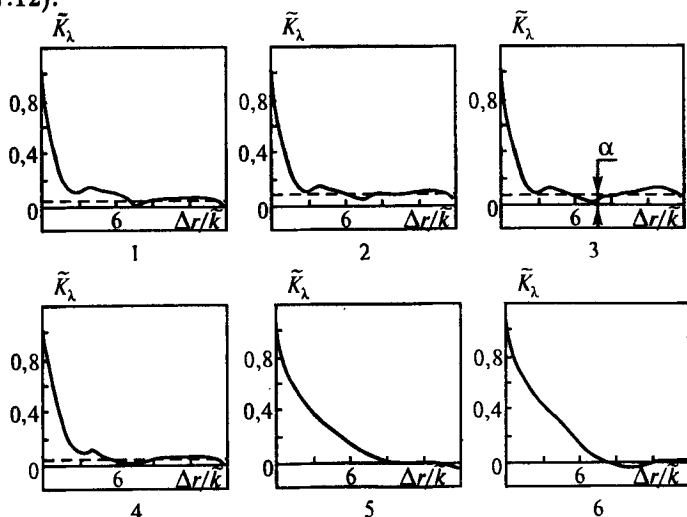


Рис. 7.9. Нормированные корреляционные функции поврежденной структуры зернистого композита на различных стадиях деформирования

Можно выделить три типа нормированных корреляционных функций: близкие к экспоненциальным (рис. 7.9, 1), близкие к периодическим слабо затухающие (рис. 7.9, 5 и 6), сильно затухающие (рис. 7.9, 2 и 4) и функции, имеющие промежуточный характер затухания (рис. 7.9, 3).

При нагружении композита наблюдаются последовательно сменяющиеся друг друга стадии структурного разрушения. Пока степень повреждений не превышает 7% процесс структурного разрушения протекает равномерно во всем объеме материала. Корреляционная функция, построенная для равновесного состояния, соответствующего точке 1 на рис. 7.8а, локальна, затухает на расстоянии $\sim 6 \bar{k}$. Значительное ослабление взаимного влияния при увеличении расстояния является признаком ближнего порядка во взаимодействии повреждений. Коэффициент корреляции снижается до 0,2 на расстоянии $\sim 2 \bar{k}$. Малое смещение α в пределах 10% корреляционных функций в положительную область обусловлено некоторой несимметрией относительно ортогональных осей формы структурного элемента, несмотря на то, что схема дискретизации макроскопически квазиизотропного композита выбиралась из условия минимального разброса эффективных модулей Юнга в трех взаимно ортогональных направлениях. Например, в случае зернистого композита с двумя изотропными компонентами, модули Юнга которых равны 10^4 МПа и 10^5 МПа, при одинаковых коэффициентах Пуассона 0,25 и совпадающих объемных долях указанное отличие в эффективных модулях не превышало 2%.

Дальнейшее увеличение нагрузок приводит к укрупнению дефектов, местной (соответствующие нормированные корреляционные функции представлены на рис. 7.9, 2), а затем и к общей локализации разрушения. К моменту достижения предела прочности в материале наблюдается заметное развитие очагов локализованного разрушения. Появление более ярко выраженной периодичности у корреляционной функции, соответствующей пределу прочности (рис. 7.9, 3) свидетельствует об усилении взаимодействия между повреждениями.

В момент деформирования, соответствующий точке 4, происходит равномерное по объему накопление областей локализованного разрушения (стадия вторичного дисперсного накопления повреждений) и некоторое снижение до 35% доли локально разгруженных элементов структуры. Нормированная корреляционная функция затухает на расстоянии около (8–9) \bar{k} . Далее происходит смена механизма структурного повреждения (вторичная локализация), связанная с началом формирования макродефекта, сопровождаемым локализацией микродеформаций, резким возрастанием до 60% от общего объема доли разгруженного материала и увеличением угла наклона ниспадающей ветви диаграммы деформирования.

В состоянии 5 корреляционная функция слабо затухает на расстоянии около (11–12) \bar{k} . Взаимодействие отдельных разрушенных элементов структуры и кластеров локализованного разрушения с макродефектом приобретает сложный нелинейный характер. Появляется дальний порядок во взаимодействии. Соответствующая состоянию 6 нормированная корреляционная функция затухает на расстоянии 13 \bar{k} , а коэффициент корреляции снижается до 0,2 лишь на расстоянии 6 \bar{k} .

Таким образом, рассмотренная модель неупругого деформирования и разрушения неоднородной среды в сочетании с корреляционным описанием структурных изменений позволяет исследовать стадии дисперсного и локализованного микроразрушения, смену этапов равновесного и неравновесного накопления повреждений. Показано, что повышение жесткости нагружающей системы способствует стабилизации указанных процессов. Структурное разрушение, сопровождаемое разупрочнением неоднородной среды, является в рамках рассмотренной модели механизмом диссипации упругой энергии, достаточным для аккомодации к заданному процессу макродеформирования при ограничении притока механической энергии со стороны достаточно жесткой нагружающей системы. Элементарные акты частичной или полной потери несущей способности отдельными элементами структуры на начальном этапе деформирования проявляют себя как случайные события, описываемые в рамках статистических представлений, в то время, как этапы локализации и формирования макродефекта определяются преимущественно условиями перераспределения энергии между деформируемым телом и нагружающей системой.

7.3. Равновесные состояния поврежденной среды, реализуемые в условиях немоного нагружения

Отмеченные ранее стадии неравновесного накопления повреждений, имеющие место даже при "жестком" нагружении и проявляющиеся в виде вертикальных срывов на диаграммах деформирования, могут быть исследованы путем моделирования процесса нагружения, осуществляемого с помощью испытательного устройства с быстродействующей обратной связью (машин с сервоуправлением) [301, 341, 350].

Работа данного класса оборудования основывается на преобразовании определенного физико-механического параметра в электрический импульс, используемый в качестве сигнала обратной связи для корректировки внешней нагрузки [366]. Применение автоматизированных систем с обратной связью по скорости деформации нагружаемого материала позволяет, в частности, зарегистрировать диаграммы деформирования с равновесными участками ниспадающей ветви, касательные в каждой точке которых имеют острый угол с осью абсцисс [318, 342, 362, 377]. Диаграммы подобного вида были получены также при исследовании процессов деформирования и разрушения плексигласа [20] и тел с начальными трещинами [316, 322], особо хрупких и газонасыщенных пород [52].

Например, в опытах на неравнокомпонентное сжатие песчаника [4] наблюдались диаграммы с обратной крутизной ниспадающего участка в случае газового насыщения образца. Возможным объяснением подобного механического поведения материала, как показано в работе

авторов [47], является одновременное закритическое деформирование одних элементов структуры (твердые частицы) и упругая разгрузка других, более податливых (газовая фаза). В то же время, диаграммы с ниспадающей ветвью при прогрессирующих деформациях имеют место при водонасыщении, что является следствием незначительно малого запаса потенциальной энергии упругого деформирования практически несжимаемой жидкой фазы и подтверждает данное объяснение. Показательно, что аналогичный эффект качественного изменения ниспадающего участка деформирования был обнаружен и при пропитке карбонизованных каркасных материалов стиролом с последующей термополимеризацией внутри каркасного компонента [85].

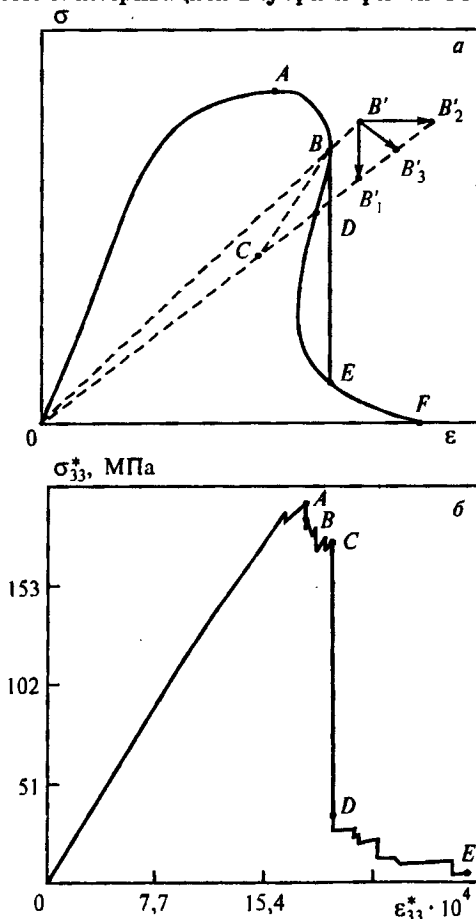


Рис. 7.10. Схематичная диаграмма деформирования с отрицательной крутизной ниспадающей ветви: а — схема метода превентивных разгрузок, б — расчетная диаграмма одноосного деформирования зернистого композита при "жестком" нагружении в монотонном режиме

На рис. 7.10а схематично приведена полная диаграмма деформирования $OABEF$, встречающаяся в опытах на "жесткой" испытательной машине. Если жесткость нагружающей системы не достаточна для построения ниспадающей ветви, то разрушение образца происходит на участке AB . Наличие протяженных неравновесных срывов BE на кривой деформирования характерно для материалов, склонных при заданном макрооднородном напряженно-деформированном состоянии к лавинообразному накоплению повреждений или саморазрушению на закритической стадии деформирования [198, 214]. Отмеченная особенность позволяет предположить возможность существования дополнительных равновесных состояний неоднородной среды, которые не могут быть реализованы в рамках рассмотренной программы монотонного макродеформирования.

Для моделирования процессов накопления повреждений при испытании материалов на системах с сервоуправлением предлагается метод превентивных разгрузок. Построение полной диаграммы деформирования $OABDEF$ этим методом предполагает равновесие между силами сопротивления материала и внешними силами, которое достигается проведением ряда циклов разгрузка — активное нагружение при появлении признаков неуправляемого разрушения.

Рассмотрим некоторые особенности реализации метода превентивных разгрузок при численном моделировании. По заданным программам нагружения или деформирования неоднородной среды из равновесного состояния в точке B переходим в новое состояние B' . Предположим, что произошла частичная потеря несущей способности одного или нескольких элементов структуры. Развитие структурного разрушения, вызванное процессами перераспределения напряжений, может привести к появлению последовательности неравновесных состояний среды в направлениях $B'V'_1$ либо $B'V'_2$, и последующему макроскопическому разрушению образца при проведении эксперимента на предельно "жесткой" или "мягкой" испытательных системах соответственно. Разрушение части элементов структуры возможно предотвратить экстренной разгрузкой образца до равновесного состояния, соответствующего точке C . Условием необходимости превентивной упругой разгрузки будем считать превышение выбранного допустимого уровня приращения доли поврежденных элементов структуры в результате перераспределения напряжений после очередного акта разрушения.

Циклы превентивной разгрузки и последующего активного нагружения, сопровождаются структурным разрушением материала. Поэтому неоднородная среда не сможет достигнуть того напряженно-деформированного состояния (точка B), которое имело место в начале экстренной разгрузки. Количество новых предельных равновесных состояний, регистрируемых на закритической стадии деформирования, определяется числом циклов нагружения. С их увеличением, а это возможно при снижении критической доли повреждений в усло-

вии превентивной разгрузки, возрастает точность построения ниспадающей ветви.

На рис. 7.10 δ представлена расчетная диаграмма одноосного деформирования ($\epsilon_{33}^* > 0$, $\epsilon_1^* = \epsilon_{22}^* = 0$) в монотонном режиме структурно-неоднородной среды, модель которой описана в § 7.1, а на рис. 7.11 a и b — геометрическое место предельных равновесных состояний, регистрируемых при проведении испытаний методом превентивных разгрузок. В режиме многократного активного нагружения и разгрузки на каждом этапе были определены точки, соответствующие началу лавинообразного разрушения. Огибающая этих точек подобна участку BDE схематичной диаграммы деформирования, приведенной на рис. 7.10 a . Точки максимума кривых соответствуют одному напряженно-деформированному состоянию с поврежденностью 8,3%.

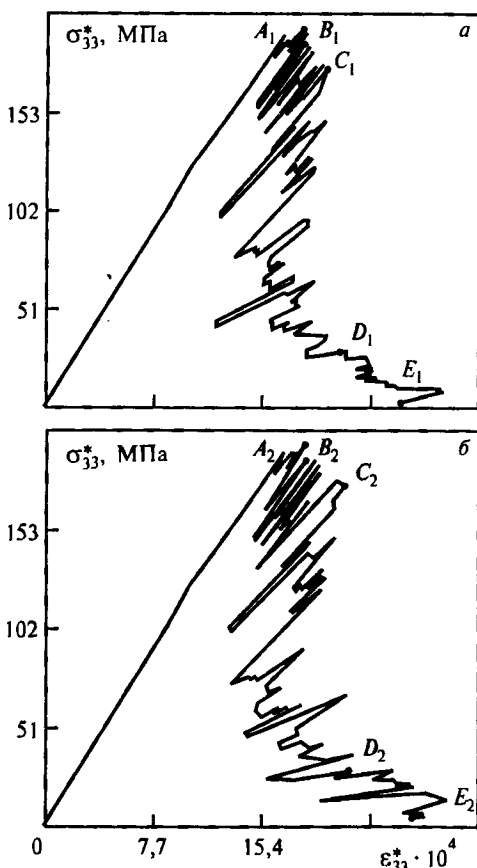


Рис. 7.11. Диаграммы одноосного деформирования зернистого композита, построенные методом превентивных разгрузок: a — предельно "жесткое" нагружение, b — нагружение с жесткостью $R = 10^4$ Н/м 3

При исследовании процессов накопления повреждений в монотонном режиме обнаружены стадии лавинообразного разрушения некоторой локальной группы структурных элементов, например, участок AB диаграммы деформирования (рис. 7.10б), а также этапы саморазрушения — участок CD , когда накопление повреждений происходит в результате перераспределения напряжений, а доля не сопротивляющихся формоизменению элементов изменяется от 15,9% в точке C до 33,6% в точке D . Эквивалентные по уровню поврежденности состояния зернистого композита, регистрируемые методом превентивных разгрузок представлены на рис. 7.11 одноименными буквенными символами. Макроскопическое разрушение зернистого композита происходит при снижении до нуля напряжений σ_{33}^* . Степень поврежденности среды в момент потери несущей способности составляет 39,3%.

Возможность построения ниспадающей ветви на испытательных системах с довольно малой для данного случая жесткостью нагружающей системы $R = 10^4 \text{ Н/м}^3$ методом превентивных разгрузок при одноосном деформировании зернистого композита проиллюстрирована на рис. 7.11б. Отметим, что точка C_2 , поврежденность в которой составляет 17,7%, является последней равновесной точкой, фиксируемой в режиме монотонного нагружения при указанной жесткости R . Реализация закритической стадии деформирования в рассматриваемом вычислительном эксперименте позволяет сделать вывод о том, что "жесткий" режим нагружения может быть имитирован последовательностью "мягких" малых нагружений и разгрузок.

Таким образом, математическое моделирование закритического деформирования структурно неоднородных сред с использованием метода превентивных разгрузок позволяет построить полные диаграммы даже при "мягком" нагружении и обнаружить свойственные поврежденным материалам с обратной крутизной ниспадающего участка диаграммы равновесные состояния, нерегистрируемые как при "мягком", так и при "жестком" нагружениях в обычном монотонном режиме.

7.4. Кинетика разрушения волокнистых композитов с упругопластической матрицей²

Вопросы неупругого деформирования волокнистых композитов постоянно привлекают внимание исследователей. В частности, получили распространение численные методы моделирования, которые позволяют представить среду в виде системы дискретных элементов и рассматривать диссипативные процессы как многошаговые повреждения структуры модели с учетом существенно неоднородного распределения структурных напряжений и деформаций [2, 9, 240, 244].

² Параграф написан при участии И.Н. Рочева

Исследуем процессы неупругого деформирования и структурного разрушения волокнистых композитов регулярной структуры с упругопластической матрицей при нагружении в поперечной плоскости на основе решения краевой задачи для ячейки периодичности, состоящей из уравнений равновесия (6.56) при отсутствии массовых сил, геометрических соотношений (6.57), определяющих уравнений для активного нагружения (6.5) и линейных соотношений связи приращений напряжений и деформаций при разгрузке, а также граничных условий

$$u_i|_{\Sigma} = \varepsilon_{ij}^* r_j, \quad (7.13)$$

что соответствует заданию макродеформаций ε_{ij}^* . Входящие в уравнения состояния (6.5) функции неупругого деформирования (поврежденности) κ и g зададим следующим образом. Для упругого волокна κ и g равны нулю, для матрицы g является в рамках теории малых упругопластических деформаций функцией второго инварианта тензора микродеформаций (6.7) и описывает поведение материала с линейным упрочнением:

$$g = \begin{cases} 0, & \bar{j}_e^{(2)} \leq \bar{j}_e^{(2)} \text{ упр}; \\ (1 - G'/G)(1 - \bar{j}_e^{(2)} \text{ упр} / \bar{j}_e^{(2)}), & \bar{j}_e^{(2)} \text{ упр} < \bar{j}_e^{(2)} < \bar{j}_e^{(1)} \text{ ср}; \\ 1, & \bar{j}_e^{(2)} \geq \bar{j}_e^{(1)} \text{ ср}; \end{cases} \quad (7.14)$$

где $\bar{j}_e^{(2)} \text{ упр}$ — предел упругости, G' - модуль упрочнения. Приведенные соотношения вместе с равенствами (7.2) определяют, кроме того, условия разрушения материала матрицы. При достижении вторым инвариантом тензора микродеформаций своего критического значения материал матрицы теряет способность сопротивляться формоизменению, сохраняя лишь способность сопротивляться гидростатическому сжатию.

Численные расчеты были проведены методом конечных элементов для симметричной части ячейки периодичности находящегося в условиях плоского деформированного состояния композита с тетрагональным расположением эллиптических в поперечном сечении волокон при следующих характеристиках: $G_m = 2,1 \cdot 10^3$ МПа; $G'_m = 0,05 G_m$; $\nu_m = 0,25$; $\bar{j}_e^{(2)} \text{ упр} = 0,01$; $\bar{j}_e^{(2)} \text{ ср} = 0,025$; $G_f = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_f = 0,25$. Индексами m и f отмечены характеристики соответственно матрицы и волокон.

Исследуемая область была разбита на 1150 треугольных конечных элементов. Линеаризация используемых определяющих соотношений осуществлялась с использованием метода дополнительных (начальных) напряжений [88], или упругих решений [102], при поэтапных нагружениях. Решение краевой задачи производилось при пропорциональном увеличении (или уменьшении) компонент тензора макродеформаций с шагом от $3 \cdot 10^{-6}$ до $3 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 7.12 показана последовательность возникновения и развития зон пластичности и разрушения в матрице при одноосной деформации сжатия волокнистого композита (объемная доля волокон 0,188, отношение полуосей эллипса 0,67). Здесь и далее точки, отмеченные на диаграммах, характеризуются формой и расположением зон неупругого деформирования, показанных на изображениях фрагментов ячейки периодичности с соответствующими номерами.

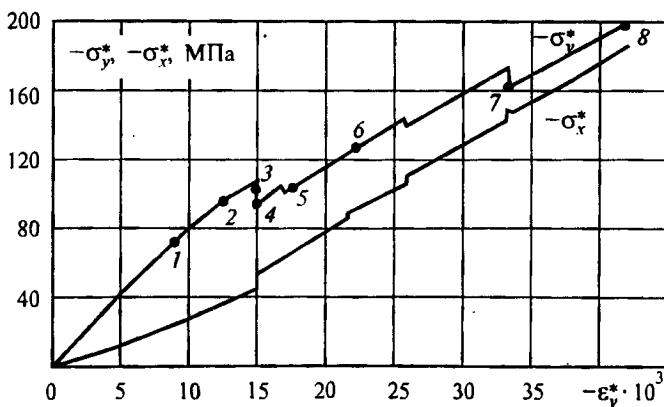
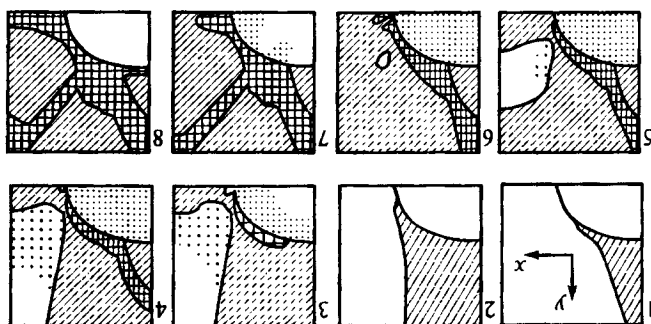




Рис. 7.12. Кинетика разрушения упругопластической матрицы при деформировании волокнистого композита ($\epsilon_x^* = 0$, $\epsilon_y^* < 0$):  — зона пластичности,  — зона разрушения

Как видим, необратимые изменения в структуре материала приводят к нелинейности на диаграмме деформирования. Скачкообразное подрастание зон разрушения на некоторых этапах деформирования вызывает появление срывов на диаграмме. Точками отмечены конечные элементы, в которых происходит упругая разгрузка среды по

второму инварианту ($d\bar{j}_e^{(2)} < 0$), что объясняется перераспределением напряжений в процессе структурного разрушения.

Обнаруженное явление локальной разгрузки упругопластических элементов при активном деформировании композита более детально исследовано в § 8.4 и работах [38, 48]. В данном случае вклад матрицы в сопротивление внешней нагрузке на заключительной стадии деформирования композита ограничивается, в основном, ее сопротивлением уменьшению объема.

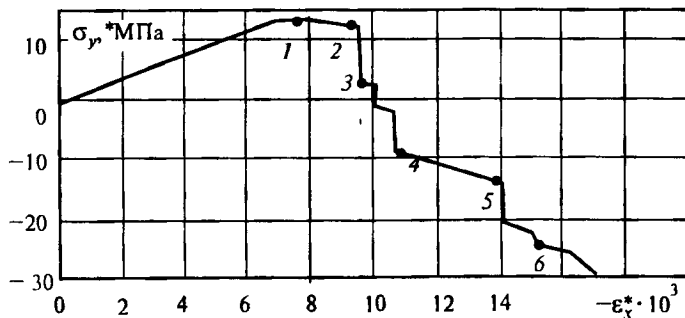
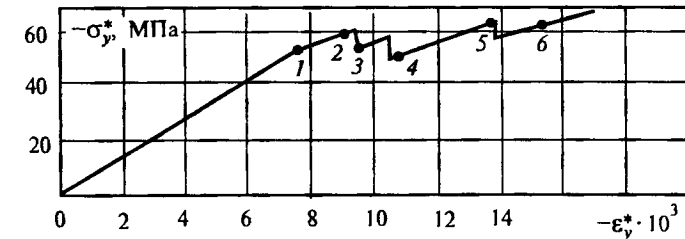
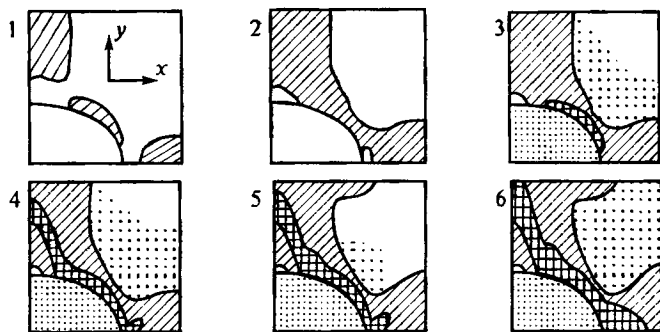




Рис. 7.13. Кинетика разрушения упругопластической матрицы на закритической стадии деформирования волокнистого композита ($\epsilon_x^* = -0,5\epsilon_y^*$):  — зона пластичности,  — зона разрушения

На рис. 7.13 показаны диаграммы и основные этапы деформирования композита при растяжении в направлении оси x и сжатии вдоль оси y . Положение осей изображено на рис. 7.12.

Обращает на себя внимание прохождение зависимости $\sigma_x^* \sim \epsilon_x^*$ через нулевую отметку на оси ординат при увеличении деформации. Смена знака макронапряжений σ_x^* свидетельствует о том, что вследствие развития зоны разрушения в матрице теперь уже композит, в свою очередь, теряет способность сопротивляться формоизменению. Знаки и значения макронапряжений в процессе деформации компо-

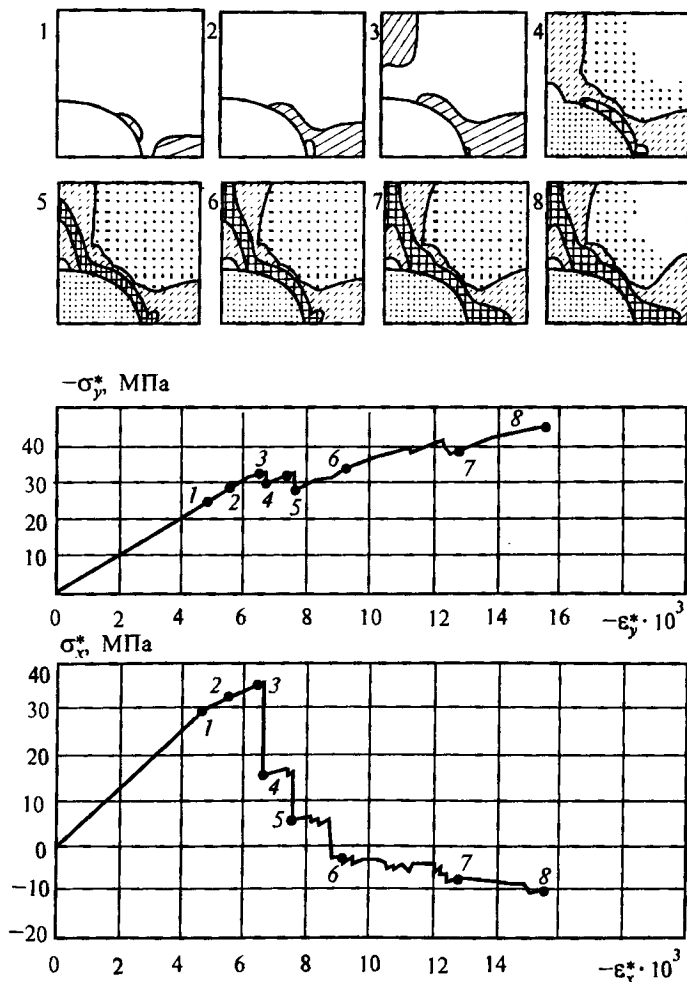


Рис. 7.14. Кинетика разрушения упругопластической матрицы на закритической стадии деформирования волокнистого композита ($\epsilon_x^* = -\epsilon_y^*$): // — зона пластичности, x — зона разрушения

зита все более определяются величиной уменьшения объема исследуемой области.

Ниспадающая ветвь на диаграмме зависимости макронапряжений имеет место также при чистом формоизменении композита (равновеликая двухосная деформация: растягивающая в направлении оси x и сжимающая вдоль оси y), проиллюстрированном на рис. 7.14. Разупрочнение композита вызвано процессом структурного разрушения. При этом обнаружено чередование постепенного и скачкообразного подрастания зоны разрушения при монотонном макродеформировании.

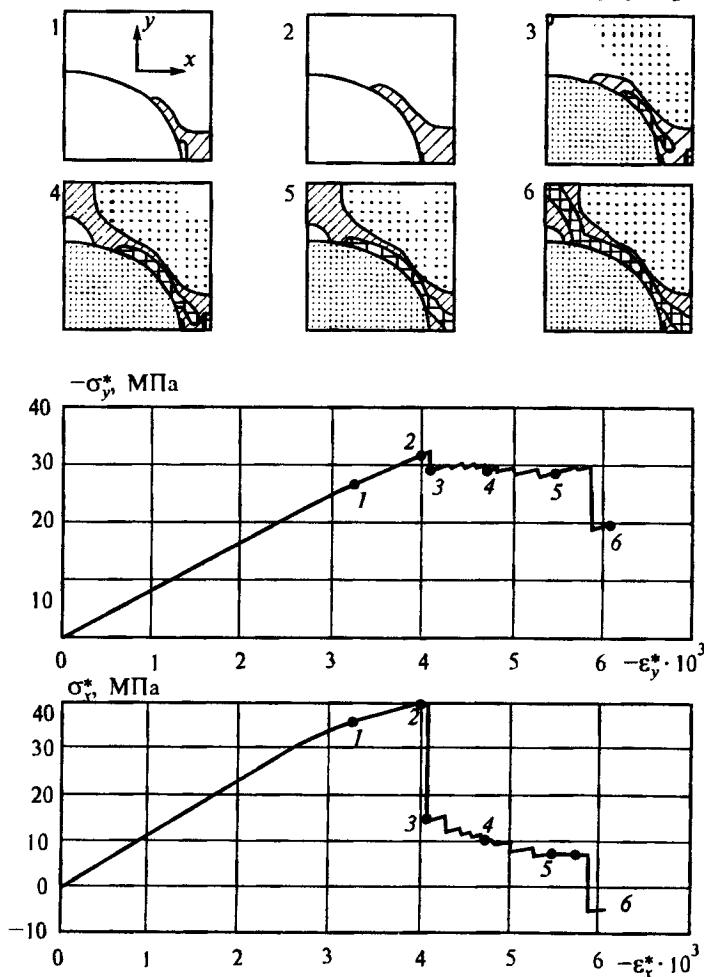




Рис. 7.15. Кинетика разрушения упругоэластической матрицы на закритической стадии деформирования волокнистого композита ($\epsilon_x^* = -\epsilon_y^*$):  — зона пластичности,  — зона разрушения

Кроме отмеченного эффекта локальной разгрузки, проведенные расчеты выявили также процессы повторной нагрузки пластических элементов, находящие свое отражение в сокращении зоны упругой разгрузки. Например, это явление проявилось при переходе от состояния, помеченного цифрой 6, к состоянию — 7 на рис. 7.14.

Увеличение доли волокон в объеме композита не привело к существенному изменению характера деформирования. На рис. 7.15 приведены результаты расчетов при концентрации армирующих элементов 0,377 и отношении полуосей 0,75. Как и в рассмотренных случаях, начальная стадия разрушения матрицы связана с объемом материала вблизи межфазной границы, хотя отмечено и образование небольшой изолированной зоны разрушения в матрице. Кроме того, в качестве особенностей можно отметить снижение кривой $\sigma_y^* \sim \epsilon_y^*$, наличие довольно протяженного пологого участка на диаграмме $\sigma_x^* \sim \epsilon_x^*$ и более локализованное развитие зон пластичности и разрушения.

Таким образом, полученные результаты математического моделирования позволяют сделать вывод о возможности равновесного протекания взаимосвязанных процессов упругопластического деформирования и разрушения, сопровождаемых локальными явлениями упругой разгрузки и повторного нагружения, в структуре однонаправленных волокнистых композитов при заданных программах деформирования. Возникающая при этом нелинейность диаграмм макродеформирования может быть настолько велика, что имеет место ниспадающая ветвь, а значения компонент тензора макронапряжений могут не только снижаться до нуля, но и в отдельных случаях менять знак.

7.5. Вероятностное описание стохастических процессов структурного разрушения

Если каждый компонент композиционного материала проявляет разброс прочностных свойств, то естественно, что вследствие этого, а также разупорядоченности взаимного расположения элементов структуры процесс структурного разрушения при деформировании композита имеет стохастический характер. Изучение основных закономерностей этого процесса, как было показано, можно осуществлять в реализациях, т.е. на основании статистического моделирования структуры материала. Однако даже при рассмотрении множества реализаций и осреднении результатов остается открытым вопрос об определении эффективных свойств. Поскольку эффективные свойства композита не зависят от выбора элементарного макрообъема, то для их определения потребовалось бы, строго говоря, исследование деформирования неоднородного тела с бесконечным числом структурных элементов.

Преодолеть указанную трудность позволяет использование различных вероятностных подходов. В рамках некоторых из них посту-

лируется, что процесс разрушения пойдет по пути наиболее вероятных актов микроразрушения. Поскольку менее вероятные акты микроразрушения могут иметь катастрофические последствия для макрочастицы или, по крайней мере, существенно изменить ее свойства, то представляется необходимым учет всех событий, вероятность которых больше нуля или некоторого задаваемого порога практической невозможности.

Для этого предлагается новый вероятностный подход, согласно которому принимается, что деформируемый макрообъем композиционного материала именно в силу его представительности содержит элементы структуры, разрушенные по всем вероятным механизмам, а их объемные доли могут быть рассчитаны на основании вероятностей микроразрушений по совокупности критериев. Излагаемый способ учета стохастических процессов структурного разрушения будет использован в дальнейшем в приложении к композиционным материалам слоистой структуры.

Будем считать, что композиционный материал состоит из изотропных компонентов, для которых справедлива совокупность критериев разрушения типа (6.37)

$$f_m(\bar{j}_t^{(1)}, \bar{j}_t^{(2)}) \geq C_m, \quad m = 1, 2$$

и известны законы распределения случайных прочностных характеристик $F_m(C_m)$ каждого компонента, представляющего собой объединение всех элементов структуры с одинаковыми деформационными свойствами. Разброс деформационных свойств компонентов в данной модели не учитывается. Кроме того, ограничимся рассмотрением лишь двух механизмов разрушения.

Моделируя для композиционного материала процесс деформирования или нагружения, на каждом шаге увеличения параметра процесса можно подразделить i -й компонент с долей $p^{(i)}$ в объеме неповрежденного композита на следующие части: неразрушенный материал (p); материал, разрушенный по критерию типа "1" (p_1); материал, частично потерявший несущую способность по критерию типа "2" (p_2); полностью разрушенные элементы структуры (p_0). Очевидно, что

$$p^{(i)} = p + p_1 + p_2 + p_0. \quad (7.16)$$

Поведение неразрушенных элементов с объемной долей p описывается линейными или нелинейными определяющими соотношениями, заданными для i -го компонента композита. Относительно свойств элементов, частично потерявших несущую способность, что выразилось в невыполнении то или иного критерия прочности, должны быть сделаны определенные предположения, как это было уже отмечено в § 6.3. Введем следующее разделение:

$$p_0 = p_{01} + p_{02} + p_{12}. \quad (7.16)$$

Цифры 1 и 2 в нижних индексах первых двух слагаемых этого равенства указывают, по какому критерию начиналось разрушение, а последнее слагаемое выражает долю материала, разрушившегося одновременно (на одном шаге) по двум механизмам. Обозначим вероятности выполнения неравенств, заключенных в последующих уравнениях в квадратные скобки, таким образом:

$$\begin{aligned} P_m &= P[f'_m \leq C_m < f_m] = F_m(f_m) - F_m(f'_m), \\ P_{m(k)} &= P[f'_{m(k)} \leq C_m < f_m] = F_m(f_{m(k)}) - F_m(f'_{m(k)}), \\ \bar{P}_{m(k)} &= P[C_m < f_{m(k)}] = F_m(f_{m(k)}), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где

$$\begin{aligned} f'_m &= f_m \left(\bar{j}_{\epsilon}^{(1)'} , \bar{j}_{\epsilon}^{(2)'} \right), \quad f_{m(k)} = f_m \left(\bar{j}_{\epsilon(k)}^{(1)}, \bar{j}_{\epsilon(k)}^{(2)} \right), \\ f'_{m(k)} &= f_m \left(\bar{j}_{\epsilon(k)}^{(1)'} , \bar{j}_{\epsilon(k)}^{(2)'} \right). \end{aligned}$$

Здесь штрихом помечены величины, относящиеся к предыдущему шагу деформирования, $\bar{j}_{\epsilon(k)}^{(n)}$ - n -й инвариант тензора микродеформаций в той части i -го компонента, которая частично потеряла несущую способность по критерию типа "k".

Долю неразрушенного материала i -го компонента в общем объеме можно определить уравнением:

$$p = p' - p^{(i)}(P_1 + P_2 - P_1 P_2). \quad (7.18)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой вероятность разрушения хотя бы по одному критерию, вызванного повышением нагрузки на последнем шаге.

Объемная доля p_1 состоит из элементов, частично разрушенных лишь по критерию типа "1" на всех предыдущих шагах, и элементов, разрушившихся по этому критерию на последнем шаге деформирования, за вычетом разрушившихся на последнем шаге еще и по критерию типа "2":

$$p_1 = p'_1 + p^{(i)} P_1 (1 - P_2) (1 - \bar{P}_{2(1)}) - (p'_{01} + p'_1) P_{2(1)}. \quad (7.20)$$

Аналогично,

$$p_2 = p'_2 + p^{(i)} P_2 (1 - P_1) (1 - \bar{P}_{1(2)}) - (p'_{02} + p'_2) P_{1(2)}. \quad (7.20)$$

Мы учли, что часть элементов структуры может полностью потерять несущую способность, и теперь запишем:

$$\begin{aligned} p_{01} &= p'_{01} + (p'_{01} + p'_1) P_{2(1)} + p^{(i)} P_1 \bar{P}_{2(1)} (1 - P_2), \\ p_{02} &= p'_{02} + (p'_{02} + p'_2) P_{1(2)} + p^{(i)} P_2 \bar{P}_{1(2)} (1 - P_1), \\ p_{12} &= p'_{12} + p^{(i)} P_1 P_2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Для вычисления объемных долей компонентов композита по выписанным формулам необходимо на каждом шаге знать значения инвариантов $\bar{j}_\epsilon^{(1)}$ и $\bar{j}_\epsilon^{(2)}$ во всех структурных элементах (если допустима гипотеза об однородности полей напряжений и деформаций в их пределах), а следовательно, все структурные деформации, соответствующие заданным макродеформациям или макронапряжениям. Аналогично можно записать выражения для объемных долей компонентов композита через инварианты тензора структурных напряжений. При составлении алгоритма численного решения задачи должна быть организована итерационная процедура пересчета объемных долей компонентов и полей микронапряжений и микродеформаций на каждом шаге макродеформирования до тех пор, пока не исчезнет вероятность актов микроразрушения.

Таким образом, задача прогнозирования неупругого поведения композита с учетом структурного разрушения сводится в рамках предлагаемого подхода, который будет проиллюстрирован численными результатами в следующей главе, к задаче о деформировании материала с переменными объемными долями компонентов как с исходными механическими свойствами, так и с измененными в соответствии с рассматриваемыми механизмами потери несущей способности.

Глава 8

Упругое деформирование и структурное разрушение слоистых композитов

Материалы, составленные из чередующихся плоских слоев, обладают неоднородностью лишь в направлении, перпендикулярном слоям. Поэтому вычисление эффективных упругих констант сводится к одномерной задаче, которую удается решить точно как для периодических композитов [69], так и для композиционных материалов со случайным расположением слоев [296]. С целью прогнозирования эффективных неупругих свойств в настоящей главе дается постановка и строится решение стохастической краевой задачи упругопластического деформирования (нагружения) слоистого композита случайной структуры в произвольном макроскопически однородном и напряженно-деформированном состоянии.

При постановке задачи используются некоторые основные уравнения механики слоистых материалов, приведенные, например, в [172, 296], а также модель стохастических процессов структурного разрушения и тензорные феноменологические модели повреждаемости, рассмотренные в шестой и седьмой главах. Приводятся результаты численного моделирования процессов деформирования и разрушения некоторых типов композитов, показывающие, что поведение слоистого композиционного материала на макроуровне может качественно отличаться от поведения элементов структуры. Исследуются закономерности вызванных структурным разрушением процессов закритического деформирования при "жестком" нагружении.

Некоторые вопросы и результаты, рассматриваемые в настоящей главе, отражены в работах авторов [38, 48, 50, 137, 262-267].

8.1. Стохастическая краевая задача механики упругопластического деформирования слоистых композитов

Рассмотрим элементарный макрообъем композиционного материала со случайным расположением плоских изотропных слоев (обобщение на случай анизотропных слоев дано в [137]), ортогональных оси x_3 . Описываемое с помощью эффективных материальных функций поведение представительного объема определяется процессами деформирования и разрушения коллективно взаимодействующих элементов

структуры. Исследование этих процессов возможно на основе решения стохастической краевой задачи для рассматриваемого макрообъема.

Будем считать, что на всех поверхностях раздела элементов структуры осуществляется идеальный контакт, т.е. выполняются условия $[[u_i]] = 0$ и $[[\sigma_{i3}]] = 0$, где $[[a]]$ означает величину скачка функции a при переходе из одного слоя в другой. Поскольку в нашем случае эффективные свойства композита не зависят от градиентов осредненных полей напряжений и деформаций, то будем рассматривать только макроскопически однородное напряженно-деформированное состояние.

Уравнения равновесия содержат лишь по одному слагаемому, в котором дифференцирование проводится по переменной x_3 :

$$\sigma_{i3,3} = 0. \quad (8.1)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\sigma_{i3} = \langle \sigma_{i3} \rangle. \quad (8.2)$$

Поскольку вследствие макрооднородности напряженно-деформированного состояния поля микронапряжений и микродеформаций однородны в пределах структурных элементов, то осреднение по объему, эквивалентное для эргодических полей статистическому осреднению, может быть осуществлено с помощью объемных долей $p^{(i)}$ всех n компонентов:

$$\langle a \rangle = \sum_{i=1}^n a^{(i)} p^{(i)}. \quad (8.3)$$

Геометрические соотношения, устанавливающие связь структурных деформаций и перемещений, имеют вид

$$\epsilon_{ij} = \langle \epsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2}(u'_{i,3} \delta_{j3} + u'_{j,3} \delta_{i3}), \quad (8.4)$$

где штрих означает пульсацию случайной величины, т.е. ее отклонение от математического ожидания.

Уравнения (8.1), (8.4) совместно с определяющими соотношениями (6.5) или (6.13) для активного нагружения, уравнениями, задающими вид материальных функций, и линейными соотношениями для разгрузки образуют замкнутую систему.

Граничные условия

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle x_j |_{\Sigma} = u_i^0 \quad \langle \sigma_{ij} \rangle n_j |_{\Sigma} = S_i^0 \quad (8.5)$$

эквивалентны заданию макродеформаций $\epsilon_{ij}^* = \langle \epsilon_{ij} \rangle$ или макронапряжений $\sigma_{ij}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle$ соответственно.

Замкнутая система уравнений для случайных полей структурных перемещений, деформаций и напряжений вместе с граничными условиями составляет постановку стохастической краевой задачи механики упругопластического деформирования слоистых композитов.

Для учета структурного разрушения рассмотренная постановка задачи дополняется либо условиями (6.38) или (6.39) с описанием деформационных свойств слоев после разрушения по тому или иному критерию, либо заданием индикаторных функций, введенных в § 6.3, и заменой определяющих соотношений на (6.41), явным образом учитывающие скачкообразное изменение свойств в предельных состояниях.

Точное решение рассмотренной краевой задачи в упругой постановке позволяет определить все эффективные упругие модули, входящие в соотношения (6.18), которые описывают поведение слоистого композита с позиций макроскопического уровня:

$$\begin{aligned}
 k^* &= \left\langle K + \frac{4}{3}G \right\rangle + \left\langle \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle^2 \left\langle \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle^{-1} - \\
 &\quad - \left\langle \left(K - \frac{2}{3}G \right)^2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle - \langle G \rangle, \\
 l^* &= \left\langle \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle \left\langle \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \\
 n^* &= \left\langle \left(K + \frac{4}{3}G \right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad G_{\perp}^* = \langle G \rangle, \quad G_{\parallel}^* = \langle G^{-1} \rangle^{-1}.
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

В некоторых частных случаях напряженно-деформированного состояния сформулированная задача об упругопластическом деформировании с учетом структурного разрушения также поддается точному решению.

1. Рассмотрим следующий простой процесс деформирования: $\langle \varepsilon_{12} \rangle = \lambda \varepsilon_{12}$, остальные $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = 0$, где λ — параметр процесса, ε_{12} — заданная величина. Свойства всех структурных элементов композита, в том числе функции $g(\bar{j}_c^{(1)}, \bar{j}_c^{(2)})$ и $g^I(k, g)$, известны.

Поскольку, как это следует из уравнений (8.4), $\varepsilon_{12} = \langle \varepsilon_{12} \rangle$, то в силу отсутствия других структурных деформаций значение второго инварианта тензора микродеформаций для всех слоев $\bar{j}_c^{(2)} = \sqrt{2} \langle \varepsilon_{12} \rangle$, что соответствует ненулевому значению третьего инварианта тензора макродеформаций $j_c^{(3)} = 2 \langle \varepsilon_{12} \rangle$. Определяющие соотношения (6.41) в рассматриваемом случае сводятся к следующим:

$$\sigma_{12} = 2G(1 - g)(1 - g^I) \langle \varepsilon_{12} \rangle.$$

Осредняя это уравнение и сравнивая его с соотношениями (6.18), получим точное выражение для функции макроповрежденности:

$$\rho_{\perp}^*(0, 0, j^{(3)}, 0)_{\varepsilon} = 1 - \langle G[1 - g(0, \bar{j}_c^{(2)})][1 - g^I(0, g)] \rangle \langle G \rangle^{-1}. \tag{8.7}$$

2. Рассмотрим простой процесс нагружения с параметром λ : $\langle \sigma_{13} \rangle = \lambda s_{13}$, остальные $\langle \sigma_{ij} \rangle = 0$, где s_{13} — заданная величина. Свойс-

тва компонентов композита, в том числе функции $\tau(\bar{j}_\sigma^{(1)}, \bar{j}_\sigma^{(2)})$ и $\tau^I(r, \tau)$, известны.

Поскольку, как это следует из уравнений (8.2), $\sigma_{13} = \langle \sigma_{13} \rangle$, то в силу отсутствия других структурных напряжений значение второго инварианта тензора микронапряжений для всех слоев $\bar{j}_\sigma^{(2)} = \sqrt{2} \langle \sigma_{13} \rangle$, что соответствует ненулевому значению четвертого инварианта тензора макронапряжений $j_\sigma^{(4)} = \langle \sigma_{13} \rangle$. Обратные по отношению к (6.41) определяющие соотношения в рассматриваемом случае сводятся к следующим:

$$\varepsilon_{13} = 2T(1 + \tau)(1 - \tau^I)^{-1} \langle \sigma_{13} \rangle.$$

Осредняя это уравнение и сравнивая его с определяющими соотношениями (6.23), получим точное выражение для функции увеличения податливости:

$$q_{\parallel}^*(0, 0, 0, j_\sigma^{(4)}) = \langle T[1 + \tau(0, \bar{j}_\sigma^{(2)})][1 - \tau^I(0, \tau)]^{-1} \langle T \rangle^{-1} - 1. \quad (8.8)$$

Естественно, что, используя зависимости (8.7) и (8.8), определяющие соотношения (6.22) и им обратные, а также уравнения связи материальных констант и функций (6.24), (2,25), можно построить функции $\rho_{\parallel}^*(0, 0, 0, j_\sigma^{(4)})$ и $q_{\perp}^*(0, 0, j_\sigma^{(3)}, 0)$.

Таким образом, эффективные материальные функции слоистого композита при описании его поведения на макроуровне в рамках простейшей теории пластичности трансверсально изотропной среды могут быть вычислены на основании данных о деформационных свойствах изотропных компонентов по точным соотношениям.

