ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

2024
Астана

УДК 001
ББК 72
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов имолодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001
ББК 72
G99

ISBN 978-601-7697-07-5

бергені қызық. Неғұрлым сенімді түсініктеме алу үшін инерциялық координаталар жүйесінде дәл осындай интерпретацияны табу үшін қосымша зерттеулер қажет [4].

Қортындылай келе, айналмалы объектілердің экваторлық жазықтығындағы жарықтың ауытқу бұрышының есептеулерін материалдық орта тәсілін қолдана отырып ұсындық(Керр өрісі). Бұл әдіс ұтымды, өйткені ол классикалық оптика гравитациялық өрістегі электромагниттік құбылыстарды зерттеу үшін Риман геометриясы сияқты қолайлы екенін көрсетеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Fock V.A. The theory of space, time and gravitation. - Pergamon Press - Macmillan Company, 1964;
2. Stewart J. Advanced General Relativity. - Cambridge University Press, 1993;
3. Alsing, P.M. American Journal of Physics. – 1998. Vol. 66. – P. 779;
4. Born, M., Wolf, E. Principles of Optics, 7th edn. - Cambridge University Press. 1999.

УДК 531.314.3

ГАМИЛЬТОНОВ АНАЛИЗ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Тулеубекова Диана Оразалыевна
diatululu@gmail.com
Магистрант 2 курса кафедры «Общей и теоретической физики» физико-технического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – П.Ю. Цыба

Гамильтонов формализм – это один из важнейших инструментов в теоретической физике, который позволяет описывать динамику системы в терминах гамильтониана и канонических уравнений движения.

В основе Гамильтонова формализма лежит принцип Гамильтона, который утверждает, что динамика системы может быть описана через функцию, называемую гамильтонианом, определенную на фазовом пространстве системы. Гамильтониан зависит от обобщенных координат и соответствующих им обобщенных импульсов, которые являются каноническими переменными системы.

Преимущество Гамильтонова формализма заключается в том, что он позволяет выразить уравнения движения системы в более компактной и элегантной форме, чем в Лагранжевом формализме.

Гамильтонов формализм применим только в не особенной теории, но и, например, в теориях гравитации, которые являются вырожденными, то есть теориями со связями. В таких теориях Гамильтонов формализм требует более тщательного анализа и учета геометрических свойств пространства-времени.

В Гамильтоновом формализме для определения сопряженных импульсов используется матрица Гессе, а также для решения уравнений Гамильтона, которые связывают сопряженные импульсы с обобщенными координатами системы. Когда матрица Гессе является вырожденной, это означает, что вторые частные производные функции Лагранжа, которые составляют элементы этой матрицы, не являются линейно независимыми. В результате возникают особенности в Гамильтоновом формализме, которые могут потребовать специального подхода при решении физических задач.

Вырожденность матрицы Гессе может быть связана с особыми точками или симметриями в системе. Например, если функция Лагранжа имеет симметрию, то некоторые ее производные могут быть равными нулю, что приведет к вырожденности матрицы Гессе.

В качестве рассмотрения гамильтонова формализма в не особенной теории исследуем пример задачи из классической механики. Рассмотрим Лагранжиан

$$L = \dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - 4x^2 + x.$$

Используя переход к обобщённым координатам, перепишем лагранжиан с использованием вспомогательных скоростей v^a:

$$L = (v^1)^2 + 4(v^2)^2 - 4(q^1)^2 + q^1.$$

Исследуем матрицу Гессе для данной задачи. Получим, что

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тем самым получаем, что матрица Гессе для данной задачи является невырожденной, то есть теория является не особенной. Найдем обощенные импульсы p_a по формул

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial v^1} = 2v^1, \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial v^2} = 8v^2.$$

Далее найдем уравнение Гамильтона, используя функцию Лагранжа с полученными обобщенными импульсами:

$$H = \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_2^2}{16} + 4(q^1)^2 - q^1.$$

Получим общее решение системы уравнений Гамильтона. Запишем систему уравнений:

$$\dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2},$$
$$\dot{q}^2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{8},$$
$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1} = -8q^1 + 1,$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q^2} = 0.$$

