

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:

Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9

ӘОЖ 531:510 (063)

КБЖ 22

Таким образом, среднее значение и дисперсия долговечности вычисляется по формулам (9), (10), (11), а закон его распределения определяется выражением (7). При этом функция надежности определяется выражением (12).

Список использованных источников

1. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — М.: Стройиздат, 1983. — 351с.
2. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. — М.: Машиностроение, 1989. — 248с.

ӘОЖ 531.3

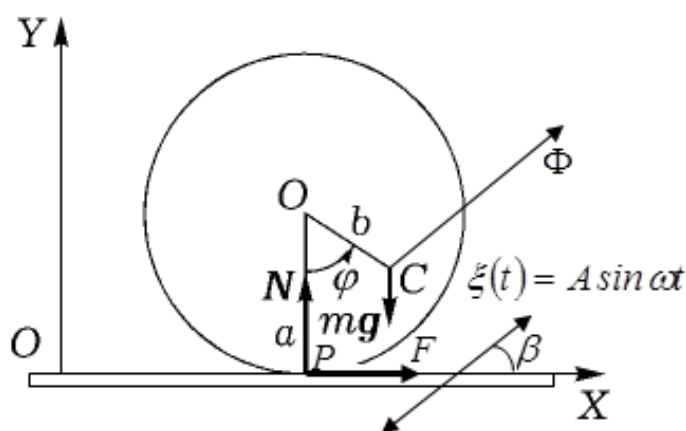
ДІРІЛДІ БЕТТІҢ МАССАЛАР ЦЕНТРІ ЫҒЫСҚАН КАТОК ДИНАМИКАСЫНА ӘСЕРІ

Берсүгір М.Ә., Айқын А.

bersugir68@mail.ru, aibek-ahmetov@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Дірілді кедір-бұдырлы беттегі массалар центрі ығысқан катоктың жазық қозғалысын қарастырайық. Айталық, жазықтық горизонтқа β бұрышымен бағытталған $\xi = A \sin(\omega \cdot t)$ заңдылығы бойынша ілгерілемелі түзусызықты гармоникалық тербеліс жасасын (сур. 1).



1-сурет – Дірілді беттегі катоктың жазық қозғалысы

Мұндағы: A , ω – тербеліс амплитудасы мен жиілігі, t – уақыт.

Дененің инерциялық қасиеті оның массасы m және массалар центріне C қатысты инерция моментімен J_C сипатталады. Дененің орны кедір-бұдырлы жазықтықпен байланысқан OXY координат жүйесіне қатысты алынған X_C, Y_C массалар центрінің координаты және φ бұрылу бұрышымен беріледі.

Қатты дененің жазықтықпен өзара әсері жазықтықтың нормаль реакция күші N және сырғанау үйкеліс күші F әсерінен (домалау үйкелісін ескермейміз) болады. Үйкелісті Амонтон-Кулон заңына бағынсын делік:

$$|F| \leq f \cdot N,$$

мұндағы f – сырғанау үйкеліс коэффициенті. Бұл жұмыста ажырамайтын қозғалысты қарастырамыз.

Сонымен қатар денеге mg ауырлық күші әсер етеді. Салыстырмалы қозғалыста барлық күштерге тасымал екінің күшін қосу қажет.

$$\Phi = m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Сонда каток қозғалысының дифференциалдық теңдеулері:

$$m\ddot{X}_C = F + \Phi \cos \beta,$$

$$m\ddot{Y}_C = N - mg + \Phi \sin \beta, \quad (1)$$

$$J_C \ddot{\varphi} = F(a - b \cos \varphi) - Nb \sin \varphi,$$

түрінде жазылады. Мұндағы m – каток массасы; X_C, Y_C – қозғалмайтын координат жүйесіне қатысты катоктың массалар центрінің координаттары; J_C – Cz өсіне перпендикуляр өске қатысты екінің моменті; φ – катоктың бұрылу бұрышы; a – катоктың радиусы; b – катоктың геометриялық центрінен оның ауырлық центріне дейінгі арақашықтық; g – еркін түсу үдеуі.

(1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін төмендегі бастапқы шарттармен бірге қарастырамыз:

$$t = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \quad (2)$$

Сырғанамай домалау шартынан қозғалыстың барлық уақытында төмендегі теңдіктің орындалатындығы шығады:

$$\dot{X}_C = -(a - b \cos \varphi) \dot{\varphi}, \quad \dot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Одан,

$$\ddot{X}_C = -(a - b \cos \varphi) \ddot{\varphi} - b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + b \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

(1) түріндегі үш дифференциалдық теңдеулер жүйесінің алдыңғы екеуінен жазықтықтың нормаль реакция күші және сырғанау үйкеліс күшінің $\varphi, \dot{\varphi}$ және $\ddot{\varphi}$ қатысты байланыстылығы шығады:

$$N = m[g + b(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2)] - \Phi \sin \beta, \quad (4)$$

$$F = -m[(a - b \cos \varphi) \ddot{\varphi} + b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2] - \Phi \cos \beta.$$

(1) түріндегі каток қозғалысының дифференциалдық теңдеулер жүйесінің үшінші теңдеуіне N және F үшін өрнегін қойып, $\varphi(t)$ бұрылу бұрышының уақытқа қатысты өзгерісін сипаттайтын теңдеуін мына түрде аламыз.

