ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

2024
Астана

УДК 001
ББК 72
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов имолодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001
ББК 72
G99

ISBN 978-601-7697-07-5

УДК 517.926

ОБ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Шоканова Томирис Мынжасаровна
tomshok02@gmail.com
Магистрант 1 курсаобразовательной программы 7M05401 – Математика
ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Кошкарова Б.С.

В даннойработемырассматриваемдифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом вида

$$b_0(t)y'' + b_1(t)y' + b_2(t)y\big(\lambda\tau(t)\big) = 0, (1)$$

при следующих предположениях:

(H1)коэффициенты$b_0(t), b_1(t), b_2(t) \in C[t_0, \infty)$, $b_0(t) \neq 0, b_0(t)b_2(t) > 0, b_1(t)b_2(t) > 0$,

(H2) функция$\tau(t) \in C^2[t_0, \infty)$, $\tau'^{(t)} \neq 0 \forall t \geq t_0$,

(H3) параметр $\lambda \in (0,1)$.

В уравнении (1) функция $y(t) \in C^2[t_0, \infty)$ и удовлетворяют условию $\sup|y(t)|: t \geq T > 0$ для всех $T \geq t_0$.

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с запаздыванием возникают при математическом моделировании явлений и процессов в различных областях теоретической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, экологии, экономики и технических приложениях. Приведем некоторые факторы, приводящие к необходимости вводить запаздывание в математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. В биологии и биомеханике запаздывание обусловлено ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине – в задачах о распространении инфекционных заболеваний – время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с конечной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов; также уравнения с запаздыванием часто используются при описании динамических процессов в механике деформируемого твердого тела среды с наследственными свойствами, в термодинамике – при описании необратимых процессов, в электродинамике – при учете конечности скорости взаимодействия, в технике – при учете запаздывания в переносе энергии, материалов и сигналов, в экономике – при учете времени задержки оборота капитала [1], [2].

Наличие запаздывания в математических моделях и дифференциальных уравнениях является осложняющим фактором, который, как правило, приводит к сужению области устойчивости получаемых решений. Исследование и решение обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием по сложности сопоставимы с исследованием и решением уравнений в частных производных без запаздывания [2].

«Колебание» (осцилляция) – распространенный термин среди наук. Его можно встретить в следующих направлениях: биофизика, нейродинамика, нелинейная физика, прикладная математика и еще в целом ряде дисциплин. Понятие**«колебание»**обозначаетвозвратно-поступательноеизменение количественных характеристик наблюдаемой системы, которое описывается ее амплитудными и фазовыми характеристиками [3].

Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения будем называть осцилляторным, если оно имеет сколь угодно много нулей в заданной области определения, в противном случае данноерешение называется неосциллирующим. Дифференциальное уравнение называется осцилляторным, если все его решения являются осцилляторными.

Исследованияосцилляционныхсвойствдифференциальныхуравненийвторогопорядканачалисьс новаторской работы Ж.Ш.Ф. Штурма [4], в которойвводится принцип сравнения в теорию колебаний. Далее вклад в развитие теории внес А.Кнезер [5]. Этиисследованияпродолжаютразвиваться до сихпор. В Казахстанеизучениеосцилляционныхсвойствдифференциальныхуравненийначалось с работы М. Отелбаева[6] и былопродолжено в работах Р. Ойнарова, Л.К. Кусаиновой, Б.С. Кошкаровой, К.Р. Мырзатаевой, М. Алдай, С. Алимагамбетовой, С. Кудабаевой, Х. Рамазановой, А. Адиевой, А. Кашкынбаева.

Осцилляции дифференциальногоуравнения второго порядка с запаздываниемвида

$$y''(t)+p(t)y\big(\tau(t)\big)=0 \quad (2)$$

такжепосвящено множество работ. В работе Д,Д. Брэндса [7] было доказано, что осцилляторность уравнения (2) с запаздыванием эквивалентно осцилляторности обыкновенных дифференциальных уравнений. Новым импульсом для исследования осцилляторности стала работа В.Е. Махфуда [8], в которой доказана теорема сравнения, позволяющая любой критерий осцилляторности для обыкновенных дифференциальных уравнений распространитьдля дифференциальныхуравнений с запаздыванием. Р. Коплатадзе и др. [9] разработали очень хорошую методику для исследования осцилляторности уравнения (2) и представили следующий критерий.