Решение задачи при заданных макродеформациях. Запишем определяющие соотношения (6.5), используя обозначения:

$$\begin{aligned} G_{dam} &= G(1 - g), \\ A_{1dam} &= K(1 - \kappa) + \frac{4}{3}G_{dam}, \quad A_{2dam} = K(1 - \kappa) - \frac{2}{3}G_{dam}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

для i -го компонента композита:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{13} \rangle &= 2G_{dam}^{(i)} \left(\varepsilon_{13} + \frac{1}{2}u'_{1,3}{}^{(i)} \right), \\ \langle \sigma_{23} \rangle &= 2G_{dam}^{(i)} \left(\varepsilon_{23} + \frac{1}{2}u'_{2,3}{}^{(i)} \right), \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= A_{2dam}^{(i)} (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{23} \rangle) + A_{1dam}^{(i)} \left(\langle \varepsilon_{33} \rangle + u'_{3,3}{}^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Используя условие равенства нулю математического ожидания пульсаций случайной величины $\langle u'_{1,3}{}^{(i)} \rangle$, после преобразований получим сле-

дующие уравнения:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33} \rangle &= \langle [A_{2dam}(\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) + A_{1dam} \langle \varepsilon_{33} \rangle] A_{1dam}^{-1} \rangle (A_{1dam}^{-1})^{-1}, \\ F_1^{(i)} &= [\langle \sigma_{33} \rangle - A_{2dam}^i (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) - A_{1dam}^i \langle \varepsilon_{33} \rangle] (A_{1dam}^i)^{-1} - u_{3,3}^{(i)} = 0, \\ \langle \sigma_{13} \rangle &= 2 \langle G_{dam}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad F_2^{(i)} = (G_{dam}^{(i)})^{-1} \langle \sigma_{13} \rangle - 2 \langle \varepsilon_{13} \rangle - u_{1,3}^{(i)} = 0, \\ \langle \sigma_{23} \rangle &= 2 \langle G_{dam}^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma_{23} \rangle, \quad F_3^{(i)} = (G_{dam}^{(i)})^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle - 2 \langle \varepsilon_{23} \rangle - u_{2,3}^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Таким образом, рассматриваемая стохастическая краевая задача сводится к системе $N = 3n$ нелинейных (поскольку κ и g являются функциями инвариантов структурных деформаций) алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_1^{(i)}(u_{3,3}^{(i)}, u_{1,3}^{(i)}, u_{2,3}^{(i)}) &= 0, \quad F_2^{(i)}(u_{3,3}^{(i)}, u_{1,3}^{(i)}, u_{2,3}^{(i)}) = 0, \\ F_3^{(i)}(u_{3,3}^{(i)}, u_{1,3}^{(i)}, u_{2,3}^{(i)}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Для решения этой системы, записав ее в виде $f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, воспользуемся итерационной процедурой, основанной на построении векторной итерационной функции [273]:

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - H_{ij}[z^{(k)}, t^{(k)}] f_j[z^{(k)}], \quad (8.12)$$

$$\beta_{ij}^{(k)} = -H_{ij}[z^{(k-1)}, t^{(k-1)}], \quad (8.13)$$

$$t_i^{(k)} = z_i^{(k)} + \beta_{ij}^{(k)} f_j[z^{(k)}], \quad (8.14)$$

где H_{ij} — элементы матрицы, обратной J , для которой

$$J_{ij}[z^{(k)}, t^{(k)}] = \frac{f_i[z_1^{(k)}, \dots, t_j^{(k)}, \dots, z_N^{(k)}] - f_i[z_1^{(k)}, \dots, z_j^{(k)}, \dots, z_N^{(k)}]}{t_j^{(k)} - z_j^{(k)}}. \quad (8.15)$$

В формулах (8.12)–(8.15) верхний индекс соответствует номеру итерации.

Расчеты по соотношениям (8.12)–(8.15) проводятся в следующей последовательности. Сначала, используя $\beta^{(k)}$ из (8.13) и $z^{(k)}$, по формуле (8.14) вычисляем $t^{(k)}$, причем элементы $H_{ij}[z^{(k-1)}, t^{(k-1)}]$ найдены на предыдущей итерации. Затем, используя $z^{(k)}$ и $t^{(k)}$, по формуле (8.15) вычисляем элементы $J_{ij}[z^{(k)}, t^{(k)}]$. Обращая эту матрицу, получаем $H_{ij}[z^{(k)}, t^{(k)}]$ и определяем по уравнению (8.12) очередное приближение.

Рассмотренная итерационная процедура позволяет в нашем случае по заданным макродеформациям определить все неизвестные величины, относящиеся к микроуровню (структурные напряжения и деформации, значения функций микроповрежденности) и неизвестные

макронапряжения. Значения функций макроповрежденности, выражающих эффективные деформационные свойства композита, также вычисляются с использованием величин, найденных в результате решения стохастической краевой задачи.

Следует отметить, что найденные макронапряжения вместе с заданными макродеформациями полностью определяют сопротивление композиционного материала на макроскопическом уровне, но разрешить уравнения (6.18) относительно всех функций макроповрежденности в общем случае не удастся. Для их определения воспользуемся знанием пульсадей всех микродеформаций, с помощью которых можно вычислить значения функций микроповрежденности, и уравнениями (8.6), записав их для секущих модулей, т.е. деформационных свойств с учетом поврежденности, соответствующих одному и тому же уровню макродеформаций. После преобразований получим выражения для эффективных материальных функций:

$$\begin{aligned} \kappa^* &= 1 - (\langle A_{1dam} \rangle + \langle A_{2dam} A_{1dam}^{-1} \rangle^2 \langle A_{1dam}^{-1} \rangle^{-1} - \langle A_{2dam}^2 A_{1dam}^{-1} \rangle - \\ &\quad - \langle G_{dam} \rangle) (\langle A_1 \rangle + \langle A_2 A_1^{-1} \rangle^2 \langle A_1^{-1} \rangle^{-1} - \langle A_2^2 A_1^{-1} \rangle - \langle G \rangle)^{-1}, \\ \varphi^* &= 1 - \langle A_{2dam} A_{1dam}^{-1} \rangle \langle A_{1dam}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_2 A_1^{-1} \rangle^{-1} \langle A_1^{-1} \rangle, \\ \xi^* &= 1 - \langle A_{1dam}^{-1} \rangle \langle A_1^{-1} \rangle, \\ \rho_{\perp}^* &= 1 - \langle G_{dam} \rangle \langle G \rangle^{-1}, \\ \rho_{\parallel}^* &= 1 - \langle G_{dam}^{-1} \rangle \langle G^{-1} \rangle, \end{aligned} \tag{8.16}$$

где $A_1 = K + (4/3)G$, $A_2 = K - (2/3)G$.

Построение функций макроповрежденности, зависящих от четырех инвариантов тензора макродеформаций, требует вычисления их значений в самых различных макрооднородных напряженно-деформированных состояниях. Моделируя простой процесс деформирования представительного объема слоистого композита $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \lambda e_{ij}$, где e — заданный тензор, путем дискретного увеличения параметра λ , можно определить значения всех функций макроповрежденности и вычислить значения инвариантов тензора макронапряжений по заданным значениям инвариантов тензора макродеформаций на каждом шаге увеличения $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. При этом целесообразно на первом шаге выбирать нулевое приближение итерационной процедуры на основе решения упругой задачи, а на каждом последующем шаге использовать информацию о поврежденности слоев при макродеформациях, соответствующих предыдущему шагу.

Решение задачи при заданных макронапряжениях. Рассмотрим решение задачи (8.1), (8.4) и (6.13) с граничными условиями, составляющими вторую группу уравнений (8.5).

Используя разложение случайных полей структурных напряжений на осредненные и пульсационные составляющие, а также уравнения

равновесия (8.1), запишем

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma'_{11} \delta_{i1} \delta_{j1} + \sigma'_{22} \delta_{i2} \delta_{j2} + \sigma'_{12} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}). \quad (8.17)$$

Разрешив систему (6.13) относительно неизвестных $\sigma'_{11}, \sigma'_{22}$ и σ'_{12} , после осреднения полученных соотношений с учетом равенства нулю математических ожиданий пульсаций случайных величин придем к формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{12} \rangle &= 2\langle T^{-1}(1+\tau)^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma_{12} \rangle, \\ \bar{F}_1 &= \langle \varepsilon_{12} \rangle T^{-1}(1+\tau)^{-1} - 2\langle \sigma_{12} \rangle - 2\sigma'_{12} = 0, \\ \langle \varepsilon_{11} \rangle &= (\langle \Phi_6 \rangle \langle \Phi_8 \rangle^{-1} + \langle \Phi_7 \rangle \langle \Phi_9 \rangle^{-1}) (\langle \Phi_8 \rangle^{-1} \langle \Phi_9 \rangle - \langle \Phi_8 \rangle \langle \Phi_9 \rangle^{-1})^{-1}, \\ \bar{F}_2 &= \Phi_8 \langle \varepsilon_{22} \rangle - \Phi_9 \langle \varepsilon_{11} \rangle + \Phi_6 - \sigma'_{11} = 0, \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle &= (\langle \Phi_7 \rangle \langle \Phi_8 \rangle^{-1} + \langle \Phi_6 \rangle \langle \Phi_9 \rangle^{-1}) (\langle \Phi_8 \rangle^{-1} \langle \Phi_9 \rangle - \langle \Phi_8 \rangle \langle \Phi_9 \rangle^{-1})^{-1}, \\ \bar{F}_3 &= \Phi_8 \langle \varepsilon_{11} \rangle - \Phi_9 \langle \varepsilon_{22} \rangle + \Phi_7 - \sigma'_{22} = 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Для упрощения записи приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= R(1+\tau) - \frac{2}{3}T(1+\tau), \\ \Phi_2 &= R(1+\tau) - \frac{4}{3}T(1+\tau), \\ \Phi_3 &= \Phi_2 \langle \sigma_{11} \rangle + \Phi_1 (\langle \sigma_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle), \\ \Phi_4 &= \Phi_2 \langle \sigma_{22} \rangle + \Phi_1 (\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle), \\ \Phi_5 &= \Phi_1 \Phi_2^{-1} - \Phi_1^{-1} \Phi_2, \\ \Phi_6 &= (\Phi_1^{-1} \Phi_3 - \Phi_2^{-1} \Phi_4) \Phi_5^{-1}, \\ \Phi_7 &= (\Phi_1^{-1} \Phi_4 - \Phi_2^{-1} \Phi_3) \Phi_5^{-1}, \\ \Phi_8 &= \Phi_2^{-1} \Phi_5^{-1}, \quad \Phi_9 = \Phi_1^{-1} \Phi_5^{-1}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Таким образом, рассматриваемая стохастическая краевая задача и в этом случае сводится к системе $N = 3n$ нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных пульсаций структурных напряжений для каждого i -го компонента слоистого композита:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^{(i)}(\sigma'_{11}{}^{(i)}, \sigma'_{22}{}^{(i)}, \sigma'_{33}{}^{(i)}) &= 0, \\ \bar{F}_2^{(i)}(\sigma'_{11}{}^{(i)}, \sigma'_{22}{}^{(i)}, \sigma'_{33}{}^{(i)}) &= 0, \\ \bar{F}_3^{(i)}(\sigma'_{11}{}^{(i)}, \sigma'_{22}{}^{(i)}, \sigma'_{33}{}^{(i)}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Рассмотренное решение позволяет по заданным макроапряжениям определить все неизвестные величины, относящиеся к микроуровню

(структурные напряжения и деформации, значения функций увеличения податливости слоев) и неизвестные макродеформации. Значения эффективных функций увеличения податливости с использованием величин, найденных в результате решения стохастической краевой задачи, находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \pi^* &= (\langle B_{1dam} \rangle - \langle B_{2dam} B_{1dam}^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T_{dam}^{-1} \rangle)^{-1} P^{*-1} - 1, \\ \chi^* &= \langle B_{2dam} B_{1dam}^{-1} \rangle (\langle B_{1dam} \rangle - \langle B_{2dam} B_{1dam}^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T_{dam}^{-1} \rangle)^{-1} L^{*-1} - 1, \\ \zeta^* &= [\langle B_{1dam}^{-1} \rangle + \langle B_{2dam} B_{1dam}^{-1} \rangle \times \\ &\quad \times (\langle B_{1dam} \rangle - \langle B_{2dam} B_{1dam}^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T_{dam}^{-1} \rangle)^{-1}] N^{*-1} - 1, \\ q_{\perp}^* &= \langle T_{dam}^{-1} \rangle^{-1} Q_{\perp}^{*-1} - 1, \quad q_{\parallel}^* = \langle T_{dam} \rangle Q_{\parallel}^{*-1} - 1, \end{aligned} \quad (8.22)$$

где упругие коэффициенты податливости:

$$\begin{aligned} P^* &= (\langle B_1 \rangle - \langle B_2 B_1^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T^{-1} \rangle)^{-1}, \\ L^* &= \langle B_2 B_1^{-1} \rangle (\langle B_1 \rangle - \langle B_2 B_1^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T^{-1} \rangle)^{-1}, \\ N^* &= \langle B_1^{-1} \rangle + \langle B_2 B_1^{-1} \rangle^2 (\langle B_1 \rangle - \langle B_2 B_1^{-1} \rangle - \frac{1}{4} \langle T^{-1} \rangle)^{-1}, \\ Q_{\perp}^* &= \langle T^{-1} \rangle^{-1}, \quad Q_{\parallel}^* = \langle T \rangle, \end{aligned} \quad (8.23)$$

при обозначениях:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{9} R^{-1} + \frac{1}{3} T^{-1}, \\ B_{1dam} &= \frac{1}{9} R^{-1} (1+r)^{-1} + \frac{1}{3} T^{-1} (1+r)^{-1}, \\ B_2 &= \frac{1}{9} R^{-1} - \frac{1}{6} T^{-1}, \\ B_{2dam} &= \frac{1}{9} R^{-1} (1+r)^{-1} - \frac{1}{6} T^{-1} (1+r)^{-1}, \\ T_{dam} &= T(1+r). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Формулы выведены с использованием соотношений (6.14), (6.25) и (8.6). Полученные соотношения позволяют при моделировании простого нагружения представительного объема слоистого композита так, что $\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda s_{ij}$, где s — заданный тензор, а λ — дискретно увеличивающийся параметр процесса, определять значения всех эффективных функций увеличения податливости и вычислять значения инвариантов тензора макродеформаций по заданным значениям инвариантов тензора макронапряжений на каждом шаге изменения $\langle \sigma_{ij} \rangle$.

8.2. Эффективные материальные функции деформационной теории поврежденных анизотропных сред

Поскольку неупругое поведение композиционных материалов на макроуровне является результатом сложным образом взаимосвязанных процессов деформирования и разрушения элементов структуры, то для удобства анализа рассмотрим сначала особенности только упруго-пластического деформирования слоистых композитов.

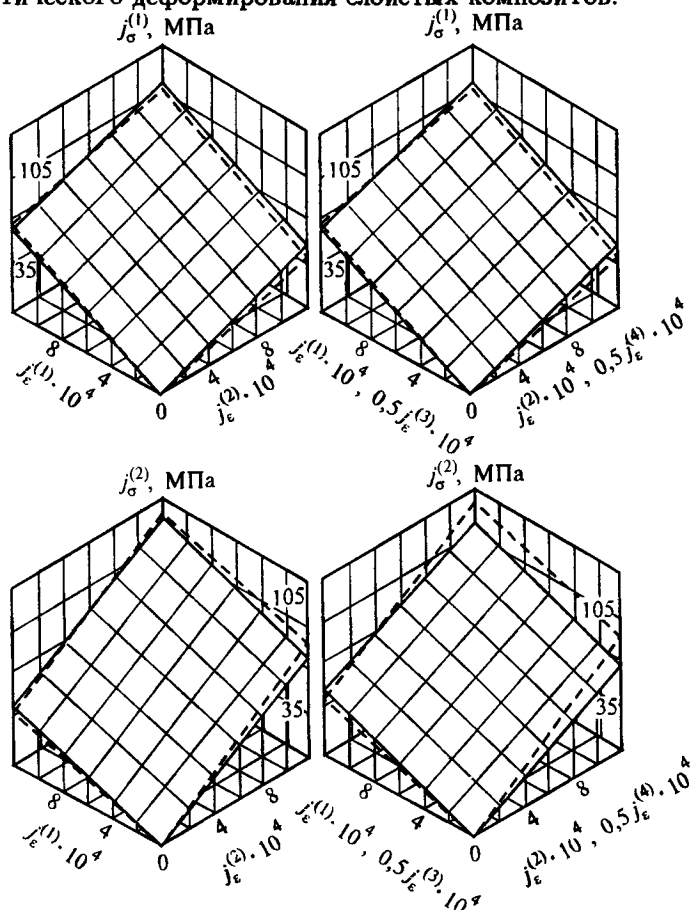


Рис. 8.1. Зависимости между линейными инвариантами тензоров макронапряжений и макродеформаций при различных процессах деформирования

Одним из материалов, выбранных для исследования, является слоистый композит "алюминий-магний" с объемными долями компонентов соответственно 0,4 и 0,6. Информация о деформационных свой-

ствах компонентов получена из [131, 326], зависимости этих свойств от гидростатического давления приведены в [173]. Оказалось, что деформирование алюминиевых и магниевых слоев может быть описано с помощью функций поврежденности следующего вида:

$$\kappa = A \bar{j}_\epsilon^{(1)}, \quad g = B \bar{j}_\epsilon^{(1)} + (1 - \bar{j}_{\epsilon \text{упр}}^{(2)} / \bar{j}_\epsilon^{(2)}) (1 - G'/G) h(\bar{j}_\epsilon^{(2)} - \bar{j}_{\epsilon \text{упр}}^{(2)}), \quad (8.25)$$

где $h(x)$ — функция Хевисайда, принимающая значение равное единице при положительном аргументе и нулю — при отрицательном или нулевом.

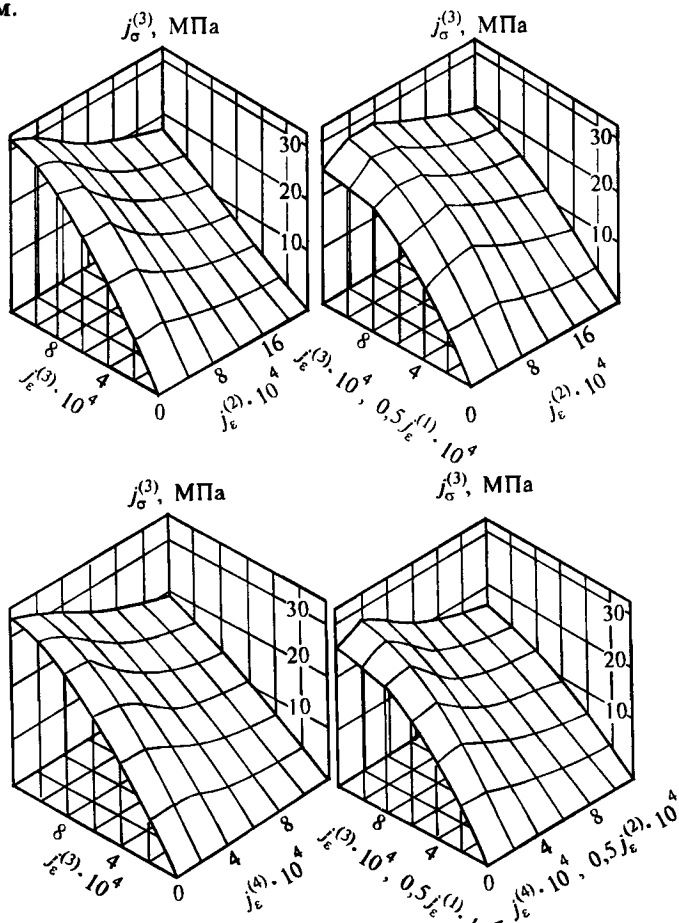


Рис. 8.2. Зависимость третьего инварианта тензора макронапряжений от инвариантов тензора макродеформаций

Константы алюминия: $K = 7,85 \cdot 10^4$ МПа; $G = 2,55 \cdot 10^4$ МПа; $G' = 7,90 \cdot 10^3$ МПа; $\bar{j}_{\epsilon \text{упр}}^{(2)} = 3,3 \cdot 10^{-4}$; $A = 4,770$; $B = 6,125$. Константы

магния: $K = 3,67 \cdot 10^4$ МПа; $G = 1,69 \cdot 10^4$ МПа; $G' = 3,00 \cdot 10^2$ МПа;
 $\bar{j}_{\varepsilon \text{упр}}^{(2)} = 6,3 \cdot 10^{-4}$; $A = 4,140$; $B = 3,220$.

Как следует из уравнений состояний (6.22), зависимости между инвариантами тензоров макронапряжений (6.21) и макродеформаций (6.20)

$$j_{\sigma}^{(1)} = j_{\sigma}^{(1)}(j_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, j_{\varepsilon}^{(4)}), \quad j_{\sigma}^{(2)} = j_{\sigma}^{(2)}(j_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, j_{\varepsilon}^{(4)}),$$

$$j_{\sigma}^{(3)} = j_{\sigma}^{(3)}(j_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, j_{\varepsilon}^{(4)}), \quad j_{\sigma}^{(4)} = j_{\sigma}^{(4)}(j_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, j_{\varepsilon}^{(4)})$$

отражают поведение исследуемого композиционного материала на макроуровне и полностью определяются вычисляемыми в ходе решения материальными константами и функциями.

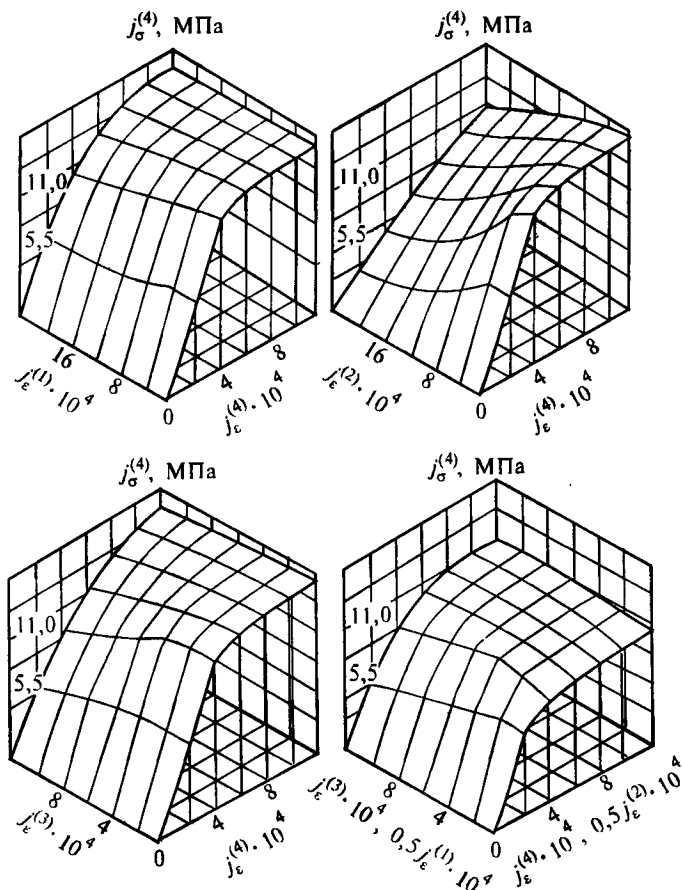


Рис. 8.3. Зависимость четвертого инварианта тензора макронапряжений от инвариантов тензора макродеформаций

На рис. 8.1–8.3 приведены результаты расчетов для различных простых процессов деформирования слоистого композита "алюминий-магний". Штриховые линии на рисунках соответствуют решению задачи о линейно упругом деформировании.

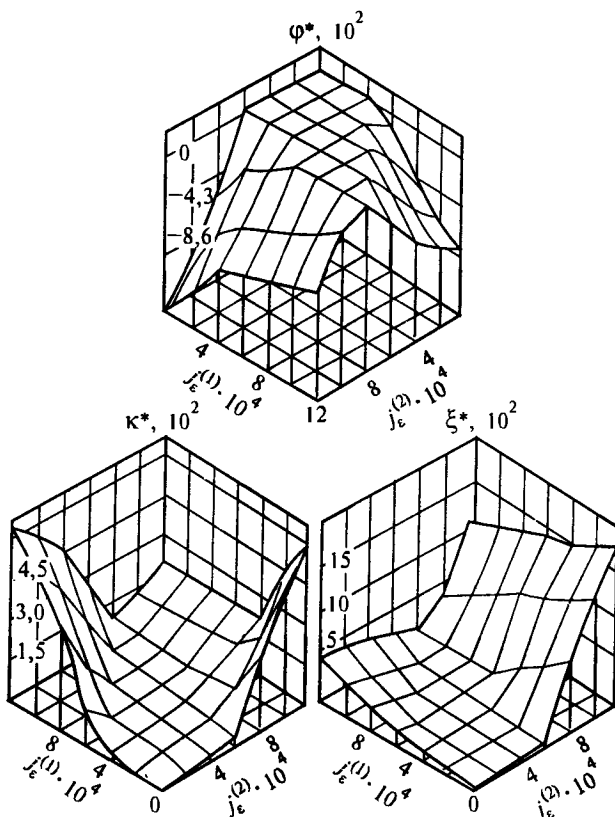


Рис. 8.4. Функции макроповрежденности

Рисунки 8.1–8.3 свидетельствуют о том, что связь между линейными инвариантами является слабо нелинейной по сравнению, например, с зависимостями $j_\sigma^{(3)} \sim j_\epsilon^{(3)}$ или $j_\sigma^{(4)} \sim j_\epsilon^{(4)}$. Следует отметить, что более сильное влияние на характер последних зависимостей оказывает величина $j_\epsilon^{(2)}$ в сравнении с инвариантом $j_\epsilon^{(1)}$. В целом, зависимости между инвариантами являются довольно сложными, а решение вопроса об упрощении используемой теории пластичности анизотропного тела в данном случае нельзя считать очевидным. Для оценки погрешностей, возникающих при упрощении теории, могут быть полезны данные, подобные приведенным на рис 8.4 и являющиеся графическим изображением функций макроповрежденности.

Обращает на себя внимание сложный характер зависимостей функций макроповрежденности от своих аргументов и тот факт, что функция φ^* принимает отрицательные значения. Это выражается в том, что кривые $j_{\sigma}^{(1)} \sim j_{\epsilon}^{(2)}$ и $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$ могут являться выражением присущей материалу "жесткой характеристики" [204], т.е. значения инвариантов тензора напряжений, рассчитанные с учетом пластического деформирования компонентов, оказываются больше соответствующих значений, рассчитанных по линейно упругой модели (кривая 5 на рис. 8.5). Аналогичный результат был получен в [206].

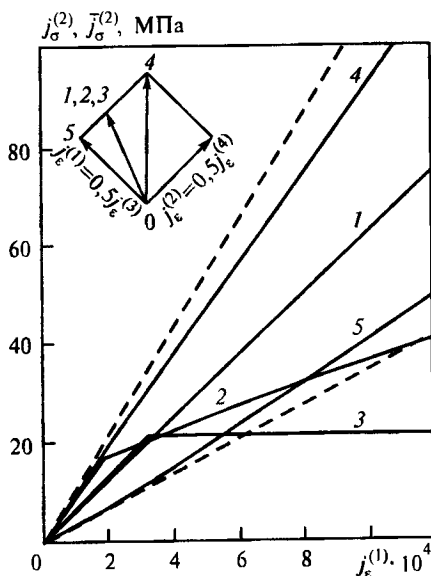


Рис. 8.5. Диаграммы деформирования: 1 — $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$, $j_{\epsilon}^{(1)} = 2,64j_{\epsilon}^{(2)} = 0,5j_{\epsilon}^{(3)} = 1,32j_{\epsilon}^{(4)}$; 2, 3 — $\bar{j}_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$, $j_{\epsilon}^{(1)} = 2,64j_{\epsilon}^{(2)} = 0,5j_{\epsilon}^{(3)} = 1,32j_{\epsilon}^{(4)}$; 4 — $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$, $j_{\epsilon}^{(1)} = j_{\epsilon}^{(2)} = 0,5j_{\epsilon}^{(3)} = 0,5j_{\epsilon}^{(4)}$; 5 — $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$, $j_{\epsilon}^{(1)} = 0,5j_{\epsilon}^{(3)}$;

В то же время, как видно из соотношений (6.22), значения $j_{\sigma}^{(1)}$ и $j_{\sigma}^{(2)}$ определяются не только функцией поврежденности φ^* , но и функциями κ^* и ξ^* , которые положительны.

Таким образом, мы имеем дело с двумя тенденциями, графическим отражением которых является тот или иной характер нелинейности диаграмм деформирования.

Рисунок 8.5 иллюстрирует пример того, что, подобрав определенные отношения компонент тензора макродеформаций для процесса деформирования, можно добиться совершенно линейных зависимостей $j_{\sigma}^{(1)} \sim j_{\epsilon}^{(2)}$ или $j_{\sigma}^{(2)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$ (прямая 1) при неупругом поведении всех элементов структуры (кривые 2 и 3). На кривых 4 и 5 помечены

точки, соответствующие переходу компонентов композита в пластическое состояние.

Решение рассмотренной задачи в напряжениях для достаточного набора различных простых процессов нагружения позволяет определить функции увеличения эффективной податливости. Некоторые результаты таких расчетов для композита "алюминий-магний" приведены на рис. 8.6.

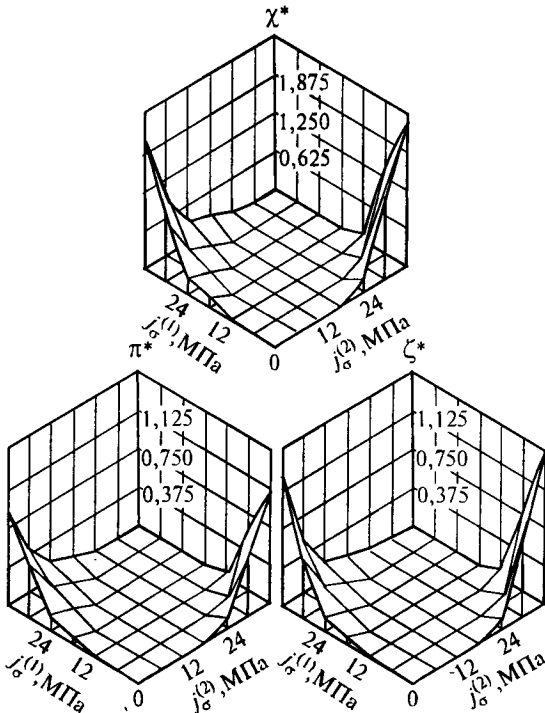


Рис. 8.6. Функции увеличения эффективной податливости

Результаты численных экспериментов получены также для слоистого композита, в качестве компонентов которого были выбраны конструкционный полимер, близкий по свойствам к поликарбонату "Дифлон", и медь с объемными долями соответственно 0,6 и 0,4. Деформирование полимерных слоев описывалось материальными функциями

$$\kappa = A | \bar{j}_\epsilon^{(1)} |^\alpha \text{sign}(\bar{j}_\epsilon^{(1)}), \quad g = B \bar{j}_\epsilon^{(2)\beta}, \quad (8.26)$$

а также константами: $K = 3,01 \cdot 10^3$ МПа; $G = 1,07 \cdot 10^3$ МПа; $A = 11,78$; $\alpha = 0,612$; $B = 2,46$; $\beta = 0,530$. Поведение медных слоев описывалось функцией (8.25) ($\kappa = 0$) и константами: $K = 13,22 \cdot 10^4$

МПа; $G = 4,42 \cdot 10^4$ МПа; $G' = 1,43 \cdot 10^4$ МПа; $\bar{j}_{\text{супр}}^{(2)} = 6,37 \cdot 10^{-4}$; $B = 0$ (данные взяты из [326]). Особенностью этого композиционного материала является то, что компоненты его удовлетворяют условиям потенциальности (6.28).

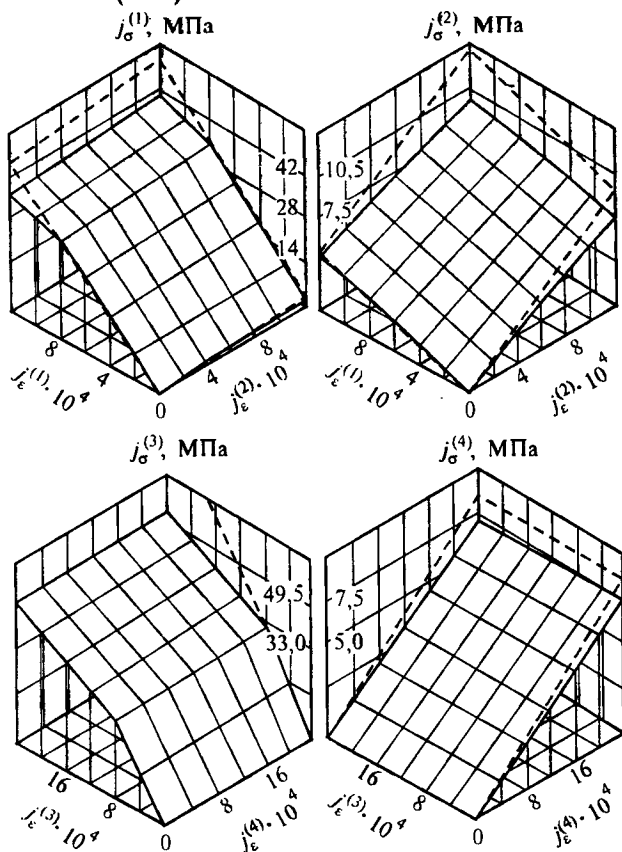


Рис. 8.7. Зависимость инвариантов тензора макронапряжений от инвариантов тензора макродеформаций

Результаты расчетов для материала "поликарбонат-медь" приведены на рис. 8.7 и свидетельствуют о том, что зависимость между линейными инвариантами является существенно нелинейной, инвариант $j_{\sigma}^{(3)}$ практически не зависит от $j_{\epsilon}^{(4)}$, а $j_{\sigma}^{(4)}$ практически не зависит от $j_{\epsilon}^{(3)}$. Основной причиной такого характера зависимостей между нелинейными инвариантами является, видимо, большое отличие в жесткостных свойствах компонентов. Основное сопротивление макродеформации ϵ_{12}^* оказывают, естественно, более жесткие медные слои, которые практически не участвуют и, следовательно, не поврежда-

ются в процессе увеличения деформаций ϵ_{13}^* и ϵ_{23}^* , осуществляемого, в основном, за счет податливых полимерных слоев.

Таким образом, полученные данные формируют представление о том, что для композитов, состоящих из существенно отличающихся по жесткостным свойствам слоев, зависимости между нелинейными инвариантами близки к зависимостям, принимаемым в простейшем варианте теории пластичности трансверсально изотропного тела.

В работе [117] теоретически показано, что если определяющие соотношения компонентов композита являются потенциальными, то и эффективные соотношения композита должны быть потенциальными. Это положение может быть использовано для подтверждения достоверности получаемых результатов.

Путем вычисления значений функций макроповрежденности при различных макродеформациях слоистого композита "поликарбонат-медь" и использования условий потенциальности (6.32), записанных на языке эффективных материальных констант и функций в конечно-разностном виде, получены данные, приведенные в табл. 8.1. Замечено, что погрешность выполнения равенств потенциальности, которая заключается в некотором отличии значений их правых и левых частей, уменьшается с уменьшением приращений аргументов дифференцируемых функций и каких-либо пределов этого уменьшения не обнаружено.

Т а б л и ц а 8.1

Выполнение условий потенциальности

Вариант*	$j_{\epsilon}^{(1)}$	$j_{\epsilon}^{(2)}$	$j_{\epsilon}^{(3)}$	$j_{\epsilon}^{(4)}$	Погрешность***, %
1	a^{**}	a	0	0	4,4/1
2	a	a	a	0	0,1/2; 0,5/4
3	a	a	0	0	2,2/1
4	0	0	a	a	3,8/6
5	a	a	a	0	0,1/2; 3,5/4
6	a	a	0	a	0,6/3; 0,2/5

* В вариантах 1 и 2 не учитывалась пластическая сжимаемость слоев
 ** $a = 1,5 \cdot 10^{-3}$
 *** В знаменателе номер условия из (6.32) по порядку

Таким образом, можно сделать вывод, что полученные данные подтверждают достоверность результатов решения задачи деформирования слоистых композитов, а малая погрешность в выполнении условий потенциальности на макроуровне может быть отнесена на счет приближенного вычисления производных.

8.3. Закономерности упругопластического поведения при активном деформировании

Особенностью композиционных материалов является тот факт, что они могут обладать свойствами, которые ни один из их элементов структуры в отдельности не проявляет, и наоборот, на макроуровне могут быть совершенно неувидимы некоторые глубинные процессы, заметные на структурном уровне (например, особенность поведения слоистого композита, показанная на рис. 8.5). В этом проявляется свойственный композиционным материалам синергизм. Для расширения представлений об этом явлении могут оказаться полезными результаты исследования эффектов механического поведения слоистых композитов, вызванных коллективным взаимодействием структурных элементов.

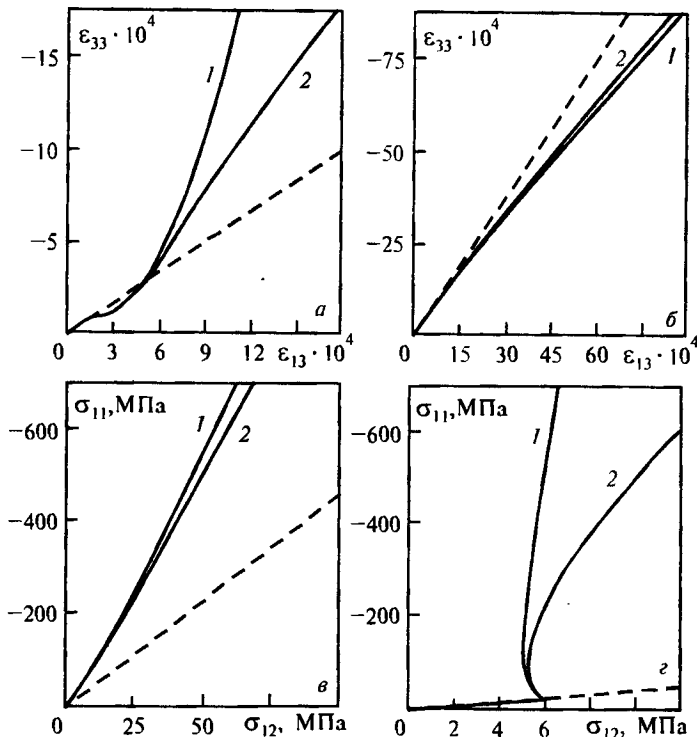


Рис. 8.8. Траектории деформирования и нагружения структурных элементов при простом процессе деформирования композита ($\epsilon_{12}^* = 0,5\epsilon_{13}^* = -\epsilon_{11}^* = -\epsilon_{22}^* = -0,5\epsilon_{33}^*$): а, в — алюминиевые слои; б, г — магниевые слои; 1 — без учета пластической сжимаемости компонентов; 2 — с учетом пластической сжимаемости

В работе [91] в рамках эндохронной теории было показано, что элементарный слой, деформирующийся в составе неупругого многослой-

ного тела, испытывает сложное нагружение при простом нагружении композита. Аналогичные результаты получены для рассматриваемых в настоящей работе материалов при использовании деформационной теории пластичности.

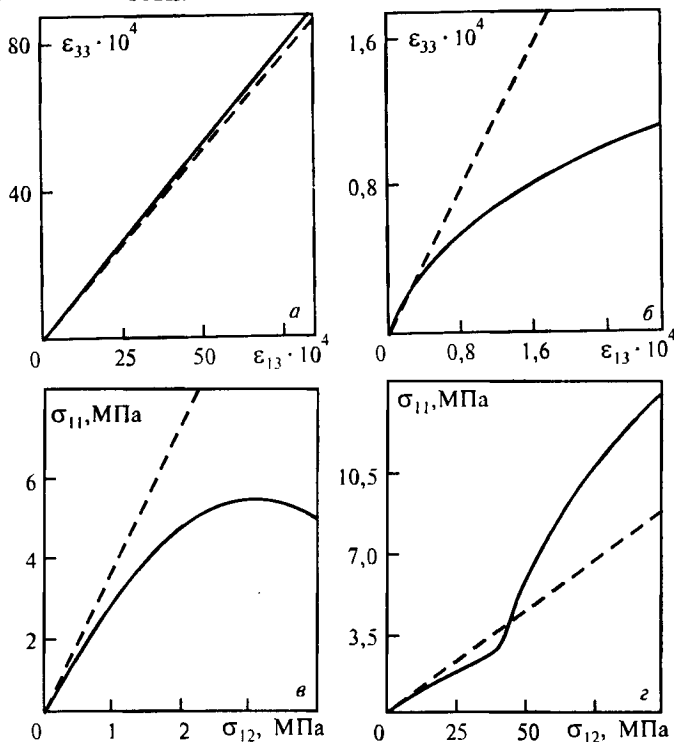


Рис. 8.9. Траектории деформирования и нагружения структурных элементов при простом процессе деформирования композита ($\epsilon_{33}^* = \epsilon_{13}^* = 2\epsilon_{12}^*$): а, б — полимерные слои, в, г — медные слои

Траектории деформирования и нагружения структурных элементов при простых процессах деформирования приведены на рис. 8.8 для слоистого композита "алюминий-магний" и на рис. 8.9 для материала типа "поликарбонат-медь". В обоих случаях простой процесс деформирования композита не сопровождается простым процессом деформирования и нагружения структурных элементов. Как видно, наличие этого эффекта не объясняется учетом пластической сжимаемости компонентов.

Полученные результаты свидетельствуют, что излом траектории происходит в точке перехода в пластическую область (см. рис. 8.8г). После некоторого увеличения может наблюдаться уменьшение значений определенных компонент тензора структурных напряжений (см. рис. 8.8г; рис. 8.9в). Наблюдаются также пересечения траекторий с лу-

чами пропорционального изменения структурных деформаций (рис. 8.8а) и структурных напряжений (рис. 8.9з), рассчитанными по упругой модели (штриховые линии на всех рисунках).

Таким образом, использование соотношений теории малых упругопластических деформаций при решении задач механики композитов может оказаться пригодным лишь для приближенной оценки эффектов, порождаемых возникновением пластических деформаций. Во многих случаях, вероятно, эта оценка оказывается эффективной и достаточной с практической точки зрения [157].

Продолжая рассмотрение особенностей деформирования слоистых композитов и называя изменение объема, не сопровождающееся формоизменением, чистым объемоизменением, изменение формы без изменения объема — чистым формоизменением, гидростатическое напряженное состояние — чистой гидростатикой, а напряженное состояние, при котором отсутствует шаровая часть тензора напряжений — девиаторным, сформулируем следующие положения.

1. Если слоистый композит состоит из изотропных слоев с одинаковыми модулями объемного сжатия и совпадающими функциями поврежденности κ , то чистому объемоизменению и чистой гидростатике на макроуровне соответствует чистое объемоизменение и чистая гидростатика на структурном уровне. При этом поведение

композита не зависит от значений модулей сдвига слоев. Он ведет себя в этих условиях как однородный изотропный материал.

2. Если слоистый композит состоит из изотропных слоев с одинаковыми модулями сдвига и совпадающими функциями поврежденности g , то чистому формоизменению и девиаторному напряженному состоянию на макроуровне соответствует чистое формоизменение и девиаторное напряженное состояние на структурном уровне. При этом деформирование композита не зависит от значений модулей объемного сжатия слоев. Он ведет себя в этих условиях как однородный изотропный материал.

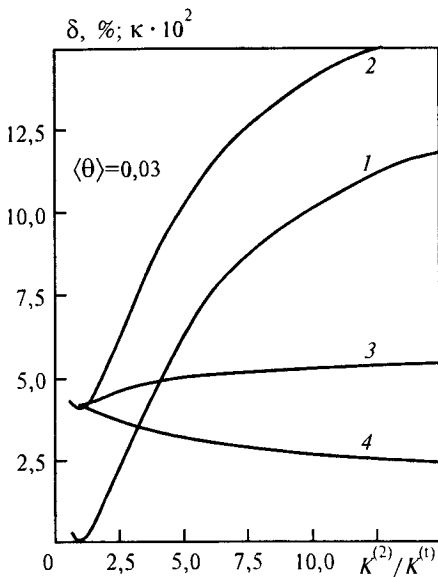


Рис. 8.10. Зависимость параметра нелинейности от отношения модулей объемного сжатия компонентов: без учета пластической сжимаемости (1), с учетом пластической сжимаемости (2), κ первого (3) и κ второго компонентов (4)

Доказательство этих положений сводится к доказательству того, что в указанных условиях

$$u'_{3,3} = u'_{1,3} = u'_{2,3} = 0, \quad \sigma'_{11} = \sigma'_{22} = \sigma'_{12} = 0, \quad (8.27)$$

причем из первой группы равенств следует вторая и наоборот.

В случае, определенном положением 1 ($K(1 - \kappa) = \langle K(1 - \kappa) \rangle$), $\langle \epsilon_{11} \rangle = \langle \epsilon_{22} \rangle = \langle \epsilon_{33} \rangle$, $\langle \epsilon_{12} \rangle = \langle \epsilon_{13} \rangle = \langle \epsilon_{23} \rangle = 0$, справедливость (8.27) следует из уравнений (8.10) и формул (8.8), раскрывающих обозначения, введенные при их записи. Из этих же соотношений следуют равенства (8.27) в случае 2 ($G(1 - g) = \langle G(1 - g) \rangle$, $\langle \epsilon_{11} \rangle + \langle \epsilon_{22} \rangle + \langle \epsilon_{33} \rangle = 0$). Возможно построение доказательства (8.27) на основании формул, выведенных в ходе решения задачи при заданных макронапряжениях (см. § 8.1).

