РУХАНИ ЖАҢҒЫРУ

20 АСТАНА

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2018»
XIII Халықаралық ғылыми конференциясы

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XIII Международная научная конференция
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2018»

The XIII International Scientific Conference
for Students and Young Scientists
«SCIENCE AND EDUCATION - 2018»

12th April 2018, Astana

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2018» атты XIII Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ XIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018»

PROCEEDINGS of the XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018»

2018 жыл 12 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2018» атты студенттер мен жас ғалымдардың XIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2018» = The XIII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2018». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2018. – 7513 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-997-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-997-6

УДК. 517.51

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Оразбаев Тимур Муратбекулы
timka_1@list.ru
Магистрант механико-математического факультета
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В 1970 году Onnewer C.W. [1] сформулировал достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье-Уолша периодической *W*-непрерывной функции к самой функции. В данной статье мы расширяем этот результат на случай двойных рядов Фурье-Уолша.

Рассмотрим на интервале $I:=[0,1)$ ортонормированную систему Уолша $\{w_j(x): j\geq 0\}$ в нумерации Пэли. Пусть

$$r_0(x):=\begin{cases} 1 \; при \quad x\in[0,2^{-1}), \\ -1 при \quad x\in[2^{-1},1), \end{cases} \quad r_0(x+1):=r_0(x),$$

$$r_j(x):=r_0(2^j x), \quad j\geq 1 \text{ и } x\in I,$$

Функции $r_j(x)$ называются функциями Радемахера. Для $j=0$ положим $w_0(x)=1$. Чтобы определить $w_j(x)$ при $j\geq 1$, представим натуральное число j в двоичной записи , т.е. в виде

$$j:=\sum_{i=0}^{\infty} j_i 2^i \quad , \qquad j_i=0 \quad \text{или} \quad 1 \quad ,$$

Положим

$$w_j(x):=\prod_{i=0}^{\infty}[r_i(x)]^{j_i} \qquad .$$

При $m\geq 0$ и $0\leq j<2^m$,

$$I_m(j):=[j2^{-m},(j+1)2^{-m}).$$

Заметим, что $w_M(x)$ принимает постоянное значение на $I_m(j)$ при $2^m\leq M<2^{m+1}$.

Рассмотрим двойную систему $\{w_j(x)w_k(x): j,k\geq 0\}$ на единичном квадрате $I^2:=[0,1)\times[0,1)$. Для заданной функции $f\in L^1(I^2)$ запишем ее двойной ряд Фурье-Уолша

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} w_j(x) w_k(y)$$

(1) где

$$a_{jk}:=\int_0^1\int_0^1 f(u,v)w_j(u)w_k(v)dudv \qquad .$$

Прямоугольные частичные суммы ряда (1) определяются формулой

$$S_{MN}(f;x,y):=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_{jk} w_j(x) w_k(y) \quad , \qquad M,N\geq 1 \quad .$$

Хорошо известно , что

$$S_{MN}(f;x,y):=\int_0^1\int_0^1 f(x\dot{+}u,y\dot{+}v)D_M(u)D_N(v)dudv\,, \qquad (2)$$

где

$$D_M(u):=\sum_{j=0}^{M-1}w_j(u)$$

- ядро Дирихле, а $\dot{+}$ обозначает двоичное сложение. Для дальнейших обозначений, определений и свойств системы Уолша отсылаем на [2].

Мы будем изучать приближение суммами $S_{MN}(f):=S_{MN}(f;x,y)$ функций $f\in L^p:=L^p(I^2)$, $1\le p<\infty$ и $C_W:=C_W(I^2)$ по норме L^p и C_W соответственно . Напомним, что $C_W(I^2)$ являются совокупностью равномерно непрерывных по двоичной топологии I^2 функций $f:I^2\to R$.

Для кратности обозначение будем писать L^∞ вместо C_W и зададим нормы

$$\|f\|_p:=\left\{\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty\,,$$

$$\|f\|_\infty:=\sup\{|f(x,y)|:x,y\in I\}\ .$$

Напомним, что модуль непрерывности функции $f\in L^p$ по норме L^p при $1\le p<\infty$, определяется формулой

$$\omega_1(f;\delta_1,\delta_2)_p:=\sup\left\{\left\|f(x\dot{+}u,y\dot{+}v)-f(x,y)\right\|_p:0\le u<\delta_1\ ,\ 0\le v<\delta_2\right\},$$

Частичные модули непрерывности определяются

$\omega_{1,x}(f;\delta_1)_p:=\omega_1(f;\delta_1,0)_p$ и $\omega_{1,y}(f;\delta_2)_p:=\omega_1(f;0,\delta_2)_p$ для $\delta_1,\delta_2\ge 0$.

