ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

2024
Астана

УДК 001
ББК 72
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов имолодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001
ББК 72
G99

ISBN 978-601-7697-07-5

УДК 532.529

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Тулькибаев Чингис Куанышбаевич
tulkibaev05@gmail.com
Студент 3 курса механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель: доцент Б.С. Шалабаева

В данной работе представлено компьютерное моделирование методом решёточных уравнений Больцмана (Lattice-Boltzmannmethods, LBM). Метод основан не на решении уравнений Навье-Стокса, а на рассмотрении уравнения Больцмана из кинетической теории. Рассматриваются распределения частиц в указанных узлах, на которые разделено рассматриваемое пространство, главным образом учитывается столкновение частиц. Главное полезное свойство такого метода именно в возможности проводить параллельные вычисление на компьютере, особенно большой интерес вызывает использования архитектуры графических процессоров по типу NVIDIA [1].

Простота основана на том, что нелинейность уравнений заключена внутри узлов во время расчётов столкновений частиц внутри узла, взаимодействие же узлов вполне линейно. Численное решение или компьютерное моделирование жидкостей таким методом могут пригодиться при рассмотрении задач потоков в пористой среде, в акустике, в моделировании потоков в биомедицине, вокруг мостов и зданий, обтеканий корпусов или автомобильных корпусов.

Цель этого исследования рассмотреть обтекание цилиндрических и прямоугольных поверхностей потоком жидкости внутри канала данным методом.

Постановка задачи. Дан двумерный поток жидкости в канале длиной 3м и шириной 0,5 м, на пути которого находится тело с цилиндрической поверхностью радиусом 6,25см. Начальная скорость потока 0,04м/с и начальная плотность 1000 кг/м3. При постоянном числе Рейнольдса равной 100. Необходимо построить поле скоростей и показать дорожку Кармана.

Математическая постановка. В данной задаче пространство канала делим на узлы. Основной величиной, которой оперирует данный метод, является дискретная функция распределения скоростей $f_i(x,t)$, (ф. р. с)где x – координата узла, в которой рассматривается ф. р. с., t– время. Функции распределения представляют собой плотность распределения частиц со скоростью $c_i = (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})$ в узле точки x и времени t. Аналогично в кинетической теории плотность массы ρ и плотность импульса ρu в точке *(x,t)* могут быть найдены как суммы вида[2]:

$$\rho = \sum_i f_i(x,t) \qquad \rho u = \sum_i c_i f_i(x,t)$$

Главное отличие от обычной плотности распределения частиц в кинетической теории рассматривается непрерывное пространство, а для данного метода функция распределения берется от дискретного аргумента сетки, а время итерации выбрано шагом времени, дискретны и скорости частиц c_i. Шаг решетки и шаг времени соответственно Δx и Δt.

Дискретные скорости c_i берутся вместе с весовыми коэффициентами соответствующий каждой дискретной скорости w_i, вместе они образуют набор скоростей c_i, w_i. Эти наборы скоростей обычно обозначаются как DdQq, где d – количество пространственных измерений, q – количество скоростей в наборе.

Наиболее часто используемые наборы скоростей для решения уравнения Навье-Стокса – это D1Q3, D2Q9, D3Q15, D3Q19 и D3Q27.

Нужно найти необходимый нам баланс между количеством скоростей в наборе, то есть точность, и производительностью, то есть сложностью вычислений. Например между D3Q27 и D3Q15, один соответственно точный, но другой намного производительней, выбирается компромисс между ними в виде D3Q19.

В нашем случаем мы будем использовать для двумерного случая схему D2Q9.

Дальше идёт следующая дискретизация уравнения Больцмана:

$$f_i(x + c_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \Omega_i(x, t)$$

В этом выражение указывается то что частицы $f_i(x, t)$ со скоростью c_i в соседнюю точку $x + c_i\Delta t$ на следующем шаге времени $t + \Delta t$. Или как изменяется плотность распределения частиц в клетке $x + c_i\Delta t$ со скоростью c_i притом что в соседней клетке x мы имеем распределение $f_i(x, t)$. $\Omega_i(x, t)$ – это оператор столкновений частиц.