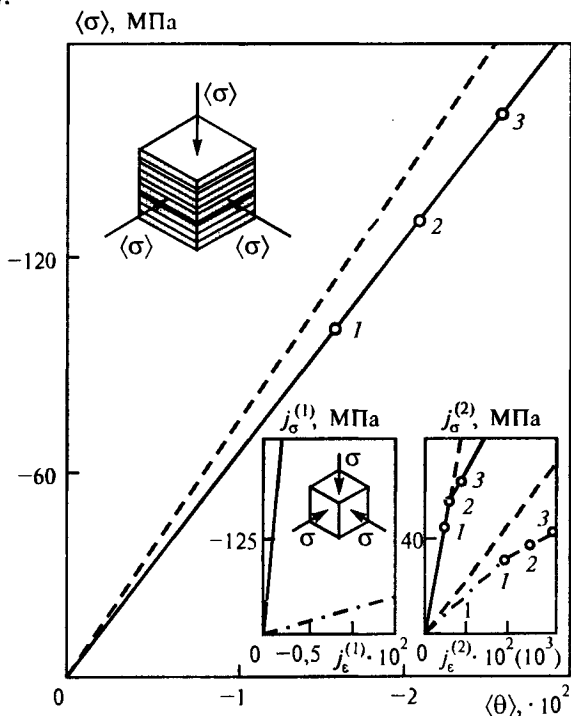


Рис. 8.11. Гидростатическое сжатие слоистого композита, диаграммы деформирования компонентов: сплошные линии — полимер, штрихпунктир — медь

Приведем расчетные зависимости отклонения от линейности (параметра нелинейности δ) диаграммы $\frac{1}{3} \delta_{ii}^* \sim \epsilon_{ii}^*$ от отношения модулей объемного сжатия компонентов слоистого композита при $\epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = \epsilon_{33}^*$ (рис. 8.10). Параметр нелинейности представляет собой отличие значений осредненного гидростатического давления, вычисленных по

упругой и неупругой моделям при заданном значении относительного изменения объема композита.

Исследовался модельный материал, для компонентов которого функция g имеет вид (8.25), а функция κ в случае, когда учитывается пластическая сжимаемость — $\kappa = ||\bar{j}_\varepsilon^{(1)}| - \bar{j}_{\varepsilon\text{упр}}^{(1)}|^\alpha \text{sign}(\bar{j}_\varepsilon^{(1)})h(|\bar{j}_\varepsilon^{(1)}| - \bar{j}_{\varepsilon\text{упр}}^{(1)})$. Объемные доли компонентов принимались равными 0,4 и 0,6. Модуль объемного сжатия первого компонента $K^{(1)} = 5000$ МПа, а модуль объемного сжатия второго $K^{(2)}$ варьировался. Пластические объемные изменения компонентов могли начинаться при значениях первых инвариантов $\bar{j}_\varepsilon^{(1)}$, равных $\bar{j}_{\varepsilon\text{упр}}^{(1)} = 0,002$ (для первого) и $\bar{j}_{\varepsilon\text{упр}}^{(1)} = 0,001$ (для второго). Остальные константы считались равными для обоих компонентов: $G = 2000$ МПа; $G' = 400$ МПа; $\bar{j}_{\varepsilon\text{упр}}^{(2)} = 0,005$; $A = 0,12$; $\alpha = 0,3$; $B = 0$. Как видно из рис. 8.10, неупругое изменение объема композита тем больше, чем сильнее отличаются модули объемного сжатия компонентов. Это согласуется с выводами других авторов [79, 117] и объясняется, как видно из рис. 8.11, неупругим поведением элементов структуры при формоизменении. Результаты, приведенные на рис. 8.11, получены в процессе численного моделирования гидростатического сжатия материала "поликарбонат-медь". При этом с целью выяснения других возможных причин нелинейного поведения композита на макроуровне пластическая сжимаемость компонентов не учитывалась.

8.4. Остаточные напряжения и деформации

Представляет определенный интерес поведение композиционного материала при разгрузке и возникновение при этом остаточных напряжений и деформаций, уровень которых во многих случаях является важным параметром, определяющим качество изделий. Остаточные напряжения и деформации могут оказать существенное влияние на процессы деформирования и разрушения при эксплуатации, а также сделать конструкцию непригодной для дальнейшего использования вследствие искажения формы.

Под остаточными напряжениями и деформациями, подразделяя их в зависимости от уровня рассмотрения на структурные (микроскопические) и макроскопические, будем понимать, как принято, такие напряжения и деформации, которые существуют и уравниваются внутри тела после устранения воздействий, вызвавших их появление. Эти воздействия могут быть весьма разнообразны [208]. Рассматривая изотермические процессы, мы ограничимся исследованием остаточных напряжений и деформаций, возникающих лишь в результате неоднородности пластических деформаций, обусловленной в условиях макрооднородного напряженного состояния неоднородностью структуры композита.

Для вычисления остаточных напряжений и деформаций на основе решения задачи упругопластического деформирования композита воспользуемся теоремой о разгрузке, доказанной А.А. Ильюшиным [102]. В ней утверждается, что перемещения точки тела, находящегося в условиях объемного напряженного состояния (а также деформации и напряжения), в некоторый момент разгрузки равны разностям между их значениями в момент начала разгрузки и упругими перемещениями (соответственно деформациями и напряжениями), которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки. При этом нагрузка и разгрузка должны быть простыми.

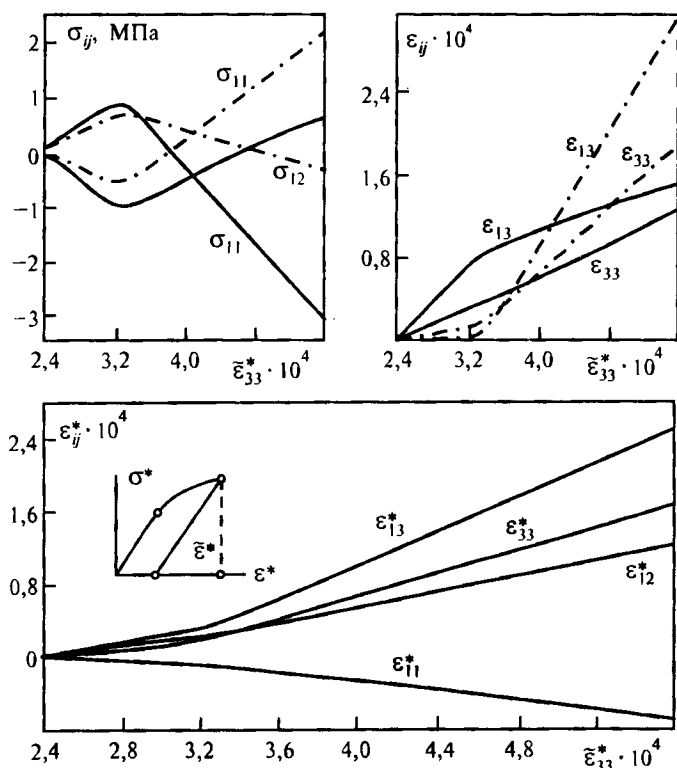


Рис. 8.12. Остаточные структурные напряжения, деформации и макродеформации после снятия нагрузки: $\tilde{\epsilon}_{33}^*$ — достигнутый уровень макродеформаций ($\tilde{\epsilon}_{33}^* = \tilde{\epsilon}_{13}^* = 2\tilde{\epsilon}_{12}^*$), сплошные линии — алюминиевые слои, штрихпунктир — магнитные слои

Рассмотрим процессы разгрузки, при которых все компоненты, а следовательно, и инварианты тензоров макронапряжений или макродеформаций уменьшаются пропорционально одному параметру. Опре-

деляющие соотношения, описывающие эти процессы с позиций макроуровня, в инвариантной записи имеют вид (6.23). При этом разгрузка на микроуровне (уменьшение всех компонент и инвариантов тензоров структурных напряжений и деформаций), описываемая линейными уравнениями (6.11), будет начинаться одновременно во всех слоях.

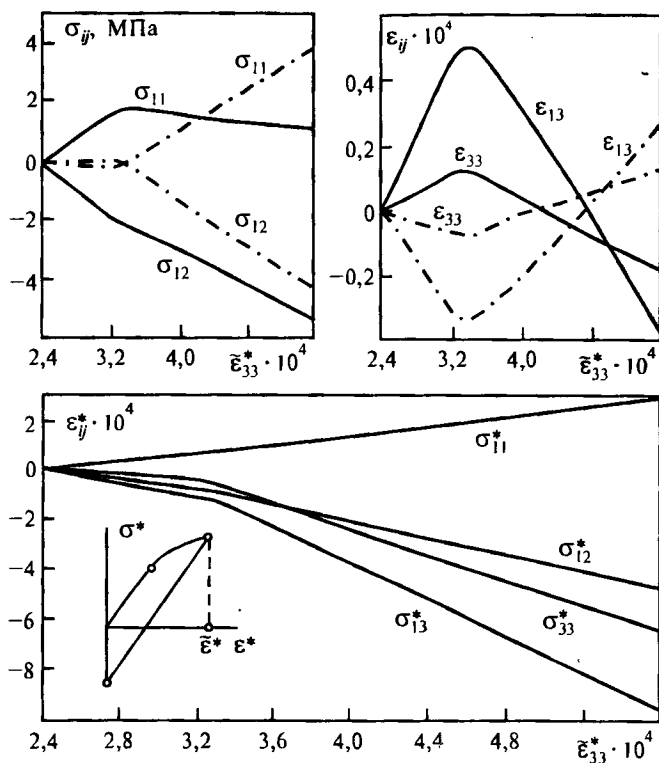


Рис. 8.13. Остаточные структурные напряжения, деформации и макронапряжения при нулевых макродеформациях: $\tilde{\varepsilon}_{33}^*$ — достигнутый уровень макродеформаций ($\tilde{\varepsilon}_{33}^* = \tilde{\varepsilon}_{13}^* = 2\tilde{\varepsilon}_{12}^*$), сплошные линии — алюминиевые слои, штрихпунктир — магниевые слои

На рис. 8.12 и 8.13 для материала "алюминий-магний", информация о свойствах которого изложена в § 8.2, изображены расчетные зависимости остаточных напряжений и деформаций (как структурных, так и макроскопических) от достигнутого к моменту начала разгрузки уровня макродеформаций, который выбирался таким образом, чтобы при разгрузке не возникали вторичные пластические деформации. Рисунок 8.12 соответствует случаю, когда слоистые образцы после того, как они были подвергнуты в различной степени механическому воздействию на испытательной машине по программе простого деформирования, постепенно освобождаются от захватов.

Рисунок 8.13 соответствует тому случаю, когда при нагрузке и разгрузке соблюдается простой процесс по деформациям, а образцам придаются первоначальные форма и размеры. Естественно, для этого необходимо приложить определенные усилия, что и определяет наличие остаточных макронапряжений. Каждому воображаемому образцу соответствует одна точка на графических зависимостях.

На рис. 8.12 не показаны структурные деформации $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ и ϵ_{12} , а на рис. 8.13 — структурные напряжения σ_{33} и σ_{13} , поскольку их значения совпадают со значениями соответствующих макроscopicких величин, зависимости для которых здесь приведены. В рассматриваемых случаях

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{11}^* = \sigma_{22}^*, \quad \epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^*.$$

Следует видимо обратить внимание на немонотонный характер некоторых кривых на этих рисунках. Многослойное тело, пластическое более деформированное по сравнению с другими, может обнаружить после разгрузки меньшие по абсолютной величине остаточные структурные напряжения (см. рис. 8.12) или меньшие остаточные деформации слоев (см. рис. 8.13). Зависимости структурных напряжений и деформаций от достигнутого уровня макродеформаций не только имеют экстремальные точки, но и показывают, что эти величины могут менять свой знак, т.е. положительным макродеформациям при нагружении в зависимости от их значения могут соответствовать после разгрузки как совпадающие с ними по знаку, так и противоположные напряжения и деформации в одних и тех же слоях.

8.5. Прогнозирование неупругого деформирования с учетом процессов структурного разрушения

Ниже будут описаны результаты исследования поведения слоистого упругопластического композита в области макродеформаций, превышающих деформации начала структурного разрушения. Процессы закритического деформирования, обнаруженные на макроуровне, в данном случае исследовались в условиях жесткого нагружения.

Расчеты проведены по изложенной в §7.5 методике учета стохастических процессов разрушения элементов структуры при деформировании композита для материала "алюминий-магний". Для обоих компонентов использовались определяющие соотношения теории малых упругопластических деформаций ($\kappa = 0$) и условия прочности типа (6.39).

Предполагалось, что разрушение типа "1" ($\bar{j}_\epsilon^{(1)} = \bar{j}_{\text{ср}}^{(1)+}$) изотропных компонентов, а вместе с ним зануление модулей объемного сжатия возможно только после частичной потери несущей способности, вызванной формоизменением (тип "2", $\bar{j}_\epsilon^{(2)} = \bar{j}_{\text{ср}}^{(2)}$, $g = 1$). В данном случае разрушение типа "1" (разрыв слоев) приводило к полному исчерпанию их несущей способности. Соответственно, расчеты прово-

дилься для четырехкомпонентного композита, состоящего из двух неразрушенных упругопластических компонентов и двух совокупностей слоев, не сопротивляющихся формоизменению, но имеющих отличные от нуля и различные модули объемного сжатия.

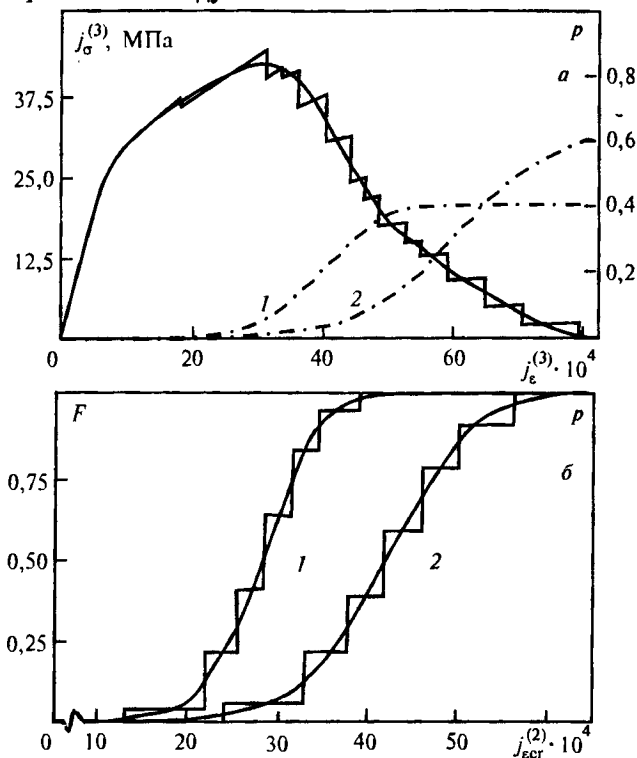


Рис. 8.14. Диаграммы деформирования композита при различных законах распределения прочности компонентов: а — диаграммы деформирования композита и кривые изменения объемных долей разрушенных слоев (1, 2), б — интегральные функции распределения прочности компонентов: 1 — алюминиевые, 2 — магниевые слои

Было принято предположение, что разброс прочностных свойств компонентов описывается трехпараметрическим распределением Вейбулла (7.3) с константами для алюминия: $\bar{j}_{\epsilon 0}^{(1)} = 6 \cdot 10^{-4}$, $a^{(1)} = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $b^{(1)} = 6$ (по критерию, связанному с $\bar{j}_{\epsilon scr}^{(1)+}$); $\bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)} = 6 \cdot 10^{-4}$, $a^{(2)} = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $b^{(2)} = 5$ (по критерию, связанному с $\bar{j}_{\epsilon scr}^{(2)}$); для магния: $\bar{j}_{\epsilon 0}^{(1)} = \bar{j}_{\epsilon 0}^{(2)} = 9 \cdot 10^{-4}$, $a^{(1)} = a^{(2)} = 3,6 \cdot 10^{-3}$, $b^{(1)} = 6$, $b^{(2)} = 5$.

На рис. 8.14а изображена расчетная диаграмма (гладкая кривая) деформирования композита при $\epsilon_{12}^* \neq 0$ и кривые увеличения объемных долей слоев, разрушенных от сдвига по второму критерию (разру-

шение типа "1" при данной схеме деформирования отсутствует). Для сравнения приведены результаты расчетов в случае одной из возможных реализаций структуры слоистого композита (ступенчатая кривая), когда все элементы структуры были сгруппированы в четырнадцать компонентов: семь групп алюминиевых слоев с одинаковыми деформационными свойствами, но различными прочностными характеристиками и семь аналогичных групп магниевых слоев (рис. 8.14б).

При моделировании процесса деформирования композита объемные доли всех четырнадцати компонентов оставались постоянными, а структурное разрушение проявлялось в скачкообразном изменении их деформационных свойств и, как следствие, скачках на диаграмме (рис. 8.14а).

Зубчатые или ступенчатые диаграммы, рассчитанные для различных реализаций структуры слоистых композитов, отличаются между собой и это отличие уменьшается с увеличением числа дискретных участков на графиках статистических функций распределения прочностных характеристик, т.е. по мере приближения этих функций к подлинным функциям распределения $F(\bar{j}_{\sigma cr}^{(o)})$ (см. рис. 8.14б), что соответствует увеличению числа слоев в эксперименте.

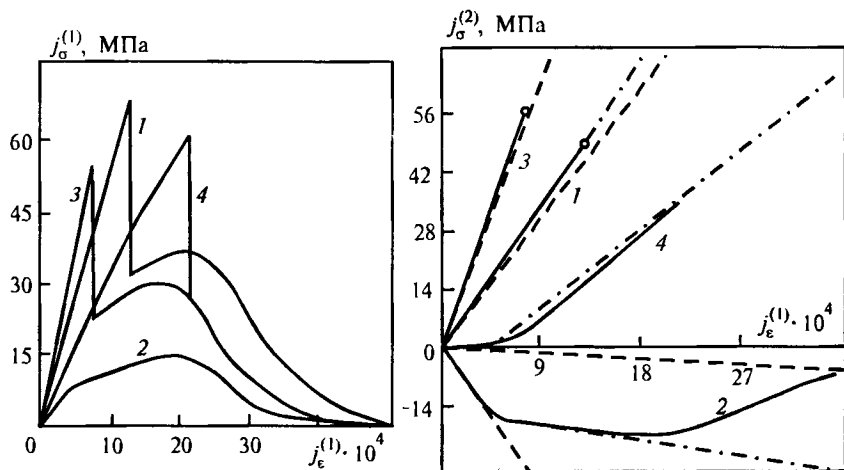


Рис. 8.15. Диаграммы деформирования композита в условиях структурного разрушения: 1 — $j_{\sigma}^{(1)} \neq 0$, 2 — $j_{\sigma}^{(1)} = -j_{\sigma}^{(2)} \neq 0$, 3 — $j_{\sigma}^{(1)} = 2j_{\sigma}^{(2)} = j_{\sigma}^{(3)} = 2j_{\sigma}^{(4)}$, 4 — $j_{\sigma}^{(1)} = -2j_{\sigma}^{(2)} = j_{\sigma}^{(3)} = 2j_{\sigma}^{(4)}$

Полученная плавная равновесная диаграмма деформирования, отражающая эффективные свойства композита, выражает общие тенденции процесса для различных реализаций структуры. Наивысшая точка на равновесной диаграмме соответствует максимально достижимому для данного материала и данных условий деформирования значению напряжения, т.е. пределу прочности композиционного материала, после которого процесс структурного разрушения в случае

"мягкого" нагружения приобрел бы лавинообразный характер. Ниспадающая ветвь отражает, что для стабилизации этого процесса необходимо уменьшение прикладываемых нагрузок.

На рис. 8.15 и 8.16 показаны расчетные диаграммы для различных простых процессов деформирования композита "алюминий-магний". Интерес представляет появление и на этих плавных в целом кривых единичных скачков.

Это явление в данном случае связано с полным разрушением (разрывом) некоторых слоев. Начало разрушения типа "1", возникающее, практически, в момент достижения первым инвариантом тензора микродеформаций $\bar{j}_\epsilon^{(1)}$ в некотором компоненте соответствующего значения параметра минимальной прочности $\bar{j}_{\epsilon 0}^{(1)}$, качественно изменяет напряженно-деформированное состояние слоев, теряющих связь между собой, и становится заметным на макроуровне.

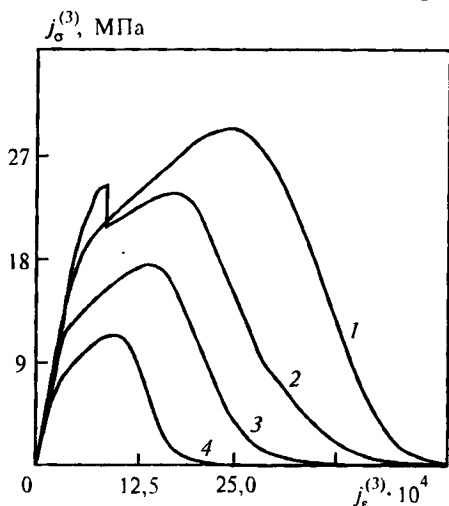


Рис. 8.16. Диаграммы деформирования композита в условиях структурного разрушения: 1 — $j_\epsilon^{(3)} = -j_\epsilon^{(2)}$, 2 — $j_\epsilon^{(1)} = j_\epsilon^{(2)} = j_\epsilon^{(3)}$, 3 — $j_\epsilon^{(3)} = j_\epsilon^{(2)} = -(2/3)j_\epsilon^{(1)}$, 4 — $j_\epsilon^{(3)} = j_\epsilon^{(1)} = -(1/3)j_\epsilon^{(2)}$

Из приведенных результатов следует естественный вывод, что зависимости между инвариантами тензоров макронапряжений и макродеформаций, характеризующие поведение материала в условиях разрушения элементов структуры, являются существенно более сложными, чем эти зависимости при упругопластическом деформировании композита без структурного разрушения. В частности, от соотношения значений линейных инвариантов $j_\epsilon^{(1)}$ и $j_\epsilon^{(2)}$ зависит, будут ли диаграммы деформирования иметь скачок ("зуб") или нет. Разрушение хоть какой-то доли слоев по критерию типа "2" приводит к падению до нуля значения инварианта $j_\sigma^{(4)}$, а полное разрушение (разрыв) ма-

лой доли слоев приводит к падению до нуля значения инварианта $j_{\sigma}^{(2)}$ (рис. 8.15, кривые 1, 3, 4). Штрихпунктирные линии на рис. 8.15 соответствуют расчетам без учета структурного разрушения, штриховые — решению упругой задачи.

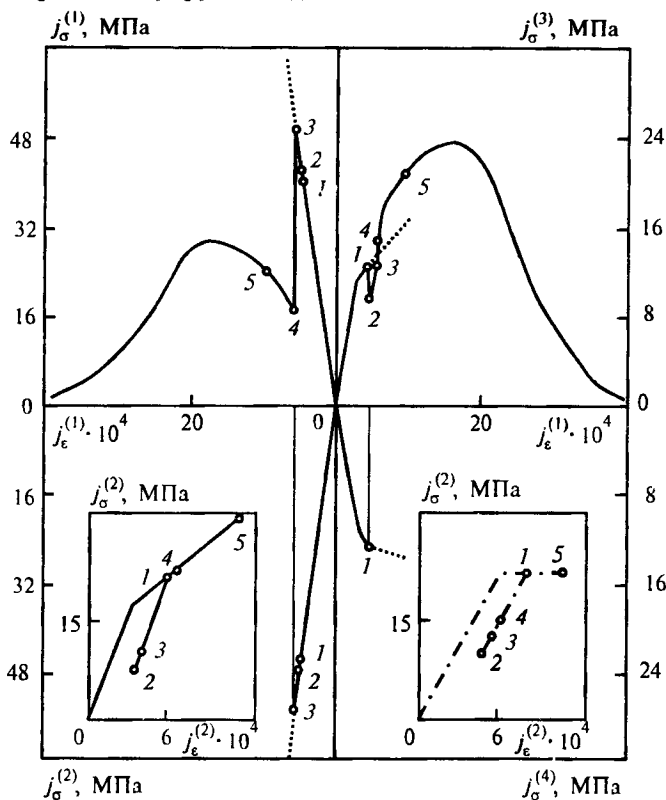


Рис. 8.17. Локальная разгрузка при деформировании композита ($j_{\epsilon}^{(1)} = j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon}^{(3)} = j_{\epsilon}^{(4)}$). На диаграммах деформирования структурных элементов сплошная линия — алюминиевые слои, штрихпунктир — магниевые слои. Одинаковыми номерами обозначены соответствующие точки

Следует отметить еще один эффект, проиллюстрированный на рис. 8.17. Активный процесс деформации композита может сопровождаться процессами локальной разгрузки. В рассмотренном случае это было вызвано началом разрушения от формоизменения (точка 1 на рис. 8.17) малой доли слабых слоев. На данном рисунке показаны зависимости всех инвариантов тензора макронапряжений для процесса деформирования, при котором значения всех инвариантов тензора макродеформаций равны ($2\epsilon_{11}^* = 2\epsilon_{22}^* = \epsilon_{33}^* = 2\epsilon_{12}^* = \sqrt{2}\epsilon_{13}^* = \sqrt{2}\epsilon_{23}^* \neq 0$). Штриховыми линиями показаны диаграммы деформирования без разрушения.

Скачок на диаграмме $j_{\sigma}^{(3)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$ в точке 1 был вызван появлением при $j_{\epsilon}^{(1)} = j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon}^{(3)} = j_{\epsilon}^{(4)} = 4,5 \cdot 10^{-4}$ алюминиевых слоев, не сопротивляющихся формоизменению. В результате этого неразрушенные слои освободились от напряжений σ_{13} и σ_{23} и испытали разгрузку (от точки 1 до точки 2) по второму инварианту $\bar{j}_{\sigma}^{(2)}$. Следует отметить, что при "мягком" нагружении рассмотренная диаграмма имела бы не "зуб", а площадку текучести на уровне макронапряжений, соответствующих точке 1.

При достижении уровня макродеформаций, соответствующих значениям $j_{\epsilon}^{(1)} = j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon}^{(3)} = j_{\epsilon}^{(4)} = 5,5 \cdot 10^{-4}$ (точке 3), произошли разрыв наиболее слабых алюминиевых слоев, освобождение элементов структуры от напряжений σ_{33} , частичная разгрузка неразрушенных слоев по инварианту $\bar{j}_{\sigma}^{(1)}$, падение до нуля значения $j_{\sigma}^{(2)} = \sigma_{33}^*$ и скачок на диаграмме $j_{\sigma}^{(1)} \sim j_{\epsilon}^{(1)}$. Интерес представляет тот факт, что в данном случае полное разрушение части слоев не повлекло за собой резкое падение значения $j_{\sigma}^{(3)}$, как это было в других исследованных случаях, а послужило причиной его резкого увеличения (от точки 3 до точки 4). Это объясняется тем, что формоизменение неразрушенных слоев и сопровождающее его увеличение значения $\bar{j}_{\sigma}^{(2)}$ в момент разрыва слабых (от точки 3 до точки 4) вызвало резкое увеличение секущих модулей сдвига элементов структуры, поскольку не был еще достигнут уровень $\bar{j}_{\sigma}^{(2)}$, соответствующий началу разгрузки.

Непрерывное увеличение макродеформаций сопровождалось повторным нагружением слоев по упругому закону до значений, достигнутых к моменту начала разгрузки, а затем по участкам линейного упрочнения. Таким образом, при решении задач упругопластического деформирования с учетом структурного разрушения не следует исключать возможность разгрузки элементов при нагружении композита, поскольку это может привести к ошибкам в описании процесса.

Сделанный ранее (см. гл. 7) вывод о том, что разупрочнение неоднородных сред на закритической стадии деформирования при достаточной жесткости нагружения является общей закономерностью, а структурное разрушение служит, по крайней мере, одной из причин существования ниспадающих ветвей на диаграммах деформирования, подтвержден в данном случае и для композитов слоистой структуры.

Краевая задача механики устойчивого закритического деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения

Результаты математического моделирования, приведенные в предыдущих главах, демонстрируют возможность и основные закономерности реализации стадии деформационного разупрочнения композиционных материалов в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, объясняемой равновесным накоплением структурных повреждений. В рамках многоуровневого подхода элементы структуры композитов, в свою очередь, также являются структурно-неоднородными, и к ним, следовательно, могут быть отнесены все полученные результаты. Кроме того, актуальными являются исследования закритического деформирования материалов в элементах конструкций. Стремление к адекватному описанию механических процессов в неоднородных средах и созданию условий для оптимального проектирования композиционных материалов и конструкций приводит к необходимости некоторого обобщения моделей механики деформируемого твердого тела, связанного с учетом указанной стадии деформирования и определения условий ее реализации.

Разрушение материала рассматривается как результат потери устойчивости процесса деформирования на закритической стадии, что может произойти в зависимости от условий нагружения в любой точке ниспадающего участка диаграммы. На основе подхода Друкера сформулирован расширенный постулат устойчивости. Как следствие, получено условие устойчивого деформирования разупрочняющегося материала.

Дается постановка квазистатической задачи механики упругопластических тел с зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа, позволяющими учесть при решении свойства нагружающей системы. При некоторых ограничениях, накладываемых на определяющие соотношения, и с использованием условия устойчивости процесса разупрочнения в локальной зоне доказываются теоремы о единственности решения сформулированной краевой задачи, максимуме и минимуме найденных функционалов при совпадении кинематически либо статически возможных и действительных полей. Приво-

дятся соответствующие обобщенные вариационные принципы. Рассматриваемые вопросы отражены также в работах авторов [39, 40, 47, 49].

9.1. Модели разупрочняющихся сред

Для построения адекватных моделей поведения материалов на закритической стадии деформирования необходимо проведение экспериментов на испытательных машинах достаточной жесткости, реализующих в образцах разнообразные напряженные состояния среды. Осуществление такого рода опытов связано с техническими трудностями, и имеющиеся данные, обычно, относятся лишь к поведению материала при одноосном растяжении, чистом сдвиге и гидростатическом сжатии. На основе этих базовых экспериментов и результатов математического моделирования могут быть построены варианты моделей сред с разупрочнением при разгрузке и активном нагружении.

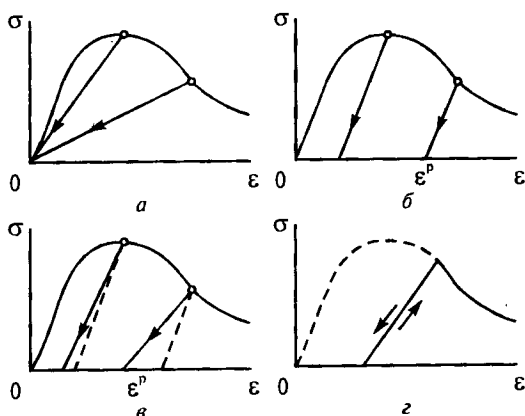


Рис. 9.1. Модели поведения сред при разгрузке и повторной нагрузке

Различные предположения или представления о поведении материала при разгрузке приводят к следующей классификации моделей сред по этому признаку [74]. Рассмотрим идеализированные кривые напряжения — деформации, приведенные на рис. 9.1. Здесь и далее координаты σ , ϵ рассматриваются как обобщенные, под которыми подразумеваются либо компоненты тензоров напряжений и деформаций, либо их инварианты. На рис. 9.1а поведение материала характеризуется нелинейной зависимостью, однако, при разгрузке все пути деформаций ведут в начало координат, и остаточные деформации после разгрузки отсутствуют. Такой материал и его поведение будем называть упругохрупким.

На рис. 9.1б показано другое идеализированное поведение, известное под названием упругопластического. Наконец, на рис. 9.1в

представлено сочетание упругохрупкого и упругопластического поведений. Помимо необратимых деформаций, здесь имеется также изменение модуля упругости в процессе их возникновения. Хрупко-упругопластическая модель, отраженная на рис. 9.1в, наиболее адекватно моделирует поведение, в частности, скальных пород под действием одноосного сжатия и растяжения [74]. При рассмотрении указанных моделей не учитывались небольшие гистерезисные явления, возникающие в ходе нагружения и разгрузки.

При повторном нагружении максимально достижимым для материала напряжением, т.е. пределом прочности, становится напряжение, соответствующее началу разгрузки (рис. 9.1г). Естественно, что каждая точка на ниспадающей ветви может стать точкой начала разгрузки и соответствовать в этом случае пределу прочности при повторном нагружении. Следовательно, ниспадающая ветвь диаграммы напряжение-деформация является геометрическим местом пределов прочности материала с различной степенью накопленных повреждений его структуры. Этот факт был отмечен автором работы [52].

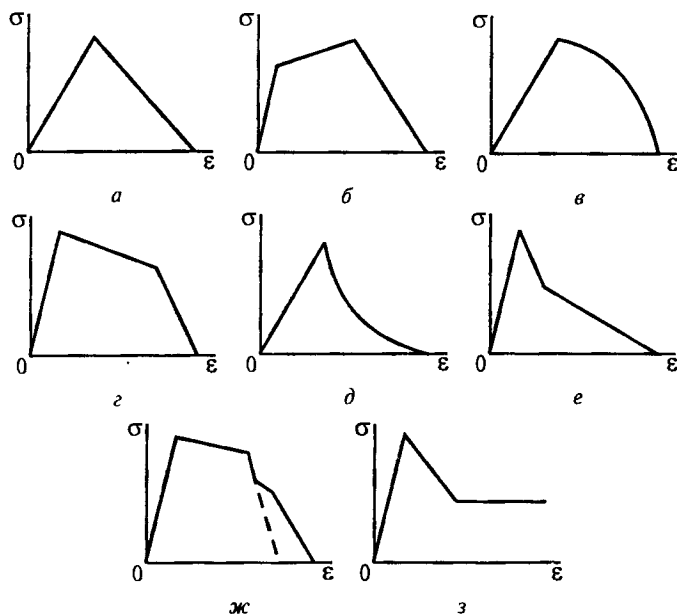


Рис. 9.2. Модели разупрочняющихся сред

Таким образом, диаграмма деформирования на закритической стадии определяет закон, по которому изменяется предел прочности при данной схеме нагружения в зависимости от степени повреждения материала. Из этих рассуждений следует также, что использование тер-

мина "разупрочнение" по отношению к процессам на закритической стадии деформирования является физически оправданным.

С учетом характерных особенностей поведения материалов рассмотрим приведенные на рис. 9.2 схематические изображения полных диаграмм деформирования и один из вариантов классификации сред по характеру разупрочнения.

В общем случае полная диаграмма деформирования имеет сложный нелинейный характер. Однако часто она может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией. На рис. 9.2 приведены диаграммы упругой (а) и упругопластической (б) сред с линейным разупрочнением на закритической стадии деформирования.

В зависимости от того, увеличивается или уменьшается интенсивность разупрочнения при увеличении закритической деформации, можно ввести понятия среды с прогрессирующим разупрочнением (рис. 9.2в, г) и среды с регрессирующим разупрочнением (рис. 9.2д, е). К первой категории, в частности, отнесем легированную сталь при одноосном нагружении [301] и циркониевую керамику [376], ко второй — легированную сталь при чистом сдвиге [301], титановый сплав ВТ5 при высоких температурах [233], наполненный полиэтилен высокой плотности [68], композит, полученный армированием вольфрамовыми волокнами медной матрицы [146] и некоторые перекрестно армированные слоисто-волокнистые материалы [368].

Кроме того, можно выделить категорию сред с неполным разупрочнением (рис. 9.2з), заключительная стадия деформирования которых характеризуется наличием практически не изменяющейся остаточной прочности. К этой категории сред в большей степени относятся горные породы в условиях одноосного сжатия [52, 198, 214, 250, 276] и простого сдвига под действием касательного напряжения и давления [293].

Сложный характер разупрочнения связан с протеканием на разных структурных уровнях диссипативных процессов различной природы, а смена механизмов накопления повреждений приводит к изменению характера снижения напряжений на закритической стадии деформирования. При этом, в ряде случаев наличие практически прямолинейных участков на диаграмме является очевидным. Например, на рис. 9.2ж приведена характерная аппроксимация диаграммы растяжения мартенситно-стареющей стали [155], являющаяся иллюстрацией механического поведения среды с линейными участками разупрочнения по сменным механизмам.

Обратим внимание на то, что поведение некоторых материалов на закритической стадии деформирования может быть гораздо более сложным. В § 7.3 говорилось о существовании диаграмм деформирования с обратной крутизной ниспадающего участка. На подобного рода диаграммах, кроме обычного ниспадающего участка, где падение напряжений сопровождается приращением деформаций, имеется участок необратимого накопления повреждений при уменьшении как

напряжений, так и деформаций. В связи с этим, введем понятия особых точек на диаграммах и проиллюстрируем их на рис. 9.3.

Пусть особой точкой 1-го рода (критической) $S_I(\sigma_I, \epsilon_I)$ называется точка максимума абсолютных значений напряжений на диаграмме. Очевидно, что в данной точке для дифференцируемых функций $\sigma(\epsilon)$: $d\sigma/d\epsilon = 0$, $\sigma_I[d^2\sigma/d\epsilon^2] < 0$, а для кусочно-линейных диаграмм:

$$\sigma_I = \sigma(\epsilon_I) > \sigma(\epsilon_I \pm \delta) > 0, \quad \sigma_I = \sigma(\epsilon_I) < \sigma(\epsilon_I \pm \delta) < 0,$$

где δ — произвольное сколь угодно малое число, определяющее рассматриваемую окрестность особой точки.

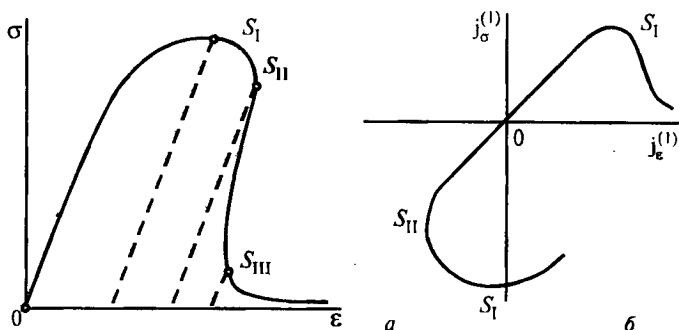


Рис. 9.3. Особые точки на диаграммах деформирования

Особой точкой 2-го рода $S_{II}(\sigma_{II}, \epsilon_{II})$ назовем точку, по крайней мере, локального максимума абсолютных значений деформаций на диаграмме. В данной точке для дифференцируемых функций $\epsilon(\sigma)$: $d\epsilon/d\sigma = 0$, $\epsilon_{II}[d^2\epsilon/d\sigma^2] < 0$, а для кусочно-линейных диаграмм:

$$\epsilon_{II} = \epsilon(\sigma_{II}) > \epsilon(\sigma_{II} \pm \delta) > 0, \quad \epsilon_{II} = \epsilon(\sigma_{II}) < \epsilon(\sigma_{II} \pm \delta) < 0.$$

На участке между особыми точками 1-го и 2-го родов модуль спада, или разупрочнения, вводимый как $D = -d\sigma/d\epsilon$, является положительным. В особой точке 2-го рода он меняет знак. Еще одной точкой, в которой модуль спада меняет знак, на этот раз, на положительный, является особая точка 3-го рода $S_{III}(\sigma_{III}, \epsilon_{III})$. Ей соответствуют следующие условия: $d\epsilon/d\sigma = 0$, $\epsilon_{III}[d^2\epsilon/d\sigma^2] > 0$; $0 < \epsilon_{III} = \epsilon(\sigma_{III}) < \epsilon(\sigma_{III} \pm \delta)$, $0 > \epsilon_{III} = \epsilon(\sigma_{III}) > \epsilon(\sigma_{III} \pm \delta)$.

На рис. 9.3б приведена характерная зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций для горных пород и бетона, полученная в результате проведения испытаний на одноосное растяжение и сжатие [74, 249]. Особая точка 2-го рода на диаграмме в процессе сжатия достигается прежде прочих [239]. При сжатии объем уменьшается лишь при начальных деформациях, а затем он начинает возрастать, что связано с накоплением повреждений в материале. Аналогичный эффект смены знака объемной деформации

в процессе сжатия был обнаружен и для перекрестно-армированных стеклопластиков [166, 211].

Таким образом, поведение материалов таково, что при растяжении существует предел для средних напряжений, а при сжатии — для объемных деформаций.

При решении краевых задач используются несколько различающиеся модели разупрочняющихся сред, в частности, допускается кусочно линейная (с линейным разупрочнением) связь между девиаторными составляющими напряжений и деформаций, а объемное растяжение считается упругим [96]. Принимается нелинейный пластический закон скольжения в области контакта упругих частиц, включающий стадию разупрочнения от сдвига и участок остаточной прочности [147]. Считается приемлемой для решения задач горной геомеханики кусочно линейная аппроксимация диаграмм, полученных при одноосном сжатии и различных боковых давлениях, с учетом разрыхления материала и остаточной прочности после разупрочнения [198, 276]. Используется модель, учитывающая смену механизмов повреждения: разупрочнение с отрицательным мгновенным значением модуля сдвига и начальным положительным модулем объемного сжатия при отрицательной объемной деформации и разупрочнение с отрицательным модулем Юнга и начальным коэффициентом Пуассона при положительном значении объемной деформации [255].

При построении моделей разупрочняющихся сред важным является вопрос определения критических состояний, т.е. условий начала разупрочнения. Рассмотренным ранее, в § 7.1, результатам компьютерного моделирования деформации квазиизотропных зернистых композитов соответствует модель, согласно которой закритическая стадия деформирования начинается, когда второй инвариант тензора напряжений достигает критического значения $j_{\sigma cr}^{(2)}$, являющегося константой материала. При этом, на закритической стадии происходит снижение как $j_{\sigma}^{(2)}$, так и $j_{\sigma}^{(1)}$ при $j_{\epsilon}^{(1)} > 0$, независимо от того, какое максимальное значение $j_{\sigma}^{(1)}$ было достигнуто к моменту начала закритического деформирования.

Согласно этой модели переход на закритическую стадию по 1- и 2-му инвариантам происходит одновременно при условии $j_{\sigma}^{(2)} = j_{\sigma cr}^{(2)}$, критическое значение первого инварианта тензора напряжений не является константой материала, а определяется как $j_{\sigma}^{(1)} = j_{\sigma}^{(1)}(j_{\sigma}^{(2)} = j_{\sigma cr}^{(2)})$. Потеря несущей способности происходит также одновременно, когда $j_{\epsilon}^{(2)}$ достигает своего предельного значения $j_{\epsilon f}^{(2)}$: $j_{\epsilon f}^{(1)} = j_{\epsilon}^{(1)}(j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon f}^{(2)})$.

Учет разупрочнения при гидростатическом растяжении даже в рамках наиболее простых моделей необходим, чтобы избежать противоречия. Материал, разрушенный от сдвига или формоизменения

после полной реализации закритической стадии ($j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon f}^{(2)}$, $j_{\sigma}^{(2)} = 0$), не может сопротивляться гидростатическому растяжению.

При рассмотрении изотропных материалов одной из упрощающих гипотез является предположение об отсутствии деформационной анизотропии. В соответствии с этим предположением определяющие соотношения в приращениях имеют вид

$$d\sigma_{ij} = (3K'V_{ijmn} + 2G'D_{ijmn})d\epsilon_{mn}. \quad (9.1)$$

Входящие в подобные уравнениям деформационной теории соотношения (9.1) модули разупрочнения $-K'$ и $-G'$ в простейшем варианте определяются следующим образом: $K' = -\lambda K$, $G' = -\lambda G$, где λ — параметр разупрочнения, K и G — модули упругости. Очевидно, что этот же параметр определяет модуль разупрочнения при одноосном нагружении.

Ограниченность модели, связанная с постоянством коэффициента Пуассона, преодолевается введением двух независимых параметров разупрочнения λ и μ : $G' = -\lambda G$, $K' = -\mu K$.

В этом случае на параметры разупрочнения накладываются ограничения, обусловленные пределами изменения текущего коэффициента Пуассона, определяемого как отношение приращений деформаций. При изменении его в диапазоне от 0 до 0,5 должны иметь место неравенства

$$2 < \frac{9\mu K}{3\mu K + \lambda G} < 3.$$

Если установить, что процесс деформации на закритической стадии сопровождается уменьшением средних напряжений при увеличении относительного изменения объема ($d\sigma_{kk} < 0$, $d\epsilon_{kk} > 0$), то рассмотренные соотношения позволят описать наблюдаемое при испытаниях реальных материалов разупрочнение при гидростатическом растяжении и упрочнение при сжатии.

Упрощенной моделью разупрочняющейся трансверсально-изотропной среды, в частности, слоистого композита с изотропными слоями является модель, описываемая определяющими соотношениями вида

$$(d\sigma_{11} + d\sigma_{22})/2 = k(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22}) + l'd\epsilon_{33},$$

$$d\sigma_{33} = l'(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22}) - n_p d\epsilon_{33},$$

$$(d\sigma_{11} - d\sigma_{22})/2 = G_{\perp}(d\epsilon_{11} - d\epsilon_{22}),$$

(9.2)

$$d\sigma_{12} = 2G_{\perp}d\epsilon_{12}, \quad d\sigma_{13} = -G_{\parallel}^p d\epsilon_{13}, \quad d\sigma_{23} = -2G_{\parallel}^p d\epsilon_{23}$$

при значениях инвариантов $j_{\epsilon}^{(2)} = \epsilon_{33} > j_{\epsilon cr}^{(2)}$ или $j_{\epsilon}^{(4)} = \sqrt{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2} >$

$> j_{\text{ср}}^{(4)}$, что соответствует ослаблению межслойного взаимодействия, а также вида

$$\begin{aligned} (d\sigma_{11} + d\sigma_{22})/2 &= -k_p(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22}) + l'd\epsilon_{33}, \\ d\sigma_{33} &= l'(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22}) + nd\epsilon_{33}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$(d\sigma_{11} - d\sigma_{22})/2 = -G_{\perp}^p(d\epsilon_{11} - d\epsilon_{22}),$$

$$d\sigma_{12} = -2G_{\perp}^p d\epsilon_{12}, \quad d\sigma_{13} = G_{\parallel} d\epsilon_{13}, \quad d\sigma_{23} = 2G_{\parallel} d\epsilon_{23}$$

при значениях $j_{\epsilon}^{(1)} = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) > j_{\text{ср}}^{(1)}$ или $j_{\epsilon}^{(3)} = \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2} > j_{\text{ср}}^{(3)}$, что соответствует ослаблению материала при деформациях вдоль слоев и совместном формоизменении.

Здесь $n_p > 0$, $k_p > 0$, $G_{\parallel}^p > 0$, $G_{\perp}^p > 0$ — модули разупрочнения, l' — коэффициент поперечной деформации материала на закритической стадии деформирования.

Эффект поперечного взаимодействия на закритической стадии существенно ослабляется, и в рамках простейшей модели им можно пренебречь, положив $l' = 0$. Однако при построении более адекватных моделей целесообразно уточнить значение коэффициента l' , которое может быть даже отрицательным.

При исследовании трансверсально-изотропных волокнистых композитов модели несколько отличаются от рассмотренной. В частности, закритическая стадия деформирования, вызванная продольным сдвигом ($j_{\epsilon}^{(4)} > j_{\text{ср}}^{(4)}$), может сопровождаться разупрочнением не в направлении x_3 , а в направлениях x_1 и x_2 .

Упрощенная модель ортотропной разупрочняющейся среды описывается определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} d\epsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} d\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} d\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} d\sigma_{33}, \\ d\epsilon_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} d\sigma_{11} + \frac{1}{E_2} d\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} d\sigma_{33}, \\ d\epsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} d\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} d\sigma_{22} + \frac{1}{E_3} d\sigma_{33}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$d\epsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}} d\sigma_{13}, \quad d\epsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} d\sigma_{23}, \quad d\epsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} d\sigma_{12}$$

при значениях касательных модулей и коэффициентов поперечной деформации, зависящих от условия закритической деформации и приведенных в табл. 9.1. Индексом "р" отмечены положительные модули разупрочнения, знак "минус" учтен в определяющих соотношениях.

