EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция
«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»
3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция
«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»
3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника принимали участие:
Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9 ӘОЖ 004+519+316
КБЖ 22.1

$$arctg(2^{\sin x}) = \frac{3}{4}n, n \in Z$$

$$2^{\sin x} = tg\left(\frac{3}{4}n\right), n \in Z$$

$$\log_2(2^{\sin x}) = \log_2\left(tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right), n \in Z$$

$$\sin x = \log_2\left(tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right), n \in Z$$

$$x = (-1)^k \arcsin\log_2\left(tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right) + \pi k, k \in Z$$

Жауабы: $(-1)^k \arcsin\log_2\left(tg\left(\frac{3}{4}n\right)\right) + \pi k, k \in Z$

Оқушылардың тұлғалық қасиеттерін есте ұстау, әртүрлі типті тапсырмаларды қолданып, олардың әрбіреуіндегі танымдық әрекеттерді саралау болып табылады.

Оқыту үрдісі кезінде мұғалімнің оқушылардың танымдық қызығушылықтарын оятуы, жақсартуы және дамытуы оның өз пәнінің мазмұнын бай, терең, қызықты етіп және оқушылардың танымдық әрекеттерінің тәсілдерін әртүрлі, шығармашылық және нәтижелі етіп жасай білуінде айқындалады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. 3000 конкурсных задач по математике. 2-е изд.,испр. И доп. – М.:Рольф, Айрис-пресс, 1998. – 624с.
2. Оқушының логикалық ойлауын дамыту. Алип А. (ғылыми жетекшісі: Мусайбеков Р.К., ак. доцент, ж.ғ.м. Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау қ-сы «Х студенттердің ғылым апталығына» арналған ғылыми – практикалық конференцияның материалдары, I том, Көкшетау 2018.
3. Кривоногов В.В., Нестандартные задания по математике: 5-11 классы. – М.: Издательство «Первое сентября», 2003.-224с.: ил.

УДК 517.957

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Мырзакул А.Р., Нугманова Г.Н.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: akbota.myrzakul@gmail.com, nugmanovagn@gmail.com

Развитие нелинейной теории магнетизма, в свою очередь, поставило проблему построения интегрируемых обобщений уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Одно из таких обобщений с самосогласованным скалярным потенциалом было предложено в [1]. Некоторые алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [2-6]. Обобщенные уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом (ОУЛЛ-СВП) получены в работе [7], а также установлены их связь с движением кривых и поверхностей. В данной работе рассматривается ОУЛЛ-СВП.

1. Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом

ОУЛЛ-СВП имеет вид

$$\mathbf{S}_t + 0.5\mathbf{S}\wedge\mathbf{S}_{xx} + \frac{2}{a}\mathbf{S}\wedge\mathbf{W} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{W}_x + 2a\mathbf{S}\wedge\mathbf{W} = 0, \tag{1b}$$

где $\wedge$ обозначает векторное произведение и

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad \mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3), \tag{2}$$

где длина векторов $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, $\mathbf{W}^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = b$, $a, b = const$.

В большинстве случаев удобно работать с матричной формой этого уравнения, которая имеет вид

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0, \tag{3a}$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \tag{3b}$$

где, $S = \Sigma_{j=1}^{3} S_j(x,t)\sigma_j$ матричный аналог спинового вектора, W - матричный вид векторного потенциала: $W = \Sigma_{j=1}^{3} W_j(x,t)\sigma_j$, и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

матрицы Паули.

ОУЛЛ-СВП интегрируется методом обратной задачи рассеяния, и соответствующее линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{5a}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{5b}$$

где матричные пара Лакса U и V задаются как

$$\begin{aligned} U &= -i\lambda S, \\ V &= \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left(\frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a}\right)W. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $V_2 = -2iS$, $V_1 = SS_x$.

Постановка задачи: Построить решение уравнения (3) методом Хироты.

Отметим, что данное уравнение содержит две неизвестные функции $S(x,t)$ и $W(x,t)$. При $W(x,t) = 0$ уравнение (3) переходит к известному уравнению Ландау-Лифшица, достаточно изученному уже около 80 лет. В данном исследовании сложность заключается в установлении связи между решениями функций $S(x,t)$ и $W(x,t)$.