Теорема 1[9]. *Предположим, что*

$$\limsup_{t\to\infty}\left\{\tau(t)\int_t^{\infty} p(s)ds+\int_{\tau(t)}^{t}\tau(s)p(s)ds+\frac{1}{\tau(t)}\int_{t_1}^{\tau(t)} s\tau(s)p(s)ds\right\}>1.$$

Тогда уравнение (2) *является осцилляторным*.

В работе Т. Кусано, М. Наито [10] был получен следующий результат.

Теорема 2[10]. *Предположим, что существует константа*a_0*такая, что для*$t\geq t_0$

$$t\tau(t)p(t)\geq a_0>\frac{1}{4}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) *является осциллирующим*.

В работе Б.Бакуликовой [11] получены критерии осцилляторности уравнения (2), улучшающие ранее полученные результаты. Доказательство теорем основано на свойствах монотонности возможных неосцилляционныхрешений уравнения (2).

Теорема 3 [11]. *Пусть*$\beta=\frac{1+\sqrt{1-4a_0}}{2}$.*Предположим, что существует константа*a_1*такая, что при*$t\geq t_0$

$$t^{2-\beta}\big(\tau(t)\big)^{\beta}p(t)\geq a_1>\frac{1}{4},$$

тогда уравнение (2) *является осциллирующим.*

Целью настоящейработы является сравнение критерия осцилляторности Б. Бакуликовой с критериями Р. Коплатадзе и др. [9], Т. Кусано, М. Наито[10] на примере уравнения Бесселя второго порядка с пропорциональным запаздыванием и исследование осцилляторностидифференциальногоуравнения с запаздыванием (1).

Пусть задано уравнение Бесселя второго порядка с пропорциональным запаздыванием вида:

$$xy''(x) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}y'(\lambda x) + \frac{1}{4x}y\left(\lambda\sqrt{x\lambda}\right) = 0, \lambda \in (0,1). (4)$$

С помощью замены независимой переменной $t = \sqrt{\lambda x}$ уравнение (4) сводится к уравнению Эйлера с запаздыванием

$$y''_{tt} + \frac{1}{t^2}y(\lambda t) = 0, \qquad (5)$$

Здесь $p(t) = \frac{1}{t^2} > 0,\ \forall\, t \geq t_0, \tau(t) = \lambda t \leq t,\ \ \forall\lambda \in (0,1).$

Проверим осцилляторность уравнения по критерию Р. Коплатадзе и др. [9]. Согласно теореме 1 уравнение (5), а, значит, заданное уравнение (4) будет осциллирующим при выполнении условия:

$$\lim_{t\to\infty} sup\left\{r(t)\int_t^{\infty} p(s)ds + \int_{r(t)}^{t} r(s)p(s)ds + \frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{r(t)} s\cdot r(s)p(s)ds\right\} =$$

$$= 2\lambda - \lambda\ln\lambda = \lambda(2 - \ln\lambda) > 1. (6)$$

Возьмем в качестве $\lambda = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}27 > \frac{1}{4}$. Подставляя в (6), находим

$$\lambda(2 - \ln\lambda) \approx 0{,}27(2 + 1{,}3) = 0{,}27 \cdot 3{,}3 = 0{,}891 < 1,$$

то есть не выполняется условие теоремы 1, значит, по критерию Р. Коплатадзе уравнение Бесселя неосциллирующее.

Теперь проверим осцилляторность по критерию Т. Кусано, М. Наито[10], взяв тоже значение $\lambda = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}27 > \frac{1}{4}$. Тогда по теореме 2 при выполнении:

$$t\cdot r(t)p(t) = t\cdot \lambda t \cdot \frac{1}{t^2} = \lambda > \frac{1}{4}$$

для всех $t \geq t_0$ уравнение (5) или заданное уравнение (4) будет осциллирующим.