Таблица 9.1

К построению модели ортотропной разупрочняющейся среды

Условие за- критической деформации	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{31}	ν_{23}	ν_{32}	G_{12}	G_{23}	G_{13}
$I_c^{(1)} = \epsilon_{11} > I_c^{(1)}$	$-E_1^P$	E_2	E_3	ν_{12}	ν'_{21}	ν_{13}	ν'_{31}	ν_{23}	ν_{32}	$-G_{12}^P$	G_{23}	$-G_{13}^P$
$I_c^{(2)} = \epsilon_{22} > I_c^{(2)}$	E_1	$-E_2^P$	E_3	ν'_{12}	ν_{21}	ν_{13}	ν_{31}	ν_{23}	ν'_{32}	$-G_{12}^P$	$-G_{23}^P$	G_{13}
$I_c^{(3)} = \epsilon_{33} > I_c^{(3)}$	E_1	E_2	$-E_3^P$	ν_{12}	ν_{21}	ν'_{13}	ν_{31}	ν'_{23}	ν_{32}	G_{12}	$-G_{23}^P$	$-G_{13}^P$
$I_c^{(4)} = \epsilon_{12} > I_c^{(4)}$	$-E_1^P$	$-E_2^P$	E_3	0	0	ν_{13}	ν'_{31}	ν_{23}	ν'_{32}	$-G_{12}^P$	$-G_{23}^P$	$-G_{13}^P$
$I_c^{(5)} = \epsilon_{23} > I_c^{(5)}$	E_1	$-E_2^P$	$-E_3^P$	ν'_{12}	ν_{21}	ν'_{13}	ν_{31}	0	0	$-G_{12}^P$	$-G_{23}^P$	$-G_{13}^P$
$I_c^{(6)} = \epsilon_{13} > I_c^{(6)}$	$-E_1^P$	E_2	$-E_3^P$	ν_{12}	ν'_{21}	0	0	ν'_{23}	ν_{32}	$-G_{12}^P$	$-G_{23}^P$	$-G_{13}^P$

Помеченные штрихом коэффициенты являются отрицательными и находятся по формулам

$$\begin{aligned} \nu'_{21} &= -\frac{E_1^p}{E_2} \nu_{12}, & \nu'_{12} &= -\frac{E_2^p}{E_1} \nu_{21}, & \nu'_{13} &= -\frac{E_3^p}{E_1} \nu_{31}, \\ \nu'_{31} &= -\frac{E_1^p}{E_3} \nu_{13}, & \nu'_{32} &= -\frac{E_2^p}{E_3} \nu_{23}, & \nu'_{23} &= -\frac{E_3^p}{E_2} \nu_{32}. \end{aligned}$$

Рассмотренные определяющие соотношения базируются на деформационной теории пластичности, хотя и записаны в приращениях, устанавливая связь между напряжениями и деформациями в неупругой области после достижения пределов прочности наиболее простым образом и могут быть пригодны для решения ряда прикладных задач. Однако, учитывая, что поведение деформируемых сред гораздо сложнее, далее (в § 9.2) рассмотрим вопросы построения более общих определяющих соотношений.

Согласно работам [184, 227, 230] наиболее теоретически обоснованным ограничением, связанным с построением моделей разупрочняющихся сред, является условие Адамара (при строгом неравенстве называемое условием сильной эллиптичности)

$$C_{ijmn} a_i b_j a_m b_n \geq 0 \quad \forall a \neq 0, \quad \forall b \neq 0.$$

В соответствии с теоремой Адамара, для того чтобы конфигурация упругого тела была устойчива по отношению к малым деформациям для любой смешанной граничной задачи, приведенное локальное неравенство должно выполняться в каждой точке [274]. В работе [227] приведено обобщение этой теоремы на случай упругопластических тел, которое распространяет данное ограничение на тензоры, определяющие связь между приращениями напряжений и деформаций как при разгрузке, так и при активном нагружении.

Условию Адамара удовлетворяет изотропный материал со свойствами: $G > 0$, $K > -(4/3)G$, т.е. допускаются состояния упругого материала с отрицательным модулем объемного сжатия (состояния разупрочнения). При этом привычных ограничений на коэффициент Пуассона не накладывается, и он может принимать значения больше 1 и меньше -1 . Состояние разупрочнения, связанное с отрицательным модулем Юнга возникает при $-(1/3)G < K < 0$, соответствующий коэффициент Пуассона $\nu < -1$. Нарушение условия Адамара связывается с возникновением внутренней структуры в начально однородном массиве материала вследствие локализации деформаций [184, 227].

Анализ опубликованных экспериментальных данных о закритическом деформировании различных материалов приводит к заключе-

нию, что описание их поведения в рамках модели однородной сплошной среды с мгновенными свойствами не всегда может быть осуществлено с соблюдением условий Адамара. В частности, приводятся экспериментальные диаграммы с ниспадающим участком, полученные при сдвиговом деформировании (см. [301] и др.). При одноосном сжатии (имеются данные о развитии продольных и поперечных деформаций) некоторых горных пород реализуются такие состояния, для которых касательные модули $E < 0$, $G < 0$, $K > 0$ и $\nu > 1$ [213, 214, 250].

Данное противоречие и возможность устойчивого закритического деформирования, которое обнаруживается в упомянутых опытах, может быть объяснено [124] наличием определенной структурной неоднородности испытанных материалов, препятствующей потере устойчивости локализационного типа. Локализация деформаций находится на грани континуального описания [184]. Описание механических процессов в масштабах, соизмеримых с размерами элементов структуры, требует отказа от гипотезы однородности, модели среды с эффективными свойствами и перехода на структурный уровень рассмотрения.

Выполнение условия Адамара для линейно упругих тел свидетельствует также о наличии вещественных значений скоростей распространения волн сдвига и сжатия-растяжения в данной среде [163], следовательно, постановка динамических задач при деформировании на стадии разупрочнения в противном случае некорректна и лишена физического смысла. Если учесть, что любой реальный процесс осуществляется с некоторой, пусть малой, но конечной скоростью, не затрагивать структуры материала и условий проведения опытов, то в силу указанного противоречия модель однородной разупрочняющейся среды, строго говоря, не является допустимой.

Однако в опытах на жестких испытательных машинах диаграммы хорошо воспроизводятся и изменяются сравнительно слабо при скоростях от 10^{-8} до 1 м/мин. Внешние проявления неустойчивости отсутствуют при этом как на восходящем, так и ниспадающем участках диаграммы. С любого этапа закритического деформирования можно осуществить разгрузку, образец не теряет связности [158, 198]. Указанные скорости часто реализуются на практике, и соответствующие диаграммы полезны и важны для практических целей.

Таким образом, при скоростях, обеспечивающих равномерную деформацию образца и получение на жестком испытательном оборудовании диаграммы с ниспадающим участком, последний имеет смысл для статических задач. При этом задача может считаться статической, если скорости возмущений находятся в пределах, отвечающих оговоренным условиям. В противном случае возмущения являются динамическими, постановка краевой задачи с учетом ниспадающих участков диаграммы лишена смысла и следует рассматривать возникающие разрывы и повреждения явным образом [198].

9.2. Определяющие соотношения

Как было показано в гл. 8, даже при пропорциональном нагружении композиционных материалов имеют место достаточно сложные траектории деформирования и нагружения на структурном уровне. Перераспределения напряжений при одновременном переходе к пластическому деформированию элементов структуры, локальных разгрузках и разрушении приводят к изменениям направлений процессов деформирования, что в отдельных случаях сопровождается изломом траектории. Таким образом, микромеханика композитов требует привлечения соотношений пластичности, способных описывать процесс сложного деформирования (нагружения), включающего точки излома. В монографии [123] отмечено, что в противоположность большинству других проблем механики деформируемого твердого тела, допускающих использование теорий простого (пропорционального) деформирования, проблема устойчивости упругопластических систем является главным потребителем общей теории пластичности, развиваемой для описания произвольных процессов. Проведенные исследования упругопластического деформирования и структурного разрушения композиционных материалов дают основания полагать, что последнее утверждение в полной мере должно относиться и к механике композитов. Проблема же закритического деформирования композиционных материалов в этом смысле является показательной, поскольку включает вопросы, связанные как с упругопластическим деформированием, так и с устойчивостью.

Ранее, в гл. 6, были рассмотрены определяющие соотношения деформационной теории поврежденных сред, которые при соответствующем выборе материальных функций могут служить для описания закритической стадии деформирования, но в случае сложных процессов лишь в первом приближении. Рассмотрим далее некоторые вопросы использования понятий и соотношений теории пластичности при сложном нагружении, базирующейся на ассоциированном законе течения, применительно к деформируемым телам на стадии разупрочнения.

Весьма важной для современной теории пластичности является концепция о существовании предельных поверхностей в пространстве внутренних параметров: поверхности нагружения f в пространстве напряжений и поверхности деформирования F в пространстве деформаций.

Форма и размеры указанных поверхностей определяются компонентами тензоров напряжений, пластических деформаций ε_{ij}^p и историей пластического деформирования, которую можно формально отразить некоторыми параметрами χ_i , изменяемыми только при изменении ε_{ij}^p [122]:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_n) = 0, \quad F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_n) = 0. \quad (9.5)$$

Полные деформации, равно как и их приращения, состоят из упругой и пластической составляющих:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p, \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p.$$

Пусть данный путь нагружения приводит ко вполне определенному деформированному состоянию независимо от выбора системы координат. Тогда функции нагружения и деформирования, описывающие предельные поверхности, зависят от инвариантов напряженного и деформированного состояний:

$$f(j_\sigma^{(n)}, j_{\epsilon_p}^{(n)}, \chi_i) = 0, \quad F(j_\epsilon^{(n)}, j_{\epsilon_p}^{(n)}, \chi_i) = 0. \quad (9.6)$$

Здесь $j_{\epsilon_p}^{(n)}$ — инварианты тензора пластических деформаций. Количество независимых инвариантов N , используемых в качестве аргументов указанных функций, определяется типом анизотропии среды.

В качестве основного принципа, закладываемого в основу построения теории пластичности, может быть использован принцип максимума скорости диссипации Мизеса [101]. Перейдя от скоростей к приращениям пластических деформаций, сформулируем принцип максимума следующим образом: при фиксированных параметрах ϵ_{ij}^p, χ_i для любого данного значения компонент приращений деформаций $d\epsilon_{ij}^p$ имеет место неравенство

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq \hat{\sigma}_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad (9.7)$$

где σ_{ij} — действительные значения компонент тензора напряжений, соответствующие предельной поверхности при данном значении ϵ_{ij}^p ; $\hat{\sigma}_{ij}$ — компоненты любого возможного напряженного состояния, допускаемого данной функцией нагружения $f(j_\sigma^{(n)}, j_{\epsilon_p}^{(n)}, \chi_i) \leq 0$. Инварианты тензора напряжений в состоянии $\hat{\sigma}_{ij}$ обозначены как $\hat{j}_\sigma^{(n)}$.

Поскольку тензоры с компонентами $(\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})$ и $(\epsilon_{ij} - \hat{\epsilon}_{ij})$, где ϵ_{ij} характеризуют текущее состояние деформирования, а $\hat{\epsilon}_{ij}$ — любое деформированное состояние внутри или на границе построенной для ϵ_{ij} поверхности деформирования, связаны законом упругости, то из (9.7) следует неравенство

$$(\epsilon_{ij} - \hat{\epsilon}_{ij}) d\epsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (9.8)$$

С использованием же инвариантных величин принцип максимума диссипации имеет следующее выражение:

$$\sum_{\alpha=1}^N [j_\sigma^{(\alpha)} - \hat{j}_\sigma^{(\alpha)}] dj_{\epsilon_p}^{(\alpha)} \geq 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N [j_\epsilon^{(\alpha)} - \hat{j}_\epsilon^{(\alpha)}] dj_{\epsilon_p}^{(\alpha)} \geq 0. \quad (9.9)$$

Инварианты тензора деформаций в состоянии $\hat{\epsilon}_{ij}$ обозначены через $\hat{j}_\epsilon^{(n)}$.

Из приведенных неравенств следует, что поверхности нагружения и деформирования являются невогнутыми, вектор приращения пластической деформации в регулярной точке предельной поверхности направлен по ее внешней нормали (принцип градиентальности), а в особой точке лежит внутри или на границе конуса внешних нормалей [122]. Как видим, в данной части факт разупрочнения материала не приводит к противоречию с традиционными положениями теории пластичности.

Особенности механического поведения материалов на стадии разупрочнения, приводящая к некоторому расширению традиционных представлений, заключается в том, что при закритическом деформировании точка нагружения, принадлежащая поверхности нагружения, смещается внутрь первоначальной предельной поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial f}{\partial j_{\sigma}^{(\alpha)}} dj_{\sigma}^{(\alpha)} < 0,$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0, \quad (9.10)$$

$$df = \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial j_{\sigma}^{(\alpha)}} dj_{\sigma}^{(\alpha)} + \frac{\partial f}{\partial j_{\epsilon p}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon p}^{(\alpha)} \right] + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0.$$

Отметим при этом, что в качестве условия активного нагружения можно принять условие положительности диссипации:

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p > 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N j_{\sigma}^{(\alpha)} dj_{\sigma}^{(\alpha)} > 0. \quad (9.11)$$

При изотропном разупрочнении материала изменение конфигурации поверхности нагружения представляется подобным тому, как сдувается воздушный шар.

То же самое можно сказать и о поверхности деформирования. Вместе с приращениями полных и пластических деформаций, соответствующим условиям (9.11), упругая часть деформаций ϵ_{ij}^e на закритической стадии уменьшается таким образом, что точка, описывающая процесс в пространстве деформаций и лежащая на поверхности деформирования, также смещается внутрь первоначальной предельной поверхности (рис. 9.4):

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} < 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial j_{\epsilon}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon}^{(\alpha)} < 0,$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0, \quad (9.12)$$

$$dF = \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial j_{\epsilon}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon}^{(\alpha)} + \frac{\partial F}{\partial j_{\epsilon^p}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon^p}^{(\alpha)} \right] + \frac{\partial F}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0.$$

Кроме того, возникает и трансляция всей поверхности деформирования на вектор $d\epsilon^p$ [255].

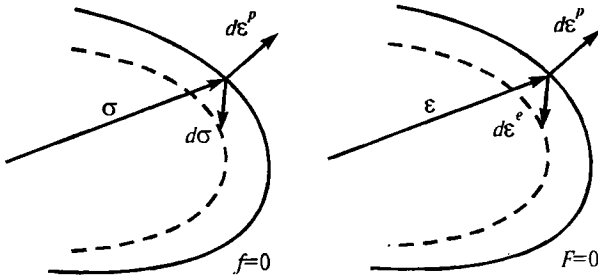


Рис. 9.4. Изменения предельных поверхностей на закритической стадии деформирования

Подобие в поведении двух предельных поверхностей естественно, поскольку напряжения и деформации, соответствующие внутренним и граничным точкам поверхностей нагружения и деформирования, должны быть связаны соотношениями теории упругости.

В случае нейтрального нагружения

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial f}{\partial j_{\sigma}^{(\alpha)}} dj_{\sigma}^{(\alpha)} = 0, \\ dF &= \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial j_{\epsilon}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon}^{(\alpha)} = 0, \end{aligned} \tag{9.13}$$

а также при разгрузке, когда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial f}{\partial j_{\sigma}^{(\alpha)}} dj_{\sigma}^{(\alpha)} < 0, \\ dF &= \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} < 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial j_{\epsilon}^{(\alpha)}} dj_{\epsilon}^{(\alpha)} < 0, \end{aligned} \tag{9.14}$$

пластические деформации не возникают: $d\epsilon_{ij}^p = 0$, $d\chi_i = 0$, а предельные поверхности не изменяются.

При пластическом деформировании, согласно принципу градиентальности,

$$d\epsilon_{ij}^p = k \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = K \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}}, \tag{9.15}$$

где k и K — скалярные коэффициенты, удовлетворяющие условиям $df = 0$ и $dF = 0$. В то же время, в рамках теории приращения деформаций определяющие соотношения могут быть записаны в виде [122, 218]

$$d\varepsilon_{ij} = J_{ijkl}d\sigma_{kl} + Q \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}. \quad (9.16)$$

Здесь J_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругой податливости, а коэффициент Q (в случае конической особенности на поверхности нагружения вводится совокупность коэффициентов Q_α и поверхностей f_α [122]) определяется состоянием σ_{ij} , ε_{ij}^p и историей нагружения, но не зависит от $d\sigma_{ij}$ и поэтому считается известным.

В отличие от традиционной теории пластичности при описании закритической стадии деформирования материала следует допустить отрицательные значения коэффициента:

$$Q \begin{cases} = 0, & df \leq 0; \\ > 0, & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0; \\ < 0, & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0. \end{cases} \quad (9.17)$$

Уравнения связи приращений напряжений и приращений пластических деформаций могут быть получены из выражений для полного дифференциала функции нагружения (9.10), в частности, с использованием соотношений $d\chi_n = A_{ij}^{(n)} d\varepsilon_{ij}^p$. В данной точке нагружения коэффициенты $\partial f / \partial \sigma_{ij}$, $\partial f / \partial \varepsilon_{ij}^p$, $(\partial f / \partial \chi_n) A_{ij}^{(n)}$ представляют собой вполне определенные постоянные [101]. Как показано в [122], любая теория пластичности с гладкой поверхностью может быть в активном процессе представлена дифференциально-линейными соотношениями.

В общем случае анизотропии дифференциальные тензорно линейные определяющие соотношения представим в виде

$$d\sigma_{ij} = C'_{ijmn} \left(j_\varepsilon^{(n)}, j_{\varepsilon^p}^{(n)}, \chi_i, \chi \right) d\varepsilon_{mn}, \quad (9.18)$$

где χ — индикатор, отражающий характер процесса: активное нагружение ($\chi = 1$) или разгрузка. При разгрузке и повторном нагружении до предела упругости $\chi = 0$. В сокращенных обозначениях будем писать

$$d\sigma_{ij} = C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi) d\varepsilon_{mn}. \quad (9.19)$$

Уравнения типа (9.18) являются широко используемыми в теории устойчивости упругопластических систем [123], особенность же их применительно к разупрочняющимся материалам заключается в появлении отрицательных компонент тензора C' на закритической стадии деформирования.

Используя подход, описанный в § 6.1 и заключающийся в использовании тензорной функции поврежденности четвертого ранга, определяющие соотношения инкрементального вида запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= C_{ijmn} (I_{mnpq} - \chi \Omega_{mnpq}) d\varepsilon_{pq}, \\ d\varepsilon_{ij} &= J_{ijmn} (I_{mnpq} + \chi \Psi_{mnpq}) d\sigma_{pq}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Компоненты тензоров Ω и Ψ определяются независимыми значениями Ω_α и Ψ_α , которые при задании их с помощью функционалов

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= \int_0^t h_\alpha(t-\tau) \omega_\alpha [j_\varepsilon^{(n)}(\tau), j_{\varepsilon^p}^{(n)}(\tau)] d\tau, \\ \Psi_\alpha &= \int_0^t H_\alpha(t-\tau) \psi_\alpha [j_\sigma^{(n)}(\tau), j_{\sigma^p}^{(n)}(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (9.21)$$

где t — параметр процесса, описывают влияние истории нагружения на поведение материала и играют роль параметров χ_i .

9.3. О признаке закритической деформации и постулате устойчивости неупругого деформирования в связи со свойствами нагружающей системы

В § 9.2 закритическое деформирование было определено как процесс, при котором точка нагружения, сохраняя свою принадлежность поверхности нагружения, смещается внутрь области, ограниченной первоначальной предельной поверхностью в пространстве напряжений. На основе этого определения сформулируем признак закритической деформации.

Пусть тело из деформируемого состояния A перешло в бесконечно близкое состояние B (при постоянной температуре). Признаком того, что переход сопровождался закритическими деформациями, будем считать выполнение неравенства

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} < 0. \quad (9.22)$$

Если в процессе указанного перехода из состояния A в состояние B возникает необратимая часть деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$, обнаруживаемая при разгрузке, когда упругая часть деформаций $d\varepsilon_{ij}^e$ исчезает, то можно сформулировать другой, возможно, более точный, признак закритической деформации:

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p < 0. \quad (9.23)$$

Неравенство (9.23) не изменится, если приращения напряжений выразить через приращения упругих частей деформаций согласно закону Гука: $C_{ijmn} d\epsilon_{mn}^e d\epsilon_{ij}^p < 0$, а также левую и правую части неравенства домножить на положительно определенную форму $d\epsilon_{ki} d\epsilon_{ki} > 0$. Учитывая, что $d\epsilon_{ki} = d\epsilon_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} = d\epsilon_{mn} \delta_{mk} \delta_{nl}$, получим эквивалентную (9.23) запись признака закритической деформации:

$$d\epsilon_{ij}^e d\epsilon_{ij}^p < 0. \quad (9.24)$$

Отметим, что признак возникновения необратимой части деформации $d\epsilon_{ij}^p$, вызванной, в общем случае, различными механизмами, включая структурное разрушение, устанавливается постулатом пластичности Ильюшина, согласно которому работа внешних сил на замкнутом по деформациям цикле является положительной [103]. Поведение разупрочняющихся сред на закритической стадии деформирования удовлетворяет указанному утверждению. Вследствие этого, в рамках постулата Ильюшина закритическая деформация не отличается от пластической. Таким образом, неравенство (9.23) может рассматриваться как необходимый и дополнительный по отношению к постулату пластичности признак закритической деформации.

При исследовании диссипативных процессов в механике сплошных сред широкое признание также получил предложенный Друккером [76–78] постулат устойчивости, имеющий большое значение, в частности, для теории пластичности [122]. Постулат базируется на предположении, что новая необратимая деформация не может возникнуть самопроизвольно. Для ее создания нужно затратить энергию. Если в замкнутом цикле приложения и снятия внешних сил возникает пластическая деформация, то работа этих сил на вызванных ими перемещениях должна быть положительной. Несмотря на естественность указанного предположения, постулат Друккера не является абсолютно строгим в термодинамическом смысле, поскольку цикл изменения напряжений, вообще говоря, не возвращает материал в исходное состояние [192]. Вместе с тем, постулат служит основой классификации материалов по признаку устойчивости [218]. Согласно определению Друккера, материал на стадии разупрочнения, рассматриваемый в отрыве от окружающей его деформируемой среды, классифицируется как неустойчивый. При этом автор известного постулата отмечал, что понижение кривых напряжение–деформация наблюдается все же у горных пород, бетона, плотных грунтов, затвердевших глинистых почв и металлов [192], а применение лишь в противном случае термина “устойчивый” не вполне оправданно [77]. Тем не менее, определение материала с ниспадающей ветвью диаграммы деформирования как “неустойчивого” приводит к сомнениям по поводу его существования. Сама осуществимость состояний материала на стадии разупрочнения требует специальных доказательств [186, 228].

Обратим внимание на то, что при формулировке постулата не учитывается работа деформирования нагружающей системы, характери-

зуемой в общем случае некоторой ненулевой и ограниченной жесткостью. Покажем, что если подход Друккера применить к механической системе, включающей кроме деформируемого тела также и систему нагружения, то разупрочнение материала не будет в обязательном порядке приводить к нарушению соответствующего расширенного постулата устойчивости. Явление неустойчивости будет регистрироваться только при недостаточной жесткости нагружающей системы, что в большей степени соответствует экспериментальным данным.

Рассмотрим твердое деформируемое тело, находящееся в статическом равновесии под действием совокупности поверхностных нагрузок S и объемных сил F . Предположим, что при приложении добавочных сил ΔS и ΔF равновесие тела сохранится, а напряжения, деформации и перемещения в теле получают приращения $\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$, Δu соответственно. В случае, когда добавочные нагрузки вызывают необратимые деформации, при снятии дополнительных сил точки тела не возвращаются в исходное деформированное состояние. Обозначим соответствующие отклонения перемещений, которые состоят из упругих и пластических компонент, через $\Delta u'$. Если для любых систем дополнительных сил конечной или бесконечно малой величины внешний источник совершает положительную работу на производимых им смещениях, то состояние равновесия тела является полностью устойчивым в большом или, соответственно, в малом. Существует энергетический барьер, препятствующий передвижению системы в любую соседнюю конфигурацию.

Используя введенную при записи граничных условий (6.50) характеристику жесткости нагружающего устройства или системы, сформулируем постулат устойчивости следующим образом.

В процессе нагружения суммарная работа дополнительных усилий, связанная с деформированием твердого тела и нагружающей системы, является положительной:

$$\int_{\Sigma} \int_0^{\Delta u_i} (\delta S_i + R_{ij} \delta u_j) du_i d\Sigma + \int_{\Omega} \int_0^{\Delta u_i} \delta F_i du_i d\Omega > 0; \quad (9.25)$$

суммарная работа дополнительных усилий, связанная с деформированием твердого тела и нагружающей системы, за полный цикл нагружения и разгрузки является неотрицательной:

$$\int_{\Sigma} \int_0^{\Delta u'_i} (\delta S_i + R_{ij} \delta u'_j) du'_i d\Sigma + \int_{\Omega} \int_0^{\Delta u'_i} \delta F_i du'_i d\Omega \geq 0. \quad (9.26)$$

Величины δS_i , δF_i , δu_i , $\delta u'_i$ представляют собой разности текущих и исходных значений и изменяются от нуля до ΔS_i , ΔF_i , Δu_i , $\Delta u'_i$ соответственно. В предельном случае, когда жесткость нагружающей системы равна нулю, сформулированный постулат устойчивости

совпадает с постулатом Друккера [78]. Естественно, что равенство нулю в соотношении (9.26) имеет место только в том случае, когда изменения в теле носят упругий характер.

Неравенства (9.25) и (9.26) соответствуют определению устойчивости в большом. Постулат устойчивости в малом выражается неравенствами

$$\int_{\Sigma} (\delta S_i + R_{ij} \delta u_j) \delta u_i d\Sigma + \int_{\Omega} \delta F_i \delta u_i d\Omega > 0, \quad (9.27)$$

$$\int_{\Sigma} (\delta S_i + R_{ij} \delta u'_j) \delta u'_i d\Sigma + \int_{\Omega} \delta F_i \delta u'_i d\Omega \geq 0. \quad (9.28)$$

Согласно уравнению виртуальных работ [128], из неравенства (9.27) следует, что при нагружении устойчивому состоянию равновесия соответствует условие

$$\int_{\Omega} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij} \delta u_j \delta u_i d\Sigma > 0. \quad (9.29)$$

В соответствии с признаком закритической деформации, сопровождаемой разупрочнением материала, $\delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} < 0$, что часто считается также признаком неустойчивости. Однако при достаточной жесткости нагружающей системы деформирование разупрочняющегося материала даже во всем объеме тела Ω , согласно сформулированному постулату и следствию (9.29), определяется как устойчивое.

Таким образом, учет свойств механической системы, передающей нагрузку рассматриваемой деформируемой области или телу, позволяет выявить стабилизирующее влияние жесткой нагружающей системы на стадии деформирования, которая, согласно постулату Друккера, безусловно классифицируется как неустойчивая. Выполнение условия (9.29) обеспечивает устойчивое деформирование "неустойчивых" (по Друккеру) материалов.

9.4. Оценка устойчивости процесса закритической деформации

Поскольку квазистатический процесс деформирования является следствием движения материальных частиц, то устойчивость понимается в данном случае, естественно, как устойчивость бесконечно медленного движения [123]. Будем основываться на определении устойчивости движения Ляпунова [140, 167] с учетом особенностей его использования в механике деформируемого твердого тела [63, 123, 218].

Если по любой паре положительных сколь угодно малых чисел α_1 и α_2 , можно найти такие положительные числа β_1 и β_2 , что при

всяких возмущениях в данный момент времени параметров нагружения $\delta u_i^0(\mathbf{r})$ и $\delta S_i^0(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условиям

$$\|\delta u^0\| \equiv \int_{\Sigma_u} \delta u_i^0 \delta u_i^0 d\Sigma < \beta_1, \quad \|\delta S^0\| \equiv \int_{\Sigma_S} \delta S_i^0 \delta S_i^0 d\Sigma < \beta_2, \quad (9.30)$$

вызванные этими мгновенными возмущениями отклонения параметров движения $\delta u_i(\mathbf{r})$ и $\delta \varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ в настоящий и любой последующий моменты времени таковы, что

$$\|\delta u\| \equiv \int_{\Omega} \delta u_i \delta u_i d\Omega < \alpha_1, \quad \|\delta \varepsilon\| \equiv \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega < \alpha_2, \quad (9.31)$$

то невозмущенный процесс деформирования является устойчивым, в противном случае — неустойчивым.

Определение устойчивого состояния равновесия базируется на анализе поведения системы при фиксированных внешних параметрах и является частью рассмотренного определения устойчивого процесса деформирования при непрерывном и медленном изменении параметров нагружения. Один из путей отыскания момента потери устойчивости указывают теоремы Лагранжа–Дирихле и Ляпунова [63]. Рассматривая малые отклонения от основного состояния, можно судить о характере равновесия по знаку приращения полной потенциальной энергии механической системы.

Пусть в некоторой зоне Ω_0 деформируемого тела Ω имеет место разупрочнение материала в процессе деформирования. Для оценки устойчивости закритической деформации, сопровождающейся равновесным ростом дефектов воспользуемся энергетическим подходом механики разрушения [194], приводящим к неравенству (7.8).

Приращение работы внешних сил связано с перемещениями δu точек границы деформируемого тела, обусловленными уменьшением его жесткости в процессе разрушения. Выражение для вычисления работы внешних сил на основе рассмотренных в шестой главе граничных условий контактного типа можно представить в виде

$$\Delta A_e = \int_{\Sigma_S} \left(S_i - \frac{1}{2} R_{ij} \delta u_j \right) \delta u_i d\Sigma_S + \int_{\Sigma_u} \left(S_i - \frac{1}{2} \delta S_i \right) Q_{ij} \delta S_j d\Sigma_u.$$

Для области Ω с границей Σ с учетом того, что условия (6.50) могут быть получены из условий (6.51) и наоборот, неравенство (7.8) представим в виде

$$\int_{\Sigma} \left(S_i - \frac{1}{2} R_{ij} \delta u_j \right) \delta u_i d\Sigma < \int_{\Omega - \Omega_0} \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2} C'_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \right) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} D_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \right) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega. \quad (9.32)$$

При записи последнего неравенства принято, что связь малых приращений напряжений и малых приращений деформаций может быть представлена дифференциально линейными соотношениями (9.19). Коэффициентами пропорциональности на стадии упрочнения являются компоненты тензора C' , а на закритической стадии деформирования — компоненты тензора модулей разупрочнения D , взятые со знаком минус,

$$\Omega - \Omega_0 : C'_{ijmn} \equiv C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1), \quad \Omega_0 : D_{ijmn} \equiv -C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1).$$

Как известно, работа внешних сил на статически им соответствующих перемещениях равна удвоенной упругой энергии тела. Покажем справедливость аналогичного уравнения, включающего виртуальные перемещения и деформации. Умножим уравнение равновесия в предположении для простоты отсутствия массовых сил на δu_i , проинтегрируем по объему и используем формулы Гаусса-Остроградского и Коши:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega = \\ &= \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = 0. \end{aligned}$$

В связи с этим неравенство (9.32) сводится к виду

$$\int_{\Sigma} R_{ij} \delta u_j \delta u_i d\Sigma + \int_{\Omega - \Omega_0} C'_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega > \int_{\Omega_0} D_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega. \quad (9.33)$$

Таким образом, условие устойчивости закритической деформации в ослабленной зоне Ω_0 деформируемого тела Ω с условиями на границе в виде (6.50) имеет вид (9.33) и эквивалентно неравенству (9.29), полученному при рассмотрении расширенного постулата устойчивости.

Отметим, что при анализе устойчивости необходимо исключить динамические вариации смещений в области разупрочнения [158]. Использование данных полей смещений означало бы экстраполяцию соотношений, описывающих закритическое деформирование, на условия, в которых они могут быть заведомо неприменимы.

Рассмотрим другой способ вывода условий устойчивости, приводящий, как будет показано, к эквивалентным результатам и основывающийся на анализе функционала полной энергии деформируемой и нагружающей систем. Для этого уместно использовать предложенную в § 6.4 схему погружения деформируемого тела Ω в область Ω' ,

обеспечивающую по своим свойствам требуемые условия на границе Ω , тем самым моделируя взаимодействие двух указанных систем.

Выражение для нахождения полной энергии объединенной механической системы имеет вид

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega + \Omega'} \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega - A'_e. \quad (9.34)$$

Поскольку внешняя поверхность Ω' закреплена, то работа внешних сил $A'_e = 0$. Рассматривая в качестве Ω' линейно упругое тело, получим

$$\int_{\Omega'} \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} S_i (u_i^0 - u_i) d\Sigma.$$

Справедливость последнего преобразования следует из процедуры стыковки Ω и Ω' . Таким образом, с учетом граничных условий (6.50),

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\Omega} \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (S_i^0 u_i^0 - 2S_i^0 u_i + R_{ij} u_j u_i) d\Sigma, \\ \delta\mathcal{E} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (-2S_i^0 \delta u_i + 2R_{ij} u_j \delta u_i) d\Sigma, \\ \delta^2\mathcal{E} &= \int_{\Omega} C'_{ijmn}(\epsilon, \chi = 1) \delta\epsilon_{mn} \delta\epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij} \delta u_j \delta u_i d\Sigma. \end{aligned} \quad (9.35)$$

При возможном отклонении от равновесного положения первая вариация от полной энергии должна быть равна нулю: $\delta\mathcal{E} = 0$. Об устойчивости равновесного состояния можно судить по знаку второй вариации от полной энергии [63]. Если исходное состояние устойчиво, то вторая вариация положительна: $\delta^2\mathcal{E} > 0$.

Получим условие локальной устойчивости закритического деформирования материальной точки нагруженного тела. Для этого мысленно удалим из тела элементарный параллелепипед объемом $d\Omega$ в окрестности рассматриваемой точки. Если на гранях получившейся полости приложить напряжения σ'_{ij} (штрих для отличия от напряжений в общепринятом смысле), это вызовет ее деформации ϵ_{ij} . Установим связь между введенными таким образом напряжениями и деформациями:

$$\sigma'_{ij} = -V_{ijmn} \epsilon_{mn}. \quad (9.36)$$

Тензор $V(\mathbf{r})$ может быть назван тензором жесткости нагружающей системы в точке и характеризует деформационные свойства всего

тела, а также нагружающего устройства, которое обеспечивает заданные перемещения или усилия на границе.

С использованием введенного тензора работа внешних сил при виртуальном приращении закритической деформации в области Ω_0 с границей Σ_0 может быть представлена выражением

$$\begin{aligned} \Delta A_e &= \int_{\Sigma_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} V_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \right) \delta u_i n_j d\Sigma = \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} V_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \right) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Сравнивая последнее равенство с формулой для вычисления приращения работы деформации

$$\Delta A_\epsilon = \int_{\Omega_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} D_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \right) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega,$$

получим, что устойчивому состоянию соответствует условие

$$\Delta A_\epsilon - \Delta A_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (V_{ijmn} - D_{ijmn}) \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega > 0.$$

Если перейти к элементарному объему $d\Omega_0$ и ввести тензорную величину S — сравнительную жесткость нагружения:

$$S_{ijmn}(\mathbf{r}) = V_{ijmn}(\mathbf{r}) - D_{ijmn}(\mathbf{r}), \quad (9.38)$$

то условие устойчивости закритического деформирования элементарной частицы материала в теле конечных размеров будет эквивалентно требованию положительности квадратичной формы тензора S :

$$S_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} > 0. \quad (9.39)$$

Рассмотрим вопрос нахождения тензора жесткости нагружающей системы в точке. Запишем выражение для приращения работы внешних сил в виде

$$\Delta A_e = \int_{\Sigma_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_k} \delta u_k \right) \delta u_i n_j d\Sigma. \quad (9.40)$$

Из сравнения (9.40) и (9.37) следует, что компоненты искомого тензора могут быть найдены по формуле

$$V_{ijmn} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_k} (dx_m \delta_{kn} + dx_n \delta_{km}). \quad (9.41)$$

Как видим, жесткость нагружающей системы в точке зависит от соотношения внутренних усилий и перемещений. Это естественно, поскольку перемещение любой точки деформируемого тела определяется деформациями всех его материальных частиц, а также перемещениями границ и, в этом смысле, является интегральной величиной, характеризующей жесткость нагружающей системы. Связь внутренних усилий с перемещениями отражает жесткостные характеристики всех материальных частиц и элементов нагружающего устройства в совокупности.

Согласно этому, в работе [61] введено понятие эквивалентной жесткости системы нагружения, связывающей перемещение рассматриваемой точки в направлении действия главного напряжения на элементарной площадке. Условие устойчивости закритического деформирования области малых, но конечных размеров, полученное в [61], следует из соотношений (9.39), (9.38) и (9.41), однако, лишь в том случае, если записать их применительно к главным осям, частные производные в (9.41) заменить отношением абсолютных величин, dx заменить на Δx и принять, что каждая компонента тензора S должна быть положительна (условие достаточное, но не являющееся необходимым для выполнения (9.39)).

Устойчивость состояния свидетельствует об отсутствии его бифуркации, что само по себе не исключает возможность бифуркации процесса деформирования [123]. В общем случае не исключены ситуации, когда состояние единственно, но неоднозначно продолжение процесса. В связи с этим, утверждение об устойчивости процесса закритической деформации требует в дополнение к полученным условиям устойчивости состояний материала доказательства также и их достаточности для отсутствия бифуркации процесса, что эквивалентно требованию единственности решения краевой задачи, сформулированной относительно малых приращений внутренних и внешних параметров. Этот вопрос будет рассмотрен далее.

9.5. Единственность решения краевых задач для тел с зонами разупрочнения

Пусть в произвольной декартовой системе координат определяющие соотношения, связывающие приращения тензора напряжений $d\sigma$ и тензора деформаций $d\varepsilon$ во время непрерывного нагружения элемента материала, задаются в тензорно линейном виде (9.19).

Будем предполагать наличие исходного напряженно-деформированного состояния, т. е. считать, что в момент, предшествующий рассматриваемому, имеют место и известны ненулевые поля напряжений $\sigma(\mathbf{r})$, деформаций $\varepsilon(\mathbf{r})$ и перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Примем отмеченную ранее концепцию о существовании предельных поверхностей: поверхности нагружения в пространстве напряжений и поверхности

деформирования в пространстве деформаций, а также принцип максимума скорости диссипации Мизеса, выражающийся в неравенстве (9.7).

В общем случае, некоторая часть деформируемого тела находится в состоянии пластического деформирования, другая область — в состоянии разупрочнения. В процессе закритической деформации для каждой точки этой области поверхность максимальных напряжений и критических состояний непрерывно изменяется. Третья область может находиться в состоянии разгрузки после предшествовавшей пластической или закритической деформации. Наконец, в оставшейся части тела имеют место только упругие деформации.

Ограничимся рассмотрением материалов, обладающих диаграммами деформирования с обычными ниспадающими участками (падение напряжений сопровождается ростом деформаций) и мягкими характеристиками [204], так что $C'(\varepsilon, \chi = 1) \leq C'(\varepsilon = 0, \chi) = C$. В данном случае активное нагружение связано с выполнением неравенства $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$. Упругое поведение материала определяется постоянным тензором модулей упругости C .

Приращения деформаций малы, так что выполняются соотношения Коши, связывающие их с вектором приращения перемещения,

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right], \quad (9.42)$$

и справедливы уравнения равновесия среды (X — заданные объемные силы)

$$d\sigma_{ij,j} + dX_i = 0. \quad (9.43)$$

Условия нагружения тела Ω с границей $\Sigma = \Sigma_S + \Sigma_u$ определим с помощью граничных условий контактного типа в виде

$$(d\sigma_{ij}n_j + R_{ij}du_j)|_{\Sigma_S} = dS_i^0, \quad (9.44)$$

$$(du_i + Q_{ij}d\sigma_{jk}n_k)|_{\Sigma_u} = du_i^0. \quad (9.45)$$

Характеристики жесткости $R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ и податливости $Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r})$ нагружающей системы удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall e \quad R_{ij}e_j e_i \geq 0, \quad Q_{ij}e_j e_i \geq 0, \quad R_{ik}Q_{kj} = \delta_{ij}. \quad (9.46)$$

Номинально, без учета деформации или сопротивления тела, задаваемые приращения усилий и перемещений на границе связаны соотношениями

$$dS_i^0 = R_{ij}du_j^0, \quad du_i^0 = Q_{ij}dS_j^0, \quad (9.47)$$

из которых вместе с (9.46) следует взаимная обратность уравнений (9.44) и (9.45), что в общем случае позволяет использовать граничные

условия одного вида для всей поверхности. В связи с этим, из (9.42)–(9.45) следуют соотношения

$$\int_{\Sigma=\Sigma_S} dS_i^0 du_i d\Sigma = \int_{\Omega} (d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - dX_i du_i) d\Omega + \int_{\Sigma=\Sigma_S} R_{ij} du_j du_i d\Sigma, \quad (9.48)$$

$$\int_{\Sigma=\Sigma_u} dS_i du_i^0 d\Sigma = \int_{\Omega} (d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - dX_i du_i) d\Omega + \int_{\Sigma=\Sigma_u} Q_{ij} dS_j dS_i d\Sigma, \quad (9.49)$$

где $dS_i = d\sigma_{ij} n_j \big|_{\Sigma}$.

Уравнения (9.48) и (9.49) аналогичны уравнению виртуальных работ [128] и, как и условие устойчивости (9.29), являются основой доказательства основных теорем механики неупругого деформирования тел с граничными условиями контактного типа.

Теорема 9.1. Пусть для ограниченного поверхностью Σ тела Ω , содержащего область $\Omega_0 \subset \Omega (\Sigma \notin \Omega_0)$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 : C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1) h_{mn} h_{ij} &> 0, \\ \Omega_0 : C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1) g_{mn} g_{ij} &< 0, \end{aligned} \quad (9.50)$$

где \mathbf{h} — произвольный, а \mathbf{g} — какой-либо симметричный тензоры второго ранга. Тогда условие

$$\int_{\Omega} C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1) \delta\varepsilon_{mn} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij} \delta u_j \delta u_i d\Sigma > 0 \quad (9.51)$$

является достаточным условием существования не более одного решения задачи (9.19), (9.42)–(9.45).

Доказательство. Предположим противное: существуют два различных решения $du_i^{(1)}$, $d\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $d\sigma'_{ij}^{(1)}$ и $du_i^{(2)}$, $d\varepsilon_{ij}^{(2)}$, $d\sigma'_{ij}^{(2)}$. В этом случае, поля

$$du'_i = du_i^{(1)} - du_i^{(2)}, \quad d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(1)} - d\varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)}$$

также удовлетворяют всем уравнениям краевой задачи при нулевых массовых силах и граничных условиях

$$(d\sigma'_{ij} n_j + R_{ij} u'_j) \big|_{\Sigma_S} = 0, \quad (du'_i + Q_{ij} d\sigma'_{jk} n_k) \big|_{\Sigma_u} = 0. \quad (9.52)$$

Граничные условия, как было отмечено, могут быть приведены к единой форме. В данном случае, уравнение (9.48) приобретает вид

$$\int_{\Omega} d\sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} d\Omega = - \int_{\Sigma=\Sigma_S} R_{ij} du'_j du'_i d\Sigma. \quad (9.53)$$

Очевидно, что правая часть последнего уравнения не может быть положительной. В случае неединственности решения исходной краевой задачи интеграл по объему должен быть отрицательным, в противном случае оба интеграла равны нулю.

Неотрицательность выражения, стоящего под знаком объемного интеграла, для области $\Omega - \Omega_0$ в случаях активного нагружения либо разгрузки как по одному, так и другому решениям следует из (9.50). Если в указанной области упругая разгрузка имеет место согласно лишь одному решению, например, первому, то, положив $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij}^{(1)}$, из принципа максимума Мизеса (9.7) получим $d\sigma_{ij}^{(1)} d\epsilon_{ij}^{(2)p} \leq 0$, следовательно, и в этом случае объемный интеграл в выражении (9.53) является неотрицательным. Вместе с фактом неположительности правой части (9.53) это свидетельствует о единственности решения краевой задачи для упругопластического упрочняющегося тела ($\Omega_0 = 0$) с граничными условиями в форме (9.44) и (9.45).

Если согласно различным решениям краевой задачи в каждой точке области Ω_0 имеет место активное нагружение ($\chi = 1$), то при выполнении условия устойчивости закритической деформации (9.51) равенство (9.53) невозможно, что свидетельствует о наличии связанного с исходным предположением противоречия.

Однако возможен вариант, когда в некоторой области $\Omega'_0 \subseteq \Omega_0$, согласно одному из решений, например, первому, имеет место упругая разгрузка. Принимая во внимание, что в этом случае

$$d\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ijmn} d\epsilon_{mn}^{(1)}, \quad d\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijmn} d\epsilon_{mn}^{(2)e},$$

для любой точки из указанной области запишем

$$d\sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij} = C_{ijmn} d\epsilon_{mn}^{(1)} d\epsilon_{ij}^{(1)} - 2d\sigma_{ij}^{(2)} d\epsilon_{ij}^{(1)} - C_{ijmn} d\epsilon_{mn}^{(1)} d\epsilon_{ij}^{(2)p} + d\sigma_{ij}^{(2)} d\epsilon_{ij}^{(2)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\sigma'_{ij} d\epsilon'_{ij} - C'_{ijmn}(\epsilon, \chi = 1) d\epsilon'_{mn} d\epsilon'_{ij} = \\ = [C_{ijmn} - C'_{ijmn}(\epsilon, \chi = 1)] d\epsilon_{mn}^{(1)} d\epsilon_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(1)} d\epsilon_{ij}^{(2)p} > 0. \end{aligned}$$

Знак последнего неравенства определяется направленностью векторов $d\sigma^{(1)}$ и $d\epsilon^{(2)p}$ соответственно внутрь поверхности нагружения и по внешней нормали к ней и тем фактом, что рассматриваемый материал, как было оговорено, обладает мягкой характеристикой. Поэтому, обращаясь к (9.53), запишем

$$\int_{\Omega} C'_{ijmn}(\epsilon, \chi = 1) d\epsilon'_{mn} d\epsilon'_{ij} d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij} du'_i du'_j d\Sigma < 0,$$

придя и в этом случае к противоречию с условием (9.51). Теорема доказана.

