bulmathmc.enu.kz

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№4 (125)/2018

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of the L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№4(125)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_ math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;
tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №4(125)/2018

МАЗМҰНЫ

**BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №4(125)/2018**

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №4(125)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, том 125, №4, 8-68 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.17**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций

Аннотация: Компьютерный (вычислительный) поперечник, как нам представляется, вполне отчетливо на уровне "На все времена!" напрямую формулирует главные задачи Теории приближений, Вычислительной математики и Численного анализа с сопровождающим сервисным обслуживанием компьютерных вычислений. При этом уже на стадии формулировки задачи к числу первых требований к корректности постановки относятся соответствующие неулучшаемые теоремы теории вложений. Вместе с тем, в них самих - здесь это Теоремы вложения и Теория приближений - имеются, говоря словами П.Л. Ульянова, *"внутренние проблемы"*. Тому и посвящена настоящая статья.

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) поперечник, Теория вложений, Теория приближений, классы и пространства функций, модули гладкости, наилучшие приближения.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182-2018-125-4-8-68

Введение

В статьях [1–3] был предложен новый взгляд на Теорию приближений, Вычислительную математику и Численный анализ в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П). Здесь начальным является определение

$$\delta_N(\varepsilon_N;D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;T;F;D_N)_Y \equiv$$
$$\equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \sup_{\substack{f\in F,\{\gamma_N^{(\tau)}\}_{\tau=1}^N \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1(\tau=1,....,N)}} \left\|Tf\,(\,\cdot\,)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}\,(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)},...,l_N^{(N)}\,(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_Y, \tag{1}$$

по сути представляющий собой неистощимый источник получения окончательных результатов "На все времена!"

Проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием *"Компьютерный (вычислительный) поперечник"*, заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении нижеследующих трех задач – К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3.

При заданных T,F,Y,D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp \delta_N\left(0;D_N\right)_Y \equiv \delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$ с построением конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$.

К(В)П-2: Для $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N\equiv\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\equiv\left(\tilde{\varepsilon}_N^{(1)},...,\tilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами – К(В)П-2-предельной погрешности (соответствующей оптимальному вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) такой, что $\delta_N\left(0;D_N\right)_Y\asymp\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\equiv$ $\sup\left\{\left\|Tf\left(\cdot\right)-\bar{\varphi}_N\left(z_1,...,z_N;\cdot\right)\right\|_Y:\ f\in F,\ \left|\bar{l}_\tau\left(f\right)-z_\tau\right|\le\tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}\left(\tau=1,...,N\right)\right\}$,

с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\varlimsup_{N\to+\infty}\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ из D_N (обычно связанное со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, построенных по функционалам $l_1^{(1)},...,l_N^{(N)}$ (в общей постановке не обязательно линейным), таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\varlimsup_{N\to+\infty}\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y/\delta_N(0;D_N)_Y=+\infty.$$

Если окажется, что в К(В)П-1 экстремальных вычислительных агрегатов будет больше одного, то по каждому из них проводится К(В)П-2,-3 анализ, поскольку их вычислительные качества определяются не только по величине предельной пограшности, но и по приспособленности структуры вычислительного агрегата к особенностям объекта применения.

"Теория приближений" и "Вычислительная математика" есть, по сути, замена сложного, в определенном смысле, объекта на простой объект, со структурными и вычислительными преимуществами соответственно, с обязательной оценкой возникающей при этом погрешности. Как нам представляется, К(В)П-1 в главном должен и может быть количественным описанием этой словестной формулировки. Именно, *Теорию приближений* и *Вычислительную математику* (линейный аспект) в контексте К(В)П-1 предлагается понимать так: при заданных T,F и Y с $D_N\equiv L_N\left(F\right)\times\left\{\varphi_N\right\}_Y$, составленном из всех возможных линейных функционалов над F и из $\left\{\varphi_N\right\}_Y$, требуется построить конкретный вычислительный агрегат $\overline{\varphi}\left(\bar{l}_1\left(f\right),...,\bar{l}_N\left(f\right),\cdot\right)$ со свойством

$$\delta_N\left(0;T,F,L_N\left(F\right)\times\left\{\varphi_N\right\}_Y\right)_Y\asymp\sup_{f\in F}\left\|Tf-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1\left(f\right),...,\bar{l}_N\left(f\right),\cdot)\right\|_Y.$$

Дальнейшие конкретизации К(В)П-постановки через $D_N\subset L_N\left(F\right)\times\left\{\varphi_N\right\}_Y$ приводят к специальным задачам типа *"Аппроксимативные возможности той или иной независимой системы", "Приближенное вычисление интегралов и иных сложных объектов"* и т.п. Особый случай *Теории приближений*и *Вычислительной математики*составляют D_N с нелинейными функционалами.

Далее, задачи К(В)П-2, -3, вместе с К(В)П-1 в совокупности составляют новую схему исследований, образующих, по нашему пониманию, *Численный анализ.*

При данных T,F и Y решение задачи К(В)П-1 по всевозможным вычислительным агрегатам по линейной информации $L_N\left(F\right)\times\left\{\varphi_N\right\}_Y$ полагается полным первичным основополагающим решением, с отнесением к Теории приближений, или же, как это цитируется в [2, стр. 73] *"В рамках современной терминологии Вычислительная математика – часть информатики, относящаяся к методологии применения ЭВМ для решения задач науки, техники, производства и практически всех областей человеческой деятельности".* с передачей в лоно *Вычислительной математики,* если оптимальный агрегат приближения $\bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f),...,\bar{l}_N(f);\cdot)$ носит выраженный вычислительный характер. Тем самым, вкупе с решениями К(В)П-2 и -3, получаем неограниченное количество задач с результатами "*На вечные времена*".

Затем исследуется К(В)П-задача при $D_N \equiv D_N(F)_Y$ из $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$, но только по всестороннему жесткому обоснованию. В составе чего, через выбор D_N, можно изучать вычислительные возможности конкретных систем.

Скорость $\delta_N(0, F, Tf, D_N)_Y \succ\prec ?$ можно *"загрубить"* в обмен на выигрыш (в *log*- и даже в степенной шкале) в вычислении (соответствующего таким ослабленным требованиям) агрегата $\overline{\overline{\varphi_N}}(\bar{\bar{l}}_1(f), ..., \bar{\bar{l}}_N(f), \cdot)$. Здесь главным источником исследований будут практические потребности для конкретных целей с неограниченным потенциалом уточнений и улучшений.

Теория вложений включается в теорию приближений в концепции [2, 3] в определении и выводе [2, стр. 37]:

"***Вложение класса*** F ***в*** E***:*** *Пусть α есть комплекс свойств, наложенных на множество F, β – комплекс более сильных, чем α свойств, определяющих множество E. Если комплекс свойств γ совместно с условием α обеспечивает теоретико-множественное включение $F \subset E$, то говорят" γ есть условие вложения F в E.*

Общий вывод: *для корректности величины $\delta_N\left(0; T; F; L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y\right)_Y$ необходимы дополнительные связи между T, F и Y в виде вложения $TF \subset Y$ (что может быть выпонено автоматически), в котором неулучшаемость условия вложения γ обеспечивает постановку задачи в самых широких (минимальных) условиях.*"

Теория приближений в полном объеме не ограничивается концепцией [2, 3], о чем говорилось в [2, стр. 76]:

"Конечно, «Теория приближений» в полном объеме не сводится к К(В)П-1 определению, поскольку в ней есть внутренние проблемы. Вот одна из них: *«Как быть с основными теоремами теории приближений?»*(привлеченные определения и обозначения см. в [4]):

Прямыми теоремами Джексона: $E_N(f)_p \ll \omega_\alpha\left(\frac{1}{N}; f\right)_p$

Обратными теоремами Бернштейна: $\omega_1\left(\frac{1}{N}; f\right)_p \ll \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_k(f)_p$

С порядковым равенством Потапова-Симонова:

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{N}; f\right)_p \asymp E_N(f)_p + \frac{1}{N^\alpha}\left\|\left(\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\alpha)}\right\|_{L^p(0,1)} \tag{2}$$

Версия ответа: это внутренние вопросы взаимоотношений между характеристиками подвергающихся приближению функций – структурных (как устроена функция) и конструктивных (как устроено средство приближения):*Прямые теоремы* отвечают на вопрос *«Как структурные свойства влияют на скорость приближения?»* и *Обратные теоремы* – *«Как скорости приближения влияют на структурные свойства?»*.

Теорема Потапова – Симонова показывает, что эти классические вопросы надо было ставить с привлечением дробного дифференцирования частичных тригонометрических сумм Фурье и получить точный порядковый ответ (2)."

Такие же *"внутренние проблемы"* имеются и в отношении Теории вложений, хотя [5] *"Теоремы вложения типа Критериев П.Л. Ульянова доказаны и для других, нежели H_p^ω, классов функций одного и многих переменных. Не исключено, что связи, аналогичные установленным в настоящей статье, между теоремами вложения и порядками соответствующих Компьютерных (вычислительных) поперечников имеют место и в этих случаях"*.

Основанием к данной статье послужил следующий эпизод.

Молва гласит, что 1967 году, когда П.Л. Ульянов в Алма-Ате рассказывал о своих знаменитых теоремах вложения [6], ему был задан вопрос *"Зачем все это нужно?"*, на что был ответ *"Конечно, в тракторостроении это не нужно, но есть внутренние проблемы теории функций, где в них есть потребность"*.

Оставаясь на позициях [1–3], обратимся к "внутренним проблемам" Теории приближений, когда в качестве "*сложного*" объекта выступают непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции, а приближающий *"простой"* объект $\varphi_N(f(t_1), ..., f(t_N); x) \equiv \varphi_N(x)$

формируется по значениям $f(x)$ в точках сетки $0 \leq t_1 < ... < t_N \leq 1$. Естественно ожидать, что значения $f(t_{k-1})$ и $f(t_k)$ отвечают за значения $f(x), t_{k-1} < x < t_k$.

Вместе с тем, даже для бесконечно гладких $f(x)$ означенные их значения могут сколь угодно далеки от представляющих их $f(t_{k-1}) = 0$ и $f(t_k) = 0$, со всеми отсюда вытекающими отрицательными последствиями (см. Рисунок 1): меняя значения $f(x)$ в точках $x, t_{k-1} < x < t_k$, но оставляя $f(t_{k-1}) = 0$ и $f(t_k) = 0$ неизменными, стало быть, неизменным и $\varphi_N(x)$, получим сколь угодно большие значения $|f(x) - \varphi_N(x)|$.

Конечно, здесь все дело в том, что значения $f(t_{k-1}) = f(t_k) = 0$ никак не отражают поведение $f(x)$ на интервале (t_{k-1}, t_k), где функция может сколь угодно быстро изменяться, а гладкость, соответственно, будет мала.

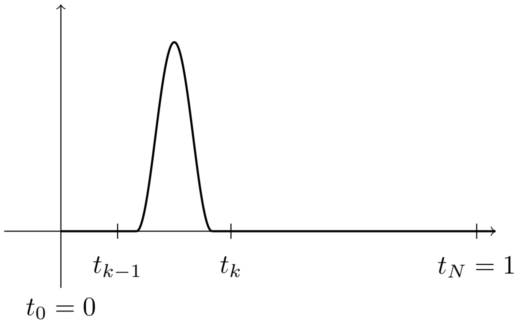

Рисунок 1

Анализ этого примера приводит к принципиальному выводу, что в постановке К(В)П-задач в той или иной мере должна присутствовать гладкость, в том или ином смысле ограничивающая изменение $f(x)$ при изменении x от t_{k-1} до t_k, механизм действия которого передан на Рисунке 2:

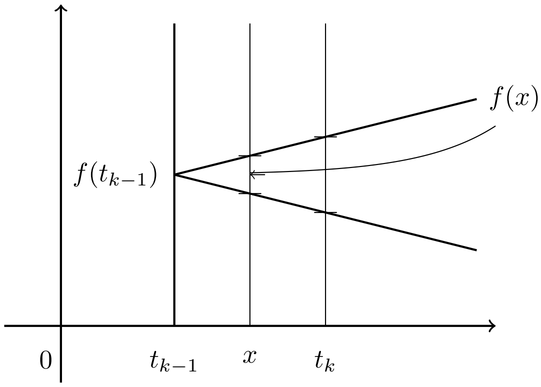

Рисунок 2

чем дальше от t_{k-1}, тем больше свободы для $f(x)$ представляет данный сектор ограничений, что и составляет суть назначения различных классов функций F, привлекаемых при исследовании данного круга вопросов.

Перейдем к самим классам в ключе их разновидностей.

§1. Классы и пространства функций

1. Классы функций как важнейшая составляющая постановки задач в непрерывной математике

Классы функций определяются заданием тех или иных свойств и ограничений, выделяющих элементы множества, составляющих класс, из общей массы всевозможных функций.

Грубо говоря, задачи Анализа состоят в том, чтобы выяснить, как одна группа свойств одних объектов отражается на группе свойств тех же или других объектов, каким-то образом связанных с первыми (в теории квадратурных формул - это связь скорости убывания их погрешности с гладкостью подынтегральной функции), а, поскольку, классы функций есть не что иное, как выделение разумных в том или ином смысле свойств функций, то задание классов составляют важнейшую часть постановок задач, стало быть, и содержания математических исследований. Так, в [7, стр. 201] читаем: *«Вопросы, относящиеся к хорошему с точки зрения теории аппроксимации разбиению непрерывных функций на классы, встречаются в громадном количестве работ».*

Пояснение 1. Классы функций, по мнению М.К. Потапова, - это то же самое, что множество функций, а пространство функций - класс, снабженный нормой (или полунормой). Такое объяснение находит подтверждение в Оглавлении монографии С.М. Никольского [8], в названиях глав которой читаем: *"Классы функций W, H и B "*, и, далее, *"Полнота пространств W, H и B "*, понятно, по причине определения полноты через норму. Пространства также называют классами, но никогда наоборот, чего будем придерживаться в данной статье.

Далее, с привлечением понятия класса могут быть уточнены постановки задач в различных областях математики, например, в дифференциальных уравнениях (см. [9, стр. 304-305]): *«... известный пример Адамара начальных данных $f_n(x) \equiv 0, g_n(x) = n^{-1}\sin nx$, дающих решение задачи Коши вида $u_n(x,y) = n^{-2} sh\, ny \sin nx$, говорит вовсе не об отсутствии непрерывной зависимости от начальных данных, как его обычно трактуют, а о том, что малые изменения начальных могут привести к тому, что мы выходим из совокупности начальных данных, для которых существует решение задачи Коши. В связи со сказанным целесообразно ввести понятие о классах корректности задачи Коши для уравнения Лапласа».*

Большой материал по теории конкретных функциональных пространств, играющих важную роль в Анализе и его приложениях, собран, переработан и изложен в обзорной статье [10] и в монографии Х. Трибеля [11]. Всюду в данной статье, если не оговорено противное, измеримость множеств и функций понимается в смысле s-мерной меры Лебега в $R^s (s = 1, 2, \dots)$.

2. Пространства Лебега. Классы и пространства Орлича

1) Пространства Лебега. Пусть $E \subset R^s$ -измеримое множество. Тогда в класс $L^p(E)$ относят все измеримые на E функции f такие, что конечны следующие нормы

1) Если $1 \le p < \infty$, то $\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
2) Если $p = \infty$, то под $L^\infty(E)$ понимается
   либо пространство равномерно непрерывных на E функций f и тогда

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(E)} = \sup_{x\in E} |f(x)|,$$

   либо пространство существенно ограниченных на E функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = vrai \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Под классом $L^{p,\infty} \equiv L^{p,\infty}\left((0.1)^s \times [0, +\infty)\right)$ будем понимать множество всех функций $g : R^s \times [0, +\infty) \to C$, таких, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ функция $g_t(x) = g(x, t)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих sпеременных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t\ge 0} \left(\int_{[0,1]^s} |g(x,t)|^p\, dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

Сюда же отнесем общую шкалу классов $\ell_s^p,\ 0 < p \le +\infty,$ определяемых как множество, составленное из всевозможных комплекснозначных последовательностей $c \equiv \{c_m\}_{m\in Z^s}$ таких, что конечна величина

$$\|c\|_{\ell_s^p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m\in Z^s} |c_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 0 < p < +\infty, \\ \sup\limits_{m\in Z^s} |c_m|, & \text{если } p = +\infty. \end{cases}$$

2) Классы и пространства Орлича (см., напр., [10]). Определенная на $(-\infty, +\infty)$ неотрицательная функция $\varphi(t)$ называется N-функцией, если она допускает представление $\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(t)\,dt$, где $p(t)$ -неубывающая на $[0,+\infty)$ функция, такая что

$$p(0) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty.$$

Множество $\varphi(L)$ всех тех измеримых на $[0,2\pi]$ функций $f(x)$, для которых $\int_0^1 \varphi(f(x))\,dx < +\infty$, называют *классом Орлича*, а его пополнение по линейности, снабженное нормой

$$\|f\|_\varphi = \sup\left\{\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\,dx : \int_0^{2\pi} \Psi(|g(x)|)\,dx \le 1,\ \Psi(y) = \sup p(t) \le y\right\},$$

- *пространством Орлича* $\varphi^*(L)$.

Также определим более общие классы $\varphi(L)$, где $\varphi(t) \ge 0$- четная, неубывающая неограниченная на $[0,\infty)$ функция. При заданном измеримом множестве E класс $\varphi(L) = \varphi(L;E)$ состоит из всех измеримых на E функции f таких, что $\int_E \varphi(f(x))\,dx < +\infty$.

Для нормированного пространства Y через $\varphi_Y(L)$ обозначим множество, составленное из всех f таких, что $\varphi(f) \in Y$ с $\|\varphi(f)\|_Y < +\infty$.

3. Классы Соболева, Никольского и Бесова W, H **и** B (см., напр., [10], стр. 48, 59 и 66-67, соответственно).

1) Классы Соболева $W_q^r(0,1)^s$ $(s = 1,\ 2,\ ...,\ r = 0,\ 1,\ ...,\ 1 \le q \le +\infty)$.

Класс Соболева $W_q^r(0,1)^s$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1,...,x_s)$, которые в случае $r > 0$ вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^q(0,1)^s$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_q^r} \equiv \|f\|_{L^q} + \sum_{j=1}^{s} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} f \right\|_{L^q} \le 1,$$

а в случае r=0 полагаем $W_q^r(0,1)^s = L^q(0,1)^s$.

2) Классы Соболева $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}$ (см. [12]). Для данного действительного числа $r \ge 1$ всякую непрерывную неубывающую на [0,1] функцию $\omega_r(\delta)$ такую, что

$$\omega_r(0) = 0 \text{и} \frac{\omega_r(\eta)}{\eta^r} \le C(\omega_r) \cdot \frac{\omega_r(\xi)}{\xi^r}$$

при некотором $C(\omega_r) > 0$ и всех $0 < \xi < \eta \le 1$, называют функцией типа модуля гладкости r-го порядка.

В качестве функций типа модуля гладкости r-го порядка можно указать функции вида $\delta^r \log^{r_1}\frac{1}{\delta}, \delta^r \log^{r_1}\frac{1}{\delta}\log\log^{r_2}\frac{1}{\delta}$ и т.п., где соответственно $r \ge 1, 0 < r_1 < +\infty, -\infty < r_2 < +\infty$.

Пусть $\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}$ - система функций типа модуля гладкости порядков $r_1,...,r_s$ соответственно. В дальнейшем, не ограничивая общности (в случае необходимости, переходя к $\left(\omega_{r_j}(\delta) + \delta^r\right)/(\omega_{r_j}(1) + 1)$), будем считать, что все функции ω_{r_j} $(j = 1,..,s)$ строго возрастают на $[0,1]$ и $\omega_{r_j}(1) = 1$.

Обратную к инъективной функции g будем обозначать через g^{-1} .

Рассмотрим функции $\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)$, обратные к $\omega_{r_j}(\delta)$, и положим

$$\delta = \tau^{-1}(\zeta) = \prod_{j=1}^{s} \omega_{r_j}^{-1}(\zeta)\,(0 \le \zeta \le 1).$$

Очевидно, что $\delta = \tau^{-1}(\zeta)$ является строго возрастающей непрерывной функцией на [0,1], причем $\tau^{-1}(0) = 0$ и $\tau^{-1}(1) = 1$.Функцию $\zeta = \tau(\delta)$, обратную к $\tau^{-1}(\zeta)$, следуя В.И. Коляде [13], будем называть средней функцией системы $\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}$.

Отметим, что в случае $\omega_{r_1}(\delta) = ... = \omega_{r_s}(\delta) = \omega_r(\delta)$ средняя функция этой системы, очевидно, есть функция $\zeta = \tau(\delta)$, обратная к функции $\delta = \tau^{-1}(\zeta) = \left(\omega_r^{-1}(\zeta)\right)^s$.

Класс $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега $\hat{f}(m)$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m\in Z^s} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega_{r_1}^2\left(\frac{1}{\overline{m_1}}\right)} + ... + \frac{1}{\omega_{r_s}^2\left(\frac{1}{\overline{m_s}}\right)}\right) \leq 1,$$

где Z^s - множество всех векторов $m = (m_1, ..., m_s)$ с целочисленными компонентами, $\overline{m_j} = \max\{1, |m_j|\}, j = 1, .., s$.

В частности, при $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j}$ классы $W_2^{\delta^{r_1},...,\delta^{r_s}}$ сводятся к обычным анизотропным классам Соболева $W_2^{r_1,...,r_s}$.

