ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

СЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.946

НҰҚСАНДЫ ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ГИЛЬБЕРТ КЕҢІСТІГІНДЕ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Ахметкалиева Р.Д., Ескабылова Ж.Б.
akhmetkaliyeva_rd@enu.kz, juli_e92@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің табылуы мен тегістігі мәселесі Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шенелмеген облыста [1] жұмысында зерттелген. Кейіннен бұл есеп [2-3] жұмыстарында қарастырылды. Және [4] мақаласында сызықты емес

$$Ly = -y'' + q(x,y)y$$

Штурм-Лиувилль операторының $L_1(-\infty,+\infty)$ кеңістігінде бөліктену шарттары алынды. [5-10] еңбектерінде коэффициенттері операторлар болатын

$$Ly = -\left(P(x)y'\right)' + Q(x)y, \quad x \in (-\infty,+\infty)$$

түріндегі дифференциалдық операторлардың бөліктену мәселесі зерттелді.

Жұмыста сызықты емес екінші ретті дифференциалдық

$$Ly = -y'' + [r(x,y)]y' = f(x) \qquad (1)$$

қарастырылады, мұндағы $x \in R$, r - нақты мәнді функция, $f \in L_2$.

Анықтама. Егер $y \in L_2$ функциясы үшін екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылып, кез-келген $\theta \in C_0(R)$ ($C_0(R) = C_0^{(0)}(R)$) функциясы үшін $n \to \infty$ жағдайында $\|\theta(y_n - y)\|_2 \to 0$, $\|\theta(Ly_n - f)\|_2 \to 0$ қатыстары орындалса, онда y функциясы (1) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Теорема. Айталық екі аргументі бойынша да үзіліссіз дифференциалданатын r функциясы

$$r \ge \delta_0(1 + x^2) \quad (\delta_0 > 0) \qquad (2)$$

және әрбір оң A саны үшін

$$\sup_{|x-y|\le 1} \ \sup_{|C_1|\le A, |C_2|\le A, |C_1 - C_2|\le A} \frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)} < \infty \qquad (3)$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда (1) теңдеуінің y шешімі бар және

$$\|y''\|_2 + \|[r(\cdot,y)]y'\|_2 < \infty \qquad (4)$$

қатысы орындалады.

Келесі түрдегі белгілеулерді енгізейік: $\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)}$ ($t > 0$), $\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)}$ ($\tau < 0$), $\gamma_{g,h} = \max\left(\sup\limits_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup\limits_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)\right)$, мұндағы g және h - берілген функциялар.

Лемма 1. [11] Айталық g, h функциялары $\gamma_{g,h} < \infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда $y \in C_0^{(1)}(R)$ үшін

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)y(x)|^2 dx \le C\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)y'(x)|^2 dx \qquad (5)$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен қатар, егер C (5) теңсіздігі орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда $\gamma_{g,h} \le C \le 2\gamma_{g,h}$ теңсіздіктері орынды.

[12] жұмысында дәлелденген келесі көмекші тұжырымдарды келтірейік.

$\mathbf{L}$ арқылы $C_0^{(1)}(R)$ жиынында анықталған дифференциалдық

$$\mathbf{L_0} z = -z' + rz$$

өрнегінің L_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейміз.

Лемма 2. Айталық, r функциясы

$$r \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad r \ge \delta > 0, \quad \gamma_{1,r} < \infty, \qquad (6)$$

$$c^{-1} \le \frac{r(x)}{r(\eta)} \le c, \quad |x-\eta| \le 1, \ c > 1, \qquad (7)$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $\mathbf{L}$ операторы қайтарымды және L_2 кеңістігінде бөліктенеді. Сонымен қатар, $z \in D(\mathbf{L})$ үшін келесі бағалау орындалады

$$\|z'\|_2 + \|rz\|_2 \le c\|\mathbf{L}z\|_2 .$$

$C_0^{(2)}(R)$ жиынында анықталған

$$L_0 y = -y'' + r(x)y'$$

дифференциалдық өрнегінің L_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын L арқылы белгілейік. Келесі тұжырым орынды.