После вывода условия устойчивости, выполнение которого означает отсутствие бифуркации процесса закритической деформации, о чем свидетельствует доказанная теорема единственности, требует уточнения вопрос определения самого критического напряженного состояния. Традиционно используемые критерии разрушения, основанные на сравнении значения некоторой функции компонент тензора напряжений или деформаций с ее предельным значением, обычно не включают в себя жесткость нагружающей системы и соответствуют нулевой жесткости. В этом случае подобные критерии могут быть использованы для оценки критического напряженного состояния. Предельное состояние материала будем характеризовать сочетанием двух условий: условия закритической деформации и условия потери устойчивости этого процесса.

Таким образом, деформирование и разрушение нагруженного тела, сопровождаемые возникновением и развитием поврежденных зон, областей закритической деформации, поведение которых находит отражение на диаграмме деформирования в виде ниспадающей ветви, а также зон разрушенного материала, можно исследовать как единый процесс, описываемый при квазистатическом нагружении краевой задачей, состоящей из замкнутой системы уравнений: уравнений равновесия (9.43), геометрических соотношений (9.42), определяющих соотношений в форме (9.19) или (9.20), условий закритической деформации (6.37) и устойчивости этого процесса (9.51), а также граничных условий (9.44) и (9.45).

Существование, единственность и непрерывная зависимость решения от данных задачи являются необходимыми признаками корректности ее постановки [290]. Единственность решения указанной задачи свидетельствует об однозначном соответствии искомого процесса нагружения (деформирования) элементов тела и заданного процесса внешнего нагружения. Отсутствие же в математическом смысле решения говорит о невозможности равновесного сопротивления тела приложенным внешним нагрузкам, т.е. о макроразрушении.

9.6. Экстремальные и вариационные принципы механики устойчивого закритического деформирования

Используем предложенную в § 6.4 схему погружения деформируемого тела Ω с границей Σ в фиктивную ограниченную двусвязную область упругого материала Ω' с требуемыми свойствами и жестко закрепленной внешней границей. Если внутренняя граница Σ' области Ω' в недеформированном состоянии отличается от Σ в каждой точке на соответствующий вектор смещения $du^0(\mathbf{r})$, принимаемый в качестве номинально задаваемого приращения перемещений для точек поверхности Σ , а свойства области Ω' таковы, что для совпадения границ

требуется приложение в точках Σ' усилий, отличающихся лишь знаком от номинально задаваемых $dS^0(\mathbf{r})$, то в результате описанной процедуры стыковки тела Ω и области Ω' на общей границе устанавливаются условия типа (9.44) и (9.45), а тело Ω' может служить моделью нагружающей системы.

Поля $du(\mathbf{r})$, $d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ в теле Ω , вызванные несовпадением исходных границ областей Ω и Ω' , удовлетворяют уравнениям (9.19), (9.42) и (9.43) при (9.44) и (9.45). Допустим существование области разупрочнения Ω_0 и выполнение условий (9.50) и (9.51). Поля, удовлетворяющие всем указанным уравнениям и неравенствам будем называть действительными.

Пусть $d\sigma_{ij}^*$ — статически возможные приращения напряжений в области Ω , удовлетворяющие уравнениям равновесия (9.43) и статическим условиям сопряжения

$$dS_i^*|_{\Sigma} \equiv d\sigma_{ij}^* n_j|_{\Sigma} = -dS_i^*|_{\Sigma'}, \quad (9.54)$$

но такие, что соответствующие им, согласно определяющим соотношениям (9.19), возможные приращения деформаций $d\varepsilon_{ij}^*$ не обязательно выражаются через непрерывные перемещения. В области Ω' соотношения Коши выполняются, отклонение статически возможных полей от действительных возникает вследствие отличия возможных и действительных усилий и перемещений на общей границе.

Теорема 9.2. Абсолютный минимум функционала

$$W^* = \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* d\Omega - \int_{\Sigma} Q_{ij} \left(2dS_j^0 dS_i^* - dS_j^* dS_i^* - \frac{1}{2} dS_j^0 dS_i^0 \right) d\Sigma, \quad (9.55)$$

определенного для всех статически возможных полей, отвечает действительному полю приращений напряжений.

Для доказательства рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Sigma(\Omega)} (dS_i^* - dS_i) du_i d\Sigma + \\ &+ \int_{\Sigma(\Omega')} (dS_i^* - dS_i) (du_i^0 - du_i) d\Sigma = \int_{\Sigma} (dS_i^* - dS_i) du_i^0 d\Sigma, \end{aligned} \quad (9.56)$$

полученные при использовании последовательно соотношений Коши применительно к действительному полю деформаций, уравнений равновесия и теоремы Гаусса-Остроградского.

Преобразуем первый интеграл в выражении (9.56) :

$$\int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij})(d\varepsilon_{ij}^* - d\varepsilon_{ij}) d\Omega. \quad (9.57)$$

С учетом возможной разгрузки

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij})(d\varepsilon_{ij}^* - d\varepsilon_{ij}) d\Omega \geq \\ & \geq \int_{\Omega} C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)[d\varepsilon_{mn}^* - d\varepsilon_{mn}][d\varepsilon_{ij}^* - d\varepsilon_{ij}] d\Omega, \end{aligned} \quad (9.58)$$

что справедливо в силу обладания рассматриваемым материалом мягкой характеристикой и следует из аналогичного неравенства, полученного для области Ω_0 при доказательстве теоремы 9.1. Далее

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij})(d\varepsilon_{ij}^* - d\varepsilon_{ij}) d\Omega = \\ & = \int_{\Sigma} (dS_i^* - dS_i) [(du_i^0 - du_i^*) - (du_i^0 - du_i)] d\Sigma = \\ & = \int_{\Sigma} R_{ij}(du_j^* - du_j)(du_i^* - du_i) d\Sigma. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Возвращаясь к (9.56) с учетом (9.57)–(9.59) и условия (9.51), получим

$$\int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) d\Omega \geq 2 \int_{\Sigma} (dS_i^* - dS_i) du_i^0 d\Sigma.$$

Равенство имеет место при совпадении статически возможных и действительных полей. Согласно уравнению виртуальных работ, а также условиям сопряжения (9.54) и $du_i^0 - du_i = Q_{ij} dS_j$,

$$\int_{\Omega'} d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Sigma} dS_i^* (du_i^0 - du_i^*) d\Sigma = \int_{\Sigma} Q_{ij} dS_j^* dS_i^* d\Sigma,$$

$$\int_{\Omega'} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Sigma} dS_i (du_i^0 - du_i) d\Sigma = \int_{\Sigma} Q_{ij} dS_j dS_i d\Sigma.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* d\Omega - \int_{\Sigma} (2dS_i^* du_i^0 - Q_{ij} dS_j^* dS_i^*) d\Sigma \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Sigma} (2dS_i du_i^0 - Q_{ij} dS_j dS_i) d\Sigma = \int_{\Sigma} dS_i du_i^0 d\Sigma. \quad (9.60)$$

Справедливость экстремального принципа доказана.

В частном случае, когда на части Σ_u поверхности Σ заданы условия жесткого нагружения ($Q_{ij} = 0$), а на другой части поверхности Σ_S — условия мягкого нагружения ($R_{ij} = 0$) и требуется, чтобы статически возможные поля удовлетворяли равенству

$$d\sigma_{ij}^* n_j |_{\Sigma_S} = dS_i^0,$$

соотношение (9.60) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* d\Omega - \int_{\Sigma_u} dS_i^* du_i d\Sigma &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega - \\ &- \int_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_S} dS_i du_i d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma \end{aligned}$$

и совпадает с выражением известного экстремального принципа, полученного с использованием традиционных граничных условий [285].

В рамках рассмотрения статически допустимых полей, отличающихся бесконечно мало от действительного,

$$d\sigma_{ij}^* = d\sigma_{ij} + \delta(d\sigma_{ij}),$$

функционал W^* принимает экстремальное значение при выполнении условия его стационарности по отношению к вариациям $\delta(d\sigma_{ij})$, удовлетворяющим уравнениям равновесия. В этом случае уравнение

$$\int_{\Omega} \delta(d\sigma_{ij}) d\epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Sigma} \delta(dS_i) [du_i^0 - Q_{ij} dS_j] d\Sigma = 0$$

выражает модифицированный вариационный принцип для упругопластических тел с возможными зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа.

Второй экстремальный принцип касается кинематически возможных приращений деформаций $d\bar{\epsilon}_{ij}$, связанных с приращениями перемещений $d\bar{u}_i$; соотношениями Коши и удовлетворяющих на границе областей Ω и Ω' кинематическим условиям сопряжения

$$d\bar{u}_i |_{\Sigma} = d\bar{u}_i |_{\Sigma'}, \quad (9.61)$$

но таких, что соответствующие им согласно определяющим соотношениям возможные приращения напряжений $d\bar{\sigma}_{ij}$ в области Ω не обязательно удовлетворяют уравнениям равновесия.

Теорема 9.3. Абсолютный максимум функционала

$$\bar{W} = \int_{\Sigma} R_{ij} \left(2du_j^0 d\bar{u}_i - d\bar{u}_j d\bar{u}_i - \frac{1}{2} du_j^0 du_i^0 \right) d\Sigma - \int_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega, \quad (9.62)$$

определенного для всех кинематически возможных полей, отвечает действительному полю приращений деформаций.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}) d\sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Sigma(\Omega)} (d\bar{u}_i - du_i) dS_i d\Sigma + \\ &+ \int_{\Sigma(\Omega')} [(du_i^0 - d\bar{u}_i) - (du_i^0 - du_i)] dS_i d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (9.63)$$

и тождество

$$\begin{aligned} 2(d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}) d\sigma_{ij} &= (d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) - \\ &- [d\bar{\varepsilon}_{ij} (d\bar{\sigma}_{ij} - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij})]. \end{aligned}$$

Определим знак следующей величины

$$\begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} A d\Omega &\equiv \int_{\Omega+\Omega'} [d\bar{\varepsilon}_{ij} (d\bar{\sigma}_{ij} - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij})] d\Omega - \\ &- \int_{\Omega+\Omega'} C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1) [d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn}] [d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}] d\Omega. \end{aligned}$$

В областях активного нагружения по всем кинематически возможным и действительному продолжениям процесса $A = 0$. В зонах упругого деформирования и разгрузки, производимой как $d\bar{\sigma}_{ij}$, так и $d\sigma_{ij}$,

$$A = [C_{ijmn} - C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)] (d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn})(d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}) \geq 0,$$

что определяется отмеченными ранее свойствами рассматриваемых материалов. К аналогичному выражению для величины A придем и при рассмотрении случая, когда $d\sigma_{ij}$ вызывают нагружение, а $d\bar{\sigma}_{ij}$ — разгрузку.

Если согласно кинематически возможному приращению деформаций $d\bar{\varepsilon}_{ij}$ имеет место активное нагружение, а упругая разгрузка соответствует действительным приращениям $d\varepsilon_{ij}$, то

$$A = [C_{ijmn} - C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)] d\varepsilon_{mn} d\varepsilon_{ij} - 2d\sigma_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p > 0.$$

Истинность подобного неравенства уже была обоснована при доказательстве теоремы 9.1.

Согласно уравнению виртуальных работ для области Ω' и условию (9.51) при $d\bar{\varepsilon}_{ij} \neq d\varepsilon_{ij}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)[d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn}][d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} C'_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)[d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn}][d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}] d\Omega + \\ + \int_{\Sigma} R_{ij}(d\bar{u}_j - du_j)(d\bar{u}_i - du_i) d\Sigma > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что

$$\int_{\Omega+\Omega'} [d\bar{\varepsilon}_{ij}(d\bar{\sigma}_{ij} - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij})] d\Omega \geq 0,$$

а следовательно,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}) d\Omega \geq \int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij})d\sigma_{ij} d\Omega. \quad (9.64)$$

Согласно условиям сопряжения (9.61) и $dS_i^0 - dS_i = R_{ij}du_j$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Sigma} (dS_i^0 - R_{ij}d\bar{u}_j)(du_i^0 - d\bar{u}_i) d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} (dS_i^0 du_i^0 - 2dS_i^0 d\bar{u}_i + R_{ij}d\bar{u}_j d\bar{u}_i) d\Sigma, \\ \int_{\Omega'} d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Sigma} (dS_i^0 - R_{ij}du_j)(du_i^0 - du_i) d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} (dS_i^0 du_i^0 - 2dS_i^0 du_i + R_{ij}du_j du_i) d\Sigma. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (9.64) с учетом (9.63) и последних соотношений, получим

$$\int_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Sigma} (2d\bar{u}_i dS_i^0 - R_{ij}d\bar{u}_j d\bar{u}_i) d\Sigma \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Sigma} (2du_i dS_i^0 - R_{ij} du_j du_i) d\Sigma = - \int_{\Sigma} du_i dS_i^0 d\Sigma. \quad (9.65)$$

Таким образом экстремальный принцип доказан.

В частном случае, когда

$$R_{ij}|_{\Sigma_S} = 0, \quad Q_{ij}|_{\Sigma_u} = 0, \quad \bar{u}_i|_{\Sigma_u} = u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0,$$

неравенство (9.65) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_S} d\bar{u}_i dS_i d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\epsilon}_{ij} d\Omega &\leq \\ &\leq \int_{\Sigma_S} du_i dS_i d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_S} dS_i du_i d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma \end{aligned}$$

и совпадает с выражением известного экстремального принципа, полученного с использованием традиционных граничных условий [285].

При рассмотрении кинематически допустимых полей, отличающихся бесконечно мало от действительного,

$$d\bar{\epsilon}_{ij} = d\epsilon_{ij} + \delta(d\epsilon_{ij}),$$

функционал \bar{W} принимает экстремальное значение при выполнении условия его стационарности по отношению к вариациям $\delta(d\epsilon_{ij})$, удовлетворяющим соотношениям Коши. В этом случае уравнение

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij} \delta(d\epsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Sigma} \delta(du_i) [dS_i^0 - R_{ij} du_j] d\Sigma = 0$$

выражает второй модифицированный вариационный принцип для упругопластических тел с возможными зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа.

Согласно сформулированным принципам,

$$W^* \geq W \geq \bar{W},$$

$$W = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} dS_i^0 - dS_i \right) du_i^0 d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(du_i - \frac{1}{2} du_i^0 \right) dS_i^0 d\Sigma,$$

что создает условия для получения верхней и нижней границ в приближенном решении краевых задач.

Глава 10

Устойчивое закритическое деформирование материалов в элементах конструкций

Обеспечение условий реализации закритического деформирования элементов конструкций и сооружений является средством использования резервов несущей способности и повышения их живучести — способности оказывать сопротивление внешним нагрузкам на стадии формирования и роста системы трещин или разрушения части элементов конструкций [24, 57, 251]. Конструкция должна быть спроектирована таким образом, чтобы обеспечивалась необходимая для сдерживания процесса накопления повреждений жесткость системы нагружения тех участков, где максимальна концентрация напряжений от внешней нагрузки. Это достигается путем выбора допустимых в смысле жесткости граничных условий и геометрических параметров данного несущего элемента [55].

В настоящей главе рассмотрены наиболее простые элементы конструкций, допускающие аналитическое решение нелинейной краевой задачи. Иллюстрируя закономерности устойчивого закритического деформирования материала в ослабленных зонах, полученные решения, кроме того, являются основой методического обеспечения некоторых экспериментальных исследований. Рассмотрены вопросы численного решения задач механики закритического деформирования и разрушения в более общих случаях. Часть результатов отражена также в работах [47, 49, 51, 311].

10.1. Закритическое деформирование материалов при испытаниях на одноосное растяжение

Квазистатический опыт на растяжение является одним из наиболее распространенных методов механических испытаний. Именно применительно к этому способу испытаний относится основанный на многочисленных экспериментах вывод о существенной роли жесткости нагружающего устройства [75, 89, 90, 107, 150, 301].

Поскольку испытательная машина воспринимает точно ту же нагрузку, что и образец, то естественно, что указанная нагрузка вызывает не только удлинение образца, но и некоторую упругую деформа-

дию станины, зажимов и других частей машины. Чем больше эта деформация, тем податливее испытательная машина. С этой точки зрения растягиваемый образец и нагружающее устройство могут быть рассмотрены как соединенные последовательно упругие элементы разной жесткости. Жесткость испытательной машины может быть выражена отношением нагрузки к перемещению захвата, обусловленному деформациями всех частей машины [280].

По данным [164] обычные испытательные машины имеют жесткость порядка 54 МН/м, для прессы Гагарина указанная характеристика — 55 МН/м, для разрывной машины Р-5 — 15 МН/м [280]. В работе [153] отмечено, что жесткость существующих испытательных машин составляет 0,01–0,2 от жесткости стального образца диаметром 10 мм и расчетной длиной 50 мм, т.е. порядка $3 \div 63$ МН/м. Жесткость специально сконструированных машин может достигать 165 МН/м [153].

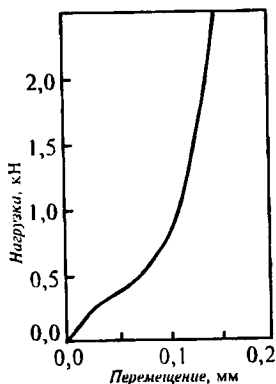


Рис. 10.1. Характеристика жесткости испытательной машины Инстрон-1195

Авторами в результате проведенных экспериментов была получена характеристика жесткости испытательной машины Инстрон-1195, приведенная на рис. 10.1. Характеристика представляет собой зависимость нагрузки от регистрируемого датчиком перемещения, связанного с деформацией рабочих элементов машины. Опыты проводились на сжатие при отсутствии образцов, т.е. при непосредственном контакте сжимающих поверхностей. Установлено, что жесткость испытательной машины Инстрон-1195 зависит от рабочих нагрузок и увеличивается от $6 \div 8$ МН/м при нагрузках, меньших 500 Н, до 57 МН/м при нагрузках 2000 Н и более.

С целью анализа условий реализации закритической стадии деформирования в опыте рассмотрим одноосно растягиваемый на испытательной машине с жесткостью R_M стержень длиной l с поперечным сечением F , изготовленный, например, из однонаправленно армированного волокнистого композиционного материала. Пусть данный образец имеет ослабленную центральную по длине зону l' с сечением площадью $F' < F$. Жестко закрепив один конец стержня по торцевой поверхности, на противоположной поверхности, также ортогональной оси стержня oz_1 , зададим граничные условия в виде (6.50) с коэффициентом жесткости $R_{11} = R_M/F$ при $S_1^0 \neq 0$ и $S^0 = S_1^0 F$:

$$S(t) = S^0(t) - R_M u(t). \quad (10.1)$$

Будем считать напряженное состояние стержня одноосным. Пусть в рассматриваемый момент времени t квазистатического процесса нагружения свойства основного объема стержня $F(l - l')$ характери-

зуются модулем упругости или упрочнения $E = d\sigma/d\varepsilon$, а в закритически деформируемой зоне объемом $F'l'$ модулем разупрочнения $D = -d\sigma'/d\varepsilon' > 0$ (штрихом помечены напряжения и деформации в данной области).

Согласно условию устойчивости закритического деформирования в ослабленной зоне (9.33), должно выполняться и неравенство

$$EF(l-l')\delta\varepsilon\delta\varepsilon + R_M\delta u\delta u > DF'l'\delta\varepsilon'\delta\varepsilon'. \quad (10.2)$$

Из уравнения статического равновесия между стержнем и нагружающим устройством, а также условия совместности деформаций в форме $\delta u = l'\delta\varepsilon' + (l-l')\delta\varepsilon$ следует, что

$$\delta u = -\frac{EF}{R_M}\delta\varepsilon, \quad \delta\varepsilon' = -\frac{EF + R_M(l-l')}{R_M l'}\delta\varepsilon. \quad (10.3)$$

Пусть $Q_M = R_M^{-1}$ — податливость нагружающего устройства, $Q_c = (l-l')/(EF)$ — податливость стержня (основного объема), $Q_0 = l'/(DF')$ — податливость закритически деформируемой области. Тогда в результате подстановки (10.3) в неравенство (10.2) и последующих преобразований получим необходимое условие реализации закритической стадии деформирования в опыте на одноосное растяжение в виде

$$Q_0 > Q_c + Q_M. \quad (10.4)$$

Полученное условие согласуется с известным фактом необходимости достаточной жесткости испытательной машины для регистрации ниспадающей ветви в эксперименте. Однако, как видим, даже при использовании машин очень большой жесткости может оказаться невозможным построение полных диаграмм деформирования, что зависит от конфигурации испытательных образцов. Это связано с тем, что по отношению к ослабленной зоне основной объем стержня, или образца, является также частью нагружающей системы, включающей, кроме того, нагружающее устройство. При правильном же подборе формы и размеров образца с учетом свойств испытательной машины частичная (до момента нарушения полученного неравенства вследствие возрастания $D(\varepsilon)$) или полная реализация закритической стадии деформирования вполне осуществима (при отсутствии в силу структурной неоднородности материала механизма локализационной формы потери устойчивости).

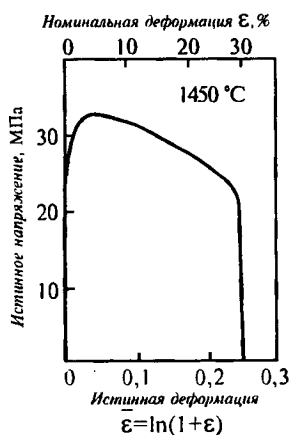


Рис. 10.2. Результаты одноосного растяжения образца из циркониевой керамики

Таким образом, существует принципиальная возможность регистрации ниспадающей ветви на диаграмме деформирования в опыте на одноосное растяжение вследствие присущего материалу свойства разупрочнения. В качестве примера этой возможности рассмотрим рис. 10.2. Закритическая стадия деформирования, сопровождаемая 30 %-ным снижением истинных напряжений, была зарегистрирована в опытах на высокотемпературное одноосное растяжение образцов из циркониевой керамики [376].

Обратим внимание на то, что из полученного неравенства следует требование положительности некоторой обобщенной характеристики жесткости $\tilde{R} = (Q_c - Q_0)^{-1} + Q_M^{-1}$, входящей в уравнение $dS^0 = \tilde{R}du$. Данный вывод согласуется с отмеченным в § 7.2 необходимым условием равновесного накопления повреждений в виде требования положительной определенности обобщенной матрицы жесткости, устанавливающей связь между реальными перемещениями и номинально заданными усилиями на границе деформируемого тела.

Обозначив через $R = (Q_c + Q_M)^{-1}$ жесткость всей нагружающей системы и задав условия на границе ослабленной зоны в виде

$$dS = dS^0 - Rdu \quad \text{или} \quad du = du^0 - QdS, \quad (10.5)$$

где $Q = R^{-1}$, определим пути деформирования поврежденного материала при номинально осуществляемых нагружении и разгрузке, т.е. при увеличении или уменьшении величин S^0 и u^0 . Приращения действительных значений удлинения u и усилия S в случае упругой разгрузки находятся из соотношений

$$du = (R_E + R)^{-1}dS^0, \quad dS = (R_E^{-1} + R^{-1})^{-1}du^0, \quad R_E = EF'/l', \quad (10.6)$$

а в случае закритической деформации из соотношений

$$du = (-R_D + R)^{-1}dS^0, \quad dS = (-R_D^{-1} + R^{-1})^{-1}du^0, \quad R_D = Q_0^{-1}. \quad (10.7)$$

Анализ последних уравнений также приводит к выводу о том, что при номинальном нагружении ($dS^0 > 0$, $du^0 > 0$) закритическая деформация осуществляется только при достаточной жесткости нагружающей системы, когда $R > R_D$, что согласуется с полученными ранее результатами. В противном случае происходит динамическое разрушение. Кроме того, равновесное деформирование при номинальном нагружении невозможно, если $D(\epsilon) < 0$, что соответствует ниспадающей ветви с отрицательной крутизной.

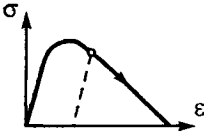
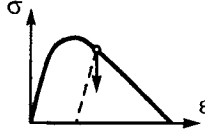
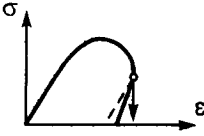


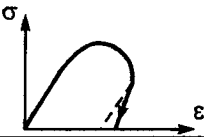
При номинально осуществляемой разгрузке ($dS^0 < 0$, $du^0 < 0$) упругая разгрузка материала в ослабленной зоне статически возможна при любой жесткости нагружающей системы. Однако если $R < R_D$, то закритическая деформация при $D(\epsilon) > 0$ не только возможна, но и энергетически более выгодна, поскольку приводит к большему снижению напряжений и, как следствие, освобождению упругой энергии:

$$(-R_D^{-1} + R^{-1})^{-1} > (R_E^{-1} + R^{-1})^{-1}.$$

Для материала с отрицательным модулем разупрочнения за критическая деформация также энергетически более выгодна, чем упругая разгрузка, поскольку $-R_D > R_E$. Характер изменения состояний поврежденного материала в зависимости от жесткости нагружающей системы отражен в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Пути деформирования поврежденного материала при номинально осуществляемых нагружении и разгрузке

Номинальное нагружение: $dS^0 > 0, du^0 > 0$		
$D > 0$		$D < 0$
$R > R_D$	$R < R_D$	Динамическое разрушение
Закритическая деформация: $d\sigma < 0, d\varepsilon > 0$	Динамическое разрушение	
		
Номинальная разгрузка: $dS^0 < 0, du^0 < 0$		
$D > 0$		$D < 0$
$R > R_D$	$R < R_D$	Закритическая деформация: $d\sigma < 0, d\varepsilon < 0$
Упругая разгрузка: $d\sigma < 0, d\varepsilon < 0$	Закритическая деформация: $d\sigma < 0, d\varepsilon > 0$	
		

Примером конструкционного использования элементов, работающих на растяжение — сжатие, является создание несущих стержневых систем. Проведенные исследования позволили заключить, что резерв несущей способности стержневой конструкции, связанный с осуществлением за критической деформации отдельных элементов, при определенных параметрах системы может быть значителен [47]. Это свидетельствует о целесообразности оптимального проектирования конструкций на базе моделей за критического деформирования и условий устойчивости.

10.2. Устойчивость закритического деформирования в опытах на изгиб. Высокотемпературные испытания циркониевой керамики

С точки зрения создания условий, при которых конструктивная жесткость образца много меньше жесткости испытательной машины, испытания на изгиб являются предпочтительными. Однако особенностью этих испытаний является существенно неоднородное распределение напряжений в объеме образца, что осложняет расшифровку опытных данных, заключающуюся в построении диаграммы деформирования для материала.

Нелинейный характер диаграммы сила — перемещение точки приложения нагрузки при трехточечном изгибе является показателем того, что в наиболее нагруженной центральной зоне образца имеет место необратимое накопление повреждений. Наибольшее отклонение от пропорциональной зависимости сила — перемещение при упруго-пластическом изгибе возникает, если материал образца не обладает пластическим упрочнением. В этом случае, как показывают расчеты, разрушающая нагрузка должна быть на 50 % больше, чем усилие, при котором в теле возникли пластические деформации, а на диаграмме — отклонение от линейности. Меньшая степень прироста нагрузки и, в особенности, наличие горизонтального или ниспадающего участков на диаграмме для образца свидетельствуют о закритической деформации в ослабленной зоне балки.

Высокотемпературные испытания ($T = 1600^\circ\text{C}$) на трехточечный изгиб были проведены на образцах из циркониевой керамики с химическим составом $\text{ZrO}_2\text{-Y}_2\text{O}_3\text{-Al}_2\text{O}_3$. Изучение механизмов псевдопластического поведения конструкционных керамик привлекает внимание в связи с актуальной технологической проблемой создания сверхпластических керамик и определения режимов температурно-силового нагружения, в которых реализуется указанное свойство этих традиционно считаемых хрупкими материалов.

Жесткости испытательной машины оказалось достаточно, для того чтобы при испытании образца шириной $b = 5,4$ мм и высотой $2h = 3,7$ мм при расстоянии между опорами $l = 23,8$ мм и скорости нагружения $0,16$ мм/мин получить, практически, полную равновесную с ниспадающей ветвью диаграмму усилие — прогиб, приведенную на рис. 10.3. На закритической стадии была осуществлена разгрузка со скоростью перемещения захватов $0,34$ мм/мин и повторное нагружение.

С целью аналитического описания закритического деформирования, являющегося частью методического обеспечения подобного рода экспериментов, воспользуемся известными гипотезами теорий упругого и упругопластического изгиба. Будем полагать, что поперечные

сечения стержней остаются плоскими и нормальными к линии центров тяжести сечений (кинематическая гипотеза), и все компоненты напряжений пренебрежимо малы по сравнению с нормальным напряжением в этих сечениях (статическая гипотеза) [122]. В рамках этих предположений задача о чистом изгибе балки с линейным разупрочнением была решена авторами одной из первых работ по механике закрытого деформирования [96].

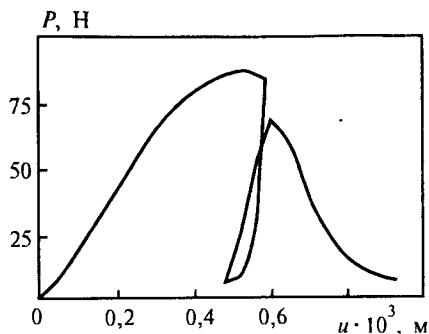


Рис. 10.3. Результаты испытаний образца из циркониевой керамики на трехточечный изгиб с разгрузкой

Отмечая особую для исследуемого класса механических процессов важность жесткости нагружающей системы, рассмотрим решение упомянутой задачи в случае, когда действующий изгибающий момент задается выражением

$$M_x = M_x^0 - \theta/\rho, \quad (10.8)$$

где M_x^0 — номинально задаваемое значение изгибающего момента, ρ — радиус кривизны нейтральной линии, θ — жесткость нагружающей системы при изгибе. Кроме того, рассмотрим вопрос об устойчивости процесса закрытой деформации балки при изгибе.

Пусть в условиях одноосного напряженного состояния для каждой частицы материала связь между напряжениями и деформациями задается соотношениями

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \sigma_T + E'(\varepsilon - \varepsilon_T), & \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ D(\varepsilon_p - \varepsilon), & \varepsilon_B < \varepsilon < \varepsilon_p; \\ 0, & \varepsilon \geq \varepsilon_p. \end{cases} \quad (10.9)$$

Приведенные соотношения обеспечивают проиллюстрированную на рис. 10.4 трехзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования: E , E' , D — модули упругости, упрочнения и разупрочнения, σ_T , ε_T — предел текучести и соответствующая деформация, ε_B — деформация при достижении предельных напряжений (наивысшей точки на диаграмме), ε_p — деформация полного разрушения.

Пусть поперечное сечение балки имеет две оси симметрии, причем изгибающий момент лежит в одной из них. Из условия равенства между внутренними и внешними силами в каждом сечении стержня следует равенство

$$M_x = 2 \int_0^h \sigma_z b(y) y dy = 2 \frac{E}{\rho} \int_0^{h_T} b(y) y^2 dy + 2(\sigma_T - E' \epsilon_T) \int_{h_T}^{h_B} b(y) y dy +$$

$$+ 2 \frac{E'}{\rho} \int_{h_T}^{h_B} b(y) y^2 dy + 2 D \epsilon_p \int_{h_B}^{h_p} b(y) y dy - 2 \frac{D}{\rho} \int_{h_B}^{h_p} b(y) y^2 dy. \quad (10.10)$$

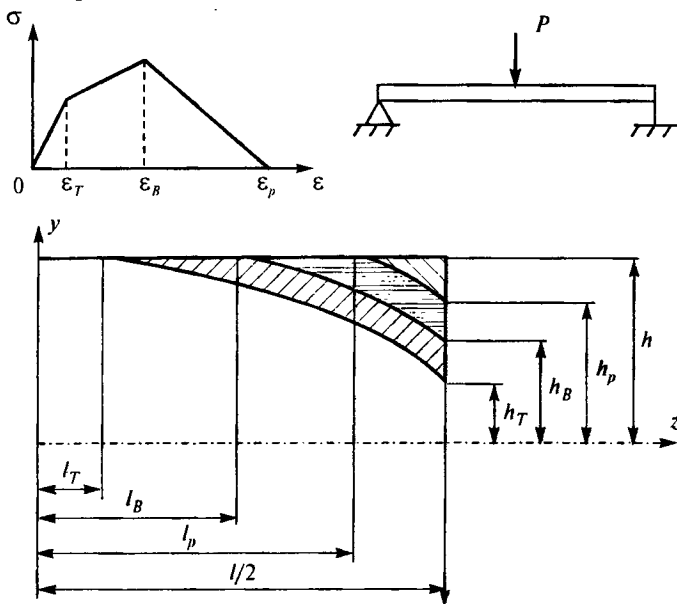


Рис. 10.4. Диаграмма растяжения материала, схема нагружения образца и расчетные конфигурации зон разрушения, упругого, пластического и закритического деформирования

При записи последнего соотношения использованы обозначения:

$$h_T = \begin{cases} \rho \epsilon_T, & \rho \epsilon_T < h, \\ h, & \rho \epsilon_T \geq h, \end{cases} \quad h_B = \begin{cases} \rho \epsilon_B, & \rho \epsilon_B < h, \\ h, & \rho \epsilon_B \geq h, \end{cases} \quad (10.11)$$

$$h_p = \begin{cases} \rho \epsilon_p, & \rho \epsilon_p < h, \\ h, & \rho \epsilon_p \geq h, \end{cases}$$

где h — половина высоты сечения балки, h_T , h_B и h_p — расстояния от нейтральной оси до границ соответственно упругой, пластической зон

и зоны закритической деформации. В области $h_p < y \leq h$ в случае устойчивого деформирования имеет место полностью разрушенный материал с нулевым сопротивлением внешним нагрузкам.

Применительно к балке прямоугольного поперечного сечения уравнение равновесия, как это следует из (10.10), имеет следующий вид:

$$M_x = \frac{2}{3} \frac{E}{\rho} b h_T^3 + b \varepsilon_T (E - E') (h_B^2 - h_T^2) + \frac{2}{3} \frac{E'}{\rho} b (h_B^3 - h_T^3) + b \varepsilon_p D (h_p^2 - h_B^2) - \frac{2}{3} \frac{D}{\rho} b (h_p^3 - h_B^3). \quad (10.12)$$

На стадиях упругого ($h_T = h_B = h_p = h$) и упругопластического деформирования ($h_T = \rho \varepsilon_T$, $h_B = h_p = h$) уравнение (10.12) после очевидных преобразований совпадает с известными решениями. Получим далее соотношения, позволяющие определить положение границ зоны закритической деформации и распределение напряжений в сечении балки, на следующих стадиях деформирования.

1. *Стадия начальной закритической деформации.* Пусть указанная стадия характеризуется тем, что $\varepsilon_B < h/\rho < \varepsilon_p$, а значит, $h_T = \rho \varepsilon_T$, $h_B = \rho \varepsilon_B$, $h_p = h$. После преобразований из уравнения (10.12) следует

$$M_x = A h_B^2 + B - \frac{C}{h_B},$$

$$A = b \varepsilon_T (E - E') \left(1 - \frac{\lambda^2}{3}\right) + \frac{2}{3} b \varepsilon_B (E' + D) - b \varepsilon_p D, \quad (10.13)$$

$$B = b \varepsilon_p D h^2, \quad C = \frac{2}{3} b \varepsilon_B D h^3, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_B}, \quad h_T = \lambda h_B.$$

Полученное уравнение относительно неизвестной величины h_B с использованием равенства (10.8), являющегося в данном случае аналогом граничных условий, можно представить в виде уравнения относительно неизвестной ρ

$$M_x^0 = A \varepsilon_B^2 \rho^2 + B + (\theta - C/\varepsilon_B)/\rho. \quad (10.14)$$

Такое представление удобно для получения условия устойчивости процесса закритического деформирования, которое наиболее наглядным образом задается неравенством $dM_x^0/d\rho < 0$ и, следовательно,

$$\theta > \frac{2A h_B^3 + C}{\varepsilon_B}. \quad (10.15)$$

2. *Стадия закритической деформации и разрушения.* Данная стадия характеризуется тем, что $h/\rho > \varepsilon_p$, а следовательно, $h_T = \rho \varepsilon_T$,

$h_B = \rho \varepsilon_B$, $h_p = \rho \varepsilon_p$. Уравнение (10.12) в данном случае преобразуется к виду

$$M_x = bh_B^2 \left[\varepsilon_T (E - E') \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) + \frac{2}{3} \varepsilon_B (E' + D) - \varepsilon_p D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) \right],$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_B}, \quad h_p = \mu h_B. \quad (10.16)$$

Относительно неизвестной величины ρ имеем следующее уравнение:

$$M_x^0 = \left[\varepsilon_T (E - E') \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) + \frac{2}{3} \varepsilon_B (E' + D) - \varepsilon_p D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) \right] d\varepsilon_B^2 \rho^2 + \frac{\theta}{\rho}. \quad (10.17)$$

Условие устойчивости процесса закритической деформации на данной стадии имеет вид

$$\theta > \left[\varepsilon_T (E - E') \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) + \frac{2}{3} \varepsilon_B (E' + D) - \varepsilon_p D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) \right] \frac{2bh_B^3}{\varepsilon_B}. \quad (10.18)$$

Далее получим формулы, необходимые для расчета конфигураций зоны разрушения и зон упругого, пластического и закритического деформирования при трехточечном изгибе. В этом случае соотношение (10.12) также справедливо. Очевидно, что изгибающий момент является линейной функцией координаты z . Рассмотрим последовательно все указанные на рис. 10.4 участки изгибаемой балки.

А. Участок упругого деформирования ($z \leq l_T$). Процесс упругого деформирования описывается известными формулами. Поскольку при $z = l_T$ $h\rho^{-1} = \varepsilon_T$, то протяженность указанного участка

$$l_T = \frac{4 E b h^2 \varepsilon_T}{3 P}. \quad (10.19)$$

В. Участок пластического деформирования ($l_T < z \leq l_B$). Пластическое деформирование начинается, когда $l_T = l/2$ при нагрузке $P = (8/3) E b h^2 \varepsilon_T / l$. Уравнение, связывающее усилие и кривизну в зависимости от координаты сечения, имеет вид

$$\frac{Pz}{2} = b \varepsilon_T (E - E') \left(h^2 - \frac{1}{3} \rho^2 \varepsilon_T^2 \right) + \frac{2}{3} \frac{E'}{\rho} b h^3 \quad (10.20)$$

и при подстановке $\rho = h_T / \varepsilon_T$ устанавливает зависимость $h_T(z)$. Поскольку при $z = l_B$ $h\rho^{-1} = \varepsilon_B$, то

$$l_B = \frac{2b\varepsilon_B h^2}{P} \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') + \frac{2}{3} E' \right]. \quad (10.21)$$

С. Участок закрытого деформирования ($l_B < z \leq l_p$). Распространение зоны закрытой деформации начинается, когда $l_B = = l/2$ при нагрузке

$$P = \frac{4b\epsilon_B h^2}{l} \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') + \frac{2}{3} E' \right]. \quad (10.22)$$

Уравнение, связывающее усилие и кривизну, имеет вид

$$\frac{Pz}{2} = b \left\{ \epsilon_p D h^2 - \frac{2 D h^3}{3 \rho} + \right. \\ \left. + \epsilon_B^3 \rho^2 \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') + \frac{2}{3} (E' + D) - \mu D \right] \right\} \quad (10.23)$$

и при подстановке $\rho = h_B / \epsilon_B$ устанавливает зависимость $h_B(z)$. Поскольку при $z = l_p$ $h\rho^{-1} = \epsilon_p$, то

$$l_p = \frac{2b\epsilon_B h^2}{\mu^2 P} \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') - \mu D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) + \frac{2}{3} (E' + D) \right]. \quad (10.24)$$

Д. Участок разрушения ($l_p < z < l/2$). Зона разрушенного после закрытой деформации материала возникает при $l_p = l/2$ и нагрузке

$$P = \frac{4bh^2\epsilon_B}{\mu^2 l} \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') - \mu D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) + \frac{2}{3} (E' + D) \right]. \quad (10.25)$$

Как следует из (10.12), процесс деформации описывается уравнением

$$\frac{Pz}{2} = b\rho^2\epsilon_B^3 \left[\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) (E - E') - \mu D \left(1 - \frac{\mu^2}{3} \right) + \frac{2}{3} (E' + D) \right], \quad (10.26)$$

которое с учетом того, что $h_B = \rho\epsilon_B$ определяет зависимость $h_B(z)$. На рассматриваемом участке границы раздела областей упругой, пластической, закрытой деформации, а также зоны разрушения имеют форму парабол. Сопоставляя уравнения (10.24) и (10.26), получим формулы

$$h_{T \min} = \frac{\lambda h}{\mu} \sqrt{\frac{l}{2l_p}}, \quad h_{B \min} = \frac{h}{\mu} \sqrt{\frac{l}{2l_p}}, \quad h_{p \min} = h \sqrt{\frac{l}{2l_p}}, \quad (10.27)$$

позволяющие вычислить минимальные (при $z = l/2$) расстояния от границ указанных областей до нейтральной линии балки.

10.3. Закритическое деформирование толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления

Уточненный расчет конструкций с использованием полных диаграмм деформирования сопряжен с трудностями решения новых нелинейных краевых задач. Ниже будет изложено обобщение известного аналитического решения задачи Ламе на случай, когда полная диаграмма деформирования материала допускает кусочно-линейную аппроксимацию.

Рассмотрим длинный толстостенный цилиндр внутреннего a и наружного b радиусов под действием внутреннего давления p . Для изотропного материала цилиндра на стадии упругого деформирования при плоской деформации в полярных координатах

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}], \quad (10.28)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{1-2\nu} [\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}], \quad (10.29)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. На стадии устойчивого закритического деформирования определяющие соотношения представим в виде

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^c - \frac{2DG}{1-2\nu} [(1-\nu)(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^c) + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^c)], \quad (10.30)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^c - \frac{2DG}{1-2\nu} [\nu(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^c) + (1-\nu)(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^c)]. \quad (10.31)$$

Верхним индексом отмечены напряжения и деформации, соответствующие критическому состоянию, когда интенсивность напряжений

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2} \quad (10.32)$$

достигает предельного значения σ_{uB} , DG — модуль сдвига на участке разупрочнения. Перемещения u , напряжения и деформации, а также σ_{rr}^c , $\sigma_{\theta\theta}^c$, ε_{rr}^c и $\varepsilon_{\theta\theta}^c$, являются функциями радиуса r . Напряжения, деформации и перемещения удовлетворяют уравнениям

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}. \quad (10.33)$$

С целью учета жесткости R нагружающей системы, которая в данном случае включает устройство, создающее давление, и рабочую жидкость или газ, граничные условия представим в следующем виде:

$$p = p_0 - Ru_a, \quad (10.34)$$

где p_0 — расчетное давление без учета смещения u_a точек внутренней поверхности цилиндра. Например, в случае отсутствия подкачки (насоса) жесткость нагружающей системы можно вычислить по формуле

$$R = 2K_{ж}/a, \quad (10.35)$$

где $K_{ж}$ — модуль объемного сжатия рабочей жидкости (для воздуха — 0,1 МПа, для воды — 2229,2 МПа [70]).

Если бы цилиндр являлся составным, а нагружение осуществлялось бы не зависящим от деформации внутренним давлением p' и передавалось упругим цилиндром с внутренним радиусом a_0 и внешним — a , изготовленным из изотропного упругого материала с модулем Юнга E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 , то условия нагружения исследуемого тела принципиально не изменились бы:

$$p = \frac{2a_0^2}{a_0^2 + a^2 - \nu_0(a^2 - a_0^2)} p' - Ru_a, \quad R = \frac{E_0(a^2 - a_0^2)}{a[a_0^2 + a^2 - \nu_0(a^2 - a_0^2)]}.$$

Как видим, в этом случае жесткость нагружающей системы полностью определялась бы геометрией и свойствами внутреннего цилиндра.

Из известного решения задачи Ламе [94] следует, что критическое состояние материала возникает прежде всего на внутренней поверхности цилиндра при давлении

$$p_a = p|_{r=a} = \frac{\sigma_{uB}(b^2 - a^2)}{\sqrt{3b^4 + a^4(1 - 2\nu)^2}}. \quad (10.36)$$

Поскольку между зонами закритически деформированного и упругого материалов $\sigma_u = \sigma_{uB}$ (σ_{uB} — предел прочности), то соответствующие напряжения и деформации на границе

$$\sigma_{rr}^c = \sigma_{uB} H^{-1/2}(r^2 - b^2), \quad \sigma_{\theta\theta}^c = \sigma_{uB} H^{-1/2}(r^2 + b^2), \quad (10.37)$$

$$\epsilon_{rr}^c = \sigma_{uB} \frac{r^2(1 - 2\nu) - b^2}{2G\sqrt{H}}, \quad \epsilon_{\theta\theta}^c = \sigma_{uB} \frac{r^2(1 - 2\nu) + b^2}{2G\sqrt{H}}, \quad (10.38)$$

$$H = 3b^4 + (1 - 2\nu)^2 r^4.$$

В этом случае r означает радиус границы.

Распределение напряжений в упругой части цилиндра внутреннего радиуса c ($c \leq r \leq b$) описывается известными формулами. Исходя из условий стыковки двух зон, следует принять давление на границе $p_c = -\sigma_{rr}^c|_{r=c}$.