Существует достаточное количество способов смоделировать столкновения частиц, но в данной работе для описания столкновения частиц использовался оператор Бхатнагара-Гросса-Крука(BGK):

$$\Omega_i(f) = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau}\Delta t$$

Под τ определяется время релаксации популяции частиц к равновесию определенный функцией распределения f_i^{eq}.

Само равновесное распределение находим из выражения:

$$f_i^{\mathrm{eq}}(x, t) = w_i\rho\left(1 + \frac{u \cdot c_i}{c_{\mathrm{s}}^2} + \frac{(u \cdot c_i)^2}{2c_{\mathrm{s}}^4} - \frac{u \cdot u}{2c_{\mathrm{s}}^2}\right)$$

Тут c_s это постоянные для определенного набора скоростей. В базовом изотермическом LBE определяют через соотношение между давлением и плотностью. $p = c_{\mathrm{s}}^2\rho$. Это постоянную можно трактовать как скорость звука в изотермической модели. В данном случае c_s определялось через соотношений$\frac{1}{3}\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$.

Вязкость будет представлена виде формулы:

$$\nu = c_{\mathrm{s}}^2\left(\tau - \frac{\Delta t}{2}\right)$$

Вычисления в узлах проводится следующими этапами:

Задаётся изначальная скорость потока.

1этап, столкновение частиц внутри узла:

$$f_i^*(x, t) = f_i(x, t) + \Omega_i(x, t)$$

2 этап, переход этих частиц в соседний узел сетки по направлению скоростей c_i:

$$f_i(x + c_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(x, t)$$

Граничные условия задаются на сетке с принятием следующих предположений:

Предположение о «мокрых узлах» на стенках, узлы лежащее на границе стенки с жидкостью принимаются как «мокрые» и в них тоже проводится вычисление функции распределения скоростей только направленные в сторону внутренних узлов жидкости.

Предположение об «отскакиваний» частиц жидкости обратно от поверхности твердого тела внутри потока. Если частицы движутся из текущего узла в соседний узел, представляющий собой границу данной поверхности, то изначальная скорость частиц из c_i станет $-c_i$. То есть их направление станет прямо противоположным как по y и x. Такое предположение возможно из предположения что наши частицы достаточно упруги.

Мы зададим также следующее условия для того, чтобы избегать быстрого затухания процесса: мы создаём виртуальный слой узлов за последним слоем узлов, то есть после N-ых узлов пойдёт $N+1$ узлы, и тот поток частиц, который передаётся с последних узлов в виртуальный узлы, перейду потом к первым узлам.

Тогда наш алгоритм выглядит следующим образом:

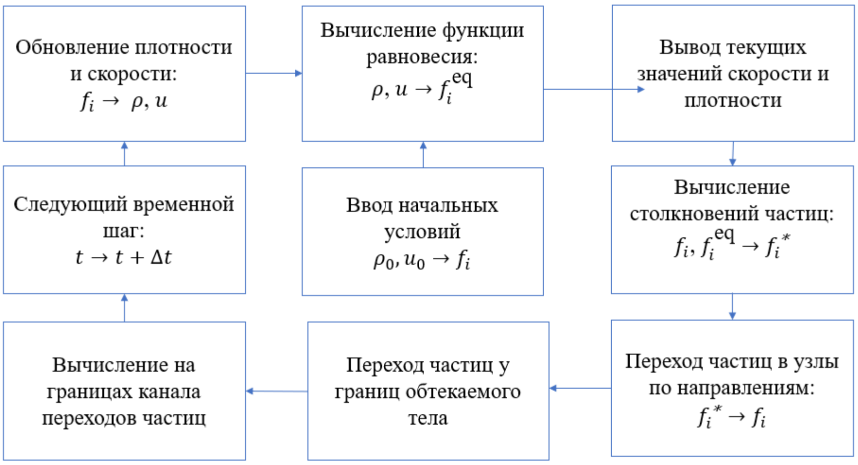

Рисунок 1: Алгоритм

Результаты.

