

И. А. ТАЙМАНОВ

**ЛЕКЦИИ
ПО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

Институт компьютерных исследований

2002

Интернет-магазин
MANIFESTS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - техника
-

Тайманов И. А.

Лекции по дифференциальной геометрии. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 176 стр.

Изложены основы дифференциальной геометрии кривых и поверхностей, а также несколько дополнительных разделов, посвященных теории групп Ли и элементам теории представления. Книга возникла из курса лекций, прочитанных автором на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. Несмотря на компактность книги, все вопросы разобраны достаточно доступно, имеются задачи для самостоятельного решения.

Может служить учебным пособием для студентов механико-математических и физических специальностей университетов.

ISBN 5-93972-105-2

© И. А. Тайманов, 2002

<http://rcd.ru>

Содержание

Предисловие	5
ЧАСТЬ I. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ	7
ГЛАВА 1. Теория кривых	9
1.1. Основные понятия теории кривых	9
1.2. Кривые на плоскости	12
1.3. Кривые в трехмерном пространстве	15
1.4. Группа ортогональных преобразований	17
ГЛАВА 2. Теория поверхностей	23
2.1. Метрики на регулярных поверхностях	23
2.2. Кривизна линии на поверхности	26
2.3. Гауссова кривизна	29
2.4. Девриационные уравнения и теорема Бонне	32
2.5. Теорема Гаусса	38
2.6. Ковариантное дифференцирование и геодезические	39
2.7. Уравнения Эйлера-Лагранжа	44
2.8. Формула Гаусса-Бонне	51
2.9. Минимальные поверхности	59
ЧАСТЬ II. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ	63
ГЛАВА 3. Гладкие многообразия	65
3.1. Топологические пространства	65
3.2. Гладкие многообразия и отображения	68
3.3. Тензоры	76
3.4. Вложение гладких многообразий в евклидовы пространства	80
ГЛАВА 4. Римановы многообразия	82
4.1. Метрический тензор	82
4.2. Аффинная связность и ковариантное дифференцирование	83
4.3. Римановы связности	88

4.4. Кривизна	91
4.5. Геодезические	96
ГЛАВА 5. Примеры римановых многообразий и их приложений	103
5.1. Плоскость Лобачевского	103
5.2. Псевдоевклидовы пространства и их приложения в физике	110
ЧАСТЬ III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ	115
ГЛАВА 6. Минимальные поверхности и комплексный анализ	117
6.1. Конформная параметризация поверхности	117
6.2. Теория поверхностей в терминах конформного параметра	122
6.3. Представление Вейерштрасса	128
ГЛАВА 7. Элементы теории групп Ли	134
7.1. Линейные группы Ли	134
7.2. Алгебры Ли	142
7.3. Геометрия простейших линейных групп	148
ГЛАВА 8. Элементы теории представлений	155
8.1. Основные понятия теории представлений	155
8.2. Представления конечных групп	160
8.3. О представлениях компактных групп	169
Литература	174

Предисловие

Эта книга основана на трех брошюрах «Лекции по дифференциальной геометрии» [15, 16, 17], изданных в 1998 и 1999 годах в Новосибирском государственном университете и излагавших лекции, которые читаются нами с 1997 года в весенних семестрах для студентов второго курса механико-математического факультета НГУ.

Краткость изложения соответствует краткости и возможностям семестрового курса. Собственно курс состоял из глав 1, 2 и 5, которые излагались в полном объеме, но почти весь материал по плоскости Лобачевского излагался без доказательств, которые оставались в качестве упражнений.

Дополнительно рассказывались некоторые примеры гладких многообразий (сферы и простейшие линейные группы) и объяснялось, как понятия двумерной геометрии обобщаются на многомерный случай. В главах 3 и 4 это изложено значительно подробнее, чем в прочитанном курсе. Это было сделано и с целью поддержки курса «Риманова геометрия», который читается на четвертом курсе студентам, специализирующимся в «чистой» математике.

Главы 6, 7 и 8 являются расширенными изложениями обзорных лекций о связях геометрии с другими областями математики, прочитанных в 1997–1999 годах. Так как представления групп не всегда излагаются в курсе алгебры, мы остановились на них подробнее при написании брошюр (в частности, на лекциях мы излагали без доказательств лишь простейшие факты из теории представлений конечных групп и указывали на связь характеров с базисами Фурье), хотя основной идеей было объяснить топологическое строение простейших групп Ли как важных примеров гладких многообразий.

Мы хотим обратить внимание, что, следуя принятому в дифференциальной геометрии соглашению, мы будем подразумевать суммирование по повторяющимся верхнему и нижнему индексам, если не оговорено противное. Например,

$$a_j^i v^j := \sum_{j=1}^n a_j^i v^j, \quad \text{где } v \in V, n = \dim V.$$

Это правило почти не используется в учебной литературе, хотя является общепринятым в научных публикациях, особенно по физическим приложениям дифференциальной геометрии.

При составлении списка литературы мы исходили из возможностей библиотек российских университетов. Список литературы для дальнейшего чтения по геометрии и топологии можно найти в книге [3].

Новосибирск, январь 2002 года

И. А. Тайманов

Часть I

Кривые и поверхности

ГЛАВА 1

Теория кривых

1.1. Основные понятия теории кривых

Пусть \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n с координатами x^1, \dots, x^n . Расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ определяется по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}.$$

Для краткости n -мерное векторное пространство над полем \mathbb{R} мы также будем обозначать через \mathbb{R}^n , считая, что каждый раз понятно из контекста, о чем именно идет речь. Через (v, w) будем обозначать стандартное скалярное произведение в векторном пространстве \mathbb{R}^n :

$$(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^n w^n. \quad (1.1)$$

Под словом «гладкий» мы будем понимать «дифференцируемый необходимое число раз». Любой желающий может восстановить оценки необходимой гладкости во всех утверждениях или понимать выражение «гладкий» как «дифференцируемый бесконечное число раз».

Под параметризованной *кривой* в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n понимается линия, заданная функциями от одномерного параметра:

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Ради краткости мы ограничимся случаями, когда этот параметр принимает значения на отрезке $[a, b]$ или на всей прямой \mathbb{R} . При этом определении под *точкой* P кривой γ понимается образ точки вместе со значением параметра $t \in [a, b]$:

$$P = (\gamma(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b]).$$

Мы ограничимся изучением регулярных кривых:

- кривая γ называется *гладкой*, если отображение γ является гладким.
- гладкая кривая γ называется *регулярной*, если во всех внутренних точках интервала $[a, b]$ производная γ по параметру t не равна нулю:

$$\frac{d\gamma}{dt}(s) \neq 0 \text{ при } a < s < b$$

и существуют ненулевые пределы производных справа и слева в конечных точках a и b соответственно.

Наше определение регулярной кривой несколько отличается от других (см., например, [11]): ради краткости мы исключаем возможность появления особых точек, в которых $d\gamma/dt = 0$.

Естественно отождествлять кривые, которые получаютя прохождением одной и той же линии с разными скоростями:

- регулярные кривые

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ и } \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

называются *эквивалентными*, если существует отображение

$$\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$$

такое, что φ обратимо, отображения φ и φ^{-1} являются гладкими и выполняется соотношение

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \text{ при } t \in [a_1, b_1].$$

Мы будем отождествлять эквивалентные кривые, а t и $s = \varphi(t)$ рассматривать как разные параметры на одной и той же кривой.

- *длиной* (параметризованной) кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $-\infty < a < b < +\infty$, называется значение интеграла

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1(t)}{dt} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^n(t)}{dt} \right)^2} dt, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Верна следующая лемма.

Лемма 1.1. *Длина кривой не зависит от выбора параметра на кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задают одну и ту же кривую и параметры $t \in [a_1, b_1]$ и $s \in [a_2, b_2]$ связаны таким монотонным отображением $s = s(t)$, что производная ds/dt всюду существует и положительна. Тогда из теорем о производной сложной функции и замены переменной интегрирования следует, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \frac{ds}{dt} \right| dt = \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{d\gamma_2}{ds} \right| ds.$$

Лемма 1.1 доказана.

Мы видим, что это определение длины удовлетворяет естественным требованиям: длина двух последовательно пройденных кривых равна сумме их длин и для отрезка прямой длина совпадает с расстоянием между концами отрезка.

С понятием длины связано понятие *натурального параметра* — такого параметра l , что длина участка кривой, отвечающего изменению параметра l от a_1 до $b_1 > a_1$, равна $(b_1 - a_1)$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2. 1) *Если параметр $l \in [a, b]$ на кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ натурален, то*

$$\left| \frac{d\gamma}{dl} \right| = 1$$

в гладких точках.

2) *На каждой регулярной кривой существует натуральный параметр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждение 1 немедленно следует из определения длины кривой.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ кривая с параметром t . Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|.$$

Так как его правая часть является гладкой функцией, то существует и единственно решение этого уравнения с начальными данными $l(a) = 0$ (см. [13]). Очевидно, что $l(b) = L(\gamma)$. Возьмем функцию, обратную к l : $t = t(l) : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$, и определим l как параметр на γ по формуле:

$$\gamma_0(l) = \gamma(t(l)).$$

Очевидно, что

$$\left| \frac{d\gamma_0}{dl} \right| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \frac{dt}{dl} = 1.$$

Следовательно, l — натуральный параметр на γ . Лемма 1.2 доказана.

1.2. Кривые на плоскости

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая на двумерной плоскости. Предположим, что на ней выбран натуральный параметр l . Считая плоскость ориентированной, выберем в каждой точке кривой такой базис векторов v, n в \mathbb{R}^2 , что

1) $v = d\gamma/dl$ и, в частности, так как параметр l натурален, $|v| = 1$;

2) вектор n ортогонален вектору v , имеет единичную длину, и базис (v, n) положительно ориентирован.

Этими условиями реперы (v, n) определяются однозначно. Они называются *реперами Френе*.

Теорема 1.1. *При изменении натурального параметра l вдоль плоской кривой γ репер Френе деформируется согласно уравнениям:*

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Доказательство.

Так как $(v, v) \equiv (n, n) \equiv 1$, то

$$\frac{d(v, v)}{dl} = 2 \left(\frac{dv}{dl}, v \right) = 0 \text{ и } \frac{d(n, n)}{dl} = 2 \left(\frac{dn}{dl}, n \right) = 0.$$

Следовательно, $v \perp dv/dl$ и $n \perp dn/dl$. Так как (v, n) — ортонормированный базис в \mathbb{R}^2 , существуют такие функции $\alpha(l)$ и $\beta(l)$, что

$$\frac{dv}{dl} = \alpha n, \quad \frac{dn}{dl} = \beta v.$$

Но $(v, n) \equiv 0$ и поэтому

$$\frac{d(v, n)}{dl} = \left(\frac{dv}{dl}, n \right) + \left(v, \frac{dn}{dl} \right) = \alpha + \beta = 0.$$

Положим $k = \alpha = -\beta$. Теорема 1.1 доказана.

Мы пришли к двум важным понятиям:

- уравнения (1.3) называются *уравнениями Френе* для плоской кривой;
- коэффициент k , входящий в (1.3), называется *кривизной (плоской) кривой*;
- *радиусом кривизны* кривой называется величина $R = |k|^{-1}$.

Задача 1.1. Если кривизна k плоской кривой γ постоянна и не равна нулю, то γ является дугой окружности радиуса $R = |k|^{-1}$. Если кривизна k плоской кривой γ всюду равна нулю, то γ является участком прямой.

Для решения этой задачи достаточно найти решения уравнения (1.3) с постоянными коэффициентами.

Кривизна кривой определяет кривую с точностью до движений плоскости \mathbb{R}^2 .

Теорема 1.2. 1) Пусть $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда существует гладкая кривая $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, кривизна которой равна $k(l)$.

2) Пусть $\gamma_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\gamma_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ натурально параметризованные регулярные кривые и их кривизны совпадают: $k_1(l) = k_2(l)$ для всех $l \in [0, L]$. Тогда существует такое движение $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сохраняющее ориентацию, что $\gamma_2(l) = \varphi(\gamma_1(l))$ для всех $l \in [0, L]$.

Доказательство.

1) Выберем какой-то положительно ориентированный ортонормированный базис (v_0, n_0) в \mathbb{R}^2 и рассмотрим решение уравнения (1.3) с начальными условиями $v(0) = v_0, n(0) = n_0$. Это

обыкновенное дифференциальное уравнение в \mathbb{R}^4 с гладкой правой частью. Поэтому такое решение существует и единственно [13]. Скалярные произведения векторов v и n удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d(v, v)}{dl} = -2k(v, n), \quad \frac{d(n, n)}{dl} = 2k(v, n), \quad \frac{d(v, n)}{dl} = 0,$$

решение которой с начальными данными $(v_0, v_0) = (n_0, n_0) = 1$, $(v_0, n_0) = 0$ тоже единственно, и заметим, что оно постоянно. Поэтому при любом значении параметра l векторы $v(l)$ и $n(l)$ составляют ортонормированный базис в \mathbb{R}^2 . Теперь определим кривую γ по формуле

$$\gamma(l) = \int_0^l v(s) ds.$$

Легко заметить, что l — натуральный параметр на кривой, v — вектор скорости по отношению к данному параметру и, так как (v, n) ортонормированный базис и $dv/dl = kn$, k — кривизна кривой γ .

2) Напомним, что группа движений евклидова пространства \mathbb{R}^2 , сохраняющих ориентацию, порождена сдвигами $T_a: x \rightarrow x + a$ и вращениями $\Omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вокруг неподвижной точки [1].

Реперы Френе кривых γ_1 и γ_2 обозначим через (v_1, n_1) и (v_2, n_2) соответственно. Определим движение φ как композицию сдвига T_a и вращения $\Omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вокруг точки $\gamma_2(0)$:

$$\varphi = \Omega \cdot T_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

где

$$a = \gamma_2(0) - \gamma_1(0), \quad \Omega v_1(0) = v_2(0).$$

Репер Френе кривой $\varphi(\gamma_1(l))$ имеет вид $(\Omega v_1, \Omega n_1)$. Так как (v_1, n_1) и (v_2, n_2) удовлетворяют одному и тому же уравнению (1.3) и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \Omega v_1 \\ \Omega n_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega v_1 \\ \Omega n_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то $(\Omega v_1, \Omega n_1)$ удовлетворяет тому же самому уравнению. Более того, $(\Omega v_1(0), \Omega n_1(0)) = (v_2(0), n_2(0))$ согласно выбору Ω . Из единственности решения уравнения (1.3) с заданными начальными данными следует равенство:

$$(\Omega v_1(t), \Omega n_1(t)) \equiv (v_2(t), n_2(t)).$$

Из выбора сдвига T_a вытекает

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(0) + \int_0^t v_2(t) dt = \varphi(\gamma_1(t)).$$

Теорема 1.2 доказана.

1.3. Кривые в трехмерном пространстве

В случае пространственных кривых нормаль к кривой может быть определена бесконечным числом способов. Поэтому мы будем рассматривать лишь бирегулярные кривые:

- натурально параметризованная регулярная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *бирегулярной*, если $d^2\gamma/dl^2 \neq 0$ всюду;
- *нормалью* бирегулярной кривой называется вектор

$$n = \frac{d^2\gamma}{dl^2} / \left| \frac{d^2\gamma}{dl^2} \right|;$$

- *кривизной* (пространственной) кривой называется величина

$$k = \left| \frac{d^2\gamma}{dl^2} \right|. \quad (1.4)$$

Если представить кривую $\gamma(l)$ как траекторию материальной точки, которая движется вдоль кривой с единичной скоростью (т. е. $|d\gamma/dl| \equiv 1$), то кривизна кривой есть модуль вектора ускорения.

Чтобы получить *репер Френе* кривой в \mathbb{R}^3 дополним векторы $v = d\gamma/dl$ и n третьим вектором — *бинормалью*

$$b = [v \times n]$$

до ортонормированного базиса в \mathbb{R}^3 .

Заметим, что при этом определении кривизна всегда положительна в отличие от случая плоских кривых.

Теорема 1.3. Если γ — бирегулярная кривая в \mathbb{R}^3 , то при изменении натурального параметра l репер Френе деформируется согласно уравнениям Френе для пространственной кривой:

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Доказательство.

Оно аналогично доказательству теоремы 1.1. Так как $(v(l), n(l), b(l))$ — ортонормированный базис при каждом значении параметра l , то, в частности, длины этих векторов сохраняются, а, следовательно, производная каждого из этих векторов ортогональна ему и поэтому

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \frac{d(v, n)}{dl} &= a_{12} + a_{21} = 0, & \frac{d(n, b)}{dl} &= a_{23} + a_{32} = 0, \\ \frac{d(v, b)}{dl} &= a_{13} + a_{31} = 0. \end{aligned}$$

По определению n мы имеем $a_{12} = k$ и $a_{13} = 0$. Полагая $\omega = a_{32}$, мы приходим к уравнениям (1.5). Теорема 1.3 доказана.

Величина ω , входящая в (1.5), называется *кручением* кривой γ . Этот выбор термина так же имеет под собой веские основания:

Задача 1.2. Пусть $k > 0$ и ω постоянны. Тогда винтовая кривая $\gamma(t) = (R \cos(\lambda t), R \sin(\lambda t), \mu t)$ при $\lambda = \sqrt{k^2 + \omega^2}$, $a = -\omega/\lambda$ и $R = k/\lambda^2$ натурально параметризована, ее кривизна всюду равна k , а ее кручение тождественно равно ω .

Имеет место и аналог теоремы 1.2.

Теорема 1.4. 1) Пусть $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\omega : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем функция k положительна. Тогда существует гладкая кривая $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, кривизна которой равна $k(l)$ и кручение которой равно $\omega(l)$.

2) Пусть $\gamma_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\gamma_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованные бирегулярные кривые и их кривизны и кручения совпадают: $k_1(l) = k_2(l)$, $\omega_1(l) = \omega_2(l)$ для всех $l \in [0, L]$. Тогда существует такое движение $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, сохраняющее ориентацию, что $\gamma_2(l) = \varphi(\gamma_1(l))$ для всех $l \in [0, L]$.

Доказательство теоремы 1.4 аналогично доказательству теоремы 1.2.

1.4. Группа ортогональных преобразований

Уравнения Френе (1.3) и (1.5) выводились из того, что скалярные произведения между векторами, которые входят в реперы Френе, сохраняются. Мы сделаем сейчас краткое отступление, посвященное ортогональной группе и выводу этих уравнений с общей точки зрения.

Линейные преобразования $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторного пространства \mathbb{R}^n , сохраняющие скалярное произведение (1.1), называются *ортогональными*. Следующая лемма очевидна.

Лемма 1.3. Множество ортогональных преобразований образует группу (ортогональную группу $O(n)$) относительно операции обычной композиции: $A \cdot B(v) = A(B(v))$.

Множество линейных преобразований $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ отождествим с множеством $(n \times n)$ -мерных матриц следующим образом: пусть e_1, \dots, e_n ортонормированный базис в \mathbb{R}^n , тогда матрица $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ взаимно однозначно отвечает преобразованию, действующему на базисных векторах по формуле:

$$A e_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j.$$

Лемма 1.4. Линейное преобразование ортогонально, если и только если задающая его матрица A удовлетворяет уравнениям

$$A^T A = E_n, \quad (1.6)$$

где A^T — транспонированная матрица A ($a_{jk}^T = a_{kj}$) и E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Запишем скалярное произведение (1.1) в виде произведения матриц (здесь мы рассматриваем векторы как $(n \times 1)$ -матрицы):

$$(v, w) = v^T E_n w.$$

Тогда

$$(Av, Aw) = (Av)^T E_n (Aw) = v^T A^T E_n Aw = v^T (A^T A)w$$

и A ортогонально, если и только если

$$v^T (A^T A)w = v^T E_n w \text{ для всех } v, w \in \mathbb{R}^n,$$

что эквивалентно (1.6). Лемма 1.4 доказана.

Рассматривая матричные элементы a_{jk} как координаты в n^2 -мерном пространстве, отождествим пространство $(n \times n)$ -мерных матриц с n^2 -мерным евклидовым пространством \mathbb{R}^{n^2} . Ортогональная группа выделяется в нем $n(n+1)/2$ полиномиальными уравнениями (1.6):

$$F_{jk}(a_{11}, \dots, a_{nn}) - \delta_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{mj} a_{mk} - \delta_{jk} = 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq n. \quad (1.7)$$

Напомним теперь теорему о неявной функции (см., например, [6]):

Теорема о неявной функции. Пусть $F: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение прямого произведения областей $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^k$ с координатами x и y , соответственно, в \mathbb{R}^n . Пусть $F(x_0, y_0) = 0$ и в $(x_0, y_0) \in U \times V$ матрица

$$J = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^m} \right)_{1 \leq j, m \leq n} \quad (1.8)$$

обратима. Тогда существует такая окрестность $W \subset U \times V$ точки (x_0, y_0) и такая окрестность $V_0 \subset V$ точки $y_0 \in \mathbb{R}^k$, что

- 1) в V_0 определены гладкие функции ψ^1, \dots, ψ^n ;
- 2) $F(x, y) = 0$ для $(x, y) \in W$, если и только если $x^1 = \psi^1(y), \dots, x^n = \psi^n(y)$.

Матрица

$$\left(\frac{\partial F^j(x_0)}{\partial x^m} \right)$$

называется *матрицей Якоби* (или *якобианом*) отображения F в точке x_0 .

Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности точки (x_0, y_0) множество нулей отображения F устроено как график отображения $V_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и поэтому точки этого множества гладко параметризуются точками области из \mathbb{R}^k .

Теорема 1.5. Пусть M — множество точек из \mathbb{R}^{n+k} . Тогда следующие условия эквивалентны:

1) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как график гладкого отображения:

$$\begin{aligned} x^1 &= \psi^1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \\ &\dots \\ x^n &= \psi^n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

(после подходящей перенумерации координат x^1, \dots, x^{n+k});

2) в достаточно малой окрестности каждой своей точки M задается как множество нулей такого гладкого отображения $F: W \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, что в этой окрестности матрица (1.8) обратима (после подходящей перенумерации координат x^1, \dots, x^{n+k}).

Доказательство.

Из теоремы о неявной функции следует, что условие 2 влечет условие 1. Обратное тоже верно: зададим F формулами $F^1(x) = x^1 - \psi^1(x^{n+1}, \dots, x^{n+k}), \dots, F^n(x) = x^n - \psi^n(x^{n+1}, \dots, x^{n+k})$. Теорема 1.5 доказана.

Подмножество M , для которого выполнено любое из двух эквивалентных условий из теоремы 1.5, называется k -мерным *гладким подмногообразием* (без края) в \mathbb{R}^{n+k} .

Пусть в окрестности точки $x \in M$ подмногообразие M задается как график отображения (1.9). Тогда $y^1 = x^{n+1}, \dots, y^k = x^{n+k}$ задают *локальные координаты* в окрестности x и функция f на M называется *гладкой в точке x* , если она является гладкой как функция от локальных координат: $f = f(y^1, \dots, y^k)$. Аналогично вводится понятие гладкости и для других объектов на подмногообразиях и, в частности, для векторных полей.

Пусть M является k -мерным подмногообразием \mathbb{R}^{n+k} и $x \in M$. Рассмотрим множество всех гладких путей на M , проходящих через точку x и лежащих в ее окрестности, заданной формулами (1.9). Каждому такому пути γ сопоставим его вектор

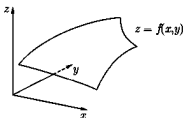


Рис. 1. График функции от двух переменных.

скорости в точке x : $v = d\gamma(t_0)/dt$, где $\gamma(t_0) = x$. Множество таких векторов образует касательное пространство $T_x M$ к подмногообразию M в точке x .

Лемма 1.5. Пусть M — k -мерное подмногообразие в \mathbb{R}^{n+k} . Тогда касательное пространство в любой его точке является k -мерным векторным пространством.

Доказательство.

Любой путь γ на M , проходящий через x , является поднятием пути $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ с помощью (1.9). Поэтому вектор скорости $d\gamma/dt$ имеет вид

$$\frac{d\gamma}{dt} = B \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right) = \left(\Psi_* \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right), \left(\frac{d\gamma_0}{dt} \right) \right),$$

где Ψ_* — дифференциал отображения $\Psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ вида (1.9). Линейное отображение B имеет максимальный ранг k и потому является изоморфизмом на образ: оно задает изоморфизм векторного пространства \mathbb{R}^k и $T_x M$. Лемма 1.5 доказана.

Существует и иное, эквивалентное, определение касательного пространства:

Задача 1.3. Если подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ определено в окрестности W точки $x \in M$ как множество нулей отображения $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, то касательное пространство к M в точке x совпадает с ядром линейного отображения

$$F_* : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n : F_*(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon v) - F(x)}{\varepsilon}.$$

Красивыми примерами гладких подмногообразий являются ортогональные группы.

Теорема 1.6. *Ортогональная группа $O(n)$ является $n(n-1)/2$ -мерным гладким подмногообразием n^2 -мерного евклидова пространства, образованного $(n \times n)$ -матрицами. Касательное пространство $T_E O(n)$ в единице группы при этом состоит из всех кососимметрических матриц.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Тождественное преобразование, задаваемое единичной $(n \times n)$ -матрицей E_n , является единицей группы $O(n)$. В окрестности $E_n \in O(n)$ разделим переменные a_{jk} на две группы: x отвечает $j \leq k$, y отвечает $j > k$. Рассмотрим отображение

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2},$$

заданное многочленами (1.7). Легко посчитать, что в точке $E_n \in \mathbb{R}^{n^2}$ при $j \leq k, r \leq s$ выполняются равенства

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial a_{rs}} = \begin{cases} 2 & \text{при } j = r, k = s \\ 1 & \text{при } j = r, k = s, j \neq k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, в окрестности точки $E_n \in \mathbb{R}^{n^2}$ матрица $\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^m}\right)$ обратима, и, так как $O(n)$ выделяется уравнениями $F = 0$, то по теореме о неявной функции $O(n)$ является гладким подмногообразием в окрестности точки E_n .

Если $A \in O(n)$, то определим отображение F_A по формуле $F_A(X) = F(X \cdot A^{-1})$. Так как $O(n)$ — группа, $O(n)$ также определяется уравнениями $F_A = 0$. Из определения F_A следует, что ранг якобиана отображения F_A в точке A совпадает с рангом якобиана отображения F в точке E_n и, следовательно, равен $n(n+1)/2$. Отсюда заключаем, что $O(n)$ является гладким подмногообразием в окрестности любой своей точки.

Размерность подмногообразия $O(n)$ равна $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Пусть γ — гладкий путь в $O(n)$, проходящий через E_n . Можно считать, что

$$\gamma(\varepsilon) = E_n + X\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где $X \in T_E O(n)$ — касательная матрица. Из (1.6) следует, что

$$\gamma(\varepsilon)^\top \gamma(\varepsilon) = (E_n + (X^\top + X)\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \equiv E_n.$$

Значит, X — кососимметрическая матрица ($X^T + X = 0$), и, так как размерность пространства кососимметрических матриц совпадает с размерностью $O(n)$, то отсюда следует, что касательное пространство к подмногообразию $O(n)$ в единице этой группы совпадает с пространством кососимметрических матриц. Теорема 1.6 доказана.

Теперь вернемся к уравнениям Френе. Обозначим через $R(l)$ репер Френе, отвечающий значению параметра l на кривой γ . Переход от $R(0)$ к $R(l)$ задается ортогональным преобразованием $A(l)$, так как все эти реперы ортонормированы. Значит, мы имеем гладкий путь $A(l)$ в группе $O(n)$ и столбцы матриц $A(l)$ задают разложения векторов из $R(l)$ по базису $R(0)$. Уравнения Френе имеют вид:

$$\frac{dA(l)}{dl} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(l + \varepsilon) \cdot A^{-1}(l) - E_n}{\varepsilon} \cdot A(l) = B(l) \cdot A(l),$$

где матрица $B(l)$ — кососимметрическая, так как является касательным вектором в единице группы $O(n)$.

Задача 1.4. Пусть A — кососимметрическая $(n \times n)$ -матрица. Тогда ряд

$$\exp(At) = E_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots$$

абсолютно сходится на всей прямой и задает гладкий путь в $O(n)$.

ГЛАВА 2

Теория поверхностей

2.1. Метрики на регулярных поверхностях

Регулярной поверхностью в \mathbb{R}^3 называется двумерное гладкое подмногообразие в \mathbb{R}^3 .

С помощью теоремы о неявной функции уточним это определение:

множество точек $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ называется регулярной поверхностью, если выполняется одно из следующих условий:

1) в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно выделяется как множество нулей такой гладкой функции $F(x^1, x^2, x^3)$, что в этой окрестности

$$\frac{\partial F}{\partial x^3} \neq 0$$

после подходящей перенумерации координат x^1, x^2, x^3 ;

2) в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно задается как график гладкого отображения

$$x^3 = \psi(x^1, x^2)$$

после подходящей перенумерации координат x^1, x^2, x^3 ;

3) в достаточно малой окрестности каждой своей точки оно задается как образ гладкого отображения

$$r : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

где U — область на плоскости с координатами u^1, u^2 , причем во всех точках этой области векторы $r_1 = \partial r / \partial u^1$ и $r_2 = \partial r / \partial u^2$ линейно независимы.

Лемма 2.1. *Определения 1–3 регулярной поверхности эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Эквивалентность определений 1 и 2 уже была нами установлена в § 1.4 в наиболее общем виде — для гладких подмногообразий \mathbb{R}^N . Для доказательства леммы достаточно доказать эквивалентность определений 2 и 3.

Очевидно, что из 2) следует 3): достаточно рассмотреть отображение $g(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \psi(u^1, u^2))$. Для доказательства того, что из 3) следует 2) применим следующее следствие теоремы о неявной функции.

Теорема об обратной функции. Пусть $F : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ — гладкое отображение области из \mathbb{R}^N в \mathbb{R}^N и в точке $x_0 \in U$ якобиан этого отображения обратим:

$$\det \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^k} \right)_{1 \leq j, k \leq N} \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности V точки $F(x_0)$ определено гладкое отображение $G : V \rightarrow \mathbb{R}^N$, которое обратимо к F : $G \cdot F(x) \equiv x$ в области $G(V) \subset U$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить теорему об обратной функции к отображению $\Psi : U \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ вида $\Psi(x, y) = y - F(x)$.

Покажем теперь, что 3) влечет 2). Пусть $x \in \Sigma$. Без ограничения общности можно считать, что в точке x матрица

$$\begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial u^1 & \partial x^1 / \partial u^2 \\ \partial x^2 / \partial u^1 & \partial x^2 / \partial u^2 \end{pmatrix}$$

обратима и потому по теореме об обратной функции в окрестности x параметры u^1 и u^2 однозначно выражаются как функции от x^1 и x^2 : отображение $(u^1, u^2) \rightarrow (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2))$ обратимо. Теперь заметим, что в окрестности точки x поверхность задается как график гладкого отображения

$$x^3 = x^3(u^1(x^1, x^2), u^2(x^1, x^2)).$$

Лемма 2.1 доказана.

Хотя все три определения эквивалентны, мы в дальнейшем будем пользоваться третьим, так как оно вводит понятие *локальных координат* $(u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, т. е. таких величин, которые в окрестности каждой точки задают координаты на поверхности.

Это удобно при рассмотрении кривых на поверхности — не надо задавать кривую в \mathbb{R}^3 и накладывать на нее аналитические условия, чтобы она лежала на поверхности, а достаточно задать кривую

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

как гладкое отображение в область U . Если кривая не лежит в окрестности с одними и теми же локальными координатами, то она задается как семейство отображений в такие области. Эти отображения склеиваются в областях, которые описываются несколькими системами координат, чтобы корректно задать кривую и ее векторы скорости (которые разные в разных системах координат). Определение такой склейки требует введения тензоров, и мы отложим это до § 3.3, ограничиваясь по возможности участками поверхностей, покрытыми одной системой координат.

Теорема 2.1. Пусть гладкое отображение $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ задает регулярную поверхность Σ с локальными координатами $(u^1, u^2) \in U$. Тогда

1) в каждой точке $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 задают базис в касательной плоскости к Σ ;

2) длина регулярной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ на поверхности равна

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{I(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt,$$

где

$$I(v, w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

— симметричная билинейная форма на векторном пространстве \mathbb{R}^2 , зависящая от точки поверхности и определяемая формулами

$$E = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \quad F = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad G = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2),$$

и $\dot{\gamma} = d\gamma/dt = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ — вектор скорости в локальных координатах.

Доказательство.

Утверждение 1 следует из определения касательного пространства. Утверждение 2 выводится из (1.2). Действительно, по

определению

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d(\mathbf{r} \cdot \gamma)}{dt}, \frac{d(\mathbf{r} \circ \gamma)}{dt}\right)} dt,$$

и мы получаем прямыми вычислениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(\mathbf{r} \cdot \gamma)}{dt}, \frac{d(\mathbf{r} \circ \gamma)}{dt}\right) &= (r_1 \dot{u}^1 + r_2 \dot{u}^2, r_1 \dot{u}^1 + r_2 \dot{u}^2) = \\ &= E (\dot{u}^1)^2 + 2F \dot{u}^1 \dot{u}^2 + G (\dot{u}^2)^2. \end{aligned}$$

Теорема 2.1 доказана.

Согласно теореме 2.1 в касательном пространстве в каждой точке задано скалярное произведение, определенное *первой квадратичной формой*. Оно задает углы $\varphi_{v,w}$ между векторами v и w и длины $|v|$ векторов v :

$$|v| = \sqrt{\mathbf{I}(v, v)}, \quad \cos \varphi_{v,w} = \frac{\mathbf{I}(v, w)}{|v||w|} \quad \text{при } v \neq 0 \text{ и } w \neq 0.$$

Следующее определение площади части поверхности, как и определение длины, вполне естественно, аддитивно и совпадает с обычным для плоских поверхностей:

- если $V \subset U$, то *площадь* части $r(V)$ поверхности Σ равна

$$\iint_V \sqrt{EG - F^2} du^1 du^2.$$

2.2. Кривизна линии на поверхности

Обозначим через $\mathbf{n}(u^1, u^2)$ такую нормаль к регулярной поверхности в точке $\mathbf{r}(u^1, u^2)$, что $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ — положительно ориентированный репер в \mathbb{R}^3 . Она находится явно по формуле:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}.$$

Через \mathbf{r}_{jk} обозначим вектор $\partial^2 \mathbf{r} / \partial u^j \partial u^k$.

Пусть

$$\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathbb{R}^3$$

— регулярная кривая с параметром t и пусть l — натуральный параметр на γ . Согласно (1.4)

$$\frac{d^2(\mathbf{r} \cdot \gamma)}{dl^2} = k n_\gamma,$$

где k — кривизна кривой, а n_γ — нормаль к кривой γ . Из доказательства леммы 1.2 мы также знаем, что $dl/dt = |d(\mathbf{r} \cdot \gamma)(t)/dt| = \sqrt{\mathbf{I}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$.