Для закритически деформированной части цилиндра совместное рассмотрение соотношений (10.30), (10.31) и (10.33) приводит к неод-

порядному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \Phi(r), \quad \Phi = \frac{3\sigma_{uB} b^4 (1-2\nu)(G+D_G)(r^2-b^2)}{rGD_G(1-\nu)H^{3/2}}. \quad (10.39)$$

Интегрируя данное уравнение методом вариации постоянных, получим его общее решение в виде

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{r}{2} \int \Phi(r) dr - \frac{1}{2r} \int r^2 \Phi(r) dr, \quad (10.40)$$

а после взятия интегралов —

$$\varepsilon_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + N_1 \left[\frac{H}{(1-2\nu)r^2} + \frac{(1-2\nu)\sqrt{H}}{\sqrt{3}} \ln N_2 \right], \quad (10.41)$$

$$\varepsilon_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + N_1 \left[(1-2\nu)(r^2 - 2b^2) - \frac{3b^4}{(1-2\nu)r^2} + \frac{(1-2\nu)\sqrt{H}}{\sqrt{3}} \ln N_2 \right], \quad (10.42)$$

$$N_1 = \frac{\sigma_{uB}(G+D_G)}{4GD_G\sqrt{H}(1-\nu)}, \quad N_2 = \frac{\sqrt{3}b^2 + \sqrt{H}}{(1-2\nu)r^2}.$$

В этом случае, как следует из (10.30), (10.31), (10.37), (10.38), (10.41) и (10.42), распределение напряжений описывается соотношениями

$$\sigma_{rr} = C'_1 - \frac{C'_2}{r^2} + 2D_G N_1 \left[\frac{H}{(1-2\nu)r^2} - \sqrt{\frac{H}{3}} \ln N_2 \right], \quad (10.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C'_1 + \frac{C'_2}{r^2} + 2D_G N_1 \left[2b^2 + r^2(1-2\nu) - \frac{3b^4}{(1-2\nu)r^2} - \sqrt{\frac{H}{3}} \ln N_2 \right], \quad (10.44)$$

$$C'_1 = -\frac{2D_G}{1-2\nu} C_1, \quad C'_2 = -2D_G C_2.$$

Граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{r=c} = \sigma_{rr}^c, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{r=c} = \sigma_{\theta\theta}^c, \quad (\sigma_{rr} - Ru)|_{r=a} = -p_0 \quad (10.45)$$

позволяют определить константы C'_1 и C'_2 , а также связать размер зоны закритического деформирования с номинальным давлением p_0 :

$$C'_1 = 2D_G N_{1c} \left[\frac{c^2(G - D_G + 2\nu D_G)}{G + D_G} - b^2 + \sqrt{\frac{H_c}{3}} \ln N_{2c} \right], \quad (10.46)$$

$$C_2' = 2D_G N_{1c} \left[\frac{c^2 b^2 (G - D_G - 2\nu G)}{G + D_G} + \frac{3b^4}{1 - 2\nu} \right], \quad (10.47)$$

$$p_0 = 2D_G N_{1c} \left[\frac{c^2 b^2 F_2 (G - D_G - 2\nu G) - a^2 c^2 F_1 (G - D_G + 2\nu D_G)}{(G + D_G) a^2} + \frac{F_2 (3b^4 - \sqrt{H_a H_c})}{a^2 (1 - 2\nu)} + b^2 F_1 + F_1 \sqrt{\frac{H_c}{3}} \ln \frac{N_{2a}}{N_{2c}} \right]. \quad (10.48)$$

При записи последних соотношений использованы следующие обозначения:

$$N_{1c} = N_1|_{r=c}, \quad N_{2c} = N_2|_{r=c}, \quad N_{2a} = N_2|_{r=a}, \quad H_a = H|_{r=a},$$

$$H_c = H|_{r=c}, \quad F_1 = 1 + (1 - 2\nu) \frac{aR}{2D_G}, \quad F_2 = 1 - \frac{aR}{2D_G}.$$

Номинальное давление, при котором начинается разрушение на внутренней поверхности цилиндра ($c = a$), равно

$$p_0^* = \frac{\sigma_{uB}}{2G\sqrt{H_a}} \{2G(b^2 - a^2) + aR[b^2 + a^2(1 - 2\nu)]\}. \quad (10.49)$$

В случае "мягкого" нагружения, что обычно предполагается при расчетах сосудов давления, $F_1 = F_2 = 1$. В пределе стремления D_G к $-G$, т.е. при моделировании упругого поведения цилиндра, из полученных соотношений следует решение известной задачи Ламе. В другом частном случае при стремлении D_G к нулю, коэффициента Пуассона ν к 0,5 и замене σ_{uB} на предел текучести σ_T получающиеся уравнения

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2 - b^2}{b^2} + 2 \ln \frac{r}{c} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2 + b^2}{b^2} + 2 \ln \frac{r}{c} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2}{b^2} + 2 \ln \frac{r}{c} \right), \quad p_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} + 2 \ln \frac{c}{a} \right), \quad (10.50)$$

$$a \leq r \leq c \leq b$$

описывают распределение напряжений в пределах пластической зоны с границей радиуса c при внутреннем давлении p_0 для цилиндра из идеально упругопластического материала. Из последних соотношений в свою очередь следует формула для определения предельного давления в полностью пластически деформированном цилиндре ($c = b$), совпадающая с соотношением, приведенным в [94].

Таким образом, получено решение краевой задачи для толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления с учетом жесткости нагружающей системы и ниспадающей ветви диаграммы деформирования материала. Непринципиальное с точки зрения получения решения допущение о неизменности коэффициента Пуассона в

процессе деформации было сделано с целью упрощения громоздких аналитических выражений и анализа результатов.

На рис. 10.5 приведены некоторые результаты расчета напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра при следующих данных: $a = 10$ мм, $b = 20$ мм, $\sigma_{uB} = 500$ МПа, $G = 2 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,3$, $D_G = 10^4$ МПа, $R = 0$.

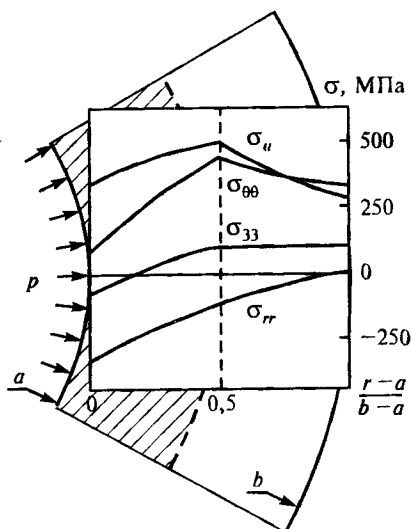


Рис. 10.5. Напряженное состояние толстостенного цилиндра при закритическом деформировании ($p = 326$ МПа)

Расчеты показали, что стабильная стадия разрушения, когда на внутренней поверхности интенсивность напряжений достигла предела прочности, началась при давлении $p_a = 216$ МПа.

10.4. Разрушение толстостенного цилиндра как потеря устойчивости процесса накопления повреждения

Потеря устойчивости накопления повреждений на заключительной стадии деформирования означает, что образование и рост трещин приобретает лавинообразный характер. Это проявляется в виде макроразрушения тела и происходит, как уже отмечалось, когда выделяющаяся вследствие разгрузки частей тела упругая энергия совместно с энергией, подводимой со стороны нагружающего устройства, начинают превышать энергетические потребности процесса трещинообразования. Расчеты подтвердили, что моменту потери устойчивости

может соответствовать любая точка на ниспадающей ветви в зависимости от характеристик среды в ослабленной зоне, доли ее в объеме деформируемого тела, жесткости основного объема в текущий момент, а кроме того, и нагружающей системы.

Реализация ниспадающей ветви диаграммы в процессе деформирования сопровождается выполнением условия

$$\frac{d\sigma_u}{dp_0} < 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma_u}{dc} \frac{dc}{dp_0} < 0, \quad (10.51)$$

которое с учетом того, что увеличение внешней нагрузки должно сопровождаться ростом зоны разрушения, можно представить в виде системы неравенств:

$$\frac{dp_0}{dc} > 0, \quad \frac{d\sigma_u}{dc} = \frac{\partial\sigma_u}{\partial\sigma_{rr}} \frac{d\sigma_{rr}}{dc} + \frac{\partial\sigma_u}{\partial\sigma_{\theta\theta}} \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{dc} + \frac{\partial\sigma_u}{\partial\sigma_{zz}} \frac{d\sigma_{zz}}{dc} < 0. \quad (10.52)$$

Как следует из (10.43), (10.44), (10.48) и (10.32), приведенная система условий устойчивости закритического деформирования в рассматриваемой задаче может быть записана следующим образом:

$$F_1 \frac{dC'_1}{dc} - \frac{F_2}{a^2} \frac{dC'_2}{dc} < 0, \quad (10.53)$$

$$(1 - 2\nu)^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \frac{dC'_1}{dc} - \frac{3}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \frac{dC'_2}{dc} < 0,$$

где

$$\frac{dC'_1}{dc} = \frac{\sigma_{uB}(G + D_G)}{2G(1 - \nu)} \left[\frac{G - D_G(1 - 2\nu)}{G + D_G} \frac{6cb^4}{H_c^{3/2}} + \frac{2b^2c^3(1 - 2\nu)^2}{H_c^{3/2}} + \frac{2(1 - 2\nu)^2c^3}{\sqrt{3}H_c(\sqrt{3}b^2 + \sqrt{H_c})} - \frac{2}{\sqrt{3}c} \right], \quad (10.54)$$

$$\frac{dC'_2}{dc} = \frac{\sigma_{uB}(G + D_G)}{2G(1 - \nu)} \left[\frac{G(1 - 2\nu) - D_G}{G + D_G} \frac{6cb^6}{H_c^{3/2}} - \frac{6b^4c^3(1 - 2\nu)}{H_c^{3/2}} \right]. \quad (10.55)$$

Нарушение условий (10.53) соответствует переходу от стабильной к нестабильной стадии разрушения, когда накопление повреждений приобретает лавинообразный характер. Этот процесс приводит к потере несущей способности конструкции. В рассмотренном численном примере устойчивое закритическое деформирование, соответствующее "движению" по ниспадающей ветви диаграммы точек, отражающих напряженно-деформированное состояние частиц материала в пределах зоны с ослабленными связями, продолжалось до тех пор, пока радиус внешней границы этой зоны не превысил $s_{lim} = 15$ мм, а давление величины $p_{lim} = 326$ МПа.

Как видим, резерв несущей способности, обнаруженный при уточненном расчете с использованием полной диаграммы деформирования, составляет в данном случае 51 %. Зависимость этой величины от относительной толщины цилиндра при $R = 0$ приведена на рис. 10.6.

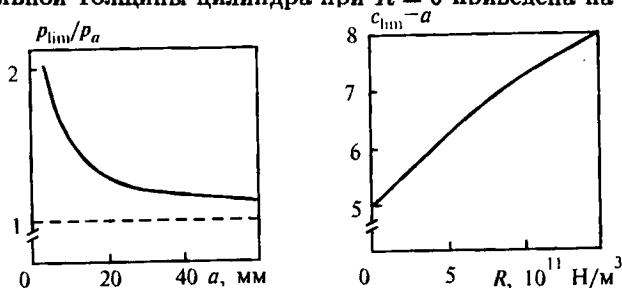


Рис. 10.6. Резерв несущей способности в зависимости от внутреннего радиуса цилиндра при заданной толщине

Рис. 10.7. Зависимость предельного размера зоны закритического деформирования от жесткости нагружающей системы

Ненулевая жесткость нагружающей системы способствует стабилизации процесса разрушения и увеличению предельного размера ослабленной зоны. График этой зависимости приведен на рис. 10.7.

Из полученного решения в пределе при устремлении внешнего радиуса к бесконечности следует решение для неограниченной области с цилиндрической полостью:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\sigma_{uB}}{2\sqrt{3}G(1-\nu)} \left[(G + D_G) \left(1 + \ln \frac{c^2}{r^2} \right) + (G - D_G - 2\nu G) \frac{c^2}{r^2} \right], \quad (10.56)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{uB}}{2\sqrt{3}G(1-\nu)} \left[(G + D_G) \left(1 - \ln \frac{c^2}{r^2} \right) + (G - D_G - 2\nu G) \frac{c^2}{r^2} \right], \quad (10.57)$$

$$p_0 = \frac{\sigma_{uB}}{2\sqrt{3}G(1-\nu)} \left[F_1(G + D_G) \left(1 + \ln \frac{c^2}{a^2} \right) + F_2(G - D_G - 2\nu G) \frac{c^2}{a^2} \right]. \quad (10.58)$$

Условия устойчивости в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{c}(G + D_G) + \frac{F_2 c}{a^2}(G - D_G - 2\nu G) > 0, \\ \frac{3(G - D_G - 2\nu G)c^2}{(1 - 2\nu)^2(G + D_G)^2 r^2} \left[G + D_G + (G - D_G - 2\nu G) \frac{c^2}{r^2} \right] + \ln \frac{c^2}{r^2} < 0. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Формулы (10.56)–(10.59) могут быть использованы, в частности, при анализе опасности напряженного состояния горных пород вокруг цилиндрической выработки или скважины под давлением [198].

10.5. Численные алгоритмы решения задач механики закритического деформирования

Для анализа краевых задач механики упругопластического деформирования разработаны итерационные методы, которые позволяют заменить решение системы нелинейных дифференциальных уравнений решением последовательности упругих задач с переменными параметрами, дополнительными напряжениями или дополнительными деформациями [22, 88, 102, 216]. Рассмотрим методы решения физически нелинейных задач для сред с произвольной анизотропией и вопрос улучшения сходимости итерационных процедур на закритической стадии деформирования.

Для среды с произвольной анизотропией связь напряжений и деформаций определим соотношениями

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{F}_{ij}(\varepsilon_{kl}). \quad (10.60)$$

Независимо от системы координат каждый инвариант тензора напряжений является функцией от инвариантов тензора деформаций:

$$j_{\sigma}^{(i)} = Y^{(i)}(j_{\varepsilon}^{(1)}, \dots, j_{\varepsilon}^{(l)}), \quad (10.61)$$

l — количество независимых инвариантов. Допустим, что существуют и обратные зависимости

$$j_{\varepsilon}^{(i)} = \tilde{Y}^{(i)}(j_{\sigma}^{(1)}, \dots, j_{\sigma}^{(l)}). \quad (10.62)$$

Рассмотрим следующую итерационную процедуру решения задач с нелинейными уравнениями (n — номер приближения):

$$j_{\sigma}^{(i)n+1} = \sum_{\alpha=1}^l K_{\alpha}^{(i)n} \left(j_{\varepsilon}^{(\alpha)n+1} - j_{\varepsilon}^{(\alpha)n} \right) + Y^{(i)} \left(j_{\varepsilon}^{(1)n}, \dots, j_{\varepsilon}^{(l)n} \right). \quad (10.63)$$

Коэффициенты $K_{\alpha}^{(i)n}$ могут быть найдены различными способами.

Пусть $K_{\alpha}^{(i)n}$ есть секущие модули $S_{\alpha}^{(i)n}$, связывающие в соответствии с определяющими соотношениями (10.61) текущие значения инвариантов напряжений и деформаций:

$$j_{\sigma}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^l S_{\alpha}^{(i)n} j_{\varepsilon}^{(\alpha)n}. \quad (10.64)$$

В этом случае итерационная процедура, заданная уравнением (10.63), сводится к следующей последовательности вычислений:

$$j_{\sigma}^{(i)n+1} = \sum_{\alpha=1}^l S_{\alpha}^{(i)n} j_{\epsilon}^{(\alpha)n+1}, \quad (10.65)$$

что соответствует методу переменных параметров упругости.

Если $K_{\alpha}^{(i)n}$ есть упругие модули $C_{\alpha}^{(i)}$, то итерационная процедура задается уравнением

$$j_{\sigma}^{(i)n+1} = \sum_{\alpha=1}^l C_{\alpha}^{(i)} j_{\epsilon}^{(\alpha)n+1} + j_{\sigma_0}^{(i)n}, \quad (10.66)$$

где

$$j_{\sigma_0}^{(i)n} = Y^{(i)} \left(j_{\epsilon}^{(1)n}, \dots, j_{\epsilon}^{(l)n} \right) - \sum_{\alpha=1}^l C_{\alpha}^{(i)} j_{\epsilon}^{(\alpha)n}. \quad (10.67)$$

Данная последовательность вычислений соответствует методу дополнительных напряжений (упругих решений).

Если представить уравнения (10.63) в виде

$$j_{\sigma}^{(i)n+1} = \sum_{\alpha=1}^l C_{\alpha}^{(i)} \left(j_{\epsilon}^{(\alpha)n+1} - j_{\epsilon_0}^{(\alpha)n} \right) \quad (10.68)$$

при

$$j_{\epsilon_0}^{(\alpha)n} = \tilde{Y}^{(\alpha)} \left(j_{\sigma}^{(1)n}, \dots, j_{\sigma}^{(l)n} \right) - j_{\epsilon}^{(\alpha)n}, \quad (10.69)$$

то представленная последовательность вычислений будет соответствовать методу дополнительных деформаций.

Уравнения (10.63) описывают также вычисления по методу Ньютона-Рафсона [88, 216] в случае, когда коэффициенты $K_{\alpha}^{(i)n}$ заменяются значениями производных функций $Y^{(i)}(j_{\epsilon}^{(1)}, \dots, j_{\epsilon}^{(l)})$, т.е. касательными модулями:

$$K_{\alpha}^{(i)n} = \left. \frac{\partial Y^{(i)}}{\partial j_{\epsilon}^{(\alpha)}} \right|_{j_{\epsilon}^{(\alpha)} = j_{\epsilon}^{(\alpha)n}}. \quad (10.70)$$

Сходимость итерационных процедур может быть улучшена с использованием метода последовательных нагружений. Суть этого метода заключается в следующем: внешняя нагрузка разбивается на ряд последовательных этапов нагружения, при этом задача решается для каждого этапа, и полученное решение используется в качестве начального приближения для следующего шага [216]. Очевидно, что совершенно аналогичным образом можно организовать ряд последовательных этапов деформирования.

Использование описанных методов является достаточно эффективным способом решения упругопластических задач. Метод переменных параметров упругости учитывает некоторое снижение жесткости среды в процессе деформации, что ускоряет сходимость. В то же время, достоинством методов дополнительных напряжений и деформаций является отсутствие необходимости корректировки матрицы жесткости при использовании, в частности, метода конечных элементов. Однако, как показали проведенные исследования, указанные методы являются гораздо менее эффективными, а в ряде случаев, и непригодными для решения задач механики закритического деформирования.

Проблема заключается в следующем. Поиск действительных значений инвариантов деформаций по полученным в очередном приближении значениям инвариантов напряжений в соответствии с методом дополнительных деформаций на стадии разупрочнения приводит к расхождению итерационной процедуры. Согласно же методу переменных параметров упругости, как и методу дополнительных напряжений, в каждом упругом решении положительному приращению инвариантов тензора деформаций соответствует положительное приращение инвариантов тензора напряжений, т.е. и на закритической стадии деформирования материал воспринимается как упрочняющийся, что не способствует сходимости.

Избежать возникающего противоречия позволяет использование итерационной процедуры (10.63) с коэффициентами (10.70). Вычисление касательных модулей в процессе итераций приводит к поиску решения в области более близкой к действительной диаграмме деформирования. Сохраняющийся при этом недостаток, связанный с необходимостью перестройки матрицы жесткости, в значительной степени устраняется с помощью следующего комбинированного метода.

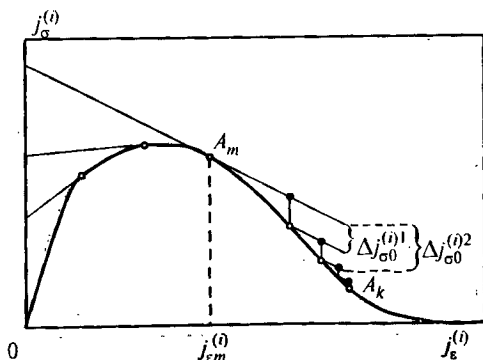


Рис. 10.8. Комбинация методов дополнительных напряжений и Ньютона-Рафсона в механике закритического деформирования

Пусть для каждого k -го шага по нагрузке определены числа m и M , связанные неравенством $m \leq k \leq M$, где m и M — номера ша-

гов, на которых производится корректировка касательных модулей. Тогда вычисления можно проводить по формуле (10.63) с заменой коэффициентов $K_\alpha^{(i)n}$ на

$$K_\alpha^{(i)m} = \left. \frac{\partial Y^{(i)}}{\partial j_\epsilon^{(\alpha)}} \right|_{j_\epsilon^{(\alpha)} = j_{\epsilon m}^{(\alpha)}}, \quad (10.71)$$

обозначив через $j_{\epsilon m}^{(\alpha)}$ значения инвариантов на шаге по нагрузке с номером m .

Данный метод является по сути вариантом метода дополнительных напряжений с корректируемыми на отдельных этапах решения касательными модулями. Схема решения задачи на закритической стадии деформирования показана на рис. 10.8. Рассмотренный метод является более эффективным и экономичным, однако, лишь в тех случаях, когда сходимость итерационных процедур не требует корректировки параметров на каждой итерации.

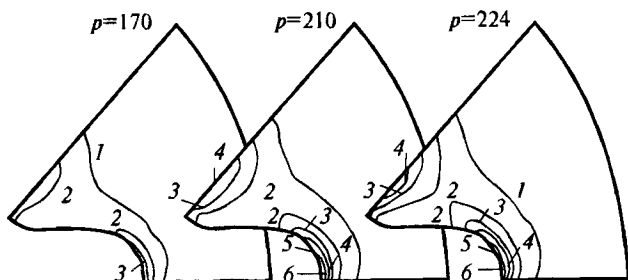


Рис. 10.9. Деформированное состояние исследуемой области при действии внутреннего давления p (МПа). Изолинии значений второго инварианта тензора деформаций: 1 — $8 \cdot 10^{-3}$, 2 — $1,6 \cdot 10^{-2}$, 3 — $2,4 \cdot 10^{-2}$, 4 — $3,1 \cdot 10^{-2}$, 5 — $3,7 \cdot 10^{-2}$, 6 — $4,3 \cdot 10^{-2}$

На рис. 10.9³ приведены результаты численного решения задачи об упругопластическом деформировании с разупрочнением цилиндрического тела из изотропного материала ($G = 5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,25$, $\bar{j}_\epsilon^{(2)} = 8 \cdot 10^{-3}$, $G' = 2 \cdot 10^3$ МПа) с центральной крестообразной цилиндрической полостью под действием нарастающего внутреннего давления. На рисунке изображена 1/8 симметричная часть исследуемой области. Деформируемое тело было помещено также в более жесткую ($G = 4 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,25$) упругую обойму, отношение толщины которой к внутреннему радиусу составляло 0,18. Свойства материала повреждаемого тела были подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие Адамара: деформирование на закритической стадии при $\bar{j}_\epsilon^{(2)} > 1,6 \cdot 10^{-2}$ определялось касательными модулями сдвига G' и объемного сжатия $K = -0,25 G'$.

³ Результаты получены при участии А.Н.Душко

10.6. Оценка устойчивости процесса разупрочнения при решении краевых задач методом конечных элементов

Большая часть прикладных задач решается с использованием численных методов и дискретизации расчетной области, в связи с этим рассмотрим особенности оценки устойчивости применительно к методу конечных элементов. В целом эта оценка осуществляется аналогично тому, как было получено условие (9.39).

В области дискретизации рассмотрим некоторый конечный элемент, представляя, что внутри него отсутствует материал. В этом случае перемещения узлов элемента $\{u\}$ сопровождаются возникновением усилий $\{S'\}$, что обусловлено жесткостью окружающей деформируемой среды, а также нагружающего устройства и характеризуется матрицей влияния $[V]$:

$$\{S'\} = -[V]\{u\}. \quad (10.72)$$

Заполним конечный элемент средой с произвольно заданными механическими характеристиками и жестко зафиксируем узлы элемента. Любое перемещение границ деформируемого тела будет сопровождаться возникновением в узлах рассматриваемого конечного элемента усилий $\{S^0\}$. Освобождение узлов приведет к их смещениям от первоначального положения и возникновению дополнительных усилий, обусловленных жесткостью нагружающей системы. Суммарные усилия в узлах:

$$\{S''\} = \{S^0\} - [V]\{u\}. \quad (10.73)$$

Предположим, что состояние материала в области конечного элемента соответствует закритической стадии деформирования, и в результате самопроизвольного (без увеличения внешней нагрузки) развития процесса разрушения произошло увеличение его деформаций $\{\delta\varepsilon\}$, повлекшее, естественно, смещение узлов $\{\delta u\}$. При этом, работа внешних сил, равная притоку энергии со стороны деформируемого тела в повреждающийся элемент, вычисляется по формуле

$$\Delta A_e = \left(\{S^0\}^T - \frac{1}{2} \{\delta u\}^T [V]^T \right) \{\delta u\}, \quad (10.74)$$

а работа деформации —

$$\Delta A_e = \left(\{\sigma^0\}^T - \frac{1}{2} \{\delta\varepsilon\}^T [D]^T \right) \{\delta\varepsilon\} \Omega, \quad (10.75)$$

где $[D]$ — матрица взятых со знаком "минус" касательных модулей в точке, соответствующей напряжениям $\{\sigma^0\}$ и деформациям $\{\varepsilon^0\}$, на

ниспадающей ветви диаграммы деформирования; Ω — объем конечного элемента. Очевидно, что последнее соотношение предполагает линейную аппроксимацию поля перемещений в пределах элемента.

Учитывая, что

$$\{\delta \epsilon\}^T = \{\delta u\}^T [B]^T, \quad \{S^0\}^T = \{\sigma^0\}^T [B] \Omega, \quad (10.76)$$

где $[B]$ — используемая в методе конечных элементов матрица связи деформаций с узловыми перемещениями, из сравнения (10.74) и (10.75) следует соответствующее устойчивому процессу неравенство:

$$\{\delta u\}^T [V]^T \{\delta u\} > \{\delta u\}^T [B]^T [D]^T [B] \{\delta u\} \Omega. \quad (10.77)$$

Поскольку матрицы $[V]$ и $[D]$ являются симметричными, а величина $[B]^T [D] [B] \Omega$ представляет собой матрицу жесткости конечного элемента на закритической стадии деформирования $[k]$, то неравенство (10.77) может быть упрощено:

$$\{\delta u\}^T [S] \{\delta u\} > 0, \quad (10.78)$$

где

$$[S] = [V] - [k]. \quad (10.79)$$

Таким образом, устойчивому закритическому деформированию соответствует положительная определенность квадратичной формы матрицы, для чего, как известно, необходима и достаточна положительность всех ее главных миноров [64].

Матрица $[V]$ может быть найдена путем исключения узловых неизвестных, не относящихся к узлам рассматриваемого конечного элемента, подобно тому, как это делается в методе суперэлементов [171]. Если занулить жесткость конечного элемента, для которого оценивается устойчивость процесса закритического деформирования, и представить глобальную матрицу жесткости в виде

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{bmatrix}, \quad (10.80)$$

пометив величины, относящиеся к исследуемому элементу двумя индексами s , то можно записать выражение для искомой матрицы влияния:

$$[V] = [K_{si}] [K_{ii}]^{-1} [K_{is}] - [K_{ss}], \quad (10.81)$$

которое по существу является матричной записью формул прямого хода метода исключения Гаусса.

10.7. Проблема прогнозирования катастрофичности разрушения

В случае выхода конструкции из строя в результате разрушения определенной части ее элементов, энергоемкость этого процесса может быть подсчитана. Это осуществимо с учетом того, что полная площадь под диаграммой деформирования равна работе разрушения любого элементарного объема материала. Подвод же энергии осуществляется со стороны нагружающего устройства и за счет запаса упругой энергии разгружающихся при потере несущей способности конструкций ее частей. Как уже отмечалось, подвод энергии со стороны нагружающего устройства существенно зависит от его жесткости. Лишь со стороны абсолютно жесткого нагружающего устройства отсутствует полностью подвод энергии к деформируемому телу (работа внешних сил равна нулю, поскольку перемещение границы тела, связанное с его разрушением, исключено). Избыток подводимой энергии приводит к динамическому разрушению.

Рассмотрение баланса энергии на основе решения краевых задач с использованием полных диаграмм деформирования может являться основой оценки опасности разрушения силовых конструкций. Следует отметить, "равнопрочные", т.е. спроектированные таким образом, что все их элементы одновременно достигают критического состояния, конструкции с точки зрения катастрофичности разрушения являются наиболее опасными.

Вопрос, на сколько опасным окажется разрушение данной конструкции, в практике прочностных расчетов обычно не рассматривается. Однако в определенных технических ситуациях именно безопасность объекта, а не его несущая способность и даже надежность, является главным эксплуатационным параметром. Осознавая опасность разрушения наиболее ответственных конструкций или их частей, при проектировании прибегают к требованию запаса прочности, что, обычно, ведет к увеличению материалоемкости конструкции. Принято считать, что увеличение запаса прочности, хотя и снижает экономичность, но повышает безопасность объекта. Это не всегда справедливо. В отдельных случаях увеличение запаса прочности, не обеспечивая, естественно, стопроцентную надежность, существенно увеличивает катастрофичность возможного разрушения такой перегруженной конструкции. Определяющее значение при этом может иметь запас упругой энергии в деформируемой системе к моменту потери ее несущей способности. Запас упругой энергии в случае разрушения расходуется на образование разрывов, а оставшаяся часть переходит в кинетическую энергию разлетающихся осколков, колебания частей конструкции, звуковые колебания и т.д.

Таким образом, вычислив запас упругой энергии в системе и работу разрушения, можно определить величину избыточной потенциальной энергии, которая служит мерой катастрофичности разрушения.

Глава 11

Закритическое деформирование элементов структуры композиционных материалов

Исследуются условия устойчивости закритического деформирования для элементов структуры гранулированных, слоистых и волокнистых композитов. Для слоисто-волокнистых материалов выводятся аналитические зависимости, позволяющие определить допустимый диапазон углов армирования. Обеспечение подобных условий связано с равновесным протеканием процессов накопления повреждений в структурных элементах и рассматривается как возможность повышения прочности и живучести композиционных материалов и конструкций.

Анализируются результаты расчета напряженно-деформированного состояния волокнистого композита периодической структуры на стадии закритического деформирования упругопластической матрицы при нагружении в поперечной плоскости. Исследуется развитие зон пластичности и разупрочнения, а также явление локализации деформации [328, 360], ранее уже частично связываемое с процессом разупрочнения материала [184, 221].

Некоторые из приведенных в настоящей главе результатов и выводов опубликованы в работах авторов [41, 47, 243, 265, 372, 373].

11.1. Модели механического поведения элементов структуры и устойчивость закритического деформирования сферических включений

В отношении деформационных свойств элементов структуры композиционных материалов после выполнения условия разрушения авторами научных работ принимаются весьма различные предположения [144, 289]: "зануление" всех деформационных характеристик [14] (прямая 1 на рис. 11.1) или только некоторых элементов матрицы жесткостей [109, 226], использование модели типа идеального упругопластического тела [189, 289] (прямая 2) или линейно разупрочняющегося тела [289, 363] (прямая 3). Используются также некоторые комбинированные модели, например, в [144]. Ряд моделей учитывает многостадийность процесса разрушения структурного элемента [109].

Результаты, согласующиеся с экспериментальными данными, полученные некоторыми авторами на основе использования моделей идеально упругопластического тела и линейно разупрочняющегося тела, подводят к мысли, что эти модели обеспечивают приближенное описание реального поведения материала, графическим отражением которого является равновесная диаграмма деформирования с ниспадающей ветвью (рис. 11.1).

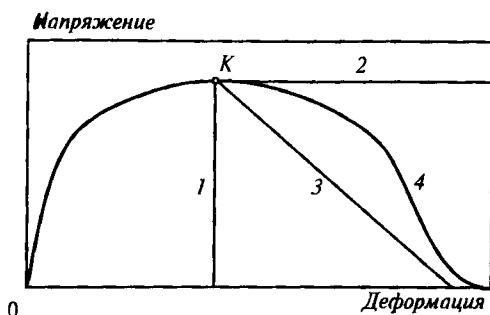


Рис. 11.1. Модели механического поведения элементов структуры композита после достижения критического состояния и полная диаграмма деформирования

Для решения задач механики неоднородных сред представляется очень важным (но мало разработанным) вопрос, по какому пути пойдет деформирование некоторого структурного элемента в зависимости от его окружения в композите — соответствующему линии 1 или 4 (рис. 11.1) — и возможны ли промежуточные пути? Ответ на этот вопрос основывается на исследованиях закономерностей закритического деформирования материалов при сложном напряженном состоянии и построении условий устойчивости сопротивления элементов в состояниях, соответствующих точкам на ниспадающей ветви диаграммы. Рассмотрим далее вывод критериев устойчивости для элементов структуры некоторых гетерогенных сред.

Фундаментальные результаты по определению поля упругих напряжений внутри и вне эллипсоидального включения, помещенного в неограниченную однородную деформируемую матрицу, получены Дж. Эшелби [302]. Им показано, что в рассматриваемом случае поле напряжений внутри включения является однородным. Представляя результаты Дж. Эшелби таким образом, чтобы установить связь между деформацией сферического включения (позначим индексом s) и однородной деформацией, характеризуемой тензором с компонентами ϵ_{ij} , вдали от включения, после очевидных преобразований получим

$$\epsilon^s = \frac{4G + 3K}{4G + 3K^*} \epsilon, \quad \check{\epsilon}_{ij}^s = \frac{5G(3K + 4G)}{G(9K + 8G) + 6G^*(K + 2G)} \check{\epsilon}_{ij}, \quad (11.1)$$

где K и G — модули объемного сжатия и сдвига матрицы; K^* и G^* —

аналогичные характеристики материала сферы. При выводе приведенных соотношений использовалось разложение тензора второго ранга на шаровую и девиаторную части: $\epsilon = \epsilon_{kk}$, $\check{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}/3$.

Аналогично можно получить уравнения для нахождения напряжений во включении сферической формы, если известны напряжения σ_{ij} , приложенные к матрице вдали от включения:

$$\sigma^s = \frac{K^s(4G + 3K)}{K(4G + 3K^s)}\sigma, \quad \check{\sigma}_{ij}^s = \frac{5G^s(3K + 4G)}{G(9K + 8G) + 6G^s(K + 2G)}\check{\sigma}_{ij}, \quad (11.2)$$

где $\sigma = \sigma_{kk}$, $\check{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}/3$.

Будем считать, что допустима кусочно линейная аппроксимация диаграммы деформирования, а закрытое поведение материала при гидростатическом растяжении и сдвиге характеризуется соответственно модулями разупрочнения, или спада, D_K и D_G .

Рассмотрим случай, когда вследствие увеличения упругой деформации матрицы вдали от включения напряженное состояние сферы становится критическим. Приняв его за исходное, поставим в соответствие приращению деформаций матрицы $\Delta\epsilon$ приращение деформации включения $\Delta\epsilon^s$. Для этого заменим в уравнении (11.1) модуль объемного сжатия материала сферы K^s на соответствующий модуль спада D_K^s со знаком минус ($D_K^s > 0$). При этом условие Адамара, нарушение которого для однородных сред связано с локализационной формой потери устойчивости (§ 9.1), выполняется, если $D_K^s < (4/3)G^s$ ($G^s > 0$). Из полученного соотношения с учетом того, что величины $\Delta\epsilon^s$, $\Delta\epsilon$, G и K являются положительными, следует условие реализации ниспадающей ветви диаграммы $\sigma^s \sim \epsilon^s$ материала включения:

$$G > \frac{3}{4}D_K^s. \quad (11.3)$$

Естественно, что требование устойчивости закрытого деформирования включения накладывает условие на жесткость окружающего его материала, однако, как показывает неравенство (11.3), удовлетворение этого требования не зависит от величины модуля объемного сжатия матрицы.

Проанализировав второе из уравнений (11.1) после замены в нем $\check{\epsilon}_{ij}^s$ на $\Delta\check{\epsilon}_{ij}^s$, $\check{\epsilon}_{ij}$ на $\Delta\check{\epsilon}_{ij}$ (полагая, что достигнуто критическое состояние материала включения, и приняв его за исходное по отношению к дальнейшему деформированию), G^s на D_G^s со знаком минус ($D_G^s > 0$), получим необходимое условие реализации закрытого формоизменения материала включения:

$$\frac{G(9K + 8G)}{6(K + 2G)} > D_G^s. \quad (11.4)$$

Последние неравенства могут быть получены и из уравнений (11.2) с учетом, естественно, того, что $\Delta\sigma^s < 0$ и $\Delta\check{\sigma}_{ij}^s < 0$, тогда как $\Delta\sigma > 0$ и $\Delta\check{\sigma}_{ij} > 0$.

Следует отметить, что при выводе условия (11.4) было сделано предположение о характере нагружения матрицы, которое представлялось как процесс, сопровождающийся увеличением всех компонент тензоров $\check{\sigma}$ и $\check{\epsilon}$. Линейные зависимости (11.1) и (11.2) свидетельствуют о том, что в этом случае возможно лишь одновременное увеличение либо уменьшение компонент как тензора $\check{\sigma}$, так и тензора $\check{\epsilon}$.

В монографии [296] приведено несколько отличающееся по форме от использованного решение задачи о шаровом включении в матрице. Однако выведенные на его основе необходимые условия устойчивости

$$2K \frac{1-2\nu}{1+\nu} > D_K^*, \quad G \frac{7-5\nu}{2(4-5\nu)} > D_G^*, \quad (11.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона упругой матрицы, как нетрудно убедиться, эквивалентны (11.3) и (11.4).

11.2. Устойчивость закритического деформирования элементов структуры слоистых композитов

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из периодически или случайно расположенных плоских изотропных слоев с отличающимися свойствами. Произвольному, но макрооднородному (однородному для эквивалентной среды с эффективными свойствами) напряженно-деформированному состоянию слоистого тела соответствуют однородные поля напряжений и деформаций в пределах структурных элементов.

Если плоскости слоев ортогональны оси x_3 , то справедливы соотношения (8.2) и (8.4). Сопротивление изотропных слоев сдвигу на стадии упругого деформирования описывается уравнениями

$$\langle \sigma_{13} \rangle = 2G\epsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2G\langle \epsilon_{12} \rangle, \quad (11.6)$$

преобразование и осреднение которых позволяет получить соотношения, связывающие структурные и макроскопические напряжения и деформации:

$$\langle \epsilon_{13} \rangle = G\langle G^{-1} \rangle \epsilon_{13}, \quad \langle \sigma_{12} \rangle = G^{-1}\langle G \rangle \sigma_{12}. \quad (11.7)$$

Применив к ним описанную в § 11.1 процедуру анализа, выведем необходимые условия реализации состояний, соответствующих ниспадающей ветви диаграммы деформирования. Так для двухкомпонентного слоистого композита при активном деформировании пакета, сопровождающемся увеличением $\langle \epsilon_{13} \rangle$ (остальные $\langle \epsilon_{ij} \rangle = 0$), условие устойчивости закритического деформирования слоев "первого" компонента имеет вид

$$G^{(2)} > D_G^{(1)} \frac{1-p^{(1)}}{p^{(1)}}. \quad (11.8)$$

При нагружении пакета слоев, приводящем к росту макронапряжений $\langle \sigma_{12} \rangle$ (остальные $\langle \sigma_{ij} \rangle = 0$), аналогичное условие имеет несколько иную структуру:

$$G^{(2)} > D_G^{(1)} \frac{p^{(1)}}{1 - p^{(1)}}. \tag{11.9}$$

Последние неравенства, устанавливающие ограничения на соотношение модулей сдвига и разупрочнения от сдвига для компонентов композита при заданной их объемной доле, проиллюстрированы на рис. 11.2.

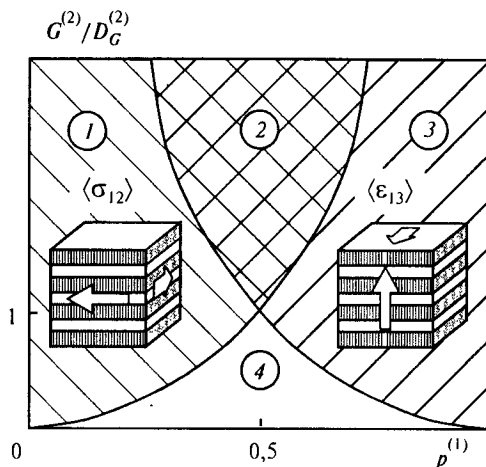


Рис. 11.2. Области устойчивости (1 и 2 соответствуют (11.9), 2 и 3 — (11.8)) и неустойчивости (зона 4) закритического деформирования слоев

Как видим, зона 2 на рис 11.2 является предпочтительной с точки зрения более полного использования прочностных ресурсов материала. Области 4 соответствует внезапное и динамическое разрушение слоев.

Оценим влияние жесткости нагружающей системы на устойчивость закритического деформирования элементов структуры слоистых композитов. Воспользуемся введенным в настоящей работе (см. §9.4) тензором жесткости нагружающей системы V . Рассмотрим элементарный макрообъем слоистого композиционного материала, мысленно абсолютно жестко зафиксировав его границы внутри деформируемого тела. Определенные перемещения границ тела приведут к появлению на границе элементарного объема напряжений $\langle \sigma_{12}^0 \rangle$. Освобождение границ элементарного объема приведет к его деформации и снижению напряжений до уровня

$$\langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{12}^0 \rangle - 2V_{1212} \langle \epsilon_{12} \rangle. \tag{11.10}$$

С другой стороны, если мысленно удалить элементарный объем мате-

риала из тела, затем перемещением границ тела добиться деформации полости $\langle \epsilon_{13}^0 \rangle$ и поместить в нее изъятый ранее и деформированный на величину $\langle \epsilon_{13}^0 \rangle$ элементарный объем, то взаимодействие тела и рассматриваемого объема приведет к снижению деформации последнего до уровня

$$\langle \epsilon_{13} \rangle = \langle \epsilon_{13}^0 \rangle - \frac{1}{2V_{1313}} \langle \sigma_{13} \rangle. \quad (11.11)$$

Уравнения (11.7) с учетом жесткости нагружающей системы имеют вид

$$\langle \epsilon_{13}^0 \rangle = G \langle (G^{-1}) + V_{1313}^{-1} \rangle \epsilon_{13}, \quad \langle \sigma_{12}^0 \rangle = G^{-1} \langle (G) + V_{1212} \rangle \sigma_{12}. \quad (11.12)$$

Последние соотношения запишем в приращениях для слоистого двухкомпонентного материала, один из компонентов которого, условно — первый, "вышел" на закритическую стадию деформирования:

$$\Delta \langle \epsilon_{13}^0 \rangle = -D_G^{(1)} \left[\frac{1}{G^{(2)}} (1 - p^{(1)}) - \frac{1}{D_G^{(1)}} p^{(1)} + \frac{1}{V_{1313}} \right] \Delta \epsilon_{13}^{(1)}, \quad (11.13)$$

$$\Delta \langle \epsilon_{13}^0 \rangle = G^{(2)} \left[\frac{1}{G^{(2)}} (1 - p^{(1)}) - \frac{1}{D_G^{(1)}} p^{(1)} + \frac{1}{V_{1313}} \right] \Delta \epsilon_{13}^{(2)},$$

$$\Delta \langle \sigma_{12}^0 \rangle = -\frac{1}{D_G^{(1)}} \left[G^{(2)} (1 - p^{(1)}) - D_G^{(1)} p^{(1)} + V_{1212} \right] \Delta \sigma_{12}^{(1)}, \quad (11.14)$$

$$\Delta \langle \sigma_{12}^0 \rangle = \frac{1}{G^{(2)}} \left[G^{(2)} (1 - p^{(1)}) - D_G^{(1)} p^{(1)} + V_{1212} \right] \Delta \sigma_{12}^{(2)}.$$

При активном деформировании на макроуровне ($\Delta \langle \epsilon_{13}^0 \rangle > 0$) закритическая деформация слоев "первого" компонента ($\Delta \epsilon_{13}^{(1)} > 0$), сопровождаемая, естественно, в силу (8.2), разгрузкой слоев "второго" компонента ($\Delta \epsilon_{13}^{(2)} < 0$), возможна только, как это следует из (11.13), при выполнении условия

$$\frac{1}{G^{(2)}} (1 - p^{(1)}) - \frac{1}{D_G^{(1)}} p^{(1)} + \frac{1}{V_{1313}} < 0. \quad (11.15)$$

При активном нагружении на макроуровне ($\Delta \langle \sigma_{12}^0 \rangle > 0$) закритическая деформация слоев "первого" компонента ($\Delta \sigma_{12}^{(1)} < 0$), сопровождаемая в силу (8.4) ростом касательных напряжений во "втором" компоненте ($\Delta \sigma_{12}^{(2)} > 0$), возможна только при выполнении условия

$$G^{(2)} (1 - p^{(1)}) - D_G^{(1)} p^{(1)} + V_{1212} > 0. \quad (11.16)$$

Условие (11.15) при бесконечной жесткости системы нагружения упрощается и совпадает с (11.8), условие (11.16) совпадает с (11.9) в частном случае при $V_{1212} = 0$.

Интерес представляет деформирование композиционного материала при снижающемся уровне макродеформаций ($\Delta\langle\varepsilon_{13}^0\rangle < 0$). В этом случае возможны упругая разгрузка слоев и композита в целом, а также закритическая деформация "первого" компонента ($\Delta\varepsilon_{13}^{(1)} > 0$) и упругая разгрузка "второго" ($\Delta\varepsilon_{13}^{(2)} < 0$), но при условии

$$\frac{1}{G^{(2)}} (1 - p^{(1)}) - \frac{1}{D_G^{(1)}} p^{(1)} + \frac{1}{V_{1313}} > 0. \quad (11.17)$$

Из двух возможных вариантов процесса осуществится более энергетически выгодный, который приведет к максимальному снижению запаса упругой энергии в системе в результате наибольшего снижения напряжений. Как следует из (11.12) и (11.6), упругая разгрузка слоев одного компонента, сопровождаемая закритической деформацией слоев другого компонента, энергетически более выгодна при выполнении условия

$$D_G^{(1)} > -G^{(1)}.$$

Поскольку истинность последнего неравенства очевидна для процессов закритической деформации, сопровождающихся падением напряжений при прогрессирующих деформациях, то можно сделать следующий вывод. В случае уменьшения макродеформации (ε_{13}^0) осуществляется закритическая деформация слоев при выполнении условия (11.17) и упругая разгрузка всех слоев в противном случае. То есть существует максимально допустимая для закритической деформации слоев жесткость нагружающей системы, и только при

$$\frac{1}{G^{(2)}} (1 - p^{(1)}) - \frac{1}{D_G^{(1)}} p^{(1)} > 0, \quad (11.18)$$

что соответствует реализации на макроуровне диаграммы деформирования с отрицательной крутизной ниспадающей ветви, закритическая деформация может осуществляться при любой положительной жесткости нагружающей системы.

11.3. Полидисперсная модель композита с поврежденными разупрочняющимися волокнами

Проведем анализ возможности закритического деформирования волокна в композиционном материале в рамках принятой в механике композитов полидисперсной модели [142], для чего рассмотрим длинный составной цилиндр (рис. 11.3) в условиях одноосного нагружения при заданной деформации $\varepsilon_{zz}^* = \varepsilon_{zz}^f = \varepsilon_{zz}^m$. Индекс f соответствует волокну, m — матрице.

