ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»
XIX Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XIX Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

PROCEEDINGS
of the XIX International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2024»

2024
Астана

УДК 001
ББК 72
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» студенттер мен жас ғалымдардың XIX Халықаралық ғылыми конференциясы = XIX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024» = The XIX International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2024». – Астана: – 7478 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-7697-07-5

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов имолодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001
ББК 72
G99

ISBN 978-601-7697-07-5

оқушылардың геометрияны терең және жан-жақты түсінуін қалыптастыруға ықпал ететін оқытудың кешенді тәсілі болып табылады.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Шыныбеков Ә.Н. Геометрия. – Алматы: Атамұра, 2012. – 128 б.
2. Әбілқасымова А.Е., Ардабаева А.К. Орта мектептегі геометриялық білім беру мазмұнының кейбір аспектілері // ПМУ хабаршысы, Педагогикалық сериясы. – 2020. – №2. – Б. 27–37.
3. Иванов, А. Б. Орта мектепте геометрияны оқытудың заманауи әдістері / / Мәскеу: ағарту, 2022. - 1-250 Б.
4. Петрова, С. Д. Математиканы оқытудағы интерактивті технологиялар / / Санкт-Петербург: Ғылым, 2021. - 10-89 Б.
5. Смирнов, и. К. Геометриялық салулар: теориядан практикаға / / Қазіргі математика журналы, 2020, № 4, 15-29 Б.
6. Титова, Е. Ю. Математиканы оқытуда ойын әдістерін қолдану / / математикалық білім, 2021, № 3, 42-56 ББ.
7. Геометрияны оқытуда GeoGebra бағдарламалық жасақтамасын қолдану / / білім газеті, 2022, № 5, 34-45 ББ.

ӘОЖ 512

ЕКІ ТОЛЫҚ КВАДРАТТЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ

Мейрам Серикболсын

meyrams@bk.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Е. Р. Байсалов

Мен бұл жұмыста екі теріс емес бүтін санның квадраттарының қосындысы қандай сандарды беретінін, осындай қосындылардың қасиеттерін қарастырып, оны олимпиадалық есептерді шешуде қолданудың жолдарын көрсететін боламын. Яғни $x^2 + y^2 = n$ түріндегі теңдеудің теріс емес бүтін сандарда шешімін қарастырып ары қарай оның салдары, қасиеттерімен жұмыс жасаймын.

Осы теңдеу жайлы алғашқы болып голландиялық Альбер Жирар келесі түрде тұжырымдаған: егер оң бүтін сан – толық квадрат немесе 2 саны немесе 4-тің кейбір еселігінен 1-ге артық жай сан немесе жоғарыда аталғандай бірнеше санның көбейтіндісіне тең болса ғана оны екі бүтін санның квадраттарының қосындысы ретінде жазуға болады.

Пьер Ферма Мерсеннге жазған хатында бұл теореманы дәлелдегенін жариялады, бірақ дәлел келтірмеді. 20 жылдан кейін, Каркавиге жазған хатында Ферма дәлелдеу жолының шексіз түсу әдісіне негізделгенін меңзейді. Шексіз түсу әдісімен жарияланған алғашқы дәлелді Леонард Эйлер ұсынды. Кейінірек басқа идеяларға негізделген дәлелдерді Джозеф Лагранж, Карл Гаусс, Герман Минковский, Якобсталь және Дон Цагир жариялады.

Бұл теорема маңыздылығын мүлдем жоғалтқан жоқ, осы теореманы түрлі Халықаралық олимпиадалардың есептерін шығаруда қолданып жатады, мысал ретінде Халықаралық Жәутіков олимпиадасында 2005 жылы болған есепті талдап, теореманы қолдану арқылы шешетін боламын. Сонымен қатар теореманың өзі ғана емес, оның дәлелдеу жолы, әдіс-тәсілдерінің өзі жеке бір есептің шешу жолында қолданылып жатады.

Мына мақаладан мектеп оқушыларынан бастап унверситет студенттеріне дейін алатын мағлұматтары көп. Мақаланы кеңейтіп ғылыми жұмыстарға, түрлі ғылыми жобаларға, олимпиадаларда қолданса болады.

Теорема 1. $x^2 + y^2$ қосындысы p = 4k+3 түріндегі жай санға бөлінсе (мұндағы к - теріс емес бүтін сан), онда x және y сандары да p - ға бөлінеді.