Теорема 2.2 (Теорема Менье). *Кривизна кривой γ на поверхности удовлетворяет уравнению*

$$k \cos \theta = k(\mathbf{n}, n_\gamma) = \frac{\mathbf{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\mathbf{I}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})},$$

где θ — угол между n_γ и \mathbf{n} , нормальными к кривой и к поверхности, а форма \mathbf{II} имеет вид:

$$\mathbf{II}(v, w) = (v^1 \ v^2) \cdot \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix},$$

где

$$L = (\mathbf{r}_{11}, \mathbf{n}), \quad M = (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{n}), \quad N = (\mathbf{r}_{22}, \mathbf{n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Прямыми вычислениями получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\mathbf{r} \cdot \gamma)}{dl^2} &= k n_\gamma = \frac{d}{dl} \left(\mathbf{r}_1 \dot{u}^1 \frac{dt}{dl} + \mathbf{r}_2 \dot{u}^2 \frac{dt}{dl} \right) = \\ &= \left(\mathbf{r}_{11} (\dot{u}^1)^2 + 2\mathbf{r}_{12} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \mathbf{r}_{22} (\dot{u}^2)^2 + \mathbf{r}_1 \ddot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \ddot{u}^2 \right) \left(\frac{dt}{dl} \right)^2 + \\ &\quad + (\mathbf{r}_1 \dot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \dot{u}^2) \frac{d^2 t}{dl^2} \end{aligned}$$

и, так как \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ортогональны \mathbf{n} , выводим

$$\begin{aligned} k(\mathbf{n}, n_\gamma) &= \\ &= \left((\mathbf{r}_{11}, \mathbf{n}) (\dot{u}^1)^2 + 2(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{n}) \dot{u}^1 \dot{u}^2 + (\mathbf{r}_{22}, \mathbf{n}) (\dot{u}^2)^2 \right) \left(\frac{dt}{dl} \right)^2. \end{aligned}$$

Осталось только заметить, что $(dt/dl)^2 = (dl/dt)^{-2} = \mathbf{I}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{-1}$. Теорема 2.2 доказана.

Форма $\Pi(v, w)$ называется *второй квадратичной формой поверхности*.

Пусть v — касательный вектор к поверхности в точке $r(u^1, u^2)$ и n — вектор нормали к поверхности в этой же точке. Проведем через точку $r(u^1, u^2)$ двумерную плоскость, натянутую на векторы n и v . Пересечение этой плоскости и поверхности — кривая $\gamma_{u^1, u^2, v}$ — называется *нормальным сечением*, отвечающим точке $r(u^1, u^2)$ и касательному вектору v . Из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.1. *Кривизна нормального сечения $\gamma_{u^1, u^2, v}$ равна*

$$k = \pm \frac{\Pi(v, v)}{\mathbf{I}(v, v)}.$$

Причем правая часть берется с положительным знаком, если нормали к поверхности и к нормальному сечению совпадают, и с отрицательным знаком в противном случае.

Задача 2.1. Пусть поверхность задана как график функции:

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = f(u^1, u^2).$$

Тогда первая квадратичная форма имеет вид:

$$E = 1 + f_1^2, \quad F = f_1 f_2, \quad G = 1 + f_2^2,$$

вектор нормали к поверхности задается формулой:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}} (-f_1, -f_2, 1),$$

и вторая квадратичная форма имеет вид:

$$L = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad M = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad N = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}},$$

где через $f_{j_1 \dots j_k}$ мы обозначаем $\partial^k f / \partial u^{j_1} \dots \partial u^{j_k}$.

Задача 2.2. Построим по функции $f(x)$ поверхность вращения (графика этой функции вокруг оси Ox):

$$r(u, v) = (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v).$$

Показать, что для этой поверхности первая квадратичная форма имеет вид

$$E = 1 + f'^2, \quad F = 0, \quad G = f^2,$$

вектор нормали к поверхности задается формулой:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} (f', \cos v, \sin v),$$

и вторая квадратичная форма равна

$$L = -\frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

2.3. Гауссова кривизна

Отношение $\Pi(v, v)/I(v, v)$ называется *нормальной кривизной* поверхности в направлении v .

Лемма 2.2. Пусть на векторном пространстве \mathbb{R}^N заданы две симметричные билинейные формы I и II, причем форма I положительно определена. Тогда в \mathbb{R}^N существует такой базис e_1, \dots, e_N , что в этом базисе формы принимают вид:

$$I(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^N w^N, \quad \Pi(v, w) = \lambda_1 v^1 w^1 + \dots + \lambda_N v^N w^N$$

(т. е. форма I задается единичной матрицей, а форма II — диагональной).

Доказательство этой леммы из линейной алгебры несложно. Рассмотрим форму I как скалярное произведение на \mathbb{R}^N и с помощью ортогонализации Грама–Шмидта найдем ортонормированный базис в \mathbb{R}^N . Теперь рассмотрим II как симметричную билинейную форму на \mathbb{R}^N со скалярным произведением I. Известно, что любая такая форма диагонализуется в каком-то ортонормированном базисе [10]. Лемма 2.2 доказана.

Обозначим теперь через $T_x \Sigma$ касательную плоскость к поверхности Σ в точке x . На ней заданы квадратичные формы I и II. Применим в этой ситуации лемму 2.2 и получим, что

Лемма 2.3. В $T_x\Sigma$ можно выбрать базис e_1, e_2 , в котором формы I и II одновременно диагонализуются: $I(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2$ и $II(v, w) = k_1 v^1 w^1 + k_2 v^2 w^2$.

Направления векторов e_1 и e_2 называются *главными направлениями*, и они определены однозначно, если $k_1 \neq k_2$. Значения k_1 и k_2 нормальных кривизин вдоль главных направлений называются *главными кривизнами*. Они являются экстремальными значениями для нормальных кривизин в точке, что следует из очевидного теперь утверждения:

Теорема 2.3 (Формула Эйлера).

$$\frac{II(v, v)}{I(v, v)} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол между векторами e_1 и v .

Главные кривизны не зависят от выбора базиса в касательном пространстве, а являются инвариантами пары квадратичных форм I и II.

Лемма 2.4. Пусть симметричные (2×2) -матрицы I и II задают квадратичные формы поверхности. Тогда главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$P(\lambda) = \det(II - \lambda I) = 0.$$

Доказательство.

Пусть в базисе e_1, e_2 квадратичная форма J задается симметричной одноименной матрицей J :

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \cdot J \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix},$$

и координаты \hat{v} в новом базисе \hat{e}_1, \hat{e}_2 связаны с координатами в старом базисе соотношением $v = A\hat{v}$. Тогда мы имеем

$$J(v, w) = \begin{pmatrix} \hat{v}^1 & \hat{v}^2 \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot J \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}^1 \\ \hat{w}^2 \end{pmatrix} = \hat{J}(\hat{v}, \hat{w}).$$

Значит, в новом базисе квадратичная форма J задается матрицей $A^T J A$.

Мы знаем, что в каком-то базисе главные кривизны k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$\det(\mathbf{II} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Но так как

$$\det(A^T \mathbf{II} A - \lambda A^T \mathbf{I} A) = \det A^T \cdot \det A \cdot \det(\mathbf{II} - \lambda \mathbf{I})$$

и $\det A^T = \det A \neq 0$, в любом другом базисе аналогичное уравнение будет иметь те же самые корни. Лемма 2.4 доказана.

Из леммы 2.4 следует, что произведение и сумма главных кривизн в точке поверхности являются геометрическими инвариантами:

- произведение главных кривизн в точке называется *гауссовой кривизной* поверхности в этой точке:

$$K = k_1 k_2 = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = \frac{LN - M^2}{EF - G^2};$$

- полусумма главных кривизн в точке называется *средней кривизной* поверхности в этой точке:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Задача 2.3. В условиях задачи 2.1 гауссова кривизна имеет вид:

$$K = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^2}.$$

Задача 2.4. Для поверхности вращения (см. задачу 2.2) главные кривизны имеют вид:

$$k_1 = -\frac{f'}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}},$$

гауссова кривизна равна

$$K = -\frac{f''}{f(1 + f'^2)^2}$$

и средняя кривизна равна

$$H = \frac{1 + f'^2 - ff''}{2f(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Задача 2.5. Гауссова кривизна гиперболического параболоида $z = xy$ всюду отрицательна и равна

$$K = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

а гауссова кривизна круглой сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ радиуса R всюду положительна и равна $K = R^{-2}$.

Задача 2.5 проясняет геометрический смысл знака гауссовой кривизны:

а) $K > 0$ в точке $x \in \Sigma$. Тогда малая окрестность точки x лежит по одну сторону от касательной плоскости $T_x M$. Действительно, плоскость $T_x M$ разделяет пространство на два полупространства и нормали всех нормальных сечений направлены в одно и то же полупространство — около точки x поверхность выглядит как «шапочка»;

б) $K < 0$ в точке $x \in \Sigma$. Тогда кривизны двух нормальных сечений равны нулю (их касательные направления называются *асимптотическими*), а нормали сечений, отвечающих главным кривизнам, направлены в разные полупространства относительно плоскости $T_x M$ — около точки x поверхность выглядит как «седло».



Рис. 2. Шапочка и седло.

2.4. Деривационные уравнения и теорема Бонне

Аналогом уравнений Френе для поверхностей являются уравнения, которые описывают деформацию базиса $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, и вдоль по-

верхности. Деформации векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 описываются уравнениями Гаусса, которые выражают векторы $\mathbf{r}_{jk} = \partial^2 \mathbf{r} / \partial u^j \partial u^k$ через базисные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_2 + b_{11} \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{12} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_2 + b_{12} \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{22} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_2 + b_{22} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Символы Γ_{jk}^i называются символами Кристоффеля, и легко заметить, что b_{jk} — коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = b_{11}, \quad M = b_{12} = b_{21}, \quad N = b_{22}.$$

Прежде, чем выводить уравнения деформации вектора \mathbf{n} , мы введем два соглашения:

1) если в формуле один и тот же индекс повторяется дважды — один раз сверху и один раз снизу, то подразумевается, что по этому индексу проводится суммирование:

$$a^j b_j := \sum_j a^j b_j;$$

2) матрицу, обратную к матрице a_{ij} , будем обозначать через a^{kl} , считая по определению

$$a^{ij} a_{jk} = \delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Так как $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv 1$, $(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}) = 0$ и следовательно вектор $\mathbf{n}_j = \partial \mathbf{n} / \partial u^j$ выражается в виде линейной комбинации векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Далее выводим

$$\frac{\partial(\mathbf{n}, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k} = (\mathbf{n}_k, \mathbf{r}_j) + (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{jk}) = 0. \quad (2.2)$$

Введем коэффициенты a_k^j как

$$\mathbf{n}_k = a_k^1 \mathbf{r}_1 + a_k^2 \mathbf{r}_2 = a_k^j \mathbf{r}_j$$

и обозначим через $g_{jk} = (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22}.$$

Перепишем (2.2) как

$$a_1^1 g_{11} + a_1^2 g_{12} = -b_{11}, \quad a_1^1 g_{12} + a_1^2 g_{22} = -b_{12},$$

$$a_2^1 g_{11} + a_2^2 g_{12} = -b_{21}, \quad a_2^1 g_{12} + a_2^2 g_{22} = -b_{22}.$$

Полученные уравнения распадаются на две системы уравнений относительно a_1^1, a_1^2 и a_2^1, a_2^2 , которые могут быть записаны в виде системы

$$a_i^m g_{jm} = -b_{ij}.$$

Так как матрица g_{jk} обратима и симметрична, к ней существует симметричная обратная матрица $g^{jk} = g^{kj}$. Умножим обе части этой системы на g^{jk} и просуммируем по повторяющемуся индексу j . Мы получим решение этой системы:

$$-b_{ij} g^{jk} = a_i^m g_{jm} g^{jk} = a_i^m \delta_m^k = a_i^k.$$

В итоге нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.4 (Уравнения Вейнгартена).

$$n_i = -b_{ij} g^{jk} r_k.$$

Вместе с уравнениями Гаусса эти уравнения образуют полный набор *дериационных уравнений*. Как и уравнения Френе мы можем записать их в виде

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ -b_{1j} g^{j1} & -b_{1j} g^{j2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_{2j} g^{j1} & -b_{2j} g^{j2} & 0 \end{pmatrix},$$

и символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. В отличие от уравнений Френе в данном случае возникают нетривиальные условия совместности:

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^2} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

что эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial u^1} A_2 - \frac{\partial}{\partial u^2} A_1 = A_1 A_2 - A_2 A_1,$$

которые называются *уравнениями Гаусса–Кодацци*.

Другая зависимость между величинами, которые входят в (2.1), и первой квадратичной формой выражается следующими формулами и является следствием уравнений Гаусса.

Теорема 2.5.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right). \quad (2.3)$$

Доказательство.

Согласно (2.1) мы имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^i g_{lj} + \Gamma_{jk}^i g_{li}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2 \Gamma_{ij}^m g_{ml},$$

что влечет

$$g^{lk} g_{ml} \Gamma_{ij}^m = \delta_m^k \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Теорема 2.5 доказана.

Теперь мы можем сформулировать аналог теорем 1.2 и 1.4 для поверхностей.

Теорема 2.6 (Теорема Бонне). Пусть

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21}(=g_{12}) & g_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21}(=b_{12}) & b_{22} \end{pmatrix}$$

— гладкие квадратичные формы в области U гомеоморфной внутренности круга, причем первая из них положительно определена

и коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям Гаусса–Кодацци.

Тогда существует и притом единственная (с точностью до движений) поверхность в \mathbb{R}^3 , для которой эти формы являются первой и второй квадратичными формами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы дадим лишь набросок доказательства, указав принципиальное отличие от доказательств теорем 1.2 и 1.4 — необходимость выполнения условий совместности (уравнений Гаусса–Кодацци).

Пусть $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$. Выберем такие векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$, что

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) = g_{11}(u_0), \quad (\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = g_{12}(u_0), \quad (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0) = g_{22}(u_0),$$

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{c}_0) = (\mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0) = 0, \quad (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0) = 1,$$

как начальные данные для уравнений Гаусса–Вейнгартена:

$$\mathbf{r}_1(u_0) = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{r}_2(u_0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{n}(u_0) = \mathbf{c}_0.$$

Так как коэффициенты форм удовлетворяют уравнениям Гаусса–Петерсона–Кодацци, то построенные по этим формам уравнения Гаусса–Вейнгартена совместны и имеют единственное решение $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ с заданными начальными данными в точке u_0 .

Так как $\partial \mathbf{a} / \partial u^2 = \partial \mathbf{b} / \partial u^1$ и область U гомеоморфна внутренности круга, для любой замкнутой гладкой кривой без самопересечений γ в области U и любого $j = 1, 2, 3$ выполняется равенство

$$\int_{\gamma} (a^j du^1 + b^j du^2) = 0, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)$. Действительно, контур γ ограничивает какую-то область $V \in U$, и по формуле Стокса

$$\int_{\gamma} (a^j du^1 + b^j du^2) = \int_V \left(\frac{\partial b^j}{\partial u^1} - \frac{\partial a^j}{\partial u^2} \right) du^1 \wedge du^2.$$

Но правая часть этого равенства обращается в нуль, так как $\partial \mathbf{a} / \partial u^2 - \partial \mathbf{b} / \partial u^1 = 0$.

Теперь легко построить такое отображение $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, что

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_2.$$

Для этого отобразим точку $u_0 \in U$ в точку $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Соединим любую точку $u \in U$ с точкой u_0 каким-то гладким путем γ в области U и зададим точку $r(u)$ следующей формулой:

$$r(u) = \int_{\gamma} (adu^1 + bdu^2).$$

Из (2.4) следует, что это отображение не зависит от выбора пути γ .

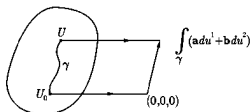


Рис. 3. Отображение r .

Как и при доказательстве теоремы 1.4, простыми вычислениями доказывается, что первая и вторая квадратичная форма этой поверхности совпадают с исходными формами.

Однозначность поверхности с точностью до движений в \mathbb{R}^3 доказывается как и однозначность искомой кривой с точностью до движений в плоскости в теореме 1.2. Эти рассуждения не сложны, и мы их опустим.

Теорема 2.6 доказана.

Задача 2.6. Пусть первая квадратичная форма диагональна:

$$g_{11} = \lambda(u^1, u^2), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \mu(u^1, u^2).$$

Тогда символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial u^2}.$$

Задача 2.7. Доказать, что для поверхности вращения (см. задачу 2.2) символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{ff'}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

где $(u^1, u^2) := (u, v)$.

2.5. Теорема Гаусса

Гаусс доказал, что гауссова кривизна определяется только первой квадратичной формой. Это следует из выведенной им формулы, которая входит в систему уравнений Гаусса–Кодацци.

Теорема 2.7 (Теорема Гаусса).

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left((\Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^l - \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^l) g_{kl} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из (2.1) следует, что

$$(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^l g_{kl} - \Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^l g_{kl}.$$

Но

$$(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1},$$

что вытекает из соотношения:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^2 (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial u^k \partial u^l} = (\mathbf{r}_{i,k}, \mathbf{r}_{j,l}) + (\mathbf{r}_{i,l}, \mathbf{r}_{j,k}) + (\mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{r}_{k,l}) + (\mathbf{r}_{i,k,l}, \mathbf{r}_j).$$

Осталось сравнить выражения для $(\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{22}) - (\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12})$, чтобы завершить доказательство. Теорема 2.7 доказана.

Из теорем 2.5 и 2.7 вытекает

Следствие 2.2. Гауссова кривизна выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые и вторые производные.

Регулярные поверхности $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\tilde{\mathbf{r}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ называются *изометричными*, если для любой регулярной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ длины кривых $\mathbf{r}(\gamma)$ и $\tilde{\mathbf{r}}(\gamma)$ совпадают. Это эквивалентно тому, что во всех точках совпадают значения первых квадратичных форм:

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = (\tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{r}}_j).$$

Следствие 2.2 может теперь быть переформулировано следующим образом.

Следствие 2.3. Если две поверхности $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\tilde{\mathbf{r}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ изометричны, то их гауссовы кривизны совпадают для каждой пары точек $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ и $\tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2)$.

Задача 2.8. Доказать, что гауссова кривизна конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в точке $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ равна нулю.

2.6. Ковариантное дифференцирование и геодезические

Пусть $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ задает регулярную поверхность, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ — регулярная кривая на поверхности и v — такое гладкое векторное поле вдоль кривой γ , что

- 1) для каждого $t \in [a, b]$ вектор $v(t)$ лежит в касательном пространстве к поверхности в точке $\gamma(t)$;
- 2) векторы $v(t)$ гладко зависят от t .

Разложим векторное поле $v(t)$ по базисам в касательных плоскостях:

$$v(t) = v^i(t)\mathbf{r}_i(t).$$

Производная векторного поля вдоль кривой имеет вид:

$$\dot{v} = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + v^i\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + v^i\dot{u}^j\Gamma_{ij},$$

где $\dot{\gamma} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$. Разложим правую часть последнего равенства на два слагаемых, одно из которых касательно к поверхности, а другое — ортогонально:

$$\dot{v} = \left(\frac{dv^i}{dt}\mathbf{r}_i + \Gamma_{jk}^i v^j \dot{u}^k \mathbf{r}_i \right) + v^j \dot{u}^k b_{jk} \mathbf{n}.$$

Ковариантной производной $\nabla_\gamma v$ векторного поля v вдоль кривой γ на поверхности в \mathbb{R}^3 называется ортогональная проекция производной поля v вдоль кривой на касательную плоскость к поверхности:

$$\frac{Dv}{dt} = \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i v^j \dot{u}^k \right) \mathbf{r}_i.$$

Предположим теперь, что векторное поле v задано не только на кривой, но и в целой области поверхности. Тогда мы можем рассматривать ковариантные производные поля вдоль различных кривых и формула для ковариантной производной поля v в направлении вектора w примет вид:

$$\nabla_w v = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^i v^j \right) w^k \mathbf{r}_i,$$

где w касательный вектор к поверхности. Эта операция обладает рядом замечательных свойств.

Лемма 2.5. 1) *Отображение $(w, v) \rightarrow \nabla_w v$ линейно по v и w :*

$$\nabla_{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2} v = \alpha_1 \nabla_{w_1} v + \alpha_2 \nabla_{w_2} v,$$

$$\nabla_w (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \nabla_w v_1 + \alpha_2 \nabla_w v_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R};$$

2) *если $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, то*

$$\nabla_{fw} v = f \nabla_w v, \quad \nabla_w f v = D_w f v + f \nabla_w v,$$

где $D_w f$ — производная функции f в направлении вектора w : $D_w f = \sum_j (\partial f / \partial u^j) w^j$;

3)

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} \mathbf{r}_j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k;$$

4)

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k;$$

5) *производная скалярного произведения векторных полей вычисляется по формуле*

$$D_w (v_1, v_2) = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждения 1–3 вытекают немедленно из определения ковариантного дифференцирования. Утверждение 4 вытекает из данного нами определения символов Кристоффеля и так же выводится из теоремы 2.5.

Утверждение 5 доказывается прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned}
 D_w \left((r_i, r_j) v_1^i v_2^j \right) &= w^k \frac{\partial}{\partial u^k} \left((r_i, r_j) v_1^i v_2^j \right) = \\
 &= w^k \left((r_{ik}, r_j) + (r_i, r_{jk}) \right) v_1^i v_2^j + w^k (r_i, r_j) \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} v_2^j + v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} \right) = \\
 &= w^k \left(\Gamma_{ik}^m (r_m, r_j) + \Gamma_{jk}^m (r_i, r_m) \right) v_1^i v_2^j + \\
 &\quad + w^k (r_i, r_j) \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} v_2^j + v_1^i \frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} \right) = \\
 &= w^k \left(\frac{\partial v_1^i}{\partial u^k} + \Gamma_{mk}^i v_1^m \right) (r_i, r_j) v_2^j + w^k \left(\frac{\partial v_2^j}{\partial u^k} + \Gamma_{mk}^j v_2^m \right) (r_i, r_j) v_1^i = \\
 &= (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2).
 \end{aligned}$$

Лемма 2.5 доказана.

Взяв проекции на касательную плоскость при определении ковариантного дифференцирования ведет к рассмотрению внутренней геометрии поверхности, при котором мы забываем про внешнее объемлющее пространство и строим всю геометрию только исходя из первой квадратичной формы. Теорема Гаусса при этом имеет глубокий смысл: гауссова кривизна является (в отличие от второй квадратичной формы) объектом внутренней геометрии.

Если на подмногообразии евклидова пространства задана билинейная операция на векторных полях и для нее выполняются утверждения 1 и 2 леммы 2.5, то говорят, что на подмногообразии задана *аффинная связность*. Связность определяется величинами Γ_{ij}^k . Построенная нами связность удовлетворяет двум дополнительным условиям: она *симметрична*, т. е. для нее выполняется утверждение 4 леммы 2.5, и *совместна с метрикой*, т. е. для нее выполняется утверждение 5 леммы 2.5. Мы укажем без доказательства следующий факт:

- симметричная и совместная с метрикой аффинная связность единственна и определяется по первой квадратичной форме g_{ij} формулой (2.3).

Понятие ковариантного дифференцирования приводит к понятию параллельного переноса: векторное поле $v(t)$ вдоль кривой γ параллельно, если ковариантная производная v вдоль γ всюду равна нулю:

$$\frac{Dv}{dt} = \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i v^j \dot{u}^k \right) r_i = 0. \quad (2.5)$$

Теперь по аналогии с евклидовой плоскостью определим аналог прямой линии: кривая γ называется *геодезической*, если ее вектор скорости параллелен вдоль кривой:

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

Имеет место

Лемма 2.6. 1) *Геодезические — это кривые, удовлетворяющие уравнению*

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = 0. \quad (2.6)$$

2) *Если $\gamma(t)$ — геодезическая и $C \in \mathbb{R}$, то кривая $\gamma_C(t) = \gamma(Ct)$ тоже геодезическая.*

3) *Гладкая кривая γ на поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ является геодезической, если и только если в каждой точке кривой вектор нормали к кривой ортогонален к поверхности (т. е. коллинеарен вектору нормали к поверхности).*

Доказательство леммы 2.6 состоит в элементарных вычислениях. Теперь укажем на одно важное следствие теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения [13].

Лемма 2.7. *Пусть x_0 — точка на регулярной поверхности Σ , v_0 — касательный вектор к Σ в точке x_0 и γ — кривая, проходящая через x_0 : $\gamma(0) = x_0$. Тогда*

1) *существует и притом единственное параллельное векторное поле $v(t)$ вдоль γ такое, что $v(0) = v_0$;*

2) *для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует и притом единственная геодезическая $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Sigma$ такая, что*

$$\gamma(0) = x_0, \quad \dot{\gamma}(0) = v_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Так как уравнение (2.5) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с гладкими коэффициентами, для любых начальных данных, т. е. для любого значения v в нуле: $v(0) = v_0$, решение этого уравнения существует и единственно.

2) Уравнение (2.6) — это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на множестве пар вида (x, v) , где $x \in M, v \in T_x \Sigma$. В окрестности x_0 такие пары параметризуются точками $(u^1, u^2, v^1, v^2) \in \mathbb{R}^4$: $x = r(u^1, u^2), v = v^1 r_1 + v^2 r_2$. Уравнение (2.6) принимает вид:

$$\dot{u}^i = v^i, \quad \dot{v}^i = -\Gamma_{jk}^i(u^1, u^2) v^j v^k, \quad i = 1, 2.$$

Теперь утверждение 2, как и утверждение 1, следует из теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма 2.7 доказана.

Пространство, образованное парами (x, v) , где $x \in \Sigma$ и $v \in T_x \Sigma$, называется *касательным расслоением* и обозначается $T\Sigma$.

Лемма 2.8. Пусть Σ — двумерное подмногообразие в \mathbb{R}^3 . Тогда $T\Sigma$ — четырехмерное подмногообразие в \mathbb{R}^6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $(x_0, v_0) \in T\Sigma$. Можно считать, что в окрестности точки x_0 поверхность Σ задается уравнением $F(x) = 0$ и $(\partial F/\partial x^1, \partial F/\partial x^2, \partial F/\partial x^3) \neq 0$ в окрестности x_0 . Без ограничения общности можем считать, что в этой окрестности $\partial F/\partial x^1 \neq 0$. Тогда в окрестности (x_0, v_0) касательное пространство выделяется в \mathbb{R}^6 уравнениями

$$F(x, v) = 0, \quad G(x, v) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x^j} v^j = 0$$

(см. § 1.4, задача 1.3). Теперь лемма следует из теоремы о неявной функции, так как определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial F/\partial x^1 & \partial F/\partial v^1 \\ \partial G/\partial x^1 & \partial G/\partial v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x^1 & 0 \\ * & \partial F/\partial x^1 \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в окрестности точки (x_0, v_0) . Лемма 2.8 доказана.

Согласно лемме 2.7 на $T\Sigma$ задан поток, т. е. задана система обыкновенных дифференциальных уравнений и все пространство расщепляется на траектории этой системы. *Первым интегралом* потока называется функция на пространстве, которая постоянна вдоль траекторий. Укажем почти очевидный первый интеграл геодезического потока.

Лемма 2.9. *Если γ — геодезическая, то*

$$\frac{d}{dt}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из утверждения 5 леммы 2.5 следует, что

$$\frac{d}{dt}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right) + \left(\dot{\gamma}, \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \right) = 2 \left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right).$$

Но, по определению, геодезических $D\dot{\gamma}/dt = 0$. Лемма 2.9 доказана.

Задача 2.9. *Пусть функция $f(x)$ задает поверхность вращения (см. задачи 2.2 и 2.7). Меридианами называются сечения поверхности вращения плоскостями, ортогональными оси вращения. Обозначим через φ угол между вектором скорости геодезической и меридианом. Через $R(x)$ обозначим расстояние от точки $x \in \Sigma$ до оси вращения. Доказать, что функция $I = f^2 \dot{\nu} / |\dot{\gamma}| = R \cos \varphi$ является (как и $|\dot{\gamma}|$ (см. лемму 2.9)) первым интегралом геодезического потока на поверхности вращения¹.*

2.7. Уравнения Эйлера–Лагранжа

Пусть на касательном расслоении к поверхности Σ , заданной отображением

$$r : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

задана гладкая функция

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Обозначим через u^1, u^2 координаты в области $U \subset \mathbb{R}^2$ и рассмотрим их как координаты на поверхности.

¹Функция I называется *интегралом Клеро*.

Выберем две точки $x, y \in \Sigma$ и рассмотрим множество Λ всех параметризованных (т. е. с фиксированным параметром) гладких кривых

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$$

с началом в точке x и концом в точке y :

$$\gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y.$$

На Λ определен функционал действия

$$S : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Многие задачи механики и физики сводятся к нахождению пути (точки из бесконечномерного пространства Λ), на котором функционал S принимает минимальное значение. Более общей задачей является описание критических точек функционала S . Объясним, что это значит.

Гладкой вариацией пути γ называется такое однопараметрическое семейство путей γ_ε ($\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t, \varepsilon)$), что

- 1) $\gamma : [a, b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \Sigma$ является гладкой функцией и по $t \in [a, b]$, и по $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$;
- 2) $\gamma(a, \varepsilon) = x$ и $\gamma(b, \varepsilon) = y$ для всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$;
- 3) $\gamma(t, 0) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Поле вариации $W(t)$ называется векторное поле вдоль γ вида

$$W(t) = \left. \frac{\partial \gamma(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Поле вариаций является естественным аналогом касательного вектора к Λ в точке γ .

Кривая $\gamma \in \Lambda$ называется *экстремалью* функционала S , если

$$\left. \frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

для любой гладкой вариации γ_ε пути γ . Очевидно, что если на γ функционал S достигает минимума, то кривая γ — экстремаль функционала S . Обратное не верно: как и в случае функций на конечномерном пространстве не каждый экстремум является минимумом.

Теорема 2.8. Если кривая γ — экстремаль функционала S , то вдоль этой кривой выполняются уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть γ — экстремаль, $\gamma_\varepsilon(t) = (u^1(t, \varepsilon), u^2(t, \varepsilon))$ — ее вариация и $W(t)$ — поле вариации. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_a^b \frac{dL(\gamma(t, \varepsilon), \dot{\gamma}(t, \varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dt = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial u^i} \frac{\partial u^i(t, 0)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial \dot{u}^i} \frac{\partial^2 u^i(t, 0)}{\partial \varepsilon \partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее выражение по частям, принимая во внимание, что

$$W(a) = \frac{\partial u^i(a, 0)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad W(b) = \frac{\partial u^i(b, 0)}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (2.8)$$

Мы получим

$$\frac{dS(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) W^i(t) dt = 0. \quad (2.9)$$

Так как, очевидно любое гладкое векторное поле $W(t)$ вдоль γ , удовлетворяющее (2.8), является полем гладкой вариации, из уравнения (2.9) вытекают уравнения (2.7). Теорема 2.8 доказана.

Уравнения (2.7) называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа* для вариационной задачи, которая отвечает функции Лагранжа (или, как тоже говорят, лагранжиану) $L(x, \dot{x})$.

Примером уравнений Эйлера–Лагранжа являются уравнения геодезических (2.6).

Теорема 2.9. Если $L(u, \dot{u}) = |\dot{u}|^2 = g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$, то уравнениями Эйлера–Лагранжа для этого лагранжиана будут уравнения геодезических (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Просто выпишем аккуратно уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} = 2g_{ij} \dot{u}^j,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^j \dot{u}^k + 2g_{ij} \ddot{u}^j = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k + 2g_{ij} \ddot{u}^j.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид:

$$g_{ij} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k = 0,$$

что переписывается как

$$\ddot{u}^m + \frac{1}{2} g^{mi} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение для символов Кристоффеля (2.3), получаем уравнение геодезических

$$\ddot{u}^m + \Gamma_{jk}^m \dot{u}^j \dot{u}^k = 0.$$

Теорема 2.9 доказана.

Рассмотрим вариационную задачу для лагранжиана:

$$L_0(u, \dot{u}) = |\dot{u}| = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}.$$

Функционалом действия для него будет длина кривой. Лагранжиан не дифференцируем в точках, где $\dot{u} = 0$. Но значение S не зависит от выбора параметризации на кривой: оно одинаково для эквивалентных кривых (см. лемму 1.1: мы ограничились регулярными кривыми, но легко показать, что в этом случае это ограничение несущественно). Поэтому если кривая является экстремалью функционала длины, то эквивалентная сй кривая с параметром, пропорциональным натуральному ($|\dot{u}| = \text{const}$), тоже является экстремалью функционала длины.

Теорема 2.10. *Экстремали функционала длины с точностью до эквивалентности совпадают с геодезическими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для функционала длины уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{g_{lm}\dot{u}^l\dot{u}^m}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{lm}\dot{u}^l\dot{u}^m}} g_{ij} \dot{u}^j \right). \quad (2.10)$$

Параметр на геодезических пропорционален натуральному (лемма 2.9). Полагая $g_{lm}\dot{u}^l\dot{u}^m = \text{const} \neq 0$ в (2.10), мы получаем уравнения геодезических (2.6) и заключаем, что геодезические являются экстремалими функционала длины.

На каждой экстремали функционала длины мы можем положить параметр пропорциональным натуральному. По отношению к этому параметру экстремаль описывается уравнениями (2.6) и следовательно является геодезической.

Теорема 2.10 доказана.

Введем на поверхности *расстояние* между точками:

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in \Lambda_{x,y}} L(\gamma).$$

Так как длина не зависит от выбора параметра, здесь под точками из $\Lambda_{x,y}$ можно понимать кривые с параметром $t \in [0, 1]$, пропорциональным натуральному. Из теоремы 2.10 следует, что если существует кривая из $\Lambda_{x,y}$ длины $d(x, y)$, то она является геодезической. Мы ограничимся следующим локальным фактом.

Теорема 2.11. Пусть γ — геодезическая, проходящая через точку x_0 . Существует такая окрестность x_0 на γ , что для любых двух точек x_1 и x_2 из этой окрестности кратчайшей кривой, соединяющей точки x_1 и x_2 , является отрезок геодезической γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Прежде всего докажем техническую лемму.

Лемма 2.10. Пусть x_0 — точка на поверхности и γ — геодезическая, проходящая через точку x_0 . Тогда в окрестности x_0 можно выбрать такие координаты u^1, u^2 , что первая квадратичная форма принимает вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

и уравнение для γ примет вид $u^2 = 0$. В этих координатах линии $u^2 = \text{const}$ будут геодезическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Выберем координаты y^1, y^2 в окрестности x_0 так, что $x_0 = (0, 0)$ и касательный вектор к γ в точке x_0 равен $(1, 0)$.

Через каждую точку с координатами $(0, s)$ проведем геодезическую с начальным вектором скорости $(1, 0)$. Тогда существует такая функция φ в окрестности x_0 , что эти геодезические задаются уравнениями $y^2 = \varphi(y^1, s)$, и так как начальные данные для геодезических гладко зависят от s , то φ — гладкая функция. Рассмотрим отображение $(y^1, s) \rightarrow (y^1, y^2 = \varphi(y^1, s))$. Его якобиан в точке x_0 равен

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

и по теореме об обратной функции оно обратимо около точки x_0 . Следовательно, y^1 и s задают локальные координаты в окрестности x_0 и кривые $s = \text{const}$ являются геодезическими.

В каждой точке из этой окрестности x_0 возьмем касательный вектор $w(y^1, s)$, ортогональный кривой $s = \text{const}$ и такой, что $(w, w) = 1$ и $(w, r_s) > 0$. Малая окрестность точки x_0 раслаивается на траектории гладкого векторного поля — решения уравнения $\dot{x} = w(x)$. Введем вместо координаты y^1 координату t , положив $x = (t, s)$, если точка x лежит на траектории потока $\dot{x} = w(x)$, пересекающей кривую $s = 0$ в точке $(t, 0)$. По отношению к координатам (t, s) первая квадратичная форма равна $\tilde{g}_{11} = \lambda, \tilde{g}_{22} = \mu, \tilde{g}_{12} = 0$.

