ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

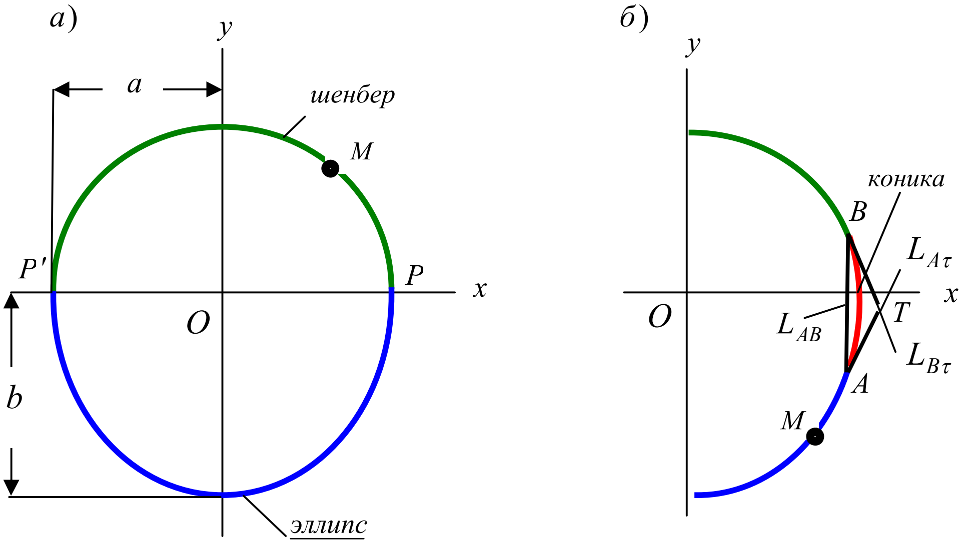
ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

ӘОЖ 621.01

ҚҰРАМАЛЫ КОНИКАЛЫҚ ТРАЕКТОРИЯЛАРДЫҢ ЖАТЫҚ ҮЗДІКСІЗДІГІ

Бостанов Б.О., Әбдірахманова І.М., Оспанов Ұ.Б.
bostanov_bayandy@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Құрамалы траектория бойымен жүретін M материалдық нүктесінің қозғалысын қарастырамыз. Траектория радиусы a болатын $x^2 + y^2 = a^2$ шеңберлік және жарты өстері a мен b болатын $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсттік доғалардан құралған. $P(a,\, 0)$ және $P'(-a,\, 0)$ түйісу нүктелері Ox горизонталь өсі бойында орналасқан (1а-сурет).



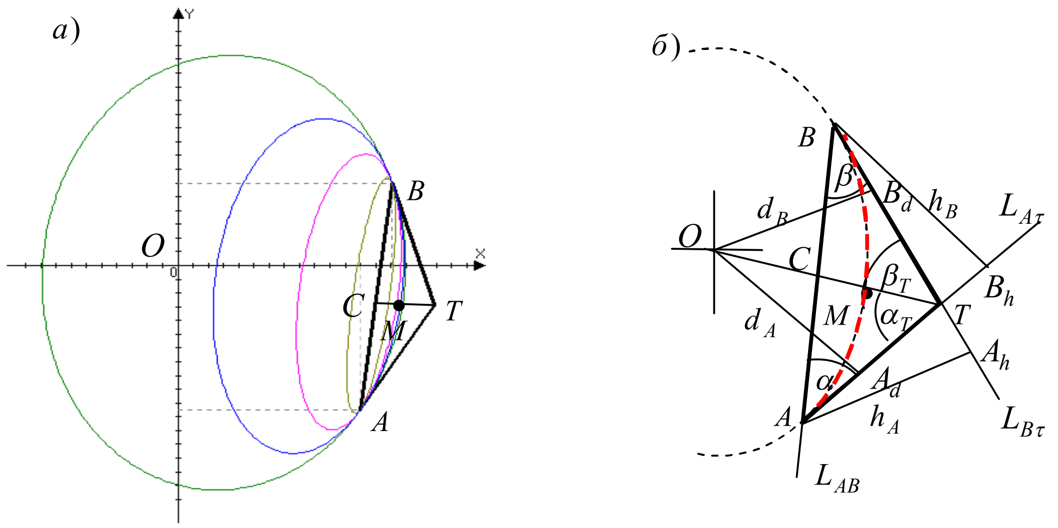
1-сурет – Құрамалы траекториямен қозғалатын нүкте

Шеңбер қисықтық радиусы кез-келген нүктесінде бірдей және радиусқа тең, яғни $\rho = a$ болатын қисық, ал эллипс болса қисықтық радиусы айнымалы болатын қисық сызық, оның қисықтық радиусы $\rho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{a^4 b^4}$ формула бойынша есептеледі.

Мысалы, егер құрамалы траектория $x^2 + y^2 = 12^2$ және $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1$ қисықтарының доғаларынан жасалған болса, онда $P(12;\, 0)$ нүктесіндегі қисықтық радиусы мына мәндерге ие болады: шеңбер үшін - $\rho_{шб} = 12$, эллипс үшін - $\rho_{эл} = 18.75$. Ал $P'(-12;\, 0)$ нүктесіндегі қисықтық радиусы да осындай мәндер қабылдайды.