Теорема 2. $x^2 + y^2$ қосындысы p = 4k+3 түріндегі жай санға бөлінсе (мұндағы к - теріс емес бүтін сан), онда оның ішіндегі p - ның ең үлкен дәрежесі жұп болады.
Ферма-Эйлер теоремасы. p = 4k+1 түріндегі (мұндағы к - теріс емес бүтін сан) әрбір жай сан екі толық квадраттың қосындысы түрінде жіктеледі және ол тек бір түрде ғана болады (қосылғыштардың орыны өзгерсе ондай жағдайларды бірдей жағдай деп есептегенде).
Лемма. Келесі қадамда екі толық квадраттың қосындысы ретінде жазуға болатын екі санның көбейтіндісін қарастырайық. Осы көбейтіндіні де екі толық квадраттың қосындысы түрде жазуға болатынын көрсетейік.
Дәлелдеуі: $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ болсын, онда xy көбейтіндісінің де екі толық квадраттың қосындысы түрде жазылатынын көрсетейік.
$xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$, яғни $xy = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
Толық қорытынды: Онда осы жоғарыда көрсетілген теоремалар мен лемманы қолданып Альбер Жирардың айтқанын тексеру қиын емес.
Салдары: Өзара жай натурал m, n сандары үшін, mn көбейтіндісін екі толық квадраттың қосындысы түрде жазудың қажетті және жеткілікті шарты m және n сандарының әрқайсысы екі толық квадраттың қосындысы түрінде жазуға болатындығы.
Дәлелдеуі: Егер m, n сандарының әрқайсысын екі толық квадраттардың қосындысы түрде жазуға болатын болса, онда жоғарыда көрсетілген лемма бойынша көбейтінділерін де квадраттардың қосындысына келтіре алатынымыз түсінікті. Енді шарттың қажеттілігін дәлелдейік. Кері жорып m мен n-нің кемінде біреуі екі толық квадраттың қосындысы түрде жазуға келмейді дейік, ол m болсын (симмериялы өрнек болғандықтан m мен n-нің кез келген біреуін алып қарастырсақ жеткілікті). Тұжырымды және лемманы қолдансақ толық квадраттардың қосындысы түрінде жазылмайтын сандар келесі түрде ғана болады: $m = aP$, мұндағы P – ол $4k + 3$ түріндегі әртүрлі (бір немесе бірнеше) жай сандардың көбейтіндісі, ал a – ол m-нің екі толық квадраттың қосындысы түрінде жазуға болатын ең үлкен бөлгіші. Онда, (m, n) = 1 болғандықтан теорема 2-ге қайшылық болады.

Есептер

1. Екі толық квадраттың қосындысы 21-ге бөлінеді, онда осы қосынды 441-ге де бөлінетінін дәлелдеңіз.
Дәлелдеуі: $x^2 + y^2 \vdots 21$ деп берілген. 3|21, 7|21, ал 7 мен 3 сандары 4k+3 түріндегі сандар болғандықтан теорема 1 бойынша $x \vdots 3, y \vdots 3, x \vdots 7, y \vdots 7 => x \vdots 21,\ y \vdots 21 => x^2 \vdots 441, y^2 \vdots 441 => x^2 + y^2 \vdots 441$.
2. Кез келген бүтін n саны үшін, $n^2 + 1$ қосындысының k – оң бүтін сан болатын, 4k-1 түріндегі бөлгіші болмайтынын дәлелдеңіз.
Дәлелдеуі: Кері жорып, $n^2 + 1$ санының 4k-1 түріндегі бөлгіші бар деп алайық. Онда осы бөлгіштің 4m-1 түріндегі жай бөлгіші болады, оны p дейік. Енді теорема 1 -ді қолдансақ, $n^2 + 1^2 \vdots p, p = 4m - 1 => n \vdots p, 1 \vdots p$, бірақ $p \nmid 1$ қайшылық.
3. $1000009 = 235^2 + 972^2$ саны құрама сан екенін дәлелдеңіз.
Дәлелдеуі: Ферма-Эйлер теоремасы бойынша 4k+1 түріндегі жай сан тек бір түрде ғана қосындыға жіктелуі керек еді, ал бізге берілген сан бір түрде емес кемі екі түрде толық квадраттардың қосындысына жіктеледі және ол сан да 4k+1 түріндегі сан. $1000009 = 235^2 + 972^2 = 1000^2 + 3^2$. Сондықтан бұл сан жай сан бола алмайды. Шынымен де, егер тексеріп көрсек $1000009 = 293 * 3413$ түрінде көбейткішке жіктеледі.
4. **(Халықаралық Жәутіков олимпиадасы 2005 жыл)**
$p^2 + 4$ саны q-ға, ал $q^2 + 4$ саны p-ға бөлінетін, 2005-тен аспайтын барлық p, q жай сандарын табыңыз.
Жауабы. $(p, q) \in \{(2,2), (5,29), (29, 5)\}$.
Егер $p = q$ болса, онда олар 4-тің бөлгіштері болады, яғни $p = q = 2$. Бұл жағдайда $(p, q) = (2, 2)$ деген шешім аламыз.