Каждая кривая $s = \text{const}$ является геодезической и следовательно $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$. Значит, $\partial\lambda/\partial s = 0$ (см. задачу 2.6) и координаты

$$u^1 = \int_0^t \sqrt{\lambda(\tau)} d\tau, \quad u^2 = s$$

являются искомыми. Лемма 2.10 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.11. Введем в окрестности x_0 систему координат (u^1, u^2) , связанную с x_0 и γ как в лемме 2.10. Можно считать, что $x_0 = (0, 0)$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что круг $B = \{|u| \leq \varepsilon\}$ полностью лежит в этой окрестности. Пусть $C = \min_{x \in B} G(x)$ и $D = \min\{1, C\}$.

Если x_1 и x_2 лежат в круге $B_0 = \{|u| \leq \rho\varepsilon\}$, где $\rho = D/(D+2)$, то

1) $|u^1(x_1) - u^1(x_2)| \leq 2\rho\varepsilon$;

2) любая гладкая кривая, соединяющая x_1 и x_2 и выходящая в какой-то момент из круга B , имеет длину $\geq 4\rho\varepsilon$;

3) длина гладкой кривой, соединяющей x_1 и x_2 и полностью лежащей в B , равна

$$\int \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + G(\dot{u}^2)^2} dt \geq \int \sqrt{(\dot{u}^1)^2} \geq |u^1(x_1) - u^1(x_2)|. \quad (2.11)$$

Но в (2.11) равенство достигается в точности на отрезке γ_0 .

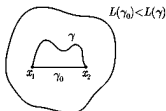


Рис. 4. Кратчайшая линия в полугеодезических координатах.

Теорема 2.11 доказана.

Лемма 2.10 утверждает существование в окрестности любой точки специальных координат, удобных в вычислениях. Они называются полугеодезическими координатами. Дадим точное определение.

Координаты $(u^1, u^2) = (x, y)$ называются *полугеодезическими*, если первая квадратичная форма имеет вид:

$$g_{ij} du^i du^j = dx^2 + G dy^2.$$

Задача 2.10. Доказать, что в полугеодезических координатах (x, y) любая кривая вида $y = \text{const}$ является геодезической.

Пример. Сферические координаты. Определим в \mathbb{R}^3 сферические координаты r, θ, φ по формулам

$$x^1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x^2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad x^3 = r \cos \theta,$$

где $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При каждом фиксированном значении $r = \text{const} \neq 0$ величины φ, θ задают координаты на сфере радиуса r . Метрический тензор равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Поэтому при любом заданном значении r координаты $(x, y) = (r\theta, \varphi)$ будут полугеодезическими, а большие круги $\varphi = \text{const}$ — геодезическими на сфере радиуса r .

Задача 2.11. Доказать, что гауссова кривизна поверхности с полугеодезическими координатами (x, y) равна

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial x^2}.$$

Задача 2.12. Доказать, что, если гауссова кривизна K поверхности постоянна и $K \neq 0$, то существуют полугеодезические координаты (x, y) , в которых первая квадратичная форма имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\sqrt{K}x) \end{pmatrix} \text{ при } K > 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2(\sqrt{-K}x) \end{pmatrix} \text{ при } K < 0.$$

2.8. Формула Гаусса–Бонне

Геодезические являются естественным обобщением прямых на случай произвольных поверхностей (прямые являются геодезическими на плоскости: в этом случае $\Gamma_{jk}^i = 0$ в линейных координатах и уравнение геодезических становится линейным $\ddot{u}^i = 0$). Отклонение произвольной кривой от геодезической описывается аналогом кривизны плоской кривой, а именно, геодезической кривизной. Дадим ее определение.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная кривая на поверхности $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Выберем в касательных плоскостях к поверхности ориентацию, считая базис $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ положительно ориентированным. В каждой точке $\gamma(l)$ кривой выберем ортонормированный положительно ориентированный базис $(\dot{\gamma}, \mathbf{n})$ в касательном пространстве. *Геодезической кривизной* называется величина

$$k_g = (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \mathbf{n}),$$

т. е. прямой аналог кривизны плоской кривой (1.3). Из леммы 2.6 следует, что гладкая кривая является геодезической, если и только если ее геодезическая кривизна всюду равна нулю.

Пусть W — малая окрестность точки поверхности, в которой введены полугеодезические координаты $(x, y) := (u^1, u^2)$ и пусть

$\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ — кусочно-гладкий замкнутый контур (т. е. семейство последовательно пройденных регулярных кривых: конец γ_j совпадает с началом γ_{j+1} , и мы положим при этом $\gamma_{n+1} = \gamma_1$). Мы предположим, что контур γ не имеет точек самопересечения и ограничивает область $V \subset W$.

Обозначим через α_j угол между γ_j и γ_{j+1} в общей концевой точке, направленный внутрь V , и через $d\sigma$ — форму площади на поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dx \wedge dy.$$

Теорема 2.12 (Формула Гаусса–Бонне).

$$\int_{\gamma} k_g dl = 2\pi - \sum_{j=1}^n (\pi - \alpha_j) - \int_V K d\sigma. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В полугеодезических координатах $(x, y) := (u^1, u^2)$ первая квадратичная форма имеет вид:

$$dx^2 + G dy^2$$

и символы Кристоффеля равны (см. задачу 2.6):

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_x, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2G}G_x, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G}G_y,$$

остальные символы Кристоффеля равны нулю. Вектор нормали к кривой берется по отношению к первой квадратичной форме и вычисляется явно

$$n = \frac{1}{\sqrt{G}} (-G\dot{y}\mathbf{r}_1 + \dot{x}\mathbf{r}_2)$$

(напомним, что под точкой понимается дифференцирование по натуральному параметру l : $|\dot{\gamma}| = 1$). Теперь подставим эти выражения в формулу для геодезической кривизны и получим

$$k_g = \sqrt{G} \left(-\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} + \frac{1}{2}G_x\dot{y}^3 + \frac{1}{G}G_x\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2G}G_y\dot{x}\dot{y}^2 \right).$$

Так как $|\dot{\gamma}|^2 = \dot{x}^2 + G\dot{y}^2 = 1$, то

$$\frac{d}{dl} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{G}\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \sqrt{G} \left(-\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} + \frac{1}{2G}G_x\dot{x}^2\dot{y} + \frac{1}{2G}G_y\dot{x}\dot{y}^2 \right),$$

$$\left(\sqrt{G} \right)_x \dot{y} = (\dot{x}^2 + G\dot{y}^2) \frac{G_x\dot{y}}{2\sqrt{G}} = \sqrt{G} \left(\frac{1}{2}G_x\dot{y}^3 + \frac{1}{2G}G_x\dot{x}^2\dot{y} \right).$$

Отсюда следует, что

$$k_g dl = d \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{G}\dot{y}}{\dot{x}} \right) + \left(\sqrt{G} \right)_x \dot{y} dl.$$

По формуле Стокса [6] мы имеем

$$\int_{\gamma} \left(\sqrt{G} \right)_x \dot{y} dl = \int_{\gamma} \left(\sqrt{G} \right)_x dy = \int_V \left(\sqrt{G} \right)_{xx} dx \wedge dy$$

и, принимая во внимание формулу для гауссово кривизны в полугеодезических координатах (см. задачу 2.11), выводим

$$\int_{\gamma} \left(\sqrt{G} \right)_x \dot{y} dl = - \int_V K d\sigma.$$

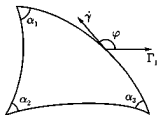


Рис. 5. Многоугольник, углы α_j и φ в формуле Гаусса-Бонне.

Заметим теперь, что угол

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{G}\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

равен (с точностью до π) углу φ между $\dot{\gamma}$ и r_1 . Если контур γ — гладкий, то

$$\int_{\gamma} d\varphi = 2\pi;$$

если же последовательные участки γ_j примыкают друг к другу под ненулевыми углами, то легко заметить, что

$$\int_{\gamma} d\varphi = 2\pi - \sum_{j=1}^n (\pi - \alpha_j).$$

Теорема 2.12 доказана.

Покажем, что формула Гаусса–Бонне верна и для больших областей V , гомеоморфных кругу. Прежде всего определим понятие симплициального разбиения.

Пусть V — либо замкнутая область (замыкание открытого множества) на плоскости с кусочно-гладкой границей, либо компактная поверхность в \mathbb{R}^3 . *Симплициальным разбиением* V называется такое представление ее в виде конечного объединения треугольников

$$V = \bigcup_j \delta_j,$$

что

- 1) внутренность каждого треугольника δ_j является областью в V и замыкание этой области гомеоморфно треугольнику;
- 2) на границе каждого треугольника отмечены три вершины и участки границы между ними называются ребрами;
- 3) два различных треугольника могут пересекаться только по одному общему ребру или по одной общей вершине и два различных ребра могут пересекаться только по одной общей вершине.

Если границы треугольников являются кусочно-гладкими контурами, то разбиение называется кусочно-гладким.

Пусть Δ — симплициальное разбиение замкнутой области V . Обозначим через a_0 число вершин, через a_1 — число ребер и через a_2 — число треугольников. Величина

$$\chi(\Delta) = a_0 - a_1 + a_2$$

называется *эйлеровой характеристикой* разбиения.



Рис. 6. Симплициальное разбиение.

Теорема 2.13. Если замкнутая область V гомеоморфна кругу на плоскости, то эйлерова характеристика любого ее симплициального разбиения равна единице.

Доказательство.

Проведем его индукцией по a_2 . При $a_2 = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при $a_2 \leq k$.

Возьмем произвольное разбиение Δ замкнутой области V с $a_2 = k + 1$. Выберем треугольник δ_j , примыкающий к границе по ребру γ^* . Удалим ребро γ^* и внутренность δ_j из V , получив в итоге новую замкнутую область V' с разбиением $\Delta \setminus \delta_j$. Возможна одна из двух ситуаций:

- 1) замкнутая область V' гомеоморфна кругу;
- 2) замкнутая область V' гомеоморфна объединению двух замкнутых областей V_1 и V_2 , на которых заданы разбиения Δ_1 и Δ_2 и эти области пересекаются по общей вершине.

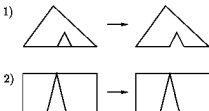


Рис. 7. «Две различных ситуации».

В первом случае очевидно, что $\chi(\Delta) = \chi(\Delta') = 1$. Во втором случае $\chi(\Delta) = \chi(\Delta') = \chi(\Delta_1) + \chi(\Delta_2) - 1 = 1$.

Теорема 2.13 доказана.

Докажем теперь формулу Гаусса–Бонне для больших областей.

Теорема 2.14. Если V — гомеоморфная кругу замкнутая область с кусочно-гладкой границей на поверхности, то для нее верна формула Гаусса–Бонне (2.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Выберем кусочно-гладкое симплициальное разбиение области V на маленькие треугольники δ_k , каждый из которых лежит в области с полугеодезическими координатами. Обозначим через c_0 число вершин, лежащих на границе ∂V области V , и через c_1 — число ребер, лежащих на границе ∂V этой области. Так как граница ∂V гомеоморфна окружности, $c_0 = c_1$.

Выпишем для каждого треугольника δ_k формулу (2.12) и просуммируем их. Так как интегралы от геодезической кривизны k_g по внутренним ребрам берутся дважды с разными знаками, сумма левых частей равна $\int_{\gamma} k_g dl$, где $\gamma = \partial V$ — граница V . Справа мы получим

$$2\pi a_2 - 3\pi a_2 + 2\pi(a_0 - c_0) + \sum_j \alpha_j - \int_V K d\sigma,$$

где α_j — углы между гладкими участками границы V . Очевидно, что $3a_2 = 2a_1 - c_1$, и мы выводим, что

$$\int_{\gamma} k_g dl = 2\pi a_2 - 2\pi a_1 + \pi c_1 + 2\pi(a_0 - c_0) + \sum_j \alpha_j - \int_V K d\sigma,$$

и, так как $c_0 = c_1$, с помощью теоремы 2.13 мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} k_g dl &= 2\pi(a_2 - a_1 + a_0) - \sum_j (\pi - \alpha_j) - \int_V K d\sigma = \\ &= 2\pi - \sum_j (\pi - \alpha_j) - \int_V K d\sigma. \end{aligned}$$

Теорема 2.14 доказана.

Формула Гаусса–Бонне имеет ряд красивых следствий.

Во-первых, ее можно применить к замкнутым поверхностям в \mathbb{R}^3 , т. е. к компактным поверхностям без края. Поверхность называется *ориентируемой*, если в касательном пространстве в каждой точке можно выбрать так ориентацию, чтобы она менялась непрерывно при движении точки по поверхности. Простейшими

примерами таких поверхностей являются тор и сфера. Вырежем теперь из сферы g кругов и получим сферу с g дырами. Возьмем g торов, из каждого из которых вырезано по внутренности круга, и приклеим каждый из этих торов к сфере с дырами, отождествив граничные контуры. Мы получим сферу с g ручками. Известно, что каждая замкнутая ориентируемая поверхность устроена как сфера с ручками².

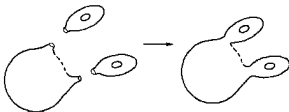


Рис. 8. Построение сферы с ручками.

Если ориентация на поверхности выбрана, то поверхность называется *ориентированной*, и по ней мы можем брать поверхностные интегралы [6], в частности, интегралы от $K d\sigma$.

Теорема 2.15. Пусть Σ — замкнутая ориентированная поверхность в \mathbb{R}^3 . Тогда для любого ее симплициального разбиения Δ выполняется равенство

$$\int_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi\chi(\Delta).$$

Доказательство.

Всякое симплициальное разбиение можно так слегка пошевелить, что оно станет кусочно-гладким (это выводится из того, что любая непрерывная функция на отрезке сколь угодно близко приближается многочленами). При этом числа вершин, ребер и треугольников не изменятся.

Предположим, что Δ — кусочно-гладкое симплициальное разбиение, и применим к каждому треугольнику из Δ формулу Гаусса–Бонне (теорема 2.14). Просуммируем эти формулы. Так

²Т. е. гомеоморфна сфере с ручками. Строгое определение гомеоморфности мы даем ниже в § 6.

как интегралы от k_g по ребрам берутся дважды с разными знаками, мы получим в левой части нуль. Правая часть суммы равна

$$2\pi a_2 - 3\pi a_2 + 2\pi a_0 - \int_{\Sigma} K d\sigma,$$

но $3a_2 = 2a_1$, так как все ребра — внутренние. В итоге мы заключаем, что

$$2\pi\chi(\Delta) = \int_{\Sigma} K d\sigma.$$

Теорема 2.15 доказана.

Следствие 2.4. Для замкнутой ориентируемой поверхности Σ эйлера характеристика симплициального разбиения не зависит от разбиения и определяется только поверхностью. Она называется эйлеровой характеристикой $\chi(\Sigma)$ поверхности Σ .

Задача 2.13. Доказать, что эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$ и, в частности, эйлеровы характеристики сферы и тора равны двум и нулю соответственно.

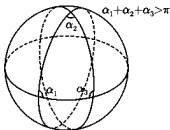


Рис. 9. Геодезический треугольник и сумма его углов (на сфере).

Другое замечательное применение формулы Гаусса–Бонне — это формула для суммы углов треугольника. Область, которая гомеоморфна внутренности треугольника и ограничена тремя отрезками геодезических, называется *геодезическим треугольником*.

Теорема 2.16. Сумма углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ геодезического треугольника Δ на поверхности равна

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \int_{\Delta} K d\sigma.$$

Доказательство теоремы немедленно следует из формулы Гаусса–Бонне с учетом того, что геодезическая кривизна сторон геодезического треугольника всюду равна нулю. Из теоремы следует, что если гауссова кривизна K положительна, то суммы углов треугольников больше π , а если она отрицательна, то меньше.

2.9. Минимальные поверхности

Обобщением геодезических на двумерный случай являются минимальные поверхности.

На ориентированной поверхности определена форма площади

$$d\sigma = \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 \wedge du^2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 \wedge du^2,$$

где в каждом касательном пространстве репер e_1, e_2 , отвечающий координатам u^1, u^2 , положительно ориентирован.

Мы говорим, что однопараметрическое семейство поверхностей Σ_ε является гладкой деформацией поверхности Σ , если

- 1) $\Sigma_0 = \Sigma$;
- 2) поверхности Σ_ε задаются функциями, которые гладко зависят от параметра деформации ε .

Говорят, что замкнутая область $V \subset \Sigma$ является носителем деформации, если часть поверхности, лежащая вне V , не деформируется.

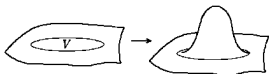


Рис. 10. Деформация поверхности и ее носитель.

Если носитель деформации V компактен, то площадь $S(\varepsilon)$ деформируемой части V_ε конечна и является гладкой функцией от параметра ε . Поверхность называется *минимальной*, если

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

для любой деформации с компактным носителем V .

Происхождение этого понятия довольно ясно: если мы имеем замкнутый контур γ в \mathbb{R}^3 и существует такая затягивающая его поверхность Σ , что она имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, ограниченных контуром γ , то эта поверхность Σ минимальна.

В случае же геодезических мы рассматриваем одномерные объекты — кривые, минимизирующие одномерный объем — длину — среди всех кривых, ограниченных парой точек. Как и в случае геодезических, минимальная поверхность, ограниченная контуром γ , не обязательно реализует минимум функционала площади — она лишь формально удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа для этого функционала, которые мы и выведем.

Теорема 2.17. *Регулярная поверхность Σ , заданная отображением $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, является минимальной, если и только если ее средняя кривизна всюду равна нулю:*

$$H = 0.$$

Доказательство.

Пусть V — замкнутая подобласть в U и γ — граница V . Деформация поверхности, сосредоточенная на V , имеет вид:

$$\mathbf{r}^\varepsilon(u^1, u^2) = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \varepsilon\varphi\mathbf{n} + O(\varepsilon^2),$$

где функция φ равна нулю вне V . Площадь продеформированной части поверхности $\mathbf{r}^\varepsilon(V)$ равна

$$S(\varepsilon) = \int_V \sqrt{(r_1^\varepsilon, r_1^\varepsilon)(r_2^\varepsilon, r_2^\varepsilon) - (r_1^\varepsilon, r_2^\varepsilon)(r_1^\varepsilon, r_2^\varepsilon)} du^1 du^2.$$

Так как

$$\mathbf{r}_k^\varepsilon = \mathbf{r}_k + \varepsilon\varphi\mathbf{n}_k + \varepsilon\varphi_k\mathbf{n} + O(\varepsilon^2)$$

и $(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = 0$, мы выводим

$$(\mathbf{r}_i^\varepsilon, \mathbf{r}_j^\varepsilon) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \varepsilon\varphi((\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_j) + (\mathbf{r}_j, \mathbf{n}_i)).$$

Из (2.2) следует, что $(r_i, p_j) = -b_{ij}$, и мы получаем

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \\ &= \int_V \sqrt{1 - 2\varepsilon\varphi \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} + O(\varepsilon^2) d\sigma = \\ &= S(0) - \varepsilon \int_V \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \varphi d\sigma + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Сумма корней k_1 и k_2 уравнения $P(\lambda) = \det(b_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ равна, как легко проверить,

$$k_1 + k_2 = \frac{b_{11}g_{22} + b_{22}g_{11} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

и по лемме 2.4 это — в точности, удвоенная средняя кривизна поверхности: $2H = k_1 + k_2$.

В итоге получаем

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -2 \int_V H \varphi d\sigma.$$

Эта величина обращается в нуль при всех деформациях с носителем в V , т.е. для любых гладких функций φ , равных нулю вне замкнутой области V , тогда и только тогда, когда $H = 0$ в каждой внутренней точке из V .

Теорема 2.17 доказана.

Задача 2.14. Доказать, что

- 1) поверхности вращения (см. задачу 6), полученные вращением графиков функций $f(x) = \operatorname{ach}(x/a + b)$, где $a \neq 0$, минимальны (они называются катеноидами);
- 2) если поверхность вращения минимальна, то она является катеноидом.

Часть II

Риманова геометрия

ГЛАВА 3

Гладкие многообразия

3.1. Топологические пространства

Топологическим пространством называется множество точек X , в котором отмечены подмножества, называемые *открытыми*, и при этом выполняются следующие условия:

- 1) объединение любого числа открытых множеств открыто;
- 2) пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
- 3) все множество X и его пустое подмножество открыты.

Дополнение к открытому множеству называется *замкнутым* множеством.

Семейство открытых множеств называется *базой* (*топологией*), если любое открытое множество представимо как объединение множеств из этого семейства. Чтобы задать на множестве точек X *топологию* (структуру топологического пространства), иногда проще не указывать все открытые множества, а лишь задать их аддитивные образующие — базу топологии. Например, зададим топологию на метрических пространствах.

Метрикой на множестве X называется такая функция

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

что выполнены следующие условия:

- 1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 2) $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Метрическим пространством называется множество точек X с метрикой ρ и топологией, определенной базой, состоящей из всевозможных открытых шаров $B_{x,\varepsilon} = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, где $x \in X$ и $\varepsilon > 0$.

Другой способ введения топологии состоит в ее индуцировании. А именно, каждое подмножество $Y \subset X$ топологического

пространства X наделено *индуцированной* топологией, при которой множество $V \subset Y$ открыто, если и только если оно представимо в виде пересечения $V = U \cap Y$, где U — открытое множество в X . Впоследствии под топологией на подмножествах топологических пространств мы всегда будем, если не оговорено противное, понимать индуцированную топологию.

Задание топологии определяет между точками отношение близости:

- *окрестностью* точки $x \in X$ называется любое открытое множество U , содержащее x : $x \in U$,

и позволяет определить непрерывность отображения из X в Y :

- отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x)$ существует окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$;
- отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:
 - а) отображение f непрерывно в каждой точке из X ,
 - б) для любого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ открыт.

Задача 3.1. Доказать эквивалентность условий а) и б) из определения непрерывного отображения.

Непрерывное отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной функцией*.

Для отображений метрических пространств понятие непрерывности обобщает определение непрерывной функции на отрезке.

Задача 3.2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических пространств X и Y непрерывно в точке $x \in X$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\rho_X(x, x') < \delta$, то $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Пусть

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{s=1}^n (x^s - y^s)^2}$$

— расстояние между точками $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Тогда метрическая топология на \mathbb{R}^n является обычной топологией, известной из курса математического анализа [6].

Введем некоторые классы топологических пространств:

- пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любой пары различных точек $x, y \in X$ существуют их окрестности U и V , которые не пересекаются друг с другом: $x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$,
- пространство X называется *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух непустых подмножеств, каждое из которых открыто и замкнуто одновременно;
- пространство X называется *линейно связным*, если любую пару различных точек $x, y \in X$ можно соединить непрерывной кривой, т. е. существует такое непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$, что $f(0) = x$ и $f(1) = y$.

Пусть X — топологическое пространство и $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — такое семейство его подмножеств, индексированное элементами множества A , что объединение U_α совпадает с X :

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

В этом случае семейство $\{U_\alpha\}$ называется *покрытием* пространства X . Если $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ — такое его подсемейство (т. е. $B \subset A$), что оно само является покрытием, то оно называется *подпокрытием* покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Если все множества U_α открыты, то покрытие называется *открытым*. Следующее понятие является исключительно важным в топологии и анализе:

- пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие,
- компактное хаусдорфово пространство называется *компактам*.

Примерами компактов являются отрезки $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a, b < \infty$ (лемма Гейне–Бореля; см., например, [6]).

Задача 3.3. Подмножество X евклидова пространства \mathbb{R}^n компактно, если и только если оно замкнуто в \mathbb{R}^n и ограничено (полностью содержится в конечном кубе $\{|x| \leq N\}$ для некоторого $N < \infty$).

Задача 3.4. Если $f : X \rightarrow Y$ непрерывное отображение и X компактно, то его непрерывный образ $f(X)$ компактен.

Из утверждений задач 3.3 и 3.4 вытекает следующее свойство.

Задача 3.5. Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция и X компактно, то f достигает своих максимума и минимума: существуют такие точки $x_{\min}, x_{\max} \in X$, что $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ для всех $x \in X$.

Перечисленные свойства (хаусдорфовость, линейная связность, связность, компактность) являются топологическими инвариантами, т.е. они один и те же у пространств, неразличимых как топологические пространства без каких-либо дополнительных структур. Это понятие неразличимости формализуется следующим образом:

- пространства X и Y *гомеоморфны*, если существуют такие непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, что они взаимно обратны: $gf : X \rightarrow X$ и $fg : Y \rightarrow Y$ — тождественные отображения X и Y соответственно. Такие отображения f и g называются *гомеоморфизмами*;
- свойство *топологически инвариантно*, если из того, что оно выполняется для пространства X , следует, что оно выполняется для любого пространства Y , которое гомеоморфно X .

3.2. Гладкие многообразия и отображения

Топологическим n -мерным многообразием называется хаусдорфово пространство M , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную области из \mathbb{R}^n .

Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M такое, что для каждого его элемента U_α задан гомеоморфизм φ_α с областью W_α из \mathbb{R}^n :

$$\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow U_\alpha,$$

называется *атласом*. Каждый такой гомеоморфизм φ_α задает в области U_α *локальные координаты*. А именно, если $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, то локальные координаты точки $\varphi_\alpha(x)$ —

это x^1, \dots, x^n . В пересечении координатных областей U_α и U_β локальные координаты связаны функциями перехода:

$$x_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n),$$

где $f_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\beta$.

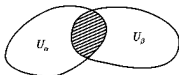


Рис. 11. Перекрывающиеся карты.

Мы говорим, что на топологическом многообразии задана *гладкая структура* класса C^k , если на нем задан атлас, у которого все функции перехода непрерывно дифференцируемы k раз. Многообразие с таким покрытием называется *гладким* (класса гладкости C^k), а соответствующие локальные координаты — *гладкими*. В дальнейшем под «гладкостью» мы будем для простоты понимать гладкость класса C^∞ .

Отображения $f_{\alpha\beta}$ обратимы, так как их композиция $f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha}$ является тождественным отображением. Следовательно, их якобианы всюду невырождены:

$$\det \left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial x_\beta^j} \right) = \det \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) \neq 0.$$

Согласно теореме о дифференцировании сложной функции, если на пересечении областей $U_\alpha \cap U_\beta$ задана функция f класса гладкости C^k по переменным x_α^i , то она имеет тот же класс гладкости по переменным x_β^j . Это позволяет определить понятие *гладкого отображения*:

- отображение гладких многообразий $f : M \rightarrow N$ имеет класс гладкости C^k , если по отношению к гладким локальным координатам $\{x^i\}$ на M и $\{y^j\}$ на N оно задается вектор-функцией $(y^1, \dots, y^m) = f(x^1, \dots, x^n)$ класса гладкости C^k .

Гладкие отображения $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называются *гладкими функциями*, а гладкие отображения $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — *гладкими путями*.

Заметим, что определение гладкости отображения $f : M \rightarrow N$ опирается на гладкие структуры и на M , и на N . Если на одном и том же топологическом многообразии X заданы две различные гладкие структуры, то мы получаем два различных гладких многообразия M_1 и M_2 . Гладкие структуры считаются совпадающими, если тождественные отображения $M_1 \rightarrow M_2$ и $M_2 \rightarrow M_1$ являются гладкими.

Многообразия M и N называются *диффеоморфными*, если существуют такие гладкие отображения $f : M \rightarrow N$ и $g : N \rightarrow M$, что они взаимно обратны, т.е. отображения $fg : N \rightarrow N$ и $gf : M \rightarrow M$ тождественны. Такие гладкие гомеоморфизмы f и g называются *диффеоморфизмами*¹.

Пусть $\gamma(t)$ — гладкий путь в M . Тогда в локальной системе координат $\{x_\alpha^i\}$ путь $\gamma(t)$ записывается в виде

$$t \rightarrow (x_\alpha^1(t), \dots, x_\alpha^n(t))$$

и его вектор скорости в точке $\gamma(t)$ равен

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_\alpha^1(t), \dots, \dot{x}_\alpha^n(t)).$$

В другой локальной системе координат $\{x_\beta^j\}$ путь $\gamma(t)$ и его вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ имеют вид

$$t \rightarrow (x_\beta^1(t), \dots, x_\beta^n(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_\beta^1(t), \dots, \dot{x}_\beta^n(t)).$$

Отсюда мы выводим формулу, которая связывает записи векторов скорости в различных системах координат:

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_\beta^1(t), \dots, \dot{x}_\beta^n(t)) = \left(\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^j} \dot{x}_\alpha^j(t), \dots, \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^j} \dot{x}_\alpha^j(t) \right),$$

¹ Известно, что существует бесконечно много попарно недиффеоморфных гладких многообразий, гомеоморфных \mathbb{R}^4 (при $n \neq 4$ — такие многообразия единственны с точностью до диффеоморфизма), а на топологическом пространстве S^7 , гомеоморфном единичной семимерной сфере в \mathbb{R}^8 ($S^7 = \{v \in \mathbb{R}^8 : |v| = 1\}$), существует ровно двадцать восемь различных (с точностью до диффеоморфизма) гладких структур. Все эти структуры на S^7 реализуются на подмногообразиях \mathbb{R}^{10} , заданных уравнениями

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0,$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1,$$

при $k = 1, \dots, 28$ (здесь z_1, \dots, z_5 — комплекснозначные координаты в $\mathbb{C}^5 \approx \mathbb{R}^{10}$).

что влечет

$$\dot{x}_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \dot{x}_\alpha^j.$$

Векторы скорости путей в M являются касательными векторами к M , и вектор $\dot{\gamma}(t)$ касателен в точке $\gamma(t)$. Мы приходим к следующему определению:

- *касательным вектором* к n -мерному многообразию M в точке x называется объект, который в локальных координатах $\{x_\alpha^i\}$ задается упорядоченным набором чисел $(v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ и его запись $(w_\beta^1, \dots, w_\beta^n)$ в любой другой системе координат $\{x_\beta^j\}$ удовлетворяет уравнению

$$w_\beta^j = \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} v_\alpha^i. \quad (3.1)$$

Касательные векторы в точке x образуют n -мерное векторное пространство, которое называется *касательным пространством* $T_x M$ в точке x . Каждая система координат задает в касательном пространстве базис, обозначаемый через

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (3.2)$$

Вектор скорости \dot{x} разлагается в этом базисе по формуле

$$\dot{x} = \dot{x}^1 \partial_1 + \dots + \dot{x}^n \partial_n.$$

Многообразие *ориентуемо*, если существуют такие координатные области U_α , покрывающие все многообразие, что на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ любой пары областей выполняется неравенство

$$\det \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) > 0.$$

Пусть многообразие — связное и ориентируемое. Тогда, считая базис $\partial/\partial x_\alpha^1, \dots, \partial/\partial x_\alpha^n$ положительно или отрицательно ориентированным, мы задаем ориентацию во всех касательных пространствах, полагая базисы $\partial/\partial x_\beta^1, \dots, \partial/\partial x_\beta^n$ положительно или

отрицательно ориентированными соответственно. Если на многообразии выбрана какая-то ориентация, то оно называется *ориентированным*.

Гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ определяет индуцированное линейное отображение

$$f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N,$$

при котором вектор скорости пути $\gamma(t)$ переходит в вектор скорости пути $f(\gamma(t))$. Выберем в окрестности x локальные координаты $\{x^i\}$ и в окрестности $f(x)$ локальные координаты $\{y^j\}$. Тогда отображение f записывается в виде

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n),$$

и мы получаем

$$f^j(\gamma(t)) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \dot{x}^i(t).$$

Значит, в данных координатах отображение f_* записывается в виде

$$v^i \rightarrow w^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} v^i.$$

Отсюда мы, в частности, видим, что он является линейным.

Подпространство N является k -мерным *подмногообразием* в M , если для каждой точки $x \in N$ существует такая окрестность U с локальными координатами x^1, \dots, x^n , что пересечение $U \cap N$ выделяется уравнениями $x^1 = \dots = x^{n-k} = 0$. Считая при этом $y^1 = x^{n-k+1}, \dots, y^k = x^n$ локальными координатами на N , мы задаем на N структуру гладкого многообразия.

Введем следующее важное понятие:

- гладкое отображение $F : M \rightarrow N$ *регулярно* в точке $x \in M$, если при записи в каких-то (а значит и любых) локальных координатах $y^j = F^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, k$ ранг якобиана в точке x равен размерности многообразия N :

$$\text{rank} \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i} \right) = \dim N.$$

Если это условие выполнено, то точка x называется *регулярной* точкой отображения F .

Примерами подмногообразий являются регулярные множества нулей гладких отображений.

Лемма 3.1. Пусть на n -мерном многообразии M задано гладкое отображение $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ и множество его нулей $M_0 = F^{-1}(0)$ состоит из регулярных точек. Тогда M_0 — гладкое подмногообразие в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $x \in M_0$. Тогда в окрестности точки x мы имеем

$$\text{rang} \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i} \right) = n - k,$$

где $\{x^i\}$ — координаты на M . Без ограничения общности можно считать, что в точке x минор, отвечающий координатам x^1, \dots, x^{n-k} , не равен нулю. По теореме о неявной функции в малой окрестности $U \subset M$ точки x определены такие функции $\psi_1, \dots, \psi_{n-k}$, что равенство $F(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x^1 = \psi_1(x^{n-k+1}, \dots, x^n), \dots, x^{n-k} = \psi_{n-k}(x^{n-k+1}, \dots, x^n)$. Примем теперь

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= x^1 - \psi_1(x^{n-k+1}, \dots, x^n), \dots, \\ \hat{x}^{n-k} &= x^{n-k} - \psi_{n-k}(x^{n-k+1}, \dots, x^n), \\ \hat{x}^{n-k+1} &= x^{n-k+1}, \dots, \hat{x}^n = x^n \end{aligned}$$

за локальные координаты в окрестности V точки x . В них множество $V \cap M_0$ выделяется уравнениями $\hat{x}^1 = \dots = \hat{x}^{n-k} = 0$. Лемма 3.1 доказана.

Эта лемма даст большой запас примеров гладких многообразий, которые могут строиться как подмногообразия других, уже известных. При $M = \mathbb{R}^N$ мы получаем гладкие подмногообразия евклидова пространства (см. § 1.4).

Пример. Сферы. Множество нулей гладкого отображения

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 - 1$$

евклидова пространства \mathbb{R}^{n+1} в \mathbb{R} задает гладкую гиперповерхность — n -мерную сферу S^n . Любое гладкое многообразие, диффеоморфное этой сфере, тоже называется n -мерной сферой.

Пусть $f : N \rightarrow M$ — такое гладкое отображение, что

- 1) f задает гомеоморфизм между N и $f(N) \subset M$;
- 2) в каждой точке $x \in N$ отображение f_* является вложением касательных пространств.

Такое отображение f называется *вложением* N в M . Если выполнено только условие 2, то отображение f называется *погружением*.

Лемма 3.2. Если $f : N \rightarrow M$ — вложение, то $f(N)$ — подмногообразие в M и $f : N \rightarrow f(N)$ — диффеоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В локальных координатах $\{y^j\}$ на N и $\{x^j\}$ на M вложение f записывается как $x^j = x^j(y^1, \dots, y^n)$ и, так как точка x регулярна для f ,

$$\text{rank} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right) = k.$$

Без ограничения общности считаем, что

$$\det \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$$

в окрестности точки x . По теореме об обратной функции в малой окрестности U точки $f(x)$ определены такие гладкие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, что $y^j = \varphi_j(x^1, \dots, x^k)$ при $1 \leq j \leq k$, если и только если $x^j = x^j(y^1, \dots, y^k)$. Теперь возьмем

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

в виде

$$F^j(x^1, \dots, x^n) = x^{k+j} - x^{k+j}(\varphi_1(x^1, \dots, x^k), \dots, \varphi_k(x^1, \dots, x^k)).$$

Множество нулей отображения F совпадает по построению с $f(N) \cap U$, и на нем F регулярно. Применяя лемму 3.1, завершаем доказательство леммы 3.2.

Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на многообразии M и множество ее нулей M_0 состоит из регулярных точек этого отображения. Тогда M_0 — подмногообразие, разделяющее M на две части, где $f < 0$ и $f > 0$. В этом случае замкнутая область N , выделенная неравенством $f(x) \geq 0$, называется *многообразием с краем* $\partial N = M_0$. Если удалить из многообразия с краем N его край ∂N , то мы получим подмногообразие $N \setminus \partial N \subset M$, размерность которого совпадает с размерностью M и называется *размерностью многообразия с краем*. Если многообразие с краем n -мерно, то его граница является $(n-1)$ -мерным многообразием без края.

Отображение $f : N_1 \rightarrow N_2$ многообразий с краем $N_1 \subset M_1$ и $N_2 \subset M_2$, выделяемых в M_1 и M_2 неравенствами, называется

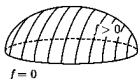


Рис. 12. Край многообразия.

гладким, если существует открытая область такая $U \subset M_1$, что $N_1 \subset U$ и f продолжается до гладкого отображения $g: U \rightarrow M_2$.

Аналогично случаю многообразий без края определяется диффеоморфизм многообразий с краем, и мы заметим, что если N является n -мерным многообразием с краем, то каждая точка его границы имеет окрестность диффеоморфную пересечению n -мерного шара $\{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ с полупространством $x^n \geq 0$.

Если многообразие не имеет края и компактно, то оно называется *замкнутым*.

Определим гладкую структуру на прямом произведении гладких многообразий. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие M областями с координатами $\{x_\alpha^i\}$ и $\{V_\beta\}$ — покрытие N областями с координатами $\{y_\beta^j\}$. Тогда $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ образует покрытие $M \times N$ областями, в которых примем $\{x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^k, y_\beta^1, \dots, y_\beta^l\}$ за гладкие координаты (здесь $k = \dim M, l = \dim N$). В дальнейшем под гладким многообразием $M \times N$ будем понимать данное многообразие.

Примеры. 1) *Торы.* Прямое произведение n экземпляров окружности S^1 называется n -мерным тором:

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n.$$

Двумерный тор получается, если мы возьмем квадрат $\{0 \leq x, y \leq 1\}$ на плоскости и склеим противоположные стороны по правилу:

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

На полученном торе величины x, y зададут координаты, определенные по модулю единицы.

2) *Бутылка Клейна.* Возьмем квадрат $\{0 \leq x, y \leq 1\}$ на плоскости и склеим противоположные стороны по правилу

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (1 - x, 1).$$

Будем считать, что в достаточно малой окрестности любой точки полученного пространства M^2 величины x, y задают гладкие локальные координаты. Полученное замкнутое многообразие называется *бутылкой Клейна*.

Задача 3.6. Доказать, что бутылка Клейна неориентируема, так как при непрерывном изменении ориентации в касательных пространствах вдоль петли $\gamma(t) = (1/2, t)$, где $t \in [0, 1]$, ориентация обращается.

Задача 3.7. Докажите, что неравенства $1/4 \leq x \leq 3/4$ выделяют в бутылке Клейна подмногообразие, которое неориентируемо и край которого состоит из одной компоненты, гомеоморфной окружности².

Задача 3.8. Пусть \mathbb{R}_1 и \mathbb{R}_2 — две прямые с координатами x и y соответственно. Пусть X — множество, полученное из этих прямых отождествлением точек $x \in \mathbb{R}_1$ и $y \in \mathbb{R}_2$ при $x = y$ и $x \neq 0$. Прямые \mathbb{R}_j естественным образом вкладываются в X : $p_j: \mathbb{R}_j \rightarrow X$. Введем на X топологию, положив $U \subset X$ открытым, если и только если его прообразы $p_1^{-1}(U) \subset \mathbb{R}_1$ и $p_2^{-1}(U) \subset \mathbb{R}_2$ открыты. Показать, что X обладает всеми свойствами гладкого многообразия, кроме хаусдорфовости.

3.3. Тензоры

Гладкие многообразия около каждой точки устроены так же как евклидовы пространства и функции на многообразиях — гладкие, если они являются гладкими функциями от локальных координат. Записи касательных векторов в различных координатах связаны формулой (3.1).

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на M . В координатах $\{x_\alpha^i\}$ ее градиент $\text{grad } f$ имеет вид

$$v^\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^n} \right),$$

а в координатах $\{x_\beta^i\}$ —

$$w^\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\beta^n} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^n} \right).$$

²Это многообразие с краем называется лентой Мебиуса.

Формула, которая связывает записи градиента в различных координатах, отличается от (3.1).

Ковектором в точке x называется объект, который задается в локальных координатах $\{x_\alpha^i\}$ упорядоченным набором чисел $(v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha)$ и $(w_1^\beta, \dots, w_n^\beta)$ в другой системе координат $\{x_\beta^j\}$ удовлетворяет уравнению

$$w_j^\beta = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} v_i^\alpha. \quad (3.3)$$

Мы заключаем, что

Лемма 3.3. *Градиент функции является ковектором.*

Производная функции в направлении касательного вектора v равна $D_v f = (\text{grad } f)_i v^i$, не зависит от системы координат и является линейной функцией на касательном пространстве. Последнее утверждение верно для всех ковекторов.

Лемма 3.4. *Ковектор w в точке $x \in M$ является линейной функцией на касательном пространстве $T_x M$, записываемой в локальных координатах формулой $w(v) = w_i v^i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточно показать, что значение $w(v)$ не зависит от выбора локальных координат. Но из (3.1) и (3.3) следует, что

$$w_i^\beta v_\beta^i = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} w_j^\alpha \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^k} v_\alpha^k,$$

и, так как

$$\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^k} = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\alpha^k} = \delta_k^j,$$

мы получаем

$$w(v) = w_i^\beta v_\beta^i = w_k^\alpha v_\alpha^k.$$

Лемма 3.4 доказана.

Из леммы 3.4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Ковекторы в точке $x \in M$ образуют линейное пространство $T_x^* M$ размерности $n = \dim M$, сопряженное к касательному пространству $T_x M$.*

Пространство T_x^*M называется *касательным пространством* в точке $x \in M$.

Обобщением векторов и ковекторов являются тензоры:

- *тензором* типа (k, l) в точке $x \in M$ называется такой объект $T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$, что его записи в различных системах координат связаны формулой

$$(\beta)T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial x_\beta^{i_1}}{\partial x_\alpha^{r_1}} \dots \frac{\partial x_\beta^{i_k}}{\partial x_\alpha^{r_k}} \frac{\partial x_\alpha^{s_1}}{\partial x_\beta^{j_1}} \dots \frac{\partial x_\alpha^{s_l}}{\partial x_\beta^{j_l}} (\alpha)T_{s_1 \dots s_l}^{r_1 \dots r_k}, \quad (3.4)$$

- семейство тензоров, гладко зависящее от точки $x \in M$, называется *гладким тензорным полем* на M .

Из этого определения видно, что касательный вектор является тензором типа $(1, 0)$, а градиент функции — типа $(0, 1)$. Так как векторы v сами являются линейными функциями на ковекторах w вида $v(w) = w(v)$, тензоры T типа (k, l) являются линейными функциями от k ковекторов $u^{(m)}$ и l векторов $v_{(n)}$:

$$T(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, v_{(1)}, \dots, v_{(l)}) = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_k}^{(k)} v_{(1)}^{j_1} \dots v_{(l)}^{j_l}.$$

Теперь формула (3.4) поаргументно выводится из формул (3.1) и (3.3), которые для касательных векторов и градиентов функций вытекают из теоремы о дифференцировании сложной функции.

Формула (3.4) очевидна для тензорных произведений тензоров валентностей $(1, 0)$ и $(0, 1)$: тензор $A \otimes B$ валентности $(k+p, l+q)$ называется *тензорным произведением* тензоров A и B валентностей (k, l) и (p, q) соответственно, если

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_l s_1 \dots s_q}^{i_1 \dots i_k r_1 \dots r_p} = A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \cdot B_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p}.$$

Мы уже указали базис $e_1 = \partial_1, \dots, e_n = \partial_n$ вида (3.2) в пространстве векторов. Ему сопряжен базис $e^1 = dx^1, \dots, e^n = dx^n$ в пространстве ковекторов. Он однозначно определяется своими элементами на базисных векторах

$$e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Тензорные произведения вида

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_l}$$

задают базис в пространстве тензоров валентности (k, l) в любой точке. Для такого тензора имеет место очевидное разложение:

$$T = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_l}.$$

Если задать в каждом касательном пространстве $T_x M$ скалярное произведение (v_1, v_2) (для поверхностей в \mathbb{R}^3 — первую квадратичную форму), то мы получим метрику g_{ij} , являющуюся тензором типа $(0, 2)$:

$$(v_1, v_2) = g_{ij} v_1^i v_2^j, \quad g_{ij} = (e_i, e_j).$$

Касательные векторы — пары (x, v) вида $x \in M, v \in T_x M$ — образуют касательное расслоение TM .

Теорема 3.1. *На касательном расслоении TM к n -мерному многообразию M существует такая структура гладкого многообразия, что*

- а) проекция $\pi : TM \rightarrow M$ является гладким отображением;
- б) для любой точки $x \in M$ существует такая ее окрестность U , что прообраз $\pi^{-1}(U)$ этой окрестности диффеоморфен прямому произведению $U \times \mathbb{R}^n$: $f : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, и при этом $\pi(f^{-1}(x, v)) = x$, где $x \in U, v \in \mathbb{R}^n$ (диффеоморфизм f согласован с проектированием).

Доказательство.

Для каждой точки $x \in M$ возьмем какую-то координатную окрестность U_α с координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Пусть W_α — множество векторов v , касательных к точкам из U . Введем на W_α координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$, где $v \in T_x M$ раскладывается по базису (3.2) как $v = v_\alpha^i \partial_i$.

Семейство W_α образует покрытие TM и, считая координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ гладкими, мы вводим на M структуру гладкого многообразия, удовлетворяющее всем утверждениям теоремы.

Теорема 3.1 доказана.

В дальнейшем под гладкой структурой на TM мы будем понимать структуру, построенную в доказательстве теоремы 3.1.

Аналогично доказывается, что на множестве ковекторов в точках M — кокасательном расслоении T^*M к многообразию M — существует такая структура гладкого многообразия, что проекция $\pi : T^*M \rightarrow M$ является гладким отображением и для любой точки $x \in M$ существует такая ее окрестность U , что прообраз $\pi^{-1}(U)$ этой окрестности диффеоморфен прямому произведению $U \times \mathbb{R}^n$, где $n = \dim M$.

Задача 3.9. Пусть линейный оператор $A : V \rightarrow V$ задается в координатах величинами A_j^i по формулам

$$A\xi = \eta, \quad \eta^i = A_j^i \xi^j.$$

Доказать, что эти величины образуют тензор валентности $(1, 1)$.

3.4. Вложение гладких многообразий в евклидовы пространства

В начале 20-го века под гладким многообразием понимали регулярное множество нулей отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, т.е. то, что сейчас называется подмногообразием евклидова пространства. Внутреннее определение, данное в § 3.2, в действительности не является более общим. А именно, имеет место следующая теорема Уитни:

- каждое гладкое n -мерное многообразие со счетной базой (т.е. имеющее счетную базу открытых множеств) вкладывается в \mathbb{R}^{2n} .

Мы ограничимся доказательством более простого утверждения.

Теорема 3.2. Пусть M — замкнутое гладкое многообразие. Тогда существует его вложение $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство достаточно большой размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Можно ограничиться случаем связного многообразия и считать, что оно n -мерно.

Прежде всего для каждого $R > 0$ построим гладкое отображение ψ_R пространства \mathbb{R}^n в единичную сферу $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что

- 1) ψ_R диффеоморфно переводит внутренность круга $\{|x| < R\}$ на дополнение к полюсу $P = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$;
 - 2) ψ_R отображает множество $\{|x| \geq 1\}$ в полюс $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$.
- Сделаем это в два этапа:

1) Отобразим диффеоморфно внутренность круга $\{|x| < R\}$ на все \mathbb{R}^n так, что граница круга отобразится в «бесконечно удаленную точку». Для этого достаточно взять отображение

$$f_R : (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (\tau x^1, \dots, \tau x^n),$$

где $\tau = \exp(1/(R^2 - |x|^2))$;

2) Отобразим диффеоморфно \mathbb{R}^n на дополнение к полюсу $P \in S^n$ так, что «бесконечно удаленная точка» перейдет в полюс. Для этого реализуем \mathbb{R}^n как гиперплоскость $\{y^{n+1} = -1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и рассмотрим стереографическую проекцию π , которая отображает точку $y \in S^n$ в пересечение прямой, проходящей через точки y и P , с плоскостью $\{y^{n+1} = -1\}$. Отображение π^{-1} имеет вид:

$$\pi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (\theta x^1, \dots, \theta x^n, 1 - 2\theta),$$

где $\theta = 4/(4 + |x|^2)$.

Искомое отображение ψ_R на $\{|x| < R\}$ принимает вид $\psi_R = \pi^{-1}f_R$ и продолжается гладко на все \mathbb{R}^n как $\psi_R(x) = P$ при $|x| \geq 1$.

Покроем теперь M координатными областями U_α так, что каждая область U_α диффеоморфна шару $\{|x| < R_\alpha\}$. Многообразие M компактно, и поэтому можно выбрать конечное подпокрытие U_1, \dots, U_k . Для каждой области U_j определим отображение

$$\varphi_j = \psi_{R_j} : M \rightarrow S^n$$

и рассмотрим отображение

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad N = (n+1)k$$

вида

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)).$$

Отображение φ является вложением. Действительно, если $x \neq y$, то выполняется по крайней мере одна из ситуаций:

- 1) существует такая область U_j , что $x, y \in U_j$, и тогда $\varphi_j(x) \neq \varphi_j(y)$;
- 2) существует такая область U_j , что $x \in U_j$ и $y \in M \setminus U_j$, и тогда опять $\varphi_j(x) \neq \varphi_j(y)$.

Если $x \in U_j$, то линейное отображение φ_j имеет ранг n и поэтому задает вложение касательного пространства $T_x M$ в пространство $T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^N$.

Теорема 3.2 доказана.

ГЛАВА 4

Римановы многообразия

4.1. Метрический тензор

Пусть M — гладкое многообразие и в касательном пространстве к каждой его точке задано скалярное произведение, которое в координатах на касательном расслоении записывается с помощью симметричного тензора g_{ij} :

$$v, w \in T_x M \rightarrow (v, w) = g_{ij} v^i w^j \in \mathbb{R}, \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Предположим, что $g_{ij}(x)$ непрерывно зависит от $x \in M$. Такое многообразие называется *римановым*, а тензор g_{ij} называется *метрическим тензором* (или *метрикой*¹). Если метрика гладко зависит от x , то риманово многообразие называется *гладким*.

Простейшими примерами являются подмногообразия в \mathbb{R}^n .

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение многообразия M в \mathbb{R}^n . Определим на M метрику $(\cdot, \cdot)_f$, индуцированную вложением. Пусть $v, w \in T_x M$ и $f_*(v), f_*(w) \in T_{f(x)} \mathbb{R}^n$. Положим

$$(v, w)_f = (f_*(v), f_*(w)),$$

где (\cdot, \cdot) — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^n . В случае поверхностей в \mathbb{R}^3 метрический тензор, индуцированный вложением, называется *первой квадратичной формой*.

Более общее следующее определение: если $f: M \rightarrow N$ — гладкое вложение M в риманово многообразие N , то метрика на многообразии M , заданная формулой

$$(v, w)_f = (f_*(v), f_*(w))_N,$$

где $(\cdot, \cdot)_N$ — метрика на N , называется *индуцированной* вложением f .

Из теоремы 3.2 вытекает

¹ Не путать с метрикой, как функцией расстояния между точками (см. § 3.1).

Следствие 4.1. На каждом замкнутом гладком многообразии существует гладкая риманова метрика.

Введем g^{ij} , который однозначно задается следующими соотношениями:

$$g^{ij}g_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Обобщением римановой метрики является понятие псевдоримановой метрики: пусть тензор g_{ij} симметричен, но не обязательно положительно определен, а задающая его матрица имеет k положительных и $(n - k)$ отрицательных собственных значений, где $\dim M = n$. Тогда он задает псевдориманову метрику сигнатуры $(k, n - k)$. Простейшим примером является псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{k, n-k}$, диффеоморфное \mathbb{R}^n и оснащенное в каждой касательной плоскости псевдоскалярным произведением

$$(v, w)_{k, n-k} = v^1 w^1 + \dots + v^k w^k - v^{k+1} w^{k+1} - \dots - v^n w^n.$$

Пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ называется пространством Минковского и известно как «пространство-время» в специальной теории относительности (см. главу 5).

4.2. Аффинная связность и ковариантное дифференцирование

Формулы (3.4), связывающие записи тензоров в разных системах координат, как правило, нелинейны по координатам на многообразии, и поэтому не зависящее от координат определение дифференцирований тензоров требует введения аффинных связностей.

Пусть M — гладкое многообразие.

Пусть задана функция, которая в каждой точке $x \in M$ сопоставляет каждому векторному полю v на M и каждому вектору $w \in T_x M$ новый касательный вектор

$$v, w \rightarrow \nabla_w v \in T_x M, \quad (4.1)$$

и при этом выполняются следующие условия:

1) отображение (4.1) линейно по обоим аргументам:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2} v &= \alpha_1 \nabla_{w_1} v + \alpha_2 \nabla_{w_2} v, \\ \nabla_w (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 \nabla_w v_1 + \alpha_2 \nabla_w v_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

2) если $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, то

$$\nabla_{f w} v = f \nabla_w v, \quad \nabla_w f v = (D_w f) v + f \nabla_w v,$$

где $D_w f$ — производная функции f в направлении вектора w .

Такая функция (4.1) называется *аффинной связностью*, а ее значение $\nabla_w v$ — *ковариантной производной* векторного поля v в направлении вектора w .

Если для гладких векторных полей v и w векторное поле $\nabla_w v$ тоже гладко, то связность называется *гладкой*. В дальнейшем мы будем подразумевать все связности гладкими.

Заметим, что для определения связности не требуется, чтобы многообразие M было римановым.

В координатах связность записывается через *символы Кристоффеля* Γ_{ij}^k . А именно, пусть x^1, \dots, x^n — координаты в области из M и $\partial_1, \dots, \partial_n$ — соответствующие им векторные поля (3.2), образующие базисы в касательных пространствах. Определим символы Кристоффеля по формуле:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (4.2)$$

Из определения связности следует, что для любых векторных полей $v = v^i \partial_i$ и $w = w^j \partial_j$ ковариантная производная имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_w v &= \nabla_{w^j \partial_j} (v^i \partial_i) = w^j \nabla_{\partial_j} (v^i \partial_i) = \\ &= w^j \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} \partial_k + v^i \nabla_{\partial_j} \partial_i \right) = w^j \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k, \end{aligned}$$

и в итоге мы получаем

$$(\nabla_w v)^k = w^j \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i \Gamma_{ji}^k \right). \quad (4.3)$$

Из этих вычислений следует, что

- *символы Кристоффеля однозначно задают связность.*

Более того, из них же следует, что символы Кристоффеля не являются тензорами. Покажем это.

Пусть y^1, \dots, y^n — другие координаты в той же области и $\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n$ — отвечающие им координатные векторные поля. Из теоремы о дифференцировании сложной функции следует, что

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \tilde{\partial}_j.$$

Подставим это в (4.2):

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k \delta_k &= \nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_i} \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \tilde{\delta}_k \right) = \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{\delta}_k + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \nabla_{\tilde{\delta}_k} \tilde{\delta}_l = \\ &= \left(\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{\Gamma}_{kl}^m \right) \tilde{\delta}_m = \left(\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{\Gamma}_{kl}^m \right) \frac{\partial x^p}{\partial y^m} \partial_p\end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^m} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^m} \tilde{\Gamma}_{kl}^m.$$

Отсюда следует, что

- символы Кристоффеля преобразуются как тензоры только при линейных заменах координат (в этом случае $\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j} \equiv 0$);
- величина $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ является тензором (и называется тензором кручения).

Ковариантное дифференцирование распространяется на все тензоры следующим образом.

Если f — гладкая функция на многообразии M , то естественно считать, что

$$\nabla_w f = w^j \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

т. е. ковариантная производная совпадает с производной функции в направлении поля w . Пусть u — ковекторное поле на M , а v — векторное поле на M . Тогда $f = u_i v^i$, значение u на v , — гладкая функция и

$$\nabla_w f = w^j \frac{\partial (u_i v^i)}{\partial x^j}.$$

Делая естественное предположение, что ковариантное дифференцирование удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\nabla_w (u_i v^i) = (\nabla_w u)_i v^i + u_i (\nabla_w v)^i,$$

мы выводим из (4.3), что

$$(\nabla_w u)_i = w^j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k w^j u_k.$$

Любой тензор валентности (k, l) представляется в виде линейной комбинации элементарных тензоров вида

$$T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} = A_{(1)}^{i_1} \dots A_{(k)}^{i_k} A_{j_1}^{(k+1)} \dots A_{j_l}^{(k+l)},$$

т. е. тензорных произведений тензоров валентности $(0, 1)$ или $(1, 0)$. Теперь, предполагая, что ковариантное дифференцирование удовлетворяет следующему правилу Лейбница:

$$\nabla_w(A \otimes B) = (\nabla_w A) \otimes B + A \otimes (\nabla_w B),$$

и зная его действие на векторах и ковекторах, можно выписать его действие на любом тензорном поле. При этом

- ковариантная производная тензора является тензором.

Задача 4.1. Показать, что определенное таким образом ковариантное дифференцирование тензора имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_w T_{(k)}^{(s)} = w^j \left(\frac{\partial T_{(k)}^{(s)}}{\partial x^j} - T_{kk_2 \dots k_n}^{(s)} \Gamma_{k_1 j}^k - \dots - T_{k_1 \dots k}^{(s)} \Gamma_{k_n j}^k + \right. \\ \left. + T_{(k)}^{i_2 \dots i_m} \Gamma_{ij}^{i_1} + \dots + T_{(k)}^{i_1 \dots i} \Gamma_{ij}^{i_m} \right). \end{aligned}$$

В частности, для тензоров валентности $(0, 2)$ верна формула:

$$\nabla_w g_{ij} = w^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - w^k (\Gamma_{k_1 i}^l g_{lj} + \Gamma_{k_1 j}^l g_{il}).$$

Заметим, что мы стартовали с определения ковариантного дифференцирования векторных полей и нигде не предполагали, что многообразие риманово. В таком виде определение связности может быть введено на любом гладком векторном расслоении, т. е. на многообразии E , на котором определено такое гладкое отображение $\pi: E \rightarrow B$, что

1) существует такое покрытие многообразия B областями U_α , что для каждой области U_α существует диффеоморфизм

$$p_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F,$$

где F — векторное пространство, которое одно и то же для всех α , и диффеоморфизм p_α согласован с проектированием:

$$\pi(p_\alpha^{-1}(x, v)) = x, \quad x \in U_\alpha, v \in F;$$

2) если пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ таких областей непусто, то отображение

$$p_\alpha p_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

имеет вид $(x, v) \rightarrow (x, A_x(v))$, где для каждой точки x линейное преобразование A_x принадлежит какой-то подгруппе G группы $GL(F)$ всех обратимых линейных отображений F в себя.

В этом случае E называется *пространством расслоения*, B — *базой*, G — *структурной группой* расслоения, а F — *слоем* расслоения. Простейшим, после прямого произведения $M \times F$, примером векторного расслоения является касательное расслоение к n -мерному многообразию M : его слой изоморфен \mathbb{R}^n , структурная группа — $GL(n, \mathbb{R})$, и отображение π сопоставляет касательному вектору точку касания (теорема 3.1).

Связность определяет *параллельный перенос* в расслоении. Пусть $\gamma : [0, T] \rightarrow B$ — гладкий путь на базе расслоения. Тогда векторное поле $v(t)$ (т.е. функция от t со значениями в слоях расслоения: $v(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t))$) называется *параллельным* вдоль γ , если $\pi(v(t)) = \gamma(t)$ для любого t и выполняется уравнение

$$\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} v = 0. \quad (4.4)$$

Расписывая левую часть, получаем, что параллельность эквивалентна выполнимости для каждого $i = 1, \dots, n$ уравнения

$$\left(\frac{Dv}{dt} \right)^i = \dot{\gamma}^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i v^j \right) = 0.$$

Для любого заданного начального условия $v(0)$ уравнение (4.4) однозначно разрешимо, так как оно имеет первый порядок, и говорят, что вектор $v(1)$ получен из вектора $v(0)$ параллельным переносом вдоль пути γ .

4.3. Римановы связности

Пусть M является гладким многообразием с метрикой g_{ij} , которая может быть римановой или псевдоримановой, и на его касательном расслоении задана аффинная связность.

Лемма 4.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Для любого векторного поля w на M выполняется равенство

$$\nabla_w g_{ij} = 0;$$

2) Если $\gamma(t)$ — гладкая кривая на M и v и w — параллельные векторные поля вдоль γ , то их скалярное произведение постоянно вдоль γ :

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t)) = 0;$$

3) Если $\gamma(t)$ — гладкая кривая на M и v и w — векторные поля вдоль γ , то

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t)) = (\nabla_{\dot{\gamma}} v, w) + (v, \nabla_{\dot{\gamma}} w).$$

Доказательство.

Прежде всего распишем $\frac{d}{dt}(v(t), w(t))$ в локальных координатах и, используя задачу 4.1, получим его инвариантный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v(t), w(t)) &= \frac{d}{dt}(g_{ij}v^i w^j) = \\ &= \frac{dg_{ij}}{dt}v^i w^j + g_{ij}\frac{dv^i}{dt}w^j + g_{ij}v^i\frac{dw^j}{dt} = \\ &= (\nabla_{\dot{\gamma}} g_{ij} + \Gamma_{ik}^k \dot{\gamma}^k g_{kj} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^k g_{ik})v^i w^j + g_{ij}\frac{dv^i}{dt}w^j + g_{ij}v^i\frac{dw^j}{dt} = \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}} g_{ij}v^i w^j + g_{ij}\left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{ik}^k \dot{\gamma}^k v^k\right)w^j + g_{ij}v^i\left(\frac{dw^j}{dt} + \Gamma_{ik}^j \dot{\gamma}^k w^k\right) = \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}} g_{ij}v^i w^j + (\nabla_{\dot{\gamma}} v, w) + (v, \nabla_{\dot{\gamma}} w). \end{aligned}$$

Из последней формулы ясно, что 1) влечет 3). То, что 2) следует из 3) очевидно. Осталось доказать, что 2) влечет 1). Выберем произвольную точку $x \in M$ и произвольные векторы $u, v, w \in T_x M$.

Выпустим из x кривую в направлении u и продолжим (однозначно) v и w до параллельных векторных полей на кривой. Из 2) следует, что $\nabla_u g_{ij} v^i w^j = 0$. Так как все данные взяты произвольно, отсюда следует 1). Лемма 4.1 доказана.

Если связность удовлетворяет одному из условий 1–3) леммы 4.1, то она называется *совместной с метрикой*.

Другой важный класс связностей — симметричные: связность *симметрична*, если ее тензор кручения тождественно равен нулю

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

Это тождество очевидно эквивалентно следующему утверждению: для любой пары векторных полей u и v выполняется соотношение

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v], \quad (4.5)$$

где

$$[u, v]^i = u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

— коммутатор векторных полей u и v . Эквивалентность доказывается прямыми выкладками.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *На каждом римановом многообразии существует и единственна симметричная связность, которая совместна с метрикой. Ее символы Кристоффеля имеют вид:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (4.6)$$

Доказательство.

Пусть $x \in M$ и $\partial_1, \dots, \partial_n$ — базис в $T_x M$, отвечающий координатам x^1, \dots, x^n . Тензор g_{ij} имеет вид $g_{ij} = (\partial_i, \partial_j)$. Выпустим из x кривую в направлении ∂_i .

Предположим, что на многообразии задана симметричная связность ∇ , совместная с метрикой. Из леммы 4.1 следует, что в точке x выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} (\partial_i, \partial_j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = (\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_j) + (\partial_i, \nabla_{\partial_i} \partial_j). \quad (4.7)$$

Переставляя i, j, l и принимая во внимание, что связность симметрична ($\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ и т. д.), получим три линейных уравнения

на $(\nabla_{\partial_i} \partial_l, \partial_j)$, $(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l)$ и $(\nabla_{\partial_j} \partial_l, \partial_i)$. Эти уравнения имеют единственное решение:

$$(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

и, расписывая его, выведем соотношение

$$\Gamma_{ij}^m g_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Умножим обе части последнего равенства на g^{kl} и, просуммировав по l , получим (4.6).

Очевидно, что связность (4.6) симметрична. Согласно лемме 4.1, она совместна с метрикой, так как удовлетворяет уравнению (4.7). Теорема 4.1 доказана.

Эта теорема является обобщением теоремы 2.5, в которой речь шла о поверхностях в \mathbb{R}^3 , на произвольные римановы многообразия. Случай поверхностей в \mathbb{R}^3 подсказывает следующую конструкцию таких связностей. Пусть M — риманово многообразие с симметричной связностью ∇ , совместной с метрикой. Пусть N — подмногообразие в M с индуцированной метрикой. Рассмотрим векторное поле v на N , и пусть $w \in T_x N$. Ковариантная производная $\nabla_w v$ не обязана касаться N , поэтому разложим ее на компоненты:

$$\nabla_w v = \tilde{\nabla}_w v + B(w, v),$$

где $\tilde{\nabla}_w v \in T_x N$, а вектор $B(w, v)$ ортогонален к $T_x N$. Верны следующие утверждения, которые мы дадим без доказательства:

- $\tilde{\nabla}$ определяет на N симметричную связность, совместную с индуцированной метрикой;
- B — симметричный билинейный оператор (вторая квадратичная форма) на касательном расслоении к подмногообразию N со значениями в ортогональных дополнениях к касательным пространствам $T_x N$.

В случае поверхностей в \mathbb{R}^3 символы Кристоффеля определяются именно с помощью такой процедуры из тривиальной связности на \mathbb{R}^3 ($\Gamma_{ij}^k = 0$ для евклидовых координат), а вторая квадратичная форма, умноженная на вектор нормали к поверхности, совпадает с B .

4.4. Кривизна

Пусть M — многообразие со связностью в касательном расслоении и пусть U — область на M с локальными координатами x^1, \dots, x^n . Пусть $x \in M$. Для простоты предположим, что координаты точки x равны $(0, \dots, 0)$.

Рассмотрим в области U маленький квадрат, стороны которого являются отрезками в этих координатах и последовательно соединяют точки $x = (0, 0, \dots)$, $y = (\varepsilon, 0, \dots)$, $z = (0, \varepsilon, \dots)$, $s = (\varepsilon, \varepsilon, \dots)$, где \dots обозначает нули. Определим два оператора $T_{1\varepsilon}$ и $T_{2\varepsilon}$ из $T_x M$ в $T_s M$. Каждый из них является композицией последовательных параллельных переносов вдоль сторон этого квадрата: $T_{1\varepsilon}$ — композиция переносов x в y , а затем из y в s , а $T_{2\varepsilon}$ — композиция переносов из x в z , а затем из z в s .

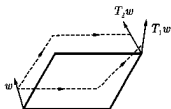


Рис. 13. Параллельные переносы вдоль сторон квадрата.

В общем случае $T_{1\varepsilon}(w) \neq T_{2\varepsilon}(w)$ и разность этих векторов описывается *кривизной связности*. Понятие кривизны определяется для любой связности на любом векторном расслоении, однако общее определение опирается на теорию групп и алгебр Ли (см., например, [3]), и мы поэтому ограничиваемся случаем связности на касательном расслоении.

Найдем $T_{1\varepsilon}(w) - T_{2\varepsilon}(w)$ с точностью до членов малого порядка по ε . Обозначим оператор параллельного переноса из x в y через τ_1 , а оператор параллельного переноса из y в s через τ_2 . Все касательные векторы будем разлагать по базисам $\partial_1, \dots, \partial_n$ в касательных пространствах.

Из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \tau_1(w)^k &= w^k - \varepsilon \Gamma_{1j}^k(x) w^j + O(\varepsilon^2), \\ \tau_2(\tilde{w})^k &= \tilde{w}^k - \varepsilon \Gamma_{2j}^k(y_1) \tilde{w}^j + O(\varepsilon^2) = \\ &= \tilde{w}^k - \varepsilon \left(\Gamma_{2j}^k(x) + \varepsilon \frac{\partial \Gamma_{2j}^k(x)}{\partial x^1} \right) \tilde{w}^j + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Члены порядка ε^2 тоже легко оценить: w является решением уравнения (4.4) вида $\dot{w} = Aw$ и, подставляя вместо A и w их ряды Тейлора, получим

$$w(\varepsilon) = w(0) - A(0)w(0)\varepsilon - (A(0)w(0) + A(0)\dot{w}(0))\frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3).$$

Теперь, когда ясно, как производить все выкладки, мы приведем окончательный ответ:

$$\begin{aligned} & T_{1\varepsilon}(w)^k - T_{2\varepsilon}(w)^k = \\ & = \left(-\frac{\partial \Gamma_{2j}^k}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{1j}^k}{\partial x^2} + \Gamma_{2l}^k \Gamma_{1j}^l - \Gamma_{1l}^k \Gamma_{2j}^l \right) w^j \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Последнее выражение записывается как

$$T_{1\varepsilon}(w) - T_{2\varepsilon}(w) = (\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} - \nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2}) w \cdot \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.8)$$

Эти вычисления приводят к введению *тензора кривизны*, являющегося линейной функцией от трех векторных полей u, v и w :

$$R(u, v)w = (\nabla_v \nabla_u - \nabla_u \nabla_v + \nabla_{[u, v]})w.$$

(очевидно, что $[\partial_i, \partial_j] = 0$).

Лемма 4.2. Значение $R(u, v)w$ в точке x зависит только от значений u, v, w в x и отображение

$$R : T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M$$

линейно зависит от каждого из аргументов, т. е. R_{ijk}^l — тензор, где

$$\begin{aligned} (R(u, v)w)^l &= R_{ijk}^l u^i v^j w^k, \\ R_{ijk}^l &= -\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Доказательство.

Прямыми вычислениями несложно показать, что если умножить какое-то из трех полей — например, поле u — на гладкую функцию f , то $R(fu, v)w = fR(u, v)w$. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} R(fu, v)w &= (\nabla_v \nabla_{fu} - \nabla_{fu} \nabla_v + \nabla_{[fu, v]})w = \\ &= (\nabla_v f \nabla_u - f \nabla_u \nabla_v + \nabla_{(f[u, v] - D_v f u)})w = \\ &= (D_v f \nabla_u + f \nabla_v \nabla_u - f \nabla_u \nabla_v + f \nabla_{[u, v]} - D_v f \nabla_u)w = fR(u, v)w. \end{aligned}$$

Для v и w это тождество доказывается аналогичными вычислениями. Разлагая поля по базису $\{\partial_i\}$ и применяя это свойство, получаем

$$R(u^i \partial_i, v^j \partial_j)(w^k \partial_k) = u^i v^j w^k \cdot R(\partial_i, \partial_j) \partial_k,$$

что завершает доказательство леммы 4.2.

