EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

4. Бостанов Б.О. Условия плавного сопряжения переходного участка. Международный журнал фундаментальных и прикладных исследований, №2, часть 2, 2016, Москва, стр. 164-167

УДК 519.83.65

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

Букенов М.М., Азимова Д.Н., Жолмагамбетова Б.Р.
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: Bukenov_M_M@mail.ru, Arfidea@mail.ru, Bakhytgulz@mail.ru

Рассмотрено применение метода фиктивных областей для среды Максвелла. Получены двусторонние оценки по малому параметру α сходимости приближенного решения к точному решению.

Ключевые слова: метод фиктивных областей, скорости-напряжения, малый параметр.

Рассмотрим динамическую задачу вязкоупругости построенную на основе модели Максвелла, в цилиндре Q={D×[0≤t≤t_1]}, где D∈ R^3ограниченная односвязная область, с достаточно гладкой границей γ. Введем $\gamma_t = \gamma \times [0, t_1]$, векторы-столбцы деформаций и напряжений : $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$,и $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23})^T$,символ T означает транспонирование, вектор- столбец скоростей $\vec{v} = (v_1 v_2 v_3)^T$. Как показано в работе [1] постановку этой задачи в скоростях-напряжениях можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R^*\vec{\sigma} = \vec{f}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t} - R\vec{v} = 0, \tag{2}$$

$$B\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + C\vec{\sigma} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}}{\partial t}, \tag{3}$$

Здесь $\vec{f}$- вектор массовых сил, $B = B^T$–симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от констант Ламе; $C = C^T$ симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от коэффициента вязкости θ, матрицы B,C – перестановочны, их вид приведен в работе [2] R-линейный матрично-дифференциальный оператор:

$$R=\begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T, \qquad R^* = -R^T,\ \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3$$

Уравнение (1) выражает закон сохранения импульса, если объемная плотность ρ≡1. Соотношение (2) является следствием соотношения перемещения - деформации:

$$\bar{\varepsilon} = R\bar{u},$$

где $\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$– вектор перемещений. Векторы перемещений $\bar{u}$ и скорости $\bar{v}$ связаны соотношением $\bar{v}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$. Соотношение (3) является уравнением состояния для вязкоупругой среды Максвелла. Решение системы (1)-(3) ищется в цилиндре Q при этом:

$$\bar{u}\,(x,0)=\bar{\varphi}\,(x), \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,0)=\bar{\psi}\,(x),\ x\epsilon D$$

u, соответственно

$$\bar{v}\,(x,0)=\vec{\psi}(x), \quad \vec{\varepsilon}(x,0)=R\bar{\varphi}\,(x) \tag{4}$$

Перемещения $\bar{u}$ (x,t) определяются из соотношения

$$\bar{u}\,(x,t)= \bar{\varphi}\,(x)+t\,\bar{\psi}\,(x)+\int_0^t (t-s)\vec{r}(x,s)ds,\ \bar{r}(x)=-R^*\vec{\sigma}$$

На боковой поверхности цилиндра Q искомое решение удовлетворяет однородному краевому условию.

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(x,t)n_k=0, \qquad (\mathrm{x,t})\in\gamma_t, \qquad (5)$$

Здесь $n_k=(n_1 n_2 n_3)^T$-вектор нормали к γ

Нахождение начальных условий для $\bar{\sigma}$(x,t)описано в работе [2].