3. Классы Никольского - Бесова (см. [10, с. 75-76].

Пусть $s = 1, 2, ...$ и $k = 0, 1, 2, ...$,

$$Q_k = \left\{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s : -2^k \leq m_j \leq 2^k, \ j = 1, 2, ..., s\right\}, \ Q_{-1} = \emptyset, \ \Gamma_k = Q_k \backslash Q_{k-1}.$$

Здесь и далее для функций $f(x) \in L^p(0, 1)^s$ через $\hat{f}(m)$ обозначим тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,\,1]^s} f(x)\, e^{-2\pi i(m,x)} dx.$$

Для измеримой функции $g(x)$ положим

$$\|g\|_p^p = \int_{[0,1]^p} |g(x)|^p \, dx,$$

а для набора чисел $\{a(k)\}_{k\in A}$, где A – заданное счетное множество, через $\|a_k\|_{l^\theta(A)}$ обозначим $\sup\limits_{k\in A} |a(k)|$ при $\theta = +\infty$ и $\left(\sum_{k\in A} |a(k)|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$ при $1 \leq \theta < +\infty$.

Класс Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^r(0,1)^s$ $(s = 1, 2, ...; r > 0; 1 < p < +\infty; 1 \leq \theta \leq +\infty)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) \in L^p(0, 1)^s$ таких, что

$$\left\|2^{kr}\left\|\sum_{m\in\Gamma_k} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)}\right\|_p\right\|_{l^\theta(k\geq 0, k\in Z)} \leq 1.$$

4. Классы функций с доминирующей смешанной производной и гладкостью

Начнем с трех из них, определяемых в виде свертки функции, выполняющей роль производной определяемой функции, с соответствующим ядром, заданием скорости убывания в заданной норме разности значений функции в точках и скорости убывания коэффициентов Фурье соответственно:

1) Класс Соболева $SW_q^r(0,1)^s$ $(r > 0, \ 1 \leq q \leq +\infty)$ есть множество всех функций $f(x)$, представимых в виде $(y = (y_1, \ldots, y_s))$

$$f(x) = (\varphi * F_r)(x) = \int_{[0,1]^s} \varphi(x+y)\, 2^s \prod_{j=1}^{s} \sum_{k_j>0,\, k_j\in Z} (2\pi k_j)^{-r} \cos 2\pi (k_j y_j - r/4)\, dy,$$

где $\|\varphi\|_{L^q(0,1)^s} \leq 1$.

2) Класс Никольского $SH_q^r(0,1)^s$ $(r > 0, 1 \leq q \leq +\infty)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) \in L^p(0,1)^s$ таких, что для некоторого $l > r$ выполнено соотношение

$$\left\|\Delta_{h_1}^l ... \Delta_{h_s}^l f(x_1, ..., x_s)\right\|_{L^p(0,1)^s} \leq \prod_{j=1}^{s} |h_j|^r,$$

где $\Delta_{h_j} f \equiv \Delta_{h_j}^1 f = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, ..., x_s) - f(x_1, ..., x_s)$, $\Delta_{h_j}^k = \Delta_{h_j}\left(\Delta_{h_j}^{k-1}\right)$.

3) Класс Коробова $E_s^r(r > 1, s = 1, 2, ...)$ (см. [14]) состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\left|\hat{f}(m)\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{1; |m_j|\}\right)^{-r}.$$

4) Классы Никольского - Бесова - Аманова с доминирующей смешанной разностью (см., например, [10]). Пусть $r = (r_1, ..., r_s), r_j > 0, 1 \leq p < +\infty, \leq \theta \leq +\infty$. Класс $SB_{p,\theta}^{r_1,...,r_s}$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) \in L^p(0, 1)^s$ таких, что

$$\left\|2^{\tau_1 r_1+...+\tau_s r_s}\left\|\sum_{\substack{2^{\tau_j-1}\leq|m_j|<2^{\tau_j}-1,\\ j=1,...,s}} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)}\right\|_p\right\|_{l^\theta(\tau_j=1,2,...,j=1,...,s)} \leq 1.$$

Пояснение 2. Разрешение на такое название классов $SB_{p,\theta}^{r_1,...,r_s}$ нами было получено от академика АН СССР и России С.М. Никольского и члена - корреспондента РАН О.В.Бесова 3 июля 2003 года во время Международной научно-практической конференции «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», посвященной 80-летию со дня рождения члена-корреспондента АН Каз. ССР Тулеубая Идрисовича Аманова (1923-1978) в г. Семей (1-4 июля 2003 г.). См. также статью – Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН, 2007, т. 416, №2, с. 169-173.

5) Класс $E_s^\theta(\lambda)$**.** Пусть $\lambda(m) > 0$ $(m \in Z^s)$ и класс $E_s^\theta(\lambda)$ $(1 \leq \theta \leq +\infty)$ состоит из 1-периодических по каждой переменной суммируемых функций $f(x_1, ..., x_s)$ таких, что

$$\sum_{m\in Z^s} \lambda^{-1}(m) < +\infty$$

и

$$\left\|\lambda(m)\left|\hat{f}(m)\right|\right\|_{l^\theta(Z^s)} \leq 1.$$

Пусть

$$\lambda(m) = \prod_{j=1}^{s} \max(|m_j|, 1)^r, \; r > 1,$$

тогда при $\theta = +\infty$ множество $E_s^\infty(\lambda) \equiv E_s^r$ есть класс Коробова [14], а при $\theta = 2$ множество $E_s^2(\lambda) \equiv SW_2^r$ есть класс Соболева с доминирующей смешанной производной.

5. Классы Ульянова $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ **(см. [15])**

П.Л. Ульяновым были доказаны следующие теоремы:

Теорема А (П.Л. Ульянов [16]). *a) Пусть даны числа* $\alpha \in (0, +\infty)$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$ *и* $\theta \in (0, 1)$. *Тогда, если у 1-периодических функции* $f \in C^\infty$ *коэффициенты Фурье*

$$\left|\int_0^1 f(x)\, e^{2\pi i n x} dx\right| = \left|\hat{f}(n)\right| \leq A(f)\, |n|^\beta\, \theta^{|n|^{1/\alpha}}, \; |n| \geq 1, \tag{1}$$

то для любого целого $k \geq 1$

$$\max_{-\infty<x<+\infty}\left|f^{(k)}(x)\right| \equiv \left\|f^{(k)}\right\| \leq A(f)\, C_1(\alpha, \beta, \theta)\, k^\gamma q^k k^{k\alpha},$$

где

$$q = \left(\frac{\alpha}{e\ln\frac{1}{\theta}}\right)^\alpha, \; \gamma = \alpha\beta \textit{ при } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \textit{ и } \gamma = \alpha\beta + \alpha - \frac{1}{2} \textit{ при } \alpha \geq \frac{1}{2} \tag{2}$$

б) Для всяких чисел $\alpha \in (0,+\infty), \beta \in (-\infty,+\infty)$ *и* $\theta \in (0,1)$ *найдется функция* $f_0 = f_0(t;\alpha,\beta,\theta) \in C^\infty$ *такая, что для нее выполнены условия* (1) *и, кроме того,* $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \frac{\left\|f_0^{(k)}\right\|}{k^\gamma q^k k^{k\alpha}} > 0$, *где* q *и* γ *взяты из* (2).

Теорема B (П. Л. Ульянов [16])

а) Пусть даны числа $\alpha > 0, q > 0$ *и* $\tau \in (-\infty,+\infty)$. *Тогда если у 1-периодической функции* $f \in C^\infty$ *нормы*

$$\left\|f^{(k)}\right\| \le A(f)\, k^\tau q^k k^{k\alpha} \text{при} k \ge 1, \tag{3}$$

то

$$\left|\hat{f}(n)\right| \le A(f)\, C_2(\alpha,q,\tau)\, |n|^{\frac{\tau}{\alpha}} \theta^{|n|^{1/\alpha}} \text{при} |n| \ge 1, \tag{4}$$

где

$$\theta = e^{\frac{\alpha}{eq^{\frac{1}{\alpha}}}}$$

б) Для любых чисел $\alpha > 0, q > 0$ *и* $\tau \in (-\infty,+\infty)$ *существует функция* $f_0 = f_0(t;\alpha,q,\tau)$ *такая, что выполнено неравенство* (3) *и, однако,*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\left|\hat{f}_0(n)\right|}{n^{\frac{\tau}{\alpha}} \theta^{n^{\frac{1}{\alpha}}}} > 0,$$

где θ *взято из* (4).

На основе этих результатов П.Л. Ульянова [16] Н. Темиргалиевым [15] были определены классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, 1-периодических по каждой из $s (s = 1,2,\ldots)$ переменных и таких, что ($\overline{y} = \max\{|y|;1\}$):

$$\left|\hat{f}(m)\right| \le \prod_{j=1}^{s} (\overline{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\overline{m}_j^{\alpha_j^{-1}}} \psi_j(\overline{m}_j) (m \in \mathrm{Z}^s),$$

где $\beta = (\beta_1,...,\beta_s) \in R^s$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_s) \in (0,1]^s$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_s)$ $(\alpha_j > 0\ (j = 1,...,s))$, $\psi = (\psi_1,...\psi_s)$ ($\psi_j(x)$ - медленно колеблющиеся положительные функции при всех *j=1,...,s*, т.е. существуют пределы $\lim\limits_{y\to+\infty} \psi_j(y)\, y^\delta$ $(j = 1,...,s)$ и равны 0 или $+\infty$ в зависимости от того $\delta < 0$ или $\delta > 0$). $\hat{f}(m) = \hat{f}(m_1,...,m_s)$ - тригонометрические коэффициенты Фурье.

Шкала классов $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ представляет собой классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости до аналитических и их подклассов, включая известные классы Коробова [14] $E_s^r \equiv U_s\left(-r,\vec{1},\vec{1};\vec{1}\right)$, где $\vec{b} = (b,...,b) \in Z^s$ и $r = (r_1,r_2,...,r_s)$ с $r_j > 1$ при всех $j = 1,...,s$. Более того, при определенных значениях параметров, класс $U_s(\beta,\theta,\alpha) \equiv U_s\left(\beta,\theta,\alpha;\vec{1}\right)$ с точностью до постоянных сомножителей может быть определен не опосредованными типа формул Фурье, а прямыми ограничениями на саму бесконечно дифференцируемую функцию.

Именно, как это доказано в [16], при всех $\beta \in R^s, \theta \in (0,1)^s$, $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right]^s$ класс $U_s(\beta,\theta,\alpha)$ в указанном выше смысле совпадает с классом бесконечно дифференцируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$ таких, что для всех $k = (k_1, ..., k_s) \in Z^s$ $(k_j \ge 0\ (j = 1, ..., s))$ выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_s}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_s^{k_s}} f(x_1,...,x_s)\right\|_{C[0,1]^s} \le \prod_{j=1}^{s} \overline{k_j}^{\alpha_j\left(\beta_j+\overline{k_j}\right)} \left(\frac{\alpha_j}{e\ln\frac{1}{\theta_j}}\right)^{\alpha_j\overline{k_j}}.$$

6. Функциональные классы $\ell_s^p(D)$ (см. [17])

В качестве исходных рассмотрим классы Соболева с доминирующей смешанной производной, основанные на определении производной Вейля и равенстве Парсеваля: класс

$SW_2^r(0,1)^s$ состоит из всевозможных 1-периодических по каждой переменной функций f из класса Лебега $L^2(0,l)^s$ таких, что

$$\left\|f^{(r)}\right\|^2_{L^2(0,1)^s} = \sum_{m\in Z^s}\left|D_s(m)\hat{f}(m)\right|^2 \le 1.$$

где $f(x) \sim \sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}$. Здесь последовательно положено:

$$f^{(r)}(x) \equiv f^{(r_1,...,r_s)}(x_1,...,x_s) = \sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)\left(e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(r_1,...,r_s)}, \tag{5}$$

$$\left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(r_j)} = D(m_j)_{r_j}e^{i\eta_{r_j}(m_j)}e^{2\pi i m_j x_j},\ m_j\in Z,\ r_j\in R, \tag{6}$$

$$D(m_j)_{r_j} = \left(\overline{2\pi m_j}\right)^{r_j},\ \eta_{r_j}(m_j) = r_j\frac{\pi}{2}sign m_j,\ 1^{r_j}\equiv 1, \tag{7}$$

Заметим, что определение (5) отличается от определения производной $f^{(r_1,...,r_s)}$, данного в [18, стр. 238], тем, что в силу соглашений (6), (7) в записи $f^{(r_1,...,r_s)}$ учтены также коэффициенты Фурье $\hat{f}(m_1,...,m_s)$, в которых не все m_j отличны от нуля.

Таким образом, запись $f\in SW_2^r(0,1)^s$ означает, что последовательность

$$\left\{\left(\overline{2\pi i m_1}\right)^{r_1}e^{r_1 i\frac{\pi}{2}sign m_1}\cdots\left(\overline{2\pi i m_s}\right)^{r_s}e^{r_s i\frac{\pi}{2}sign m_s}\hat{f}(m_1,...,m_s)\right\}_{(m_1,...,m_s)\in Z^s},$$

или, что то же самое,

$$\left\{\left(\overline{2\pi i m_1}\right)^{r_1}\cdots\left(\overline{2\pi i m_s}\right)^{r_s}\hat{f}(m_1,...,m_s)\right\}_{(m_1,...,m_s)\in Z^s},$$

принадлежит классу ℓ_s^2.

Резюмируя изложенное выше, для данной положительной последовательности $D\equiv D_s\equiv\{D_s(m)\}_{m\in Z^s}$ и s последовательностей $\{\eta_j(m_j)\}_{m_j\in Z}$ $(j=1,\ ...,\ s)$ действительных чисел определим класс $\ell_s^p(D)$ как множество всех 1-периодических по каждой из sпеременных функций $f\equiv f(x)\equiv f(x_1,...,x_s)\in L(0,1)^s$ таких, что

$$\|f\|_{\ell_s^p(D)} \equiv \left\|\left\{D_s(m)e^{i\eta(m)}\hat{f}(m)\right\}_{m\in Z^s}\right\|_{\ell_s^p} \le 1,$$

где $\eta(m) = \eta(m_1)+...+\eta_s(m_s)$.

Тогда при

$$D_s(m_1,...,m_s) = \prod_{j=1}^s\left(\overline{2\pi m_j}\right)^{r_j},\ \eta_{r_j}(m_j) = r_j\frac{\pi}{2}sign m_j$$

получим, что $\ell_s^2(D)\equiv SW_2^{r_1,...,r_s}$ - класс Соболева с доминирующей смешанной производной, $\ell_s^\infty(D)\equiv E^{r_1,...,r_s}$ -класс Коробова и, вообще,

$$U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)\equiv\ell_s^\infty(D)\text{, где } D\equiv D_s = \left\{\left(\prod_{j=1}^s\bar{m}_j^{\beta_j}\theta_j^{\bar{m}_j^{1/\alpha_j}}\psi_j(m_j)\right)^{-1}\right\}_{m\in Z^s}.$$

7. Весовые классы Коробова (см. [19])

Пусть функция $g(y_1,...,y_s)$ определена на $R_+^s = [0,+\infty)^s$, является положительной и неубывающей по каждой из переменных y_j (при фиксированных остальных).

Если при некотором $c>0$ и всех $(y_1,...,y_s)\in R_+^s$ имеет место неравенство

$$g(2y_1,...,2y_s)\le cg(y_1,...,y_s),$$

то говорят, что функция g удовлетворяет Δ_2-условию.

Известно (см. [20, с. 15]), что всякая функция, удовлетворяющая Δ_2-условию, при возрастании аргумента возрастает не быстрее некоторой *степенной* функции. Так как квадратурные формулы Смоляка эффективны лишь на классах функций, тригонометрические коэффициенты Фурье которых убывают со скоростью не выше степенной (см. [15]), то при различных конкретизациях можно ограничиться четными монотонными функциями $D(m_1,...,m_s)$, удовлетворяющими Δ_2- условию.

Пусть даны число $r > 0$ и s положительных последовательностей $\{\gamma_j(\bar{m}_j)\}_{m_j\in Z}\,(j=1,...,s)$. Тогда класс $l^2\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{s}\left(\bar{m}_j\right)^r\gamma_j^{-1}(\bar{m}_j)}\right) \equiv H_s(r,\gamma)$ согласно [19] называют *весовым пространством Коробова.*

Обозначим через $SW_p^{(D_s,\eta)}$ множество функций $f(x)$ таких, что

$$\|f\|_{SW_p^{(D_s,\eta)}} \equiv \left\|\sum_{m\in Z^s} D_s(m)\,e^{i\eta(m)}\hat{f}(m)\,e^{2\pi i(m,\cdot)}\right\|_{L^p(0,1)^s} < +\infty.$$

8. Функциональные классы $\ell^*_{g,p,s}(D)$ (см. [17])

Классы иного вида получим при замене ℓ_s^p на дискретные классы типа Лоренца (см. п. 11) $\ell^*_{g,p,s}$ (см. [21]), где $1\le p<\infty, g(k)=g(k_1,...,k_s)$ -положительная последовательность, определенная на множестве $N_+^s = \{(k_1,...,k_s)\in Z^s:\,k_j\ge 1,\,j=1,\,...,\,s\}$. Именно, для данной комплекснозначной последовательности $c\equiv\{c_m\}_{m\in Z^s}$, обозначая через $\left\{c^*_{k_1,...,k_s}\right\}_{(k_1,...,k_s)\in N_+^s} = \{|c_{m_1,...,m_s}|\}^{*_1,...,*_s}_{(m_1,...,m_s)\in Z^s}$ невозрастающую перестановку (если такая существует) последовательности $\{|c_m|\}_{m\in Z^s}$, произведенную последовательно по переменным $m_1,...,m_s$ при фиксированных остальных, полагаем

$$\|c\|_{\ell^*_{g,p,s}} \equiv \left\{\sum_{(k_1,...,k_s)\in N_+^s}\left[g(k_1,...,k_s)\left(c^*_{k_1,...,k_s}\right)\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\|\{g(k)\,c_k^*\}_{k\in N_+^s}\right\|_{\ell^*_{g,p,s}}.$$

Тогда класс $l^*_{g,p,s}(D)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)\in L(0,1)^s$ таких, что конечна величина

$$\|f\|_{l^*_{g,p,s}(D)} \equiv \left\|\left\{D_s(m)\,e^{i\eta(m)}\hat{f}(m)\right\}^{*_1,...,*_s}_{m\in Z^s}\right\|_{l^*_{g,p,s}} \le 1.$$

В частности, при $g(k_1,..,k_s)=(k_1\cdot..\cdot k_s)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}}$, $1\le\alpha<\infty$, получаем пространства $l^*_{\alpha,p,s}$ с квазинормой

$$\|c\|_{\ell^*_{\alpha,p,s}} \equiv \left\{\sum_{(k_1,...,k_s)\,\in N_+^s}(k_1\cdot...\cdot k_s)^{\frac{p}{\alpha}-1}\left(c^*_{k_1,...,k_s}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le 1. \tag{8}$$

Согласно [22, стр. 184] под невозрастающей перестановкой комплекснозначной последовательности $\{c_m\}_{m\in Z}$ понимается перестановка в невозрастающем порядке последовательности $|c_0|,|c_1|,|c_{-1}|,\ldots$, из которой исключены нули, что обеспечивает, например, условие $\lim_{m\to\infty}c_m=0$.

Нарушение этого условия, вообще говоря, исключает возможность указанной перестановки. Например, последовательность, полученную разложением в последовательность всех рациональных чисел отрезка $\left[\frac{1}{2},1\right]$, нельзя переставить в порядке невозрастания.

Заметим, что применение определения невозрастающей перестановки, данной для функций, в случае последовательностей с дискретной мерой, когда каждая точка пространства N_+ имеет меру, равную 1 (см. [23]), приводит к тому, что «невозрастающая перестановка» последовательности $f(m)=1-\frac{1}{m}$ есть $f^*(k)\equiv 1$. Это говорит о том, что такой путь не ведет к цели, и, по-видимому, не может привести в принципе: счетное множество $\left\{1-\frac{1}{m}:m=1,2,...\right\}$ нельзя выписать в виде убывающей последовательности (см. также [17]).

Учитывая эти обстоятельства, при определении классов $l^*_{g,p,s}(D)$ всегда будем предполагать, что при всяком $j=1,2,...,s$ и всяком $(m_1,\ldots,m_{j-1},m_{j+1},\ldots,m_s)\in Z^{s-1}$ имеет место равенство

$$\lim_{m_j\to\infty}D(m)\,\hat{f}(m)=0.$$

Тем самым, классы типа $\ell_s^\infty(D)$, в частности E_s^r, не вписываются в шкалу классов $\ell_{\mathrm{g,p,s}}^*(D)$ (вопреки, напр., утверждению из [23, стр. 138 -139]).

Замечание 1. Некоторые мотивы к изучению классов с привлечением невозрастающих перестановок числовых последовательностей в теории рядов Фурье приведены в [22, стр.191-196].