Инфинитезимальным вариантом (4.8) является следующая лемма.

Лемма 4.3. Пусть $r : U \rightarrow M$ — погружение поверхности M и x, y — координаты на поверхности. Тогда

$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} = R(r_x, r_y).$$

Здесь через $D/\partial x$ и $D/\partial y$ обозначены операторы полной производной (4.4) вдоль координатных линий на поверхности.

Доказательство.

Локально координаты x, y на поверхности продолжаются до системы координат $x, y, z^1, \dots, z^{n-2}$ на n -мерном многообразии, и полные производные совпадают с ковариантными производными вдоль координатных полей. Согласно определению тензора кривизны, мы имеем

$$R(r_x, r_y) = -\nabla_{r_x} \nabla_{r_y} + \nabla_{r_y} \nabla_{r_x} + \nabla_{[r_x, r_y]} = -\nabla_{r_x} \nabla_{r_y} + \nabla_{r_y} \nabla_{r_x},$$

так как координатные векторные поля коммутируют: $[r_x, r_y] = 0$. Лемма доказана.

Тензор кривизны удовлетворяет многим дополнительным соотношениям.

Лемма 4.4. 1) $R(u, v)w = -R(v, u)w$;

2) Если связность симметрична, то

$$R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0;$$

3) Если на M задана риманова метрика и связность совместна с ней, то

$$(R(u, v)w, z) = -(R(u, v)z, w);$$

4) Если на M задана риманова метрика и связность совместна с ней и симметрична, то

$$(R(u, v)w, z) = (R(w, z)u, v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждение 1 очевидно.

Так как R — тензор, утверждение 2 достаточно доказать для попарно коммутирующих (например, координатных) полей. Тогда

$$R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = (-\nabla_u \nabla_v w + \nabla_v \nabla_u w) + \\ + (-\nabla_v \nabla_w u + \nabla_w \nabla_v u) + (-\nabla_w \nabla_u v + \nabla_u \nabla_w v)$$

и, применяя (4.5), показываем, что правая часть этой формулы тождественно равна нулю.

Утверждение 3 состоит в кососимметричности выражения $(R(u, v)w, z)$ относительно w и z , что, очевидно, эквивалентно тождеству $(R(u, v)w, w) = 0$. Так как R — тензор, опять можно ограничиться случаем, когда $[u, v] = 0$. В этом случае, обозначая через D_u и D_v дифференцирования функций в направлении полей u и v и учитывая совместность связности с метрикой, получаем

$$D_u D_v(w, w) = D_u(\nabla_v(w, w)) = 2D_u(\nabla_v w, w) = \\ = 2\nabla_u(\nabla_v w, w) = 2(\nabla_u \nabla_v w, w) + 2(\nabla_u w, \nabla_v w)$$

и аналогично

$$D_v D_u(w, w) = 2(\nabla_v \nabla_u w, w) + 2(\nabla_u w, \nabla_v w).$$

Так как $[u, v] = 0$, мы имеем $D_u D_v = D_v D_u$, откуда выводим

$$(D_u D_v - D_v D_u)(w, w) = -(R(u, v)w, w) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Определим тензор

$$R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m \quad (4.10)$$

или

$$R_{ijkl} u^i v^j w^k z^l = \langle R(w, z)v, u \rangle.$$

Утверждение 2 переписывается как

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = R_{i[jkl]} = 0.$$

Утверждения 1 и 3 означают кососимметричность тензора R_{ijkl} по второй и первой парам индексов:

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}.$$

С учетом этих тождеств распишем:

$$R_{i[jlk]} + R_{l[ijk]} - R_{j[ikl]} - R_{k[ilj]} = 2(R_{lijk} - R_{jkl i}) = 0,$$

что доказывает утверждение 4. Лемма 4.4 доказана.

Задача 4.2. Предположим, что связность на римановом многообразии M симметрична и совместна с метрикой. Если $\dim M = 2$, то тензор (4.10) полностью определяется одной своей компонентой — R_{1212} , а, если $\dim M = 3$ — шестью.

Из леммы 4.4 вытекает также, что если $u, v \in T_x M$ и σ — двумерное подпространство в $T_x M$, порожденное u и v , то величина

$$K(\sigma) = \frac{(R(u, v)u, v)}{(u, u)(v, v) - (u, v)^2}$$

зависит только от σ . Она называется *секционной кривизной* вдоль двумерного направления σ .

Лемма 4.5. Если M — двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 с индуцированной метрикой и связность на ней совместна с метрикой и симметрична, то ее секционная кривизна K совпадает с гауссовой кривизной.

Доказательство.

Пусть $p \in M$. Так как гауссова и секционная кривизны не зависят от выбора локальных координат, для доказательства достаточно показать, что эти величины, посчитанные в какой-то специальной системе координат, совпадают.

Выберем в \mathbb{R}^3 ортонормированные координаты (x^1, x^2, x^3) так, что поверхность в окрестности точки p устроена как график функции $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тогда $g_{11} = 1 + f_1^2$, $g_{12} = f_1 f_2$ и

$$K = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{1 + f_1^2 + f_2^2},$$

где нижние индексы у f обозначают дифференцирование по x^i (задачи 2.1 и 2.3). Это выражение еще больше упростится, если мы направим ось x^3 по нормали к поверхности в точке p : тогда $\text{grad } f(p) = 0$. В частности, мы получим, что в точке p

$$K = f_{11} f_{22} - f_{12}^2$$

и все символы Кристоффеля равны нулю. Тогда из (4.6) и (4.9) следует, что

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} \right) = \\ &= f_{11} f_{22} + f_{12}^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 f_{12}^2 = f_{11} f_{22} - f_{12}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в данных координатах и секционная, и гауссова кривизны равны $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ и следовательно совпадают.

Лемма 4.5 доказана.

Особый интерес для приложений представляет не сам тензор кривизны, а его след — *тензор Риччи*:

$$R_{kl} = R^i_{kli}.$$

Его роль в теории гравитации мы вкратце объясним в § 5.2.

Пространства постоянной секционной кривизны устроены достаточно просто. Любое n -мерное пространство постоянной секционной кривизны $K > 0$ в окрестности каждой своей точки устроено как n -мерная сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Это означает, что малая окрестность каждой точки может быть гомеоморфна отображена на область сферы с сохранением длин всех кривых. Пространства постоянной отрицательной кривизны мы изложим в § 5.1.

4.5. Геодезические

Пусть в касательном расслоении к гладкому многообразию M задана аффинная связность. *Геодезической* называется кривая $x(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{D\dot{x}}{dt} = \nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0. \quad (4.11)$$

В дальнейшем мы будем считать, что многообразии M риманово и связность совместна с метрикой и симметрична. В этом случае уравнение геодезических принимает вид:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad (4.12)$$

и также, как для поверхностей в \mathbb{R}^3 (см. § 2.7), доказывается, что

- геодезические в точности совпадают с решениями уравнений Эйлера–Лагранжа для функции Лагранжа $L(x, \dot{x}) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$,
- геодезические, являющиеся натурально параметризованными ($|\dot{x}| = \text{const}$) экстремалими функционала длины кривой.

В касательном расслоении введем координаты $x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n$, как и при доказательстве теоремы 3.1. В них уравнение (4.12) записывается как система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}^i = v^i, \quad \dot{v}^i = -\Gamma_{jk}^i(x)v^j v^k.$$

К ней применима теорема о существовании и единственности обыкновенного дифференциального уравнения [13], что влечет следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Для каждой точки $x \in M$ риманова многообразия M существуют такая ее окрестность U и такая постоянная $\varepsilon > 0$, что для любой точки $y \in U$ и любого вектора $v \in T_y M$ длины $< \varepsilon$ существует и единственна геодезическая $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$, удовлетворяющая начальным условиям*

$$\gamma(0) = y, \quad \dot{\gamma}(0) = v. \quad (4.13)$$

Доказательство.

Формально, из теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения следует, что для некоторой окрестности W точки $(x, 0) \in TM$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $(y, v) \in W$ существует и единственна геодезическая $\gamma_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ с начальными данными (4.13).

Выберем теперь такую постоянную $\varepsilon_1 > 0$ и такую окрестность $U \subset M$ точки x , что $(y, v) \in W$ при $y \in U$ и $|v| < \varepsilon_1$. Из (4.12) следует, что если кривая $\tilde{\gamma}(t)$ — геодезическая, то для любой постоянной C кривая $\hat{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(Ct)$ — тоже геодезическая. Примем теперь $\varepsilon = \delta\varepsilon_1$ и $\gamma(t) = \gamma_1(\delta t)$. Лемма 4.6 доказана.

Из леммы 4.6 следует, что для любой точки $x \in M$ в малом шаре $B_{x,\varepsilon} = \{v \in T_x M : |v| < \varepsilon\}$ определено отображение

$$\exp_x : B_{x,\varepsilon} \rightarrow M,$$

сопоставляющее точке (x, v) конец геодезической $\gamma(1)$. Для начала применим это отображение для доказательства следующего факта.

Лемма 4.7. *Для каждой точки $x \in M$ существует окрестность V и постоянная $\eta > 0$ такие, что*

1) *каждые две точки из V соединяет одна и только одна геодезическая длины $\leq \eta$ и эта геодезическая гладко зависит от концевых точек;*

2) для каждой точки $y \in V$ отображение exp_y отображает шар $B_{y,\eta} \subset T_y M$ диффеоморфно на окрестность y в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим функцию

$$F: \tilde{U} \rightarrow M \times M,$$

где $\tilde{U} \subset TM$ — область, образованная точками (x, v) с $x \in U$ и $|v| < \varepsilon$, и $F(x, v) = (x, \text{exp}_x(v))$. Ее производные в точке $(x, 0)$ имеют вид

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial F^{i+n}}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial F^i}{\partial v^j} = 0, \quad \frac{\partial F^{i+n}}{\partial v^j} = \delta_j^i,$$

где $F = (F^1, \dots, F^{2n})$ и $i = 1, \dots, n$. Так как якобиан этого отображения в точке $(x, 0)$ невырожден, по теореме об обратной функции в малой окрестности точки (x, x) это отображение обратимо.

Выберем такую область $\tilde{U}' \subset \tilde{U}$, образованную точками (x, v) , где $x \in U'$ и $|v| < \eta$, что на ней отображение F действует диффеоморфно на образ. Найдем теперь такую окрестность $V \subset M$ точки x , что $V \times V \subset F(\tilde{U}')$. Легко заметить, что эта окрестность и будет искомой, так как длина отрезка геодезической γ от x до $\text{exp}_x(v)$ равна $|v|$ (это следует из натуральной параметризации геодезических).

Лемма 4.7 доказана.

В окрестности V точки x введем координаты, сопоставив точке $y \in M$ координаты (v^1, \dots, v^n) , где $\text{exp}_x(v) = y$. Эти координаты называются геодезическими.

Лемма 4.8. Для геодезических координат все символы Кристоффеля в точке x равны нулю:

$$\Gamma_{jk}^i(x) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В геодезических координатах уравнение геодезической $\gamma(t)$ с начальными данными $\gamma(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) = v$ имеет вид $\gamma(t) = tv$. Расписывая для такой геодезической уравнение (4.12), получаем

$$\Gamma_{jk}^i v^j v^k = 0$$

вдоль геодезической. Так как в точке x направление v может быть выбрано произвольным, символы Кристоффеля в ней тождественно равны нулю. Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. Пусть σ — двумерная плоскость в $T_x M$ и пусть Σ — вложенная двумерная поверхность, образованная геодезическими, выпущенными в направлениях касательных к σ (т. е. $\Sigma = \exp_x(\sigma \cap B_{x,\eta})$), и оснащенная индуцированной метрикой. Тогда гауссова кривизна поверхности Σ в точке x совпадает с секционной кривизной M в точке x в двумерном направлении σ .

Доказательство.

Выберем в $T_x M$ такой базис $\partial_1, \dots, \partial_n$, что $(\partial_i, \partial_j) = -g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ и построим по отношению к этому базису геодезические координаты в V . Без ограничения общности будем считать, что σ натянуто на векторы ∂_1 и ∂_2 .

Так как в точке x все символы Кристоффеля равны нулю и $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1$, гауссова кривизна Σ в точке x (вычисленная по метрике согласно теореме Гаусса (см. § 2.5)) равна

$$K = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}.$$

Выражение для секционной кривизны $K(\sigma)$ тоже значительно упрощается:

$$K(\sigma) = -\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2}.$$

Расписывая последнее выражение, с использованием (4.6), получаем

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}.$$

Лемма 4.9 доказана.

При малых t геодезические $\exp_x(tv)$ остаются в окрестности V (см. лемму 4.7) и при этом сферы $\exp_x S(x, \tau)$, где $S_{x,\tau} = \{v \in T_x M : |v| = \tau < \eta\} = \partial B_{x,\tau}$, являются подмногообразиями в M .

Лемма 4.10. Геодезические $\exp_x(tv)$ ортогональны сферам $\exp_x(S_{x,\tau})$.

Доказательство.

Пусть $v(s)$ — произвольная гладкая кривая на сфере $S_{x,\eta/2}$. Достаточно доказать, что для поверхности $f(s, t) = \exp_x(tv(s))$ векторные поля $f_t = \partial f / \partial t$ и $f_s = \partial f / \partial s$ всюду ортогональны.

Прежде всего покажем, что

$$\frac{D}{\partial t}(f_s, f_t) = 0.$$

Так как связность совместна с метрикой, то

$$\frac{D}{\partial t}(f_s, f_t) = \left(\frac{D}{\partial t} f_s, f_t \right) + \left(f_s, \frac{D}{\partial t} f_t \right).$$

Из симметричности связности следует, что для любой погруженной поверхности $f(s, t)$ выполняется следующее тождество, которое проверяется разложением по базису:

$$\frac{D}{\partial t} f_s = \frac{D}{\partial s} f_t.$$

Так как при фиксированных s кривые $f(s, t)$ — геодезические, то

$$\frac{D f_t}{\partial t} = 0,$$

и мы окончательно выводим

$$\frac{D}{\partial t}(f_s, f_t) = \left(\frac{D}{\partial s} f_t, f_t \right) = \frac{1}{2} \frac{D}{\partial s}(f_t, f_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |v(s)|^2 = 0.$$

Но $f_s = 0$ при $t = 0$ и, следовательно, $(f_s, f_t) = 0$ при $t = 0$, а значит и всюду. Лемма 4.10 доказана.

Эта лемма является частным случаем более общего утверждения: пусть Σ — гиперповерхность в M и $f(s, t)$ — семейство геодезических, параметризованных точками $s \in \Sigma$ и t , причем $f(s, 0) \in \Sigma$ и вектор $\partial f(s, 0)/\partial t$ ортогонален Σ (т. е. ортогонален касательному пространству к Σ). Тогда при всех t эти геодезические ортогональны поверхностям $\Sigma_t = \{f(s, t) : s \in \Sigma\}$.

Координаты x^1, \dots, x^n в области W называются *полугеодезическими*, если метрический тензор удовлетворяет условиям $g_{in} = 0$ при $i = 1, \dots, (n-1)$ и $g_{nn} = 1$:

$$g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2. \quad (4.14)$$

Лемма 4.11. Если x^1, \dots, x^n — полугеодезические координаты, то для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ кривая $(x^1, \dots, x^{n-1}) = \xi$ — геодезическая с натуральным параметром $t = x^n$.

Доказательство.

Согласно формулам для символов Кристоффеля мы имеем

$$\Gamma_{nn}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(2 \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^j} \right) = 0,$$

так как все величины $g_{in} = 0$ постоянны. Аналогично выводится, что

$$\Gamma_{ij}^n = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}.$$

Уравнения геодезических принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i + \sum_{1 \leq j, k \leq n-1} \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + 2 \sum_{1 \leq j \leq n-1} \Gamma_{jn}^i \dot{x}^j \dot{x}^n + \Gamma_{nn}^i \dot{x}^n \dot{x}^n &= \\ = \ddot{x}^i + \sum_{1 \leq j, k \leq n-1} \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + 2 \sum_{1 \leq j \leq n-1} \Gamma_{jn}^i \dot{x}^j \dot{x}^n &= 0 \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что любая кривая с $\dot{x}^1 = \dots = \dot{x}^{n-1} = 0$ удовлетворяет этим уравнениям при $i = 1, \dots, n-1$. Последнее уравнение при $i = n$ принимает в этом случае вид

$$\ddot{x}^n = 0$$

и задает натуральный параметр $t = x^n$ на кривой $(x^1, \dots, x^{n-1}) = -\xi$. Лемма доказана.

Лемма 4.12. Пусть $x \in M$ и V — окрестность, которая дается леммой 4.7. Тогда

1) в шаре $\text{exr}_x(B_{x,\eta}) \setminus x$ существуют полугеодезические координаты;

2) пусть γ_y — единственная геодезическая, лежащая в V , соединяющая точки x и $y \in V$ и имеющая длину $\leq \eta$. Для любой кусочно-гладкой кривой $\omega : [0, T] \rightarrow M$, соединяющей x и y и лежащей в V , длина ω не меньше длины γ_y и равна ей только в случае, когда кривые ω и γ_y совпадают.

Доказательство.

Выберем в качестве x^1, \dots, x^{n-1} координаты на сфере $S_{x,1}$, а за x^n возьмем натуральный параметр на геодезических, выходящих из точки x . Эти координаты по построению имеют вид (4.14) и поэтому являются полугеодезическими².

Доказательство утверждения 2 сходно доказательству теоремы 2.11. Запишем $\dot{\omega}$ в полугеодезических координатах и положим

²Для поверхностей мы дали другой вывод существования полугеодезических координат (лемма 2.10).

$w_1 = (\dot{\omega}^1, \dots, \dot{\omega}^{n-1}, 0)$, $w_2 = (0, \dots, 0, \dot{\omega}^n)$. Пусть y^n — n -я координата точки y . Тогда

$$L(\gamma_y) = y^n, \quad \int_0^T w_2 dt = y^n,$$

$$L(\omega) = \int \sqrt{(w_1, w_1) + (w_2, w_2)} dt \geq \int \sqrt{(w_2, w_2)} dt \geq y^n,$$

и очевидно, что минимум длин ω достигается при случае $w_1 = 0$, $w_2 = \text{const}$. В этом случае он равен y^n , а кривая совпадает с γ_y .

Лемма 4.12 доказана.

Теорема 4.2. *Если путь $\omega : [0, T] \rightarrow M$, параметризованный длиной дуги, не длиннее любого другого пути из $\omega(0)$ в $\omega(T)$, то он является геодезической.*

Доказательство теоремы 4.2 просто: для любой точки $x = \omega(t)$ малая окрестность пути лежит в области V (см. леммы 4.7 и 4.12) и имеет длину меньше η . По лемме 4.12 этот отрезок является геодезической. Следовательно, вся кривая ω является геодезической.

В случае евклидова пространства геодезическими являются прямые линии и, как показывает теорема 4.2, для общего риманова многообразия геодезические являются естественным аналогом прямых, как кратчайших линий.

ГЛАВА 5

Примеры римановых многообразий и их приложений

5.1. Плоскость Лобачевского

Пусть \mathbb{R}^2 — двумерная евклидова плоскость с ортонормированными координатами x и y (в тензорных обозначениях x будем считать первой координатой, а y второй).

Рассмотрим верхнюю полуплоскость $\mathcal{H} = \{(x, y) : y > 0\}$ и введем на ней другую метрику

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0,$$

которая в более привычном в теории поверхностей виде записывается как

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (5.1)$$

Легко посчитать с помощью (4.6), что

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

и остальные символы Кристоффеля равны нулю.

Уравнения геодезических примут вид:

$$\ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0.$$

Мы знаем, что длина вектора скорости сохраняется (из определения геодезических следует, что $D(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})/\partial t = 2(D\dot{\gamma}/\partial t, \dot{\gamma}) = 0$), и поэтому величина

$$I_1 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

(квадрат этой длины) является первым интегралом. Другой первый интеграл, как можно проверить, равен

$$I_2 = x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}y.$$

Задача 5.1. Пусть γ — геодезическая и ее вектор скорости $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ в точке $\gamma(t)$ не вертикален. Проведем через точку $\gamma(t)$ прямую $l(t)$ (в евклидовой метрике на \mathbb{R}^2), которая ортогональна вектору $v(t)$. Тогда x -координата точки пересечения $l(t)$ с осью Ox равна I_2 .

Теорема 5.1. Геодезические плоскости Лобачевского (в терминах евклидовой метрики на \mathbb{R}^2) — это

- 1) лучи, ортогональные оси Ox ;
- 2) полуокружности, лежащие в верхней полуплоскости и входящие в ось Ox под углом $\pi/2$.

Задача 5.2. Доказать теорему 5.1.

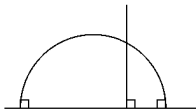


Рис. 14. Геодезические на плоскости Лобачевского.

Из теоремы 5.1 следует

Лемма 5.1. Любые две точки из \mathcal{H} соединяются геодезической и причем только одной.

Фундаментальное свойство плоскости Лобачевского следующее.

Теорема 5.2. Секционная кривизна пространства \mathcal{H} постоянна и равна $K = -1$.

Задача 5.3. Доказать теорему 5.2.

Введение абстрактной римановой метрики на верхней полуплоскости существенно, так как по теореме Гильберта не существует погружения верхней полуплоскости в \mathbb{R}^3 , при котором индуцированная метрика была бы равна (5.1).

На \mathcal{H} действует группа $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ состоит из всех вещественных (2×2) -матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

с определителем, равным единице:

$$ad - bc = 1. \quad (5.2)$$

Она содержит подгруппу \mathbb{Z}_2 , образованную матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и эта подгруппа нормальна. Фактор-группа $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ и обозначается через $PSL(2, \mathbb{R})$. Ее действие на \mathcal{H} имеет следующий вид:

$$z = x + iy \rightarrow A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad A \in PSL(2, \mathbb{R}). \quad (5.3)$$

Действительно, следующие утверждения проверяются прямыми вычислениями

Задача 5.4. Показать, что

- 1) если $\text{Im } z > 0$, то $\text{Im } \frac{az + b}{cz + d} > 0$;
- 2) $A_2(A_1(z)) = (A_2 \cdot A_1)(z)$;
- 3) матрица

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

задает преобразование, обратное к (5.3);

- 4) подгруппа Γ , порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

состоит в точности из тех элементов, которые оставляют точку $(0, 1)$ неподвижной.

Выберем следующую параметризацию группы $SL(2, \mathbb{R})$. Так как $a^2 + c^2 \neq 0$, можно считать, что

$$a = r \cos \varphi, \quad c = r \sin \varphi.$$

Тогда условие (5.2) записывается как $r \cos \varphi \cdot d - r \sin \varphi \cdot b = 1$ и его общее решение, зависящее от одного параметра $s \in \mathbb{R}$, имеет вид:

$$b = -r^{-1} \sin \varphi + s \cos \varphi, \quad d = r^{-1} \cos \varphi + s \sin \varphi.$$

Параметры r, s, φ однозначно задают элементы $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi + s \cos \varphi \\ r \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi + s \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где $r > 0, s \in \mathbb{R}$ и параметр φ определен по модулю 2π .

Задача 5.5. Если рассмотреть a, b, c, d как вещественные координаты в пространстве \mathbb{R}^4 , отождествленным с пространством вещественных (2×2) -матриц, то уравнение (5.2) задает гладкое подмногообразие $SL(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$, а построенные выше параметры r, s, φ являются гладкими координатами.

Заметим, что в § 1.4 мы доказали аналогичное утверждение для групп $O(n)$.

Найдем преобразования из $PSL(2, \mathbb{R})$, переводящие точку $z = \lambda + i\mu$ в точку i . Задающие его матрицы из $SL(2, \mathbb{R})$ выделяются условиями:

$$\lambda = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2}, \quad \mu = \frac{1}{a^2 + c^2}$$

и, используя данную выше параметризацию, получаем, что это в точности матрицы с

$$r = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad s = -\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}. \quad (5.4)$$

Лемма 5.2. Любая точка из \mathcal{H} преобразованием из $PSL(2, \mathbb{R})$ может быть переведена в точку $(0, 1)$, а следовательно и в любую другую точку из \mathcal{H} . Пространство \mathcal{H} естественным образом отождествляется с пространством $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ левых смежных классов $PSL(2, \mathbb{R})$ по подгруппе Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для любой точки $z = \lambda + i\mu \in \mathcal{H}$, согласно (5.4), строится такое преобразование $A \in PSL(2, \mathbb{R})$, что $A(z) = i$. Пусть $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ и $A_1(z_1) = A_2(z_2) = i$, тогда $A_2^{-1}A_1(z_1) = z_2$.

Предположим, что $B_1(i) = B_2(i)$. Тогда $B_2^{-1}B_1(i) = i$ и, значит, $B_2^{-1}B_1 \in \Gamma$. Очевидно, что если $B_2^{-1}B_1 \in \Gamma$, то $B_1(i) = B_2(i)$. Условие $B_2^{-1}B_1 \in \Gamma$ эквивалентно тому, что $B_2\Gamma = B_1\Gamma$, т. е. тому, что эти левые смежные классы совпадают. Так как $PSL(2, \mathbb{R})(i) = \mathcal{H}$, отсюда следует, что $\mathcal{H} = PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$.

Лемма 5.2 доказана.

Пусть группа G действует на многообразии M , т. е. задано отображение

$$G \times M \rightarrow M \quad (5.5)$$

вида $(g, x) \rightarrow g(x)$, причем $g_1(g_2(x)) = (g_1 \cdot g_2)(x)$ для любых $g_1, g_2 \in G$ и $e(x) = x$, где e — единица группы G . Предположим также, что

- 1) группа G является гладким многообразием;
- 2) отображение (5.5) — гладкое;
- 3) для любой пары точек $x_1, x_2 \in M$ существует хотя бы один такой элемент $g \in G$, что $g(x_1) = x_2$.

Если эти условия выполняются, то M называется *однородным пространством* группы G и отождествляется с пространством левых смежных классов G/Γ_x группы G по стационарной подгруппе любой точки x ($\Gamma_x = \{g \in G : g(x) = x\}$).

Теперь лемма 5.2 формулируется следующим образом:

- \mathcal{H} является однородным пространством группы $PSL(2, \mathbb{R})$.

Однородные пространства являются важным классом многообразий с глубоко развитой теорией (см., например, [3]). В римановой геометрии представляет интерес случай, когда группа G действует изометриями. Отображение $f: M \rightarrow M$ называется *изометрией*, если для любой гладкой кривой γ ее длина сохраняется $L(f(\gamma)) = L(\gamma)$. Это, очевидно, эквивалентно тому, что отображение $f_*: TM \rightarrow TM$ сохраняет длины всех векторов.

Лемма 5.3. *Группа $PSL(2, \mathbb{R})$ действует на \mathcal{H} изометриями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Запишем метрику (5.1) в форме

$$\frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}.$$

Длины векторов сохраняются преобразованием A тогда и только тогда, когда

$$\frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2} = \frac{dA(z) d\overline{A(z)}}{(\operatorname{Im} A(z))^2}. \quad (5.6)$$

Действительно, любой вектор $v \in T_z M$ записывается в виде $w\partial + \bar{w}\bar{\partial}$, где $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Отображение A_* действует на касательных векторах как

$$A_*(\partial) = \frac{\partial A(z)}{\partial z} \partial, \quad A_*(\bar{\partial}) = \frac{\partial \overline{A(z)}}{\partial \bar{z}} \bar{\partial},$$

$$|A_*(v)|^2 = \frac{\partial A(z)}{\partial z} \frac{\partial \overline{A(z)}}{\partial \bar{z}} \frac{w\bar{w}}{(\operatorname{Im} A(z))^2} \quad \text{и} \quad |v|^2 = \frac{w\bar{w}}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

т. е. условие (5.6) доказано.

Прямыми вычислениями устанавливается, что

$$\operatorname{Im} A(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}, \quad \frac{\partial A(z)}{\partial z} = \frac{1}{(cz + d)^2},$$

и, подставляя эти выражение в правую часть (5.6), устанавливаем, что длины векторов сохраняются любым $A \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Лемма 5.3 доказана.

Теорема 5.3. *Группа $PSL(2, \mathbb{R})$ состоит из всех изометрических преобразований \mathcal{H} , сохраняющих ориентацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Любая изометрия переводит геодезические в геодезические. Пусть T — изометрия пространства \mathcal{H} , сохраняющая ориентацию и такая, что $B(i) = z$.

Возьмем такое отображение $A \in PSL(2, \mathbb{R})$, что $A(i) = z$. Тогда BA^{-1} — изометрия, которая оставляет точку i на месте. По лемме 5.1 каждая точка из \mathcal{H} соединяется с точкой i геодезической и притом только одной. Поэтому, так как изометрия переводит геодезические в геодезические, отображение BA^{-1} полностью определяется порожденным им поворотом $T_i \mathcal{H} \rightarrow T_i \mathcal{H}$ касательного пространства в точке i , и каждый такой поворот однозначно определяет изометрию. Но все такие изометрии принадлежат группе Γ и, значит, $BA^{-1} \in \Gamma$. Отсюда следует, что $B \in PSL(2, \mathbb{R})$. Теорема 5.3 доказана.

Плоскость Лобачевского встречается во многих областях математики. Мы ограничимся указанием одного из наиболее важных ее свойств — она является моделью неевклидовой геометрии.

Известная «пятая аксиома Евклида» гласит:

- Пусть l — прямая на плоскости и x — точка на плоскости, которая не лежит на прямой l . Тогда через точку x проходит и притом только одна прямая, параллельная прямой l .

Попытки вывести эту аксиому из других аксиом евклидовой геометрии привели к созданию неевклидовых геометрий. А именно, в 1825 году Лобачевский ввел геометрию, в которой выполняется аксиома Лобачевского:

- Пусть l — прямая на плоскости и x — точка на плоскости, которая не лежит на прямой l . Тогда через точку x проходит бесконечное число прямых, которые параллельны прямой l .

Из этого утверждения Лобачевский вывел, что таких прямых должно быть бесконечно много и что сумма углов треугольника в такой геометрии должна быть меньше π . Несколько позже и независимо к таким же выводам пришел Бойяи. Классическое изложение геометрии Лобачевского дано, например, в [4].

Плоскость Лобачевского является моделью такой геометрии. Действительно, понимая под прямыми геодезические, а под их параллельностью — отсутствие пересечения, мы заключаем, что на пространстве \mathcal{H} , гомеоморфном двумерной плоскости, реализуется геометрия, удовлетворяющая всем аксиомам Евклида, кроме «пятой». Из теоремы 5.1 следует, что для этой геометрии выполняется аксиома Лобачевского. Ось Ox является при этом «бесконечно удаленной» — длина любой кривой, примыкающей к этой оси, бесконечна: это следует из расходимости интеграла $\int dy/y$ при стремлении нижнего предела интегрирования к нулю.

Легко проверить, что суммы углов геодезических треугольников будут меньше π . Это, однако, следует и из формулы Гаусса–Бонне, доказательство которой, данное в § 2.8, проходит без изменений для любых двумерных римановых многообразий.

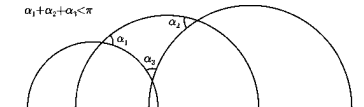


Рис. 15. Треугольник на плоскости Лобачевского.

Пространством Лобачевского \mathcal{H}^n размерности $n \geq 2$ называется верхняя полуплоскость $x_n \geq 0$ в \mathbb{R}^n с римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$$

и координатами x_1, \dots, x_n . При $n = 2$ мы получаем плоскость Лобачевского. Несложно посчитать, что секционная кривизна пространства \mathcal{H}^n постоянна и равна -1 . Любое пространство постоянной секционной кривизны $K = -1$ локально изометрично пространству Лобачевского той же размерности.

5.2. Псевдоевклидовы пространства и их приложения в физике

Пусть $\mathbb{R}^{1,n}$ — псевдоевклидово пространство с координатами x^0, x^1, \dots, x^n и метрикой

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^n)^2. \quad (5.7)$$

В касательном пространстве к каждой точке задано псевдоскалярное произведение

$$(v, w)_{1,n} = v^0 w^0 - v^1 w^1 - \dots - v^n w^n.$$

Линейные преобразования, сохраняющие это скалярное произведение, образуют группу $O(1, n)$. Группы $O(1, n)$ обобщают группы $O(n)$, и их элементы задаются $((n+1) \times (n+1))$ -матрицами A , удовлетворяющими условиям

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

где E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица (доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1.4).

Задача 5.6. Доказать, что уравнения (5.8) выделяют в пространстве $((n+1) \times (n+1))$ -матриц гладкое многообразие размерности $n(n+1)/2$. (Указание: см. доказательство аналогичного факта для групп $O(n)$ в § 1.4.)

Пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ возникает в физике и является «пространством событий» в специальной теории относительности — пространством-временем (оно также называется пространством Минковского). Координаты x^1, x^2, x^3 являются пространственными, а координата $x^0 = ct$ — временной (здесь c —

скорость света и t — время). Поэтому если $(v, v)_{1,3} < 0$, то вектор v называется *пространственноподобным*, если $(v, v)_{1,3} > 0$ — *временноподобным*, и если $(v, v)_{1,3} = 0$ — *световым*. Последнее определение имеет под собой следующую физическую основу:

- *скорость света в любой системе координат одинакова и равна c .*

Поэтому если $x(t)$ — кривая в $\mathbb{R}^{1,3}$, вдоль которой распространяется световой луч, то

$$c^2 - \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2 = 0.$$

Группа $O(n)$ имеет две компоненты связности, которые состоят из преобразований, сохраняющих ориентацию, и преобразований, обращающих ориентацию (т.е. с $\det A = 1$ и с $\det A = -1$). Группа $O(1, n)$ имеет четыре компоненты: каждое семейство преобразований, сохраняющих или обращающих ориентацию, разбивается еще на две компоненты в зависимости от того, обращает преобразование «направление времени» или нет: $(e_0, A(e_0))_{1,3} < 0$ или $(e_0, A(e_0))_{1,3} > 0$, где e_0 — базисный вектор, отвечающий координате x^0 .

Задача 5.7. *Показать, что группа $O(1, 1)$ состоит из преобразований, заданных матрицами*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon, \delta = \pm 1$, $\operatorname{ch} \varphi = (e^\varphi + e^{-\varphi})/2$ и $\operatorname{sh} \varphi = (e^\varphi - e^{-\varphi})/2$. При $\varepsilon > 0$ направление времени сохраняется, а при $\varepsilon < 0$ — обращается. При $\varepsilon\delta = 1$ ориентация сохраняется, а при $\varepsilon\delta = -1$ — обращается.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы две системы координат — K с координатами ct, x^1, x^2, x^3 и \tilde{K} с координатами $c\tilde{t}, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$. Предположим, что при $t = \tilde{t} = 0$ они совпадают и система \tilde{K} движется вдоль оси Ox^1 с постоянной скоростью v по отношению к системе координат K (система координат \tilde{K} является инерциальной). Как найти формулы перехода от одной системы к другой?

В галилеевой механике время универсально: $t = \tilde{t}$, и формулы перехода имеют простой вид:

$$x^1 = \tilde{x}^1 + vt, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = \tilde{x}^3.$$

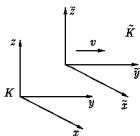


Рис. 16. Система координат \tilde{K} , равномерно движущаяся вдоль оси Ox .

