ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін «МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканской научно-методической конференции «АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

Тензор Грина позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние рассматриваемых сред при действии произвольных нагрузок, распределенных как по времени, так и по пространству.

Список использованных источников

1 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

2 Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград: Наука, 1978. Вып. XVIII. 248 с.

3 Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка. Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, № 4. С. 488–494

4 Payton R.G. Two–dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source. Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. Vol. 70. P. 191 – 210.

5 Закирьянова Г.К. Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды. Изв. НАН РК. Сер. физ-мат. Алматы, 1993. № 5. 15с. Деп. в ВИНИТИ 2.04.93 N 1146 -В93.

6 Ш.М. Айталиев, Л.А. Алексеева, Ш.А. Дильдабаев, Н.Б. Жанбырбаев. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: Гылым, 1992. 228 с.

7 Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. – 518 с.

8 Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Государственное изд-во физико–математической литературы, 1961. 400 с.

УДК 534.01

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗГИБНОГО КОЛЕБАНИЯ РЕЛЬСА

Ибраев А.Г., Ержанова Г.Б.,Тайбеков Т.Б.

ibrayev.askar@mail.ru

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Пусть ширина шпалы – d, а расстояние между шпалами равно h. Тогда, считая, что прогиб на шпалах равен нулю, мы можем построить следующую функцию (Рисунок 1):

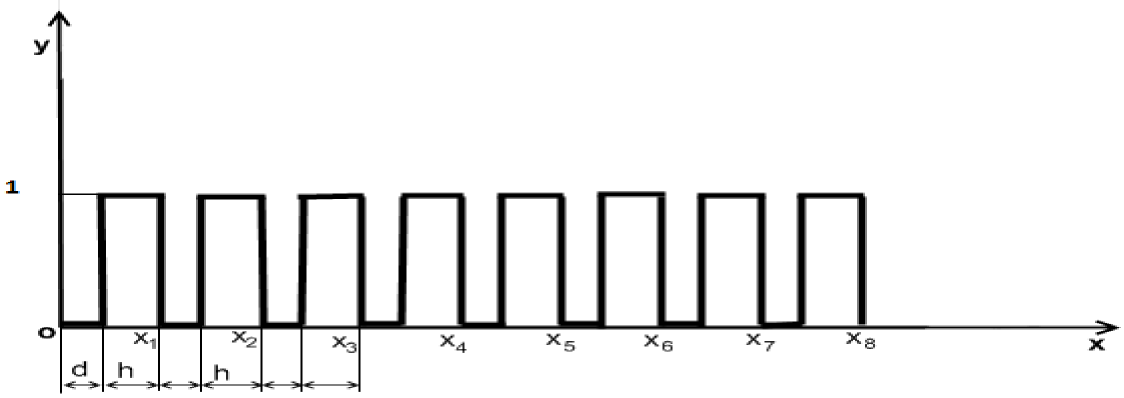

Рисунок 1

Из Рисунка 1 видно, что

$$\mathrm{H}(x - d) - \mathrm{H}(x - d - h) + \mathrm{H}(x - 2d - h) - \mathrm{H}(x - 2d - 2h) + \mathrm{H}(x - 3d - 2h) - \mathrm{H}(x - 3d - 3h) + \ldots + = \sum_{j=0} \{\mathrm{H}[(x - d) - j(d+h)] - \mathrm{H}[x - (j+1)(d+h)]\} \quad (1)$$

или обозначив $x_j = j(d+h)$ и $x_{j+1} = (j+1)(d+h)$ из (1) получим следующую функцию:

$$\sum_{j=0}[H(x-d-x_j)-H(x-x_{j+1})] \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение изгибного колебания рельса под действием подвижной нагрузки, лежащего на дискретном упругом основании, с учетом (2) запишем в следующем виде:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c\sum_{j=0}^{s}[H(x-d-x_j)-H(x-x_{j+1})]y=-\frac{\tau_k}{EJ}\delta(v_0 t-x), \tag{3}$$

где :

t – время, m – масса единицы длины рельса, x – абсцисса текущего сечения рельса, $y(x,t)$– прогиб рельса, c – жесткость шпалы, E – модуль упругости рельса, J – момент инерции поперечнего сечения рельса, s – количество шпал, v_0 – скорость движения колеса по рельсу и $\tau_k\delta(x-v_0 t)$ – сила сухого трения.