Замечание 2. При $p=\infty$ определим $\ell_{\mathrm{g\,,p\,,s}}^*(D)$ как множество, составленное из всевозможных последовательностей $\{c_{\mathrm{m}}\}_{m\in \mathrm{Z}^s}$, для которых невозрастающие перестановки $\left\{c_{k_1\ldots,k_s}^*\right\}_{(k_1\ldots,k_s)\in \mathrm{N}_+^s}$ существуют и конечны величины

$$\|c\|_{\mathrm{l}_{\mathrm{g},\infty,s}^*}=\sup_{(k_1,\ldots,k_s)\in N_+^s} g\left(k_1,\ldots,k_s\right)\cdot c_{k_1,\ldots,k_s}^*.$$

Для $g\left(k_1,\ldots,k_s\right)=\left(k_1\cdots k_s\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}}$ при $=\infty$ полагаем $g\left(k_1,\ldots,k_s\right)=\left(k_1\cdots k_s\right)^{\frac{1}{\alpha}}$; тогда условие (8) для $l_{\alpha,\infty,s}^*$ сведется к условию

$$\|c\|_{l_{\alpha,\infty,s}^*}=\sup_{(k_1,\ldots,k_s)\in N_+^s}\left(k_1\cdots k_s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot c_{k_1,\ldots,k_s}^*<\infty,$$

которое совпадает с аналогичным условием из [24].

Замечание 3. Поскольку в определениях классов функций, данных в этом параграфе, величины

$$D\left(m_1,\ldots,m_s\right)e^{2\pi i\left(\eta_1(m_1)+\ldots+\eta_s(m_s)\right)},$$

обобщающие производные экспонент $e^{2\pi i(m,x)}$, берутся по модулю, то в обозначениях этих классов последовательности $\eta_1\left(m_1\right),\ldots,\eta_s\left(m_s\right)$ указывать не будем, а само $D\left(m_1,\ldots,m_s\right)$ будет предполагаться положительным.

9. Обобщенные пространства Морри

Пусть $\Phi(\delta)$ - положительная и неубывающая на $(0,+\infty)$ функция. Следуя Морри [25] (см. также [18, §27]) положим для функции

$$f(x)\in L^p(\Omega),\Omega\subset R^s,|\Omega|>0\,(0<p<\alpha;s=1,2,\ldots)$$

$$\|f\|_{p,\Phi,T}\equiv\sup_{E\in T}\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int_E|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\tag{9}$$

где T есть фиксированное семейство измеримых подмножеств Ω положительной конечной меры, содержащее возрастающую последовательность множеств, сходящуюся к Ω, а $|E|$ означает s −мерную меру Лебега измеримого множества E.

Приведем некоторые конкретизации исходного определения (9).

1°. Обобщенные пространства Лебега-Морри.

В случае $\Phi(\delta)\equiv 1$ норма $\|f(x)\|_{p,\Phi,T}$ совпадает с обычной лебеговской L^p- нормой, а в общем случае, в зависимости от величины интегралов от $|f(t)|^p$, принимаемых на выделенных измеримых подмножествах Ω, порождает еще одну классификацию функций из $L^p(\Omega)$ - классы Лебега - Морри $L_{p,\Phi,T}$ (см, напр., [26]) функций с конечной нормой (9):

$$L_{p,\Phi,T}=\left\{f\in L_{loc}^p:\ \|f\|_{p,\Phi,T}\equiv\sup_{E\in T}\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int_E|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.\tag{10}$$

В свою очередь, различные конкретизации T и Φ приводят к встречающимся в литературе разновидностям пространств Морри.

2°. Пространства Морри на основе параметризованных семейств множеств. Семейства T множеств положительной меры из области $\Omega\subset R^s$ могут задаваться параметрически (также можно сказать «*индексированными как отдельными числами, так и числовыми наборами, или же, более общими поддающимися интегрированию по ним переменными*»). Например $(\delta>0;\delta_1>0,\ldots,\delta_s>0)$

$$E_{x,\delta}=\left\{y\in\Omega\subset R^s:\|y-x\|_{R^s}<\delta\right\}\tag{11}$$

и

$$E_{x,\delta_1,\ldots,\delta_s}=\left\{y=(y_1,\ldots,y_s)\in\Omega\subset R^s:|y_j-x_j|<\frac{\delta_j}{2}\,(j=1,\ldots,s)\right\} \qquad (12)$$

В общем случае ($B\subset(0,+\infty)$ в условиях (11) либо $B\subset(0,+\infty)^s$ при (12)),

$$T=T\left(\Omega_T,B\right)=\left\{E_{x,b}\subset\Omega\subset R^s:x\in\Omega_T\subset\Omega,\,b\in B\right\}, \qquad (13)$$

причем

$$\Omega=\bigcup_{x\in\Omega_T,b\in B}E_{x,b},|E_{x,b}|<+\infty,(x\in\Omega_T,b\in B). \qquad (14)$$

В условиях определений и обозначений (11)–(14) приходим к следующей конкретизации определения (10) пространств Лебега – Морри ($0<p<\infty,\Omega\subset R^s$ - измеримое множество положительной меры)

$$T_1\equiv T\left(\Omega_1,\Delta_1\right)=\{E_{x,\delta}\subset\Omega:x\in\Omega_1\subset\Omega,\delta\in\Delta_1\subset(0,+\infty)\} \qquad (15)$$

и

$$L_{p,\Phi,T(\Omega_1,\Delta_1)}=\left\{f\in L^p_{loc}:\ \|f\|_{p,\Phi,T_1}\equiv\sup_{x\in\Omega_1,E_{x,\delta},\delta\in\Delta_1}\frac{1}{\Phi\left(|E_{x,\delta}|\right)}\left(\int\limits_{E_{x,\delta}}|f\left(t\right)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}, \qquad (16)$$

$$T_2\equiv T\left(\Omega_2,\Delta_2\right)=\{E_{x,\delta_1,...,\delta_s}\subset\Omega:\ x\in\Omega_2\subset\Omega,\ (\delta_1,...,\delta_s)\in\Delta_2\subset(0,+\infty)^s\} \qquad (17)$$

и

$$L_{p,\Phi,T(\Omega_2,\Delta_2)}=$$

$$=\left\{f\in L^p_{loc}:\ \|f\|_{p,\Phi,T_2}\equiv\sup_{x\in\Omega_2,E_{x,\delta_1,...,\delta_s},(\delta_1,...,\delta_s)\in\Delta_2}\frac{1}{\Phi\left(|E_{x,\delta_1,...,\delta_s}|\right)}\left(\int\limits_{E_{x,\delta_1,...,\delta_s}}|f\left(t\right)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}, \qquad (18)$$

и, в общем случае (13)–(14),

$$L_{p,\Phi,T(\Omega_T,B)}=\left\{f\in L^p_{loc}:\ \|f\|_{p,\Phi,T}\equiv\sup_{x\in\Omega_T,b\in B}\frac{1}{\Phi\left(|E_{x,b}|\right)}\left(\int\limits_{E_{x,b}}|f\left(t\right)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}. \qquad (19)$$

В целях дальнейшей конкретизации параметризованных определений пространств Лебега-Морри, обратимся известным в литературе локальным и глобальным пространствам Морри (см., напр., [27] и имеющуюся в ней библ.).

В случае (11) последовательно получаем $|E_{x,\delta}|=V\left(s\right)\delta^s$ где $V\left(s\right)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$

Отсюда, $\delta=\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}$, далее, положим по определению $\omega\left(\delta\right):=\Phi^{-1}\left(\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right)=$ $\Phi_1^{-1}\left(|E_{x,\delta}|\right)$, где $\Phi_1\left(\delta\right):=\Phi\left(\left(\frac{\delta}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right)$.

Тогда при $\Omega=R^s$ получаем соответственно

$$L_{p,\Phi^{-1}\left(\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right),T(\{0\},(0,+\infty))}=:LM_{p,+\infty,\omega} \qquad (20)$$

и

$$L_{p,\Phi^{-1}\left(\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right),T(R^s,(0,+\infty)^s)}=:GM_{p,+\infty,\omega} \qquad (21)$$

- локальные и глобальные пространства Морри (в терминах [27]).

Таким образом, как это видно из определений (9) – (21) *локальные и глобальные пространства Морри* являются конкретизациями общего определения (9) –(10).

Добавление множителей вида $\varphi(\delta)$ и $\varphi(x,\delta)$ под знак *sup* в определениях (15)–(21)приводит к, как называют в [27], соответствующим *обобщенным пространствам Морри.*

И ещё одну серию пространств Морри составляют пространства, получающихся при весовом интегрировании или, что тоже самое, при «усреднении» по параметрам (с одновременным ослаблением условий на $\Phi(\delta)$ как положительной измеримой на $(0,+\infty)$ функции).

3°. **Пространство Морри на основе «усреднений» по параметризованным множествам.** Положим

$$\|g\|_{L_h^\theta(B)}=\begin{cases}\sup\limits_{B} vrai\, h(b)\,|g(b)| & \text{при } \theta=+\infty\\ \left(\int_B h(b)\,|g(b)|^\theta\,d\mu(b)\right)^{\frac{1}{\theta}} & \text{при } 0<\theta<+\infty,\end{cases}$$

где $h(b)$ - весовая функция.

Тогда, по определению, в общем случае (13)–(14) положим ($0<\theta\le+\infty$)

$$\|f\|_{p,\Phi,T,\theta}=\sup_{x\in\Omega_T} vrai\left\|\|f\|_{p,\Phi,E_{x,b}}\right\|_{L_h^\theta(B)},\tag{22}$$

где

$$\|f\|_{p,\Phi,E}=\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int_E|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности, согласно (15) –(16) и (17) – (18) получим при $0<\theta<+\infty$

$$\|f\|_{p,\Phi,T(\Omega_1,\Delta_1),\theta}=\sup_{x\in\Omega_1}\left(\int_{\Delta_1}\left(\frac{1}{\Phi(|E_{x,\delta}|)}\left(\int_{E_{x,\delta}}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^\theta d\delta\right)^{\frac{1}{\theta}}\tag{23}$$

и

$$\|f\|_{p,\Phi,T(\Omega_2,\Delta_2),\theta}=\sup_{x\in\Omega_2}\left(\int_{\Delta_2}\left(\frac{1}{\Phi(|E_{x,\delta_1,\dots,\delta_s}|)}\left(\int_{E_{x,\delta_1,\dots,\delta_s}}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^\theta d\delta_1\dots d\delta_s\right)^{\frac{1}{\theta}}.\tag{24}$$

Соответственно, с продолжением от $\theta=+\infty$ к $0<\theta<+\infty$ определений (20) и (21), получим

$$LM_{p,\theta,\omega}=L_{p,\Phi^{-1}\left(\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right),T(\{0\},(0,+\infty)),\theta}\tag{25}$$

и

$$GM_{p,\theta,\omega}=L_{p,\Phi^{-1}\left(\left(\frac{|E_{x,\delta}|}{V(s)}\right)^{\frac{1}{s}}\right),T(R^s,(0,+\infty)^s),\theta.}\tag{26}$$

4°. **Изотропные пространства Соболева – Морри (см. [28]).**

Пусть даны числа $s\,(s=1,2,\dots)$, $r\,(r>0)$ и $1\le p<\infty$. Классом Соболева – Морри $W^r_{p,\Phi,"}(\Omega)$, Ω- область в R^s, называют множество всех тех измеримых на Ω функций $f(x)$, для каждой из которых конечна норма

$$\|f\|_{W^r_{p,\Phi,T}(\Omega)}\equiv\|f\|_{p,\Phi,T}+\sum_{i=1}^{s}\|D_i^r f\|_{p,\Phi,T}.\tag{27}$$

Здесь $D_i^r f(x)$ – производная порядка r по i – ой переменной в $x=(x_1,x_2,\dots x_s)$, $\|\cdot\|_{p,\Phi,T}$ есть норма $\|\varphi\|_{p,\Phi,T}\equiv\sup\limits_{E\in T}\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int_E|\varphi(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где T есть заданное семейство измеримых множеств положительной меры из Ω.

Полагая в (27) $r = (r_1, ..., r_s)$ получаем *анизотропные* пространства Соболева – Морри (см. [29])

$$\|f\|_{W^{r_1,...,r_s}_{p,\Phi,T}(\Omega)} \equiv \|f\|_{p,\Phi,T} + \sum_{i=1}^{s} \|D_i^{r_i} f\|_{p,\Phi,T}\,.$$

Для степенных функций $\Phi(\delta) = \delta^{\alpha}$ классы $W^{r}_{p,\Phi,T}(0,1)^s$ впервые были изучены Морри [25]. В дальнейшем, эти исследования были продолжены в работах различных авторов (см. [10, с. 39-40], [18, §27], [28–33] и т.п.).

5°. **Пространства Никольского-Бесова-Морри, Лизоркина-Трибеля-Морри** и т.п., получаются при замене в соответствующих определениях Лебеговых $L^p(\Omega)$-норм на нормы (10) в пространствах Лебега – Морри $L_{p,\Phi,T}(\Omega)$ (см., напр., [26–33]).

Все построения (9) - (27) разновидностей норм и полунорм Морри (с прилагательными) производились на основе L^p – пространств Лебега. То же получается при замене L^p –норм на смешанные, симметричные и иные нормы.

10. Классы H_p^{ω} (см. [6])

Пусть $\omega(\delta)$-непрерывная на [0,1] функция, удовлетворяющая условиям
$0 = \omega(0) \le \omega(\delta) \le \omega(\delta+\eta) \le \omega(\delta) + \omega(\eta)$ при всех $0 \le \delta \le \delta + \eta \le 1$.

Такие функции называют *модулями непрерывности.*

Пусть $1 \le p \le \infty$ (причем $L^{\infty}(0,1) \equiv C[0,1]$) и $f \in L^p(0,1)$. Модулем непрерывности (в L^p) функции f называют

$$\omega_p(\delta, f) = \begin{cases} \sup\limits_{0<h\le\delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \; при\, 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{|x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)| \; при\, p = \infty. \end{cases} \tag{28}$$

где $\delta \in (0,1]$.

Пусть $\omega(\delta)$-модуль непрерывности и $1 \le p \le \infty$. Через H_p^{ω} обозначают множество всех функций $f \in L^p(0,1)$ таких, что $\omega_p(\delta; f) \le \omega(\delta)$ при всех $\delta \in (0,1]$.

Теперь перейдем к определению модулей гладкости произвольного порядка.

Пусть $\Omega = [0, 2\pi]$ или же $\Omega = [0, 1]$ (в первом случае речь будет идти о 2π-периодических функциях).

Для $\beta > 0$ и целого $\nu \ge 0$ полагают $\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu > 1$, $\binom{\beta}{\nu} = \beta$ для $\nu = 1$ и $\begin{pmatrix} \beta \\ \nu \end{pmatrix} = 1$ для $\nu = 0$.

Для целого положительного k *модулем гладкости* k*-го порядка* (в $L^p, 1 \le p \le \infty$) функции $f(x) \in L^p(\Omega)$ называют функцию $(L^{\infty} \equiv C)$

$$\omega_k(\delta, f)_p = \mathop{sup}_{0<h<\delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x+\nu h) \right\|_{L^p(\Omega_{k,h})}, \tag{29}$$

где $\Omega_{k,h} = [0,\pi]$ для функций 2π - периодических и $\Omega_{k,h} = [0, 1-kh]$ в остальных случаях.

Для произвольного положительного α *модулем гладкости дробного порядка* α 2π - периодической функции $f \in L^p$ называют функцию

$$\omega_{\alpha}(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta} \|\Delta_h^{\alpha} f(x)\|_{L^p(\Omega)}, \tag{30}$$

где

$$\Delta_h^{\alpha} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu) h)$$

- разность порядка α функции f с шагом h в точке x.

Ясно, что если $\alpha = k$-целое положительное, то это определение совпадает с (29). При $\alpha = 1$ модуль гладкости называют модулем непрерывности, причем в наших обозначениях (см. (28)–(30)): $\omega_p(\delta; f) \equiv \omega_1(\delta; f)_p$.

Всякую непрерывную неубывающую на $[0,1]$ функцию $\omega_\alpha(\delta)\,(\alpha \geq 1)$ такую, что $\omega_\alpha(0) = 0, t^{-\alpha}\omega_\alpha(t) \leq c\delta^{-\alpha}\omega_\alpha(\delta) \quad (0 < \delta < t \leq 1)$ называют *функцией типа модуля гладкости порядка* α .

Аналогично определению H_p^ω :

$$H_p^{\omega_\alpha} = \left\{ f \in L^p(0,1) :\, \omega_\alpha(\delta, f)_p \leq \omega_\alpha(\delta)\,(0 \leq \delta < 1) \right\}.$$

11. Пространства Лоренца. Более тонкой классификацией функций, нежели пространства Лебега $L^p(0,1)$, являются пространства Лоренца $L(\mu, \nu)$:

$$L(\mu,\nu) = \left\{ f(x) \in L(0,1) :\, \|f\|^\nu_{L(\mu,\nu)} \equiv \int_0^1 [f^*(t)]^\nu t^{\frac{\nu}{\mu}-1} dt < \infty \right\}, \tag{31}$$

где $f^*(x)$ - равноизмеримая невозрастающая перестановка $|f(x)|$, т.е.

$$f^*(t) = \inf\left\{ y > 0 : mes\left\{ x \in [0,1] : |f(x)| > y \right\} < t \right\}.$$

Другими словами, невозрастающая неотрицательная на $[0,1]$ функция $[f^*(x)]^\nu$ (интеграл от которой равен $\|f\|^\nu_{L^\nu(0,1)}$), умноженная на степенную функцию $t^{\frac{\nu}{\mu}-1}$, которая при $\frac{\nu}{\mu} - 1 > 0$, т.е. при $\nu > \mu$ «помогает» сходимости интеграла

$$\int_0^1 [f^*(x)]^\nu \, t^{\frac{\nu}{\mu}-1} dt,$$

тем самым, расширяя исходный класс $L^\nu(0,1)$, в то время как при $\frac{\nu}{\mu} - 1 < 0$, т.е. при $0 < \nu < \mu$ ситуация обратная и получаем «сужение» класса $L^\nu(0,1)$.

И, наконец, в случае $\nu = \mu$ получаем равенство множеств $L^\nu(0,1) = L(\nu, \nu)$.

В математической литературе встречаются другие варианты определения (31), основным в которых является перестановка f^* , быть может с различными усреднениями и весами (не обязательно степенными). Так, Л.А. Шерстневой [34,35] дано следующее определение.

Пусть ψ - выпуклая вверх неубывающая функция на $[0,1]$ такая, что $\psi(0) = 0$,

$$\alpha_\psi = \varliminf_{t \to 0+} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1, \beta_\psi = \varlimsup_{t \to 0+} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} < 2.$$

Пространство Лоренца $\Lambda(\psi, \nu)\,, 0 < \nu \leq \infty$ состоит из всех измеримых, 2π - периодических функций $f(x)$, для которых конечен функционал

$$\|f(x)\|_{\Lambda(\psi,\nu)} = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{\psi(x)}{x} \int_0^x f^*(t)\,dt \right]^q \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{q}}, 0 < \nu < \infty, \\ \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} \frac{\psi(x)}{x} \int_0^x f^*(t)\,dt, \nu = \infty. \end{cases}.$$

12. История возникновения пространств Бесова может служить ещё одним примером как трудно добываются научные истины, но затем становятся для всех "*понятными*" (а для автора досадными – "*С чего я так долго крутился вокруг очевидного*").

Действительно, казалось бы все просто и естественно (здесь ограничимся одномерным $r = \overline{r} + \alpha$, $\overline{r}$ -целое неотрицательное, $0 < \alpha \leq 1$ случаем). Были известны банаховы функциональные пространства Никольского $H_p^r(R)$,

$$\|f\|_{H_p^r} = \|f\|_{L^p} + \left\| \frac{f^{(\overline{r})}(\cdot + h) - 2f^{(\overline{r})}(\cdot) + f^{(\overline{r})}(\cdot - h)}{h^\alpha} \right\|_{L^\infty(R)} < +\infty$$

и здесь достаточно норму $\|\cdot\|_{L^\infty} = \|\cdot\|_{vrai\sup}$, как это только потом стало общепринятым, заменить на норму $\|\cdot\|_{L^\theta\left(R, \frac{dh}{h}\right)}$ и получить банаховы функциональные пространства Бесова $B^r_{p,\theta}(R)$ (см. [139]).

По нашей просьбе Олег Владимирович поделился воспоминаниями об истории возникновения пространств Бесова. "*Семейство пространств С.М.Никольского обладает рядом важных свойств, например, оно замкнуто по отношению к теоремам вложения* *и их обращениям. В случаях целого положительного значения r эти пространства не совпадают с пространствами Соболева той же гладкости. О.В. Бесов предпринял попытку изучить пространства Соболева методом С.М.Никольского, т.е. с помощью аппроксимаций целыми функциями конечной степени. Им было установлено с помощью преобразования Фурье, что при $p = 2$ и натуральных r можно построить пространство $B^r_{2,2}$, совпадающее с пространством Соболева W^r_2. В качестве обобщения он рассмотрел четырёхпараметрическое семейство банаховых пространств $B^r_{p,\theta}(R^n)$, обладающее свойствами семейства пространств Никольского. При $p = \theta = 2$ и целых положительных r эти пространства совпадают с пространствами Соболева $W^r_2(R^n)$."*.