В специальной теории относительности постулируется, что расстояние (в метрике (5.7)) между событиями — точками пространства-времени — сохраняется при переходе к другой инерциальной системе координат. Отсюда следует, что такой переход задается элементом *группы Пуанкаре* — группы всех движений $\mathbb{R}^{1,3}$. Эта группа порождена сдвигами и элементами $O(1, 3)$.

Так как начала координат совпадают при $t = \tilde{t}$, то переход от K к \tilde{K} задается преобразованием из $O(1, 3)$. Если мы непрерывно уменьшим скорость v до нуля, то мы получим тождественное преобразование — значит, искомое преобразование сохраняет и ориентацию, и направление времени (лежит в одной компоненте с тождественным). Так как это преобразование только координат t, x^1 и \tilde{t}, \tilde{x}^1 , оно имеет вид:

$$ct = c\tilde{t} \operatorname{ch} \varphi + \tilde{x}^1 \operatorname{sh} \varphi, \\ x^1 = c\tilde{t} \operatorname{sh} \varphi + \tilde{x}^1 \operatorname{ch} \varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = \tilde{x}^3.$$

При $\tilde{x}^1 = 0$ мы получаем

$$ct = c\tilde{t} \operatorname{ch} \varphi, \quad x^1 = c\tilde{t} \operatorname{sh} \varphi$$

и в итоге

$$\frac{x^1}{ct} = \operatorname{th} \varphi.$$

Но точка $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^3 = 0$ движется вдоль оси Ox^1 с постоянной скоростью v и, значит,

$$\frac{x^1}{ct} = \frac{v}{c} = \operatorname{th} \varphi.$$

Так как

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{\operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}},$$

то мы получаем окончательную форму преобразований Лоренца:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\tilde{t} + \tilde{x}^1 \frac{v}{c^2} \right), \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\tilde{x}^1 + v \tilde{t}).$$

При v , очень малой по сравнению с скоростью света,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$$

и преобразования Галилея дают достаточно хорошее приближение к преобразованиям Лоренца.

Укажем наглядные следствия полученных формул, известные из популярных изложений специальной теории относительности.

Собственной длиной объекта называется его длина в той системе координат, в которой он покоится. Пусть нам дан стержень собственной длины Δl , покоящийся в системе координат K , и при этом его концы имеют координаты $x^1 = a, b$, где $b - a = \Delta l$. В системе координат \tilde{K} его длина другая — из преобразований Лоренца следует, что в каждый фиксированный момент времени \tilde{t} разность \tilde{x}^1 -координат его концов равна

$$\Delta \tilde{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta l,$$

т. е.

- линейный размер стержня сокращается в направлении скорости движения системы координат \tilde{K} .

Другой «парадокс» состоит в сокращении времени.

Пусть в системе координат \tilde{K} покоятся часы. Разница во времени между двумя событиями в одной и той же точке пространства ($\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ фиксированы) в этой системе координат равно $\Delta \tilde{t}$. А разница во времени между этими событиями в системе координат K равна

$$\Delta t = \frac{\Delta \tilde{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

т. е.

- время в движущейся системе координат изменяется медленнее, чем в неподвижной.

Общая теория относительности, созданная в работах Эйнштейна, потребовала привлечения уже всего аппарата римановой геометрии и в значительной степени стимулировала ее развитие (см. [9]). Согласно этой теории, гравитационное поле — это псевдориманова метрика g_{ij} на четырехмерном пространстве M^4 . Метрика имеет сигнатуру $(1, 3)$, т. е. заменой координат в каждой точке (но в общем случае не в целой области) приводится к метрике Минковского

$$g_{ij} dx^i dx^j = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2.$$

Пространство M^4 является пространством событий и топологически может отличаться от \mathbb{R}^4 . Сама метрика должна подчиняться нелинейным уравнениям, которые называются *уравнениями Эйнштейна*. Они утверждают, что в пустоте (при отсутствии других полей) тензор Риччи гравитационного поля равен нулю:

$$R_{ik} = 0.$$

Если заданы другие поля (например, электромагнитное), то уравнения Эйнштейна принимают вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = T_{ik},$$

где $R = g^{ik} R_{ik}$ — скалярная кривизна метрики g_{ik} и T_{ik} — так называемый тензор энергии импульса этих полей. Это уравнение описывает взаимодействие гравитационного поля с другими полями, а собственное поведение других полей описывается отдельными уравнениями (например, для электромагнитного поля — *уравнениями Максвелла*).

Задача 5.8. Пусть $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ и t — координата в \mathbb{R} , а r, θ, φ — сферические координаты в \mathbb{R}^3 (см. § 2.7). Покажите, что метрика¹

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r_g = \text{const} > 0,$$

удовлетворяет уравнениям Эйнштейна в пустоте: $R_{ik} = 0$.

¹Эта метрика называется *метрикой Шварцшильда* и описывает стационарные черные дыры.

Часть III

Дополнительные главы

ГЛАВА 6

Минимальные поверхности и комплексный анализ

6.1. Конформная параметризация поверхности

Пусть M и \tilde{M} — римановы многообразия с метриками g_{jk} и \tilde{g}_{jk} соответственно. Гладкое отображение $f : M \rightarrow \tilde{M}$ называется *конформным*, если оно сохраняет углы между касательными векторами. Формально это записывается следующим образом:

$$\tilde{g}_{lm}(f(x)) \frac{\partial f^l(x)}{\partial x^j} \frac{\partial f^m(x)}{\partial x^k} dx^j dx^k = \lambda(x) g_{jk}(x) dx^j dx^k,$$

где $\lambda(x)$ — функция на многообразии M , $f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$, x^1, \dots, x^p — локальные координаты на многообразии M , $p = \dim M$ и $q = \dim \tilde{M}$. Очевидно, что $p \leq q$.

Римановы многообразия называются *конформно эквивалентными*, если отображение f является диффеоморфизмом.

Риманово многообразие размерности n называется *конформно евклидовым*, если окрестность каждой его точки конформно эквивалентна области n -мерного евклидова пространства. В этом случае линейные координаты x^1, \dots, x^n в евклидовом пространстве задают координаты на многообразии, в которых метрика принимает вид $g_{jk} = \lambda \delta_{jk}$ (такие координаты называются *конформно евклидовыми*).

Теорема 6.1. *Каждое двумерное риманово многообразие конформно евклидово.*

На многообразиях большей размерности эта теорема не обобщается. Доказательство теоремы начнем со следующей леммы.

Лемма 6.1. *Пусть u, v — локальные координаты в окрестности точки p на поверхности Σ и $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ —*

метрика на Σ . Пусть в окрестности точки p существуют конформно евклидовы координаты x, y (т. е. те, в которых метрический тензор записывается в виде $\lambda(dx^2 + dy^2)$). Тогда они удовлетворяют уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial y}{\partial v} E - \frac{\partial y}{\partial u} F \right) \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial y}{\partial v} F - \frac{\partial y}{\partial u} G \right) \end{array} \right. , \quad (6.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} E + \frac{\partial x}{\partial u} F \right) \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} F + \frac{\partial x}{\partial u} G \right) \end{array} \right. . \quad (6.2)$$

Системы (6.1) и (6.2) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1.

Распишем равенство

$$\lambda(dx^2 + dy^2) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

как

$$\begin{aligned} \lambda \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 \right) = \\ = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned}$$

Оно эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 &= \lambda^{-1} E, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} &= \lambda^{-1} F, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 &= \lambda^{-1} G, \end{aligned}$$

которая записывается в виде двух систем линейных уравнений

$$A \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Элемент площади — это 2-форма, равная

$$\sqrt{EG - F^2} du \wedge dv = \lambda dx \wedge dy = \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda \det A = \sqrt{EG - F^2}.$$

Поэтому

$$A^{-1} = \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial y}{\partial u} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix}$$

и, формально разрешая системы (6.3), мы получаем (6.1) и (6.2).

Разрешая (6.1) относительно $\partial y/\partial u$ и $\partial y/\partial v$, получаем (6.2). Аналогично разрешая (6.2) относительно $\partial x/\partial u$ и $\partial x/\partial v$, получаем (6.1). Следовательно, эти системы эквивалентны. Лемма 6.1 доказана.

Для того, чтобы провести аналогию с многомерным случаем, обозначим $u = w^1$, $v = w^2$, $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ и $g_{22} = G$. Введем дифференциальный оператор, действующий на функциях на римановом многообразии:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial w^j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial w^k} \right),$$

где $g = \det g_{jk}$. Он называется *оператором Лапласа–Бельтрами* и для евклидовой метрики совпадает с обычным оператором Лапласа

$$\Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial w^j \partial w^j}. \quad (6.4)$$

Этот оператор зависит от римановой метрики на многообразии и не зависит от выбора координат. Последнее устанавливается следующим образом. Пусть p — произвольная точка на многообразии и U — ее окрестность с координатами x^1, \dots, x^n . Рассмотрим

всевозможные гладкие функции на многообразии, равные тождественно нулю вне U . Определим скалярное произведение их градиентов как

$$(\nabla\varphi, \nabla\psi) = \int_U g^{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} d\sigma,$$

где $d\sigma = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Очевидно, что значение интеграла не зависит от выбора координат, так как от их выбора не зависит подынтегральное выражение. Но, интегрируя по частям, получаем

$$(\nabla\varphi, \nabla\psi) = - \int_U \Delta\varphi \cdot \psi d\sigma.$$

Так как функция ψ произвольна, значение $\Delta\varphi$ в любой точке не зависит от выбора координат.

Лемма 6.2. Если x и y являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими системе (6.1) (или эквивалентной ей системе (6.2)), то

$$\Delta x = \Delta y = 0. \quad (6.5)$$

Уравнение $\Delta\varphi = 0$ называется уравнением Бельтрами, и его решения называются гармоническими функциями на римановом многообразии. В случае евклидова пространства мы получаем обычные гармонические функции.

Доказательство леммы 6.2.

Так как функция $x(u, v)$ дважды непрерывно дифференцируема, то

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u},$$

что согласно (6.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial y}{\partial v} F - \frac{\partial y}{\partial u} G \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial y}{\partial v} E - \frac{\partial y}{\partial u} F \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, как легко проверяется прямыми вычислениями, имеет вид $\Delta y = 0$. Аналогично доказывается, что $\Delta x = 0$. Лемма 6.2 доказана.

Следующую лемму мы приведем без доказательства, которое может быть получено с помощью теории эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными.

Лемма 6.3. *Если в окрестности точки p поверхности Σ коэффициенты метрического тензора E , F и G непрерывно дифференцируемы N раз по u и v (т. е. имеют класс гладкости C^N), где $N \geq 2$, то в какой-то достаточно малой окрестности точки p существуют*

1) такое решение $x(u, v)$ класса C^N уравнения (6.5), что в этой окрестности

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \neq 0,$$

2) решение $y(u, v)$ класса C^N уравнения (6.2).

Для евклидовой метрики это утверждение очевидно. Для доказательства достаточно построить $x(u, v)$, а затем $y(u, v)$ найдется из линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Лемма 6.4. *Если $x(u, v)$ и $y(u, v)$ удовлетворяют уравнениям (6.1) и (6.2), то якобиан отображения $(u, v) \rightarrow (x, y)$ равен*

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (V, V),$$

где $V = (\partial x / \partial v, -\partial x / \partial u)$ и скалярное произведение берется по отношению к метрике на поверхности.

Доказательство леммы 6.4 получается прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} F + \frac{\partial x}{\partial u} G \right) - \\ &\quad - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} E + \frac{\partial x}{\partial u} F \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(G \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + E \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (V, V). \end{aligned}$$

Лемма 6.4 доказана.

Теперь доказательство теоремы 6.1 просто: используя лемму 6.3, найдем C^N -гладкие решения $x(u, v)$ и $y(u, v)$ уравнений (6.1) и (6.2). По условию выбора решения $x(u, v)$ вектор V нигде не равен нулю в окрестности U точки $p \in \Sigma$. Поэтому согласно лемме 6.4 якобиан отображения $(u, v) \rightarrow (x, y)$ нигде не равен нулю в U и, более того, окрестность U по теореме об обратной функции можно выбрать настолько малой, чтобы на ней это отображение было обратимым: функции x, y задавали бы новые локальные координаты. Из (6.1) и (6.2) следует, что в этих координатах метрика принимает вид $\lambda(dx^2 + dy^2)$, т.е. отображение $(u, v) \in U \rightarrow (x, y)$ задает конформную эквивалентность.

Теорема 6.1 доказана.

По конформно евклидовым координатам x, y на поверхности строится комплекснозначный *конформный параметр*

$$z = x + iy,$$

использование которого связывает теорию поверхностей с комплексным анализом.

6.2. Теория поверхностей в терминах конформного параметра

Пусть $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ — регулярная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Согласно теореме 6.1 в окрестности любой точки поверхности можно выбрать конформный параметр $z = x + iy$. Для простоты будем считать, что параметр z задан в области $U \subset \mathbb{C}$.

Условие конформности состоит в том, что первая квадратичная форма имеет вид:

$$I = \lambda(z, \bar{z})(dx^2 + dy^2) = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}.$$

Так как

$$I = (r_x, r_x)dz^2 + (r_{\bar{z}}, r_{\bar{z}})d\bar{z}^2 + 2(r_x, r_{\bar{z}})dzd\bar{z},$$

то условие конформности параметра z эквивалентно уравнениям

$$(r_x, r_x) = (r_{\bar{z}}, r_{\bar{z}}) = 0, \quad (r_x, r_{\bar{z}}) = \frac{\lambda(z, \bar{z})}{2}, \quad (6.6)$$

где нижние индексы z и \bar{z} обозначают дифференцирование по этим переменным, а (\cdot, \cdot) — обычное скалярное произведение в \mathbb{R}^3 , распространенное по линейности на \mathbb{C}^3 :

$$(V, W) = \sum_{j=1}^3 V^j W^j, \quad V, W \in \mathbb{C}^3.$$

Так как поверхность регулярна, в каждой ее точке векторы $r_z, r_{\bar{z}}, n$, где n — вектор нормали к поверхности, образуют базис в \mathbb{C}^3 . Действительно, из регулярности следует, что r_x, r_y, n образуют базис в \mathbb{R}^3 , а $r_z = (r_x - ir_y)/2, r_{\bar{z}} = (r_x + ir_y)/2$, т.е. r_z и $r_{\bar{z}}$ линейно выражаются через r_x и r_y над полем комплексных чисел.

Выпишем деривационные уравнения (см. § 2.4) в терминах конформного параметра. Эти уравнения определяют деформацию репера $r_z, r_{\bar{z}}, n$ и имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} r_z \\ r_{\bar{z}} \\ n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} r_z \\ r_{\bar{z}} \\ n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \begin{pmatrix} r_z \\ r_{\bar{z}} \\ n \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} r_z \\ r_{\bar{z}} \\ n \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы U и V . Прежде всего введем две дополнительные функции, которые играют роль символов Кристоффеля:

$$A = (r_{zz}, n), \quad B = (r_{z\bar{z}}, n).$$

Заметим, что функция A — комплексная, а функция B — вещественная.

Лемма 6.5. Матрицы U и V имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} (\ln \lambda)_z & 0 & A \\ 0 & 0 & B \\ -2B/\lambda & -2A/\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & (\ln \lambda)_{\bar{z}} & \bar{A} \\ -2\bar{A}/\lambda & -2B/\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы выведем только вид матрицы U , так как вывод другой матрицы аналогичен.

По определению, $\mathbf{r}_{zz} = U_{11}\mathbf{r}_z + U_{12}\mathbf{r}_{\bar{z}} + U_{13}\mathbf{n}$. Заметим, что

$$U_{13} = (\mathbf{r}_{zz}, \mathbf{n}) = A$$

и из (6.6) вытекают следующие равенства:

$$U_{12} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{r}_{zz}, \mathbf{r}_z) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z) = 0,$$

$$\begin{aligned} U_{11} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{r}_{zz}, \mathbf{r}_{\bar{z}}) &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}}) - (\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{z\bar{z}}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z) = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \end{aligned}$$

что влечет $U_{11} = (\ln \lambda)_z$ и $U_{12} = 0$.

Аналогично, $\mathbf{r}_{z\bar{z}} = U_{21}\mathbf{r}_z + U_{22}\mathbf{r}_{\bar{z}} + U_{23}\mathbf{n}$,

$$U_{23} = (\mathbf{r}_{z\bar{z}}, \mathbf{n}) = B$$

и из (6.6) вытекает, что

$$U_{21} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{r}_{z\bar{z}}, \mathbf{r}_{\bar{z}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r}_{\bar{z}}, \mathbf{r}_{\bar{z}}) = 0,$$

$$U_{22} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{r}_{z\bar{z}}, \mathbf{r}_z) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z) = 0.$$

Следовательно, $U_{21} = U_{22} = 0$.

По определению, мы имеем $\mathbf{n}_z = U_{31}\mathbf{r}_z + U_{32}\mathbf{r}_{\bar{z}} + U_{33}\mathbf{n}$. Так как $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \equiv 1$, выполняются равенства

$$U_{33} = (\mathbf{n}_z, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0.$$

Так как по определению $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_z) = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\bar{z}}) = 0$, мы имеем

$$U_{31} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{n}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}}) = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\bar{z}}) - (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{z\bar{z}}) = -B,$$

$$U_{32} \frac{\lambda}{2} = (\mathbf{n}_z, \mathbf{r}_z) = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n}, \mathbf{r}_z) - (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{zz}) = -A,$$

что влечет $U_{31} = -2B/\lambda$, $U_{32} = -2A/\lambda$.

Лемма 6.5 доказана.

Напомним, что вторая фундаментальная форма равна

$$\Pi = (r_{xx}, \mathbf{n})dx^2 + 2(r_{xy}, \mathbf{n})dxdy + (r_{yy}, \mathbf{n})dy^2,$$

корни уравнения

$$F(k) = \det \begin{pmatrix} (r_{xx}, \mathbf{n}) - \lambda k & (r_{xy}, \mathbf{n}) \\ (r_{xy}, \mathbf{n}) & (r_{yy}, \mathbf{n}) - \lambda k \end{pmatrix} = 0$$

являются главными кривизнами k_1 и k_2 , их произведение называется гауссовой кривизной $K = k_1 k_2$, а полусумма — средней кривизной $H = (k_1 + k_2)/2$.

Мы получаем простым пересчетом, что

Лемма 6.6.

$$\Pi = (2B + (A + \bar{A}))dx^2 + 2i(A - \bar{A})dxdy + (2B - (A + \bar{A}))dy^2,$$

$$H = \frac{2B}{\lambda}, \quad K = \frac{4(B^2 - A\bar{A})}{\lambda^2}.$$

Уравнения Гаусса–Кодацци есть условие совместности систем деривационных уравнений:

$$U_{\bar{z}} - V_z + [U, V] = 0.$$

Прямыми вычислениями получаем следующую лемму.

Лемма 6.7. Уравнения Гаусса–Кодацци принимают следующий вид:

$$(\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda}(B^2 - A\bar{A}) = 0, \quad (6.7)$$

$$A_{\bar{z}} - B_z + (\ln \lambda)_z B = 0. \quad (6.8)$$

Первое из этих уравнений с учетом формулы гауссовой кривизны из леммы 6.6 есть

$$K = -2(\ln \lambda)_{z\bar{z}}$$

(теорема Гаусса). Второе уравнение распадается на два, так как оно утверждает равенство нулю и вещественной, и мнимой частей его левой части, которая в общем случае комплекснозначна. С учетом леммы 6 они переписываются в виде

$$A_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2} H_z.$$

Форма (не кососимметрическая) $\Omega = Adz^2$ называется дифференциалом Хопфа и является квадратичным дифференциалом. Это означает, что если на поверхности задан другой конформный параметр w , то в его терминах дифференциал Хопфа задается в виде $\Omega = \tilde{A}dw^2$, где

$$\tilde{A} = (\mathbf{r}_{w\bar{w}}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 (\mathbf{r}_{zz}, \mathbf{n}) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 A.$$

Он обладает рядом замечательных свойств, которые мы предлагаем доказать в качестве упражнения (они вытекают из леммы 6.7):

Лемма 6.8. 1) Дифференциал Хопфа равен в точке $p \in \Sigma$ нулю тогда и только тогда, когда p — амбилическая точка (т. е. в этой точке главные кривизны совпадают: $k_1 = k_2$);

2) Дифференциал Хопфа голоморфен (т. е. $\partial A / \partial \bar{z} = 0$) на поверхности тогда и только тогда, когда эта поверхность имеет постоянную среднюю кривизну ($H \equiv \text{const}$).

Теорема Боппе об определенности поверхности первой и второй квадратичной формами (теорема 2.6) теперь переформулируется в следующем виде:

- поверхность однозначно (с точностью до движений \mathbb{R}^3) определяется метрикой $\lambda dzd\bar{z}$, средней кривизной $H = 2B/\lambda$ и дифференциалом Хопфа Adz^2 , удовлетворяющими уравнениям (6.7) и (6.8);
- любой набор данных $\{\lambda dzd\bar{z}, H, Adz^2\}$, удовлетворяющий уравнениям (6.7) и (6.8), задает поверхность.

Заметим, что существуют поверхности, которые могут гладко деформироваться с сохранением метрики и средней кривизны, и эти деформации не сводятся к движениям поверхностей в евклидовом пространстве.

Отметим (без доказательства), что пространства голоморфных квадратичных дифференциалов на замкнутых поверхностях конечномерны.

Лемма 6.9. Если Ω — голоморфный квадратичный дифференциал на двумерной сфере S^2 , то $\Omega = 0$ всюду.

Доказательство.

Двумерная сфера покрывается двумя картами, каждая из которых отождествляется с комплексной плоскостью. Комплексные

координаты z и w в этих картах связаны формулой перехода

$$w = \frac{1}{z}.$$

Мы видим, что сфера получается из z -плоскости добавлением бесконечной точки с координатой $w = 0$. Если $\alpha(z)dz^2$ и $\beta(w)dw^2$ — записи дифференциала Ω в этих картах, то в области $z \neq 0$, в которой обе координаты определены, мы имеем

$$\beta(w)dw^2 = \beta(w(z)) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz^2 = \beta(w(z))z^{-4} dz^2 = \alpha(z)dz^2.$$

Так как при $w = 0$ значение функции $\beta(w)$ конечно, отсюда следует, что голоморфная на z -плоскости функция α имеет асимптотику

$$\alpha(z) = O\left(\frac{1}{z^4}\right) \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Но убывающая на бесконечности голоморфная функция равна всюду нулю. Лемма 6.9 доказана.

Из этой леммы вытекает

Теорема 6.2 (Теорема Хопфа). *Если сфера, погруженная в \mathbb{R}^3 , имеет постоянную среднюю кривизну H , то она совпадает (с точностью до параллельного переноса) со стандартной сферой радиуса $1/H$.*

Доказательство.

Пусть средняя кривизна постоянна: $H = \text{const}$. Из лемм 6.8 и 6.9 следует, что $A \equiv 0$. Из леммы 6.5 вытекает, что $\mathbf{n}_z = H\mathbf{r}_z$, и это влечет

$$\mathbf{n} = H\mathbf{r} + \mathbf{c},$$

где \mathbf{c} — постоянный вектор. Если $H = 0$, то вектор нормали постоянен и поверхность не может быть сферой (она полностью будет лежать в плоскости, ортогональной этому вектору). Если $H \neq 0$, то сдвинем поверхность на \mathbf{c}/H : $\mathbf{r} \rightarrow \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{c}/H$. Для сдвинутой поверхности получаем: $(H\tilde{\mathbf{r}}, H\tilde{\mathbf{r}}) = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$ и в итоге $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}) = 1/H^2$.

Теорема 6.2 доказана.

6.3. Представление Вейерштрасса

Из дериационных уравнений (лемма 6.5) следует, что для произвольной поверхности выполняется уравнение

$$\mathbf{r}_{z\bar{z}} = B\mathbf{n},$$

что вместе с леммой 6.6 дает

$$\mathbf{r}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}H\lambda\mathbf{n}. \quad (6.9)$$

В терминах конформного параметра оператор Лапласа–Бельтрами равен

$$\Delta = \frac{4}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

и поэтому (6.9) переписывается как

$$\Delta \mathbf{r} = 2H\mathbf{n}. \quad (6.10)$$

Из (6.10) следует

Лемма 6.10. *Поверхность минимальна ($H = 0$) тогда и только тогда, когда ее координатные функции, описывающие погружение в \mathbb{R}^3 , являются гармоническими.*

Из (6.9) следует, что комплекснозначная вектор-функция \mathbf{r}_z для минимальных поверхностей является голоморфной. По условию (6.6) она также удовлетворяет уравнению $(\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z) = 0$. Оказывается, формального выполнения этих условий достаточно для того, чтобы вектор-функция имела вид \mathbf{r}_z для конформно параметризованной минимальной поверхности.

Лемма 6.11. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, гомеоморфная внутренности круга (возможно, вся комплексная плоскость). Пусть $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ — такая вектор-функция, что*

1) φ голоморфна (т. е. каждая ее компонента φ_j голоморфна);

2) $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$;

3) φ не имеет нулей: $\varphi(U) \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

Тогда существует такая регулярная минимальная поверхность $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $\varphi = \mathbf{r}_z$ и z — конформный параметр на ней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\varphi_j = a_j + ib_j$, где a_j и b_j — вещественные функции. Голоморфность φ_j состоит в выполнении условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(a_j + ib_j) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial a_j}{\partial x} - \frac{\partial b_j}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial a_j}{\partial y} + \frac{\partial b_j}{\partial x} \right) \right) = 0.$$

В частности, равенство нулю мнимой части $\partial \varphi_j / \partial \bar{z}$ означает, что 1-форма $\omega_j = a_j dx - b_j dy$ замкнута: $d\omega_j = 0$. Возьмем произвольную точку $z_0 \in U$ и определим на U гладкую вещественнозначную функцию

$$f_j(z) = 2 \int_{z_0}^z \omega_j.$$

Так как область U гомеоморфна кругу, по теореме Стокса значение интеграла не зависит от выбора пути в U от z_0 до z . Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{\partial f_j}{\partial z} = \varphi_j.$$

Следовательно, функции f_1, f_2, f_3 задают такое отображение

$$\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = (f_1, f_2, f_3),$$

что $\mathbf{r}_z = \varphi$. Так как $\varphi(U) \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, это отображение в каждой точке имеет максимальный ранг, т. е. является погружением.

Из того, что $(\varphi, \varphi) = 0$, следует, что z — конформный параметр на погруженной поверхности. Так как $\mathbf{r}_{z\bar{z}} = 0$, согласно лемме 6.10 эта поверхность минимальна.

Лемма 6.11 доказана.

Из нее вытекает следующая теорема.

Теорема 6.3 (Теорема Вейерштрасса). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, гомеоморфная внутренности круга (возможно, вся комплексная плоскость), и пусть $\psi_1, \psi_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ — такие голоморфные функции, что $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ нигде не равно нулю в U . Пусть $(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in \mathbb{R}^3$ и $p \in U$ — заданные точки.

Тогда формулы¹

$$\begin{aligned}x^1(z) &= x_0^1 + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \left((\psi_1^2 - \psi_2^2) dz + (\bar{\psi}_1^2 - \bar{\psi}_2^2) d\bar{z} \right), \\x^2(z) &= x_0^2 + \frac{i}{2} \int_{z_0}^z \left((\psi_1^2 + \psi_2^2) dz + (\bar{\psi}_1^2 + \bar{\psi}_2^2) d\bar{z} \right), \\x^3(z) &= x_0^3 + \int_{z_0}^z (\psi_1 \psi_2 dz + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z})\end{aligned} \quad (6.11)$$

задают погружение минимальной поверхности в \mathbb{R}^3 . Индуцированная метрика имеет вид:

$$(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 dz d\bar{z}.$$

Любая минимальная поверхность в \mathbb{R}^3 в достаточно малой окрестности любой своей точки допускает такое представление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Общее решение уравнения

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$$

допускает представление в виде

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\psi_1^2 - \psi_2^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2} (\psi_1^2 + \psi_2^2), \quad \varphi_3 = \psi_1 \psi_2, \quad (6.12)$$

причем любому ненулевому решению φ отвечают такие две пары (ψ_1, ψ_2) и $(-\psi_1, -\psi_2)$. Голоморфность φ вытекает из голоморфности ψ_1 и ψ_2 . Отсюда и из леммы 6.11 следует, что формулы (6.11) задают конформное погружение U в \mathbb{R}^3 и построенная поверхность будет минимальна. Вид индуцированной метрики $\lambda dz d\bar{z}$ устанавливается элементарным вычислением: $2\langle r_z, r_{\bar{z}} \rangle = \lambda$.

Из (6.12) следует, что в окрестности любой точки минимальной поверхности r_z допускает такую параметризацию, а значит поверхность представляется формулами (6.11).

¹Обычно формулы Вейерштрасса–Эннелера приводятся в терминах $f = \psi_1^2$ и $g = \psi_2/\psi_1$.

Теорема 6.3 доказана.

Прежде чем приводить примеры минимальных поверхностей, отметим следующий факт.

Теорема 6.4. *В \mathbb{R}^3 не существует минимальных компактных поверхностей без края.*

Доказательство.

Согласно принципу максимума гармоническая функция f (т. е. такая, что $f_{z\bar{z}} = 0$), определенная в какой-то области из \mathbb{C} , не может принимать максимального значения во внутренней точке области. Предположим, что Σ — минимальная компактная поверхность без края, погруженная в \mathbb{R}^3 . Так как она компактна, на ней любая из координатных функций x^j достигает своего максимума. Предположим для определенности, что x^1 достигает максимума в точке p . Но в окрестности точки p существует такой конформный параметр z , что $x^1_{z\bar{z}} = 0$ (согласно лемме 6.10), т. е. гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке (у Σ нет края). Это возможно только в случае, когда координатная функция постоянна. Повторяя это рассуждение для x^2 и x^3 , мы доказываем, что все координатные функции должны быть постоянны. Полученное противоречие доказывает теорему 6.4.

Примеры минимальных поверхностей.

- 1) Плоскость: $\psi_1 = \psi_2 = z$.
- 2) Катеноид (рис. 17):

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}z}.$$

Это — минимальная поверхность вращения. Здесь $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и область определения z (плоскость с выколотой точкой) не гомеоморфна кругу. Однако в теореме 3 мы накладывали это требование на область, чтобы гарантировать однозначное определение интегралов, входящих в формулы (6.11). В случае катеноида эти интегралы все равно будут однозначно определены и катеноид будет вложенным (т. е. без самопересечений) минимальным цилиндром. Мы уже указывали эту поверхность в задаче 2.14.

Явные формулы для катеноида имеют вид

$$x^1 = \operatorname{ch} u \cos v, \quad x^2 = -\operatorname{ch} u \sin v, \quad x^3 = u,$$

где $z = e^{u+iv}$. Из этих формул видно, что катеноид описывается уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = \operatorname{ch}^2 x^3.$$

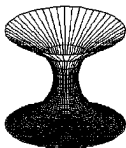


Рис. 17. Катеноид.

3) Геликоид (рис. 18):

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2 = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2}z}.$$

Это — линейчатая поверхность, которая образуется при равномерном вращении прямой l , пересекающей ось вращения и ортогональной ей, и одновременным равномерным переносом l параллельно оси вращения. Скорости вращения и переноса так согласованы, что полученная поверхность минимальна.

Здесь опять $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, однако интегралы, входящие в (6.11), уже не определены однозначно. Чтобы добиться однозначности, выкинем из \mathbb{C} вещественную отрицательную полуось $\mathbb{R}_- = \{z = -x + iy \mid x \leq 0, y = 0\}$. При этом мы получим один виток геликоида, отвечающий одному обороту l вокруг оси вращения. Дальше надо аналитически продолжить вложение, склеив верхний берег одного экземпляра $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ с нижним берегом другого такого экземпляра и т. д.

Явные формулы для геликоида имеют вид:

$$x^1 = \operatorname{sh} v \sin u, \quad x^2 = -\operatorname{sh} v \cos u, \quad x^3 = u,$$

где $z = e^{-i(u+iv)} = e^{v-iu}$. Отсюда следует, что геликоид задается уравнением

$$\operatorname{tg} x^3 = -\frac{x^1}{x^2}.$$

Катеноид и геликоид локально изометричны: задающие их функции ψ отличаются множителем \sqrt{i} , однако глобально раз-

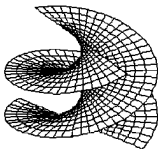


Рис. 18. Геликоид.

личны: топологически геликоид является вложенной плоскостью, а катеноид — цилиндром.

4) Поверхность Эннепера (рис. 19): $\psi_1 = 1, \psi_2 = z$.

Эта поверхность уже не является вложенной, но, как и предыдущие, является полной — любая геодезическая на ней неограниченно продолжается.

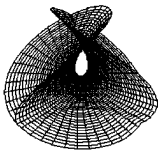


Рис. 19. Поверхность Эннепера.

Задача 6.1. Доказать, что график функции $z = f(x, y)$ (в трехмерном евклидовом пространстве с координатами x, y, z) является минимальной поверхностью тогда и только тогда, когда

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

ГЛАВА 7

Элементы теории групп Ли

7.1. Линейные группы Ли

Гладкое многообразие G , точки которого образуют группу и при этом все групповые операции — гладкие, называется *группой Ли*. Это означает, что

1) задано гладкое отображение $G \times G \rightarrow G$ — *умножение*, сопоставляющее паре точек $x, y \in G$ их произведение xy ;

2) $(xy)z = x(yz)$ для всех $x, y, z \in G$;

3) задан такой выделенный элемент — *единица* $e \in G$, что $xe = ex = x$ для всех $x \in G$;

4) для каждого элемента $x \in G$ существует обратный x^{-1} , произведение которого с x равно единице e : $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Легко показать, что существует ровно один такой элемент и поэтому задано *обращение* $x \rightarrow x^{-1}$, которое является гладким отображением $G \rightarrow G$.

Подгруппа H группы Ли G называется *подгруппой Ли*, если она одновременно является гладким подмногообразием G .

Мы уже указывали один пример группы Ли в § 1.4 — группу вещественных ортогональных преобразований $O(n)$, которая является $(n-1)n/2$ -мерным подмногообразием в пространстве \mathbb{R}^{n^2} , реализованном как пространство вещественных $(n \times n)$ -матриц. На других примерах групп Ли, которые реализуются матрицами, мы сначала и сосредоточимся.

1) *Полная линейная группа* $GL(n)$.

Пусть \mathbb{R}^n — линейное n -мерное пространство над полем вещественных чисел.

Выбрав базис e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^n , каждому линейному отображению $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сопоставим однозначно $(n \times n)$ -матрицу $A = (a_{jk})$, задающую его в этом базисе:

$$A : \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Хотя мы знаем, что линейное отображение задается тензором типа $(1, 1)$ (см. § 6.3), мы в этом будем нумеровать матричные элементы двумя нижними индексами, что привычнее для курсов линейной алгебры. Тем самым пространство $M(n, \mathbb{R})$, образованное $(n \times n)$ -матрицами, отождествляется с евклидовым пространством \mathbb{R}^{n^2} , координатами в котором являются коэффициенты a_{jk} матриц. Линейные отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ также называются преобразованиями (линейного) пространства \mathbb{R}^n .

Через E_n мы будем обозначать тождественное преобразование пространства \mathbb{R}^n и задающую его единичную $(n \times n)$ -матрицу.