Сонымен, егер эллипс доғасын радиусы жарты өстің біреуіне тең болатын шеңбер доғасымен қосатын болсақ, онда түйісу нүктесінде ортақ жанама болғанымен, қисықтық секірісі орын алады, соққы әсері туындайды.

Қозғалыстағы нүкте бір бөліктен екінші бөлікке өткен кезде центрден тепкіш күштің секірісін тудырмау үшін екі қисықтың арасын өтпелі бөлікпен жалғастырамыз. Бөлік коника доғасы ретінде алынып, мына жатықтық (екінші ретті тегістік) шарттарын қанағаттандырады (сурет 1б):



а) доға A және B түйісу нүктелері арқылы өтуі тиіс;

ә) доғалар түйіскен жерде үздіксіз бірінші туындысы болуы керек (осы нүктеде жылдамдықтары тең болады);

б) түйіскен жерде үздіксіз екінші туындысы болуы қажет (осы нүктеде қисықтық радиустары тең болады).

Лайминг әдісін [1] қолдана отырып, екі нүктесінде жүргізілген жанамалары және ол өтетін үшінші нүктесі берілген кониканың аналитикалық түрдегі өрнегін жазамыз:

$$(1-\lambda)\cdot L_{A\tau}\cdot L_{B\tau}+\lambda\cdot L_{AB}^2=0 \qquad (1)$$

Осы (1) теңдеу A және B нүктелері арқылы өтетін коникалардың шоғырын береді, мұндағы $L_{A\tau}=0$ түзуі - A нүктесі, ал $L_{B\tau}=0$ түзуі - B нүктесі арқылы өтетін жанамалар, $L_{AB}=0$ түзуі - A және B нүктелерін қосатын хорда.

Егер M нүктесінің x_M және y_M координаттары берілген болса, онда λ параметрі

$$\lambda=\frac{L_{A\tau}(x_M,y_M)L_{B\tau}(x_M,y_M)}{L_{A\tau}(x_M,y_M)L_{B\tau}(x_M,y_M)-L_{AB}^2(x_M,y_M)}$$

өрнегінен табылады.

Демек, өтпелі бөлікті сипаттайтын коника A және B түйісу (жанасу) нүктелері, жанамалардың қиылысу T нүктесі және қандай да бір M нүктесі арқылы анықталады. Базистік ΔATB үшбұрышының ішінен M нүктесін таңдай отырып, A және B түйісу нүктелерін қосатын бірінші ретті тегістіктегі үздіксіз қисықты аламыз.

2а-суретте өтпелі бөліктің (1) теңдеу бойынша салынған бірнеше нұсқалары көрсетілген. Барлық коникалар үзідіксіздік әрі жанасу шарттарын қанағаттандырады, бірақ A және B нүктелерінде қисықтық радиустары әр -түрлі болады.

Түйісудің жатықтығын қамтамасыз ететін шарттарды өрнектейтін заңдылықтарды тауып, анықтайық (2б-сурет).

2-сурет−Бірінші ретті тегістікті Лайминг қисықтары және базистік үшбұрыш

Эллипстің бойынан қисықтық радиустары ρ_A және ρ_B болатын $A(x_A,\,y_A)$ мен $B(x_B,\,y_B)$ екі нүктесін алып, олар арқылы $L_{A\tau}$ және $L_{B\tau}$ жанамаларын жүргіземіз. $L_{A\tau}$

және $L_{B\tau}$ жанамалары өзара T нүктесінде қиылысады. A, B және T нүктелерін жалғап, $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ жанамалары мен L_{AB} хордасынан құралған ΔATB базистік үшбұрышын аламыз. TC базистік үшбұрыштың медианасы.

T нүктесінде қиылысқанға дейінгі аралықтағы $L_{A\tau}$ және $L_{B\tau}$ жанамаларының ұзындықтарын $l_A = AT$, $l_B = BT$ деп, O центрінен $L_{A\tau}$ және $L_{B\tau}$ жанамаларына дейінгі арақашықтықтарды $d_A = OA_d$, $d_B = OB_d$ деп, A және B нүктелерінен $L_{A\tau}$ және $L_{B\tau}$ жанамаларына дейінгі арақашықтықтарды, $h_A = AA_h$, $h_B = BB_h$ деп, $L_{A\tau}, L_{B\tau}$ жанамалары мен AB хордасы арасындағы бұрыштарды $\alpha = \angle BAT$, $\beta = \angle ABT$ деп, $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ жанамалары мен TC медианасы арасындағы бұрыштарды $\alpha_T = \angle ATC$, $\beta_T = \angle BTC$ деп белгілейміз.

Эллипстің қандай да бір нүктедегі қисықтық радиусы оның центрінен сол нүктеден жүргізілген жанамаға дейінгі қашықтықтың кубына кері пропорционал болатыны белгілі, яғни [2] $\rho_A = \dfrac{a^2b^2}{d_A^3}$, $\rho_B = \dfrac{a^2b^2}{d_B^3}$.