Следуя [1]переформулируем задачу (1)-(5) в терминах напряжений, обозначим $\bar{F}$=R$\bar{f}$

$$\mathrm{B}\frac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial t^2}+C\,\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t}=-RR^*\,\bar{\sigma}+\bar{F}\ , \qquad (6)$$

$$\bar{\sigma}(\mathrm{x},0)=\bar{g}(\mathrm{x}), \quad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t}(\mathrm{x},0)=\bar{p}(\mathrm{x}), \qquad (7)$$

Задачу (5)-(7) назовем задачей I

Для задачи I верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\bar{\sigma}(\mathrm{x,t})\epsilon W_2^{2,1}(Q), \bar{g}(\mathrm{x})\epsilon \dot{W}_2^1$ (D), $\bar{p}$ (x)ϵL_2(D), $\bar{F}$(x,t)ϵL_2(Q), тогда существует решение задачи I и верна оценка.

$$||\bar{\sigma}(\mathrm{x,t})||_{W_2^{2,1}(Q)}\leq C_1(||\bar{F}\,||_{L_2(\mathrm{Q})}+\int_0^{t_1}\|\bar{g}\ (\mathrm{x})\|_{\dot{W}_2^1(D)}\mathrm{d}\tau+\|\bar{p}(\mathrm{x})\|_{L_2(D)}), \qquad (8)$$

Доказательство приведено в работе [3]

Всоответствии с методом фиктивных областей [5], [6], [3], [7] дополним исходную областьD некоторой областью D_1до составной области D_0=D∪ D_1, сграницей Г, Γ_t= Г×[0,t_1], $Q_1=D_1$ x [0,t_1] и построим вспомогательную задачу

$L_\alpha\vec{\sigma}^\alpha=\bar{F}$, (x, t) ∈Q $\qquad L_\alpha\bar{\sigma}^\alpha=0$, (x, t)∈ Q_1

$\sum_{k=1}^3(\vec{\sigma}^\alpha)_{jk}n_k$=0, (x, t)∈ $\Gamma_t\bar{\sigma}^\alpha(x,0)=0$, x∈ D_1 (9)

$\vec{\sigma}^\alpha(x,0)=\vec{g}$(x), x∈ $D\,\frac{\partial\bar{\sigma}^\alpha}{\partial t}$(x,0)=0, x∈ D_1

$\frac{\partial\bar{\sigma}^\alpha}{\partial t}$(x,0)=$\bar{p}$ (x), x∈ D

Здесь L$\bar{\sigma}$ = B$\bar{\sigma}_{tt}+C\bar{\sigma}_t+A\bar{\sigma}, \qquad A\bar{\sigma}=-RR^*\bar{\sigma}$,

$L_\alpha\bar{\sigma}^\alpha$= B${\bar{\sigma}_{tt}}^\alpha+C{\bar{\sigma}_t}^\alpha+a^\alpha A\bar{\sigma}^\alpha$,

$$a^\alpha=\begin{cases}1, & \mathrm{x}\in D\\ \alpha^{-2}, & \mathrm{x}\in D_1\,,\end{cases} \qquad \alpha>0 - \text{малый параметр.}$$

На кривой разрыва коэффициентовγ_tставим условия согласования

$$\bar{\sigma}^\alpha|_{\gamma_t}^+=\bar{\sigma}^\alpha|_{\gamma_t}^-, \frac{\partial\vec{\sigma}^\alpha}{\partial N}|_{\gamma_t}^+=\frac{M}{\alpha}\frac{\partial\vec{\sigma}^\alpha}{\partial n}|_{\gamma_t}^-, \qquad (10)$$

Знаки "+" или "-" означают стремления предельного значения функции изнутри или извне к границе γ_t . Параметр Мпринимает значение 1 или -1. Введем в расмотрения следующие ряды:

$$S_1=\sum_{k=0}^\infty\alpha^k\ \overline{V_k}\ , \text{в Q}\ , \qquad S_2=\sum_{k=1}^\infty\alpha^k\ \overline{W_k}\ \text{в}Q_1\ , \qquad (11)$$