Теорема 7.1. *Группа $GL(n)$ (или $GL(n, \mathbb{R})$), образованная всеми обратимыми преобразованиями пространства \mathbb{R}^n , является некомпактной группой Ли размерности n^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

На пространстве $M(n, \mathbb{R})$ определена гладкая функция — детерминант (определитель)

$$\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

которая обращается в нуль только на матрицах, задающих необратимые отображения. Следовательно, каждый элемент $A \in GL(n)$ содержится в $GL(n)$ вместе со своей окрестностью, и поэтому $GL(n)$ — подмногообразие в $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Так как функция \det не ограничена, многообразие $GL(n)$ некомпактно (иначе на нем бы функция \det достигала максимального и минимального значения). Операции умножения и обращения матриц, очевидно, являются гладкими как функции коэффициентов матриц. Следовательно, $GL(n)$ — группа Ли. Теорема 7.1 доказана.

Из теоремы 7.1 немедленно выводится следующий факт о группе ортогональных преобразований $O(n)$, введенной нами в § 1.4.

Следствие 7.1. *$O(n)$ — компактная подгруппа Ли группы $GL(n)$.*

Здесь и всюду в дальнейшем будем отождествлять элементы $O(n)$ с матрицами, которыми они задаются в каком-то выбранном ортонормированном базисе.

Следствие 7.1 выводится просто. Преобразования из $O(n)$ — это в точности те, которые сохраняют скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_{j=1}^n u^j v^j.$$

Это эквивалентно тому, что

$$A^T A = E_n, \quad A \in O(n). \quad (7.1)$$

где A^T — транспонированная матрица A (см. § 1.4). Следовательно, все преобразования из $O(n)$ обратимы и вложение $O(n) \subset GL(n)$ является гладким отображением. Значит, $O(n)$ — подгруппа Ли группы $GL(n)$.

Утверждение о компактности также выводится просто. Из (7.1) следует, что для каждой j -й строки матрицы $A \in O(n)$ верно равенство

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}^2 = 1.$$

Поэтому все коэффициенты a_{jk} матрицы A ограничены по модулю единицей: $|a_{jk}| \leq 1$. Так как множество решений уравнения (7.1) замкнуто в $\mathbb{R}^{n^2} = M(n, \mathbb{R})$, подмножеством $O(n)$ — замкнутое и ограниченное подмножество в \mathbb{R}^{n^2} и, следовательно, оно компактно. Следствие 7.1 доказано.

Подгруппы Ли полных линейных групп $GL(n)$ называются *линейными* (или *матричными*) *группами Ли*.

Следующую лемму мы уже применяли в § 1.4 в случае $H = O(n)$.

Лемма 7.1. Пусть $H \subset GL(n)$ — подгруппа, являющаяся в окрестности единицы $E_n \in GL(n)$ гладким подмножеством. Тогда она является гладким подмножеством всюду и, следовательно, подгруппой Ли группы $GL(n)$.

Доказательство.

То, что в окрестности U единичной матрицы E_n подгруппа H является подмножеством, означает, что в этой окрестности $U \cap H$ задается как множество нулей гладкого отображения $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, матрица Якоби которого имеет максимальный ранг (см. теорему 1.5). Пусть $A \in H$. Этот элемент имеет окрестность AU , состоящую из точек вида AB , где $B \in U$. Так как H — подгруппа $GL(n)$, в AU элементы H выделяются уравнением $F_A(X) = 0$, где $F_A(X) = F(A^{-1}X)$. В точке A матрица Якоби отображения $F_A : AU \rightarrow \mathbb{R}^k$ имеет тот же ранг, что и матрица Якоби отображения F в точке E_n . Следовательно, этот ранг максимален и в окрестности любой точки $A \in H$ подгруппа H является гладким подмножеством. Лемма 7.1 доказана.

2) Унимодулярная группа $SL(n)$.

Обозначим через $SL(n)$ поверхность уровня $\det = 1$ детерминанта, т. е. множество точек, в которых $\det = 1$.

Теорема 7.2. $SL(n)$ — подгруппа Ли группы $GL(n)$. Она некомпактна и имеет размерность $n^2 - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Легко посчитать, что

$$\frac{\partial \det(E_n)}{\partial a_{11}} = 1.$$

Следовательно, в окрестности E_n группа $SL(n)$ является гладким подмногообразием. Из леммы 7.1 следует, что $SL(n)$ — подгруппа Ли группы $GL(n)$. По теореме о неявной функции $\dim SL(n) = \dim GL(n) - 1$. Так как матричные элементы неограничены на $SL(n)$, эта группа некомпактна. Теорема 7.2 доказана.

3) Специальная ортогональная группа $SO(n)$.

Пусть $A \in O(n)$. Из равенств $\det A \det A^{-1} = 1$ и $\det A = \det A^T$ вытекает, что $\det A = \pm 1$ при $A \in O(n)$. Группа $SO(n)$ образована матрицами из $O(n)$ с $\det A = 1$.

Теорема 7.3. $SO(n)$ — связная компонента группы Ли $O(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Прежде всего докажем две леммы.

Лемма 7.2. Группа $O(2)$ состоит из двух компонент, образованных матрицами вида

$$1) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$. Каждая компонента диффеоморфна окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, и первая из них совпадает с группой $SO(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.2.

Пусть $A \in O(2)$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Уравнение (7.1) принимает вид:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0.$$

Общее решение уравнения $a^2 + b^2 = 1$ представляется в виде $a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$. Отсюда следует, что $c = \pm \sin \varphi, d = \mp \cos \varphi$. Следовательно, все элементы $O(2)$ имеют вид (7.2). Определитель матриц первого вида равен $\det A = 1$, а для матриц второго вида — $\det A = -1$. Лемма 7.2 доказана.

Лемма 7.3. Пусть $A \in O(n)$. Тогда векторное пространство \mathbb{R}^n представляется в виде прямой суммы таких одно- и двумерных подпространств V_j , что они попарно ортогональны, т. е. $V_i \perp V^j$ при $i \neq j$, и каждое из них инвариантно относительно A , т. е. $A(V_j) = V_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.3.

Проведем его индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что оно доказано для $n < k$. Пусть $A \in O(k)$. Выпишем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E_k) = 0.$$

Если оно имеет вещественный корень λ , то существует такой вектор $v \in \mathbb{R}^k$, что $Av = \lambda v$. В этом случае пространство \mathbb{R}^k распадается в прямую сумму — $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \cdot v + (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ — одномерного подпространства $\mathbb{R} \cdot v$, натянутого на v , и его ортогонального дополнения. Оба эти подпространства инвариантны относительно A . Следовательно, ограничение A на $(\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ задается матрицей $A_1 \in O(k-1)$. По индуктивному предположению для A_1 утверждение леммы верно. Поэтому оно верно и для A .

Если уравнение $\det(A - \lambda E_k) = 0$ не имеет вещественных корней, то возьмем комплексный корень μ и такой комплексный вектор $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^k$, где $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^k$, что $Aw = \mu w$. Очевидно, что $A(w_1 - iw_2) = \bar{\mu}(w_1 - iw_2)$ и векторы w_1, w_2 порождают двумерное инвариантное подпространство $\mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$. Так как преобразование A ортогонально, то ортогональное дополнение к $\mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$ тоже инвариантно и, рассуждая как и в предыдущем случае, выводим утверждение леммы для A из индуктивного предположения. Лемма 7.3 доказана.

Перейдем собственно к доказательству теоремы 7.3. Для того чтобы показать, что $SO(n)$ связно, достаточно любое преобразование $A \in SO(n)$ продеформировать внутри $SO(n)$ в тождественное преобразование E_n . Из леммы 7.3 следует, что в подходящем базисе любой элемент $A \in O(n)$ представляется блочно-

диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

где матрицы A_j либо одномерны (в этом случае они равны собственным значениям ортогонального преобразования, т. е. ± 1), либо двумерны (в этом случае они имеют вид (7.2)). В последнем случае, меняя непрерывно φ , любую матрицу вида (7.2) можно продеформировать в диагональную матрицу с диагональными элементами, равными ± 1 . Значит, A деформируется в элемент B , который в подходящем базисе задается диагональной матрицей с ± 1 по диагонали. Так как $\det A = \det B = 1$, на диагонали стоит четное число элементов, равных -1 . Разобьем их по парам и для каждой пары выберем отвечающие ей собственные векторы v_1, v_2 . Ограничение B на $\mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ равно $-E_2$. Эта матрица имеет вид 1 из (7.2) при $\varphi = \pi$ и, деформируя φ в 0, приведем ограничение B на это подпространство в E_2 . Прделав это со всеми такими парами, приведем матрицу B к виду E_n , т. е. продеформируем линейное преобразование A в тождественное преобразование. Таким образом, мы показали, что $SO(n)$ — связное многообразие.

Пусть $A \in O(n)$ и $\det A = -1$. Образом гладкого и обратимого (т. е. диффеоморфного) отображения $SO(n) \rightarrow O(n)$ вида $X \rightarrow AX$ будет множество, образованное всеми матрицами из $O(n)$ с $\det = -1$. Отсюда следует, что многообразие $O(n)$ распадается на две компоненты связности, на которых определитель имеет разные знаки. Теорема 7.3 доказана.

Мы отдельно выделили доказательство этой теоремы из-за важности групп $SO(n)$ и того, что его аналоги для других групп проще, но следуют той же идее.

Задача 7.1. *Используя вещественные жордановы формы матриц, показать, что*

а) для любого n группа $GL(n)$ имеет две компоненты связности, выделенные знаком $\det A$;

б) для любого n группа $SL(n)$ связна.

4) Группа $GL(n, \mathbb{C})$.

Обратимые линейные преобразования векторного пространства \mathbb{C}^n над полем \mathbb{C} образуют группу $GL(n, \mathbb{C})$.

Выберем базис e_1, \dots, e_n в \mathbb{C}^n и каждому линейному отображению $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ сопоставим $(n \times n)$ -матрицу A с комплексными коэффициентами, задающую отображение в этом базисе. Пространство таких матриц обозначим через $M(n, \mathbb{C})$.

Преобразования $A \in GL(n, \mathbb{C})$ выделяются условием $\det A \neq 0$. Отсюда, как и в случае с группой $GL(n)$, заключаем, что $GL(n, \mathbb{C})$ является группой Ли (вещественной) размерности $2n^2 = \dim M(n, \mathbb{C})$.

5) Унитарная группа $U(n)$.

Пусть \mathbb{C}^n — n -мерное линейное пространство над полем \mathbb{C} . Обозначим через (u, v) эрмитово произведение на \mathbb{C}^n , которое в ортонормированном базисе e_1, \dots, e_n записывается в виде

$$(u, v) = \sum_{j=1}^n u^j \bar{v}^j.$$

Отображение $A \in M(n, \mathbb{C})$ называется *унитарным*, если оно сохраняет это эрмитово произведение. Очевидно, что оно не имеет ядра и обратимо.

Пространство $M(n, \mathbb{C})$ естественно отождествляется с \mathbb{C}^{n^2} , а значит, и с \mathbb{R}^{2n^2} , в котором координатами являются вещественные и мнимые части коэффициентов матриц: $\operatorname{Re} a_{jk}$ и $\operatorname{Im} a_{jk}$. Так как каждое линейное преобразование из $M(n, \mathbb{C})$ задает линейное преобразование $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, где \mathbb{R}^{2n} порождено над \mathbb{R} векторами $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$, группа $M(n, \mathbb{C})$ естественно вкладывается в $M(2n, \mathbb{R})$.

Теорема 7.4. *Группа $U(n)$, образованная всеми унитарными преобразованиями пространства \mathbb{C}^n , является компактной подгруппой Ли группы $GL(2n)$, и ее размерность равна n^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Произведение двух унитарных преобразований и обращение каждого унитарного преобразования унитарны. Поэтому унитарные преобразования образуют группу, которую обозначим $U(n)$. Эрмитово произведение записывается как

$$(u, v) = u^T E_n \bar{v},$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ и $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ — векторы из \mathbb{C}^n , записанные как $(n \times 1)$ -матрицы. Матрица $A \in M(n, \mathbb{C})$ унитарна тогда и только тогда, когда

$$(Au, Av) = u^T A^T E_n \bar{A} \bar{v} = (u, v)$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^n$. Это значит, что выполняется следующий комплексный аналог уравнения (7.1):

$$A^T \bar{A} = E_n, \quad A \in U(n). \quad (7.3)$$

Это уравнение расписывается в виде системы n^2 полиномиальных уравнений:

$$F_{jk} = \sum_{m=1}^n (\operatorname{Re} a_{mj} \operatorname{Re} a_{mk} + \operatorname{Im} a_{mj} \operatorname{Im} a_{mk}) - \delta_{jk} = 0,$$

где $1 \leq j \leq k \leq n$, и

$$G_{jk} = \sum_{m=1}^n (\operatorname{Re} a_{mj} \operatorname{Im} a_{mk} - \operatorname{Im} a_{mj} \operatorname{Re} a_{mk}) = 0,$$

где $1 \leq j < k \leq n$.

Функции F_{jk} и G_{jk} задают отображение

$$F : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}.$$

Докажем, что в точке $E_n \in M(n, \mathbb{C})$ матрица Якоби этого отображения имеет максимальный ранг, который равен n^2 . Выберем n^2 переменных $\operatorname{Re} a_{jk}$, $1 \leq j \leq k \leq n$, и $\operatorname{Im} a_{jk}$, $1 \leq j < k \leq n$, и подсчитаем минор матрицы Якоби, отвечающий этим переменным, при $A = E_n$:

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial \operatorname{Re} a_{rs}} = \begin{cases} 2 & \text{при } j = r, k = s, j = k, \\ 1 & \text{при } j = r, k = s, j < k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial G_{jk}}{\partial \operatorname{Im} a_{rs}} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = r, k = s, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial \operatorname{Im} a_{rs}} = \frac{\partial G_{jk}}{\partial \operatorname{Re} a_{rs}} = 0 \quad \text{для всех } j, k, r, s.$$

Следовательно, по лемме 7.1, $U(n)$ — гладкое подмногообразие в \mathbb{R}^{2n^2} размерности $\dim U(n) = \dim \mathbb{R}^{2n^2} - n^2 = n^2$.

Из (7.3) следует, что $|a_{jk}| \leq 1$. Поэтому $U(n)$ — ограниченное подмножество \mathbb{R}^{2n^2} и, так как оно замкнуто, оно компактно. Теорема 7.4 доказана.

Цепочка вложений $U(n) \subset M(n, \mathbb{C}) \subset M(2n, \mathbb{R})$ показывает, что группа $U(n)$ линейна.

б) *Специальная унитарная группа $SU(n)$.*

Из уравнения (7.3) следует, что $|\det A| = 1$ при $A \in U(n)$. Матрицы из $U(n)$ с $\det A = 1$ образуют подгруппу, которая обозначается $SU(n)$.

Теорема 7.5. $SU(n)$ — $(n^2 - 1)$ -мерная подгруппа Ли группы $U(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В $M(n, \mathbb{C})$ группа $SU(n)$ выделяется теми же уравнениями $F_{jk} = G_{jk} = 0$, что и $U(n)$, и еще одним добавочным уравнением

$$\det A = 1,$$

которое мы заменим на

$$H(A) = \operatorname{Im} \det A = 0.$$

Это уравнение выделяет две компоненты $\det A = \pm 1$, одна из которых и есть $SU(n)$. Матрица Якоби отображения $\tilde{F}: M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2+1}$ вида

$$\tilde{F}(A) = (F(A), H(A))$$

имеет в точке $A = E_n$ максимальный ранг. Чтобы показать это, дополним множество переменных $\operatorname{Re} a_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq n$, и $\operatorname{Im} a_{jk}, 1 \leq j < k \leq n$, переменной $\operatorname{Im} a_{11}$ и заметим, что $\frac{\partial H}{\partial \operatorname{Im} a_{11}} = 1$ в точке E_n . Учитывая вычисления из доказательства теоремы 7.4, заключаем, что минор матрицы Якоби отображения \tilde{F} , отвечающий этим $n^2 + 1$ переменным, обратим в точке $A = E_n \in SU(n)$. Следовательно, $SU(n)$ — гладкое подмногообразие $U(n)$ и $\dim SU(n) = n^2 - 1$. Теорема 7.5 доказана.

Задача 7.2. *Используя комплексные жордановы формы матриц, показать, что группы $U(n)$ и $SU(n)$ связны для всех значений n .*

7.2. Алгебры Ли

Для линейной группы $G \subset GL(n)$ касательное пространство в единице E_n является линейным подпространством в $M(n, \mathbb{R})$.

Так как достаточно малая окрестность каждой обратимой матрицы в $M(n, \mathbb{R})$ состоит из обратимых матриц (это следует из непрерывности функции \det), для $GL(n)$ касательное пространство в каждой точке совпадает с $M(n, \mathbb{R})$. Аналогично доказывается, что касательные пространства к группе $GL(n, \mathbb{C})$ совпадают с $M(n, \mathbb{C})$.

Теорема 7.6. Касательное пространство $T_e G$ к группе G в единице e образовано

1) для $G = SL(n)$ — бесследовыми матрицами:

$$\text{Tr } X = 0;$$

2) для $G = O(n)$ — кососимметрическими матрицами:

$$X^T = -X \quad : \quad x_{jk} = -x_{kj};$$

3) для $G = U(n)$ — такими матрицами $X \in M(n, \mathbb{C})$, что

$$\bar{X}^T = -X \quad : \quad \bar{x}_{jk} = -x_{kj};$$

4) для $G = SU(n)$ — матрицами $X \in M(n, \mathbb{C})$, выделенным уравнениями

$$\bar{x}_{jk} = -x_{kj} \quad \text{и} \quad \text{Tr } x = 0.$$

Доказательство.

Пусть $\gamma(t) = E_n + Xt + O(t^2)$ — гладкий путь в G , проходящий через единицу.

Если $G = SL(n)$, то $\det \gamma(t) \equiv 1$ и $\det \gamma(t) = 1 + \text{Tr } X \cdot t + O(t^2) = 1$. Отсюда получаем, что $\text{Tr } X = 0$. Так как размерность пространства бесследовых матриц совпадает с $\dim SL(n)$, любая такая матрица реализуется касательным вектором.

Для $G = O(n)$ мы уже приводили доказательство в § 1.4, и оно обобщается на $G = U(n)$ следующим образом: $\bar{\gamma}(t)\gamma^T(t) = 1$ и так как

$$(1 + \bar{X}t + O(t^2))(1 + X^T t + O(t^2)) = 1 + (X^T + \bar{X})t + O(t^2) = 1,$$

мы выводим, что $X^T = -\bar{X}$. Размерность пространства таких матриц совпадает с $\dim U(n)$.

В случае $G = SU(n)$ достаточно объединить рассуждения для $SL(n)$ и $U(n)$. Теорема 7.6 доказана.

Отклонение группы от коммутативной задается ее коммутаторами $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, и равенство нулю всех коммутаторов

в точности выделяет коммутативные группы. Для группы Ли G ее касательное пространство в единице $e \in G$ наделяется следующей операцией:

$$[u, v] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [x(t), y(t)]}{\partial t^2} \text{ при } t = 0,$$

где

$$u = \frac{\partial x(t)}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y(s)}{\partial t} \text{ при } t = 0, \quad x(0) = y(0) = e.$$

Эта операция называется *коммутатором* и может быть определена по-другому. Пусть $\{x^j\}$ — такие локальные координаты в окрестности единицы $e \in G$, что $x^j(e) = 0$ для всех j . Тогда $T_e G$ можно отождествить с \mathbb{R}^n , где $n = \dim G$, и записать умножение в терминах локальных координат в форме ряда Тейлора

$$(xy)^j = x^j + y^j + b_{kl}^j x^k y^l + (\text{члены порядка } \geq 3), \quad (7.4)$$

где мы считаем x^j и y^k членами первого порядка малости. Тогда

$$[u, v]^j = (b_{kl}^j - b_{lk}^j) u^k v^l = c_{kl}^j u^k v^l.$$

Теорема 7.7. *Операция $[\cdot, \cdot]$ на касательном пространстве $T_e G$ в единице группы Ли линейна по каждой переменной и удовлетворяет соотношениям:*

$$[u, v] = -[v, u], \quad (7.5)$$

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0 \text{ (тождество Якоби)}. \quad (7.6)$$

Эквивалентность различных определений коммутатора и тождества (7.5) и (7.6) доказываются прямыми и простыми вычислениями с помощью рядов Тейлора. Мы оставим их в качестве упражнения и отметим, что они подробно изложены в [12].

Линейное пространство (над каким-то полем), наделенное коммутатором, линейным по переменным и удовлетворяющим тождествам (7.5) и (7.6), называется *алгеброй Ли*.

Если e_1, \dots, e_n — базис в алгебре Ли, то коммутатор однозначно задается своими значениями на базисных элементах:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$$

(здесь подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу k). Постоянные c_{ij}^k называются *структурными константами* алгебры Ли.

Если говорится об алгебре Ли группы Ли, то под ней подразумевается касательное пространство к единице с введенной выше операцией коммутирования.

Гомоморфизмом групп Ли G и H называется гладкое отображение $f : G \rightarrow H$, являющееся гомоморфизмом групп. Каждое такое отображение определяет отображение касательных пространств в единицах, сохраняющее коммутаторы — *гомоморфизм алгебр Ли*

$$f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h},$$

т. е. такое линейное отображение соответствующих алгебр Ли, что

$$f_*([u, v]) = [f_*(u), f_*(v)] \quad (7.7)$$

для всех $u, v \in \mathfrak{g} = T_e G$. Действительно, равенство (7.7) следует из определения коммутатора элементов алгебры Ли через коммутаторы путей в группах Ли:

$$\begin{aligned} f_*([\dot{x}(0), \dot{y}(0)]) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f([x(t), y(t)])}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 ([f(x(t)), f(y(t))])}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = [f_*(\dot{x}(0)), f_*(\dot{y}(0))]. \end{aligned}$$

Очевидно, что если группы Ли гладко изоморфны, то их алгебры Ли изоморфны. Это простое утверждение позволяет сводить большую часть проблемы классификации групп Ли к задаче линейной алгебры. Алгебра Ли строится по квадратичной части правила умножения (7.4), которое задает умножение в группе. Последнее условие является очень сильным и, грубо говоря, позволяет восстановить весь ряд Тейнора для умножения: структурные константы c_{kl}^j полностью определяют умножение в достаточно малой окрестности единицы (теорема Ли). Подробные доказательства и классификационные результаты можно найти, например, в [12].

Для матричных групп, как мы сейчас покажем, коммутатор имеет простой вид.

Однопараметрической подгруппой $F(t)$ группы Ли G называется подгруппа $F(t)$, являющаяся образом гомоморфизма групп Ли $F : \mathbb{R} \rightarrow G$, где \mathbb{R} — аддитивная группа вещественных чисел.

Лемма 7.4. Для линейных групп $G \subset GL(n)$ однопараметрические подгруппы — это подгруппы $F(t) = \exp(Xt)$, где $X \in T_e G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обозначим $X = \partial F(0)/\partial t$ и через \dot{F} производную F по t . Тогда

$$\dot{F}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s+t) - F(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s) - E_n}{s} F(t) = X F(t)$$

и, решая матричное уравнение

$$\dot{F} = XF$$

с постоянной матрицей A и начальным условием $F(0) = E_n$, получаем

$$F(t) = \exp(Xt) = E_n + Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}X^n t^n + \dots$$

Лемма 7.4 доказана.

Теорема 7.8. Для линейных групп $G \subset GL(n)$ коммутатор на алгебрах Ли является обычным коммутатором матриц

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g} = T_{E_n} G \subset M(n, \mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы имеем

$$\begin{aligned} & [\exp(Xt), \exp(Yt)] = \\ & (E_n + Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3))(E_n + Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3)) \times \\ & (E_n - Xt + \frac{1}{2}X^2t^2 + O(t^3))(E_n - Yt + \frac{1}{2}Y^2t^2 + O(t^3)) \\ & = E_n + [X, Y]t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\exp(Xt), \exp(Yt)]}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = [X, Y].$$

Теорема 7.8 доказана.

Алгебры Ли матричных групп обозначаются аналогично с заменой больших букв на маленькие. Например, $gl(n)$ — алгебра Ли группы $GL(n)$.

Примеры алгебр Ли.

1) Алгебра $so(2)$ одномерна и коммутативна:

$$so(2) = \mathbb{R} \cdot e_1, \quad [e_1, e_1] = 0.$$

2) Алгебра $so(3)$ порождена матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющими соотношениям

$$[e_j, e_k] = \varepsilon_{j k l}^l e_l, \quad (7.8)$$

где $\varepsilon_{j k l}^l = 1$, если подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & l \end{pmatrix}$$

четна, $\varepsilon_{j k l}^l = -1$, если эта подстановка нечетна, и $\varepsilon_{j k l}^l = 0$, если хотя бы два индекса из j, k, l совпадают.

3) Алгебра $su(2)$ порождена (над полем \mathbb{R}) матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

удовлетворяющими соотношениям (7.8).

Пусть e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 . Тогда векторные произведения этих базисных векторов тоже удовлетворяют соотношениям (7.8).

Следствие 7.2. *Алгебры Ли $so(3)$ и $su(2)$ изоморфны алгебре векторов \mathbb{R}^3 с операцией векторного произведения.*

4) Алгебра $sl(2)$ порождена матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющими соотношениям

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = e_3.$$

Следствие 7.3. Алгебра $sl(2)$ неизоморфна алгебрам $so(3)$ и $su(2)$.

Действительно, векторное произведение $[u, v]$ в \mathbb{R}^3 ортогонально векторам u и v . Поэтому в алгебре $so(3)$ уравнение $[u, v] = u$ не имеет решения, а образующие $sl(2)$ удовлетворяют соотношению $[e_1, e_3] = e_1$.

7.3. Геометрия простейших линейных групп

1) *Группа $SU(2)$.*

Из уравнений (7.3) следует, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $U(2) \subset M(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{a}b + \bar{c}d = 0, \quad |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1.$$

Дополнительное условие, что $A \in SU(2) \subset U(2)$, принимает вид

$$ad - bc = 1.$$

Запишем первое и последнее уравнения в виде системы уравнений

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему с учетом $|a|^2 + |c|^2 = 1$, получаем, что $b = -\bar{c}$ и $d = \bar{a}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.9. *Группа $SU(2) \subset M(2, \mathbb{C})$ состоит из матриц вида*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Следствие 7.4. *Группа Ли $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере.*

Действительно, n -мерная сфера — это подмногообразие \mathbb{R}^{n+1} , выделяемое уравнением

$$\sum_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 = 1,$$

и, полагая $a = x^1 + ix^2$, $b = x^3 + ix^4$, мы приводим уравнение $|a|^2 + |b|^2 = 1$ к виду уравнения трехмерной сферы.

2) *Кватернионы.*

Алгеброй *кватернионов* \mathbb{H} называется четырехмерная алгебра над полем \mathbb{R} с такими операциями сложения и умножения, что

1) операции сложения и умножения ассоциативны:

$$u(vw) = (uv)w, \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

при $u, v, w \in \mathbb{H}$, и удовлетворяют также условиям

$$v + w = w + v, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w,$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad (\lambda v)(\mu w) = (\lambda \mu)(v w)$$

при $v, w \in \mathbb{H}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

2) существуют такие линейные образующие $1, i, j$ и k алгебры \mathbb{H} , что $1v = v1$ для любого $v \in \mathbb{H}$, а умножение других образующих задается по правилу

$$\begin{aligned} ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Эти правила однозначно задают умножение, которое некоммутативно и обладает замечательным свойством: каждый ненулевой элемент имеет обратный — такая алгебра называется *алгеброй с делением*.

Имеет место теорема Адамса, которая доказана топологическими методами и утверждает, что

- *размерность конечномерной алгебры с делением над полем \mathbb{R} может принимать только следующие значения: 1, 2, 4 и 8.*

Все эти возможности реализуются алгебрами вещественных чисел ($\dim = 1$), комплексных чисел ($\dim = 2$), кватернионов ($\dim = 4$) и октав Кэли ($\dim = 8$)¹.

¹ Алгебра октав Кэли, умножение в которой не только не коммутативно, но и не ассоциативно, и ее свойства и приложения изложены в [14]. Эта алгебра является примером *альтернативной* алгебры, т. е. такой алгебры, в которой любая подалгебра, порожденная двумя элементами, ассоциативна.

Указанные выше четыре алгебры исчерпывают все альтернативные алгебры с делением. Это утверждение обобщает теорему Фробениуса, которая гласит, что *любая ассоциативная алгебра с делением над полем \mathbb{R} изоморфна либо \mathbb{R} , либо \mathbb{C} , либо \mathbb{H} .*

Положим

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Простой проверкой доказывается следующая лемма.

Лемма 7.5. *Линейное подпространство в $M(2, \mathbb{C})$, порожденное этими матрицами, с операциями сложения и умножения матриц изоморфно алгебре кватернионов.*

Матрицы

$$\sigma_x = \mathbf{i}\mathbf{i}, \quad \sigma_y = \mathbf{i}\mathbf{j}, \quad \sigma_z = \mathbf{i}\mathbf{k}$$

применяются в теоретической физике и называются *матрицами Паули*.

На алгебре кватернионов, как и на алгебре комплексных чисел, задана операция сопряжения:

$$q = u\mathbf{1} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \mapsto \bar{q} = u\mathbf{1} - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

Прямыми вычислениями выводятся следующие формулы:

$$\overline{v + w} = \bar{v} + \bar{w}, \quad \overline{vw} = \bar{w}\bar{v}.$$

Кватернион q называется *мнимым*, если $\bar{q} = -q$. Очевидно, что мнимые кватернионы — это в точности те, которые имеют вид:

$$q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Алгебра \mathbb{H} *нормирована*, т. е. для каждого элемента q определена его норма $|q| \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия

$$|v + w| \leq |v| + |w|, \quad |\lambda v| = |\lambda||v| \text{ при } v, w \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$|v| \geq 0 \text{ и } |v| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } v = 0.$$

Эта норма задается формулой

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{u^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

и кватернион q называется *единичным*, если $|q| = 1$.

Из теоремы 7.9 и леммы 7.5 немедленно следует лемма.

Лемма 7.6. *Группа $SU(2)$ изоморфна группе единичных кватернионов с операцией умножения.*

3) Группы $SO(3)$ и $SO(4)$.

С этого момента мы будем отождествлять группу $SU(2)$ с группой единичных кватернионов, линейное пространство \mathbb{R}^3 — с линейным пространством мнимых кватернионов и линейное пространство \mathbb{R}^4 — с пространством всех кватернионов.

Если v — мнимый кватернион и $q \in \mathbb{H}$, то

$$\overline{qvq} = q\bar{v}q = -qvq$$

и, следовательно, qvq — тоже мнимый кватернион. Поэтому для каждого $q \in SU(2) \subset \mathbb{H}$ определено линейное отображение

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{Q} \mathbb{R}^3 : Q(v) = qvq. \quad (7.11)$$

Это линейное отображение сохраняет нормы элементов

$$|Q(v)| = |q| |v| |\bar{q}| = |v|,$$

которые записываются через скалярное произведение $(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ как

$$|v| = \sqrt{(v, v)}.$$

Так как

$$(v + w, v + w) = (v, v) + 2(v, w) + (w, w)$$

и нормы элементов v, w и $(v + w)$ сохраняются под действием Q , то Q сохраняет скалярное произведение на $\mathbb{R}^3 = \text{Im } \mathcal{H}$:

$$(Q(v), Q(w)) = (v, w).$$

Два различных элемента q_1 и q_2 задают одно и то же линейное преобразование тогда и только тогда, когда для каждого мнимого кватерниона v выполняется равенство

$$(\bar{q}_2q_1)v(\bar{q}_1q_2) = v,$$

что эквивалентно условию коммутативности

$$(\bar{q}_2q_1)v = v(\bar{q}_2q_1).$$

Из соотношений (7.10) легко выводится, что кватернион \bar{q}_2q_1 коммутирует с каждым мнимым кватернионом только в том случае, если он вещественный: $\bar{q}_2q_1 = \lambda 1$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Но так как \bar{q}_2q_1 — единичный кватернион, то он в этом случае должен быть равен ± 1 .

Мы доказали следующую лемму.

Лемма 7.7. Формула (7.11) задает гомоморфизм групп

$$\rho : SU(2) \rightarrow O(3),$$

ядро которого равно $\{\pm 1\}$ и, следовательно, изоморфно \mathbb{Z}_2 .

В терминах матричных элементов a и b , которые являются гладкими функциями на $SU(2)$, гомоморфизм ρ записывается простыми формулами, из которых следует, что отображение ρ является гладким, т. е. гомоморфизмом групп Ли.

Так как $1 \in SU(2)$ переходит в E_3 и группа Ли $SU(2)$ связна, то образ гомоморфизма ρ лежит в связной компоненте группы $O(3)$, содержащей единицу, т. е. в $SO(3)$.

Теперь отметим один общий факт.

Лемма 7.8. Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм связных линейных групп Ли одинаковой размерности, ядро которого является дискретной подгруппой $\Gamma \subset G$ (в индуцированной вложением топологии каждая точка Γ имеет окрестность, не содержащую других точек из Γ). Тогда

1) дифференциал отображения

$$f_* : T_g G \rightarrow T_{f(g)} H$$

является изоморфизмом для каждого $g \in G$;

2) $f(G) = H$;

3) алгебры Ли групп G и H изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как гомоморфизм групп Ли переводит однопараметрические подгруппы $\exp(Xt)$ в однопараметрические подгруппы $\exp(f_*(X)t)$ и ядро f дискретно, отображение f_* является вложением и, так как $\dim G = \dim H$, — даже изоморфизмом касательных пространств в единицах. Эти касательные пространства в единицах наделяются структурами алгебр Ли, и f_* задает изоморфизм алгебр Ли.

Пусть $g \in G$ и \mathfrak{g} — алгебра Ли группы G . Каждый элемент в окрестности g имеет вид $g \exp(X)$, где $X \in \mathfrak{g}$, и под действием f он переходит $f(g) \exp(f_* X)$. Следовательно, в точке $g \in G$ дифференциал f_* имеет тот же ранг, что и в единице группы. Значит, этот ранг всюду максимален.

Так как f_* имеет в каждой точке максимальный ранг и размерности G и H совпадают, образ отображения f является гладким подмногообразием $f(G) \subset H$. Но $f(G)$ и H связны и поэтому совпадают. Лемма 7.8 доказана.

Применяя эту лемму к отображению $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$, получаем следующую теорему.

Теорема 7.10. *Группа Ли $SO(3) = SU(2)/\{\pm 1\}$ диффеоморфна многообразию, которое получается из единичной трехмерной сферы в \mathbb{R}^4 отождествлением противоположных точек.*

Действительно, ρ всюду имеет ранг 3 и прообраз каждого элемента $p \in SO(3)$ состоит из пары точек $\pm q \in SU(2)$.

Многообразие $SO(3)$ является примером вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n = 3$, которое и определяется как многообразие, полученное из сферы

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 = 1\}$$

отождествлением противоположных точек. В курсе аналитической геометрии два других, более простых, примера уже встречались — проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ и проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ [1].

Пусть теперь q_1, q_2 — пара единичных кватернионов. Сопоставим ей линейное отображение $\mathcal{H} = \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ вида

$$v \mapsto q_1 v \overline{q_2}. \quad (7.12)$$

Аналогично доказательству леммы 7.7, доказывается, что

Лемма 7.9. *Формула (7.12) задает гомоморфизм групп Ли*

$$SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4),$$

ядро которого образовано элементами $(1, 1)$ и $(-1, -1)$.