Много различных задач приводят к пространствам Бесова, вот один из них (см. [140], а также [141, стр. 207]): Пусть $u = u(x,t)$ – решение краевой задачи $(0 < r < 1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u(t > 0), u = f(t = 0)$. Тогда

$$B^r_{p,\theta} = \{f \in \Phi' | f \in L^p, \left(\int\limits_0^\infty (t^{1-r} \left\|\partial u/\partial t\right\|_p)^\theta dt/t\right)^{1/\theta} < \infty\}.$$

К тому же добавим еще одно замечательное свидетельство *"надежности математической номенклатуры"* – это интерполяционная теорема [141, стр. 182]

$$(W^{r_1}_p, W^{r_2}_p)_{\alpha,\beta} = B^{(1-\alpha)r_1+\alpha r_2}_{p,\theta} \quad (0 < \alpha < 1),$$

где два разных Соболевских пространств интерполяционно соединяют именно пространства Бесова. Тем самым, Олега Бесова (в ту пору еще аспиранта!) интуиция не подвела – пусть и не в первоначальном замысле по замкнутости, но "*кровная*" связь с пространствами Соболева есть.

§2. Теория вложений и приближений

В этом параграфе, как, впрочем, и во всей этой статье, мы ограничимся рассмотрением классов и результатов служащих целям данной статьи (всюду ниже в этом параграфе будем пользоваться определениями и обозначениями модуля гладкости и соответствующих классов из §1, хотя для удобства чтения здесь воспроизводим некоторые из них). Отметим также, что нумерация в каждом пункте - своя.

1. Прямые и обратные задачи теории приближений (в одной метрике)

Центральными понятиями теории вложений и приближений являются понятия *модуля непрерывности (гладкости)* и *наилучшего приближения*(полиномами по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$), которые для $f(x) \in L^p(a,b)(1 \le p \le \infty, L^\infty \equiv C)$, определяются соответственно равенствами:

$$\omega_1(\delta; f)_p \equiv \omega_p(\delta; f) \equiv \begin{cases} \sup\limits_{0<h\le\delta} \left\{\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ если } 1 \le p < \infty \\ \max\limits_{a\le x<y\le b} |f(x) - f(y)|, \text{ если } p = \infty \end{cases}$$

и ($\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ - ортогональная на $[a,b]$ система; n=1,2, ...)

$$E_n(f)_p \equiv E_n(f; \{\varphi_k\})_p = \inf_{c_1,\dots c_n} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(\cdot)\right\|_{L^p(a,b)}.$$

Общепринято, что модуль гладкости и наилучшие приближения отражают совершенно различные свойства функции – структурные (как быстро изменяется на промежутке задания) и конструктивные (как хорошо приближается линейной комбинацией функций, принятых в качестве эталонных) соответственно, и в этом заключается «интрига» темы.

Тем самым, следующие соотношения между ними (здесь ортогональная система – тригонометрическая; $1 \le p \le \infty$; *n=1,2,...*)

$$E_n(f)_p \le c\omega_p\left(\tfrac{1}{n}, f\right) \tag{1}$$

и

$$\omega_p\left(\tfrac{1}{n},f\right) \le c\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k\left(f\right)_p \qquad (2)$$

составляют основу теории и называются соответственно прямыми и обратными теоремами теории вложений и приближений (а им подобные - теоремами типа Джексона и типа Бернштейна соответственно, - по именам авторов (1) и (2)).

Тем не менее, развитие теории приближений, даже в ее основах, продолжается.

Здесь в качестве показательного примера можно привести следующее, в какой-то мере неожиданное, соотношение Потапова – Симонова [7, 36] (в одной и той же метрике $p, 1 < p < \infty; \alpha > 0$)

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{n}; f\right)_p \asymp E_n(f)_p + n^{-\alpha}\left\|S_n^{(\alpha)}\left(f\right)\right\|_p (n=1,2,...), \qquad (3)$$

показывающее, что если привлечь еще и частичные суммы $S_n\left(f\right)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L^p\left(0,2\pi\right)$ по спектру $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx$, по которому производится наилучшее приближение, то структурные и конструктивные характеристики функции f «смыкаются».

В связи с чем еще раз повторим, что основная ценность неравенств Джексона (1) и Бернштейна (2) состояла именно в выраженных в них соотношениях между этими принципиально разными характеристиками свойств функций – структурной и конструктивной.

При $\alpha = 1$ из (2)–(3) следует цепочка неравенств $(1 < p < \infty;\ n = 1, 2, ...)$:

$$c_1\left(p\right)\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right) \le E_n(f)_p + \frac{\left\|S_n'\left(f\right)\right\|_p}{n} \le c_2\left(p\right)\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right) \le$$
$$\le c_3\left(p\right)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k\left(f\right)_p. \qquad (4)$$

Покажем, что из (4) следуют уточнения неравенств Джексона и Бернштейна.

Уточнение неравенства (1): из (4) следует

$$\frac{\left\|S_n'\left(f\right)\right\|_p}{n} + E_n\left(f\right)_p \le c_2\left(p\right)\omega_p\left(\tfrac{1}{n}; f\right), \qquad (5)$$

так что в (1), по сравнению с (5), «потеряно» *целое слагаемое* $\frac{\|S_n'(f)\|_p}{n}$ - «представитель» гармонического анализа!

Уточнение неравенства (2): из (4) следует

$$c_1\left(p\right)\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right) \le E_n(f)_p + \frac{\left\|S_n'\left(f\right)\right\|_p}{n} \le c_3\left(p\right)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k\left(f\right)_p, \qquad (6)$$

откуда

$$c_1\left(p\right)\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right) \le E_n(f)_p + \frac{\left\|S_n'\left(f\right)\right\|_p}{n}. \qquad (7)$$

Как это следует из (6), сумма $E_n(f)_p + \frac{\|S_n'(f)\|_p}{n}$ «вклинивается» в неравенство (2), тем самым, можно сказать, «существенно улучшает» (2), поскольку, разные аналитические выражения редко бывают эквивалентными (что, конечно, надо будет подтвердить примерами, однако здесь мы этим заниматься не будем).

2. Теоремы вложения (вокруг подхода П.Л. Ульянова)

В постановках различных задач участвуют разные множества, составленные из всех функций для каждой из которых выполнены заранее объявленные свойства, т.е. классы функций. Изучение взаимоотношений между классами составляет предмет *теории вложений* - необъятного раздела теории функций с многочисленными ответвлениями в многие области математики. При этом постановка задач теории вложений, по существу, заключается в выяснении неулучшаемых соотношений между числовыми и функциональными параметрами, определяющих два класса, при выполнении которых один из них в том или ином смысле содержится в другом.

Пусть $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности (см.§1) и $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$-положительная последовательность, убывающая к нулю $(\lambda_n \downarrow 0)$.

Положим $(1 \le p \le \infty)$

$$H_p^{\omega} \equiv \{f \in L^p(0,1) : \omega_p(\delta, f) = O(\omega(\delta))\, (\delta \to +0)\}, H_p^{\delta^{\alpha}} \equiv Lip(\alpha, p)$$

и (ортогональная система - тригонометрическая)

$$E_p(\lambda) \equiv \{f \in L^p(0,1) : E_n(f)_p = O(\lambda_n)\, (n = 1, 2, ...)\}.$$

Первая теорема вложения была получена Титчмаршем [37] в 1927 году. Этот результат был усилен Харди и Литтлвудом [38], доказавшими вложение $(1 \le p < q \le \infty)$

$$Lip(\alpha, p) \subset Lip(\alpha - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), q). \tag{1}$$

В свою очередь, неусиляемость в определенном смысле вложения (1) была установлена П.Л. Ульяновым [6] в 1967 году.

Утверждение (1) фактически означает, что функция, имеющая степенную гладкость в метрике L^p, при переходе к более сильной метрике L^q в степенной же шкале теряет гладкость на величину $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Отметим, что эта величина неизменно присутствует в теоремах вложения разных метрик для классов дифференцируемых функций многих переменных – Соболева $W_p^r(0,1)^s$, Никольского $H_p^r(0,1)^s$, Бесова $B_{p,\theta}^r(0,1)^s$, равно как и в теоремах вложения Т.И. Аманова [39] для классов функций с доминирующей смешанной производной $SB_{p,\theta}^r(0,1)^s$, где гладкость r теряется соответственно на величины $s(1/p - 1/q)$ и $(1/p - 1/q)$.

В развитой теории вложений классов функций одного и многих переменных, где преимущественно исследовались классы, определяемые значениями числовых параметров, в середине 60-ых годов П.Л. Ульянов сформулировал, и в ряде важнейших случаев, на основе разработанных им же тонких методов метрической теории функций, получил решение новых задач, заключающихся в нахождении необходимых и достаточных условий вложения для классов функций, определяемых заданными функциями - прямо или опосредствованно характеризующих произвольную гладкость, что, заметим, и сделало содержательными эти новые постановки.

Впоследствии, теория вложений в стиле постановок П.Л Ульянова была предметом исследований многих математиков из разных стран: В.А Андриенко, Э.А. Стороженко, В.И Коляда, М.К. Потапов, М.Ф. Тиман, Л. Лейндлер, О.В.Бесов, В.П. Ильин, П. Освальд, Н. Яхонссон, Ю.В. Нетрусов, М.Л. Гольдман, М.Мильман, К.Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев, К.Сулейменов, М. Сихов, М. Жайнибекова, С. Кудайбергенов, Л.К. Панджикидзе, Е. Айдосов, Л.А. Шестернева, Л.В. Матвиюк, Б.В.Симонов, С.Ю.Тихонов, З Дициан (Z.Ditzian) и В. Тотик (V. Totik), Г. Акишев, М. Есмаганбетов и другие.

Хотя результаты П.Л. Ульянова относились только к одномерному случаю, представленные в них новые методы исследований и новые постановки задач о вложении классов функций многих переменных привели к новым результатам или существенному дополнению известных результатов как в одномерном, так и в многомерном случаях (см. напр., [4, 7, 10, 26, 28, 29, 33–35, 43, 45, 48–62, 64, 70–76, 78, 80, 87, 89, 103, 124, 127–131]).

Первая общая теорема вложения, носящая характер необходимых и достаточных условий, выраженных через произвольный модуль непрерывности, доказана П.Л. Ульяновым [6] и состоит в следующем $(1 \le p < q < \infty)$:

$$H_p^{\omega} \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q(1/n) < \infty. \tag{2}$$

Здесь достаточность одновременно доказана также в работах Петре [40] – Гривара [41] – Головкина [42].

П.Л. Ульянов также сформулировал и решил задачу, ответ на которую дан в следующем критерии $(1 \le p < q < \infty)$

$$H_p^{\omega} \subset H_q^{\omega^*} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left\{ \omega^* \left(\frac{1}{m} \right) \right\} \ (m \uparrow \infty), \tag{3}$$

где дополнительные условия на $\omega\,(\delta)$ в [6] были полностью сняты В.А. Андриенко [43].

В случае $q = \infty\,(L^{\infty} \equiv C)$, $1 < p < \infty$ имеет место критерий Ульянова [44]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1} \omega \left(\frac{1}{k} \right) < +\infty \ \Leftrightarrow \ H_p^{\omega} \subset C \tag{4}$$

и критерий Андриенко [45]

$$H_p^{\omega} \subset H_{\infty}^{\omega^*} \Leftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-1} \omega \left(\frac{1}{k} \right) = O\left\{ \omega^* \left(\frac{1}{n} \right) \right\} \ (n \uparrow \infty). \tag{5}$$

Критерию (2) предшествовал такой же замечательный критерий [46] (содержащийся в (2) при $p = 1$ и $q = 2$)

$$H_1^{\omega} \subset L^2\,(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2\,(1/n) < \infty. \tag{6}$$

Для классов $E_p(\lambda)$ с заданными мажорантами наилучших приближений тригонометрическими полиномами имеет место следующий аналог критерия (6) (см. [47]-достаточность и [48] – необходимость)

$$E_1\,(\lambda) \subset L^2\,(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty,$$

а в общем случае $(\mu \equiv \{\mu_n\}, \mu_n \downarrow 0)$:

$$E_p(\lambda) \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \lambda_n^q < +\infty (1 \le p < q < \infty) \tag{7}$$

и

$$E_p(\lambda) \subset E_q(\mu) \Leftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)^{\frac{q}{p}-2} \lambda_k^q = O(\mu_n^q)(1 < p < q < \infty) \tag{8}$$

Достаточность в (7) доказана П.Л. Ульяновым [47], необходимость – В.И. Колядой [49], в частном случае $p = 1 < q < \infty$ - Н. Темиргалиевым [48](такие случаи наложения исследований П.Л. Ульянов всегда одобрял: *«Значит работаете в полный такт с другими»*).

Критерий (8) доказан В.И. Колядой [50], причем представленному там условию вложения предшествовало его же условие [49]:

$$(\nu_{m+1} - n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \lambda_n + \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} (\nu_{k+1} - \nu_k)^{\frac{q}{p}-1} \lambda_{\nu_k}^q \right\}^{\frac{1}{q}} = O(\mu_n)(\nu_m \le n < \nu_{m+1}), \tag{9}$$

где $\nu_0 = 0, \nu_{n+1} = \min\{k : \lambda_{\nu_n} \ge 2\lambda_k\}\,(n = 0, 1, ...)$.

Перейдем к многомерному случаю. Пусть задана система модулей непрерывности $\{\omega_1; ...; \omega_s\}$. *Средним модулем непрерывности* для этой системы, следуя В.И. Коляде [13, 51], назовем функцию (см. также п.3 из §1)

$$\omega\,(\delta) = \inf_{\substack{\delta_1 ... \delta_s = \delta \\ 0 \le \delta_i \le 1}} \max_{1 \le j \le s} \omega_j\,(\delta_j) \ (0 \le \delta \le 1). \tag{10}$$

Если $f \in L^p(0,1)^s$, то средним модулем непрерывности $\omega_p(f;\,\delta)$ функции f называют средний модуль для системы $\left\{\omega_p^{(i)}\,(f;\,\delta)\right\}_{i=1}^{s}$, где $(i = 1, ..., \mathrm{s})$

$$\omega_p^{(i)}\,(f;\delta) = \sup_{0\le h_i\le\delta}\left(\int_0^1 ... \int_0^{1-h_i} ... \int_0^1 |f\,(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_s) - f\,(x_1, ..., x_s)|^p\,dx_1...dx_s\right)^{\frac{1}{p}}$$

есть i-тый частный модуль непрерывности.

Многомерный аналог (4), как это установлено В.И. Колядой [52], выглядит так: вложение (здесь $1 \le p < \infty, \omega_i(\delta)$ – строго возрастающие модули непрерывности)

$$H_p^{\omega_1,...,\omega_s} = \left\{f\,(x) \in L^p\,(0,1)^s : \omega_p^{(i)}\,(f;\delta) = O\,(\omega_i\,(\delta))\,(i = 1, ..., s)\right\} \subset C\,(0,1)^s \qquad (11)$$

имеет место тогда и только тогда, когда для $\omega\,(\delta)$ из (10) сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$, где в случае необходимости предполагается, что модули непрерывности $\omega_1, \ldots, \omega_s$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{m=1}^{n}\omega_i\left(\frac{1}{m}\right) = O\left\{n\omega_i\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\,(i = 1, \ldots\, s)\,. \qquad (12)$$

Выполнение вложения (11) означает, что каждая функция $f \in H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$ эквивалентна некоторой функции, непрерывной на $[0,1]^s$, а обратное утверждение – в классе $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$ найдется существенно неограниченная, стало быть, существенно разрывная функция f .

Н.Темиргалиевым [58–61] был получен аналог критерия (4) для изотропных классов $H_{p,s}^{\omega} \equiv H_p^{\omega,\ldots,\omega}$ функций многих переменных (без дополнительных условий (12)).

Критерий (5) в многомерном случае, как это установлено В.И. Колядой [52], заключается в следующем:

Пусть $s < p < \infty, \omega_1\,(\delta)\,,\ \ldots,\ \omega_s\,(\delta)$ - строго возрастающие модули непрерывности, ω - средний модуль и ω^{-1} - функция, обратная к ω . Если $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_s$ - модули непрерывности и

$$\int_0^{\omega^{-1}(\omega_i(\delta))} t^{-1-\frac{1}{p}}\omega\,(t)\,dt \;=\; O\,\{\eta_i\,(\delta)\}\,(i = 1, ..., s)\,, \qquad (13)$$

то каждая функция из $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$ эквивалентна некоторой функции класса $H_\infty^{\eta_1,\ldots,\eta_s}$.

Далее, условие (13) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы любая функция из $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$, где каждая ω_i удовлетворяет (12), была эквивалентна некоторой функции класса $H_\infty^{\eta_1,\ldots,\eta_s}$.

Тем самым (случай $q < \infty$ см. в статье В.И.Коляды [13]), при дополнительных условиях (12) для всех $1 \le p < q \le \infty$ критерии вложения

$$H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s} \subset L^q\,(0,1)^s \qquad (14)$$

и

$$H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s} \subset H_q^{\eta_1,\ldots,\eta_s}$$

полностью определяются поведением среднего модуля непрерывности $\omega\,(\delta)$ системы $\{\omega_1, ..., \omega_s\}$.

Что же происходит, если (12) не выполнено?

Справедлив критерий В.И. Коляды [51]: вложение (14) в случае $(1 \le p < q < \infty)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{s}\varepsilon_i\,(n)\right)\right)^{q/p-1} 2^{n[s(q/p-1)-q]} < \infty, \qquad (15)$$

где sup берется по всем неотрицательным последовательностям $\varepsilon_i\,(n)\,(i = 1, ..., s)$ таким, что $(k = 1, 2, ...)$

$$\sum_{n=1}^{k}\varepsilon_i^p\,(n) \le 2^{-k}\left[\omega_i^{-1}\left(2^{-k}\right)\right]^{-1}, \text{ где } g^{-1} - \text{функция, обратная к } g.$$

П.Л. Ульянов, которому принадлежит постановка задачи (14), критерий (14)–(15) В.И. Коляды, равно как и все приведенные здесь предыдущие критерии, называл выдающимся результатом. Как и большинство других результатов этого редкой силы аналитика, которым созданы мощные методы анализа, нашедшие применение при решении многих задач как внутри темы, так и вне математиками из разных стран, в том числе и из Казахстана.

Об уровне трудности решения задачи (14) и, соответственно, сложности нахождения необходимого и достаточного условия (15), говорит тот факт, что даже в частном случае степенных модулей непрерывности $\omega_i(\delta) = \delta^{\alpha_i}$, выполнение и невыполнение условия (15) представляет собой сложную картину взаимоотношений между $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, p и q, состоящую в следующем.

Пусть $0 < \alpha_j \le 1, 1 \le p < \infty$,

$$\overline{\alpha} \equiv \left(\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_s}\right)^{-1} < \frac{1}{p} \text{ и } q^* = \frac{p}{1 - \overline{\alpha} p}.$$

Если все $\alpha_j < 1\,(j = 1, \dots, s)$, то вложение

$$Lip\,(\alpha_1, \dots, \alpha_s; p) \equiv H_p^{\delta^{\alpha_1}, \dots, \delta^{\alpha_s}}(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s \tag{16}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $q < q^*$ (С. М. Никольский).

Если все $\alpha_j = 1\ (j = 1, \dots, s)$ и $q = q^*$, то вложение (16) справедливо (Гальярдо-Ниренберг-Соболев).

Стало быть, остается неизученным случай, когда хотя бы одно $\alpha_i = 1$ и хотя бы одно $\alpha_j < 1$.

При $1 \le p < \infty, 0 < \alpha_j \le 1\ (j = 1, \dots, s), \overline{\alpha} < \frac{1}{p}, q = q^*$ для того, чтобы имело место вложение (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) хотя бы одно из чисел α_i равно 1;

2) если $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_t}$ - все те из чисел α_j, которые меньше 1, то $\left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_{i_t}}\right)^{-1} \ge \frac{1}{p}$.

Все эти рассуждения наводят на мысль, что содержащаяся в (15) последовательность $\{\varepsilon_i(n)\}$ возникла не из-за недостаточности метода доказательства, а по существу, как объединяющая в одно условие различные взаимоотношения между определяющими класс модулями непрерывности $\omega_1(\delta), \dots, \omega_s(\delta)$ и числовыми параметрами p и q, как это было в самом простом (в смысле сложности задания $\omega_j(\delta)$, но никак не самого доказательства даже в этом частном случае!) случае степенных модулей непрерывности.

Во всяком случае, преобразование условия (15) к более простому виду, если предположить, что это возможно, уже никак не связано с полностью решенной задачей (14) исследования структурных свойств функций.

Как оказалось, в случае задачи дискретизации решений волнового уравнения, ответ при определенных условиях на анизотропные модули гладкости, выражается именно через средний модуль непрерывности В.И. Коляды (см. [137]).

В случае задач (11) и (14), как выше отмечалось, в изотропном случае $\omega(\delta) = \omega_1(\delta) = \dots = \omega_s(\delta)$ имеют место критерии

$$H_{p,s}^{\omega} \equiv H_p^{\omega, \dots, \omega} \subset C(0,1)^s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{s}{p}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \tag{17}$$

и

$$H_{p,s}^{\omega} \equiv H_p^{\omega, \dots, \omega} \subset L^q(0,1)^s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{s\left(\frac{q}{p}-1\right)-1} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \tag{18}$$

без каких-либо условий на модули гладкости $\omega(\delta)$.

Критерий (17) был доказан Н.Темиргалиевым (случай $s < p < \infty$ см. [58], а случай $1 \le p \le s$ в [59]). Достаточность в (18) была установлена Н.Темиргалиевым в [62], необходимость В.И.Колядой в [13].

В связи с критериями (10) - (16) возникает вопрос, с которым автор этих строк обратился к В.И. Коляде (с результатами фундаментального значения [13, 49–57]) с просьбой объяснить «внутреннюю причину» почему вложение $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s} \subset L^q$ для любых $\omega_1, \dots, \omega_s$, без каких-либо условий регулярности, не определяется одним только средним модулем непрерывности?