Лемма 3. Айталық r функциясы

$$r \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad r \ge \delta > 0, \quad \gamma_{1,\sqrt{r}} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in D(L)$ үшін

$$\left\|\sqrt{r}y'\right\|_2 + \|y\|_2 \le c\|Ly\|_2$$

бағалауы орындалады.

Ескерту. Егер $r(x)$ функциясы комплексмәнді функция болып, (6) шартының орнына

$$r \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad \mathrm{Re}\, r \ge \delta > 0, \quad \gamma_{1,\mathrm{Re}\, r} < \infty$$

шарттары орындалса, онда 3 леммасының тұжырымы сақталады.

1 леммасынан r функциясына 4 леммада қойылған шарттардың табиғи екендігі шығады.

Келесі түрдегі

$$Ly \equiv -y'' + r(x)y' = f, \qquad f \in L_2, \qquad (8)$$

дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Егер $y(x) \in L_2(R)$ функциясы үшін n шексіздікке ұмтылғанда $\|y_n - y\|_2 \to 0, \|Ly_n - f\|_2 \to 0$ болатындай екі рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылса, онда y (8) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Лемма 4. Егер r функциясы

$$r \in C_{loc}^{(1)}(R), \quad r \ge \delta > 0, \quad \gamma_{1,\sqrt{r}} < \infty$$

шартын қанағаттандырса, онда (8) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз. Ал, егер, (6), (7) шарттары орындалса, онда (8) теңдеуінің y шешімі үшін

$$\|y''\|_2+\|ry'\|_2\le c_L\|Ly\|_2$$

бағалауы орындалады, яғни L операторы L_2 кеңістігінде бөліктенеді.

Теоремасының дәлелдеуі. Айталық ε, A оң сандар болсын. $S_A=\left\{z\in W_2^1(R):\|z\|_{W_2^1(R)}\le A\right\}$ жиынын қарастырамыз. $v\in S_A$ функциясын алып, «қобалжыған» сызықты

$$l_{0,v,\varepsilon}y\equiv -y''+\left[r(x,v(x))+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2\right]y'=f(x) \tag{9}$$

теңдеуін қарастырамыз, мұндағы $\varepsilon>0$. Дифференциалдық $l_{0,v,\varepsilon}y$ ($D(l_{0,v,\varepsilon})=C_0^{(2)}(R)$) өрнегінің L_2 кеңістігіндегі тұйықталуын $l_{v,\varepsilon}$ түрінде белгілейміз. $r_\varepsilon(x):=r(x,v(x))+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2\ge 1+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2$ болғандықтан, $r_\varepsilon(x)$ функциясы үшін (6) шарты орындалады. Әры қарай, $v\in S_A$ және $|x-\eta|\le 1$ орындалатын $x,\eta\in R$ нүктелері үшін

$$|v(x)-v(\eta)|\le|x-\eta|\|v'\|_p\le\sqrt{|x-\eta|}\|v\|_{W_2^1}\le A \tag{10}$$

бағалауын аламыз. Сол сияқты

$$\sup_{|x-\eta|\le 1}\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+\eta^2\right)^2}\le 3$$

теңсіздігінің орындалатындығын көру қиын емес. Онда $v(x)=C_1$, $v(\eta)=C_2$ деп алып (2), (3) шарттарын және (10) теңсіздігін ескерсек

$$\sup_{|x-\eta|\le 1}\frac{r_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon(\eta)}\le\sup_{|x-\eta|\le 1}\ \sup_{|C_1|\le A,|C_2|\le A,|C_1-C_2|\le A}\frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)}+3<\infty .$$

Сонымен, (9) теңдеуінің $r_\varepsilon(x)$ коэффициенті 5 леммасының барлық шарттарын қанағаттандырады екен. Онда (9) сызықты теңдеуінің y шешімі бар және ол жалғыз болады, ал $l_{v,\varepsilon}$ операторы бөліктенеді, яғни y шешімі үшін

$$\|y''\|_2+\left\|\left[r(x,v(x))+\varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2\le C_3\|f\|_2 \tag{11}$$

бағалауы орындалады. (2), (3) шарттары және (5) теңсіздігі бойынша

$$\|y\|_2\le C_0\|ry'\|_2,\ \left\|\left(1+x^2\right)y\right\|_2\le C_4\left\|\left(1+x^2\right)^2y'\right\|_2$$