2. Билинеаризация

По алгоритму построения решения солитонного уравнения методом Хироты сначала мы должны построить так называемую билинейную форму для уравнения (3). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Утверждение 1. Билинейная форма ОУЛЛ-СВП (3) имеет вид

$$[iD_t + D_x^2](g \cdot f) - \frac{2}{a} p^* q \quad = \quad 0, \tag{7a}$$

$$D_x^2(f \cdot f) - \frac{2}{a} q^* q \quad = \quad 0, \tag{7b}$$

$$D_x(p \cdot f) - 2iag^* q \quad = \quad 0, \tag{7c}$$

$$D_x(q \cdot f) + 2iaqf \quad = \quad 0, \tag{7d}$$

где f вещественная функция, $g,\, p,\, q$ комплексные функции, операторы Хироты определяются как

$$D_x^l D_t^n f(x,t) \cdot g(x,t) = (\partial_x - \partial_{x'})^l (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x,t) \cdot g(x',t')\,|_{x=x',t=t'} \,. \tag{8}$$

Доказательство. Перепишем систему (3) в компонентах Sи W:

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a}(S^+ W_3 - S_3 W^+) \quad = \quad 0, \tag{9a}$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^- W_3 - S_3 W^-) \quad = \quad 0, \tag{9b}$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a}(S^- W^+ - S^+ W^-) \quad = \quad 0, \tag{9c}$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) \quad = \quad 0, \tag{9d}$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) \quad = \quad 0, \tag{9e}$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) \quad = \quad 0\,. \tag{9f}$$

Самосогласованный потенциал W берем в виде

$$W_3 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2, \quad W^+ = 2\varphi_1^* \varphi_2, \quad W^- = 2\varphi_1 \varphi_2^*, \tag{10}$$

где φ_1 и φ_2 являются решениями линейной системы (5). Учитывая (10), перепишем уравнения (9) в виде

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a}\left(S^+(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1^* \varphi_2\right) \quad = \quad 0, \tag{11a}$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^-(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1 \varphi_2^*) \quad = \quad 0, \tag{11b}$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{4}{a}(S^- \varphi_1^* \varphi_2 - S^+ \varphi_1 \varphi_2^*) \quad = \quad 0, \tag{11c}$$

$$\varphi_{1x} - ia(S_3 \varphi_1 + S^- \varphi_2) \quad = \quad 0, \tag{11d}$$

$$\varphi_{2x} - ia(S^+ \varphi_1 - S_3 \varphi_2) \quad = \quad 0. \tag{11e}$$

Используя обычный метод возмущений, рассмотрим стереографическое преобразование

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}, \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}, \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \tag{12}$$

Отсюда имеем, что

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}. \tag{13}$$

Таким образом уравнения (11) перепишем в виде

$$i\omega_t - \omega_{xx} + \frac{2\omega^* \omega_x^2}{1+|\omega|^2} + \frac{2}{a}(\omega\varphi_2^* + \varphi_1^*)(\omega\varphi_1 - \varphi_2) \;=\; 0, \tag{14a}$$

$$\varphi_{1x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}\Big((1-|\omega|^2)\varphi_1 + 2\omega^*\varphi_2\Big) \;=\; 0, \tag{14b}$$

$$\varphi_{2x} - \frac{ia}{1+|\omega|^2}\Big(2\omega\varphi_1 - (1-|\omega|^2)\varphi_2\Big) \;=\; 0. \tag{14c}$$

Теперь преобразуем (14) к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты [13]. Для этого используем замену:

$$\omega = \frac{g}{f}, \tag{15}$$

а функции φ_1 и φ_2 зададим в виде

$$\varphi_1 = \frac{p}{f}e^{iax}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{f}e^{iax} \tag{16}$$

и найдем уравнения, которым удовлетворяют f, g, φ_1 и φ_2. Подставляя (15) и (16), с учетом (8) дальнейшее преобразование уравнений (14) позволяет получить билинейную форму (7) для уравнений (11). Утверждение 1 доказано.

3. Солитонное решение

Используя билинейную форму (7), теперь мы можем построить солитонное решение для спиновой системы. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Утверждение 2. Односолитонное решение уравнения (11) для спиновой матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2\left(1 - \dfrac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2}\right)e^{i\theta}}{\left(1 - \dfrac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2}\right)^2 + e^{i(\theta-\theta^*)}}, \tag{17a}$$

$$S_3 = \frac{\left(1 - \dfrac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2}\right)^2 - e^{i(\theta-\theta^*)}}{\left(1 - \dfrac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2}\right)^2 + e^{i(\theta-\theta^*)}}, \tag{17b}$$

а для потенциала W:

$$W^+ = -\frac{a\left(1 - \dfrac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)}\left(\dfrac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)(l_1 + k_1^2)e^{i\theta}}{\left(1 - \dfrac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2}\right)^2}, \tag{17c}$$

$$W_3 = \frac{\left(1-\frac{a(l_1+k_1^2)}{(k_1-k_1^*)}\left(\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{4(k_1-k_1^*)}+a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}\frac{\left(1-\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{(k_1^*-k_1)}\left(\frac{a(l_1+k_1^2)}{4(k_1^*-k_1)}+a\right)e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}+$$

$$+\quad \frac{\left(a^2(l_1+k_1^2)(l_1^*+k_1^{*2})e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{4\left(1-\frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*)e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}, \tag{17d}$$

где $\theta = k_1x + l_1t + m_1$, k_1, l_1 и m_1 комплексные постоянные.