Ведь тогда, ещё в начале 70-ых годов XX века, когда из Одессы приехал В.И. Коляда с докладом на семинар «Теория функций действительного переменного» Д.Е. Меньшова и П.Л. Ульянова в МГУ им.М.В. Ломоносова, казалось, что все многомерные теоремы вложения анизотропных классов решаются именно через средние модули непрерывности (см. [13], а также [51, 52]). Здесь, конечно, интересны, что называется «с первых рук», разъяснения В.И. Коляды, с разрешения которого здесь воспроизводим его ответ (14.IV.2011):

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_s$ - система строго возрастающих модулей непрерывности $(\omega_i(1) = 1)$. Пусть $\eta_i = \omega_i^{-1}$ - обратные функции, $\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i$. Тогда средний модуль непрерывности ω совпадает с функцией η^{-1}, обратной к функции η. В 1973 году мной был получен следующий результат.

<u>Теорема</u>. Пусть $1 \le p < q < \infty$ и $\omega_1, \dots, \omega_s$ - модули непрерывности. Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(q/p-1)} \omega(2^{-k})^q < \infty \qquad (1)$$

(ω - средний модуль непрерывности). Тогда

$$H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s} \subset L^q. \qquad (2)$$

Здесь $2^{k/p}\omega(2^{-k})$ заменяет значение $f^*(2^{-k}) - f^*(2^{-k+1})$, и 2^{-k} - мера. Условие (1) можно записать так

$$\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k/p}\omega(2^{-k})]^q 2^{-k} < \infty,$$

и оно становится вполне понятным. Его можно преобразовать. Пусть $\omega(2^{-k}) \sim 2^{-\nu}$; тогда $2^{-k} \sim \eta(2^{-\nu})$. Получается условие

2

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\eta(2^{-\nu})^{-1/p} 2^{-\nu} \right]^q \eta(2^{-\nu}) < \infty . \qquad (1')$$

Грубо говоря, $\eta(2^{-\nu})$ - мера множества, на котором f принимает значения, оцениваемые через $\eta(2^{-\nu})^{-1/p} 2^{-\nu}$. Если обозначим

$$\lambda_i(\nu) = \frac{1}{2^{\nu} \eta_i(2^{-\nu})},$$

то условие $(1')$ перепишется так:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{s} \lambda_i(\nu) \right)^{q/p-1} 2^{\nu[s(q/p-1)-q]} < \infty, \quad (3)$$

Это условие равносильно условию (1). Оно достаточно для вложения (2), но необходимым, вообще говоря, не является. Средний модуль не определяет однозначно вложений класса $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s}$. Для двух систем $\{\omega_1,\dots,\omega_s\}$ и $\{\omega_1',\dots,\omega_s'\}$ средний модуль может быть один и тот же, и при этом может оказаться, что

$$H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s} \subset L^q, \text{ а } H_p^{\omega_1',\dots,\omega_s'} \not\subset L^q.$$

Необходимое и достаточное условие для (2)

4

функций класса $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s}$ проявляются такие эффекты, для которых точные количественные оценки выражаются не через последовательности $\lambda_i(\nu)$, а через некоторые последовательности $\{\varepsilon_i(\nu)\} \in \Lambda_i$.

Что и говорить, условие (4) сложное, А что говорить о такой задаче:

$$H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_s} \subset H_q^{\sigma_1,\ldots,\sigma_s} \quad ?$$

Здесь вообще ничего не ясно. В этом круге вопросов сделано очень мало.

С свете приведенных здесь задач и их решений, вспоминается, как в начале 70-ых годов нам довелось в качестве аспиранта, занимающегося теорией вложений, участвовать в обсуждении член-корр. АН СССР Д.Е. Меньшовым, Е.М. Никишиным и С.В. Бочкаревым цикла работ П.Л. Ульянова, выдвинутых на соискание Государственной премии СССР (которую ему всё-же присудили, но не в СССР, а в суверенной России).

Нас тогда поразило, что не (2), а более частный критерий (6) был ими оценен как выдающийся, тем более, что (6) доказывается применением известных результатов, тогда как при доказательстве (2) был создан, как уже отмечалось выше, новый тонкий метод в теории вложений.

Это обсуждение наложило на нас отпечаток того (быть может, в какой-то мере отраженный и в этой статье), что помимо всего прочего, следует учитывать и такие составляющие полученного ответа на поставленную задачу как простота, явная выраженность через исходные данные задачи и красота результата.

При этом, *выраженность через исходные данные* может быть различной. Может быть *непосредственной* через параметры задачи, как это наблюдается в критериях (2)-(8). Может быть *опосредованной* через вспомогательные составляющие как объединение в одном условии различающихся в существенном частных случаев, но каждое из которых опять же выражено только через параметры задачи, как в критерии (14)-(15).

Таким образом, **в записи решения обозримый выход на исходные параметры задачи всегда должен быть.**

Вместе с тем, надо иметь ввиду, что разумно поставленная задача может быть, как когда-то выразился П.Л. Ульянов, *«неблагодарной»* в том смысле, что не имеет решений, формулируемых непосредственно в исходных терминах. Этим мы также объясняем часто используемый здесь термин "*обозримое*" решение (надеемся, что приводимые здесь результаты таковыми являются, что уже относит их к разряду значимых).

Задачи.

1°. К настоящему времени многие из задач, поставленных П.Л Ульяновым, решены. Вместе с тем, данная тематика имеет продолжение в новых постановках задач, где первоначальная идея замены степенной функции на модуль гладкости, т.е. ведущей характеристики на более общую, переносится и на другие составляющие уже изученных классов, что опять же приводит к содержательным задачам получения необходимых и достаточных условий вложения этих обобщенных классов.

Примерами таких классов являются классы Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^{\omega(\delta)}(R^s)\left(B_{p,\theta}^{r}(R^s)=B_{p,\theta}^{\delta^r}(R^s)\right)$ обобщенной гладкости (см., напр., [63] и [10, с. 78-133]).

Несмотря на большое количество публикаций, теория многомерных вложений ещё далека от завершения.

2°. Как это выше отмечалось В.И. Колядой, неизвестны критерии вложений $(s=2,3,...;1\le p<q\le\infty;\ 0<\theta,\gamma\le\infty)$

$$H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s}(0,1)^s\subset H_q^{\eta_1,\dots,\eta_s}(0,1)^s\,, \tag{19}$$

$$B_{p,\theta}^{\omega_1,\dots,\omega_s}(0,1)^s\subset L^q(0,1)^s\,, \tag{20}$$

$$B_{p,\theta}^{\omega_1,\dots,\omega_s}(0,1)^s\subset B_{q,\gamma}^{\eta_1,\dots,\eta_s}(0,1)^s \tag{21}$$

при произвольных модулях гладкости $\omega_1,...,\omega_s,\eta_1,...,\eta_s$ **.**

Не исключено, что здесь критерии будут в общем случае в том или ином виде повторять критерий (14)-(15) В.И. Коляды, которые же при условиях типа (12) опять будут выражены через средний модуль гладкости (10) (что, напр., в задаче (20) имеет место в статье [64]).

3°. Задачи типа (19)-(21) допускают дальнейшие обобщения путем замены L^p - норм на смешанные $L^{p_1,\dots,p_s}$ - нормы и нормы пространств Орлича, Лоренца, Морри и т.д. (см. §1).

Разумеется, здесь в первую очередь должны быть полностью изучены классы функций, определяемые посредством числовых параметров и выяснены неулучшаемые соотношения между ними, обеспечивающие вложения одних таких классов в другие (и в явном виде включены во все обзоры и монографии по теме).

4°. Случай вложения классов функций, определенных на произвольных областях (отличных от $(0,1)^s$ и R^s) также относится к малоизученным.

Сформулируем следующую задачу П.Л. Ульянова [65]: «... *нам неизвестны необходимые и достаточные условия вложения классов функций многих переменных, определенных на областях достаточно общего вида*».

Здесь результатов совсем немного (см. [63, с. 414-415], [10, с. 90-94]). Один из интересных моментов в этой задаче состоит в выяснении того, как геометрия области и, разумеется, показатель гладкости отразятся в условии вложения (многие известные теоремы вложения имеют такой же вид, что и для всего евклидова пространства, где влияния границы нет).

В этой тематике к эталонным мы отнесли бы критерий С.К. Водопьянова и В.М. Гольдштейна [66], к формулировке которого переходим.

Если область $\Im\subset R^s$ такова, что для любой функции f из класса $F(\Im)$ существует функция u из класса $F(R^s)$, сужение $u|_\Im$ на $\Im$ которой совпадает с f, то говорят, что область $\Im$ удовлетворяет условию продолжения $F(R^s)|_\Im=F(\Im)$.

Для заданной области $U\subset R^s$ через $\wp_p^1(U)$ обозначим класс функций u с полунормой (∇u - градиент u)

$$\|u\|_{\wp_p^l(U)}=\left(\int_U|\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

В случае плоских областей $\Im\subset R^2$ имеет место следующий замечательный критерий.

Теорема (см. [67, теорема 3.1]). *Для того чтобы неограниченная односвязная область G удовлетворяла условию продолжения $\wp_2^1\left(R^2\right)\big|_G=\wp_2^1(G)$, необходимо и достаточно, чтобы граница ∂G области G являлась жордановой кривой, удовлетворяющей условию Альфорса [68]: для любых её трех точек ζ_1,ζ_2,ζ_3 выполнено условие*

$$|\zeta_3-\zeta_2|\,/\,|\zeta_2-\zeta_1|\le C,$$

где точка ζ_3 лежит между ζ_1 и ζ_2, а постоянная C не зависит от выбора точек.

По-видимому, к исходным задачам здесь можно отнести нахождение необходимых и достаточных условий вложения соболевских пространств ($r > 0, 1 \le p < q \le \infty, \Omega \subset R^s$ - произвольная область)

$$W_p^r(\Omega) \subset L^q(\Omega). \tag{22}$$

В частности, пусть $\gamma(t)$ - четная строго возрастающая на [0, 1] функция, такая что $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ и $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\gamma(t)}{t} = +\infty$. Положим

$$\Omega = \Omega_\gamma = \left\{(x_1, x_2) : -1 \le x_1 \le 1, \gamma(x_1) \le x_2 \le 1\right\}. \tag{23}$$

Не исключено, что в случае (4) критерий вложения (3) имеет вид

$$\int_0^1 \gamma^A(t) t^B dt < +\infty,$$

где A и B числовые параметры, зависящие от p, q и r и подлежащие определению.

Первоначальные задачи типа (22)-(23) теории вложений на областях в контексте "эффекта границ", равно как и задачи продолжения как с сохранением класса, так и с потерей гладкости, очевидным образом распространяются на общий многомерный случай.

3. Методы гармонического анализа широко применяются при решении задач из различных областей математики (см. об этом статью Е.М.Никишина [69, стр. 880]), к которым относятся и задачи из данной статьи

В связи с этим, в частности в задачах восстановления, возникает специфическая задача продолжения функции, определенной на области $\Omega \subset (0,1)^s$ на единичный куб $[0,1]^s$, с сохранением свойств.

Специфика состоит в том, что дополнительно требуется следующее. Пусть на $[0,1]^s$ задано конечное множество (сетка) $\xi_1, ..., \xi_N$. Необходимо, чтобы значения продолженной функции в точках сетки из $[0,1]^s \backslash \Omega$ выражались, желательно линейным образом, через значения исходной функции в точках сетки из Ω. Разумеется, речь идет о непрерывных функциях (во всяком случае с вполне определенными значениями).

Возвращаясь к основной теме статьи, среди доказанных нами теорем вложения [48, 58–62, 70, 71] к наиболее значимым мы относим следующий критерий вложения в пространство Лоренца.

4. Критерий вложения классов H_p^ω в пространства Лоренца $L(\mu,\nu)$

Как это уже отмечалось в п.11 (§1), более тонкой классификацией функций, нежели $L^p(0,1)$, являются пространства Лоренца $L(\mu,\nu)$, которые при $\mu = \nu = p$ совпадают с $L^p(0,1)$.

К центральным в теории вложений относится критерий (2) из п. 2 Ульянова вложения классов H_p^ω в пространство Лебега $L^q(0,1)$ $(1 \le p < q < \infty)$:

$$H_p^\omega \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2} \omega^q\left(\frac{1}{k}\right) < \infty. \tag{1}$$

Возникает естественная задача вложения H_p^ω в пространство Лоренца $L(\mu,\nu)$, ответ на который следующий (см. Н.Темиргалиев [70, 71])

$$H_p^\omega \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, \ \textit{если}\, \mu > p,\, 0 < \nu < \infty, \\ \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, \ \textit{если}\, 0 < \nu < p. \end{cases} \tag{2}$$

Ясно, что в случае $1 \le p < q = \mu = \nu < +\infty$, критерий (2) сводится к (1).

Во всех остальных случаях имеет место вложение $L^p(0,1) \subset L(\mu,\nu)$, так что задача в (2) теряет смысл.

В условиях актуального ныне вопроса об оценке результатов, когда ведущие по направлениям специалисты брали на себя научную ответственность, отметим, что еще в 1980 году критерий (2) П.Л.Ульянов оценил как основной докторский результат. В свете дальнейшего развития темы можно прийти к выводу, что принципиальный результат в (2) заключается, по-видимому, в выяснении *полной* картины решения исследуемой задачи как предъявления всех возможных видов окончательного ответа (с переносом такой постановки во все аналогичные задачи).

В более развернутом изложении критерий (2) есть

Теорема (Н. Темиргалиев [70,71]). *Пусть даны $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности и числа $1 \le p < \infty, 0 < \nu < \infty, 0 < \mu < \infty$. Тогда*

1) если $\mu > p$, $0 < \nu < \infty$, то для выполнения вложения

$$H_P^{\omega} \subset L(\mu, \nu) \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^{v}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

сходился;

2) если $\mu = p$ и $0 < \nu < p$, то для выполнения вложения

$$H_P^{\omega} \subset L(p, v) \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{v}{p}}} \omega^{v}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6}$$

сходился.

Ради полноты изложения, воспроизведем фрагмент доказательства достаточности (6) для вложения (5) в статье [70].

Сначала приведем используемые вспомогательные утверждения и обозначения:

$$\|f\|_{p,\nu,\psi}^{\nu} \le C_1(\nu, p, \psi)\left\{\left[f^*\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\nu} + \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^{\nu/p}} \psi\left(\frac{1}{n}\right) \omega_p^{\nu}\left(\frac{1}{n}; f\right)\right\}, \tag{7}$$

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \lambda_k \quad (k = 0, 1, 2, ...), \tag{8}$$

$$\|f\|_{\mu,\nu,\psi}^{\nu} \le 2^{\frac{\nu}{\mu}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\frac{\nu}{\mu}} \psi\left(\frac{1}{2^k}\right) \lambda_k^{\nu},$$

$$\|f\|_{\mu,\nu,\psi}^{\nu} \le C_2(\mu, \nu, \psi)\left\{\lambda_1^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\frac{\nu}{\mu}} \psi\left(\frac{1}{2^k}\right)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{\nu}\right\}, \tag{9}$$

$$\xi_n = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^p \quad (n = 1, 2, ...), \tag{10}$$

$$\xi_n \le 4\omega_p^p\left(\frac{1}{2^n}; f\right) \quad (n = 1, 2, ...), \tag{11}$$

а также

Лемма 3 (П.Л. Ульянов [6, с. 659]). *Пусть конечная неотрицательная функция $\beta(x)$ не возрастает на полупрямой $[1, \infty)$ и $\alpha \in (-\infty, \infty)$ – некоторое действительное число. Тогда*

$$C_1(\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} \beta(2^n) \le \sum_{n=3}^{\infty} n^{-\alpha} \beta(n) \le C_2(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} \beta(2^n).$$

Здесь так же, как и в предыдущей теореме, достаточно для всех невозрастающих на $(0, 1]$ функций $f(x) \in L^p(0, 1)$ установить неравенство (7).

Для этого воспользуемся обозначениями (8) и (10), а также неравенством (9). Имеем

$$\|f\|_{p,\nu,\psi}^{\nu} \le C_1(p, \nu, \psi)\left\{\lambda_1^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\frac{\nu}{p}} \psi\left(\frac{1}{2^k}\right)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{\nu}\right\} =$$

$$= C_1(p,\nu,\psi)\left\{\lambda_1^\nu + \sum_{k=1}^{\infty}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)(\xi_k-\xi_{k+1})^{\frac{\nu}{p}}\right\} =$$

$$= C_1(p,\nu,\psi)\left\{\lambda_1^\nu + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)k(\xi_k-\xi_{k+1})^{\frac{\nu}{p}}\right\} \le$$

$$\le C_1(p,\nu,\psi)\left\{\lambda_1^\nu + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\psi\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)2^{n+1}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}(\xi_k-\xi_{k+1})^{\frac{\nu}{p}}\right\}.$$

Теперь, сначала применяя неравенство Гельдера, затем пользуясь неравенством (11), *получаем*

$$\|f\|_{p,\nu,\psi}^\nu \le 2C_1(p,\nu,\psi)\left\{f^\nu\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\psi\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left[\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}1\right)^{1-\frac{\nu}{p}}\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}(\xi_k-\xi_{k+1})^{\frac{\nu}{p}}\right)\right]\right\} =$$

$$= 2C_1(p,\nu,\psi)\left\{f^\nu\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\psi\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)2^{n\left(1-\frac{\nu}{p}\right)}(\xi_{2^n}-\xi_{2^{n+1}})^{\frac{\nu}{p}}\right\} \le 2^{1+\frac{2\nu}{p}}C_1(p,\nu,\psi)\times$$

$$\times\left\{f^\nu\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\psi\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)2^{n\left(1-\frac{\nu}{p}\right)}\omega_p^\nu\left(\frac{1}{2^{2^n}},f\right)\right\}.$$

Применяя к последней сумме два раза лемму 3, именно, сначала при

$$\alpha = \frac{\nu}{p}-1,\;\; \beta(n) = \frac{1}{n}\psi\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)2^{n\left(1-\frac{\nu}{p}\right)}\omega_p^\nu\left(\frac{1}{2^{2^n}},f\right),$$

затем при

$$\alpha = 1,\;\; \beta(n) = (\ln n)^{-\frac{\nu}{p}}\psi\left(\frac{1}{2}\right)\omega_p^\nu\left(\frac{1}{n},f\right),$$

приходим к искомому неравенству (7).

В работе [70] в случае необходимости условия (6) для вложения (5) предполагалось $\omega(\delta) = O\left\{\omega\left(\delta^2\right)\right\}$ $(0\le\delta\le 1)$. Это ограничение с сохранением формулировки снято Л.В. Матвиюк [72].

Как это видно из критерия (2), условие вложения для «*далеких*» от $L^p = L(p,p)$ пространств Лоренца $L(\mu,\nu)$ $(\mu > p$, случай 1) резко отличается от условия вложения для пространств «*близких*» ($\mu = p$, случай 2).

Именно, в шкале «правильных» модулей непрерывности $\omega(\delta) = \delta^\alpha\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\beta$, пограничный показатель гладкости $\bar\alpha$, разделяющий условия, при которых вложение $H_P^\omega \subset L(\mu,\nu)$ имеет место и когда не имеет места, различен – в первом случае это $\bar\alpha \equiv \frac{1}{p}-\frac{1}{\mu} > 0,\ -\infty < \beta < -\frac{1}{\nu}$, в то время как во втором случае, в отличие от первого – степенного, этот вопрос уже решается на уровне показателя логарифма: $\bar\alpha = 0,\ -\infty < \beta < \frac{1}{\nu}-\frac{1}{p} < 0$.

Замечание. Приведенное здесь доказательство второй (и, по-видимому, основной) части (2) имеет целью обратить внимание на то поучительное обстоятельство, что при обнаружении новых эффектов принципиального характера в продвижении направления исследований, для П.Л. Ульянова длина доказательства не имела никакого значения.

Задачи 1°. Заменой как в уже решенных, так и ранее не исследованных задачах пространств Лебега L^p на пространства Лоренца $L(\mu,\nu)$ (равно как и их различных видоизменений), можно получать большое количество задач, чему, на самом деле, посвящена обширная литература (см., напр., [34, 35, 72, 73]).

Именно так, заменой $L^q(0,1)$ на $L(\mu,\nu)$ в критерии (1), выполнены работы [70, 71].

2°. Основной целью исследования в пространствах Лоренца становится установление всех возможных случаев с различными видами неулучшаемых условий решения поставленной задачи, - таков результат критерия (2).

И не только в теоремах вложения, но и во всех других задачах - интерполяционных, сходимости рядов Фурье и оценок норм полиномов по тем или иным системам, норм тех или иных операторов, и т.п., где производится замена лебеговских норм на лоренцовские полунормы (и, как ниже увидим, (см. здесь п.п. 8-9) не только на лоренцовские).

В противном случае речь скорее всего будет идти лишь об обобщениях, не вносящих какого-либо заметного вклада в развитие темы, или, в лучшем случае, лишь о промежуточном результате.

Отложив подробное обсуждение темы обобщений **на дальнейшее,** приведем пример, где установлены все различные виды решений поставленной задачи.

3 ° . Впервые обнаруженный в работах [70, 71] эффект «далеких» и «близких» пространств Лоренца имел продолжение и подтверждение, в той или иной полноте, в последующих работах различных авторов.