Далее, пусть $\lambda = \frac{1}{4}$, тогда $\beta = \frac{1+\sqrt{1-4a_0}}{2} = \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} = \frac{1}{2}$. Отсюда имеем, что

$$t^{\frac{3}{2}}(\lambda t)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2} = \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} = a_1 > \frac{1}{4},$$

т.е. при значении параметра $\lambda = \frac{1}{4}$, уравнение (4) все равно остается осциллирующим. Таким образом, критерии Б. Бакуликовой улучшает ранее известные результаты.

Сформулируемтеперьосновнойрезультатданнойработы.

Теорема. *Пусть*$b_0(x), b_1(x), b_2(x) \in C[x_0,\infty)$, $b_0(x) \neq 0, b_0(x)b_2(x) > 0, \tau(x) \in C^2[x_0,\infty)$, $\tau'^{(x)} \neq 0 \forall x \geq x_0, \lambda \in (0,1)$.*Если существует константа*a_0*такая, что для*$x \geq x_0$*выполняетсянеравенство*

$$\frac{\lambda\tau^2(x)\cdot b_2(x)}{b_0(x)}\exp\left\{2\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right\}\geq a_0>\frac{1}{4},(7)$$

тогда дифференциальное уравнение (1) *является осциллирующим*.

Длядоказательстваиспользовалисьрезультатыработы Б. Бакуликовой.

Продемонстрируем на следующем примере. Рассмотрим трехчленное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида:

$$x^2y''+xy'+a\sqrt{x}y(\lambda\ln x)=0,\lambda\in(0,1),x\in[2,\infty).(8)$$

Заданное уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы, а именно: $b_0(x),b_1(x),b_2(x)\in C[x_0,\infty),b_0(x)\neq 0,b_0(x)b_2(x)>0,\tau(x)\in C^2[x_0,\infty)$, $\tau'^{(x)}\neq e^{2\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx}\forall x\geq x_0,\lambda\in(0,1)$. Проверим выполнение условия (7):

$$\frac{\lambda\ln^2 x\,a\sqrt{x}}{x^2}e^{2\int\frac{x}{x^2}dx}=\lambda a\ln^2 x\sqrt{x}\geq\lambda a\sqrt{2}\ln^2 2=a_0>\frac{1}{4}.$$

Таким образом, уравнение (8) является осциллирующим дифференциальным уравнением если $\lambda a>\frac{1}{4\sqrt{2}\ln^2 2}$.

Список использованных источников

1 Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. – Екатеринбург : Изд-во Урал, ун-та, 2012. – 122 с.

2 Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. – Москва :ИПМех РАН, 2022. – 466 с.

3 Митенкова А.В. Математическое моделирование системы осцилляторов / Дипломная работа. – Саратов, 2022. – 12 с.

4 Sturm J.C.F. M´emoire sur les ´equations diff´erentielleslin´eaires du second ordere // J. Math. Pures Appl., 1836, Vol. 1, P. 106-186.

5Kneser A. Untersuchungen uber die reelenNullstellen der Integralelineare Differential gleichungen // Math. Ann., 1893, Vol. 42, P. 409-435.

6 Отелбаев М. ОценкиспектраоператораШтурма-Лиувилля. – Алма-Ата: Гылым, 1990.

7 Brands J.J.A.M. Oscillation theorems for second-order functional differential equations // Nonlinear oscillations, 2012, Vol. 15, P. 13–24.

8Mahfoud W. E. Oscillation and asymptotic behavior of solutions of n-th order nonlinear delay differential equations // Journal of Differential Equations, 1977, Vol. 24, P. 7598.

9Koplatadze R., G. Kvinkadze, I. P. Stavroulakis; Properties A and B of n-th order linear differential equations with deviating argument // Georgian Math. J., 1999, Vol. 6, P. 553-566.

10 Kusano T., Naito M. Comparison theorems for functional differential equations with deviating arguments // J. Math. Soc. of Japan, 1981, Vol. 3,P. 509–533.

11 Baculikova B. Second order differential equations with delay // Electronic Journal of Differential Equations, 2018, No. 96, P. 1–9.

УДК 519.2

МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА ӘДІСТЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫСЫ

Шушанова Айнура Кайратовна

shushanova.a@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Механика-математика факультеті, Іргелі математика кафедрасы

«6В05401 - Математика» мамандығының 4-курс білім алушысы