Доказательство. Разложим в уравнении (7) функции g, f, p и q в формальные ряды по параметру ε:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \varepsilon g_1(x,t) + \varepsilon^3 g_3(x,t) + \cdots, \\ f(x,t) &= 1 + \varepsilon^2 f_2(x,t) + \varepsilon^4 f_4(x,t) + \cdots, \\ p(x,t) &= 1 + \varepsilon^2 p_2(x,t) + \varepsilon^4 p_4(x,t) + \cdots, \\ q(x,t) &= \varepsilon q_1(x,t) + \varepsilon^3 q_3(x,t) + \cdots. \end{aligned} \tag{18}$$

N-солитонное решение исследуемого решения ищем в виде

$$g_1 = \sum_{j=1}^{N} \exp \theta_j\,, \quad \theta = k_1x + l_1t + m_1\,. \tag{19}$$

Возьмем случай N=1, при этом нетрудно убедиться, что $g_j = 0$ для $j \geq 3$ и $f_j = 0$ для $j \geq 4$ [1]. Аналогично имеем, что $q_j = 0$ для $j \geq 3$ и $p_j = 0$ для $j \geq 4$. Тогда для односолитонного случая

$$g = \varepsilon g_1,\ p = 1 + \varepsilon^2 p_2,\ q = \varepsilon q_1,\ f = 1 + \varepsilon^2 f_2. \tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в билинейную форму (7) имеем

$$ig_{1t} + g_{1xx} - \frac{2}{a}q_1 = 0, \tag{21a}$$

$$ig_{1t}f_2 - ig_1f_{2t} + g_{1xx}f_2 - 2g_{1x}f_{2x} + g_1f_{2xx} - \frac{2}{a}p_2^*q_1 = 0, \tag{21b}$$

$$f_{2xx} - \frac{1}{a}q_1^*q_1 = 0, \tag{21c}$$

$$f_2f_{2xx} - f_{2x}f_{2x} = 0, \tag{21d}$$

$$p_{2x} - f_{2x} - 2iag_1^*q_1 = 0, \tag{21e}$$

$$p_{2x}f_2 - p_2f_{2x} = 0, \tag{21f}$$

$$q_{1x} + 2iaq_1 = 0, \tag{21g}$$

$$q_{1x}f_2 - q_1f_{2x} + 2iaq_1f_2 = 0 \tag{21h}$$

Выбрав g_1 как $g_1 = e^{i\theta}$, с $\theta = k_1 x + l_1 t + m_1$, из системы уравнений (21) имеем для f_2, q_1, p_2 следующие выражения:

$$q_1 = -\frac{a}{2}(l_1 + k_1^2)e^{i\theta}, \tag{22}$$

$$f_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1 - k_1^*)^2} e^{i(\theta - \theta^*)}, \tag{23}$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)}\left(\frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a\right)e^{i(\theta - \theta^*)}. \tag{24}$$

Уравнение (12) с учетом (15) в компонентах матрицы S имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \tag{25}$$

Подставляя (20) в (25) и учитывая (22)-(24), получим решения уравнений (11) в виде (17). Утверждение 2 доказано.

Списокиспользованныхисточников
1. Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G., Lakshmanan M. A (2 + 1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233. – P. 391-396.
2. Myrzakulov R, Danlybaeva A.K, Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. – 1999. – Vol.118, - N3, - P. 441-451.
3. Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. A. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions // Journal of Mathematical Physics. – 1998. - Vol. 39, - N7. - P. 3765-3771.
4. Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical. – 1998. – Vol.31, - N47, - P. 9535-9545.
5. Zhang Zh-H., Deng M., Zhao W-Zh., Wu K. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov-I equation // arXiv:nlin/0603069 v1 [nlin.SI]. – 2006.
6. Chen Ch., Zhou Z-X. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // Chinese Physics Letters. – 2009. – Vol.26, - N8. – P. 080504.
7. Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2 + 1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // Symmetry. - 2015. - Vol. 7. - P.1352.

УДК 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

Омаровой Ж.Ж, Шалабаева Б.С
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
zhaniya.omarova@bk.ru, shalabaeva.b.s@mail.ru

1. Введение. Изучение динамики отдельных капель вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей представляет интерес для понимания многих технических задач в прошышленности. Исследование динамики дисперсных систем в различных областях является актуальнойпроблемой современной науки и техники. Пример такие системы представляют эмульсии, которые встречаются во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, строительной, автомобильной, пищевой, биотехнологии, медицине, а также в микро и нанотехнологиях. В нефтяной области эмульсии возникают практически на каждом этапе добычи, переработки и транспортировки нефтяного сырья [1].