ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

2024
Астана

УДК 001
ББК 72
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов имолодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001
ББК 72
G99

ISBN 978-601-7697-07-5

УДК 517.982

ОБОБЩЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА

Дарешева Диляра Муктакызы
dilyara__1996@mail.ru
магистрант 2 курса образовательной программы Математика (7M05401) ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Тлеуханова Назерке Тулековна

Важность изучения обобщенных пространств Лоренца [1, 2] обусловлена их значимостью в математическом анализе и разнообразных приложениях. Эти пространства предоставляют мощный инструментарий для описания свойств функций и операторов, находя применение в таких областях, как теория приближений, оптимизация и решение частичных дифференциальных уравнений [3, 4]. Обобщение классических пространств Лоренца позволяет углубить понимание свойств функциональных пространств и расширить возможности их использования в математических исследованиях и приложениях.

Интерес к обобщенным пространствам Лоренца возрос в последние годы, благодаря их способности обеспечить более глубокое понимание свойств функций и операторов, что доказывается множеством публикаций, включая работы Перссона и его коллег [1, 5, 6, 7]. Актуальность данного исследования обусловлена стремлением развить эти идеи дальше, предложив новые методы анализа, способные найти применение в широком спектре научных и инженерных задач.

Исследования обобщенных пространств Лоренца начались с работ Лоренца [2] и продолжились разработками в области теории вложения, интерполяции и свойств компактности [3, 8, 4]. Последующие работы Перссона и других авторов [5, 6, 7, 9, 10] значительно расширили эти идеи, исследуя применение обобщенных пространств Лоренца в анализе Фурье и других областях математики. Развитие теоретических основ этих пространств также способствовало появлению новых направлений в математическом анализе и смежных дисциплинах.

Целью данной статьи является углубление понимания обобщенных пространств Лоренца и разработка новых методологий их применения в математических исследованиях и практических задачах. Конкретныезадачивключают в себя:

1. Формулировка основных свойств и неравенств для обобщенных пространств Лоренца, в том числе теорем вложения и неравенств Минковского.
2. Разработка и анализ дискретных аналогов обобщенных пространств Лоренца, что позволит расширить их применение в численных методах.
3. Исследование сопряженных свойств обобщенных пространств Лоренца и их использование в задачах оптимизации и теории управления.
4. Применение полученных результатов к решению конкретных математических и прикладных задач, демонстрирующих их эффективность и универсальность.

Таким образом, данное исследование направлено на расширение теоретических основ и разработку новых инструментов для анализа и применения обобщенных пространств Лоренца, что будет способствовать их более широкому использованию в математике и смежных дисциплинах.

Пусть $\omega(t)$ – неотрицательная функция на [0,1]. Обобщенное пространство Лоренца $\Lambda_q(\omega)$ — это множество всех измеримых функций f на [0,1] таких что: если $0 < \mathrm{q} \leq \infty$, то

$$\Lambda_q(\omega) = \left\{\mathrm{f}: \int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t} < \infty\right\}.$$

Если $\mathrm{q} < \infty$, то

$$\| f \|_{\Lambda_q(\omega)} := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

Если $\mathrm{q} = \infty$, то

$$\Lambda_\infty(\omega) = \left\{ f: \sup_{0 \le t \le 1} f^*(t)\omega(t) < \infty \right\},$$

$$\| f \|_{\Lambda_\infty(\omega)} := \sup_{0 \le t \le 1} f^*(t)\omega(t),$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(t)$ [5].

Пусть $\mu = \{\mu\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных чисел. Дискретное обобщенное пространства Лоренца определим следующим образом.

$$\lambda_q(\mu) = \left\{ a = \{a\}_{k=1}^{\infty}: \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*(\mu(k))^q \frac{1}{k} < \infty \right\}.$$

Если $q < \infty$, то

$$\| a \|_{\lambda_q(\mu)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* \mu(k) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Если $q = \infty$, то

$$\lambda_\infty(\mu) = \left\{ a = \{a\}_{k=1}^{\infty}: \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k^* \mu(k) \right) < \infty \right\},$$

$$\| a \|_{\lambda_\infty(\mu)} = \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k^* \mu(k).$$