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)] \ddot{\varphi} + mb \sin \varphi (a \dot{\varphi}^2 + g) + \Phi [a \cos \beta - b \cos(\varphi - \beta)] = 0. \quad (5)$$

Белгілеу ендіріп,

$$q(t) = \frac{m}{J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)}, \quad (6)$$

(5) дифференциалдық теңдеуі мына түрге келеді.

$$\ddot{\varphi} + q(t) \{ b \sin \varphi (a \dot{\varphi}^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) [a \cos \beta - b \cos(\varphi - \beta)] \} = 0. \quad (7)$$

(7)-(2) есебін шешу үшін, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісін [2] қолданып,

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left(q(t_i) \left\{ b \sin \varphi(t_i) (a \dot{\varphi}(t_i))^2 + g \right\} + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_i) \right) \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_i) - \beta)] \left\{ \delta(t - t_i) - q(t_{i+1}) \left\{ b \sin \varphi(t_{i+1}) (a \dot{\varphi}(t_{i+1}))^2 + g \right\} + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_{i+1}) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_{i+1}) - \beta)] \right\} \delta(t - t_{i+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

теңдеуіне келеміз. Мұндағы $\delta(t)$ – Дирактың дельта функциясы.

(8) теңдеуін екі рет интегралдап, оның жалпы шешімін

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & C_1 t + C_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left(q(t_i) \left\{ b \sin \varphi(t_i) (a \dot{\varphi}(t_i))^2 + g \right\} + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_i) \right) \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_i) - \beta)] \left\{ (t - t_i) H(t - t_i) - q(t_{i+1}) \left\{ b \sin \varphi(t_{i+1}) (a \dot{\varphi}(t_{i+1}))^2 + g \right\} + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_{i+1}) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_{i+1}) - \beta)] \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

түрінде аламыз. Мұндағы $H(t)$ – Хевисайд функциясы; C_1 және C_2 – интегралдау тұрақтылары.

(2) бастапқы шарттарын пайдаланып, (9) теңдеуінің шешімін мына

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left(q(t_i) \left\{ b \sin \varphi(t_i) (a \dot{\varphi}(t_i))^2 + g \right\} + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_i) \right) \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_i) - \beta)] \left\{ (t - t_i) H(t - t_i) - q(t_{i+1}) \left\{ b \sin \varphi(t_{i+1}) (a \dot{\varphi}(t_{i+1}))^2 + g \right\} + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_{i+1}) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_{i+1}) - \beta)] \right\} (t - t_{i+1}) H(t - t_{i+1}), \end{aligned} \quad (10)$$

түрінде аламыз.

Катоктың $\varphi(t_k)$ бұрылу бұрышы мен $\dot{\varphi}(t_k)$ бұрыштық жылдамдықтың t_k мезетіндегі аналитикалық өрнектерін төмендегі алгебралық өрнектерден табамыз:

$$\varphi(t_1) = \dot{\varphi}_0 t_1 + \varphi_0,$$

$$\dot{\varphi}(t_1) = \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \\ \left. \times [\cos \beta - \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \right\}.$$

$$\varphi(t_2) = \dot{\varphi}_0 t_2 + \varphi_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \\ \left. \times [\cos \beta - \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \right\} (t_2 - t_1),$$

$$\dot{\varphi}(t_2) = \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \\ \left. \times [\cos \beta - \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \right\} - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + \right. \\ \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [\cos \beta - \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\}.$$

$$\varphi(t_3) = \dot{\varphi}_0 t_3 + \varphi_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \\ \left. \times [\cos \beta - \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \right\} (t_3 - t_1) - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + \right. \\ \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [\cos \beta - \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\} (t_3 - t_2),$$

$$\dot{\varphi}(t_3) = \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \\ \left. \times [\cos \beta - \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \right\} - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + \right. \\ \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [\cos \beta - \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\} - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \times \\ \times \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [\cos \beta - \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\}.$$