Уравнение (3) приведем к следующему виду:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{m}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\alpha\sum_{j=0}^{s}[H(x-d-x_j)-H(x-x_{j+1})]y=-\frac{\tau_k}{EJ}\delta(x-v_0 t), \tag{4}$$

где $\alpha=\dfrac{c}{EJ}$. (5)

Начальные условия:

при $t=0$, $y(x,0)=0$, $\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0$.

(6)

Граничные условия:

при $x=0$, $y(0,t)=0$, $\dfrac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2}=0$. (7)

при $x=l$, $y(l,t)=0$, $\dfrac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}=0$. (8)

Применим метод частичной дискретизации к уравнению (4) и приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{m}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=-\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}(x_k+x_{k+1})[H(x-d-x_j)-H(x-x_{j+1})]\times\\&\times[y_k\delta(x-x_k)-y_{k+1}\delta(x-x_{k+1})]-\frac{\tau_k}{EJ}\delta(x-v_0 t).\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим однородное уравнение:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{m}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{10}$$

Соответствующее собственным колебаниям решение уравнения движения (10) представляем в форме [1].

$$y(x,t)=u(x)\cos(pt+\varphi), \tag{11}$$

где $u(x)$ – амплитудная функция, p – угловая частота колебания. Подставляя (11) в уравнение (10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 u}{dx^4}-a^4 u=0, \tag{12}$$

где $a^4=\dfrac{p^2 m}{EJ}$ (13)

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (12), будут $\pm a$ и $\pm ai$. В соответствии с этим, решение однородного уравнение (12) выражается через тригонометрические и показательные функции *ax:*

$$u = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos(ax) + C_4 \sin(ax). \tag{14}$$

С учетом (11) уравнение (9) запишем в следующем виде:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - a^4 u = -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}(x_k + x_{k+1})\left[H(x-d-x_j) - H(x - x_{j+1})\right] +$$
$$+\left[u_k \delta(x - x_k) - u_{k+1}\delta(x - x_{k+1})\right] - \frac{\tau_k}{EJ}\delta(x - v_0 t)\frac{1}{\cos(pt+\varphi)}. \tag{15}$$

Используя метод вариации неопределенных коэффициентов Лагранжа, получим решение в следующем виде:

$$u(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos(ax) + c_4 \sin(ax) -$$
$$-\frac{1}{3a^3\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}(x_k + x_{k+1})\times$$
$$\times\{u_k\left[H(x_k - d - x_j) - H(x_k - x_{j+1})\right]\cdot\left[sha(x - x_k) - \sin a(x - x_k)\right]H(x - x_k) -$$
$$-u_{k+1}\left[H(x_{k+1} - d - x_j) - H(x_{k+1} - x_{j+1})\right]\cdot\left[sha(x - x_{k+1}) - \sin a(x - x_{k+1})\right]H(x - x_{k+1})\} -$$
$$-\frac{2\tau_k}{3EJa^3\cos(pt+\varphi)}\left[sha(x - v_0 t) - 2\sin a(x - v_0 t)\right]. \tag{16}$$

С учетом (16) из (11) общее решение уравнения (9) получим в следующем виде:

$$y(x,t) = \left[c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos(ax) + c_4 \sin(ax)\right]\cos(pt+\varphi) - \frac{1}{3a^3\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}(x_k + x_{k+1})\times$$
$$\times\{y_k\left[H(x_k - d - x_j) - H(x_k - x_{j+1})\right]\cdot\left[sha(x - x_k) - \sin a(x - x_k)\right]H(x - x_k) -$$
$$-y_{k+1}\left[H(x_{k+1} - d - x_j) - H(x_{k+1} - x_{j+1})\right]\cdot\left[sha(x - x_{k+1}) - \sin a(x - x_{k+1})\right]H(x - x_{k+1})\} -$$
$$-\frac{\tau_k}{3EJa^3}\left[sha(x - v_0 t) - 2\sin a(x - v_0 t)\right]. \tag{17}$$

c_1, c_2, c_3 и c_4 определим с помощью граничных условий (7) и (8).