Если подставить (11) в (9), то получим соотношения для определения $\overline{V_k}$ и $\overline{W_k}$:

$$L\bar{V}_0=\bar{F},(x,t)\in Q \qquad L_\alpha\overline{W_1}=0,(x,t)\in Q_1$$

$$\bar{V}_0(x,0)=\vec{g}(\mathrm{x}),\ \frac{\partial\bar{V}_0}{\partial t}(x,0)=\bar{p}(x),x\in D \qquad \overline{W_1}(x,0)=0,\frac{\partial\overline{W_1}}{\partial t}(x,0)=0,x\in D_1$$

$$\sum_{k=1}^3(V_0)_{ik}\,n_k=0,(x,t)\in\gamma_t \qquad \frac{\partial\overline{W_1}}{\partial n}=M\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial N}\ ,(x,t)\in\gamma_t \qquad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{3}(\bar{W}_1)_{ik}\,n_k=0,(x,t)\in\Gamma_t$$

для $k\geq 1$

$$L\bar{V}_k=0,(x,t)\in Q \qquad L_\alpha\bar{W}_{k+1}=0, \quad (x,t)\in\ Q_1$$

$$\bar{V}_k(x,0)=0, \qquad \frac{\partial\bar{V}_k}{\partial t}(x,0)=0,x\in D\ \bar{W}_{k+1}(x,0)=0, \qquad \frac{\partial\bar{W}_{k+1}}{\partial t}(x,0)=0,x\in D_1$$

$$\overline{V_k}=\overline{W_k},\ (x,t)\in\gamma_t \qquad \sum_{k=1}^3(\bar{W}_{k+1})_{ik}\,n_k=0,(x,t)\in\Gamma_t$$

Функции $\overline{V_k}\ \in\ W_2^{2,1}(Q), k=0,1\ldots\ \overline{W_k}\in W_2^{2,1}(Q_1), k=1,2,\ldots$

Теорема 2.

Если α_0 таково, что $0 < \alpha < \alpha_0$, то ряды S_1, S_2 абсолютно сходятся в $W_2^{2,1}(Q)$ и в $W_2^{2,1}(Q_1)$, и верны равенства $\overline{\sigma}^\alpha = S_1, (x,t) \in Q$, $\overline{\sigma}^\alpha = S_2, (x,t) \in Q_1$, (13), где $\overline{\sigma}^\alpha$ – решения задачи (9).

Доказательство. Ищем очевидные априорные оценки

$$\|\overline{W_k}\|_{W_2^{2,1}(Q_1)} \le C_2 \left\|\frac{\partial \overline{W_k}}{\partial n}\right\|_{W_2^{1/2,1}(\gamma_t)} \le C_2 \left\|\frac{\partial \overline{V_{k-1}}}{\partial N}\right\|_{W_2^{1/2,1}(\gamma_t)} \le C_2 C_3 \|\overline{V_{k-1}}\|_{W_2^{2,1}(Q)}, \qquad (14).$$

Где $C_2 C_3$ константы зависят от областей D, D_1 и не зависят от α.

Покажем сходимость рядов S_1 в $W_2^{2,1}(Q)$ и S_2 в $W_2^{2,1}(Q_1)$, имеем

$||\overline{V_k}||_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_4 \, ||\overline{V_k}||_{W_2^{3/2,1}(\gamma_t)} = C_4 \, ||\overline{W_k}||_{W_2^{3/2,1}(\gamma_t)} \le C_4 \, C_5 ||\overline{W_k}||_{W_2^{2,1}(Q_1)}$, используя (8),(14), получим

$$||\overline{V_k}||_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_6 \, ||\vec{V}_{k-1}||_{W_2^{2,1}(Q)}, \qquad k \ge 1$$

$$||\overline{V_0}||_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_1 \, ||\bar{F}||_{L_{2(Q)}} + \int_0^{t_1} ||\bar{g}||_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + ||\bar{p}||_{L_{2(D)}}), \qquad (15)$$