Следующий пример рассмотрим с использованием лагранжиана вида

$$L = \dot{x}\dot{y} - xyz.$$

Запишем лагранжиан через скорости

$$L = v^1 v^2 - q^1 q^2 q^3.$$

Вычисляя элементы матрицы Гессе для данного случая, получим матрицу

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем, что определитель матрицы $\det H_{ij} = 0$, тем самым видим, что теория является особенной. Метод построения гамильтонова формализма в особенной теории будет рассмотрен в слеующем разделе.

Также рассмотрим пример неособенной теории - теорию вещественного многокомпонентного скалярного поля $\phi^a (a = 1, \dots, N)$ с массой m, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - m^2 \phi^a \phi^a\right).$$

Найдем матрицу Гессе по формуле

$$M_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\phi}^a \partial \dot{\phi}^b} = \delta_{ab}.$$

Тем самым получаем, что матрица Гессе невырождена. Введем импульсы согласно

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^a} = \dot{\phi}^a.$$

Построим гамильтониан:

$$H = \int \left[p^a \dot{\phi}^a - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - m^2 \phi^a \phi^a\right)\right]_{\dot{\phi}^a = p_a} dx,$$

$$H = \frac{1}{2}\left(p_a p_a + \partial_i \phi^a \partial_i \phi^a + m^2 \phi^a \phi^a\right).$$

Запишем уравнения Гамильтона с помощью скобок Пуассона

$$\dot{\phi}^a = \{\phi^a, H\} = p_a,$$
$$\dot{p}_a = \{p_a, H\} = -m^2 \phi^a.$$

Импульсы, сопряженные каноническим координатам:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}.$$

Поскольку матрица вторых производных лагранжиана по скоростям вырождена, уравнения нельзя решить относительно скоростей, выразив их через импульсы. Пусть ранг матрицы $\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b}$ равен m, то существует m тождеств, связывающих импульсы и координаты,

$$\phi_i(q, p) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Данные тождества называются первичными связями. Рассмотрим теперь функцию трех наборов аргументов q^a, $\dot{q}^a$ и p_a

$$H_0 = p_a \dot{q}^a - L(q^a, \dot{q}^a).$$

Вычисляя вариацию этой величины по всем аргументам как по независимым, а затем помещая ее на поверхность в пространстве переменных $(q^a, \dot{q}^a, p_a)$ получаем

$$H_0(q, p) = \{p_a \dot{q}^a - L(q^a, \dot{q}^a)\}\Big|_{p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}}.$$

Построим вариационный формализм первого порядка с гамильтонианом. Для невырожденных теорий с независимыми координатами и импульсами этот формализм заключается в варьировании относительно q и p действия

$$S[q,p] = \int dt\,\{p_a\dot{q}^a - H_0(q,p)\}.$$

В теориях с сингулярными лагранжианами надо исследовать условный экстремум этого же функционала при выполнении условий, определяемых связями. Этого достигают путем введения в функционал действия связей с неопределенными множителями Лагранжа λ^μ:

$$S[q,p,\lambda] = \int dt\,\{p_a\dot{q}^a - H_0(q,p) - \lambda^i\phi_i(q,p)\}.$$

Уравнения, получаемые варьированием этого действия, сводятся к

$$\dot{p}_a = \{p_a, H_0\} + \lambda^i\{p_a, \phi_i\};$$
$$\dot{q}^a = \{q^a, H_0\} + \lambda^i\{q^a, \phi_i\};$$
$$\phi_i = 0.$$