бағалаулары алынады. Бұл теңсіздіктерді ескеріп, (11) бағалауынан

$$\|y''\|_2+\frac{1}{2}\left\|(1+x^2)y'\right\|_2+\frac{1}{2C_0}\|y\|_2+\frac{\varepsilon}{C_4}\left\|(1+x^2)y\right\|_2\le C_3'\|f\|_2$$

теңсіздігін аламыз. Осыдан қандай да бір $C_5>0$ табылып,

$$\|y\|_W:=\|y''\|_2+\left\|(1+x^2)y'\right\|_2+\left\|\left[1+\varepsilon(1+x^2)\right]y\right\|_2\le C_5\|f\|_2 \tag{12}$$

бағалауы орындалатыны шығады. S_A шарының A радиусын $C_5\|f\|_2$ - ке тең деп таңдап алайық. Және $P(v,\varepsilon):=L_{v,\varepsilon}^{-1}f$ белгілеуін енгіземіз. (12) бағалауына сәйкес $P(v,\varepsilon)$ операторы S_A шарын өзіне бейнелейді. Сонымен қатар, $P(v,\varepsilon)$ операторы S_A шарын $Q_A=\left\{y:\|y''\|_2+\left\|\left(1+x^2\right)y'\right\|_2+\varepsilon\left\|\left[1+\varepsilon\left(1+x^2\right)\right]y'\right\|_2\le C_5\|f\|_2\right\}$ жиынына бейнелейді. Ал Q_A жиыны

$W_2^1(R)$ С.Л. Соболев кеңістігінде компактылы. Шынында да, егер $y \in Q_A$, $h \neq 0$ және $N > 0$ болса, онда келесі екі қатыстар тізбегі орындалады:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[|y'(t+h)-y'(t)|^2+|y(t+h)-y(t)|^2\right]dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|\int_t^{t+h}y''(\eta)d\eta\right|^2+\left|\int_t^{t+h}y'(\eta)d\eta\right|^2\right]dt \le$$

$$|h|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|\int_t^{t+h}|y''(\eta)|^2d\eta\right|+\left|\int_t^{t+h}|y'(\eta)|^2d\eta\right|\right]dt=|h|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[|y''(\eta)|^2+|y'(\eta)|^2\right]d\eta \le C_5^2\|f\|_2^2|h|^2, \qquad (13)$$

және

$$\int_{|\eta|\ge N}\left[|y'(\eta)|^2+|y(\eta)|^2\right]d\eta \le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|\eta|\ge N}(1+\eta^2)^{-2}\left[|y''(\eta)|^2+(1+\eta^2)^2|y'(\eta)|^2+\varepsilon[1+\varepsilon(1+\eta^2)]^2|y(\eta)|^2\right]d\eta \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}C_5^2\|f\|_2^2(1+N^2)^{-2}. \qquad (14)$$

(13) теңсіздігінің оң жағындағы өрнек $h \to 0$ жағдайында, ал (14) теңсіздігінің оң жағындағы өрнек $N \to +\infty$ жағдайында нөлге ұмтылады. Онда белгілі Колмогоров-Фреше критерийі бойынша Q_A жиыны $W_2^1(R)$ С.Л. Соболев кеңістігінде компактылы болады. Демек $P(v,\varepsilon)$ - компактылы оператор.

$P(v,\varepsilon)$ операторының $v \in S_A$ бойынша үзіліссіз болатынын көрсетейік. Айталық $\{v_n\} \subset S_A$ тізбегі $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|v_n - v\|_{W_2^1(R)} \to 0$ болатындай тізбек болсын. Және y_n мен y сәйкесінше $L_{v,\varepsilon}y = f$, $L_{v_n,\varepsilon}y_n = f$ теңдеулерін қанағаттандырсын. Онда $P(v,\varepsilon)$ операторының анықтамасы бойынша $n \to \infty$ жағдайында $\{y_n\}$ тізбегінің $W_2^1(R)$ кеңістігі нормасы бойынша y-ке жинақталатындығын көрсетсек жеткілікті. Келесі

$$P(v_n,\varepsilon)-P(v,\varepsilon)=y_n-y=L_{v_n,\varepsilon}^{-1}\left[r(x,v_n(x))-r(x,v(x))\right]y_n'$$