Енді $p \neq q$ болған жағдайды қарастырайық, онда $p \neq 2, q \neq 2$ болатыны түсінікті. $p > q$ болсын дейік ($p < q$ жағдайы бұл жағдаймен бірдей шешіледі) $=> (p, q) = 1$. $p^2 + 4 \ \vdots\ q$, онда жоғарыда дәлелдеп кеткен теорема бойынша $q = 4k + 1$ түрінде ғана бола алады.

1. Егер $p = q^2 + 4$ болса, онда $2005 \geq p = q^2 + 4 > q^2 => 45 > q$. $4k + 1$ түріндегі 45-тен кіші жай сандардар : 5, 13, 17, 29, 37, 41. Қойып тексеріп көрсек тек q = 5 деген жауап сай келеді, қалған жағдайларда $q^2 + 4$ саны жай сан болмай қалады. Олай болса бұл жағдайда $(p, q) = (29, 5)$ деген шешім аламыз ($p < q$ жағдайында $(p, q) = (5, 29)$ болады).

2. $p \neq q^2 + 4$. Бұндай шешім болмайтынын дәлелдейік. Кері жорып $p \neq q^2 + 4$ шарты орындалатын шешім болсын дейік, ондай шешімдердің арасынан ең кіші қосындыға ие шешім (p_0, q_0) болсын (яғни $p_0 + q_0$ қосындысын қараймыз). Онда $(q_0, \frac{q_0^2+4}{p_0})$ жұбы да есеп шартын қанағаттандыратынын байқаймыз. Себебі, $(q_0^2 + 4) \ \vdots\ \frac{q_0^2+4}{p_0}$ және $(p_0, q_0) = 1, (p_0^2 + 4) \ \vdots\ q_0 =>$ $\left(\frac{q_0^2+4}{p_0}\right)^2 + 4 = \frac{q_0^4+8q_0+4(p_0^2+4)}{p_0^2} \ \vdots\ q_0$. $p_0 > q_0 > 2 => 4 < p_0^2 - q_0^2 <=> \frac{q_0^2+4}{p_0} < p_0 => p_0 + q_0 > \frac{q_0^2+4}{p_0} + q_0$, онда (p_0, q_0) жұбы ең кіші қосындыға ие шешім болмай қалды қайшылық.

Онда келесі жауаптар ғана есептің шартын қанағаттандырады:

$$(p, q) \in \{(2,2), (5,29), (29,5)\}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. – М.: МЦНМО, 2007. С. 403-404.
2. Кунгожин М.А., Кунгожин А.М., Долаев А.С., Байсалов Е.Р., Голованов А.С., Богданов И.И., Воронович И.И., Седракян Н.М.. Задачи международной Жаутыковской олимпиады по математике 2005-2021. Алматы, 2021. С.27-28.
3. Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант, № 3 (1999), С. 14-22.
4. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers // Vol. II. — Ch. VI. Sum of two squares.

ӘОЖ 512

Теоремаларды дәлелдеудің жалпы әдістері: анализ және синтез

Нағима Әшірбекқызы

[1]автор, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті магистранты (Қазақстан, Астана қ.), e-mail: nagima.menlibek@mail.ru

Н.Д. Мархабатов

[2] ғылыми жетекші, физика-математика ғылымдарының кандидаты,оқытушы-зерттеуші Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті (Қазақстан, Астана қ.), e-mail: nur_24.08.93@mail.ru

Аннотация. Біздің заманымызда математиканы оқыту процесінің тиімділігі көптеген факторлармен анықталады. Математикалық білім мен дағдыларды меңгере отырып, студенттер дәлелді дәлелдемелерді жүргізуге, анықтау, жіктеу, талдау және синтез сияқты күрделі категорияларды меңгеруге, индуктивті және дедуктивті пайымдау дағдыларына ие болуы керек.

Кіріспе

Мақала геометриялық тұжырымдарды дәлелдеу әдістеріне арналған. Олар мектеп оқушыларын оқытуда қолданылады. Мақалада теоремаларды дәлелдеудің екі негізгі жолы қарастырылады: талдау және синтез. Қазіргі білім беру үрдісіндегі басым бағыт ізгілендіру деп аталады. Білім беру жүйесіндегі жаңа міндеттер білім беруді тұлғаны дамытуға, атап айтқанда логикалық ойлауды қалыптастыруға бағыттауды ұсынады, бұл дәлелдеуді үйрету арқылы