где $C_6 = C_2 C_3 C_4 \, C_5$

Полагая $\alpha < \alpha_0 = C_6^{-1}$, получим ряд S_1, абсолютно сходится в $W_{2(Q)}^{2,1}$ и соответственно ряд S_2 абсолютно сходится в $W_{2(Q_1)}^{2,1}$. Умножая (12) для $\overline{V_k}$ и $\overline{W_k}$ на α_k, и суммируя по k, имеем

$$\mathrm{L}S_1 = \bar{F}, \ (x,t) \in Q \quad L_\alpha S_2 = 0, \ (x,t) \in Q_1$$

$$S_1(x,0)=0, \frac{\partial S_1}{\partial t}(x,0)=0, \ x \in D \qquad S_2(x,0)=0, \frac{\partial S_2}{\partial t}(x,0)=0, \ x \in D$$

$$S_1 = S_2, \quad (x,t) \in \gamma_t \ \frac{\partial S_2}{\partial n} = \mathrm{M}\alpha \frac{\partial S_1}{\partial N} (x,t) \in \gamma_t \qquad (16) \ \ S_2(x,t) = 0, (x,t) \in \Gamma_t$$

Отсюда получаем $\bar{\sigma}^\alpha = S_1$ в Q, $\bar{\sigma}^\alpha = S_2$ в Q_1, если $0 < \alpha < \alpha_0$. Из доказательства этой теоремы вытекает справедливость следующего удтверждения

$$||\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_+^\alpha||_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_7 \, \alpha(||\bar{F}||_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} ||\bar{g}||_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + ||\bar{p}||_{L_{2(D)}})$$

$$||\bar{\sigma} - \sigma_-^\alpha||_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_7^1 \alpha(||\bar{F}||_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} ||\bar{g}||_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + ||\bar{p}||_{L_{2(D)}}) \qquad (17)$$

Здесь $\bar{\sigma}_+^\alpha = \vec{\sigma}^\alpha$, при M=1, $\bar{\sigma}_-^\alpha = \vec{\sigma}^\alpha$ при M= -1.

$\overline{\sigma}$ – решение задачи I. Далее можно сформулировать теорему дающую двусторонние оценки.

Теорема 3. Если $0 < \alpha < \alpha_0$, то справедлива оценка

$$\left\|\vec{\sigma} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_+^\alpha + \vec{\sigma}_-^\alpha)\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le C_8 \, \alpha^2(||\bar{F}||_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} ||\bar{g}||_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + ||\bar{p}||_{L_{2(D)}}), \ (18)$$

Доказательство. Используя предыдущую теорему 2, имеем

$$\bar{\sigma}_+^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{V}_k^+, (x,t) \in Q, \bar{\sigma}_-^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{W}_k^+, (x,t) \in Q_1, \qquad (19)$$

здесь $\bar{V}_k^+$, $\bar{W}_k^+$ - решение (12) при M=1.

В соответствии с теоремой 2 представим $\vec{\sigma}_-^\alpha$ в виде

$$\bar{\sigma}_-^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{V}_k^-, \qquad (x,t) \in Q, \bar{\sigma}_+^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{W}_k^-, \qquad (x,t) \in Q_1, \quad (20)$$

здесь $\bar{V}_k^-$, $\bar{W}_k^-$ - решения (12) при M= -1.

Получаем $\bar{V}_0^+ \equiv \bar{V}_0^- \equiv \bar{\sigma}$ - решение задачи I.

Введем обозначения $\bar{W}_1 = \bar{W}_1^+ + \bar{W}_1^-$, функция $\bar{W}_1$ удовлетворяет следующей задачи

$$L_\alpha \overline{W}_1 = 0,\ \ (x,t) \in Q_1 \qquad\qquad \frac{\partial \overline{W_1}}{\partial n} = 0,\ \ (x,t) \in \gamma_t$$

$$\overline{W}_1(x,0) = 0,\ \ \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ x \in D_1 \qquad \overline{W}_1(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \Gamma_t$$