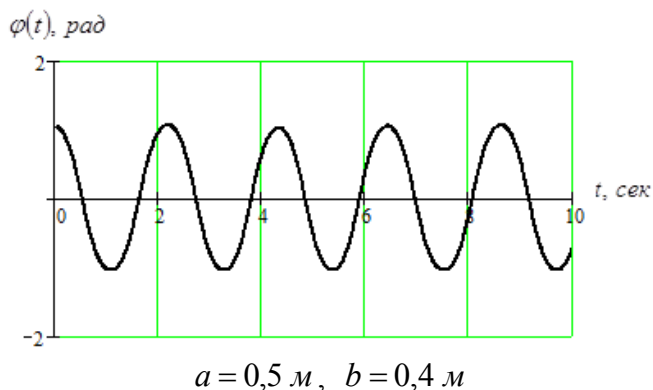
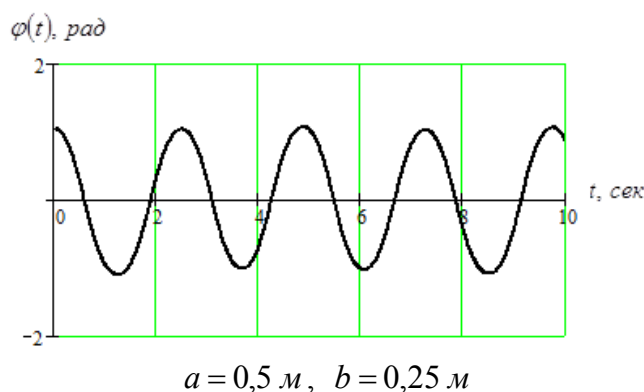
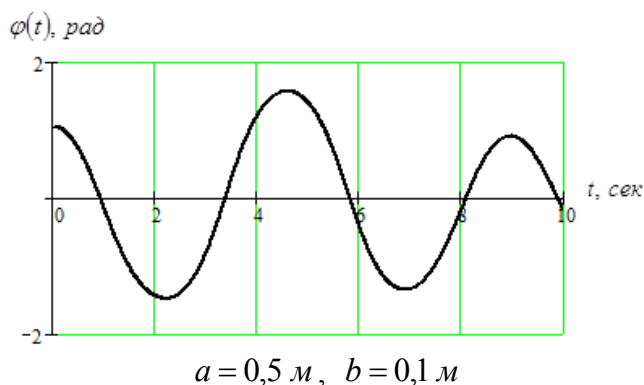
$$\begin{aligned} \varphi(t_4) = & \dot{\varphi}_0 t_4 + \varphi_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \left. \right\} (t_4 - t_1) - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\} (t_3 - t_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t_4) = & \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \left. \right\} - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\} - \frac{1}{2}(t_3 - t_1)q(t_2) \times \\ & \times \left\{ b \sin \varphi(t_2) (a \dot{\varphi}(t_2)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_2) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_2) - \beta)] \right\}. \end{aligned}$$

Математикалық индукция әдісін пайдаланып, $\varphi(t_k)$ бұрылу бұрышы мен $\dot{\varphi}(t_k)$ бұрыштық жылдамдықтың кез келген t_i ($i = \overline{1, n}$) нүктедегі өрнегін төмендегі түрде аламыз.

$$\begin{aligned} \varphi(t_j) = & \dot{\varphi}_0 t_j + \varphi_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \left. \right\} (t_j - t_1) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1})q(t_i) \left\{ b \sin \varphi(t_i) (a \dot{\varphi}(t_i)^2 + g) + \right. \quad (11) \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_i) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_i) - \beta)] \right\} (t_j - t_i), \\ \dot{\varphi}(t_j) = & \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)q(t_1) \left\{ b \sin \varphi(t_1) (a \dot{\varphi}(t_1)^2 + g) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_1) \right. \times \\ & \times [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_1) - \beta)] \left. \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^j (t_{i+1} - t_{i-1})q(t_i) \left\{ b \sin \varphi(t_i) (a \dot{\varphi}(t_i)^2 + g) + \right. \\ & \left. + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t_i) [a \cos \beta - b \cos(\varphi(t_i) - \beta)] \right\}. \end{aligned}$$

2 суретте дірілді кедір-бұдырлы бетпен сырғанамай домалаған катоктың $\varphi(t)$ бұрылу бұрышының өзгеру қисықтары келтірілген.



2-сурет – $m = 50 \text{ кг}$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ параметрлері үшін дірілді кедір-бұдырлы бетпен сырғанамай домалаған катоктың $\varphi(t)$ бұрылу бұрышының өзгеру қисықтары

Суреттен байқағанымыздай, массалар центрі катоктың геометриялық центрінен алыс орналасқан сайын $a = 0,5 \text{ м}$, $b = (0,1 \div 0,4) \text{ м}$ диапазондарында катоктың $\varphi(t)$ бұрылу бұрышының тербелісі гармоникалық сипатта, ал тербеліс амплитудасы мен периоды тұрақты.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

- 1 Маркеев А.Н. Динамика тела, соприкасающихся с твердой поверхностью. – М.: Наука, 1992.
- 2 Берсугир М.А, Бостанов Б.О. Плоское движение диска со смещенным центром масс. 2. Шероховатая опорная плоскость. Вестник ЕНУ. Ч.1. №2(111) 2016. С. 147-150.