Пусть $\delta > 0$ и $\omega(t)$ - неотрицательная функция на $[0, +\infty)$. Определим класс функции A_δ :

$$A_\delta = \begin{cases} \omega(t): & \omega(t)t^{-\delta} - \text{возрастающая функция,} \\ & \omega(t)t^{-1+\delta} - \text{убывающая функция} \end{cases}.$$

Тогда класс A определяется следующим образом:

$$A = \mathrm{U}_{\delta > 0} A_\delta.$$

Замечание. Когда $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty$, то обобщенное пространство Лоренца L_{pq} совпадает с классическим пространством Лоренца L_{pq}.

Теорема 1. Если $1 \le q < q_1 \le \infty$, где $\omega \epsilon c \Rightarrow$

$$\Lambda_q(\omega) \hookrightarrow \Lambda_{q_1}(\omega)$$

то для каждого $f \epsilon \Lambda_q(\omega)$ сушествует такое, что:

$$\| f \|_{\Lambda_{q_1}(\omega)} \le c \| f \|_{\Lambda_q(\omega)}.$$

Теорема 2. (Неравенство Минковского)

$0 < q \le \infty$ и ω из класса A. Если $f \in \Lambda_q(\omega), g \in \Lambda_q(\omega)$, то $f + g \in \Lambda_q(\omega)$ и верно неравенство:

$$\| f + g \|_{\Lambda_q(\omega)} \le c \left(\| f \|_{\Lambda_q(\omega)} + \| g \|_{\Lambda_q(\omega)} \right),$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\left(f^*(t) + g^*(t) \right) \omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_1 \left(\left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(g^*(t)\omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Пусть $1 \le q \le \infty$ и ω неотрицательная функция на $[0; \infty)$. Сопряженное пространтсво Лоренца $\left(\Lambda_q(\omega) \right)'$ – это множество всех измеримых функции g для которых, норма g определяется следующим образом

$$\| g \|_{\left(\Lambda_q(\omega)\right)'} = \sup_{\|f\|_{\Lambda_q(\omega))=1}} \int_0^\infty |f(x)g(x)|dx < \infty.$$

Функция ω на $\mathbb{R}^+$называется регулярной, если удовлетворяет следующее условие [3]

$$\frac{W(t)}{t} \leq c\omega(\mathrm{t}), \mathrm{t} > 0$$

где $W(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau$ и $\mathrm{c} > 0$ и не зависит от t. Последовательность положительных чисел $\{\mu(k)\}_{k=1}^\infty$ называется регулярной, если удовлетворяет следующее условие [3]

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\mu^q(k)}{k} \leq c\frac{\mu^q(k)}{k}, \forall n \in N$$

Теорема 3. Пусть $1 < q < \infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ и ω - регулярная функция. Тогда верно равенство

$$\left(\Lambda_q'(t\omega)^{-1}\right)' = \Lambda_q(\omega)$$

В рамках данного исследования были получены и подробно рассмотрены ключевые свойства обобщенных пространств Лоренца, включая теоремы вложения, неравенства Минковского для этих пространств, а также сопряженные свойства. Результаты исследования обобщенных пространств Лоренца показывают, что эти пространства обладают рядом уникальных свойств, которые могут быть использованы для дальнейшего развития теоретического математического анализа и его приложений.

Обобщенные пространства Лоренца, описанные в документе, являются расширением классических пространств Лоренца, которые были введены и исследованы в предыдущих работах [1, 2]. Сравнивая с классическими пространствами Лоренца, обобщенные пространства предлагают более гибкие инструменты для работы с функциями и последовательностями, что позволяет более точно описывать их свойства и взаимосвязи. Обобщенные пространства Лоренца могут найти применение в различных областях, таких как теория управления, обработка сигналов, исследование операторов и задачи оптимизации. К примеру, свойства вложения и неравенства Минковского могут быть использованы для анализа устойчивости и оптимизации в задачах управления. Также, понимание сопряженных свойств обобщенных пространств Лоренца открывает новые возможности для разработки алгоритмов оптимизации и численного анализа. В будущем работы могут быть направлены на дальнейшее развитие теории обобщенных пространств Лоренца, изучение их связи с другими областями математики и разработку новых приложений в смежных научных дисциплинах.