Один из первых результатов в «лоренцовском» направлении принадлежит Л.А. Шерстневой [34, 35], которая установила действие эффекта «далеких» и «близких» пространств*в полном объеме*в случае неравенства Джексона-Никольского для тригонометрических многочленов относительно обобщенных пространств Лоренца $\Lambda(\psi, q)$ (см. п. 11, §1).

1 ° . Эффект «близких» пространств Лоренца:

Пусть ψ - выпуклая вверх неубывающая функция на [0, 1] такая, что $\psi(0)=0$,

$$\alpha_\psi=\varliminf_{t\to 0+}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1,\quad \beta_\psi=\varlimsup_{t\to 0+}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}<2,$$

$\alpha,\ q_1,\ q_2$ -положительные числа.

Тогда для пространства Лоренца $\Lambda(\psi, q)$ имеет место соотношение $(m+2<n)$

$$\sup\frac{\left\|T_{m,n}(x)\right\|_{\Lambda(\psi,q_2)}}{\left\|T_{m,n}(x)\right\|_{\Lambda(\psi,q_1)}}\asymp\left\{\log_2(n-m)\right\}^{\left[\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\right]_+}.$$

2 ° . Эффект «далеких» пространств Лоренца:

Пусть $\psi_1(t),\psi_2(t)-\psi$ - функции такие, что $\beta_{\psi_2}<\alpha_{\psi_1}$, $\alpha_{\psi_2}>1$ и $\beta_{\psi_1}<2$, а q_1 и q_2 - положительные числа. Тогда

$$\sup\frac{\|T_{m,n}\|^*_{\Lambda(\psi_2,q_2)}}{\|T_{m,n}\|^*_{\Lambda(\psi_1,q_1)}}\asymp\frac{\psi_2(\frac{1}{n-m+1})}{\psi_1(\frac{1}{n-m+1})}.$$

Пусть теперь p_1,p_2,q_1 и q_2 - положительные числа. Тогда, в частности

$$\sup\frac{\|T_n\|^*_{p_2,q_2}}{\|T_n\|^*_{p_1,q_1}}\asymp(n+1)^{\left[\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right]_+},$$

где во всех случаях sup берется по всем тригонометрическим полиномам

$$T_{m,n}(x)=\sum_{k=m}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,,\ \text{а}\ [u]_+=\max\{0\,;u\}\,.$$

5. Прямые и обратные задачи теории приближений (в разных метриках)

Исследования этого пункта берут начало из следующих задач П.Л. Ульянова, чему был посвящен предыдущий пункт $(1\le p<q<\infty)$

$$H_p^\omega\subset H_q^{\omega^*} \tag{1}$$

и

$$E_p(\lambda)\subset E_q(\mu). \tag{2}$$

Просто из соображений симметрии (быть может и из эстетических тоже) нами в качестве курсовой (!) работы в Казахском университете (Алма-Ата) были предложены задачи:

$$H_p^\omega\subset\ E_q(\lambda) \tag{3}$$

и

$$E_p(\lambda)\subset\ H_q^{\omega_k}. \tag{4}$$

В этом направлении, для тригонометрической системы доказаны следующие утверждения - соответственно прямая и обратная теоремы теории приближений в разных метриках.

Теорема 1 (*М. Жайнибекова* [74]). *Если* $1 \le p < q < \infty$, *то*

$$H_p^{\omega} \subset E_q(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{\frac{q}{p}-2} \omega^q \left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left(\lambda_n^q\right). \qquad (5)$$

Теорема 1 обобщена А.И. Аганиным и М.К. Потаповым в [75].

Теорема 2(*М.Сихов* [76]). *Пусть* $1 < p < q < \infty, k = 1, 2, 3, \dots$. *Тогда*

$$E_p(\lambda) \subset H_q^{\omega_k} \Leftrightarrow \frac{1}{n^k}\left[\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{q\left(k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} \lambda_v^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\frac{q}{p}-2} \lambda_v^q\right]^{\frac{1}{q}} = O\left(\omega_k\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (6)$$

Фактически в (6) М. Сиховым получено неравенство

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}; f\right)_q \underset{p,q,k}{\ll} \frac{1}{n^k}\left[\sum_{v=0}^{n} (v+1)^{q\left(k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_v^q(f)_p\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\frac{q}{p}-2} E_v^q(f)_p\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (7)$$

а для доказательства ее окончательности в рамках подхода П.Л. Ульянова приходится переходить на язык теорем вложений и критерий (6) дает одну из формулировок неусиляемости неравенства (7).

Отметим, что результаты, близкие к (6), одновременно и независимо получены Н.А. Ильясовым [77].

Задачи (1) и (2) в каждой из своих составляющих (в смысле согласования необходимых и достаточных условий) потребовали по нескольку лет интенсивных исследований, причем, как потом рассказывал П.Л. Ульянов, для него самым трудным было установить сам вид

$$\sum^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q \left(\frac{1}{n}\right)$$

окончательного условия, для чего экспериментировал с конкретными модулями непрерывности $\omega(\delta)$, но, как только вид был найден, остальное было, как говорят, делом техники (не забудем, что речь идет о выдающемся аналитике П.Л. Ульянове).

Такого же типа трудности были и в установлении окончательного вида критерия в задаче (2), когда т.н. «разбивающие последовательности» в (6) из п.2 были заменены на «сдвиги» в (5) из п.2.

В случаях задач (3) и (4) мы в Алма-Ате руководствовались предупреждениями П.Л. Ульянова, отмечавшего, что два последовательно применяемых точных неравенств могут привести к неточному, поскольку точность в составляющих неравенствах достигается на разных функциях.

Как оказалось, возможен и тот, и другой случай: если в задаче (3), решенной М. Жайнибековой в виде (5), что есть основной результат ее кандидатской диссертации [74] (оппонировал М.К. Потапов), окончательное условие было комбинацией неравенств Ульянова и Джексона, то в задаче (4), решенной М. Сиховым, такие комбинации к неулучшаемым условиям не приводили. Критерий М.Сихова (6)–(7) составил основной результат его кандидатской диссертации [76] (оппонировал В.И.Коляда).

Отметим, что осознание задач (3) и (4) как соответственно прямых и обратных задач теории приближений разных метрик пришло значительно позже.

Тогда же обнаружилось, что результату М. Сихова (6) – (7) по установлению неулучшаемых обратных теорем предшествовали работы ряда авторов.

Достаточная часть вложения (6) изучалась многими авторами (см. [78, с. 220-226]). В частности, М.Ф. Тиман [79] доказал неравенство($\beta = \min(2; q)$):

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}; f\right)_q \underset{p,q,k}{\ll} \frac{1}{n^k}\left[\sum_{v=0}^{n} (v+1)^{\beta\left(k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_v^{\beta}(f)_p\right]^{\frac{1}{\beta}} +$$

$$+\left[\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\beta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_v^{\beta}(f)_p\right]^{\frac{1}{\beta}} (1 \le p \le q < \infty). \tag{8}$$

Оценка (7) всегда не хуже оценки (8), а, согласно критерию (6), оценка (7) усиливает (8) до окончательного.

В монографии 2000 года [80, стр. 59] сформулирована достаточная часть критерия (6), т.е. неравенство (7) и сообщается, что при $1 \le p < q \le 2$ это неравенство непосредственно вытекает из работ [47,79,81–85], а при остальных p и $q > 2$ доказывается тем же методом, что и в работах [47, 79, 86]. Хотя можно и должно было сформулировать критерий (6), с указанием авторства, поскольку без наличия (7) нельзя предугадать указанные длинные пути его обоснования.

В связи с чем вспоминается, как однажды на семинаре Меньшова-Ульянова в МГУ им. М.В.Ломоносова возник вопрос о качестве и авторстве теоремы в контексте способа доказательства, который был разрешен П.Л.Ульяновым в следующих словах, которые, по-видимому, можно возвести в основной принцип (критерий) для всех подобных ситуаций: *«А у вас есть такая формулировка?»*.

Задачи (3)-(4) имеют смысл не только для тригонометрической системы.

Ряд теорем вложений обсуждаемых здесь типов относительно систем Франклина, Хаара и Уолша изучался С. Кудайбергеновым [87] (определение этих и других систем можно найти, напр., в [88, 89]).

Для системы Франклина имеет место

Теорема (С.Кудайбергенов [87]). *Если* $1 \le p \le q < \infty (L^{\infty} \equiv C; \theta = 1$ если $q = \infty$ и $\theta = q$ если $q < \infty)$, то

$$H_p^{\omega} \subset E_q(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{v=n}^{\infty} v^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\theta-1} \omega^{\theta}\left(\frac{1}{v}\right) = O\left(\lambda_n^{\theta}\right) \tag{9}$$

и

$$E_p(\lambda) \subset H_q^{\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left[\sum_{v=0}^{n} (v+1)^{\left(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\theta-1} \lambda_v^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}} + \left[\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\theta-1} \lambda_v^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}} = O(\omega(\frac{1}{n})) \tag{10}$$

Критерий (9) справедлив и для систем Хаара и Уолша, если только $1 \le p \le q < \infty$ см. [87]).

Е. Айдос [90] получил ряд точных теорем вложения для классов функций с заданной мажорантой наилучших приближений функций многомерными тригонометрическими полиномами со спектром из гиперболических крестов и полиномами по системам типа Хаара.

Подведем итоги. В развитие идей П.Л. Ульянова, наряду с теоремами вложения типа $H_p^{\omega} \subset H_p^{\omega_1}$ и $E_p(\lambda) \subset E_q(\mu)$ (см.п.2), М. Жайнибекова [74], М.Сихов [76], С.Кудайбергенов [87] и Е.Айдосов [90] изучали вложения типа $H_p^{\omega} \subset E_q(\lambda)$ и $E_p(\lambda) \subset H_q^{\omega_k}$, что, с учетом сказанного выше, и вошло в название данного пункта.

На этом, в общем-то проясненном П.Л. Ульяновым, В.А.Андриенко и В.И.Колядой, фоне своего рода сюрпризом в случае равных метрик выглядит теорема Потапова-Симонова (см. [4,7,36]), устанавливающая неулучшаемую связь между модулем гладкости функции и соответствующими основными понятиями гармонического анализа – частичными суммами их тригонометрических рядов Фурье в виде норм их производных и уклонений от исходной функции с переходом при $p = 1$, как это обычно делается, к соответствующим суммам Валле-Пуссена, к формулировке которой сейчас же перейдем.

Для 2π - периодической суммируемой функции $f(x)$ положим

$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ и

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx (n = 0, 1, 2, ...)$$

Пусть ряд

$$f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (x)\,, A_0 (x) = \frac{a_0}{2},\ A_\nu (x) = a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \tag{11}$$

есть ряд Фурье $f \in L\,(0, 2\pi)$.

Введем следующие обозначения: $S_n (f)$ - n-я частичная сумма, $V_n (f)$ - средняя Валле -Пуссена ряда (11) и $K_n (x)$ - ядро Фейера, т.е.

$$S_n (f) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (x)\,, \quad V_n (f) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} S_\nu (f)\,,$$

$$K_n (x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\nu} \cos mx \right).$$

Справедлива

Теорема (М. К. Потапов, Б. В. Симонов [7]). *Если* $1 < p < \infty$ *и* $\alpha > 0$, *то для всякого* $f(x) \in L^p (0, 2\pi)$ *имеют место неравенства*

$$C_1 (p, \alpha)\, \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \le \left(n^{-\alpha} \left\| S_n^{(\alpha)} (f, x) \right\|_p + \| f(x) - S_n (f, x) \|_p \right) \le C_2 (p, \alpha)\, \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p.$$

Если же $1 \le p \le \infty$ *и* $\alpha > 0$ *,то для всякого* $f(x) \in L^p (0, 2\pi)$ *выполнено*

$$C_3 (p, \alpha)\, \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \le \left(n^{-\alpha} \left\| V_n^{(\alpha)} (f, x) \right\|_p + \| f(x) - V_n (f, x) \|_p \right) \le C_4 (p, \alpha)\, \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p.$$

Если соотношение (3) из п.1 относится к фундаментальным, можно сказать, парадным результатам теории, то приведенная её формулировка несет скорее всего техническую, или, как ещё говорят, рабочую нагрузку.

Тем самым, страшно сказать (но, как говорится, это математика, где все можно доказательно обосновать), в основах прямых и обратных задач теории приближений соотношения (1) и (2) из п.1 должны быть заменены на эквивалентные соотношения Потапова-Симонова (3), как более точно отражающих суть вопроса нежели неравенства Джексона и Бернштейна.

Таким образом, в данном круге задач в настоящее время картина выстраивается такая: в случае одной и той же метрики имеет место соотношение (3) из п. 1 и (5) –(6) в случае разных метрик (но при целых порядках α модулей гладкости).

Задачи. 1. Рассматривая наилучшие приближения в тех или иных нормах и метриках по различным ортогональным системам одного и многих переменных, получаем необозримое количество содержательных задач (см., например, [6, 47, 78]).

$$E_X(\lambda) \subset \varphi_Y(L), H_X^{\omega_k} \subset \varphi_Y(L), E_X(\lambda) \subset E_Y(\mu), E_X(\lambda) \subset H_Y^{\omega_k}, H_X^{\omega_k} \subset E_Y(\lambda),$$

и далее с заменой классов H на *SH, B, SB, WH, WB* и т.п., в которых нормы пространств L^p и L^q заменены соответственно на нормы или полунормы пространств X и Y (определение класса $\varphi(L)$ см. в §1).

В частности, нам неизвестно необходимое и достаточное условие вложения $E_p(\lambda) \subset H_q^{\omega_k}$ для классов по системе Хаара (см.также (6) и (10).

2. Способ создания задач методом расширения действующих и введения новых параметров в определениях, перенесения с одних ортогональных систем на другие приводят к разного качества и значения результатам. Так, замена П.Л.Ульяновым в определении классов Никольского степенной функции $\omega(\delta) = \delta^r$ на произвольный модуль гладкости $\omega(\delta)$ привела, в уточнение известных, к новым результатам.

Замена целого положительного k на произвольное действительное $\alpha > 0$ в определении модуля гладкости и, соответственно, в определении классов H и B, как показывает нижеследующий результат Потапова-Симонова-Тихонова [10,91], может служить причиной достижения окончательных выводов в развитии тематики.

Было известно неравенство П.Л.Ульянова [6] (всюду ниже $1<p<q<\infty$)

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left(\int_0^\delta \left(t^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

которое было усилено в шкале модулей непрерывности (т.е. при $\alpha=1$) В.И.Колядой [92]

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \delta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\int_\delta^1 \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\omega_1(f,t)_q\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

в то время как окончательное неулучшаемое неравенство при всех $\alpha>0$ есть теорема Потапова-Симонова-Тихонова [4, 91]

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_\alpha(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

которое даже при целых $\alpha>0$ требует привлечения модулей гладкости дробного порядка $\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$.

6. Новые задачи об аппроксимативных возможностях полиномов по ортогональным системам с произвольным спектром

Центральные теоремы теории приближений - неравенства Д.Джексона и С.Н.Бернштейна, на случай разных метрик неулучшаемым образом распространены М.Жайнибековой и М.Сиховым соответственно.

Многомерный случай, ввиду произвольности спектра приближающих агрегатов по тем или иным ортогональным системам и разнообразия типов модулей гладкости, порождает большое количество новых задач.

В качестве примера обсудим один такой случай, относящийся к тригонометрической системе [93].

7. Теорема М. Сихова об оптимальном приближении функций из классов в зависимости от спектра приближающих тригонометрических многочленов (с комментариями)

Пусть спектр G задан посредством непрерывной на $[0,1]^s$ *функции* $\Lambda(t)=\Lambda(t_1,\ldots,t_s)$, неубывающей по каждой переменной при фиксированных остальных и такой, что $\Lambda(t)>0$ и $\Lambda(t)=0$ смотря по тому $\prod_{j=1}^s t_j>0$ или $\prod_{j=1}^s t_j=0$.

Определим следующие множества ($N>0$):

$$(\Lambda,N)=\left\{n\in Z_+^s:\ \Lambda\left(2^{-n}\right)\geq\frac{1}{N}\right\},^{\perp}(\Lambda,N)=Z_+^s\setminus(\Lambda,N),$$

$$\rho(n)=\left\{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s: 2^{n_j-1}\leq|m_j|<2^{n_j}\right\}\left(n\in Z_+^s\right), Q(\Lambda,N)=\bigcup_{n\in(\Lambda,N)}\rho(n).$$

$$\|n\|_1=\|(n_1,...,n_s)\|_1=|n_1|+...+|n_s|,\quad \Omega\left(2^{-n}\right)=\Omega\left(2^{-n_1},...,2^{-n_s}\right).$$

Прямые теоремы:

$$\left.\begin{aligned} &1\leq p<q<\infty:\ \sup_{f\in SH_p^\Omega} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum\nolimits_{n\in Z_+^s:\Lambda(2^{-n})<\frac{1}{N}} 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}\Omega^q\left(2^{-n}\right)\right]^{\frac{1}{q}}\\ &1<q\leq p<\infty:\ \sup_{f\in SH_p^\Omega} E_{Q(\Lambda,\mathrm{N})}(f)_q \asymp \left[\sum\nolimits_{n\in Z_+^s:\Lambda(2^{-n})<\frac{1}{N}} \Omega^2\left(2^{-n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}_{f\in SH_p^\Omega}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Обратная теорема:

$1<p<q<\infty:$

$$E_{p,\Lambda}\left(\lambda\right) \subset SH_q^{\Omega_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{k\|n\|_1}} \left[\sum_{l=0}^{\|n\|_1} 2^{l\left(qk+\frac{q}{p}-1\right)} \lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{l=\|n\|_1+1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q}{p}-1\right)} \lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}} = O\left(\Omega_1\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \tag{2}$$

Прокомментируем первую из этих теорем - соотношение (1). Пусть дано нормированное пространство Y числовых функций, определенных на измеримом множестве $I_s \subset R^s$ и пусть $F \subset Y$. Для n - мерного подпространства M_n пространства Y и фиксированного множества D_n, состоящего из n- мерных подпространств M_n, последовательно положим

$$E\left(f, M_n\right)_Y = \inf_{g \in M_n} \|f-g\|_Y \,,$$

$$E\left(F, M_n\right)_Y = \sup_{f \in F} E\left(f, M_n\right)_Y \,, \tag{3}$$

$$d_n\left(F, D_n\right)_Y = \inf_{M_n \in D_n} E\left(F, M_n\right)_Y \,. \tag{4}$$

И случае, когда D_n есть множество $\{M_n\}$ всех возможных n-мерных подпространств Y, величина (4) есть поперечник по Колмогорову, а в случае, когда множество D_n составлено из подпространств, натянутых на все возможные разные n тригонометрических функций $e^{2\pi i\left(m^{(1)},x\right)}, ..., e^{2\pi ii\left(m^{(n)},x\right)}$ - тригонометрический поперечник.

Изучению различных видов поперечников посвящена обширная литература [2]. Вместе с тем, изучение величин вида (3), можно сказать «Предпоперечника Колмогорова», как это следует из (1), является самостоятельной задачей, отвечающей на ряд содержательных вопросов, и потому естественной и перспективной.

Действительно, в двусторонней оценке (1) содержится большая информация.

Во-первых, здесь содержится точная количественная информация об аппроксимативных возможностях полиномов с достаточно произвольным Λ- спектром относительно функций данного класса.

Именно, каждая функция Λ определяет класс конечных подмножеств Z^s- расширяющийся до Z^s последовательность спектров, конкретизация которых в виде $Q\left(\Lambda, N\right)$ осуществляется посредством параметра N. После чего для данного класса $F = SH_p^{\Omega}$ - обобщенного класса Никольского с ограниченной смешанной разностью в (1) получен точный порядок наихудшей (и тогда остальные не хуже) из наилучших приближений функций этого класса тригонометрическими полиномами со спектром из $Q\left(\Lambda, N\right)$ в метрике L^q, тем самым, определены аппроксимативные возможности агрегатов приближения данного типа в данной метрике данного класса функций.

Также отметим, что соотношение (1) имеет один и тот же вид для всех размерностей s, влияние которых проявляется опосредовано через кратность ряда и количество переменных в определяющих спектр и класс функций Λ и Ω.

Во-вторых, она позволяет при заданном числе точек спектра *вычислить* геометрию Λ- спектра с наилучшими аппроксимативными возможностями и, одновременно, *вычислить* точный порядок оптимальной Λ-аппроксимации. Для этого достаточно по заданной функции Ω выделить спектр "больших слагаемых" ряда в правой части (1)

$$E_\varepsilon = \left\{n \in Z_+^s : 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)} \Omega^q(2^{-n}) \geq \varepsilon > 0\right\}, \tag{5}$$

поскольку если из данной суммы неотрицательных чисел нужно удалить заданное число слагаемых таким образом, чтобы оставшаяся часть имела наименьшее значение, то, разумеется, надо убрать самые большие по значению.