Осы қатынас негізінде $\eta = \sqrt[3]{\dfrac{\rho_A}{\rho_B}} = \dfrac{d_B}{d_A}$ өлшемсіз коэффициентін енгіземіз де оны қисықтық коэффициенті деп атаймыз.

Енгізілген η қисықтық коэффициенті құрамалы траекторияның жатық түйісетін жерін анықтауда айқындаушы рөл атқаратын болады.

Екі тікбұрышты ΔOA_dT, ΔOB_dT үшбұрыштарын қарастырып, синустар теоремасын қолданамыз. Сонда

$$\frac{\sin\beta_T}{\sin\alpha_T} = \frac{d_B}{d_A} = \eta .$$

Енді синустар теоремасын ΔACT және ΔBCT үшбұрыштарына қолданамыз, сонда

$$\frac{\sin\beta_T}{\sin\alpha_T} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \eta .$$

Базистік $\Delta AT\mathrm{B}$ үшбұрышынан шығатыны

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{l_A}{l_B} = \eta .$$

Ортақ AB гипотенузасы бар ΔAA_hB және ΔAB_hB тікбұрышты үшбұрыштарынан

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{h_A}{h_B} = \eta$$

қатынасын аламыз.

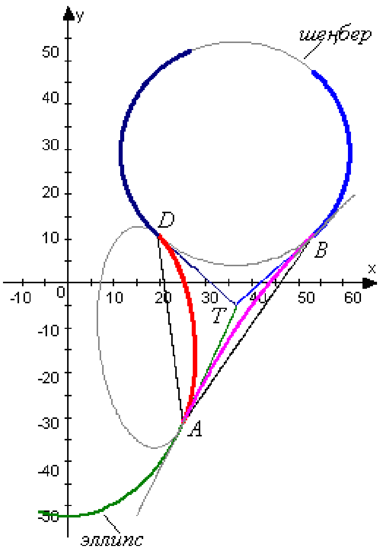
Қортындылай келе, эллипстің тағы бір қасиетін білдіретін тұжырым жасауға болады: ТҰЖЫРЫМ. Егер эллипстің бойынан қисықтық радиустары ρ_A және ρ_B болатын A және B екі нүктесін алатын болсақ, онда сол нүктелер арқылы жүргізілген $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ жанамалары мен L_{AB} хордасынан құралған ΔAEB базистік үшбұрышындағы сәйкес элементтердің арасындағы қатынастар η қисықтық коэффициентіне тең болады:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta_T}{\sin\alpha_T}=\frac{d_B}{d_A}=\frac{l_A}{l_B}=\frac{h_A}{h_B}=\eta. \qquad (2)$$

Бұл қасиет коникалар үшін ортақ.

Демек, шеңберлік және эллипстік доғаларды өтпелі коника арқылы жатық түйістіру үшін түйісу нүктелерінде (2) өрнекпен берілетін қатынастардың орындалуы шарт.

Қисықтық радиустары мен жанама ұзындықтарының өзара байланысын мысал арқылы көрсетейік.



Құрамалы траектория $(x-35)^2+(y-28)^2=24^2$ шеңбері мен $\frac{x^2}{30^2}+\frac{y^2}{50^2}=1$ эллипсінің доғасынан және өтпелі бөліктен тұрсын делік. Эллипс бойынан алынған бастапқы түйісу нүктесі $A(24;\,-30)$ және сол жердегі қисықтық радиусы $\rho_A=56.2622$ болсын (3-сурет). Доғаларды B және D нүктелері арқылы өтетін коника доғаларымен байланыстыруға болады. Бұл байланыс жатық түйісу үшін болуы керек.

$$\eta=\sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\ \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_D}}=\sqrt[3]{\frac{\rho_A}{r}}=\sqrt[3]{\frac{56.2622}{24}}=1.32$$

Екінші B және D түйісу нүктелерін кинематикалық әдіс бойынша анықтауға болады [3]:

$$B(51.3123;\ 10.3958),\ D(19.53;\ 9.9).$$

Жанамалардың қиылысу нүктесі $T(35.6459;\,-4.21)$. Анықталған нүктелер бойынша базистік ΔATB және ΔATD үшбұрыштарын салып, қабырғаларының ұзындықтарын табамыз:

3-сурет

$l_A=AT=28.2975$, $l_B=BT=21.419$, $l_D=DT=21.419$.

Тұжырым бойынша $\frac{l_A}{l_B}=\frac{l_A}{l_D}=\eta$.

Шынында да $\eta=\frac{l_A}{l_B}=\frac{l_A}{l_D}=\frac{28.2975}{21.419}=1.32$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бостанов Б.О. Условия плавного сопряжения переходного участка. Международный журнал фундаментальных и прикладных исследований, №2, часть 2, 2016, Москва, стр. 164-167.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М., 1977 г., 872 стр. с илл.
3. Темирбеков Е.С., Дудкин М.В., Бостанов Б.О. Плавное соединение вальца вибровозбудителя по заданным условиям непрерывности и касания. Материалы III международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения» 17-19 июня 2009 г. II том - Алматы: Издательство «ЭВЕРО»,2009 -С.118-122.