отсюда получим $\overline{W}_1 = 0,$ или$\overline{W}_1^+ = -\overline{W}_1^-$

Далее введем $\overline{V}_1 = \overline{V}_1^+ + \overline{V}_1^-$, функция $\overline{V}_1$ удовлетворяет задаче

$$\mathrm{L}\vec{V}_1 = 0, (x,t) \in Q\vec{V}_1(x,0) = 0, \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in D$$

$$\overline{V}_1(x,t) = 0,\ \ (\mathrm{x,t}) \epsilon \gamma_t$$

откуда имеем $\overline{V}_1 = 0,$ или $\overline{V}_1{}^+ = -\overline{V}_1{}^-$

Последовательно вводя $\overline{W_2} = \overline{W_2}^+ + \overline{W_2}^-, \overline{V}_2 = \overline{V}_2{}^+ + \overline{V}_2{}^-$, получим $\overline{W_2}^+ = \overline{W_2}^-, \overline{V}_2{}^+ = \overline{V}_2{}^-$, продолжая этот процесс придем $\overline{V_k}^+ = \overline{V_k}^-$, если к – четно,$\overline{V_k}^+ = -\overline{V_k}^-$ если к – нечетно (21). Используя (21) подставив (19),(20), имеем

$$\overline{\sigma}_+^\alpha = \overline{\sigma} + \alpha \overline{V}_1{}^+ + \alpha_2 \overline{V}_2{}^+ + \cdots$$

$$\overline{\sigma}_-^\alpha = \overline{\sigma} - \alpha \overline{V}_1{}^+ + \overline{V}_2{}^+ + \cdots$$

Применяя разложения (22), а также оценку (17) при 0 <α $< \alpha_1$, получим

$$\left\|\overline{\sigma} - \frac{1}{2}(\overline{\sigma}_+^\alpha + \overline{\sigma}_-^\alpha)\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le \alpha^2 \left\|\overline{V}_2{}^+ + \alpha^2 \overline{V}_4{}^+ + \cdots\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le\le C_8 \alpha^2 \left\|\overline{V}_0{}^+\right\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le$$

$$C_9\, \alpha^2 \left\|\overline{F}\right\|_{L_2(Q)} + \int_0^{t_1} \left\|\overline{g}\right\|_{\dot{W}_2^1(D)} \mathrm{dt} + \left\|\overline{p}\right\|_{L_{2(D)}})$$

Литература

[1]. Букенов М.М. Постановка динамической задачи линейной вязкоупругости в скоростях напряжений РАН. Сиб.отделение – Новосибирск, Сибирский журнал вычислительной математики, 2005.-т.8, №4, С.289-295

[2]. Пацюк В.И. Стационирование динамических процессов в вязкоупругих средах: Дис… канд. физ.-мат.-наук- Новосибирск, 1982.

[3]. Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис… канд. физ.- мат.- наук- Новосибирск,1986.

[4]. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т. 1, №2, С.109-115

[5]. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1972, т. 3, №5, С.52-67.

[6]. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей. // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1975. С.191-199.

[7]. Chertova.K. Locally two-sided approximate solutions in parabolic problems. Bull. Nov. Comp. Center, 1994, Num. Anal., 6, 37-42.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ТОВАРОВ И УСЛУГ ПО ГРУППАМ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Габбасов М.Б.

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

gmarson19@gmail.com

Эластичность спроса является мощным инструментом принятия решений для бизнеса в условиях неопределенности. До сих пор этот инструмент не находит широкого применения на практике из-за отсутствия достаточно точных методов расчета эластичности и из-за сложности сбора необходимых данных для расчета. Предлагаемая методология описывает методику расчета эластичности спроса на товары и услуги по группам потребителей услуг и товаров. Методика определения эластичности основана на балансовой модели определения эластичности, на предположении о неизменности вкусов потребителей при пропорциональном росте доходов и цен и позволяет рассчитывать:

1) прямую эластичность спроса по цене,