Список использованных источников

1. Persson L.-E. An exact description of Lorentz spaces //Acta Science math, 1983, p. 177–195.
2. Lorentz G.G. Some new functional spaces // Annotation of Math, 1950, p. 37–55.
3. Carro M.J., Raposo J.A., Soria J. Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities //Mem. Amer. Math. Soc., 2007, p. 877.
4. Bergh J., L¨ofstr¨om J. Interpolation spaces. An Introduction // Grundlehren der MathematischenWissenschaften. Springer Verlag. Berlin New York. 1976.
5. Persson L.-E. Relation between regularity of periodic functions and their Fourier series: Ph.D thesis, Dept. of Math. Umea University, 1974.
6. Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.E., On summability of the Fourier coefficients for functions from some Lorentz type spaces. Research Report 8, Lulea University of Technology, Department ofMathematics, 2009.
7. Kopezhanova A., Persson L.-E. On summability of the Fourier coecients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces // Eurasian Math. J., 2010.
8. Reiner S. On the duals of Lorentz function and sequence spaces // Indiana Univ. Math. J., 1982, p. 65–72.
9. Persson L.-E. An exact description of Lorentz spaces //Acta Sci. Math., 1983, p. 177–195.

10. Kopezhanova A. N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. Boas theorem for some Lorents spaces Λq(ω)// Lulea University of Technology, Department of Mathematics, Research Report 2, 2015, p.1– 21.

УДК. 517.51

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

КәукеноваЖаннұрМейрамбекқызы
kaukenova_zh@ast.nis.edu.kz
Магистрант механико-математического факультета
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В данной работе показано, что коэффициенты Фурье функций ограниченной Λ-вариации, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, равны $O(\lambda_n / n)$. Это было известно для $\lambda_n = n^{\beta+1}, -1 < \beta < 0$. Показано, что классы L и HBV - дополнительные, аL и ΛBV не являются дополнительными, если класс ΛBV не вложен в класс HBV. Показано, что частичные суммы рядов Фурье функций ограниченнойгармонической вариации равномерно ограничены, приведено доказательство аналога теоремы Дирихле для этого класса функций без использования признака Лебега.

В [1]показано, что функции ограниченной гармонической вариации(HBV) удовлетворяют признаку Лебега сходимости их рядов Фурье, но если класс функций ограниченной Λ-вариации (ΛBV) не вложен в класс HBV, он содержит функции, ряд Фурье которых расходится.

В данной работе приводится оценка коэффициентов Фурье функций из классаΛBV. Мы докажем аналог теоремы Дирихле для функций из HBV, не прибегая к признаку Лебега, а также покажем, что частичные суммы рядов Фурье функций из класса HBV равномерно ограничены. Из этого можно заключить, что классы L и HBV являются дополнительными, то есть справедливо равенство Парсеваля (с обычной сходимостью) для $f \in L$ и $g \in \mathrm{HBV}$. Мы увидим, что L и ΛBV не являются дополнительными, если ΛBV не является подклассом HBV.

Пусть функция*f*задана на отрезке $[a,b], \Lambda = \{\lambda_n\}$ -неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ и $\{I_n\}$- последовательность неперекрывающихсяпромежутков $I_n = [a_n, b_n] \subset [a,b]$.Функция *f*называется функцией ограниченной Λ-вариации(ΛBV), если для любой последовательности $\{I_n\}$ выполняется $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a_n) - f(b_n)| / \lambda_n < +\infty$. Супремум этих сумм называется Λ-вариацией функции *f*и обозначается $V_\Lambda(f;[a,b])$. При $\Lambda = \{n\}$ данный класс называют функциями ограниченной гармонической вариации (HBV).

Положим $[a,b] = [0,2\pi]$ и функция f имеет период 2π. Классы функций K и K_1 называются дополнительными [3], если для $f \in K$ и $g \in K_1$ выполняется

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg dx = \frac{1}{2}a_0 a_0^{'} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k a_k^{'} + b_k b_k^{'}),$$