Для осесимметричного тела, как известно, справедливо уравнение

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (u_r r) \right] = 0 \quad (11.19)$$

(u_r — радиальное перемещение), решение которого ищется в виде $u_r = C_1 r + C_2/r$, а связь перемещений и деформаций определяется соотношениями $\epsilon_{rr} = du_r/dr$, $\epsilon_{\theta\theta} = u_r/r$. Для внутреннего цилиндра (волокна) $C_2 = 0$, поскольку в противном случае в центре волокна напряжения были бы неограниченны. Решение уравнения (11.19) при граничных условиях

$$\begin{aligned} r = a: & \quad u_{fr} = u_{mr}, \quad \sigma_{rr}^f = \sigma_{rr}^m; \\ r = b: & \quad \sigma_{rr}^m = 0 \end{aligned} \quad (11.20)$$

приводит к следующим формулам для вычисления напряжений и деформаций в волокне и матрице:

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f = 2AG_m (a^2 - b^2) \epsilon_{zz}, \quad (11.21)$$

$$\sigma_{zz}^f = [E_f + 4AG_m \nu_f (a^2 - b^2)] \epsilon_{zz}, \quad (11.22)$$

$$\sigma_{rr}^m = 2AG_m a^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \epsilon_{zz}, \quad (11.23)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^m = 2AG_m a^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \epsilon_{zz}, \quad (11.24)$$

$$\sigma_{zz}^m = [E_m + 4AG_m \nu_m a^2] \epsilon_{zz}, \quad (11.25)$$

$$\epsilon_{rr}^f = \epsilon_{\theta\theta}^f = \left[Aa^2 \left(1 - 2\nu_m + \frac{b^2}{a^2} \right) - \nu_m \right] \epsilon_{zz}, \quad (11.26)$$

$$\epsilon_{rr}^m = \left[Aa^2 \left(1 - 2\nu_m - \frac{b^2}{r^2} \right) - \nu_m \right] \epsilon_{zz}, \quad (11.27)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^m = \left[Aa^2 \left(1 - 2\nu_m + \frac{b^2}{r^2} \right) - \nu_m \right] \epsilon_{zz}, \quad (11.28)$$

$$A = \frac{G_f (\nu_m - \nu_f)}{G_f [a^2 (1 - 2\nu_m) + b^2] - G_m (a^2 - b^2) (1 - 2\nu_f)},$$

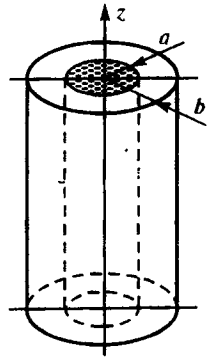


Рис. 11.3. Поврежденное волокно в упругой матрице согласно полидисперсной модели

где E_f и E_m — модули Юнга, G_f и G_m — модули сдвига, ν_f и ν_m — коэффициенты Пуассона соответственно волокна и матрицы.

Рассмотрим вопрос устойчивости закритического деформирования внутреннего цилиндра (волокна) и роли внешнего цилиндра (матрицы) в этом вопросе. Кроме того, устойчивость во многом может определяться жесткостью нагружающего устройства R' . С целью учета этого фактора задаваемую деформацию представим в виде

$$\varepsilon_{zz}^* = \varepsilon_{zz}^0 - \frac{1}{R'} \sigma_{zz}^*. \quad (11.29)$$

Среднее напряжение находится по формуле

$$\sigma_{zz}^* = p \sigma_{zz}^f + (1-p) \sigma_{zz}^m, \quad p = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad (11.30)$$

Заключение об устойчивости процесса сделаем в результате анализа энергетического баланса при виртуальном приращении закритической деформации (§ 9.4). Будем подразумевать, что механические свойства волокна на этой стадии деформирования характеризуются взятым со знаком "минус" модулем спада при растяжении D_E^f и коэффициентом поперечной деформации ν_D^f .

Работа внешних сил на части поверхности волокна (l — длина волокна), перпендикулярной оси oz ,

$$\Delta A'_e = \left(\sigma_{zz}^f + \frac{1}{2} \delta \sigma_{zz}^f \right) \delta \varepsilon_{zz} \pi a^2 l. \quad (11.31)$$

Работа внешних сил на боковой поверхности волокна

$$\Delta A''_e = \left(\sigma_{rr}^f + \frac{1}{2} \delta \sigma_{rr}^f \right) \delta \varepsilon_{rr}^f 2 \pi a^2 l. \quad (11.32)$$

Работа деформации волокна

$$\Delta A_\varepsilon = \left[\left(\sigma_{zz}^f + \frac{1}{2} \delta \sigma_{zz}^f \right) \delta \varepsilon_{zz} + 2 \left(\sigma_{rr}^f + \frac{1}{2} \delta \sigma_{rr}^f \right) \delta \varepsilon_{rr}^f \right] \pi a^2 l. \quad (11.33)$$

Условие устойчивости

$$\Delta A'_e + \Delta A''_e < \Delta A_\varepsilon \quad (11.34)$$

с учетом последних соотношений и равенства $\delta \varepsilon_{zz} = -\delta \sigma_{zz}^* / R'$, которое следует из (11.29), после преобразований имеет вид

$$R' > D_E^f p - E_m (1-p) +$$

$$+ \frac{4D_E^f E_m p(1-p) (\nu_m - \nu_D^f)^2}{2D_E^f (1 + \nu_m) [1 + p(1 - 2\nu_m)] - 2E_m (1-p) (1 - 2\nu_D^f) (1 + \nu_D^f)}. \quad (11.35)$$

Проведем оценочные расчеты для органических волокон, полная диаграмма которых приведена в [220], в эпоксидной матрице при следующих значениях деформационных характеристик: $D_E^f = 180$ ГПа, $\nu_D^f = \nu_f = 0,29$, $E_m = 3$ ГПа, $\nu_m = 0,35$. Вследствие отсутствия информации о коэффициенте Пуассона органоволокна на стадии закритического деформирования, его значение в одном из рассматриваемых случаев примем равным значению этой характеристики на стадии упругой деформации. Результаты расчетов представим в виде зависимости минимального значения характеристики жесткости нагружающего устройства, необходимого для реализации закритического деформирования волокон, от их объемной доли в композите (рис. 11.4).

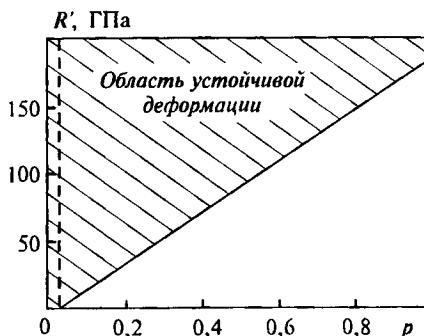


Рис. 11.4. К оценке устойчивости закритического деформирования волокон в композите при одноосном растяжении

Условие Адамара [274] (§ 9.1) накладывает дополнительное ограничение на коэффициент поперечной деформации: $\nu < -1$. Однако если принять, например, $\nu_D^f = -1,5$, то граница области устойчивой закритической деформации на рис. 11.4 изменится незначительно.

Величина R' , использованная при выводе условия устойчивости, в случае растяжения образца из волокнистого композита на испытательной машине связана с ее жесткостью R_M формулой: $R' = R_M l / F$, в которую входят размеры рабочей зоны образца: длина l и площадь поперечного сечения F . Из анализа приведенных в § 10.1 данных следует, что устойчивое закритическое деформирование волокон в композите может быть реализовано при одноосном растяжении образцов на существующих испытательных машинах.

Естественно, что с точки зрения использования прочностных ресурсов материала зона устойчивой закритической деформации волокон (на рис. 11.4 — заштрихована) является предпочтительной.

11.4. Закономерности механического поведения композитов, связанные с закритическим деформированием однонаправленно армированных слоев

Рассмотрим симметричную систему слоев, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния. Пусть координатные оси x_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с направлением укладки волокон в однонаправленно армированном слое. Ось x_1 совместим с направлением волокон. Ось x_2 лежит в плоскости слоя перпендикулярно волокнам, а ось x_3 ортогональна плоскости армирования.

Для каждого из ортотропных слоев определяющие соотношения могут быть записаны в дифференциальном виде

$$d\epsilon_{11} = \frac{d\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12} \frac{d\sigma_{22}}{E_2}, \quad d\epsilon_{22} = \frac{d\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{21} \frac{d\sigma_{11}}{E_1},$$

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21},$$

$$d\sigma_{11} = \bar{E}_1 (d\epsilon_{11} + \nu_{12} d\epsilon_{22}), \quad d\sigma_{22} = \bar{E}_2 (d\epsilon_{22} + \nu_{21} d\epsilon_{11}), \quad (11.36)$$

$$d\sigma_{12} = 2G_{12} d\epsilon_{12},$$

$$\bar{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

где E_1, E_2 и G_{12} — касательные модули, ν_{12} и ν_{21} — коэффициенты Пуассона или их аналоги при неупругом деформировании.

Введем также ортогональную систему координат x_α, x_β и x_γ таким образом, чтобы ось x_γ совпадала с осью x_3 , а ось x_1 армированного слоя составляла с осью x_α некоторый угол, называемый углом армирования.

Пусть в рассматриваемом слоистом композите каждому слою с углом армирования $+\varphi$ соответствует слой с углом армирования $-\varphi$. Физические соотношения, связывающие приращения средних напряжений симметричной пары слоев с соответствующими приращениями деформаций имеют вид

$$d\sigma_{\alpha\alpha}^* = A_{11} d\epsilon_{\alpha\alpha}^* + A_{12} d\epsilon_{\beta\beta}^*,$$

$$d\sigma_{\beta\beta}^* = A_{12} d\epsilon_{\alpha\alpha}^* + A_{22} d\epsilon_{\beta\beta}^*, \quad d\sigma_{\alpha\beta}^* = 2A_{33} d\epsilon_{\alpha\beta}^*, \quad (11.37)$$

$$d\epsilon_{\alpha\alpha}^* = \frac{d\sigma_{\alpha\alpha}^*}{E_\alpha^*} - \nu_{\alpha\beta}^* \frac{d\sigma_{\beta\beta}^*}{E_\beta^*},$$

$$d\epsilon_{\beta\beta}^* = \frac{d\sigma_{\beta\beta}^*}{E_\beta^*} - \nu_{\beta\alpha}^* \frac{d\sigma_{\alpha\alpha}^*}{E_\alpha^*}, \quad d\epsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{d\sigma_{\alpha\beta}^*}{2G_{\alpha\beta}^*}, \quad (11.38)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^* &= A_{11} - A_{12}^2/A_{22}, & E_{\beta}^* &= A_{22} - A_{12}^2/A_{11}, \\ \nu_{\alpha\beta}^* &= A_{12}/A_{11}, & \nu_{\beta\alpha}^* &= A_{12}/A_{22}, & G_{\alpha\beta}^* &= A_{33}. \end{aligned}$$

Поскольку определяющие соотношения в приращениях для неупругих материалов по форме совпадают с уравнениями теории упругости, то при определении эффективных характеристик, точнее их текущих значений, соответствующих данным напряжениям и деформациям, воспользуемся формулами, полученными из рассмотрения упругих слоистых композитов [30]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{12} &= \bar{E}_1 \nu_{12} + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{22} &= \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{33} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (11.39)$$

С использованием приведенных формул определим условия закритического деформирования слоев, связанного с постепенным разрушением связующего, в результате которого образуются трещины, параллельные волокнам. Это явление называется нарушением монолитности слоя и во многих случаях не приводит к разрушению слоистого материала, так как волокна продолжают воспринимать нагрузку [30].

Характер сопротивления слоя в условиях образования трещин исследован в монографии [189]. Опираясь на экспериментальные данные о деформировании оболочек, образованных методом намотки, авторы этой работы рассмотрели некоторые возможные феноменологические модели слоя. Сравнивалась модель, согласно которой после появления первой системы трещин слой не воспринимает нагрузку, с моделью, основанной на предположении о сохранении достигнутого уровня напряжений в слое в процессе его расстрескивания.

Авторы [189] пришли к выводу, что вторая модель является более удовлетворительной. Тем не менее, расчетно-экспериментальная диаграмма деформирования поврежденного слоя, на анализе которой базируется последнее заключение о пригодности модели идеально пластического тела, имеет явные ниспадающие участки и снижается до нуля. Это дает основание для предположения, что модель разупрочняющегося тела в данном случае является более адекватной.

Ограничимся рассмотрением случая, когда при образовании системы плоских трещин, ориентированных перпендикулярно одной оси, разупрочнение материала, связанное с растяжением в направлении этой оси, возникает прежде, т.е. при меньшей степени поврежденности, чем разупрочнение при сдвиге.

В связи с этим, определяющие соотношения на начальной стадии закритической деформации слоя получим путем замены в уравнениях

(11.36) величин E_2 и ν_{12} на взятые с отрицательным знаком модуль разупрочнения D_{2E} и коэффициент поперечной деформации ν_{12D} :

$$d\epsilon_{11} = \frac{d\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12D} \frac{d\sigma_{22}}{D_{2E}}, \quad d\epsilon_{22} = -\frac{d\sigma_{22}}{D_{2E}} - \nu'_{21} \frac{d\sigma_{11}}{E_1}, \quad (11.40)$$

$$d\sigma_{12} = 2G'_{12} d\epsilon_{12}.$$

Штрихом помечены характеристики поврежденного материала. Рассматриваемый механизм повреждения не приводит к существенному изменению модуля E_1 .

Коэффициент ν_{12} определяет приращение линейной деформации ϵ_{11} вследствие приращения нормальных напряжений σ_{22} . Изменение знака этого коэффициента на закритической стадии деформирования согласно условию симметрии

$$E_1 \nu_{12D} = D_{2E} \nu'_{21}$$

вызвано тем, что приращение деформации ϵ_{22} происходит, в основном, за счет образования внутренних разрывов в матрице, а уменьшение растягивающих напряжений σ_{22} и, следовательно, поперечной нагрузки на волокна приводит к уменьшению продольного сокращения армированного слоя, т.е. к положительному приращению деформации ϵ_{11} .

С целью выявления структурных особенностей перекрестно армированных слоистых композитов, связанных с возможностью реализации равновесного режима разрушения матрицы и разупрочнения слоев в трансверсальном направлении благодаря сдерживающему влиянию волокон каждого соседнего слоя, исключим влияние системы нагружения и рассмотрим наиболее неблагоприятный для реализации закритической стадии деформирования случай мягкого нагружения.

При мягком нагружении жесткость нагружающей системы равна нулю ($R_{ij} = 0$), а условие устойчивости процесса закритической деформации (9.29) с учетом того, что структурные деформации $\epsilon_{\alpha\alpha}$, $\epsilon_{\beta\beta}$ и $\epsilon_{\alpha\beta}$ для слоистых композитов равны макроскопическим, сводится к требованию положительной определенности квадратичной формы для матрицы эффективных касательных модулей при плоском напряженном состоянии:

$$A_{11} d\epsilon_{\alpha\alpha}^* d\epsilon_{\alpha\alpha}^* + 2A_{12} d\epsilon_{\alpha\alpha}^* d\epsilon_{\beta\beta}^* + A_{22} d\epsilon_{\beta\beta}^* d\epsilon_{\beta\beta}^* + 4A_{33} d\epsilon_{\alpha\beta}^* d\epsilon_{\alpha\beta}^* > 0. \quad (11.41)$$

Данное неравенство устанавливает пределы изменемости коэффициентов аналогично тому, как положительность упругого потенциала определяет допустимые значения упругих постоянных ортотропных материалов [1, 294]. Удовлетворение указанного требования обеспечивается неравенствами

$$|A_{12}| < \sqrt{A_{11} A_{22}}, \quad A_{11} > 0, \quad A_{22} > 0, \quad A_{33} > 0, \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned} |\nu_{\alpha\beta}^*| < \sqrt{A_{22}/A_{11}}, \quad |\nu_{\beta\alpha}^*| < \sqrt{A_{11}/A_{22}}, \\ E_{\alpha}^* > 0, \quad E_{\beta}^* > 0, \quad G_{\alpha\beta}^* > 0. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Ограничимся рассмотрением материалов, обладающих положительными коэффициентами Пуассона

$$\begin{aligned} 0 < \nu_{\alpha\beta}^* < \sqrt{A_{22}/A_{11}}, \quad 0 < \nu_{\beta\alpha}^* < \sqrt{A_{11}/A_{22}}, \\ 0 < A_{12} < \sqrt{A_{11}A_{22}}. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Подставив в уравнения (11.36) и (11.39) вместо величин ν_{12} и E_2 взятые со знаком "минус" коэффициент поперечной деформации и модуль разупрочнения, входящие в определяющие соотношения (11.40) с использованием неравенств (11.42) и (11.44), получим условия устойчивости закритического деформирования слоев в трансверсальном направлении в режиме мягкого нагружения композита, т.е. при заданном увеличении макронапряжений:

$$\bar{A}_{11} = A_{11}\eta = E_1 b^2 - D_2 E a^2 - 2ab(E_1 \nu_{12D} - 2G'_{12}\eta) > 0, \quad (11.45)$$

$$\bar{A}_{22} = A_{22}\eta = E_1 a^2 - D_2 E b^2 - 2ab(E_1 \nu_{12D} - 2G'_{12}\eta) > 0, \quad (11.46)$$

$$\bar{A}_{12} = A_{12}\eta = ab(E_1 - D_2 E + 2E_1 \nu_{12D} - 4G'_{12}\eta) - E_1 \nu_{12D} > 0, \quad (11.47)$$

$$\bar{A}_{33} = A_{33}\eta = ab(E_1 - D_2 E + 2E_1 \nu_{12D}) + G'_{12}\eta(a - b)^2 > 0, \quad (11.48)$$

$$4abG'_{12}\eta(E_1 - D_2 E - 2E_1 \nu_{12D}) - E_1 D_2 E (a^2 - b^2)^2 - E_1^2 \nu_{12D}^2 (a - b)^2 > 0, \quad (11.49)$$

где $a = \sin^2 \varphi$, $b = \cos^2 \varphi$, $\eta = 1 + \nu_{12D} \nu'_{21}$. Для анализа полученных условий рассмотрим:

а) слоистый композит, изготовленный из эпоксидной смолы, армированной высокопрочными углеродными волокнами таким образом, что однонаправленно армированные слои обладают следующими характеристиками: $E_1 = 136600$ МПа, $E_2 = 8013$ МПа, $G_{12} = 6372$ МПа, $\nu_{12} = 0,02$ [240];

б) слоистый композит, изготовленный из эпоксидной смолы, армированной высокомодульными углеродными волокнами: $E_1 = 229400$ МПа, $E_2 = 7587$ МПа, $G_{12} = 6372$ МПа, $\nu_{12} = 0,013$ [240];

в) боралюминий с объемным содержанием волокон бора 40 – 45 %: $E_1 = 211000$ МПа, $E_2 = 128600$ МПа, $G_{12} = 59800$ МПа, $\nu_{12} = 0,15$ [165];

г) стеклопластик со свойствами слоев: $E_1 = 36000$ МПа, $E_2 = 12000$ МПа, $G_{12} = 3000$ МПа, $\nu_{12} = 0,1$ [240].

В отношении неизвестных модулей разупрочнения указанных материалов примем следующую упрощающую гипотезу. Пусть существует параметр разупрочнения $\lambda \geq 0$ такой, что

$$D_{2E} = \lambda E_2, \quad \nu_{12D} = \lambda \nu_{12}, \quad G'_{12} = \frac{G_{12}(1 - \lambda)}{2(1 + \nu_{12D}\nu'_{21})}.$$

Согласно сделанному предположению, величины D_{2E} и ν_{12D} изменяются в одинаковой степени, коэффициент поперечной деформации ν'_{21} остается постоянным, а модуль сдвига в процессе накопления повреждений снижается медленнее, чем модуль E_2 , является положительным в момент начала закритической стадии деформирования и остается таковым до достижения параметром разупрочнения значения $\lambda = 1$.

Зависимости максимально допустимых значений параметра $\lambda = \lambda_c$ от угла армирования φ для указанных материалов приведены на рис. 11.5. Как следует из условий (11.45)-(11.49), при всех значениях параметра разупрочнения от нулевого до максимально допустимого имеет место устойчивое закритическое деформирование армированных слоев при любом плоском напряженном состоянии композита.

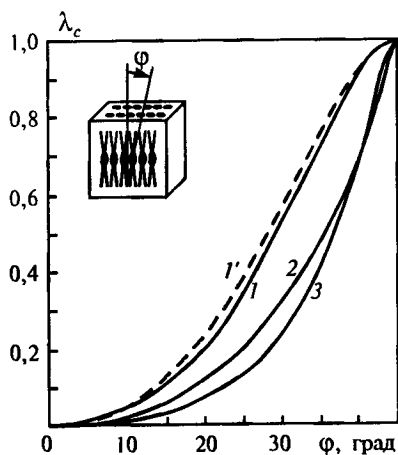


Рис. 11.5. Максимально допустимые значения параметра разупрочнения в зависимости от угла армирования: 1 — углепластик с высокопрочными волокнами; 1' — углепластик с высококомодульными волокнами; 2 — боралюминий; 3 — стеклопластик

Таким образом, установив экспериментальным или расчетным путем значение параметра разупрочнения λ для конкретного материала, можно с использованием полученных зависимостей определить допустимый диапазон углов армирования, при которых $\lambda < \lambda_c$ и, следовательно, обеспечиваются условия для закритического деформирования слоев.

11.5. Напряженно-деформированные состояния волокнистых композитов на стадии закритического деформирования матрицы ⁴

Рассмотрим результаты численного решения задачи о закритическом деформировании волокнистого композита тетрагональной периодической структуры с упругими волокнами и упругопластической матрицей при нагружении в поперечной плоскости. Краевая задача для ячейки периодичности, состоящая из уравнений равновесия (9.43) при отсутствии массовых сил, геометрических соотношений (9.42), определяющих уравнений (9.20) для матрицы при активном нагружении ($\chi = 1$) и линейных соотношений связи приращений напряжений и деформаций для волокна и при разгрузке матрицы ($\chi = 0$), а также граничных условий

$$du_i|_{\Sigma} = d\varepsilon_{ij}^* r_j,$$

решалась методом конечных элементов в сочетании с методом дополнительных напряжений при пошаговом пропорциональном изменении задаваемых макродеформаций ε_{ij}^* .

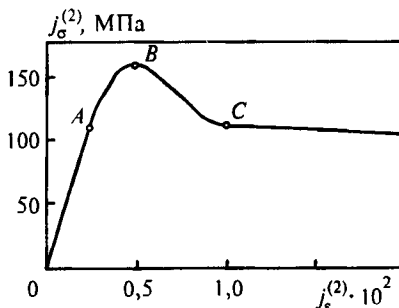


Рис. 11.6. Диаграмма деформирования материала матрицы

Упругие константы компонентов были выбраны следующими: $G = 2,1$ ГПа, $\nu = 0,25$ для матрицы и $G = 10,5$ ГПа, $\nu = 0,25$ для волокна. С помощью входящих, согласно (6.4), в уравнения (9.20) функций поврежденности неупругие свойства материала матрицы описывались нелинейной зависимостью второго инварианта тензора напряжений от соответствующего инварианта тензора деформаций. Значения инвариантов определялись по (6.6) и (6.7). Графическое выражение этой зависимости приведено на рис. 11.6. Подобные диаграммы деформирования были получены, в частности, при проведении экспериментов на образцах полиэтилена [68] и сплава ВТ5-1 [233].

Зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций материала матрицы задавалась в виде функции

⁴ Параграф написан при участии И.Н. Рочева

$$j_{\sigma}^{(1)} = \begin{cases} 3Kj_{\epsilon}^{(1)}, & j_{\epsilon}^{(1)} \leq 0 \vee j_{\epsilon}^{(2)} < j_{\epsilon cr}^{(2)}; \\ 3 \left[Kj_{\epsilon}^{(1)} - \bar{K} (j_{\epsilon}^{(1)} - j_{\epsilon cr}^{(1)}) \right] \frac{j_{\epsilon}^{(2)} - j_{\epsilon f}^{(2)}}{j_{\epsilon cr}^{(2)} - j_{\epsilon f}^{(2)}}, & j_{\epsilon}^{(1)} > 0 \wedge j_{\epsilon}^{(2)} \geq j_{\epsilon cr}^{(2)}; \\ 0, & j_{\epsilon}^{(2)} \geq j_{\epsilon f}^{(2)}; \end{cases}$$

соответствующей описанной в § 9.1 модели деформирования, согласно которой разупрочнение по первому инварианту имеет место при положительных значениях $j_{\epsilon}^{(1)}$, начинается, когда величина $j_{\epsilon}^{(2)}$ достигает своего критического значения $j_{\epsilon cr}^{(2)}$, и заканчивается полным разрушением при $j_{\epsilon}^{(2)} = j_{\epsilon f}^{(2)}$. Величина, определяющая интенсивность этого процесса, в данном случае была задана соотношением $\bar{K} = 0,1K$.

Было принято также, что волокна в поперечном сечении являются эллипсоидальными, а ось x_{11} ортогональной системы координат расположена вдоль большой оси эллипса.

Ниже приведены результаты расчета напряженно-деформированных состояний композиционных материалов с объемными долями волокон $p_f = 0,2$ (рис.11.7, 11.8) и 0,4 (рис. 11.9, 11.10) на стадии закритического деформирования матрицы.

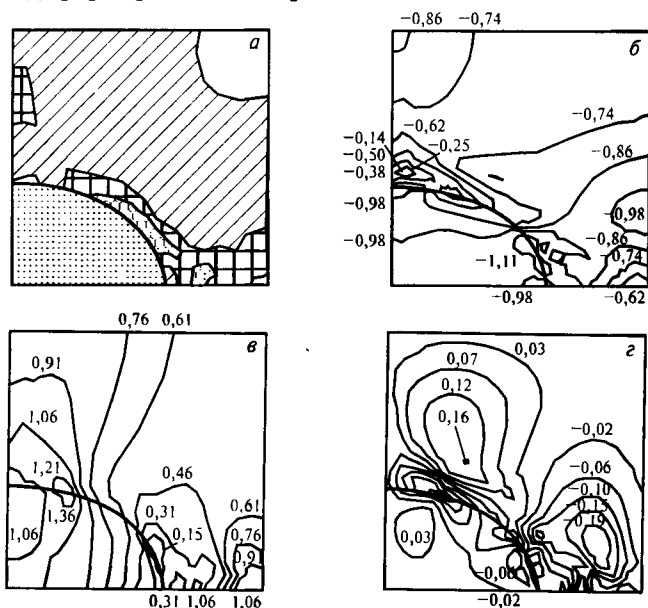


Рис. 11.7. Напряженное состояние волокнистого композита при деформации в поперечной плоскости ($\epsilon_{11}^* = -2,82 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{22}^* = 2,82 \cdot 10^{-3}$); а — зоны неупругого деформирования матрицы: /// — зона пластичности, □□□□ — зона начальной закритической деформации, □□□□ — зона развитой закритической деформации; б, в, з — соответственно изолинии напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , отнесенных к пределу прочности матрицы

На рис.11.7 и 11.9 для симметричной части ячейки периодичности показаны характерные зоны деформирования и изолинии полей напряжений, отнесенных к пределу прочности матрицы. Деформирование материала в пределах зоны пластичности соответствует участку *AB*, а в области, названной зоной начальной закритической деформации, описывается участком *BC* на диаграмме деформирования матрицы (см. рис.11.6). Другая выделенная область — зона развитой закритической деформации — объединяет материал в состояниях, которым соответствуют значения второго инварианта тензора микронапряжений большие, чем в точке *C* на диаграмме. На рис. 11.8 и 11.10 изображены линии одинаковых значений второго инварианта и компонент тензора микродеформаций.

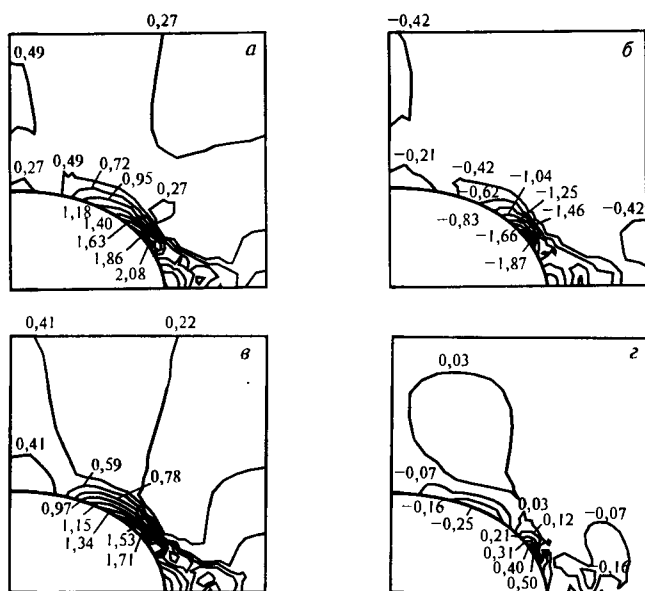


Рис. 11.8. Деформированное состояние волокнистого композита ($\epsilon_{11}^* = -2,82 \times 10^{-3}$, $\epsilon_{22}^* = 2,82 \cdot 10^{-3}$): а — $j_{\epsilon}^{(2)} \cdot 10^2$, б — $\epsilon_{11} \cdot 10^2$, в — $\epsilon_{22} \cdot 10^2$, г — $\epsilon_{12} \cdot 10^2$

Как видим, теоретически обоснованная возможность реализации устойчивого закритического деформирования в элементах структуры композиционных материалов в данном случае с учетом неоднородности полей микронапряжений подтверждается результатами численного моделирования для волокнистых композитов. Результаты расчетов свидетельствуют, что области разупрочнения могут охватывать достаточно большую долю материала матрицы.

Указанная область значительной частью своей границы примыкает к межфазной поверхности. Имеют место большие градиенты полей напряжений и деформаций. Причем, более ярко это проявля-

ется при увеличении объемной доли волокон в композите. В рассматриваемых случаях зарегистрировано устойчивое закритическое деформирование в локальных зонах до уровня деформаций, при котором значение второго инварианта тензора структурных деформаций превышает значение $j_{\text{сг}}^{(2)}$ в несколько раз, в частности, при $p_f = 0,2$ максимальное превышение составляет 316%, а при $p_f = 0,4$ — 690%.

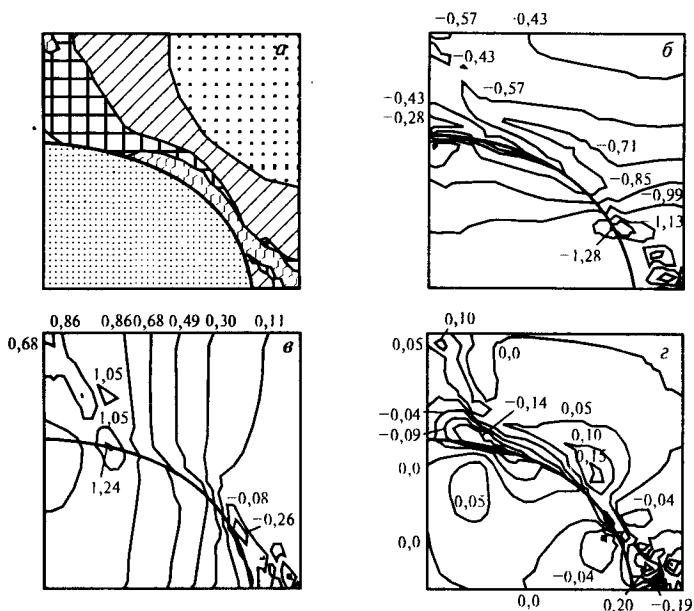


Рис. 11.9. Напряженное состояние волокнистого композита при деформации в поперечной плоскости ($\epsilon_{11}^* = -2,25 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{22}^* = 2,25 \cdot 10^{-3}$); а — зоны неупругого деформирования матрицы: — зона пластичности, — зона начальной закритической деформации, — зона развитой закритической деформации; б, в, г — соответственно изолинии напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , отнесенных к пределу прочности матрицы

Из анализа результатов, проиллюстрированных на рис. 11.10, следует также, что закритическое деформирование материала матрицы сопровождается явлением локализации деформации. Обеспечение заданных макродеформаций осуществляется, в основном, за счет узкой и протяженной зоны закритического деформирования. Показательно, что область локализации является даже более узкой, чем отмеченная на рис. 11.9 зона разупрочнения, поскольку не только практически весь материал в пластической зоне, но и некоторая часть закритически деформированной матрицы испытывают к рассматриваемому моменту упругую разгрузку (конечные элементы, в которых она наблюдается, на рис. 11.7а и 11.9а отмечены точками).

Таким образом, рассмотренная краевая задача механики устойчивого закригического деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения позволяет естественным путем исследовать процессы закригического деформирования композиционных материалов.

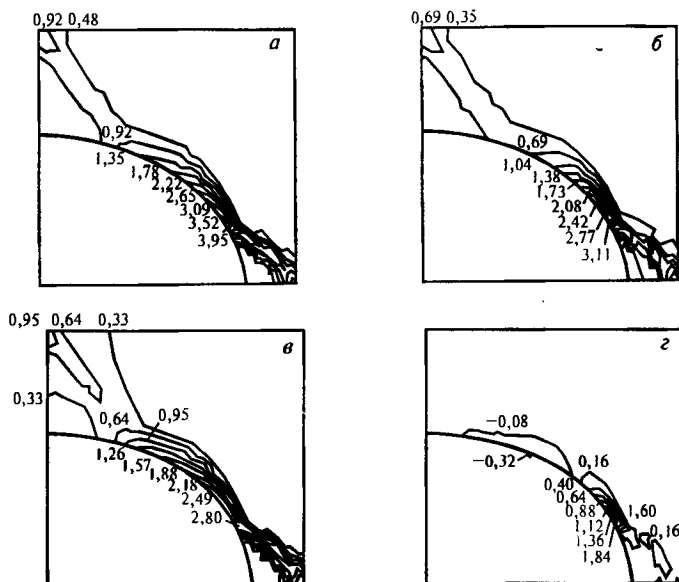


Рис. 11.10. Деформированное состояние волокнистого композита ($\epsilon_{11}^* = -2,25 \times 10^{-3}$, $\epsilon_{22}^* = 2,25 \cdot 10^{-3}$): а — $j_e^{(2)} \cdot 10^2$, б — $\epsilon_{11} \cdot 10^2$, в — $\epsilon_{22} \cdot 10^2$, г — $\epsilon_{12} \cdot 10^2$

Полученные результаты свидетельствуют о реализации равновесных процессов разупрочнения, сопровождаемых явлениями локализации деформации, в элементах структуры композитов и о возможности управления этими процессами на основе оптимального проектирования структуры материалов с целью максимального использования их резервов несущей способности.

Список литературы

1. *Абрамчук С.С., Булдаков В.П.* Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // *Мех. композит. материалов.*—1979.—№2.—С. 235–239.
2. *Адамс Д.Ф.* Уругоупластическое поведение композитов // *Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов.*—М.: Мир, 1978.—С. 196–241.
3. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных.—М.: Финансы и статистика, 1983.—471 с.
4. *Алексеев А.Д., Ревва В.Н., Рязанцев Н.А.* Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений.—Киев, Наукова думка, 1989.—168 с.
5. *Алетин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г.* Синтез слоистых материалов и конструкций.—Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.—130 с.
6. *Аннин Б.Д., Каламкарлов А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З.* Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций.—Новосибирск: Наука, 1993.—256 с.
7. *Аннин Б.Д., Колпаков А.Г.* Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // *Мех. композит. материалов.*—1987.—№1.—С. 56–64.
8. *Аношкин А.Н., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Поля микронапряжений и механические свойства разупорядоченных волокнистых композитов // *Мех. композит. материалов.*—1990.—№5.—С. 860–865.
9. *Аношкин А.Н., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Неупругое деформирование и разрушение разупорядоченных волокнистых композитов // *Мех. композит. материалов.*—1993.—Т. 29, №5.—С. 621–628.
10. *Анциферов В.Н., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. и др.* Волокнистые композиционные материалы на основе титана.—М.: Наука, 1990.—136 с.
11. *Архипов И.К., Толоконников Л.А.* Вариант статистической теории пластичности коротковолокнистых композитов с направленным армированием // *Механика композит. материалов.*—1984.—№4.—С. 620–625.
12. *Архипов И.К., Толоконников Л.А.* Статистическая модель разрушения однонаправленных армированных материалов // *Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций.*—Свердловск, 1986.—С. 13–19.
13. *Астафьев В.И., Григорова Т.В.* Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // *Изв. РАН: МТТ.*—1995.—№3.—С. 160–166.

14. *Багмутов В.П.* Об упругопластическом поведении слоисто-волоконистого материала // Проблемы прочности.-1982.-№10.-С. 96-102.
15. *Баженов С.Л., Куперман А.М., Пучков Л.В. и др.* Статистические аспекты разрушения органических полимеров // Мех. композит. материалов.-1984.-№6.-С. 1011-1017.
16. *Базвалов Н.С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР.-1975.-Т. 221, №3.-С. 516-519.
17. *Базвалов Н.С.* Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР.-1975.-Т. 225, №2.-С. 249-252.
18. *Базвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах.-М.: Наука, 1984.-352 с.
19. *Белл Ф.Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. Малые деформации.-М.: Наука, 1984.-800 с.
20. *Белл Ф.Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации.-М.: Наука, 1984.-432 с.
21. *Березин А.В.* Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел.-М.: Наука, 1990.-135 с.
22. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред.-М.: Наука, 1976.-С. 51-73.
23. *Бойко Ю.М., Кузнецова И.Г., Унежева С.А. и др.* Деформационно-прочностные и релаксационные свойства полиэтилена, упрочненного в процессе ориентационной вытяжки // Мех. композит. материалов.-1993.-№1.-С. 2-9.
24. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций.-М.: Машиностроение, 1990.-448 с.
25. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций.-М.: Наука, 1980.-375 с.
26. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики.-М.: Наука, 1983.-416 с.
27. *Ботвина Л.Р., Баренблатт Г.И.* Автомодельность накопления повреждаемости // Проблемы прочности.-1985.-№12.-С. 17-24.
28. *Вакуленко А.А., Кошелева А.А.* Некоторые задачи теории упругости композитных сред / ЛГУ.-Л., 1979.-47 с. Деп. в ВИНТИ 21.02.79, №682-79.
29. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов.-Киев: Наукова думка, 1985.-304 с.
30. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов.-М.: Машиностроение, 1988.-272 с.
31. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Мазурский М.И.* О материалах с падающей диаграммой // Изв. РАН: МТТ.-1995.-№2.-С. 181-182.
32. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей.-М.: Наука, 1964.-576 с.

33. *Веригенко В.Е.* Неклассическая теория упругопластического деформирования слоистых трансверсально изотропных пологих оболочек // Проблемы прочности.-1987.-№4.-С. 89-94.
34. *Викарио А., Толанд Р.* Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов // Композиционные материалы. Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1.-М.: Мир, 1978.-С. 62-107.
35. *Вильдеман В.Э.* О решении физически нелинейных задач механики слоистых композитов с использованием тензора повреждаемости // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций: Межвуз. сб. научных тр.-Пермь, 1986.-С. 27-32.
36. *Вильдеман В.Э.* О построении определяющих соотношений структурно-феноменологической механики композитов // Механика микронеоднородных сред.-Свердловск : УрО АН СССР, 1988.-С. 77-80.
37. *Вильдеман В.Э.* Устойчивость закритического накопления повреждений и формулировка граничных условий в задачах механики разрушения // Девятая зимняя школа по механике сплошных сред : Тез. докл.-Пермь, 1991.-С. 35-36.
38. *Вильдеман В.Э.* Эффект локальной разгрузки при активном деформировании композита // Деформирование и разрушение структурно неоднородных материалов.-Свердловск: УрО АН СССР, 1992.-С. 102-106.
39. *Вильдеман В.Э.* О постулате устойчивости в механике закритического деформирования материалов // Математическое моделирование процессов обработки материалов: Тез. докл. Межд. конф.-Пермь, 1994.-С. 13-14.
40. *Вильдеман В.Э.* Экстремальные и вариационные принципы механики устойчивого закритического деформирования // 10-я Зимняя школа по механике сплошных сред: Тез. докл.-Екатеринбург: УрО РАН, 1995.-С. 63.
41. *Вильдеман В.Э.* Армирование слоисто-волоконистых композитов с учетом реализации закритической стадии деформирования // Вестн. ПГТУ: Технологич. мех.-1996.-№2.-С. 110-115.
42. *Вильдеман В.Э., Зайцев А.В.* Деформационное разупрочнение и разрушение композиционных материалов зернистой структуры // Механика композиц. материалов и конструкций.-1996.-Т. 2, №2.-С. 117-124.
43. *Вильдеман В.Э., Зайцев А.В.* О численном решении краевых задач механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел с граничными условиями третьего рода // Вычислитель. технологии.-1996.-Т. 1, №2.-С. 65-73.
44. *Вильдеман В.Э., Зайцев А.В.* Равновесные процессы разрушения зернистых композитов // Мех. композит. материалов.-1996.-Т. 32, №6.-С. 808-817.
45. *Вильдеман В.Э., Рочев И.Н.* Кинетика разрушения волоконистых композитов с упругопластической матрицей // Матем. моделирование систем и процессов.-Пермь: ПГТУ, 1996.-№4.-С. 14-19.

46. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Зайцев А.В. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение неоднородной среды на закритической стадии деформирования // Мех. композит. материалов.-1997.-Т. 33, №3.-С. 329-339.
47. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Краевые задачи континуальной механики разрушения.-Препринт /УрО РАН.-Пермь, 1992.-77 с.
48. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Прогнозирование неупругого деформирования и разрушения слоистых композитов // Мех. композит. материалов.-1992.-№3.-С. 315-323.
49. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Краевая задача механики деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения // ПМТФ.-1995.-№6.-С. 122-132.
50. Вильдеман В.Э., Ташкинов А.А. О некоторых методах прогнозирования поведения многослойных тел при упругопластическом деформировании // Деформирование и разрушение конструкций из композиционных материалов.-Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.-С. 17-20.
51. Вильдеман В.Э., Ташкинов А.А. Расчет несущей способности толстостенных труб с использованием полных диаграмм деформирования // Проблемы прочности.-1994.-№8.-С. 48-54.
52. Виноградов В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок.-Киев: Наукова думка, 1989.-192 с.
53. Витвицкий П.М. Прочность и критерии разрушения стохастически дефектных тел.-Киев: Наукова думка, 1980.-186 с.
54. Волков С.Д. О кинетике разрушения и масштабном эффекте // Завод. лаборатория.-1960.-Т. 26, №3.-С. 323-329.
55. Волков С.Д. Проблема прочности и механика разрушения // Проблемы прочности.-1978.-№7.-С. 3-10.
56. Волков С.Д. Методы решения краевых задач механики разрушения.-Препринт /УНЦ АН СССР. Ин-т металлургии.-Свердловск, 1986.-68 с.
57. Волков С.Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения /УНЦ АН СССР. Ин-т металлургии.-Свердловск, 1986.-65 с.
58. Волков С.Д., Дубровина Г.И. О неустойчивости деформаций в задачах механики хрупкого разрушения // Проблемы прочности.-1977.-№5.-С. 8-12.
59. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. О краевой задаче механики разрушения // Проблемы прочности.-1978.-№1.-С. 3-7.
60. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. К теории устойчивости разрушения технических материалов // Проблемы прочности.-1978.-№2.-С. 3-7.
61. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. Устойчивость сопротивления материала в механике разрушения // Проблемы прочности.-1978.-№6.-С. 65-69.

62. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов.—Минск: Изд-во БГУ, 1978.—208 с.
63. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967.—984 с.
64. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.—М.: Гостехиздат, 1953.—491 с.
65. Геогджаев В.О. Некоторые вопросы теории упругопластической деформации анизотропных материалов // Исследования по механике и прикладной математике: Тр. Моск. физ.-тех. ин-та. Вып. 1.—М., 1958.—С. 69—96.
66. Гольденблат И.И. К теории малых упругопластических деформаций анизотропных сред // Докл. АН СССР.—1955.—Т. 101, №4.—С. 619—622.
67. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов.—М.: Машиностроение, 1968.—192 с.
68. Гольдман А.Я., Кокотов Ю.В., Меш Г.Э. и др. Переход хрупкость — пластичность при деформировании наполненного полиэтилена высокой плотности под давлением // Мех. композит. материалов.—1987.—№3.—С. 532—534.
69. Горбачев В.И. Эффективные механические характеристики микронеднородных тел с периодической структурой // Упругость и неупругость. Вып. 5.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.—С. 7—12.
70. Горлин С.М. Экспериментальная аэромеханика.—М.: Высшая школа.—1970.—423 с.
71. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки.—М.: Наука, 1970.—556 с.
72. Григорян С.С. Об осреднении физических величин // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 254, №4.—С. 1081—1085.
73. Грушецкий И.В., Микельсон М.Я., Тамуж В.П. Изменение жесткости однонаправленного волокнистого композита вследствие дробления волокон // Мех. композит. материалов.—1982.—№2.—С. 211—216.
74. Драгом А., Мруз З. Континуальная модель пластическихрупкого поведения скальных пород и бетона // Мех. деформируемых твердых тел: Направления развития.—М.: Мир, 1983.—С. 163—188.
75. Дроздовский Б.А., Фридман Я.Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей.—М.: Metallurgizdat, 1960.—260 с.
76. Друккер Д. Вариационные принципы в математической теории пластичности // Механика (сб. переводов).—1959.—№6 (58).—С. 63—79.
77. Друккер Д. Определение устойчивого неупругого материала // Механика (сб. переводов).—1960.—№2 (60).—С. 55—70.
78. Друккер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика (сб. переводов).—1964.—№3 (85).—С. 115—128.
79. Друккер Д. Пластичность, течение и разрушение // Неупругие свойства композиционных материалов.—М., 1979.—С. 9—32.
80. Дудукаленко В.В., Мешков С.И., Сараев Л.А. К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред // Ж. прикл. мех. и техн. физики.—1979.—№5.—С. 150—154.

81. *Евлампиева С.Е., Мошев В.В.* Влияние слоев на напряженно-деформированное состояние эластомерной матрицы // Мех. деформируемых неоднородных структур.-Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986.-С. 18-22.
82. *Епифанов В.П.* Микромеханика деформирования и разрушения льда // Изв. РАН: МТТ.-1996.-№4.-С. 111-128.
83. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование.-М.: Наука, 1982.-296 с.
84. *Ермоленко А.Ф.* Модель разрушения однонаправленного волокнита с хрупкой матрицей // Мех. композит. материалов.-1985.-№2.-С. 247-256.
85. *Забукас В.К., Андриялайтене Р.Ю., Мачюлис А.Н.* Влияние пористости и заполнения пор полистиролом и полиметилметакрилатом на поведение при сжатии и ударную вязкость карбонизованных материалов на основе поливинилспирта // Мех. композит. материалов.-1988.-№5.-С. 813-817.
86. Закономерности и особенности процесса разрушения при жестком нагружении. *В.С. Куксенко, Р.С. Ли, В.А. Мансуров, К.Т. Тилегенов* // ФТПРПИ.-1988.-№3.-С. 46-50.
87. *Зезин Ю.П.* Условия вязкоупругого перехода при разрушении полимерных материалов // Мех. композит. материалов.- 1988.-№5.-С. 779-785.
88. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.-М.: Мир, 1975.-544 с.
89. *Зилова Т.К., Петружина Н.И., Фридман Я.Б.* О закономерностях кинетики деформации в зависимости от податливости нагружения // Докл. АН СССР.-1959.-Т. 124, №6.-С. 1236-1239.
90. *Зилова Т.К., Фридман Я.Б.* О механических испытаниях с переменной податливостью нагружения // Завод. лаборатория.-1956.-Т. 22, №6.-С. 712-717.
91. *Зиновьев П.А., Сарбаев Б.С.* Эндохронная теория нелинейного деформирования слоистых композитных материалов // Мех. композит. материалов.-1985.-№3.-С. 423-430.
92. *Зиновьев П.А., Тараканов А.И.* Условия разрушения слоистых композиционных материалов // Применение пластмасс в машиностроении.-М. 1976.-Вып. 15.-С. 63-68.
93. *Злотников М.С., Глушигин Ф.П.* О запредельных характеристиках эквивалентных материалов // ФТПРПИ.-1981.-№5.-С. 92-99.
94. *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности.-М.: Высшая школа, 1990.-368 с.
95. *Ибрагимов В.А.* Некоторые вопросы разупрочняющихся сред // Изв. АН СССР: МТТ.-1972.-№4.-С. 55-63 .
96. *Ибрагимов В.А., Ключников В.Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР: МТТ.-1971.-№4.-С. 116-121.
97. *Иванов В.Н., Ташкинов А.А.* Распределение структурных напряжений в регулярных микрон неоднородных средах // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Межвуз. сб.-Пермь: изд-ние ППИ, 1981.-С. 39-44.