теңдігін аламыз. $v(x)$, $v_n(x)$ $(n=1,2,...)$ функциялары үзіліссіз, онда теорема шарты бойынша $r(x,v_n(x))-r(x,v(x))$ функциясы да x бойынша үзіліссіз, сондықтан әрбір ақырлы $[-a,a]$ $(a>0)$ аралығында жататын x - тер үшін $n \to \infty$ ұмтылғанда

$$\|y_n-y\|_{W_2^1(-a,a)} \le c\max_{x\in[-a,a]}|r(x,v_n(x))-r(x,v(x))|\cdot\|y_n'\|_{L_2(-a,a)} \to 0 \qquad (15)$$

орындалады. Екінші жағынан 4 леммасынан

$$\{y_n\} \in Q_A, \quad \|y_n\|_W \le A, \; y \in Q_A, \quad \|y\|_W \le A$$

бағалаулары шығады. Жоғарыда біз Q_A жиынының $W_2^1(R)$ кеңістігінде компакт екенін көрсеттік. Ендеше, $\{y_n\}$ тізбегі $W_2^1(R)$ кеңістігі нормасында жинақталады. Айталық, z оның шегі болсын. $W_2^1(R)$ кеңістігінің қасиеттері бойынша

$$\lim_{|x|\to\infty}y(x)=0, \quad \lim_{|x|\to\infty}z(x)=0. \qquad (16)$$

(15) және (16) қатыстарынан $L_{v,\varepsilon}^{-1}$ операторының тұйықтығын ескеріп $y = z$ теңдігін аламыз. Сондықтан $\lim_{n\to+\infty}\|P(v_n,\varepsilon)-P(v,\varepsilon)\|_{W_2^1(R)} \to 0$, яғни $P(v,\varepsilon)$ операторы $v \in S_A$ бойынша үзіліссіз.

Сонымен, $P(v,\varepsilon)$ операторы $W_2^1(R)$ кеңістігінде жеткілікті үзіліссіз оператор және ол S_A шарын өзіне бейнелейді, онда Шаудер теоремасы бойынша S_A шарында оның жылжымайтын $y: P(y,\varepsilon)=y$ нүктесі бар болады. Бұл y нүктесі

$$L_\varepsilon y := -y'' + \left[r(x,y) + \varepsilon(1+x^2)^2\right]y' = f(x)$$

теңдеуінің шешімі болады. (19) теңсіздігі бойынша y үшін $\|y''\|_2 + \left\|\left[r(\cdot,y) + \varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2 \le C_3\|f\|_2$ бағалауы орындалады.

Енді айталық, $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ - нөлге жинақталатын оң сандар тізбегі және $P(v,\varepsilon_j) := L_{v,\varepsilon_j}^{-1} f$ болсын. $P(v,\varepsilon_j)$ операторының жылжымайтын $y_j \in S_A$ нүктесі

$$L_{\varepsilon_j} y_j := -y_j'' + \left[r(x,y_j) + \varepsilon_j(1+x^2)^2\right]y_j' = f(x)$$

теңдеуінің шешімі болады. Ол үшін

$$\|y_j''\|_2 + \left\|\left[r(x,y_j(x)) + \varepsilon\left(1+x^2\right)^2\right]y_j'\right\|_2 \le C_3\|f\|_2 \qquad (17)$$

бағалауы орындалады. Айталық, (a,b) - кездейсоқ таңдалған ақырлы аралық болсын. (17) теңсіздігін пайдаланып $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subset W_2^2(a,b)$ тізбегінен j шексіздікке ұмтылғанда $\left\|y_{\varepsilon_j} - y\right\|_{L_2[a,b]} \to 0$ болатындай $\{y_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$ тізбекшесін бөліп алуға болады. Тікелей тексеру арқылы y-тің 1 анықтамасы мағынасында (1) теңдеуінің шешімі екенін оңай көруге болады. (17) теңсіздігінде j-ді шексіздікке ұмтылдырып шекке көшіп, (4) қатысын аламыз. Теорема дәлелденді.