Решение дифференциального уравнения изгибного колебания рельса под действием подвижной нагрузки (3) окончательно имеет вид:

$$y(x,t) = -\frac{\tau_k}{6EJa^3}\left[sha(x - v_0 t) - 2\sin a(x - v_0 t)\right] - \frac{1}{3a^3\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}(x_k + x_{k+1})\times$$
$$\times\{\{y_k\left[H(x_k - d - j(d+h)) - H(x_k - (j+1)(d+h))\right]\left[sha(x - x_k) - \sin a(x - x_k)\right]H(x - x_k) -$$
$$-y_{k+1}\left[H(x_{k+1} - d - j(d+h)) - H(x_{k+1} - (j+1)(d+h))\right]\left[sha(x - x_{k+1}) - \sin a(x - x_{k+1})\right]H(x - x_{k+1})\} +$$
$$+\frac{1}{2a^2}\left[\frac{sh(ax)}{sh(al)} - \frac{\sin(ax)}{\sin(al)}\right]\times$$

(18)

$$\times\{y_k\left[H(x_k - d - j(d+h)) - H(x_k - (j+1)(d+h))\right]\left[sha(l - x_k) - \sin a(l - x_k)\right]H(l - x_k) -$$
$$-y_{k+1}\left[H(x_{k+1} - d - j(d+h)) - H(x_{k+1} - (j+1)(d+h))\right]\left[sha(l - x_{k+1}) - \sin a(l - x_{k+1})\right]H(l - x_{k+1})\}\}$$

где $k = 1$

$$y_1 = -\frac{\tau_k}{6EJa^3}\left[sha(x_1 - v_0 t) - 2\sin a(x_1 - v_0 t)\right], \tag{19}$$

где $k = 2$

$$y_2 = -\frac{\tau_k}{6EJa^3}\left[sha(x_2 - v_0 t) - 2\sin a(x_2 - v_0 t)\right] -$$

$$-\frac{3}{3a^3\alpha}\sum_{j=0}^{s}\left(x_1+x_2\right)\cdot\left[H\left(x_1-d-j(d+h)\right)-H\left(x_1-(j+1)(d+h)\right)\right]\times$$
$$\times\left[sha\left(x_2-x_1\right)-2\sin a\left(x_2-x_1\right)\right]H\left(x_2-x_1\right)$$

(20)

…

$$y_k=-\frac{\tau_k}{6EJa^3}\left[sha\left(x_k-v_0t\right)-2\sin a\left(x_k-v_0t\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{3a^3\alpha}\sum_{m=1}^{k=1}\sum_{j=0}^{s}\left(x_m+x_{m+1}\right)\times$$
$$\times\left\{y_m\left[H\left(x_m-d-j(d+h)\right)-H\left(x_m-(j+1)(d+h)\right)\right]\times\right.$$
$$\times\left[sha\left(x_k-x_m\right)-\sin a\left(x_k-x_m\right)\right]H\left(x_k-x_m\right)-$$
$$-y_{m+1}\left[H\left(x_{m+1}-d-j(d+h)\right)-H\left(x_{m+1}-(j+1)(d+h)\right)\right]\times$$
$$\left.\times\left[sha\left(x_k-x_{m+1}\right)-\sin a\left(x_k-x_{m+1}\right)\right]H\left(x_k-x_{m+1}\right)\right\} \qquad (21)$$

Пользуясь методом частичной дискретизации Тюреходжаева А.Н., получено аналитическое решение изгибного колебания рельса под действием подвижной нагрузки. Также получены общие решения дифференциаального уравнения изгиба и поперечного колебания рельса.

Список использованных источников

1. В.Л Бидерман. Теория механических колебаний. Москва: «Высшая школа», 1980.
2. В.С.Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1979.
3. Piotr Antosik, Jan Mikusinski, Roman Sikorski. Theory of distributions. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam, 1973.

УДК 624.15

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СУФФОЗИОННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ГРУНТА

Исенова Ж.Ж., Мухамбеталина Д.Ж., Айтмағанбет Р.С.

zhamal_issenova56@mail.ru

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

При проектировании зданий и сооружений на карбонатных пылевато-глинистых лессовых грунтах деформация основания определяется суммированием осадки под нагрузкой от возводимого сооружения и просадок при условии возможного их замачивания. Развития в этих грунтах суффозионных деформаций нормативными документами не предполагается. Требования нормативных документов правомерны в условиях низкой влажности и стабилизированного водного и солевого режима в основании, однако практика строительства и эксплуатации показывает, что эти условия зачастую не сохраняются.

В тех случаях, когда в основании уже построенных зданий соли залегали в виде линз и прослоек неравномерно, в результате подъема уровня грунтовых вод происходило выщелачивание солей и наблюдается неравномерная суффозионная осадка.

Процессы выщелачивания и химической суффозии солей при фильтрации воды в грунтах наиболее полно рассмотрены в задачах мелиорации и орошения почв и в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных.[1] Широкое распространение получило объединенное уравнение движения и сохранения массы солей Н.Н.Веригина