98. *Иванов В.Н., Ташкинов А.А.* Расчет полей структурных напряжений в микронеоднородных упругих средах с регулярной структурой // Структурные превращения в полимерных и жидких кристаллах.—Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1981.—С. 120–123.
99. *Иванов В.Н., Ташкинов А.А.* Метод исследования полей температурных напряжений в матричных композитах // Структурная механика неоднородных сред.—Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1982.—С. 62–68.
100. *Иванов В.Н., Ташкинов А.А.* Физически нелинейные задачи механики структурно-неоднородных сред // Структурная механика неоднородных сред. — Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1982.—С. 109–117.
101. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971.—232 с.
102. *Ильюшин А.А.* Пластичность (основы общей математической теории).—М.: Изд-во АН СССР, 1963.—272 с.
103. *Ильюшин А.А.* О постулате пластичности // ПММ.—1961.—Т. XXV.—С. 503–507.
104. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. мех. тверд. тела.—1967.—№3.—С. 21–35.
105. *Ильюшин А.А.* Загадки механики твердых деформируемых тел // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.—С. 68–73.
106. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.—287 с.
107. Испытание на растяжение при различных запасах упругой энергии / *Т.К. Зилова, Б.А. Палкин, Н.И. Петрухина и др.* // Завод. лаборатория.—1959.—Т. 25, №1.—С. 76–82.
108. Исследование кинетики разрушения пластичных материалов на заключительной стадии деформирования / *А.А. Лебедев, О.И. Марусий, Н.Г. Чаусов, Л.В. Зайцева* // Проблемы прочности.—1982.—№1.—С. 12–18.
109. Исследование несущей способности слоистых цилиндрических оболочек при помощи моделирования процесса разрушения на ЭВМ / *В.Д. Протасов, А.Ф. Ермоленко, А.А. Филипенко, И.П. Дмитриенко* // Мех. композит. материалов.—1980.—№2.—С. 254–261.
110. *Исупов Л.П.* Уравнения плоской деформации пластической трансверсально изотропной среды // Изв. РАН: МТТ.—1995.—№5.—С. 102–108.
111. *Исупов Л.П., Работнов Ю.Н.* О законе пластичности для композитной среды // Изв. АН СССР: МТТ.—1985.—№1.—С. 121–127.
112. *Каламжаров А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З.* Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Т. 19. Сер. Механика деформируемого твердого тела.—М.: Изд. ВИНТИ, 1987.—С. 78–147.
113. *Канаун С.К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды // ПМТФ.—1977.—№2.—С. 160–169.

114. Канаун С.К. Метод эффективного поля в линейных задачах статки композитной среды // Прикл. матем. и мех.—1982.—Т. 46, вып. 4.—С. 655–665.
115. Канаун С.К. Самосогласованные схемы усреднения в механике матричных композитных материалов // Мех. композит. материалов.—1990.—№6.—С. 984–994.
116. Каралюнас Р.И. К определению эффективных определяющих соотношений физически нелинейных композитов // Вестн. Моск. ун-та: Мат., мех.—1984.—№2.—С. 77–80.
117. Каралюнас Р.И. Эффективные определяющие соотношения слоистых упругопластических композитов: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.—М. 1986.—7 с.
118. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР: ОТН.—1958.—№8.—С. 26–31.
119. Керштейн И.М., Ключников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.—140 с.
120. Кинетика разрушения листового пластичного материала на заключительной стадии деформирования / А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, О.И. Марусий и др. // Проблемы прочности.—1988.—№12.—С. 18–25.
121. Кинетика разрушения листового аустенитной стали на заключительной стадии деформирования / А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, О.И. Марусий и др. // Проблемы прочности.—1989.—№3.—С. 16–21.
122. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности.—М.: Изд-во Моск. ун-та.—1979.—208 с.
123. Ключников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем.—М.: Наука.—1980.—240 с.
124. Ключников В.Д. Устойчивость деформирования; трактовки и методы // Математические методы механики деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1986.—С. 48–55.
125. Ключников В.Д. Неоднородность структуры как причина падающей диаграммы // Всес. конф. "Механика неоднородных структур", 2–4 сент. 1987 г.: Тез. докл. Т. 1—Львов, 1987.—С. 132.
126. Ковальчук Б.И., Косарчук В.В., Лебедев А.А. Исследование скалярных векторных свойств анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния. Сообщ. 2. Пластические деформации анизотропных материалов при простом нагружении // Проблемы прочности.—1982.—№8.—С. 114–121.
127. Козлов С.М. Осреднение случайных операторов // Матем. сб.—1979.—Т. 109, №2.—С. 188–202.
128. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред.—М.: ИЛ.—1961.—79 с.
129. Колокольчиков В.В. Усреднение в структурах с накоплением ориентированных повреждений // Мех. композит. материалов.—1990.—№4.—С. 667–673.

130. Композиционные материалы. В 8-ми т. Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендечки.-М.: Мир, 1978.-564 с.
131. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса.-Киев: Наукова думка, 1985.-592 с.
132. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. / Под общ. ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского.-М.: Машиностроение, 1990.-512 с.
133. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов.-М.: Наука, 1990.-208 с.
134. К определяющим уравнениям состояния при деформировании горных пород в запредельной области / А.Г. Протосея, А.И. Ставрогин, А.К. Черников, Б.Г. Тарасов // ФТПРПИ-1981.-№3.-С. 33-42.
135. Косарчук В.В., Ковальчук Б.И., Лебедев А.А. Теория пластического течения анизотропных сред. Сообщ. 1. Определяющие соотношения // Проблемы прочности.-1986.-№4.-С. 50-57.
136. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций.-Новосибирск: Наука, 1990.-198 с.
137. Кравченко О.Л., Вильдеман В.Э. Краевая задача микромеханики неупругого деформирования композитов с анизотропными слоями // Матем. моделирование систем и процессов.-Пермь: ПГТУ, 1996.-№4.-С. 48-52.
138. Кравчук А.С. О теории пластичности анизотропных материалов // Расчеты на прочность. Вып. 27.-М., 1986.-С. 21-29.
139. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов.-М.: Наука, 1985.-304 с.
140. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.-М.: Физматгиз, 1959.-211 с.
141. Кржечковский П.Г., Павлицев В.И., Никитин В.А. Моделирование на ЭВМ процесса разрушения среды с полыми сферическими включениями // Мех. композит. материалов.-1987.-№1.-С. 77-83.
142. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.-М.: Мир, 1982.-334 с.
143. К теории накопления повреждений / Г.И. Дубровина, Ю.П. Соковнин, Ю.П. Гуськов и др. // Проблемы прочности.-1975.-№2.-С. 21-24.
144. Кузнецов С. Ф., Парцевский В.В. О механизме деформирования и разрушения слоистых многонаправленных композиционных материалов // Мех. композит. материалов.-1981.-№6.-С. 1006-1011.
145. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой.-М.: Наука, 1975.-415 с.
146. Купер Дж., Лигготт М. Растрескивание и разрушение композитов // Механика разрушения. Разрушение материалов.-М.: Мир, 1979.-С. 165-215.
147. Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф. О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумулялирования энергии и разупрочнения материала // ФТПРПИ-1994.-№6.-С. 12-23.

148. *Лагас П.А.* Нелинейный характер зависимости "напряжение-деформация" для слоистых графитозепоксидных пластиков // *Аэрокосм. техника.*-1986.-№4.-С. 102-111.
149. *Лагздинь А.Ж., Тамуж В.П., Тетерс Г.А., Крегерс А.Ф.* Метод ориентационного усреднения в механике материалов.-Рига: Зинатне, 1989.-189 с.
150. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования // *Проблемы прочности.*-1981.-№12.-С. 104-106.
151. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* К оценке трещиностойкости пластичных материалов // *Проблемы прочности.*-1982.-№2.-С. 11-13.
152. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций // *Проблемы прочности.*-1983.-№2.-С. 6-10.
153. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* Экспресс-метод оценки трещиностойкости пластичных материалов.-Препринт. АН СССР / Ин-т проблем прочности.-Киев, 1988.-43 с.
154. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Евецкий Ю.Л.* Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов // *Проблемы прочности.*-1986.-№9.-С. 29-32.
155. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Зайцева Л.В.* Влияние вида напряженного состояния на кинетику разрушения и трещиностойкость мартенситно-старееющей стали. Сообщение 1. Исследование стадийности процесса разрушения // *Проблемы прочности.*-1991.-№8.-С. 3-13.
156. *Леметр Ж.* Континуальная модель повреждения, используемая для расчета разрушения пластичных материалов // *Тр. Америк. об-ва инженеров-механиков. Теор. основы инж. расчетов / Пер. с англ.*-1985.-Т. 107, №1.-С. 90-98.
157. *Ленский В.С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // *Упругость и неупругость.* Вып. 5.-М., 1978.-С. 65-96.
158. *Линьков А.М.* Об условиях устойчивости в механике разрушения // *Докл. АН СССР.*-1977.-Т. 233, №1.-С. 45-48.
159. *Линьков А.М.* Потеря устойчивости при разупрочнении // *Исследования по упругости и пластичности.* Вып. 14. Проблемы механики деформируемого твердого тела.-Л.: ЛГУ, 1982.-С. 41-46.
160. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // *Ж. эксперим. и теор. физ.*-1946.-Т. 16, вып. 11.-С. 967-980.
161. *Ломакин В.А.* О теории нелинейной упругости и пластичности анизотропных сред // *Изв. АН СССР: ОТН, механика и машиностроение.*-1960.-№4.-С. 60-64.
162. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.-М.: Наука, 1970.-139 с.
163. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.-М.: Наука, 1980.-512 с.
164. *Макклинтон Ф., Аргон А.* Деформация и разрушение материалов.-М.: Мир, 1970.-443 с.

165. *Максименко В.Н., Равикович А.И.* Оценка прочности пластин из слоистых композитных материалов в зоне болтового соединения // *Мех. композит. материалов.*—1990.—№5.—С. 877–883.
166. *Малинин Н.И.* Некоторые вопросы механики композиционных материалов и конструкций из них // *Мех. композит. материалов.*—1979.—№5.—С. 784–789.
167. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения.—М.; Л.: Гостехиздат, 1952.—432с.
168. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов.—Рига: Зинатне, 1980.—572 с.
169. *Мансуров Р.М.* Об упругопластическом поведении анизотропных сред // *Упругость и неупругость.* Вып. 1.—М., 1971.—С. 163–171.
170. *Матченко Н.М., Толоконников Л.А., Трещев А.А.* Определяющие соотношения изотропных разнотривляющихся сред. Квазилинейные соотношения // *Изв. АН: МТТ.*—1995.—№1.—С. 73–78.
171. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / Под ред. В.А. Постнова.—Л.: Судостроение, 1979.—228 с.
172. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. Т. 1. Механика материалов / *А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванци и др.*—Киев: Наукова думка, 1982.—368 с.
173. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник / *А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Ф.Ф. Гигиняк, В.П. Ламашевский.*—Киев: Наукова думка, 1983.—366 с.
174. Механические свойства материалов под высоким давлением / Под ред. Х.Л. Пью. Вып. 1. Общие вопросы воздействия высокого давления на механические свойства материалов.—М.: Мир, 1973.—296 с.
175. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1.—М.: Наука, 1965.—421 с.
176. *Мураками С.* Сущность механики поврежденной сплошной среды и ее приложения к теории анизотропных повреждений при ползучести // *Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Теор. основы инж. расчетов / Пер. с англ.*—1983.—Т. 105, №2.—С. 28–36.
177. *Мураками С., Радаев Ю.Н.* Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // *Изв. РАН: МТТ.*—1996.—№4.—С. 93–110.
178. *Наймарк О.Б.* О деформационных свойствах и кинетике разрушения твердых тел с микротрещинами // *О термодинамике и деформировании твердых тел с микротрещинами: Препринт.*—Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982.—С. 3–34.
179. *Наймарк О.Б., Давыдова М.М., Постных А.М.* О деформировании и разрушении гетерогенных материалов с микротрещинами // *Мех. композит. материалов.*—1984.—№2.—С. 271–278.
180. *Немировский Ю.Б.* Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // *Ж. прикл. мех. и техн. физики.*—1969.—№6.—С. 81–89.
181. *Немировский Ю.В., Резников Б.С.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов.—Новосибирск: Наука, 1986.—165 с.

182. Неупругие свойства композиционных материалов / Под ред. К. Гераковича.-М.: Мир, 1978.-295 с.
183. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред.-М.: Наука, 1978.-336с.
184. *Никитин Л.В.* Направления развития моделей упруговязкопластических тел // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела.-М.: Наука, 1988.-С. 136-153.
185. *Никитин Л.В.* Закритическое поведение разупрочняющегося материала // Докл. АН.-1995-Т. 342, №4.-С. 487-490.
186. *Никитин Л.В., Рыжак Е.И.* Об осуществимости состояний материала, соответствующих "падающему" участку диаграммы // Изв. АН СССР: МТТ.-1986.-№2.-С. 155-161.
187. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред.-М.: Недра, 1984.-232 с.
188. *Новожилов В.В.* О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций.-М.: Машиностроение.-1975.-С. 349-359.
189. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов.-М.: Машиностроение, 1977.-144 с.
190. *Овчинский А.С.* Процессы разрушения композиционных материалов. Имитация микро- и макромеханизмов на ЭВМ.-М.: Наука.-1988.-277 с.
191. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.-М.: Изд-во Московск. ун-та, 1990.-311 с.
192. *Палмер А., Майер Г., Дракер Д.* Соотношение нормальности и выпуклости поверхностей текучести для неустойчивых материалов или элементов конструкций // Прикл. мех. Сер. Е. 1967.-Т. 34.-№2.-С. 232-241.
193. *Панасенко Г.П.* Асимптотики высших порядков решения задач о контакте периодических структур // Матем. сборник.-1979.-Т. 110, №4.-С. 505-538.
194. *Партон В.Э., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения.-М.: Наука.-1985.-504 с.
195. *Пашков П.О., Кириенко А.М.* Особенности деформации и разрушения стали в конструкциях различной жесткости // Проблемы прочности.-1980.-№1.-С. 52-55.
196. *Лежина П.* Моделирование закритического поведения и разрушения диссипативного твердого тела // Теор. основы инженерных расчетов.-1984.-Т. 106, №4. - С. 107-117.
197. *Петрищев П.П.* Упругопластические деформации анизотропного тела // Вестн. Моск. ун-та: Сер. физ.-мат. и естеств. наук.-1952.-№5.-С. 63-72.
198. *Петузов И.М., Линьков А.М.* Механика горных ударов и выбросов.-М.: Недра.-1983.-280 с.

199. *Петухов И.М., Лимьков А.М., Работа Э.Н.* О решении дискретизированных задач горной геомеханики с учетом разупрочнения и разгрузки // ФТПРПИ.-1981.-№3.-С. 26-33.
200. *Пикуль В.В.* Теория и расчет слоистых конструкций.-М.: Наука, 1985.-182 с.
201. *Писаренко Г.С., Можаровский Н.С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие.-Киев: Наукова думка, 1981.-496 с.
202. *Победря Б.Е.* О разрешимости задач теории упругости контактного типа // ПММ.-1969.-Вып. 4.-С. 760-763.
203. *Победря Б.Е.* Деформационная теория пластичности анизотропных сред // ПММ.-1984.-Т. 48, вып. 1.-С. 29-37.
204. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов.-М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.-336 с.
205. *Победря Б.Е.* Теория течения анизотропной среды // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций.-Свердловск, 1986.-С. 101-108.
206. *Победря Б.Е., Каралюнас Р.И.* Упругопластическое поведение слоистых композитов // Научно-технический прогресс в машиностроении: Композиционные материалы / Межд. центр науч. и техн. информации, Ин-т машиноведения им. А.А. Благодирова АН СССР.-М., 1987.-С. 98-117.
207. *Победря Б.Е., Шешенин С.В.* О матрице влияния // Вестн. МГУ: Сер. 1. Матем. механ.-1979.-№6.-С. 76-81.
208. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения: теория и приложения.-М.: Наука, 1982.-112 с.
209. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения.-М.: Наука, 1986.-232 с.
210. *Полилов А.Н.* Объяснение масштабного эффекта на основе энергетического критерия разрушения // Изв. АН СССР. МТТ: 1984.-№1.-С. 106-110.
211. *Потапов А.И., Савицкий Г.М.* Прочность и деформативность стеклопластиков.-Л.: 1973.-144 с.
212. Принципы создания композиционных полимерных материалов / *ит А.А. Берлин, С.А. Вольфсон, В.Г. Ошмян, Н.С. Ениколопов.*-М.: Химия, 1990.-240 с.
213. Прочность и деформация горных пород в допредельной и запредельной областях / *А.Н. Ставрогин, Б.Г. Тарасов, О.А. Ширкес, Е.Д. Певзнер* // ФТПРПИ.-1981.-№6.-С. 3-11.
214. Прочность и деформируемость горных пород / *Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев, А.Б. Фадеев.* Под общ. ред. А.Б. Фадеева.-М.: Недра, 1979.-269 с.
215. Прочность композиционных материалов / *Д.М. Карпинос, Г.Г. Максимович, В.Х. Кадыров, Е.М.Лютый.*-Киев: Наукова думка, 1978.-236 с.

216. Прочность, устойчивость и колебания термонапряженных оболочечных конструкций / В.Ф. Грибанов, И.А. Крозин, Н.Г. Паничкин, В.М. Санников, Ю.И. Фомичев.-М.: Машиностроение, 1990.-368 с.
217. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопр. прочности материалов и конструкций.-М.-1959.-С. 5-7.
218. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.-М.: Наука.-1988.-712 с.
219. Радченко В.П., Самарин Ю.П. Структурная модель стержневого типа для описания одноосной пластичности и ползучести материалов // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций.-Свердловск, 1986.-С. 109-115.
220. Разрушение конструкций из композитных материалов / И.В. Грушецкий, И.П. Димитриенко, А.Ф.Ермоленко и др.; Под ред. В.П. Тамужа, В.Д. Протасова.-Рига: Зинатне, 1986.-264 с.
221. Райс Дж.Р. Локализация пластической деформации // Теор. и прикладная мех. Тр. XIV Межд. конгресса IUTAM. Ред. В.Т. Койгер.-М.: Мир, 1979.-С. 439-471.
222. А.Ф. Зилауц, А.Ф. Крегерс, А.Ж. Лагздиньш, Г.А. Тетерс. Расчет упругопластических деформаций композита при сложном нагружении // Мех. композит. материалов.-1981.-№6.-С. 987-992.
223. Ревуженко А.Ф. О напряженно-деформированном состоянии разупрочняющегося массива вокруг выработок // ФТПРПИ, 1978.-№2.-С.
224. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ.-1977-№3.-С. 156-174.
225. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурио неоднородных тел.-Рига: Зинатне, 1989.-224 с.
226. Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных // Неупругие свойства композиционных материалов.-М.: Мир, 1978.-С. 140-179.
227. Рыжак Е.И. О необходимости условий Адамара для устойчивости упругопластических тел // Изв. АН СССР: МТТ.-1987.-№4.-С. 101-104.
228. Рыжак Е.И. К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Изв. АН СССР: МТТ.- 1991, №1.-С. 111-127.
229. Рыжак Е.И. Об устойчивом закритическом деформировании в нежесткой трехосной испытательной машине // Докл. АН.-1993.-Т. 330, №2.-С. 197-199.
230. Рыжак Е.И. Об устойчивом закритическом деформировании упругопластических образцов, стесненных облоймой конечной жесткости // Изв. АН СССР: МТТ.-1995.-№3.-С. 117-135.
231. Савицкий Ф.С., Вандышев Б.А. Жесткость испытательных машин и ее влияние на спадающий участок диаграммы растяжения и изгиба // Завод. лаборатория.-1956.-Т. 22, №6.-С. 717-721.

232. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела.-1973.-№4.-С. 149-158.
233. *Салищев Г.А., Лутфуллин Р.Я., Мазурский М.И.* Преобразование пластинчатой микроструктуры в равноосную при горячей деформации титанового сплава ВТ5-1 // Изв. АН СССР: Металлы.-1990.-№3.-С. 113-119.
234. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний.-М.: Мир, 1984.-472 с.
235. *Сараев Л.А.* Сингулярное приближение в теории упругопластических сред с микроструктурой // ПММ.-1983.-Т. 47, вып. 3.-С. 522-524.
236. *Сараев Л.А.* Эффективные свойства многокомпонентных упругопластических композиционных материалов // ПММ.-1986.-Т. 50, вып. 4.-С. 700-705.
237. *Сараев Л.А., Шермергор Т.Д.* Сингулярное приближение в теории идеальной пластичности микroneоднородных сред // Прикл. мех.-1985.-Т. 21, №5.-С. 92-97.
238. *Сарбаев Б.С.* О неупругом поведении слоистых стеклопластиков // Изв. вузов: Машиностр.-1984.-№4.-С. 6-10.
239. *Свенсон С.Р., Браун В.С.* Влияние напряженного состояния на диаграмму напряжение-деформация для горных пород // Теор. основы инж. расчетов. Тр. амер. об-ва инж.-механиков. Сер. Д.-1972.-Т. 94, №1.-С. 262-266.
240. *Скудра А.М., Булавс Ф.Я.* Прочность армированных пластиков.-М.: Химия, 1982.-216 с.
241. *Смит Д.Г., Хуанг Ю-чин.* Анализ деформирования слоистых стеклопластиков после начала растрескивания // Прочность и разрушение композит. материалов.-Рига, 1983.-С. 168-174.
242. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики.-М.: Наука.-1966.-443 с.
243. *Соколкин Ю.В., Вильдеман В.Э.* Закрытое деформирование и разрушение композитных материалов // Мех. композит. материалов.-1993.-Т. 29, №2.-С. 163-170.
244. *Соколкин Ю.В., Свисткова Л.А.* Упругопластичность волокнистых композитов с металлической матрицей // Исследования по механике материалов и конструкций.-Свердловск: УрО АН СССР, 1988.-С. 85-92.
245. *Соколкин Ю.В., Скачков В.А.* О структурном подходе к оценке работоспособности конструкций из композитных материалов // Мех. композит. материалов.-1981.-№4.-С. 608-614.
246. *Соколкин Ю.В., Танкеева М.Г., Фрейд В.Г.* О постановке статистических краевых задач механики полимеров // Механика полимеров и систем.-Свердловск: УНЦ АН СССР.-1974.-С. 3-23.
247. *Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел.-М.: Наука, 1984.-115 с.
248. *Ставров В.П., Волков С.Д.* О моментных функциях, описывающих свойства стеклопластиков // Мех. полимеров.-1968.-№1.-С. 86-89.

249. *Ставрогин А.Н., Певзнер Е.Д., Тарасов Б.Г.* Запредельные характеристики хрупких горных пород // ФТПРПИ.-1981.-№4.-С. 8-15.
250. *Ставрогин А.Н., Протосемя А.Г.* Механика деформирования и разрушения горных пород.-М.: Недра, 1992.-224 с.
251. *Стружанов В.В.* К проблеме живучести машиностроительных конструкций // Свойства материалов и качество машин.-Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.-С. 33-43.
252. *Стружанов В.В.* О разрушении диска с ослабленной центральной зоной // Изв. АН СССР: МТТ.-1986.-№1.-С. 135-141.
253. *Стружанов В.В.* Об одном подходе к исследованию разрушения механических систем // Пробл. прочности.-1987.-№6.-С. 57-63.
254. *Стружанов В.В.* О применении полных диаграмм деформирования в расчетах на прочность // Пробл. прочности.-1988.-№5.-С. 122-123.
255. *Стружанов В.В., Миронов В.И.* Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций.-Екатеринбург: УрО РАН, 1995.-191 с.
256. *Суворова Ю.В.* О критерии прочности, основанном на накоплении поврежденности, и его приложение к композитам // Изв. АН СССР: МТТ.-1979.-№4.-С. 107-111.
257. *Тамуж В.П.* Расчет констант материала с повреждениями // Мех. композит. материалов.-1977.-№5.-С. 838-845.
258. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов.-Рига: Зинатне, 1978.-294 с.
259. *Тамуж В.П., Лагздиньш А.Ж.* Вариант построения феноменологической теории разрушения // Мех. полимеров.-1968.-№4.-С. 638-647.
260. *Танкеева М.Г., Ташкинов А.А., Соколкин Ю.В., Постных А.М.* Структурно-феноменологический подход к оценке прочности анизотропных композитных конструкций.-Препринт. /УрО АН СССР: Свердловск, 1989.-80 с.
261. *Ташкинов А.А.* Исследование распределения напряжений в пространственном кубическом включении и инородной упругой матрице вокруг него // Упругое и вязкоупругое поведение материалов и конструкций.-Свердловск: УНЦ АН СССР.-1981.-С. 124-127.
262. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* К решению физически нелинейных задач механики слоистых материалов // Напряжения и деформации в конструкциях и материалах.-Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985.-С. 25-30.
263. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* Анализ деформирования анизотропных композитов с неупругими слоями и разупорядоченной структурой // Исследования по механике материалов и конструкций.-Свердловск: УрО АН СССР, 1986.-С. 76-84.
264. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* Упругопластическое деформирование и структурное разрушение слоистых металлокомпозитов // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов и конструкций.-Свердловск: УрО АН СССР, 1989.-С. 36-55.

265. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* Закрытое деформирование и разрушение композитов с повреждениями // Трещиностойкость материалов и элементов конструкций: III Всес. симп. по механике разрушения. Житомир, 30 окт.-1 нояб. 1990 г. Тез. докл. в 3 ч. Ч. II.-Киев: ИПП АН УССР, 1990.-С. 85-86.
266. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* Оценка несущей способности слоистых металлокомпозитов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности.-1990.-№11.-С. 33-36.
267. *Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э.* Реализация ниспадающей ветви диаграммы деформирования слоистого композита // Деформирование и разрушение структурно неоднородных материалов.-Свердловск: УрО АН СССР, 1992.-С. 27-31.
268. *Ташкинов А.А., Шавшуков В.Е.* Прогнозирование механических свойств упругохрупкой углеродной матрицы в композитах // Матем. моделирование систем и процессов.-1995.-№3.-С. 97-100.
269. *Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций / Ю.В. Соколкин, А.М. Вотинков, А.А. Ташкинов, А.М. Постных, А.А. Чекалкин.-М.: Наука. Физматлит, 1996.-240 с.*
270. *Тимофеев В.Н., Забукас В.К., Красулин Ю.Л.* О механических свойствах полимер-керамики // Мех. композит. материалов.-1980.-№4.-С. 621-625.
271. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.-М.: Гостехиздат.-1953.-679 с.
272. *Томенко Ю.С., Навроцкий И.В., Долженков Ф.Е.* Деформация многослойных сталей при статическом растяжении // Изв. АН СССР: Металлы.-1970.-№3.-С. 119-125.
273. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений.-М.: Мир, 1985.-264 с.
274. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.-М.: Мир, 1975.-592 с.
275. *Удрис А.О., Упитис З.Т.* Исследование ранних стадий разрушения стеклопластика методом механической индентации // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов.-Рига, 1986.-С. 217-221.
276. *Фадеев А.Б.* Метод конечных элементов в геомеханике.-М.: Недра.-1987.-221 с.
277. *Фильштинский Л.А., Шаповалов С.П.* О сравнении статистического и детерминированного подходов к определению механических свойств волокнистых композитных материалов // Изв. АН СССР: МТТ.-1985.-№5.-С. 57-63.
278. *Фридман Я.Б.* Оценка опасности разрушения машиностроительных материалов // Теоретические основы конструирования машин.-М.: Гос. научн.-тех. изд-во машиностр. лит-ры, 1957.-С. 257-281.
279. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Ч.1. Деформация и разрушение.-М.: Машиностроение.-1974.-472 с.

280. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Ч.2. Механические испытания. Конструкционная прочность.-М.: Машиностроение.-1974.-368 с.
281. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов.-М.: Мир, 1982.-232 с.
282. Хан Х. Теория упругости.-М.: Мир, 1985.-362 с.
283. Ханарин В.С., Гольдман А.Я., Сысоев И.В. Вязкоупругие и акустические свойства частично кристаллических полимеров при гидростатическом сжатии // Мех. композит. материалов.-1986.-№1.-С. 9-13.
284. Хашин З., Розен Б. Упругие модули материалов, армированных волокнами // Прикл. мех.-М.: Мир, 1964.-№2.-С. 71-82.
285. Хилл Р. Математическая теория пластичности. - М.: Гостехиздат.-1956.-407 с.
286. Хилл Р. Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика: Сб. пер.-1964.-Т. 87, №5.-С. 127-143.
287. Хорошун Л.П., Вецало Ю.А. К теории эффективных свойств идеальнупластических композитных материалов // Прикл. мех.-1987.-Т. 23, №1.-С. 86-90.
288. Хульт Я. Поврежденность и распространение трещин // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития.-М.: Мир, 1983.-346 с.
289. Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов // Неупругие свойства композиционных материалов.-М.: Мир, 1978.-С. 104-139.
290. Цвелодуб И.Ю. Обратные задачи неупругого деформирования // Изв. РАН: МТТ.-1995.-№2.-С. 81-92.
291. Чанышев А.И. О пластичности анизотропных сред // Ж. прикл. механики и техн. физики.-1984.-№2.-С. 149-151.
292. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов.-М.: Наука, 1983.-296 с.
293. Черепанов Г.П. О закритических деформациях // Проблемы прочности.-1985.-№8.-С. 3-8.
294. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость.-М.: Наука, 1988.-192 с.
295. Шемякин Е.И. О свободном разрушении твердых тел // Докл. АН СССР.-1988.-Т. 300, №5.-С. 1090-1094.
296. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред.-М.: Наука, 1977.-400 с.
297. Шешенин С.В. Осредненные модули одного композита // Вестн. Московск. ун-та: Сер. матем. механ.-1980.-№6.-С. 78-83.
298. Шоршоров М.Х., Гукасян Л.Е., Еременко В.И. Эстафетный механизм разрушения композиционных материалов // Физ. и хим. обраб. материалов.-1985.-№5.-С. 131-135.
299. Щербак В.В., Гольдман А.Я. Кинетика поврежденности термостойкого композитного материала на основе фторопластовой матрицы, армированной углеродными волокнами // Мех. композит. материалов.-1986.-№4.-С. 739-741.

300. Эглит М.Э. Об усредненном описании процессов в периодических упругопластических средах // Мех. композит. материалов.-1984.-№5.-С. 825-831.
301. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С.Д. Волков, Ю.П. Гуськов, В.И. Кривоспичка и др. // Проблемы прочности.-1979.-№1.-С. 3-6.
302. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.-М.: ИЛ, 1963.-247 с.
303. Юшанов С.П. Вероятностная модель послойного разрушения композита и расчет надежности слоистых цилиндрических оболочек // Мех. композит. материалов.-1985.-№4.-С. 642-652.
304. Aboudi J. Generalized effective stiffness theory for non-elastic laminated composites // Int. J. Eng. Sci.-1981.-V. 19, N. 9.-P. 1269-1282.
305. Aboudi J. A continuum theory for fibre-reinforced elasticviscoplastic composites // Int. J. Eng. Sci.-1982.-V. 20, N. 5.-P. 605-621.
306. Adams D.F. Inelastic analysis of unidirectional composite subjected to transverse normale loading // J. Compos. Mater.-1969.-N. 4.-P. 310-328.
307. Adams D.F. Elastoplastic crack propagation in a transversely loaded unidirectional composites // J. Compos. Mater.-1974.-N. 8.-P. 38-54.
308. Aizicovici S., Aron M. A variational theorem in the linear theory of mixtures of two elastic solids: The quasistatic case // Acta mech.-1977.-V. 27, N. 1/4.-P. 275-280.
309. Akisanya A.R., Fleck N.A. Brittle fracture of adhesive joints // Int. J. Fracture.-1992.-V. 58, N. 2.-P. 93-114.
310. Ananth C.R., Chandra N. Numerical modeling of fiber push-out test in metallic and intermetallic matrix composites — mechanics of the failure process // J. Compos. Mater.-1995.-V. 29, N 11.-P. 1488-1514.
311. Antsiferov V.N., Tashkinov A.A., Wildemann V.E., Sevastianova I.G. Pseudoplastic deformation and failure of Y-TZP-Al₂O₃ ceramics at high temperature // Fracture Mechanics of Ceramics.-1995.-V. 11 and 12.
312. Bahei-El-Din Y.A., Drorak G.J. Plastik deformation of a laminated plate with a hole // Trans. ASME, J. Appl. Mech.-1980.-V. 47, N. 4.-P. 827-832.
313. Bahei-El-Din Y.A., Drorak G.J. Plasticity analysis of laminated composite plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech.-1982.-V. 49, N. 4.-P. 740-746.
314. Bazant Z.P. Stable states and paths of structures with plasticity or damage // J. Eng. Mech.-1988.-V. 114, N. 12.-P. 2013-2034.
315. Bazant Z.P., Belytschko T.B., Chang T. Continuum theory for strain softening // J. Eng. Mech.-1984.-V. 110, N. 12.-P. 1666-1692.
316. Bazant Z.P., Tabbara M.R. Bifurcation and stability of structures with interacting propagating cracks // Int. J. Fracture.-1992.-V. 53.-P. 273-289.
317. Bazant Z.P., Zubelewicz A. Strain — softening bar and beam: exact non-local solution // Int. J. Solids a Struct.-1988.-V. 24, N. 7.-P. 659-673.
318. Beniawski Z.T., Denkhaus H.G., Vogler U.W. Failure of fractured rock // Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.-1969.-V. 6, N. 3.-P. 323-341.
319. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanikolaou G. Asimptotic analysis for periode structures.- Amsterdam: North Holland, 1978.- 500 p.

320. *Beran M.* Statistical continuum theories.—N. Y.: Intersci. Publ., 1968.—493 p.
321. *Budiansky B.* On the elastic moduli of some heterogeneous materials // *J. Mech. a. Phys. Solids.*—1965.—V. 13.—P. 223.
322. *Carpinteri A.* Cusp catastrophe interpretation of fracture instability // *J. Mech. a. Phys. Solids.*—1989.—V. 37, N 5.—P. 567–582.
323. *Carpinteri A., Ferro G.* Variation of strength related to structural size: an experimental and statistical investigation / *Structural Integrity: Experiments—Models—Applications*, Editors: K.—H. Schwable, C. Berger.—V. II.—London: EMAS. 1994.—P. 1429–1438.
324. *Chen W.H., Lee S.S.* Numerical and experimental failure analysis of composite laminates with bolted joints under bending loads // *J. Compos. Mater.*—1995.—V. 29, N. 1.—P. 15–36.
325. *Choi N.S., Yamaguchi H., Takahashi K.* Fracture behavior of unidirectional commingled-yarn-based carbon fiber/polyamide 6 composite under three-point bending // *J. Compos. Mater.*—1996.—V. 30, N 7.—P. 760–784.
326. *Chou P.C., Chou D.K.* Plastic flow rule of laminated composites // *J. Compos. Mater.*—1976.—V. 10, N 1.—P. 55–68.
327. *Chou S.C., Orringer O., Rainey J.H.* Post-failure behavior of laminates. 1. No stress concentration // *J. Compos. Mater.*—1976.—V. 10, N. 4.—P. 371–381.
328. *Duszer M., Pezzyna P.* Plasticity of damaged solids and shear band localization // *Ing. Arch.*—1988.—N. 5.—P. 380–392.
329. *Dvorak G.J., Bahei-El-Din Y.A., Macheret Y., Liu C.H.* An experimental study of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminum composite // *J. Mech. a. Phys. Solids.* — 1988.—V. 36, N. 6.—P. 655–687.
330. *Engelstad S.P., Reddy J.N.* Probabilistic methods for the analysis of metal-matrix composites // *Compos. Sci. a. Technol.*—1994.—V. 50.—P. 91–107.
331. *Fonseka G.U., Krajcinovic D.* The continuous damage theory of brittle materials. Part 2: Uniaxial and plane response modes // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*—1981.—V. 48, N. 4.—P. 816–824.
332. *Ganesh V.K., Naik N.K.* Failure behavior of plain weave fabric laminates under on-axis uniaxial tensile loading: III – Effect of fabric geometry // *J. Compos. Mater.*—1996.—V. 30, N. 16.—P. 1823–1856.
333. *Griffin O.H., Jr.* Three-dimensional inelastic finite element analysis of laminated composites // *J. Compos. Mater.*—1981.—V. 15, N 6.—P. 543–560.
334. *Hahn H.T., Tsai S.W.* On the behavior of composite laminates after initial failures // *J. Compos. Mater.*—1974.—V. 8, N. 3.—P. 288–305.
335. *Hahn H.T., Tsai S.W.* Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminates // *J. Compos. Mater.*—1983.—N. 7.—P. 102–118.
336. *Hashin Z.* Cumulative damage theory for composite materials: residual life and residual strength methods // *Compos. Sci. a. Technol.*—1985.—V. 23.—P. 1–19.
337. *Hashin Z., Rotem A.* A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.*—1973.—V. 7.—P. 448–464.

338. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *J. Mech. a. Phys. Solids.*-1963.-V. 11, N. 2.-P. 127-142.
339. Hershey A.V. The elasticity of anisotropic aggregate of anisotropic cubic crystals // *J. Appl. Mech.*-1954.-V. 21.-P. 236.
340. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. a. Phys. Solids.*-1965.-V. 13, N. 4.-P. 213-225.
341. Hudson J.A., Brown E.T., Fairhurst Ch. Optimizing the control of the rock failure in servo-controlled laboratory tests. // *Rock Mech.*-1971.-V. 3, N 4.-P. 217-224.
342. Hudson J.A., Crouch S.L., Fairhurst Ch. Soft, stiff and servo-controlled testing machines: A review with reference to rock failure // *Eng. Geol.*-1972.-V. 6.-P. 155-189.
343. Kafka V. Elastic-plastic deformation of a periodically nonhomogeneous medium // *Acta techn. CSAV.*-1965.-V. 10, N 4.-P. 404-451.
344. Kerner E.H. The elastic and thermo-elastic properties of composite media // *Proc. Roy. Soc. London B.*-1956.-V. 69.-P. 573-579.
345. Kim S.J., Shin E.S. A Termoviscoplastic theory for composite materials by using a matrix-partitioned unmixing-mixing scheme // *J. Compos. Mater.*-1996.-V. 30, N 15.-P. 1647-1669.
346. Kim Y., Davalos J.F., Barbero E.J. Progressive failure analysis of laminated composite beams // *J. Compos. Mater.*-1996.-V. 30, N. 5.-P. 536-560.
347. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*-1985.-V. 52, N. 4.-P. 829-834.
348. Krajcinovic D., Fonseka G.U. The continuous damage theory of brittle materials. Part 1: General theory // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*-1981.-V. 48, N. 4.-P. 809-815.
349. Krawczak P., Pabiot J. Fracture mechanics applied to glass fibre/epoxy matrix interphase characterization // *J. Compos. Mater.*-1995.-V. 29, N. 17.-P. 2230-2253.
350. Kreisekorte H., Funk W. Die Simulation einer "harten" Werkstoffprüfmaschine.-Metallprüfung.-1970.-B. 12, N 1.-S. 1-6.
351. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // *Z. Phys.*-1958.-V. 151.-P. 504.
352. Kröner E. Further applications of the sistematic theory of materials with disordered constitution // *Mech. Compos. Mater.: Adv. Proc. IUTAM Symp., Blacksburg, 16-19 Aug., 1982.-New York.*-1983.-P. 31-46.
353. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // *Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol.*-1985.-V. 107, N. 1.-P. 83-89.
354. Li D.S., Wisnom M.R. Micromechanical modelling of SCS-6 fibre reinforced Ti-6Al-4V under transverse tension - effect of fibre coating // *J. Compos. Mater.*-1996.-V. 30, N. 5.-P. 561-588.

355. *Lissenden C.J., Lerch B.A., Herakovich C.T.* Response of SiC/Ti under combined loading. Part III: Microstructural evaluation // *J. Compos. Mater.*-1996.-V. 30, N 1.-P. 84-108.
356. *Lubarda V.A., Krajcinovic D.* Damage tensors and the crack density distribution // *Int. J. Solids Struct.*-1993.-V. 30, N. 20.-P. 2859-2877.
357. *Margoldova J., Van Mier J.G.M.* Simulation of compressive fracture in concrete / *Structural Integrity: Experiments-Models-Applications*, Editors: K.-H. Schwable, C. Berger.-V. II.-London: EMAS. 1994.-P. 1399-1408.
358. *Mises R.* Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen // *Z. Angew. Math. u. Mech.*-1928.-8, H. 3.-S. 161-185.
359. *Mou Y., Han R.P.S.* Damage zones based on Dugdale model for materials // *Int. J. Fract.*-1994.-V. 68, N. 3.-P. 245-259.
360. *Needleman A.* Continuum mechanics analyses of plastic flow localization // *J. Mech. Behav. Metals.*-1990-V. 2, N. 3-4.-P. 293-313.
361. *Papanicolaou G.C., Bacos D.* Effect of treatment conditions on the mode I delamination fracture toughness of sandwich structures // *J. Compos. Mater.*-1995.-V. 29, N. 17.-P. 2295-2316.
362. *Pastor J.Y., Planas J., Elises M.* New technique for mechanical characterization of ceramics at room and at elevated temperature / *Structural Integrity: Experiments-Models-Applications*, Editors: K.-H. Schwable, C. Berger.-V. 1.-London: EMAS.-1994.-P. 183-192.
363. *Petit P.H., Waddoups M.E.* A method of predicting the nonlinear behaviour of laminated composites // *J. Compos. Mater.*-1969.-V. 3.-P. 2-19.
364. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. // *Z. Angew. Math. u. Mech.*-1929.-Bd. 9, N. 4.-S. 49-64.
365. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localisation of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. a. Phys. Solids.*-1975.-V. 23, N. 6.-P. 371-394.
366. *Rummel F., Fairhurst Ch.* Determination of the postfailure behaviour of brittle rock using a servo-controlled testing machine.-*Rock Mech.*-1970.-V. 9.-P. 241-248.
367. *Sawicki A.* Engineering mechanics of elasto-plastic composites // *Mech. Mater.*-1983.-V. 2, N 3.-P. 217-231.
368. *Shahid I., Chang F.K.* An accumulative damage model for tensile and shear failures of laminated composite plates // *J. Compos. Mater.*-1995.-V. 29, N 7.-P. 926-981.
369. *Shokrieh M.M., Lessard L.B.* Effects of material nonlinearity on the three-dimensional stress state of pin-loaded composite laminates // *J. Compos. Mater.*-1996.-V. 30, N. 7.-P. 839-861.
370. *Snyder B.C., Wadsworth J., Sherby O.D.* Superplastic behavior in ferrous laminated composites // *Acta Met.*-1984.-V. 32, N. 6.-P. 919-932.
371. *Supartono F., Sidoroff F.* Anisotropic damage modelling for brittle elastic materials // *Arch. Mech.*-1985.-V. 37, N. 4-5.-P. 521-534.
372. *Tashkinov A.A., Wildeman V.E., Anoshkin A.N.* Damage accumulation stability on the postcritical deformation stage in heterogeneous media

- // Euromech Colloquium 303 "Influence of Microstructure of the Constitutive Equations in Solids", May 11-19, 1993, Moscow-Perm, Russia.-P. 62-63.
373. *Tashkinov A.A., Wildeman V.E., Anoshkin A.N.* Fracture and equilibrium damage accumulation on postcritical deformation stage // Eighth International Conference on Fracture, ICF-8, Kiev, 8-14.06.1993. Fracture Mechanics: Successes and Problems. Collection of Abstracts. Part 1.-Lviv, 1993.-P. 58-59.
374. *Van der Pol C.* On the rheology of concentrated dispersions // Rheol. Acta.-1958.-V. 1.-P. 108.
375. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik.-B.: Teubner, 1928.-962 s.
376. *Wakai F.* Superplasticity of ceramics // Ceramics International.-1991.-V. 17.-P. 153-163.
377. *Wawersik W.R., Fairhurst Ch.* A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments // Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.-1970.-V. 7.-P. 561-575.
378. *Whitney J.M.* Compression loading of laminates: in situ failure of unidirectional plies // J. Compos. Mater.-1995.-V. 29, N. 6.-P. 820-832.
379. *Wnuk M.P., Kriz R.D.* CDM model of damage accumulation in laminated composites // Int. J. Fract.-1985.-V. 28, N. 3.-P. 121-138.
380. *Xu L.Y.* Study on the characteristic curve of stiffness degradation caused by transverse matrix cracking in multidirectional composite laminates // J. Compos. Mater.-1996.-V. 30, N 7.-P. 820-838.
381. *Yeh R. H. T.* Variational bounds of unidirectional fibereinforced composites // J. Appl. Phys.-1973.-V. 44, N. 2.-P. 662-675.
382. *Yin X.C., Liu X.H.* Investigations of fracture instability in crack growth for several metals-Part I: Experimental results // Int. J. Fract.-1994/1995.-V. 69, N. 2.-P. 123-143.

Убедительная просьба

Ко всем читающим и рассматривающим книги, заметки, фотографии и т.д.

- 1) Никак не подписывать, раскрашивать и отрезать не делать;
- 2) при перелистывании страниц пальцы отнюдь не мочить;
- 3) перелистывать медленно и аккуратно, чтобы нечаянно углы страниц и даже иногда рисунки не загнуть и не сорвать, а также пролежку или напироксной бумаги между рисунками не испортить;
- 4) при рассмотрении иллюстраций, фотографий и рисунков в книгах не курить и табачный дымочек их не обдывать;
- 5) перед началом рассматривания и чтения руки тщательно мыть потными руками такие пальцы не брать;
- 6) из самолета рисунки не вытаскивать, фотографировать и т.д. пальцами не прикасаться;
- 7) Обложку или переплет книги перед чтением обертывать в бумагу;
- 8) листы книги для памяти не загибать;
- 9) в кармане книги не носить или же устроить при этом особую предосторожность, чтобы книга не испачкалась, не измялась.

БИБЛИОТЕКА
КОЛОДКА
ОСКОРКА