Однако нет уверенности в том, что полный гамильтониан в действии выписан правильно, т. е. связи согласованы с уравнениями движениями. Поэтому нужно потребовать сохранение связей, то есть

$$\dot{\phi}_i = 0, \quad \{\phi_i, H_0\} + \lambda^j\{\phi_i, \phi_j\} = 0.$$

Требование выполнения этого равенства приводит к одному из следующих вариантов:
1. $\det\{\phi_i,\phi_j\} \neq 0$. Уравнения однозначным образом определяют множители Лагранжа, подстанвока дает согласованную систему уравнений, имеющую единственное решение.
2. Среди связей существуют такие связи $\phi_i (i = 1, \dots, r \leq m)$, что $\{\phi_i,\phi_j\} = C_{ij}^k\phi_k$, где C_{ij}^k - некоторые функции фазовых координат. Тогда условие $\det\{\phi_i,\phi_j\}_{\phi=0} = 0$ приводит к r новым равенствам:

$$\chi_q = 0, \;\; \chi_q(q,p) \equiv \{\phi_q, H_0\}, \quad q = 1, \dots, r,$$

называемым вторичными связями. Поскольку фазовые координаты должны удовлетворять этим новым соотношениям, необходимо ввести их в действие с новыми неопределенными множителями. Повторив весь процесс, получим один из двух перечисленных вариантов. Подобная последовательность может закончиться только следующим образом. Обозначим полный набор N полученных связей

$$\Psi_\Phi = 0, \quad \Psi_\Phi = (T_\alpha, \Xi_A),$$

в которых R связей T_α удовлетворяет соотношениям

$$\{T_\alpha, \Psi_\Lambda\} = C_{\alpha\Lambda}^\Phi\Psi_\Phi, \quad \alpha = 1, \dots, R,$$

а в остальных случаях связи Ξ_A нумеруются индексом $A = R+1, \dots, N$. Тогда

$$\{T_\alpha, H_0\} = C_\alpha^\Phi\Psi_\Phi,$$

в противном случае условия совместимости приведут к новым связам и процедура не будет закончена. Количество итераций ограничено, так как размерность поверхностей связей не может превышать размерность фазового пространства.

Тем самым, гамильтонов анализ со связями является методом исследования динамики системы, основанным на Гамильтоновом формализме, но с учетом наличия связей.

Гамильтонов анализ со связями используется для изучения физических систем, включающих гравитационные поля со сложным уравнением движения.

В общем случае, Гамильтонов анализ со связями начинается с построения лагранжиана системы, который является функцией координат, скоростей и их производных, включая высшие производные. Затем производится вариация действия с учетом связей системы, которые вводятся в виде уравнений связей, ограничивающих возможные значения координат и их производных.

Затем проводится Гамильтонов анализ, который заключается в нахождении канонических переменных, таких как обобщенные координаты и их сопряженные импульсы, и построении гамильтониана системы. Гамильтониан является функцией обобщенных координат и импульсов системы и содержит информацию о энергии и движении системы.

Гамильтонов анализ со связями в теориях гравитации с высшими производными может быть сложным и требовательным процессом, включающим множество математических выкладок. Однако он позволяет получить полное описание динамики системы и исследовать ее свойства, такие как устойчивость, симметрии и сохраняющиеся величины.

Гамильтонов анализ со связями является важным инструментом при исследовании теорий гравитации с высшими производными и может дать глубокое понимание их физических аспектов.

Список использованных источников

1. Д. М. Гитман, И. В. Тютин Каноническое квантование полей со связями // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.. -1986. - 216 с.
2. Г. Голдстейн, Ч. Пул, Дж. Сафко, Классическая механика // М. – Ижевск. -2012. - 828 с.
3. Пономарев В.Н., Барвинский А.О. и Обухов Ю.Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий // М.: Энергоатомиздат. - 1985. - 168 с.
4. Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике // Ижевск: Ижевская республиканская типография. – 1998. – 148 с.
5. Тер Хаар Д. Основы гамильтоновой механики // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1974. – 224 с.
6. Ланцош К. Вариационные принципы механики // М.: Мир. – 1965. – 408 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1979. – 472 с.
8. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. и Черных Ф.И. Лекции по аналитической механике // М.: Регулярная и хаотическая динамика. – 2010. – 236 с.
9. Ковалев В.А. и Радаев Ю.Н. Элементы теории поля. Вариационные симметрии и геометрические инварианты // М.: Физматлит. – 2009. – 156 с.