Теорема шарттарын, мысалы, $r_1(x,y) = 3 + 2x^4 + e^{5x} + y^2$ және $r_2(x,y) = 2 + x^2 + e^y$ функциялары қанағаттандырады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля // Тез.докладов VII-й казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механике. - Караганда, 1981. - С. 34-35.
2. Аманова Т.Т. Гладкость и аппроксимативные свойства двучленных дифференциальных операторов на бесконечном интервале: дис. … канд. физ.-мат.наук. - Алма-Ата, 1984.
3. Муратбеков М.Б. О гладкости решения вырождающихся эллиптических уравнений и нелинейного стационарного уравнения Щредингера: дис. … канд. физ.-мат. наук. - Алма-Ата, 1981. - 81 с.
4. Гриншпун Э.З., Отелбаев М. О гладкости решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля в $L_1(-\infty,+\infty)$ // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. - № 5. - С. 26-29.
5. Абудов А.А. О разделимости одного оператора, порожденного операторно-дифференциальным выражением // Спектральная теория операторов. – Баку: Элм, 1982. - С.4-11.
6. Байрамоглы М., Абудов А.А. О существенной самосопряженности оператора Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами // Спектральная теория операторов - Баку: Элм, 1982. - С. 12-20.
7. Бойматов К.Х., Шарифов А. Коэрцитивные оценки и разделимость для дифференциальных операторов произвольного порядка // Успехи математических наук. - 1989. - Т.44, вып. 3(267). - С. 147-148.
8. Mohamed A.S., Atia H.A. Separation of the Sturm-Liouville differential operator with an operator potential (English summary) // Appl. Math. Comput. - 2004. - Vol. 156, № 2. - P. 387-394.

9. Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. On the separation of elliptic differential operators with operator potentials in weighted Hilbert spaces // Panamer. Math. J. - 2005. - Vol. 15, № 2. - P. 39-47.
10. Zettl A. Separation for differential operators and the L_p spaces // Proc. Amer. Math. Soc. - 1976. - Vol. 55, № 1. – P. 44-46.
11. Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights // Stud. Math. - 1972. - Vol. 24, №1. – C. 31-38.
12. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // Centre de Recerca Matematica. UAB, Barcelona, Spain. Preprint no. 1080. December 2011. - P.1-12.

ӘОЖ 517.58

ФУРЬЕ-ХААР КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІК МОДУЛІ

Ахажанов Т.Б., Танин Ә.
talgat_a2008@mail.ru, tan_alibek@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан,
Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ, Қарағанды, Қазақстан

Айталық $f(x,y)$ функциясы $[0,1)^2$ квадратында анықталсын және $\tau=\xi\times\eta$, мұндағы

$$\xi=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1\},$$
$$\eta=\{0=y_0<y_1<\ldots<y_n=1\},$$

$[0,1)^2$ квадратының қандай да бір бөліктенуі болсын.

Анықтама 1. Берілген $f(x,y)$ функциясының τ бөліктенуі бойынша p-ретті $(1\le p<\infty)$ вариациялық қосындысы деп

$$\chi_{\tau,p}(f)=\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|f(x_k,y_l)-f(x_{k-1},y_l)-f(x_k,y_{l-1})+f(x_{k-1},y_{l-1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

шамасын айтамыз.

Бір айнымалы функциялар үшін вариациялық қосынды түсінігін Н.Винер [1] алғаш енгізді, ал екі айнымалы функциялар үшін бұл түсінікті Л.Кларксон және С.Адамс [2] енгізді.

Анықтама 2. Айталық $1\le p<\infty$ болсын. $f(x,y)$ функция үшін $1-1/p$ ретті вариациялық үзіліссіздік модулі деп

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{|\xi|\le\delta_1\\|\eta|\le\delta_2}}\chi^{p}_{\xi,\eta}(f),$$

мұндағы $|\xi|=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$, $|\eta|=\max\limits_{1\le l\le m}(y_l-y_{l-1})$,

шамасын айтамыз.

Анықтама 3. Айталық $1\le p<\infty$ болсын. Егер $f(x,y)$ функциясы үшін төмендегідей

$$V_p\left(f,[0,1)^2\right)\equiv\omega_{1-1/p}(f,1,1)=$$

$$=\sup_{\tau}\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|f(x_k,y_l)-f(x_{k-1},y_l)-f(x_k,y_{l-1})+f(x_{k-1},y_{l-1})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$