Для иллюстрации остановимся на конкретизации соотношения (1) в модельном случае выбора Ω,

$$\Omega_1\left(t_1,\, t_2,\, ...,\, t_s\right) = \prod_{j=1}^{s} t_j^r \;\; (r>0)\,, \;\; N = 2^k \;\; (k = 1, 2, ...)\,. \tag{6}$$

Тогда, согласно (5), имеем $\left(\varepsilon = 2^{-k},\ k = 1, 2, ...\right)$

$$E_{\varepsilon} = A_k = \left\{ n \in Z_+^s : 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)} 2^{-qr\|n\|_1}) \geq 2^{-k} > 0 \right\} = \left\{ n \in Z_+^s : \|n\|_1 \left(rq - \frac{q}{p} + 1 \right) \leq k \right\}.$$

Для обеспечения теоретико-множественного равенства $A_k = \Gamma(\Lambda, 2^k)$ желательно, чтобы Λ- спектр был достаточно широким. Легко видеть, что это равенство выполнено в случае

$$\Lambda_1(t_1, t_2, ..., t_s) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{\beta}, \beta = rq - \frac{q}{p} + 1 > 0,$$

при этом соответствующий экстремальный спектр есть

$$Q(\Lambda_1, 2^k) = \left\{ m \in Z^s : 2^{n_j - 1} \leq 2^{n_j} (j = 1, ..., s), \|n\|_1 \leq \frac{k}{\beta} (n \in Z_+^s) \right\}$$

- ступенчатый гиперболический крест с числом точек $M, M \asymp 2^{\frac{k}{\beta}} k^{(s-1)}$.

Возникающая при этом погрешность имеет порядок

$$\gamma_M \equiv E(SH_p^r; Q(\Lambda_1, 2^k))_{L^q(\pi s)} \asymp \left[\sum_{\|n\|_1 > \frac{k}{\beta}} 2^{-\|n\|_1 \beta} \right]^{\frac{1}{q}} \asymp \left[\sum_{l \in Z : l > \frac{k}{\beta}} 2^{-l\beta} \sum_{n \|n\|_1 = l} 1 \right]^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-\frac{k}{q}} k^{\frac{s-1}{q}},$$

а в пересчете на число гармоник

$$\gamma_M \asymp \frac{1}{\left(2^{\frac{k}{\beta}} k^{(s-1)}\right)^{\frac{\beta}{k}}} k^{\frac{(s-1)(\beta-1)}{q}} \asymp (M \ln M)^{-\left(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} (\ln M)^{\frac{1}{q}},$$

что в свою очередь соответствует порядку ортопоперечника, вычисленного В.Н.Темляковым (см. [99, стр. 81-84].

Таким образом, в соответствующих известных случаях оптимальные порядки Λ- аппроксимации совпадают с известными результатами о тригонометрических и иных поперечниках, имеющих длительную историю развития.

В-третьих, соотношение (1) представляет собой неулучшаемую прямую теорему теории приближений разных метрик.

В-четвертых, соотношение (1) в качестве многомерного случая с точными порядковыми соотношениями естественным образом в форме (3) вписывается в общую задачу (3) из п.5, также имеющую респектабельную историю и развития.

Впервые в 1937 г. в одномерном случае Фавар [100] и Ахиезер-Крейн [101] получают точные равенства

$$\sup_{f \in W_\infty^r(0,1)} E_n(f)_C = \sup_{f \in W_\infty^r(0,1)} \inf_{a_j, b_j} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right\|_C =$$

$$= \frac{1}{n^r} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \tag{7}$$

а С.М. Никольский [102] в 1946 г.- асимптотическое равенство

$$\sup_{f | f(x) - f(y)| \leq |x-y|, -1 \leq x, y \leq 1} E_n^1(f)_C = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right), \tag{8}$$

где E_n^1 есть наилучшее приближение функции f (не обязательно периодической) при помощи алгебраических многочленов степени $n-1$ на отрезке $[-1, 1]$.

В дальнейшем, точные одномерные результаты по задаче (3) получены другими математиками, главным образом в научной школе Н.П. Корнейчука (см. [103] и имеющуюся в ней библиографию). Как правило, точные и асимптотические равенства типа (7) и (8) получают в одномерном случае, а в многомерном, за редким исключением типа гильбертовых пространств – порядковые. Соотношение (1) относится к последнему.

Тем самым, задача (3) имеет самостоятельное значение и свою историю, не всегда сводящуюся к задаче (4). Более того, поперечники по Колмогорову не всегда совпадают с тригонометрическими и тому подобными поперечниками (например, это следует из широко известных результатов Б.С. Кашина по вычислению поперечников одномерных классов Соболева).

Отметим также, что не исключено, что во всех случаях функций Ω, а не только в степенном случае (6), выбор (5) «больших слагаемых» в (1) дает значение соответствующего тригонометрического поперечника и искомого экстремального спектра.

Тем самым, можно говорить об математическом аналоге периодической системы Д.Менделеева.

В-пятых, определим новизну результатов (1)-(2) по отношению к ранее известным.

Именно, сравним с аналогичными результатами из работ Н.Н. Пустовойтова [104,105].

Во-первых, в частном случае $\Lambda(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j$ оценки сверху в (1) совпадают с утверждением теоремы 3 из [104], носящим характер достаточного условия. Во-вторых, в работе [105] изучается только случай $\Lambda(t) = \Omega(t)$, т.е. случай, когда спектр приближающих полиномов жестко связан с заданной мажорантой $\Omega(t)$, в то время как в (1)-(2) функции $\Lambda(t)$ и $\Omega(t)$ независимы. Как показывает сравнение теоремы (1) с теоремой 1 из [105], это обстоятельство существенным образом отражается на самом виде окончательного результата. В-третьих, теорема (1) применима при менее стеснительных ограничениях на $\Omega(t)$ нежели теорема 2 из [105]. Именно, в [105] при дополнительном условии принадлежности $\Omega(t)$ множеству

$$\bigcup_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\alpha<1} (S^{\alpha}) \tag{9}$$

получено соотношение $(1 \le p < q < \infty)$

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega}} E_{Q(\Omega,N)}(f)_q \asymp \frac{1}{N}\left[\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)\setminus\Gamma^{\perp}\left(\Omega,2^kN\right)} 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

В теореме (1) условие (9) расширено до естественных границ и носит окончательный, в применяемых терминах, характер. Так, функция

$$\Omega_1(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\ln\frac{1}{t_j}\right)^{-\beta_j} \quad (\beta_j > 1 \ (j=1,...,s))$$

не принадлежит множеству (9), и потому соотношение (10) не применимо. Вместе с тем, для $\Omega_1(t)$ выполнено условие (S^{α}) при $\alpha = \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, так что в силу теоремы (1) получаем содержательный результат

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega_1}} E_{Q(\Omega_1,N)}(f)_q \asymp \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega_1,N)} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{n_j^{\beta_j}}.$$

Теперь сделаем замечания общего характера.

Как оказалось, при переходе от одномерных пространств к многомерным, происходит «переоценка ценностей»: если в одномерном случае приоритеты можно поставить в порядке (4) и (3) из п.5, то в многомерном случае-наоборот.

Задача (3) из п.5 приняла форму «Предпоперечника Колмогорова» (3) и её решение, являющееся одним из основных, а среди основных-основным в [93], получено в стиле П. Л. Ульянова- класс Никольского $SH_p^r = SH_p^{\delta r}$ заменен на SH_p^{Ω} с необязательно степенным Ω, ответ дан в виде остатка сходящегося ряда.

Новым моментом в постановке задачи (3) являлось независимое (от функции типа модуля гладкости Ω в определении класса) задание расширяющегося до Z^s последовательности конечных множеств Λ_N, т.е. спектра, иначе говоря, «номеров» гармоник, по которым осуществляется наилучшее приближение.

Хотя, как это выше уже отмечалось, задача (3) уже решалась в одномерном случае - это теоремы Фавара-Ахиезера-Крейна и С.М. Никольского конца 30-ых годов XX века, где был естественный спектр. Задача (3) в случае многомерного спектра, где нет естественного порядка, на первый взгляд, казалась неестественной (по крайней мере по реакциям некоторых международно-значимых журналов).

Здесь своевременной оказалось поддержка академика АН СССР и РАН С. М. Никольского, который в разные годы в Казахстане заслушивал М. Сихова, давал конкретные советы, а редактируемый им журнал «Analysis mathematics» первым опубликовал статью М. Сихова [94] на эту тему.

Пользуясь случаем, хотелось бы еще раз обратить внимание на, во многих отношениях важное для развития конкретных тем исследований, то обстоятельство, что данный случай относится ко многим известным, включая примеры и с автором данной статьи, когда Сергей Михайлович как математик первым понимал и как академик решительно поддерживал новизну в исследованиях.

Здесь хотелось бы отметить также такое согласование в (1) функций Ω и Λ, что при определенных соотношениях между ними в (1) содержатся наилучшие спектр и порядок в известных поперечниковых задачах. Именно эту возможность, по-видимому надлежит учитывать (и обеспечить) при дальнейших исследованиях по «Предпоперечникам Колмогорова» в задачах (3).

И, наконец, в постановке (3) заложен вопрос «Как хорошо частичные суммы ряда Фурье по той или иной ортогональной системе с наперед заданным Λ-спектром приближают функцию f из класса F по сравнению с выраженным через наилучшие приближение максимально возможным?».

Как уже отмечалось выше, в качестве n- мерного подпространства M_n могут выступать полиномы по той или иной ОНС, в том числе по кратным системам Хаара, Франклина, Уолша (заметим, что С. Кудайбергеновым (1990г.) одномерные прямые и обратные теоремы приближений разных метрик установлены для системы Франклина, прямые теоремы – для систем Хаара и Уолша, в то время как для этих последних двух систем остается неизвестной обратная теорема в постановке (4) из п.5).

Возвращаясь к теме [93], отметим, что решение (1)–(2) главных задач (4) и (3) из п.5 повлекло постановки и решения соответствующих задач типа неравенств Бернштейна и Никольского (это глава II диссертации) и одного приложения в том же режиме фиксированных спектров к вопросам квадратур (глава III).

Приведем некоторые из них (все необходимые исторические сведения см. в [93]).

Задача вложения классов $SB_{p,\nu}^{r_1,\ldots,r_s}$ в пространства $L^q(0,1)^s$ и $SB_{q,\theta}^{\gamma_1,\ldots,\gamma_s}$ также хорошо изучена (см. [10]).

Приведем один из критериев вложения обобщенных классов Никольского-Бесова-Аманова $SB_{q,\theta}^{\Omega}$, где указан *окончательный вид* взаимоотношений между определяющими классы параметрами.

Теорема 1 (М. Сихов [93]). *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $1 \le \nu \le \infty$, $\Omega(t)$ *и* $\Omega^*(t)$ *- функции типа смешанного модуля гладкости порядков* k *и* l *соответственно, удовлетворяющие условию* (S). *Пусть также* $\Omega(t)$ *удовлетворяет условию* (S_k), *а* $\Omega^*(t)$ *- условию* (S_l). *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$SB_{p,\infty}^{\Omega} \subset SB_{q,\nu}^{\Omega^*},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n\in Z_+^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega\left(2^{-n}\right)/\Omega^*\left(2^{-n}\right)\right]^{\nu} < \infty.$$

Далее, справедлива

Теорема 2 (Обратная многомерная теорема теории приближений разных метрик, М. Сихов [93]). *Пусть* $1 < p < q < \infty, 1 = \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_s, \omega_k$ *- функция типа модуля гладкости порядка* k *и* $\{\lambda_n\}$ *- последовательность положительных чисел,* $\lambda_n \downarrow 0\, (n \uparrow \infty)$. *Пусть функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* (S^τ) *на* $(0,1]^s$ *при* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_s), \Lambda(1) = 1$

и $\Lambda(\mathrm{t}_1, ..., t_s)/t_1$ *невозрастает на* $(0,1]$ *при всех фиксированных* $(t_2, ..., t_s)$. *Тогда для того чтобы имело место вложение* $E_{P,\Lambda}(\lambda) \subset SH_q^{\Omega_1}$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$\frac{1}{2^{k\|n\|_1}}\left[\sum_{l=0}^{\|n\|_1} 2^{l\left(qk+\frac{q}{p}-1\right)}\lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left[\sum_{\|n\|_1+1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q}{p}-1\right)}\lambda_l^q\right]^{\frac{1}{q}}=O\left(\Omega_1\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$$

где

$$E_{p,\Lambda}(\lambda)=\{f(x)\in L_0^p(\pi_s):E_{Q(\Lambda,2^n)}(f)_p=O(\lambda_n)\ (n\to\infty)\}.$$

В [93] по функции $\Lambda(t)$ определены (из них второе формально, поскольку на самом деле будет изучаться $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,\mathrm{N})}(x)$) функции

$$M_{Q(\Lambda,\mathrm{N})}(x)=\sum_{n\in(\Lambda,\mathrm{N})}\delta_n(x),\delta_n(x)=\sum_{m\in\rho(n)}e^{i(m,x)},x\in R^s,$$

и

$$F_{Q(\Lambda,\mathrm{N})}(x)=\sum_{n\in^{\perp}(\Lambda,\mathrm{N})}\delta_n(x).$$

В отношении этих ядер, в продолжение исследований из обзора [106], получены следующие точные порядковые оценки (в них $p_0\equiv p_0(p)=p$ при $1<p<\infty$ и $p_0(p)=1$ при $p=\infty$)

Теорема 3 (М.Сихов [95]). *Пусть* $1<p\leq\infty,\ \beta\in R^s$. *Тогда*

$$\left\|M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)\right\|_p\asymp\left(\sum_{n\in(\Lambda,N)}2^{p_0\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Теорема 4 (М.Сихов [95]). *Пусть* $1<p\leq\infty,\beta\in R^s$. *Функция* $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)$ *принадлежит пространству* L^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n\in Z_+^s}2^{p_0\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)}<\infty. \quad (11)$$

При этом, если выполнено условие(11),*то*

$$\left\|F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)\right\|_p\asymp\left(\sum_{n\in^{\perp}(\Lambda,N)}2^{p_0\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Следующая конкретизация теоремы 3 показывает, что даже относительно простой спектр приводит к достаточно сложным точным порядковым соотношениям, которые, тем не менее, выписываются в явном виде. Именно, в случае

$$\Lambda(t_1,t_2)=\frac{t_1^r}{(\log\frac{1}{t_1})^{b_1}}\cdot\frac{t_2^r}{(\log\frac{1}{t_2})^{b_2}},$$

$1<p\leq\infty$, $\beta,b_1,b_2\in R$, $r>0$ и $\beta+1-\frac{1}{p}>0$, $\alpha_0=p_0\ \left(\beta+1-\frac{1}{p}\right)$, имеем

$$\left\|M^{(\beta)}_{Q(N)}(x)\right\|_p\asymp N^{\frac{\alpha_0}{rp_0}}\left(\Phi\left(b_1,b_2,r,\alpha_0,N\right)\right)^{\frac{1}{p_0}},$$

где

$$\Phi\left(b_1,b_2,r,\alpha_0,N\right)=\begin{cases}(\log N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}-\frac{b_2\alpha_0}{r}+1}, & \textit{если } b_1\alpha_0<r,\, b_2\alpha_0<r;\\ (\log N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}}\log\log N, & \textit{если } b_1\alpha_0\le r,\, b_2\alpha_0=r;\\ (\log N)^{\frac{b_2\alpha_0}{r}}\log\log N, & \textit{если } b_1\alpha_0=r,\, b_2\alpha_0\le r;\\ (\log N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}}, & \textit{если } b_1\alpha_0\le r,\, b_2\alpha_0>r;\\ (\log N)^{-\frac{b_2\alpha_0}{r}}, & \textit{если } b_1\alpha_0>r,\, b_2\alpha_0\le r;\\ (\log N)^{-\frac{\min\{b_1,b_2\}\alpha_0}{r}}, & \textit{если } b_1\alpha_0>r,\, b_2\alpha_0>r.\end{cases}$$

И, наконец, в качестве иллюстрационного примера развития темы в [93] приведем одно симпатичное соотношение – точное в смысле порядка неравенство типа Бернштейна и Джексона-Никольского (подробности см. в [94]):

Пусть $1<p\le q<\infty,\ \beta\ge 0,\ r>0$ *и выполнено одно из условий*

1) $0<b_2\le b_1,\ 1+\frac{r}{b_1}<p\le q\le\frac{1}{1+\beta}\left(1+\frac{r}{b_2}\right);$

2) $b_1>0,\ b_2\le 0,\ 1+\frac{r}{b_1}<p\le q.$

Тогда

$$\sup_{t\in T(Q(N))}\frac{\left\|t^{(\beta)}(x)\right\|_q}{\|t(x)\|_p}\asymp N^{\frac{1}{r}\left(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\cdot(\log N)^{-\frac{b_2}{r}\left(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Задачи. Начатая в исследованиях Фавара, Ахиезера – Крейна и Никольского тема (3) в форме «Предпоперечника Колмогорова» как задача выяснения аппроксимативных возможностей данного класса вычислительных агрегатов (быть может даже заведомо не относящихся к оптимальным по классу, как образно выразился один из оппонентов по докторской диссертации [93] В.Г. Кротов «А у меня техника сломалась»), как нам представляется, относится к недостаточно изученным в теории приближений.

Очевидно, актуальность этой темы напрямую определяется численным анализом, в особенности с развитием компьютерных технологий.

Тема (3) органически связана с дальнейшим развитием поперечниковых задач, неравенств типа Бернштейна и Никольского, теории вложений и приближений, что можно отнести к основным выводам исследования [93].

Тем самым, приходим к большому количеству новых задач.

8. Пространства типа Морри (иллюстративный результат – теорема Г.Т.Джумакаевой о вложении классов Соболева-Морри в $C(0,1)^s$)

1°. **Пространства Лебега-Морри** $L_{p,\Phi,T}$ с нормой $\|\varphi\|_{p,\Phi,T}\equiv\sup\limits_{E\in T}\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int_E|\varphi(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ изучены К.Ж. Наурызбаевым и Г.Т. Джумакаевой [26], в частности, ими установлены следующие критерии.

Теорема 1 (К.Ж. Наурызбаев и Г.Т. Джумакаева [26, 1982г.]). *Пусть* $1\le p<q<\infty$, *тогда*

$$L_{p,\Phi,T_0}\subset C(0,1)^s\Leftrightarrow\lim_{\delta\to+0}\frac{\Phi^p(\delta)}{\delta}=0,\,L_{p,\Phi,T_0}\subset L^q(0,1)^s\Leftrightarrow\int_0^1\delta^{-\frac{q}{p}}\Phi^q(\delta)\,d\delta<+\infty,\qquad(1)$$

$$L_{p,\Phi,T_0}\subset L_{q,\psi,T_0}\Leftrightarrow\int_0^\eta\delta^{-\frac{q}{p}}\Phi^q(\delta)\,d\delta\ll\psi^q(\eta)\ \ (0<\eta\le 1),$$

где T_0 - семейство всех измеримых подмножеств $(0,1)^s$ положительной меры.

Далее, необходимое и достаточное условие вложения классов Лебега-Морри в пространства Лоренца выяснено в следующей теореме.

Теорема 2 (К. Ж. Наурызбаев и Г.Т. Джумакаева [26, 1982г.]). *Имеют место следующие утверждения:*

1) Если $1\le p<\mu<+\infty$, $0<\nu<+\infty$, *то*

$$L_{p,\Phi,T_0}\subset L(\mu,\nu)\Leftrightarrow\int_0^1\delta^{-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{\mu}}\Phi^\nu(\delta)\frac{d\delta}{\delta}<+\infty;\qquad(2)$$

2*) Если* $1 \le p = \mu < \infty, 0 < \nu < p$ *, то*

$$L_{p,\Phi,T_0} \subset L(p,\nu) \Leftrightarrow \int_0^1 (\ln\delta)^{-\frac{\nu}{p}} \Phi^{\nu}(\delta) \frac{d\delta}{\delta} < +\infty. \tag{3}$$

(в случае необходимости предполагается $\Phi(\delta) \ll \Phi(\delta^2)$ *).*

В случае $1 \le p < \mu = \nu = q < \infty$ критерий (2) сводится к (1).

Отметим, что в оставшихся случаях $L(\mu,\nu)$ не будет собственным подмножеством L^p, так что вопроса о вложении не возникает.

2°. Пространства Соболева-Морри. Заменяя в определении функциональных пространств L^p - норму на норму $\|\varphi\|_{p,\Phi,\mathrm{T}} \equiv \sup\limits_{E\in T} \frac{1}{\varphi(|\mathrm{E}|)} \left(\int_E |\varphi(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ будем также получать, аналогично $L_{p,\Phi,T}$, более тонкую классификацию исходных пространств. Остановимся на одной из них.

Пусть даны числа s и $r (s,r = 1,2,...), 1 \le p < \infty$. Пространством Соболева - Морри $W^r_{p,\Phi}(0,1)^s$ называют множество всех тех измеримых на $(0,1)^s$ функций $f(x)$, для каждой из которых конечна норма

$$\|f\|_{W^r_{p,\Phi}(0,1)^s} \equiv \|f\|_{p,\Phi} + \sum_{i=1}^{s} \|D_i^r f\|_{p,\Phi}, \tag{4}$$

где $D_i^r f(x)$ - производная порядка r по i- ой переменной в $x = (x_1,...,x_s), \|\cdot\|_{p,\Phi}$ есть норма $\|\varphi\|_{p,\Phi,\mathrm{T}} \equiv \sup\limits_{E\in T} \frac{1}{\Phi(|\mathrm{E}|)} \left(\int_E |\varphi(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в случае, когда семейство T состоит из всевозможных кубов $E = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_s,b_s], 0 < a_j < b_j < 1, b_1 - a_1 = b_j - a_j \ (j = 2,...,s)$.