Определим ограниченную вариацию в смысле Харди [3] и Краузе следующим образом. Пусть даны два разбиения

$D_1:0=x_0<x_1<...<x_m=1,$

$D_2:0=y_0<y_1<...<y_n=1,$

Рассмотрим прямоугольную сетку $D:=D_1\times D_2$ на I^2 и пусть

$$D(f):=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_j,y_k)-f(x_{j+1},y_k)-f(x_j,y_{k+1})+f(x_{j+1},y_{k+1})\right|$$

где $f:I^2\to R$ произвольная функция. Определим полную вариацию f на I^2 как $\mathrm{var}(f;I^2):=\sup\{D(f)\}$, где D произвольная прямоугольная сетка на I^2. Будем говорить, что f является функцией ограниченной вариации в смысле Харди, если каждое из чисел

$\mathrm{var}(f;I^2),\ \ \mathrm{var}(f(\cdot,0);I),\ \ \mathrm{var}(f(0,\cdot);I)$

является конечным. Здесь последние две величины являются обычными вариациями функций $f(x,0)$ и $f(0,y)$ соответственно. Например

$\mathrm{var}(f(\cdot,0);I):=\sup\{D_1(f(\cdot,0)):D_1$ любое разбиение $I\}$,

$$D_1(f(\cdot,0)) := \sum_{j=0}^{m-1} \left| f(x_j,0) - f(x_{j+1},0) \right| .$$

Для $\mathrm{var}(f(0,\cdot); I)$ - аналогично .

Обозначим через BV (I^2) совокупность всех функций $f : I^2 \to R$ ограниченной вариации (по Харди). Нетрудно проверить, что с нормой заданной формулой

$$\|f\| := \left| f(0,0) + \mathrm{var}(f(\cdot,0); I) + \mathrm{var}(f(0,\cdot); I) + \mathrm{var}(f; I^2) \right|,$$

$\mathrm{BV}(I^2)$ является Банаховым пространством.

Далее для заданной периодической по обоим переменным с периодом 1 функции $f(x,y)$ и $0 \le j < 2^m$ и $0 \le k < 2^n$, $m,n \ge 0$ введем обозначения

$${}_1\Delta_j^m f(x,y) := f(x \dot{+} 2j2^{-m-1}, y) - f(x \dot{+} (2j+1)2^{-m-1}, y),$$

$${}_2\Delta_k^n f(x,y) := f(x, y \dot{+} 2k2^{-n-1}) - f(x, y \dot{+} (2k+1)2^{-n-1}),$$

$$\Delta_{jk}^{mn} f(x,y) := {}_1\Delta_j^m({}_2\Delta_k^n f(x,y)) = {}_2\Delta_k^n({}_1\Delta_j^m f(x,y)) =$$

$$= f(x \dot{+} 2j2^{-m-1}, y \dot{+} 2k2^{-n-1}) - f(x \dot{+} (2j+1)2^{-m-1}, y \dot{+} 2k2^{-n-1})$$

$$- f(x \dot{+} 2j2^{-m-1}, y \dot{+} (2k+1)2^{-n-1}) + f(x \dot{+} (2j+1)2^{-m-1}, y \dot{+} (2k+1)2^{-n-1}) .$$

Более того, положим $\lambda_0 := 1$ и $\lambda_j := j^{-1}$ для $j \ge 1$ и

$$V_m^{(1)}(f; x,y) := \sum_{j=0}^{2^m-1} \lambda_j \left| {}_1\Delta_j^m f(x,y) \right|,$$

$$V_n^{(2)}(f; x,y) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_k \left| {}_2\Delta_k^n f(x,y) \right|,$$

$$V_{mn}(f; x,y) := \sum_{j=0}^{2^m-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_j \lambda_k \left| \Delta_{jk}^{mn} f(x,y) \right| .$$

Нами доказана

Теорема. Если $f \in C_W(I^2) \cap BV(I^2)$, то двойной ряд Фурье-Уолша функции f сходится к f равномерно на I^2 .

Список использованных источников

1. Onneweer C.W. On uniform convergence for Walsh-Fourier series // Pacific J. Math. – 1970. - V.34, № 1. – P. 117-122.
2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. – М.: Наука, 1987, 344 с.
3. Hardy G.H. On double Fourier series // Quart. J. Math. – 1906. – № 37. – P. 53-79.