Все вычисления были проведены на языке программирования Python с использованием библиотек **jax**(как раз позволяет использовать возможности графического процессора в вычислениях) для самих вычислений и **matplotlib** для построения графиков. Количество итераций задано как 15000, каждая секунда равна 100 итерациям.

Во время вычислений для упрощения работы с вязкостью и временем релаксации использовалась следующая формула:

$$Re = \frac{uR}{\nu}$$

Где u это скорость течения, R – радиус цилиндра, ν– динамическая вязкость жидкости.

Для случая с прямоугольным сечением динамическая вязкость жидкости оставили такой же. Получены следующие результаты. Для числа Рейнольдса равному 100, при начальной скорости 0.04 см/спри обтекании круглого цилиндра на 140 секунде

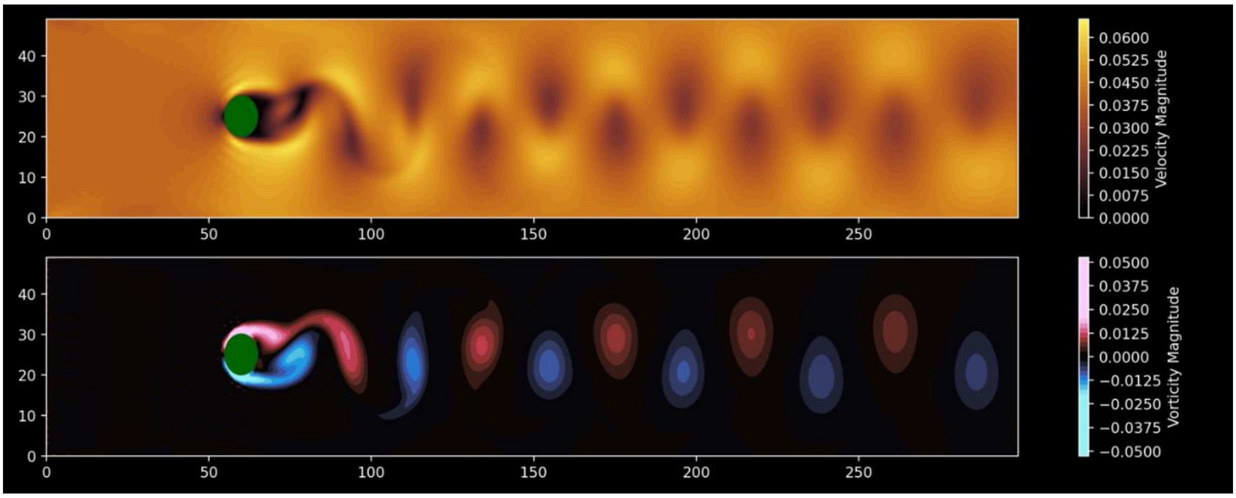

Рисунок 2: Диаграмма динамической вязкости жидкости

Для поверхности с прямоугольным сечением получили результат с числом Рейнольдса равному 250:

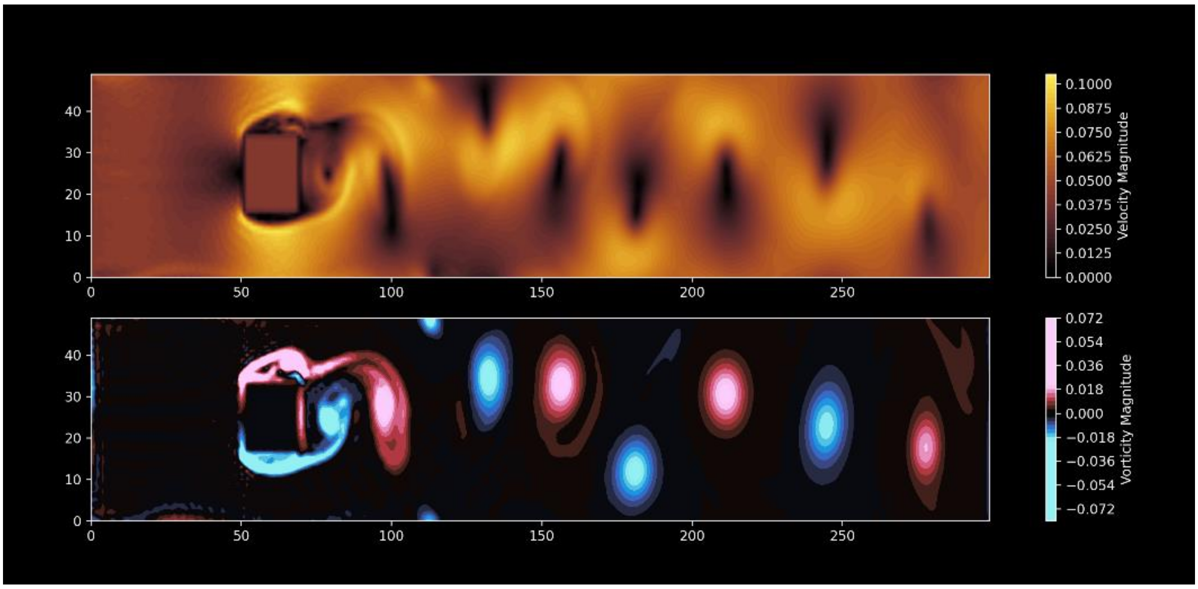

Рисунок 3: Диаграмма динамической вязкости жидкости

При числе Рейнольдса равной 1000 для Цилиндра никаких результатов уже не получается. Это связано с ограничениями самого построенного кода, а именно шага времени. При уменьшении шага времени изменения на графиках отображается только до 20 секунды, мы сталкиваемся ограничениями самого метода при слишком больших скоростях, что мы наблюдаем на 20 секунд

Заключение. Изученный метод не оказался слишком сложным в воспроизведении на обычном компьютере. Построенная дорожка Кармана, например для квадрата оказалась при числе *Re*=250 имела более хаотичный характер к 140 секунде, чем для цилиндра при равной *Re*=100. Всё же метод ближе к имитаций настоящей жидкости из-за изначального построения на основе уравнений Больцмана. Хотя существуют проблемы при больших числах Рейнольдса и больших скоростях, но уже существуют модификации, которые решают проблемы возникающие при больших числах Рейнольдса или скорости.[3] При возможности проводить вычисления на целый кластерах мощных графических процессорах и модификации этого метода мы получаем более широкий круг возможностей приложения и вычислений, особенно в наше время, когда графические процессоры становятся мощнее прошлых поколений в несколько раз. Это открывает новые возможности и источник исследований методов основанных на подходах из статистической физики или просто статистики, если применять дополнительно машинное обучение.

Список использованных источников

1. Д. А. Бикулов, Д.С. Сенин, Д. С. Демин,А.В.Дмитриев,Н.Е.Грачев, *Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере*, Выч. мет. программирование, 2012, том 13, выпуск 1, 13–19

2. Krüger, T.; Kusumaatmaja, H.; Kuzmin, A.; Shardt, O.; Silva, G.; Viggen, E. M. (2017). *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*. Springer Verlag. ISBN 978-3-319-44647-9. P. 62-67 and 155-180

3. Е.В. Зипунова, А.Ю. Перепёлкина, А.В. Закиров, *Развитие схемы метода LBM для неизотермических течений с произвольно большим числом Маха,* Вычислительные технологии, 2021, том 26, › 1, с. 62–71.