Из нее с помощью леммы 7.8 выводится

Теорема 7.11. *Группа Ли $SO(4)$ диффеоморфна многообразию, которое получается из прямого произведения двух единичных трехмерных сфер $S^3 \times S^3$ отождествлением пар точек (v, w) и $(-v, -w)$.*

Алгебра Ли $so(4)$ группы $SO(4)$ изоморфна прямой сумме алгебр Ли

$$so(4) = so(3) \oplus so(3).$$

Здесь под прямой суммой $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ понимается алгебра Ли, образованная парами (X, Y) , $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, с операцией коммутирования

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]).$$

Если \mathfrak{g} и \mathfrak{h} — алгебры Ли групп G и H , то $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, очевидно, является алгеброй Ли прямого произведения групп $G \times H$.

Хотя $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, легко показать, что $SO(4)$ негомеоморфно прямому произведению $SO(3) \times SO(3)$.

Разложение алгебры Ли $so(4)$ в нетривиальную прямую сумму алгебр Ли является парадоксальным свойством размерности 4: для всех других значений n алгебры $so(n)$ не представимы в виде прямых сумм ненулевых алгебр Ли. С этим эффектом связано другое свойство размерности 4: только для $n = 4$ существуют попарно недиффеоморфные многообразия, гомеоморфные \mathbb{R}^n (мы уже отмечали это в § 3.2).

ГЛАВА 8

Элементы теории представлений

8.1. Основные понятия теории представлений

Матричные группы Ли имеют многочисленные приложения и, более того, служат для изучения абстрактных групп посредством *теории представлений*.

Представлением группы G называется гомоморфизм

$$\rho : G \rightarrow GL(V),$$

где V — векторное пространство, называемое *пространством представления*, и $GL(V)$ — группа его обратимых линейных преобразований. Если $\dim V < \infty$, то представление называется *конечномерным* и $\dim V$ называется *степенью представления*.

Представление называется *вещественным*, если $GL(V) = GL(n)(= GL(n, \mathbb{R}))$, и *комплексным*, если $GL(V) = GL(n, \mathbb{C})$. Если для вещественного конечномерного представления ρ на $V = \mathbb{R}^n$ существует такое невырожденное скалярное произведение, что преобразования $\rho(g)$ сохраняют его для всех $g \in G$, или, что то же самое, если

$$\rho(G) \subset O(n) \subset GL(n),$$

где подгруппа $O(n)$ определена этим скалярным произведением, то представление ρ называется *ортогональным*. Конечномерное комплексное представление *унитарно*, если оно сохраняет невырожденное эрмитово произведение на $V = \mathbb{C}^n$. Для краткости мы будем ортогональные представления также называть унитарными.

Понятие унитарности естественно обобщается и на бесконечномерные представления в случае, когда V — гильбертово пространство: здесь требуется сохранение гильбертова произведения. Но в дальнейшем мы будем рассматривать, не оговаривая это особо, только конечномерные вещественные или комплексные представления.

Представление ρ называется *точным*, если его ядро содержит только единицу e группы G : $\text{Ker } \rho = e$. Теперь легко переформулировать определение линейной группы:

- группа Ли называется *линейной*, если существует ее точное конечномерное представление.

Здесь мы не уточняем, что отображение ρ должно быть гладким, — можно показать, что это выполнится автоматически.

Общее определение линейности группы для всех групп следующее: группа G *линейна*, если она изоморфна подгруппе группы $GL(n)$ для какого-то значения n .

Два представления $\rho_1 : G \rightarrow GL(V)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(W)$ называются *эквивалентными*, если существует такое обратимое линейное преобразование

$$A : V \rightarrow W,$$

что для всех $g \in G$ выполняется равенство

$$A \rho_1(g) = \rho_2(g) A : V \rightarrow W.$$

В дальнейшем при подсчете или перечислении различных представлений мы не будем различать эквивалентные представления.

Подпространство $V' \subset V$ называется *инвариантным* (относительно представления ρ), если

$$\rho(g)V' \subset V'$$

для всех $g \in G$. Простые примеры нетривиальных инвариантных подпространств получаются в результате суммирования представлений. А именно, представление $\rho_1 \oplus \rho_2$ называется *прямой суммой представлений* $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$, если оно имеет вид

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = (\rho_1(g), \rho_2(g)) \in GL(V_1) \times GL(V_2) \subset GL(V_1 \oplus V_2),$$

где вложение $GL(V_1) \times GL(V_2) \subset GL(V_1 \oplus V_2)$, попросту говоря, реализуется блочными матрицами. В этом случае подпространства V_1 и V_2 являются инвариантными для представления $\rho_1 \oplus \rho_2$.

Представление называется *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных (т. е. отличных от нулевого и всего пространства V) инвариантных подпространств. Важность этого определения, например, для унитарных представлений, показывает следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Каждое унитарное представление ρ разлагается в прямую сумму неприводимых:*

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведем его индукцией по $\dim V$, причем размерность берется над \mathbb{R} для вещественных представлений и над \mathbb{C} — для комплексных. Для $\dim V = 1$ утверждение очевидно, и предположим, что оно доказано для $\dim V < k$.

Пусть $\rho : G \rightarrow GL(V)$ — представление с $\dim V = k$. Если V не содержит инвариантных подпространств, то ρ неприводимо и все доказано. Пусть V_1 — нетривиальное инвариантное подпространство и V_1^\perp — его ортогональное дополнение. Так как ρ унитарно, то $\rho(g)V_1^\perp \subset V_1^\perp$. Ограничения ρ на V_1 и $V_2 = V_1^\perp$ задают представления $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$, прямая сумма которых равна ρ :

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2.$$

Так как размерности V_1 и V_2 меньше k , по индуктивному предположению ρ_1 и ρ_2 разлагаются в прямые суммы неприводимых представлений. Теорема 8.1 доказана.

Из этой теоремы следует, что классификация унитарных представлений группы G сводится к классификации унитарных неприводимых представлений G .

Следующая теорема проста, но имеет фундаментальные следствия.

Теорема 8.2 («Лемма Шура»). *Пусть $\rho_1 : G \rightarrow GL(V)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(W)$ — неприводимые представления, связанные соотношением*

$$A \rho_1 = \rho_2 A, \tag{8.1}$$

где $A : V \rightarrow W$ — линейное преобразование. Тогда выполняется одна из двух возможностей:

- 1) $A = 0$;
- 2) A изоморфизм.

Если представления комплексны и $\rho_1 = \rho_2$, то A является оператором умножения на постоянную $\lambda \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из (8.1) немедленно следует, что ядро $\text{Ker } A$ преобразования A инвариантно относительно ρ_1 , а его образ $\text{Im } A$ инвариантен относительно ρ_2 . Так как эти представления неприводимы, то

либо $\text{Ker } A = V$ и тогда $A = 0$, либо $\text{Ker } A = 0$ и тогда $\text{Im } A = W$ и A — изоморфизм.

Если представления комплексны, то A имеет собственный вектор $v \in V: Av = \lambda v$. Если $\rho_1 = \rho_2$, то оператор $A - \lambda E_V$, где $E_V: V \rightarrow V$ — тождественное преобразование, удовлетворяет соотношению типа (8.1)

$$(A - \lambda E_V)\rho_1 = \rho_1(A - \lambda E_V).$$

Так как $\text{Ker } (A - \lambda E_V) \neq 0$, то $A - \lambda E_V = 0$. Теорема 8.2 доказана.

Следствие 8.1. *Если группа коммутативна, то все ее неприводимые комплексные представления одномерны.*

Доказательство.

Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ — неприводимое представление и $h \in G$. Тогда для всех $g \in G$ выполняется соотношение

$$\rho(h)\rho(g) = \rho(g)\rho(h).$$

Мы заключаем, что оператор $\rho(h)$ является умножением на постоянную λ_h для каждого $h \in G$ и, так как это представление неприводимо, $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. Следствие 8.1 доказано.

Для вещественных представлений утверждение следствия неверно. Примером является двумерное представление группы $U(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ вращений плоскости:

$$\varphi \mapsto \rho(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Преобразования $\rho(\varphi)$ не имеют собственных векторов в \mathbb{R}^2 при $\rho(\varphi) \neq \pm E_2$.

Характером представления $\rho: G \rightarrow GL(V)$, где V — векторное пространство над полем $F = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , называется функция

$$\chi_\rho: G \rightarrow F \quad : \quad \chi_\rho(g) = \text{Tr } \rho(g).$$

Из следствия 8.1 вытекает, что неприводимое комплексное представление коммутативной группы «совпадает» со своим характером.

Следующие свойства характеров хорошо знакомы из курса линейной алгебры.

Лемма 8.1. 1) $\chi_\rho(e) = \dim V$;

2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, т. е. характер определен на множестве классов сопряженных элементов;

3) если представления ρ_1 и ρ_2 эквивалентны, то их характеры совпадают: $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$;

4) если представление ρ разлагается в прямую сумму представлений ρ_1, \dots, ρ_k , то

$$\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \dots + \chi_{\rho_k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждения 1 и 4 состоят в подсчете следов блочных матриц, а утверждения 2 и 3 вытекают из очевидного тождества, верного для квадратных матриц A и B :

$$\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr} B.$$

Примеры. 1) $G = U(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Пусть φ — линейный параметр на \mathbb{R} , который задает параметр на $U(1)$, определенный по модулю 2π . Одномерные комплексные представления имеют вид:

$$\rho_n(\varphi) = e^{in\varphi},$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Характеры этих представлений «совпадают» с ними самими:

$$\chi_n(\varphi) = \chi_{\rho_n}(\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Любое из этих представлений неприводимо и, согласно следствию 8.1, каждое неприводимое комплексное представление группы $U(1)$ имеет такой вид. Так как при $n \neq m$ характеры χ_n и χ_m не совпадают, представления ρ_n и ρ_m неэквивалентны. Значит,

$$\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

есть множество всех классов эквивалентности неприводимых комплексных представлений $U(1)$. Заметим, что представления $\rho_{\pm 1}$ точны.

2) G — n -мерный тор $T^n = U(1)^n = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_n$.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — линейные параметры на сомножителях вида $U(1)$. Аналогично случаю $G = U(1)$ доказывается, что множество неприводимых комплексных представлений группы T^n имеет вид:

$$\rho_m(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \exp(i(m_1\varphi_1 + \dots + m_n\varphi_n)),$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Все эти представления попарно неэквивалентны и «совпадают» со своими характерами $\chi_{\mathbf{m}}$.

Характеры $\chi_{\mathbf{m}}$ образуют базис Фурье в пространстве периодических функций. Это не случайно — теория характеров является основой гармонического анализа, теории преобразования Фурье.

Унитарность представлений $\rho_{\mathbf{m}}$ очевидна, но верен следующий общий факт:

- любое конечномерное представление конечной группы или компактной группы Ли унитарно.

Мы дадим его доказательство для конечных групп в § 8.2 и обсудим идею доказательства общего случая, а с этого момента ограничимся унитарными представлениями.

Каждое вещественное представление ρ можно комплексифицировать следующим образом. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — пространство представления и e_1, \dots, e_n — базис в пространстве V . Положим $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_1 + \dots + \mathbb{C}e_n$ и каждому преобразованию $A : V \rightarrow V$ сопоставим преобразование $A^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$, которое в базисе $\{e_j\}$ задается той же самой матрицей, что и A . Полученное представление $\rho^{\mathbb{C}} : G \rightarrow GL(V^{\mathbb{C}})$ называется *комплексификацией представления* ρ и очевидно, что характеры ρ и $\rho^{\mathbb{C}}$ совпадают:

$$\chi_{\rho} = \chi_{\rho^{\mathbb{C}}}.$$

Поэтому впредь мы ограничимся комплексными представлениями.

Следуя традиции книг по теории представлений, мы будем в последующих двух параграфах записывать элементы матриц A , задающих одноименные линейные отображения, с двумя нижними индексами

$$A(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{jk} f_k,$$

где $A : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\{e_j\}$ — базис в \mathbb{C}^m и $\{f_k\}$ — базис в \mathbb{C}^n .

8.2. Представления конечных групп

Напомним, что с этого момента мы рассматриваем только комплексные представления.

Пусть G — конечная группа и $|G|$ означает ее порядок.

Теорема 8.3. Пусть $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ — конечномерное представление. Тогда на \mathbb{C}^n существует эрмитово произведение, которое сохраняется операторами $\rho(g)$, и, следовательно, ρ унитарно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оно основано на методе усреднения. Пусть $(\cdot, \cdot)_0$ — какое-то эрмитово произведение на \mathbb{C}^n . Определим новое эрмитово произведение как

$$(v, w) = \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0. \quad (8.2)$$

Очевидно, что $(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w)$ для всех $g \in G$. Теорема 8.3 доказана.

Применяя теорему 8.1, получаем

Следствие 8.2. Каждое комплексное представление конечной группы разлагается в прямую сумму неприводимых.

Унитарные представления обладают важным свойством.

Лемма 8.2. Если представление $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ унитарно, то

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)} \quad \text{для всех } g \in G.$$

Это утверждение верно для всех (не только конечных) групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как представление ρ унитарно, то в ортонормированном базисе в \mathbb{C}^n задающие его матрицы удовлетворяют уравнению

$$\rho(g^{-1})_{jk} = (\rho(g)^{-1})_{jk} = \overline{\rho(g)_{kj}}$$

и, следовательно, $\text{Tr } \rho(g^{-1}) = \overline{\text{Tr } \rho(g)}$. Лемма 8.2 доказана.

Обозначим через $L(G)$ пространство комплекснозначных функций на группе G . Оно изоморфно линейному пространству $\mathbb{C}^{|G|}$. Изоморфизм прост: отождествим образующие $\mathbb{C}^{|G|}$ с элементами группы и определим взаимно однозначное соответствие:

$$f \in L(G) \longleftrightarrow \sum_{g \in G} f(g) \cdot g \in \mathbb{C}^{|G|}.$$

Поэтому элементы группы задают естественный базис $\{\hat{g}\}_{g \in G}$ в $L(G)$:

$$\hat{g}(h) = \begin{cases} 1 & \text{при } h = g, \\ 0 & \text{при } h \neq g. \end{cases}$$

Группа G действует на $L(G)$ левыми и правыми сдвигами, которые обозначаются через l_h и r_h соответственно:

$$l_h : f \mapsto l_h(f) = \sum_{g \in G} f(g) \widehat{hg},$$

$$r_h : f \mapsto r_h(f) = \sum_{g \in G} f(g) \widehat{gh^{-1}},$$

или, что то же самое,

$$l_h(f)(g) = f(hg), \quad r_h(f)(g) = f(gh^{-1}).$$

Представления l_h и r_h называются *левым регулярным* и *правым регулярным* представлениями, а пространство $L(G)$ — *групповой алгеброй* (конечной) группы G .

Регулярные представления действуют на базисе $\{\widehat{g}\}$ перестановками, и такая перестановка, отвечающая $h \in G$, тождественна тогда и только тогда, когда h является единицей группы: $h = e \in G$. Отсюда следует

Теорема 8.4. *Регулярные представления точны, и поэтому любая конечная группа линейна.*

На $L(G)$ зададим эрмитово произведение

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}. \quad (8.3)$$

Базис $\{\widehat{g}\}$, $g \in G$, ортонормирован относительно этого произведения, и, так как левое и правое регулярные представления действуют на нем перестановками, верно следующее утверждение:

Лемма 8.3. *Левое и правое регулярные представления G сохраняют эрмитово произведение (8.3).*

Докажем теперь техническую лемму.

Лемма 8.4. *Пусть $\rho : G \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ и $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ — представления группы G и $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ — линейное отображение. Тогда отображение $\widehat{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, заданное формулой*

$$\widehat{A} = \sum_{g \in G} \rho(g)^{-1} A \varphi(g), \quad (8.4)$$

связывает представления ρ и φ соотношением (8.1):

$$\rho \widehat{A} = \widehat{A} \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Распишем $\rho(h) \hat{A}$:

$$\begin{aligned} \rho(h) \hat{A} &= \rho(h) \sum_{g \in G} \rho(g)^{-1} A \varphi(g) = \sum_{g \in G} \rho(h) \rho(g)^{-1} A \varphi(g) = \\ &= \sum_{g \in G} \rho(hg^{-1}) A \varphi(g) = \sum_{u=gh^{-1} \in G} \rho(u)^{-1} A \varphi(uh) = \\ &= \left(\sum_{u \in G} \rho(u)^{-1} A \varphi(u) \right) \varphi(h) = \hat{A} \varphi(h). \end{aligned}$$

Лемма 8.4 доказана.

Лемма 8.3 понадобится нам для доказательства следующей теоремы.

Теорема 8.5. Пусть $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ и $\varphi : G \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ — неприводимые представления, заданные унитарными матрицами: $\rho(g^{-1})_{jk} = \overline{\rho(g)_{kj}}$, $\varphi(g^{-1})_{jk} = \overline{\varphi(g)_{kj}}$. Тогда матричные элементы удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$(\rho_{rj}, \varphi_{sk}) = 0, \text{ если } \rho \text{ и } \varphi \text{ неэквивалентны,} \quad (8.5)$$

$$(\rho_{jk}, \rho_{rs}) = \frac{1}{n} \delta_{jk} \delta_{rs}. \quad (8.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если представления ρ и φ неэквивалентны, то, применяя лемму Шура к оператору \hat{A} , получаем $\hat{A} = 0$. Распишем теперь правую часть формулы (8.4) в матричной форме:

$$\hat{a}_{jk} = \sum_{g \in G} \sum_{r,s} \rho(g)_{jr}^{-1} a_{rs} \varphi(g)_{sk}.$$

Правая часть является линейной формой от a_{lm} и, так как она тождественно равна нулю, все коэффициенты этой формы нулевые:

$$\sum_{g \in G} \rho(g)_{jr}^{-1} \varphi(g)_{sk} = 0.$$

Если представления заданы унитарными матрицами, то это равенство принимает вид (8.5).

Докажем теперь (8.6). Для операторов $A = A^{(r,s)}$ с

$$a_{jk}^{(r,s)} = \delta_{jr} \delta_{ks}$$

найдем их усреднения \hat{A} , заданные формулой (8.4) при $\rho = \varphi$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{jk}^{(r,s)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{u,v} \rho(g^{-1})_{ju} \delta_{ur} \delta_{sv} \rho(g)_{vk} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})_{jr} \rho(g)_{sk}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 8.4 каждый из операторов $\hat{A}^{(r,s)}$ удовлетворяет тождеству (8.1):

$$\hat{A}^{(r,s)} \rho = \rho \hat{A}^{(r,s)},$$

а потому из леммы Шура следует, что он является умножением на постоянную, которая, очевидно, равна

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr} A^{(r,s)}.$$

Но при $\rho = \varphi$ след усредненного оператора совпадает со следом исходного:

$$\text{Tr} \hat{A} = \text{Tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) A \rho(g) \right) = \text{Tr} A.$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})_{jr} \rho(g)_{sk} = \delta_{jk} \delta_{rs} \frac{1}{n} \text{Tr} \hat{A}^{(r,s)} = \frac{1}{n} \delta_{jk} \delta_{rs}.$$

В случае, когда матрицы, задающие представления, унитарны, это равенство совпадает с (8.6).

Теорема 8.5 доказана.

Перейдем теперь к выводу следствий этой теоремы.

Следствие 8.3. Пусть $\rho : G \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ и $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ — неприводимые представления. Тогда

$$(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \text{ и } \varphi \text{ эквивалентны} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы вывести это следствие из теоремы 8.5, достаточно заметить, что $\text{Tr} \rho(g) = \sum_j \rho(g)_{jj}$ и что для эквивалентных представлений их характеры совпадают, после чего остается применить соотношения (8.5) и (8.6).

Следствие 8.4. Пусть

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k \quad (8.7)$$

— разложение представления ρ в прямую сумму неприводимых. Тогда число сомножителей, эквивалентных неприводимому представлению φ , равно эрмитову произведению характеров

$$(\chi_\rho, \chi_\varphi)$$

и, следовательно, разложение (8.7) единственно (с точностью до эквивалентности).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим, что

$$(\chi_\rho, \chi_\varphi) = \sum_j (\chi_{\rho_j}, \chi_\varphi)$$

и правая часть равна числу компонент ρ_j , эквивалентных φ . Это число называется кратностью вхождения φ в ρ . Следствие 8.4 доказано.

Следствие 8.5. Представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно, из предыдущего следствия 8.4 вытекает, что характер полностью определяет разложение представления на неприводимые и для каждого представления конечной группы такое разложение существует (следствие 8.2). Следствие 8.5 доказано.

Следствие 8.6. Если χ — характер представления ρ , то (χ, χ) — целое положительное число, которое равно 1 тогда и только тогда, когда представление ρ неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оно состоит в подсчете

$$(\chi, \chi) = \sum_j m_j^2,$$

где m_j — кратность вхождения неприводимого представления ρ_j в разложение ρ на неприводимые:

$$\rho = m_1\rho_1 \oplus \dots \oplus m_k\rho_k.$$

Следствие 8.6 доказано.

Следствие 8.7. *Каждое неприводимое представление группы G содержится в регулярном с кратностью, равной своей степени.*

Доказательство.

Левое и правое регулярные представления эквивалентны, что, с учетом следствия 8.5, вытекает из совпадения их характеров, которые равны

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{если } g(=e) \text{ — единица группы } G, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть теперь $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{C}, n)$ — неприводимое представление степени n . Тогда

$$(\chi_{\text{reg}}, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \chi_{\text{reg}}(e) \overline{\chi_\rho(e)} = \frac{1}{|G|} |G| n = n.$$

Следствие 8.7 доказано.

Следствие 8.8. *Порядок группы G равен сумме квадратов степеней ее неприводимых представлений.*

Доказательство.

Пусть ρ_1, \dots, ρ_k — все неприводимые представления G степеней m_1, \dots, m_k соответственно. Тогда, согласно следствию 8.7,

$$\chi_{\text{reg}} = \sum_j m_j \chi_{\rho_j},$$

и мы заключаем, что

$$(\chi_{\text{reg}}, \chi_{\text{reg}}) = |G| = \sum_j m_j^2.$$

Следствие 8.8 доказано.

Обозначим через $H(G)$ подпространство $L(G)$, образованное центральными функциями, т. е. функциями, удовлетворяющими соотношению

$$f(x) = f(yxy^{-1}) \quad \text{для всех } x, y \in G,$$

что эквивалентно

$$f(xy) = f(yx) \quad \text{для всех } x, y \in G.$$

Простейшими примерами центральных функций являются характеры (лемма 8.1).

Лемма 8.5. Пусть $f \in H(G)$ и ρ — представление G . Обозначим через A_f оператор

$$A_f = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho(g).$$

Тогда

$$A_f \rho = \rho A_f.$$

Доказательство леммы 8.5 проводится простой проверкой:

$$\begin{aligned} A_f \rho(h) &= \left(\sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho(g) \right) \rho(h) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho(gh) = \\ &= \sum_{u=gh \in G} \overline{f(uh^{-1})} \rho(u) = \sum_{u \in G} \overline{f(h^{-1}u)} \rho(u) = \\ &= \rho(h) \sum_{u \in G} \overline{f(h^{-1}u)} \rho(h^{-1}u) = \rho(h) \sum_{v=h^{-1}u} \overline{f(v)} \rho(v) = \rho(h) A_f. \end{aligned}$$

Лемма 8.5 доказана, и мы воспользуемся ей для доказательства следующего факта.

Теорема 8.6. Характеры неприводимых представлений образуют ортонормированный базис пространства $H(G)$.

Доказательство.

Пусть f — центральная функция, ортогональная ко всем характерам. Построим по ней и левому регулярному представлению ρ_{reg} оператор A_f , который, согласно лемме Шура, должен быть оператором умножения на постоянную $\lambda = \text{Tr } A_f / |G|$.

Вычислим след оператора A_f :

$$\text{Tr } A_f = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \text{Tr } \rho_{\text{reg}}(g) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \chi_{\text{reg}}(g) = (f, \chi_{\text{reg}}).$$

Из того, что как характер регулярного представления есть линейная комбинация характеров неприводимых представлений, вытекает равенство

$$(f, \chi_{\text{reg}}) = 0,$$

которое влечет

$$A_f = 0.$$

Поддействуем оператором A_f на \hat{e} и получим

$$A_f(\hat{e}) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \hat{g} = 0.$$

Функции \hat{g} линейно независимы в $L(G)$, и поэтому

$$f(g) = 0 \text{ для любого } g \in G.$$

Теорема 8.6 доказана.

Следствие 8.9. Число неприводимых представлений группы G совпадает с числом классов сопряженности ее элементов.

Доказательство.

Каждая центральная функция задается своими значениями на классах сопряженности (x и y принадлежат одному классу, если $x = gug^{-1}$ для какого-то $g \in G$), и набор этих значений может быть любым. Значит, $\dim H(G) = k$, где k — число классов сопряженности. Но из теорем 8.5 и 8.6 следует, что $\dim H(G)$ равна числу неприводимых представлений. Следствие 8.9 доказано.

Теперь следствие 8.1 усиливается следующим образом.

Следствие 8.10. Конечная группа коммутативна тогда и только тогда, когда все ее неприводимые представления одномерны.

Доказательство.

Мы имеем

$$|G| = \sum m_j^2,$$

и если все m_j равны единице, то G имеет $|G|$ различных неприводимых представлений. Отсюда следует, что каждый класс сопряженности содержит ровно один элемент, что эквивалентно коммутативности группы. Следствие 8.10 доказано.

8.3. О представлениях компактных групп

Многие утверждения, доказанные в § 8.2 для конечных групп, остаются верными для компактных групп Ли. Более того, доказательства сходны и получаются заменой суммирования по элементам из G на интегрирование — «суммирование по гладкому множеству параметров».

Для того чтобы определить интегрирование на n -мерной группе G , надо задать меру: гладкую n -форму

$$dg = f(g)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где $\{x^j\}$ — локальные координаты на G и $f(g) > 0$. Мерой множества $U \subset G$ называется значение интеграла

$$\mu(U) = \int_U dg.$$

Мера называется правоинвариантной (левоинвариантной), если форма dg инвариантна относительно правых (левых) сдвигов:

$$r_h : G \rightarrow G : g \mapsto gh \quad (l_h : G \rightarrow G : g \mapsto hg).$$

Лемма 8.6. 1) На любой группе Ли существует правоинвариантная мера, заданная гладкой n -формой.

2) На любой группе Ли существует единственная с точностью до умножения на постоянную правоинвариантная мера.

3) Правоинвариантная мера на компактной группе Ли левоинвариантна.

Доказательство.

Пусть $C \in \mathbb{R}$ и $C > 0$. Зададим форму dg в единице группы G формулой

$$dg = Cdx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

и определим ее значение в $g \in G$ как

$$dg = Cr_g^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n).$$

Очевидно, что любая правоинвариантная мера имеет такой вид и полностью определяется постоянной C . Меры, отвечающие разным постоянным, пропорциональны.

Пусть группа G компактна и мера dg правоинвариантна. Если левые сдвиги $l_h^* dg$ тоже правоинвариантны, так как левые и правые сдвиги коммутируют. Значит, $l_h^* dg = c_h dg$, где c_h — постоянная для каждого $h \in G$. Но

$$\int_G dg = \int_G l_h^* dg = c_h \int_G dg,$$

и отсюда следует, что $c_h \equiv 1$. Лемма 8.6 доказана.

Двусторонне инвариантная мера на группе G называется *мерой Хаара*.

Теорема 8.7. Пусть G — компактная группа Ли.

1) Каждое конечномерное представление $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ унитарно и разлагается в прямую сумму неприводимых.

2) Пусть $\rho : G \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ и $\varphi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ — неэквивалентные неприводимые представления, заданные унитарными матрицами. Тогда матричные элементы удовлетворяют соотношениям

$$(\rho_{rj}, \varphi_{sk}) = 0, \quad (\rho_{jk}, \rho_{rs}) = \frac{1}{m} \delta_{jk} \delta_{rs}, \quad (8.8)$$

где

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{\int_G dg} \int_G f_1(g) \overline{f_2(g)} dg. \quad (8.9)$$

Утверждение 1 доказывается, как и теорема 8.3, с заменой эрмитова произведения (8.2) на

$$(v, w) = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w) dg.$$

Утверждение 2 доказывается так же, как и его аналоги для конечных групп (теорема 8.5) с заменой (8.3) на (8.9). При этом объем группы $\int_G dg$ является аналогом порядка $|G|$ группы G .

Значительно более сложно доказывается аналог теоремы 8.4, который мы приведем без доказательства.

Теорема 8.8. Каждая компактная группа Ли имеет точное конечномерное представление и, следовательно, линейна.

Заметим, что

- существуют некомпактные группы Ли, у которых нет точных конечномерных представлений.

Обозначим через $L_2(G)$ пространство комплекснозначных функций на G , интегрируемых с квадратом:

$$(f, f) = \frac{1}{\int_G dg} \int_G |f(g)|^2 dg < \infty.$$

Таковыми являются все гладкие функции и, в частности, матричные элементы ρ_{jk} операторов, задающих представления. Соотношения (8.8) показывают, что эти матричные элементы образуют ортогональную систему.

В случае конечной группы эта система содержит ровно $|G|$ различных функций (следствие 8.8), и, так как $\dim L(G) = |G|$, то отсюда следует

Теорема 8.9. *Матричные элементы неприводимых представлений конечной группы, заданных унитарными матрицами, образуют ортогональный базис в $L(G)$.*

Если группа G не конечна, то $L_2(G)$ — бесконечномерное гильбертово пространство (с гильбертовым произведением (8.9)) и, продолжая аналогию с конечным случаем, следует ожидать, что матричные элементы порождают в каком-то разумном смысле $L_2(G)$. Это действительно так, и, чтобы уточнить это утверждение, приведем без доказательства теорему 8.11.

Но прежде введем необходимые понятия и укажем опять без доказательства следующий факт.

Теорема 8.10. *Неприводимые представления компактной группы Ли конечномерны, и их число счетно.*

Примеры. 1) *Группа $SU(2)$.* Для каждого $n \geq 0$ определим V_n как линейное пространство, образованное всеми комплексными однородными многочленами степени n от двух переменных $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Очевидно, что $\dim V_n = n + 1$ и многочлены вида $z_1^k z_2^{n-k}$, где $k = 0, \dots, n$, задают базис в V_n . Зададим представление $\rho_n : SU(2) \rightarrow GL(V_n) = GL(n + 1, \mathbb{C})$ по формуле:

$$\rho_n(g)f(z_1, z_2) = f(a_{11}z_1 + a_{12}z_2, a_{21}z_1 + a_{22}z_2),$$

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

При $n = 0$ мы получим тривиальное представление: $\rho(g) \equiv 1$, при $n = 1$ — стандартное вложение $SU(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$.

- Представления $\rho_n, n \geq 0$, — это в точности все неприводимые комплексные представления группы $SU(2)$.

Так как размерности пространств представлений различны, эти представления попарно неэквивалентны.

2) Группа $SO(3)$. Мы знаем, что $SU(2)/\{\pm 1\} = SO(3)$ (см. § 7.3). При четных значениях n представления ρ_n обладают свойством $\rho(1) = \rho(-1)$. Это означает, что они пропускаются через $SO(3)$:

$$\rho_{2k} : SU(2) \rightarrow SU(2)/\{\pm 1\} = SO(3) \rightarrow GL(2k + 1, \mathbb{C}).$$

- Представления $\rho_{2k}, k \geq 0$, — это в точности все неприводимые комплексные представления группы $SO(3)$.

Пусть $\{\rho^l\}_{l=1}^{\infty}$ — полная система неприводимых представлений группы G , а ρ_{jk}^l — матричные элементы задающих эти представления унитарных операторов.

Рядом Фурье функции $f \in L_2(G)$ называется ряд

$$f(g) \sim \sum_{l,j,k} c_{jk}^l \rho^l(g)_{jk},$$

где коэффициенты Фурье c_{jk}^l определяются формулой:

$$c_{jk}^l = \frac{1}{\sqrt{n_l}} (f, \rho_{jk}^l),$$

и n_l — степень представления ρ^l .

Теорема 8.11. 1) (Теорема Петера–Вейля.) Непрерывная функция на компактной группе G с любой степенью точности приближается линейными комбинациями функций ρ_{jk}^l : для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная линейная комбинация $\sum a_{jk}^l \rho_{jk}^l$, что

$$|f(g) - \sum a_{jk}^l \rho^l(g)_{jk}| < \varepsilon$$

для всех $g \in G$;

2) Ряд Фурье функции $f \in L_2(G)$ сходится к f в норме $L_2(G)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(f - \sum_{l \leq N} c_{jk}^l \rho^l(g)_{jk}, f - \sum_{l \leq N} c_{jk}^l \rho^l(g)_{jk} \right) = 0,$$

и, следовательно, система функций

$$\frac{1}{\sqrt{n_l}} \rho_{jk}^l$$

является полной ортонормированной системой в $L_2(G)$.

В случае $G = U(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ мы получаем обычные ряды Фурье периодических функций: матричными элементами неприводимых представлений являются характеры e^{inx} .

Для некоммутативных групп Ли функции ρ_{jk}^l имеют многочисленные приложения в математической физике [2], как и сама теория представлений (например, приложения теории конечных групп изложены в [8], а применения компактных групп Ли к теории элементарных частиц вместе с теорией представлений таких групп — в [5]).

Заметим, что матричные элементы ρ_{jk}^l удовлетворяют целому ряду специальных соотношений, вытекающих из простого тождества

$$\rho^l(gh) = \rho^l(g)\rho^l(h), \quad g, h \in G.$$

В случае, когда $\rho: SO(2) \rightarrow GL(2)$ — стандартное вложение, мы получаем тригонометрические теоремы сложения:

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

и равенство $\rho(\alpha + \beta) = \rho(\alpha)\rho(\beta)$ эквивалентно тождествам

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Для многомерных групп теоремы сложения для специальных функций (матричных элементов) выглядят значительно сложнее и вытекают из теории представлений.

Литература

- [1] Александров П. С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. Москва: Наука, 1969.
- [2] Годунов С. К., Михайлова Т. Ю. *Представления группы вращений и сферические функции*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. Москва: Наука, 1986.
- [4] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. Москва: Наука, 1978.
- [5] Жлобенко Д. П. *Компактные группы Ли и их представления*. М.: Наука, 1970.
- [6] Зорич В. А. *Математический анализ*. Москва: Наука, 1981.
- [7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука, 1976.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика*. М.: Наука, 1989.
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. Москва: Наука, 1988.
- [10] Мальцев А. И. *Основы линейной алгебры*. Москва: Наука, 1970.
- [11] Погорелов А. В. *Дифференциальная геометрия*. Москва, Наука, 1969.
- [12] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы*. М.: Наука, 1973.
- [13] Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Наука, 1969.
- [14] Постников М. М. *Группы и алгебры Ли*. М.: Наука, 1982.

- [15] Тайманов И. А. *Лекции по дифференциальной геометрии. I. Кривые и поверхности.* Новосибирск: НГУ, 1998.
- [16] Тайманов И. А. *Лекции по дифференциальной геометрии. II. Риманова геометрия.* Новосибирск: НГУ, 1998.
- [17] Тайманов И. А. *Лекции по дифференциальной геометрии. III. Дополнительные главы.* Новосибирск: НГУ, 1999.

Искандер Асанович Тайманов

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор М. А. Ложкина*

Подписано в печать 29.01.02. Формат 84 × 108¹/₃₂.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,24. Уч. изд. л. 9,32.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.
Тираж 1200 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