Для степенных функций $\Phi(\delta) = \delta^\alpha$ пространства $W^r_{p,\Phi}(0,1)^s$ впервые были изучены Морри [25]. В дальнейшем, эти исследования были продолжены в работах различных авторов (см. [18, §27], [10, с. 39–40], [26–33, 107–122, 124, 125] и т.п.).

Как обычно, через $C(0,1)^s$ обозначим множество всех определенных и равномерно непрерывных на $(0,1)^s$ функций.

Справедлива

Теорема 3 (Г.Т. Джумакаева [28, 1985г.]). *Пусть даны числа* $p (1 \le p < \infty), s$ *и* $r (s,r = 1,2,...)$ *такие, что* $rp \ne s$. *Пусть также дана неубывающая на* $(0,1]$ *положительная функция* $\Phi(\delta)$*, для которой при некотором* $C > 0$ *справедливо неравенство* $\Phi(\delta)/\delta \le C\Phi^p(\eta)/\eta (0 < \eta < \delta < 1)$. *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^r_{p,\Phi}(0,1)^s \subset C(0,1)^s, \tag{5}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(\delta) \frac{d\delta}{\delta} < +\infty. \tag{6}$$

Следствие. Пусть $rp < s$. *Тогда для каждой функций из следующей последовательности*

$$\Phi(\delta) = \delta^{\frac{1}{p}-\frac{r}{s}+\varepsilon},\ \Phi(\delta) = \delta^{\frac{1}{p}-\frac{r}{s}} \cdot \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-(1+\varepsilon)}, \Phi(\delta) = \delta^{\frac{1}{p}-\frac{r}{s}} \cdot \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1} \cdot \left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)^{-(1+\varepsilon)}, ...$$

вложение (5) *будет или не будет иметь место в зависимости от* $\varepsilon > 0$ *или* $\varepsilon = 0$.

3°. Обобщенные классы Никольского-Морри в смешанной норме. Имеет место

Теорема 4 (Г.Т. Джумакаева [32, 1981г.]). *Пусть даны числа* $n (n = 1,2,...)$; $1 \le p_i < +\infty (i = 1,...,n), \omega(\delta)$ *-строго возрастающий модуль непрерывности на* $[0,\ 1]$ *и неубывающая, неотрицательная на* $[0,\ 1]$ *функция* $\Phi(\delta)$ *с* $\Phi(2\delta) = \underset{=}{O}\{\Phi(\delta)\}$ *и пусть*

$$\int_0^1 \omega(\delta)\Phi(\delta^n)\delta^{-\left(\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_n}\right)} \frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Тогда если функция $u(x)$ принадлежит классу Лебега со смешанной нормой $L^{(p_1,...,p_n)}([0,1]^n)$ и удовлетворяет условию

$$\left\{\int_{a_n}^{b_n}\left[...\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}|u(x_1+t_1,...,x_n+t_n)-u(x_1,...,x_n)|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}}...\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}\le$$

$$\le K\omega\left(\sqrt{t_1^2+\ldots+t_n^2}\right)\Phi\left((b_1-a_1)...(b_n-a_n)\right)$$

для некоторого $K>0$ и всех t_i, b_i и a_i таких, что

$$0\le a_i\le b_i\le b_i+t_i\le 1\quad(i=1,2,...,n),$$

то функция $u(x)$ на $[0,1]^n$ эквивалентна некоторой непрерывной функции $u^*(x)$, причем

$$|u^*(x)-u^*(y)|\le CK\int_0^{\left\{\tilde{\omega}^{-1}[\omega(|x-y|)]\right\}^{\frac{1}{n}}}\omega(\delta)\Phi(\delta^n)\delta^{-\left(\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_n}\right)-1}d\delta\ (x,y\in[0,1]^n),$$

где $\tilde{\omega}^{-1}$ есть функция, обратная к $\tilde{\omega}(\delta)=\omega\left(\delta^{\frac{1}{n}}\right)$, а C зависит от $\omega(\delta)$ и $\Phi(\delta)$, но не зависит от $u(x)$.

При $p=p_1=...=p_n$, $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$, $\Phi(\delta)=\delta^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{\beta}{n}\right)}$ $(0\le\beta\le n)$ эта теорема сводится к одному результату из [107], а при $\Phi(\delta)\equiv 1$ обобщает достаточную часть основной теоремы из [108] в том смысле, что дополнительно устанавливается степень гладкости функции u$^*(x)$.

Пусть теперь $\omega_1(\delta),...,\omega_n(\delta)$ есть система строго возрастающих на $[0,1]$ модулей непрерывности и пусть $\omega_i(1)=1\ (i=1,....,n)$. Тогда классом Никольского-Морри $H^{\omega_1,...,\omega_n}_{p_1,....,p_n,\Phi,\mathrm{S}}(\Omega)$ будем называть множество всех функций $f(x)\in L^{(p_1,...,p_n)}(\Omega)$ таких, что для некоторого $C_f>0$ и всех $E\in T, h=(0,...,h_i,...,0)$ выполнены неравенства

$$\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{p_1,...,p_n,\Phi;\mathrm{E_h}}\le C_f\omega_i(|h|)\ \ (i=1,...,n),$$

где E_h есть множество всех $x\in\Omega\cap E$ таких, что $x+h\in\Omega$.

Ясно, что для $\Phi(\delta)\equiv 1$, $p=p_1=...=p_n$ и степенных $\omega_i(\delta)=\delta^{\alpha_i}\,(0<\alpha_i<1;i=1,...,n)$ эти классы сводятся к классам С.М. Никольского $H_p^{\alpha_1,...,\alpha_n}$.

Следуя В.И. Коляде, средним модулем непрерывности системы $\omega_1(\delta),\ldots,\omega_n(\delta)$ будем называть функцию $\omega(\delta)=\left[\prod_{i=0}^n\omega_i^{-1}(\delta)\right]^{-1}$, где g^{-1} означает функцию, обратную к g.

Через $T_\omega\equiv T_{\omega_1,...,\omega_n}$ обозначим следующее семейство параллелепипедов $(x\in[0,1]^n, k=0,1,...)$: $\left\{(y_1\ldots y_n):|x_j-y_j|\le\frac{1}{2}\omega_j^{-1}\left(\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)\right), j=1,\ldots,n\right\}$.

В условиях принятых определений и обозначений имеют место следующие теоремы.

Теорема 5 (Г.Т. Джумакаева [30, 1982г.]). *Если $1<p<\infty$ и $\int_0^1\delta^{-\frac{1}{p}}\omega(\delta)\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta}<+\infty$, то каждая функция $f(x)\in H^{\omega_1,...,\omega_n}_{P,\Phi,T_\omega}([0,1]^n)$ в смысле n - мерной меры Лебега эквивалентна на $[0,1]^n$ некоторой функции $\tilde{f}(x)$, причем*

$$\left|\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x)\right|\le C_f\int_0^{\omega^{-1}\left\{\omega_j(|t|)\right\}}\delta^{-\frac{1}{p}}\omega(\delta)\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta}\ \ (i=1,\ldots,n),$$

где $t=(0,\ldots,t_i,\ldots,0)$.

Теорема 6 (Г.Т. Джумакаева [30, 1982г.]). *Если числа $1\le p_i<\infty\,(i=1,\ldots,n)$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$ таковы, что*

$$\int_0^1\delta^{-\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}}\omega(\delta)\Phi(\delta^n)\frac{d\delta}{\delta}<+\infty,$$

то каждая функция $f(x) \in H^{\omega,\ldots,\omega}_{p_1,\ldots,p_n;\Phi,T_\omega}([0,1]^n)$ *эквивалентна в смысле* n *- мерной меры Лебега некоторый непрерывной на* $[0,1]^n$ *функции* $\tilde{f}(x)$ *, причем для некоторого* $C_f>0$ *и всех* $x,y \in [0,1]^n$ *выполнено*

$$\left|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\right| \le C_f \int_0^{|x-y|^{\frac{1}{n}}} \delta^{-\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}} \omega(\delta)\cdot\Phi(\delta^{\mathrm{n}})\frac{d\delta}{\delta}.$$

Опять же, из теорем 5 и 6 следуют некоторые известные утверждения из [107, 108].

Теперь приведем теоремы вложения для анизотропных классов Соболева – Морри [29].

Для того чтобы сформулировать эти результаты, напомним соответствующие определения и обозначения в анизотропном случае.

Пусть даны целые положительные числа s и r_j $(j=1,\ldots,s)$, положительные числа $\aleph_j$ $(j=1,\ldots,s)$, $1 \le p < \infty$ и положительная неубывающая на $(0,1]$ функция $\Phi(\delta)$.

Определим множество параллелепипедов $T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s}$,

$$T_\aleph = T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s} = \left\{ I_{\vartheta^\aleph}(y) = \prod_{j=1}^s \left[y_j - \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j}, y_j + \frac{1}{2}\vartheta^{\aleph_j}\right] \subset [0,1]^s : \right.$$

$$\left. 0<y_j<1 \quad (j=1,\ldots,s), 0<\vartheta\le 1 \right\}$$

и соответствующую ей норму

$$\|\varphi\|_{p,\Phi,T_\aleph} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\aleph_1,\ldots,\aleph_s}} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s} \equiv \sup_{E\in T_\aleph} \frac{1}{\Phi(|\mathrm{E}|)} \left(\int\limits_E |\varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $|\mathrm{E}|$ есть лебегова мера множества E.

Классом (анизотропным) Соболева-Морри $W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}((0,1)^s)$ назовем множество, состоящее из всех измеримых на $[0,1]^s$ функций $f(x)$, для каждой из которых

$$\|f\|_{W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}} \equiv \|f\|_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s} + \sum_{j=1}^s \left\|D^{r_j}_{x_j} f\right\|_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s} \le 1,$$

где $D^{r_j}_{x_j} f$ - обобщенная производная порядка r_j по переменной x_j.

Класс $W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}((0,1)^s)$ в случае $r_1=\cdots=r_s=r$, $\aleph_1=\cdots=\aleph_s$ обозначим через $W^r_{p,\Phi,T}((0,1)^s)$, где T есть семейство всех s-мерных кубов из $(0,1)^s$, стороны которых параллельны осям координат.

Ясно, что при $\Phi(\delta)\equiv 1$ классы $W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s} \equiv W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,1,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}$ сводятся к соответствующим пространствам Соболева $W^{r_1,\ldots,r_s}_p((0,1)^s)$.

Для $\aleph_1>0,\ldots,\aleph_s>0$ будем писать $|\aleph| = \aleph_1+\ldots\aleph_s$.

Теорема 7. *Пусть даны целые положительные числа* $s, r_1,\ldots,r_s$ *, положительные числа* $\aleph_j (j=1,\ldots,s)$ *, действительное число* $1\le p<\infty$ *и неубывающая на* $(0,1]$ *положительная функция* $\Phi(\delta)$ *, удовлетворяющая условию* $\Phi(2\delta) \ll \Phi(\delta)$ *. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}((0,1)^s) \subset C((0,1)^s)$$

достаточно, а в случае выполнения условий

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^s \frac{1}{r_j} \ne 1 \text{ и } r_\tau \aleph_\tau = 1 \ (\tau=1,\ldots,s)$$

$$\eta\Phi(\delta) \ll \delta\,\Phi(\eta)\ (0<\eta<\delta<1)$$

необходимо, чтобы

$$\int\limits_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^s \frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\ldots,s} r_\tau\aleph_\tau}{|\aleph|}} \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

При $r_1 = ... = r_s = r,\ \aleph_1 = ... = \aleph_s,\ T_\aleph = T$ эта теорема сводится к теореме 3,

В последнее время наблюдается большая научная активность по темам вложений классов Бесова-Морри, Лизоркина-Морри и Трибеля-Морри, ограниченности классических операторов, в их числе максимального и Харди, риссовских потенциалов и т.п., интерполяции в пространствах Морри (см., напр., [27, 109–122] и имеющуюся в них библ.).

Теперь обратимся к случаю $rp = s$, впервые изученному в [123], краткий обзор последующих результатов дан в [18, стр. 133–134]. Справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = 1$. *В случае* $\Phi(\delta) = \log^{-\beta}\frac{1}{\delta}(0<\delta<1;\beta>0)$ *вложение*

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j},\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}\left((0,1)^s\right) \subset C\left((0,1)^s\right), \tag{7}$$

имеет место при $\beta > 1$ *и при всех* $\aleph_j > 0\ (j = 1,\dots,s)$ *и не имеет места при* $\beta \leq 1 - \frac{1}{p}\ (p > 1)\,, \aleph_j = \frac{1}{r_j}\,(j = 1,\dots,s)$.

И, в заключение, обратимся к вложению в $L^q(0,1)^s$ (см. [124]).

Через $D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}F$ обозначим множество, составленное из всех определенных на единичном s-мерном кубе $[0,1]^s$ функций $f(x) = f(x_1,...,x_s)$, обобщенные производные $f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(x)$ которых принадлежат классу F. Тогда условие

$$\int_0^1 \delta^{\left[1-\sum_{j=1}^{s}\left(\alpha_j+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{r_j}\right]\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\aleph_\tau}{\aleph_1+\dots+\aleph_s}}\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty$$

влечет вложение

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}C\,(0,1)^s\,.$$

Отсюда, в частности, следует

Следствие (В.П. Ильин [125]). *Если при* $a > 0$ *выполнено неравенство*

$$1 - \sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j} - \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} - \frac{\sum_{t=1}^{s}\aleph_t}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\aleph_\tau}\cdot a\right)\frac{1}{p} > 0,$$

то при $\Phi(\delta) = \delta^{\frac{a}{p}}$ *имеет место вложение*

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p;\delta^{\frac{a}{p}};\aleph_1,\dots,\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}C\,(0,1)^s\,.$$

Теперь обратимся к случаю вложений в лебеговы пространства $L^q(0,1)^s$. В степенном случае имеет место следующий критерий.

Теорема 9. *При* $\Phi(\delta) = \delta^\beta\,(\beta > 0)$, $\frac{r}{s} < \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \ 1 \leq p \leq \frac{q}{(1+\sqrt{q})}$ *имеем*

$$W^r_{p,\delta^\beta,T}(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s \Leftrightarrow \beta > \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \frac{r}{s}\right]\cdot\frac{1}{1-\frac{p}{q}}.$$

Здесь общее достаточное условие вложения

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1\dots\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}L^q(0,1)^s$$

при $1 \leq p < q < \infty$ состоит в сходимости интеграла

$$\int_0^1 \vartheta^{-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Phi^{1-\frac{p}{q}}\left(\vartheta^{\frac{\aleph_1+\dots+\aleph_s}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\aleph_\tau}}\right)d\vartheta < +\infty.$$

Задачи. 1°. Заменяя во всех постановках задач, где это возможно, лебеговскую L^p - норму на норму $\|\varphi\|_{p,\Phi,\mathrm{T}} \equiv \sup\limits_{E\in T}\frac{1}{\Phi(|\mathrm{E}|)}\left(\int_E|\varphi(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ и на различные ее модификации (см., напр., п.9 из §1), получим, подобно приведенным выше утверждениям, необозримое количество классов и задач. Таковыми являются, например, задачи вложения пространств Лебега - Морри, Никольского - Морри, Соболева – Морри и Бесова - Морри, приложения к дифференциальным уравнениям, рядам Фурье и т.п.

Эти задачи были сформулированы в Обзоре-1997 [1] по результатам исследований 1981-1985 годов [26, 28, 30, 32].

2°. Как это следует из критерия (2)-(3) К.Ж. Наурызбаева и Г.Т. Джумакаевой, в случае вложения пространства Лебега-Морри в пространства Лоренца повторяется эффект (2) из п.3 резкого отличия условий вложения класса H_p^ω в пространство Лоренца $L(\mu,\nu)$ при $\mu > p$ («далекий случай») и при $\mu = p$ («близкий случай»), разумеется, со своими особенностями.

3°. Из теоремы 8 следует, что аналогичный эффект имеет место и в случае вложения (5) пространства Соболева-Морри в пространство непрерывных функций.

Именно, при $rp < s$ $\left(\frac{1}{p} - \frac{r}{s} > 0\right)$ выполнен критерий

$$W_{p,\Phi}^r(0,1)^s \subset C(0,1)^s \Leftrightarrow \int_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}}\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} \asymp \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{r}{s}\right)}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

Из оставшихся, случай $rp > s$, в виду вложения (см. [123]) $W_{p,1}^r(0,1)^s \subset C(0,1)^s$ неинтересен, поскольку $W_{p,\Phi}^r(0,1)^s \subset W_{p,1}^r(0,1)^s$, что подтверждается и теоремой 3: при $rp > s$ $\left(\frac{r}{s} - \frac{1}{p} > 0\right)$, $\Phi(\delta) \equiv 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{r}{s}\right)}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\left(\frac{r}{s}-\frac{1}{p}\right)}} < +\infty.$$

И, наконец, случай $rp = s$. Опять же, согласно теореме вложения Соболева [123], при $rp = s$, $p = 1$ $(\frac{1}{p} - \frac{r}{s} = 1 - \frac{r}{s} = 0, r = s), \Phi(\delta) \equiv 1$ имеет место вложение

$$W_{1,1}^s(0,1)^s \subset C(0,1)^s,$$

в то время как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\left(\frac{1}{p}-\frac{r}{s}\right)}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1} = +\infty,$$

т.е. при этих предположениях условие (6) не является необходимым для вложения (5).

Теорему 8 можно рассматривать как распространение теоремы 10.4 из [18, стр. 129–130] на случай $\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = p$, $1 \le p \le +\infty$. Здесь случай $1 - \frac{1}{p} < \beta \le 1$ остается открытым. Не исключено, что вложение (7) имеет место во всех этих случаях.

9. Модули непрерывности переменного приращения и теоремы вложения (К.Сулейменов, Н.Темиргалиев)

В. Дитциан и В. Тотик [126] предложили следующее обобщение модуля непрерывности $(1 \le p < \infty, 0 \le \alpha < 1)$

$$\omega_{\alpha,p}(\delta,f) = \sup_{0<h\le\delta}\left(\int_{0\le x\le x+hx^\alpha\le 1}|f(x+h\cdot x^\alpha) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (0<\delta\le 1), \tag{1}$$

в котором обычное приращение функции $|f(x+h) - f(x)|$ было заменено на $|f(x+h\cdot x^\alpha) - f(x)|$, с зависящим от аргумента функции x *переменным приращением* $h \cdot x^\alpha$.

Цель ввода определения (1) состояла, в частности, в приведении к одному и тому же виду оценок приближений по тригонометрической и алгебраической системам (подробности см. в [126]).

Разумеется, сразу же возникает вопрос о влиянии параметра α из характеристики (1) структурных свойств функций в задачах метрической теории функций, в своих формулировках содержащих модуль непрерывности.

Естественно начать с фундаментального, в теории вложений, значения критерия Ульянова

$$H_p^\omega \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \ (1 \le p < q < \infty). \tag{2}$$

В силу неравенства (Ульянова [6], Осколкова – Теляковского [127], Брудного [128] и, в самой общей формулировке, П. Освальда [129])

$$\omega_p(\delta; f^*) \le c_p \omega_p(\delta, f) \quad (0 \le \delta \le 1), \tag{3}$$

где $f^*(x)$ есть равноизмеримая невозрастающая перестановка $|f(x)|$, т.е., напомним,

$$f^*(t) = \inf\{y > 0 : mes\{x \in [0,1] : |f(x)| > y\} < t\},$$

критерий (2), в силу (3) в эквивалентной форме можно переписать так

$$\bar{H}^{\omega}_{0,p} \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \;\; (1 \le p < q < \infty). \tag{4}$$

Здесь при $0 \le \alpha < 1$, $1 \le p < \infty$ класс $\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p}$ составлен из всех неотрицательных неубывающих на $(0,1]$ функций $f(x) \in L^p(0,1)$ таких, что

$$\omega_{\alpha,p}(\delta; f) \le \omega(\delta) \quad (0 \le \delta \le 1), \tag{5}$$

где $\omega(\delta)$ - заданный модуль непрерывности.

Тогда имеет место критерий (см. [130])

$$\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L^q(0,1) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)-\frac{1}{1-\alpha}-1} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \;\; (1 \le p < q < \infty,\ 0 \le \alpha < 1). \tag{6}$$

Далее, критерий вложения в пространство Лоренца (2) из п. 4 в эквивалентной форме переписывается в виде

$$\bar{H}^{\omega}_{0,p} \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, & \textit{если}\ \mu > p,\ 0 < \nu < \infty, \\ \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, & \textit{если}\ \mu = p,\ 0 < \nu < p. \end{cases} \tag{7}$$

а критерий вложения в пространство Лоренца для $\alpha > 0$ следующий

$$\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty & \left(1 \le p < \mu,\ 0 \le \alpha < 1 - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right), 0 < \nu < \infty\right) \\ \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty & (1 \le p < \infty, \mu = p, 0 < \nu < p, 0 \le \alpha < 1) \end{cases} \tag{8}$$

(в случае необходимости в последнем случае предполагается $\omega(\delta) = O\left\{\omega\left(\delta^2\right)\right\}$ $(0 \le \delta \le 1)$).

Отметим, что при $\alpha = 0$ критерий (6) сводится к критерию (4), стало быть, эквивалентному ему критерию (2).

Точно также, при $\alpha = 0$ критерий (8) сводится к критерию (7), и, тем самым, к эквивалентному ему критерию (2) из п. 4.

И, наконец, при $1 \le p < q = \mu = \nu < +\infty$ из критерия (8) следует критерий (6).

$$(1 \le p < \mu,\ 0 \le \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu), 0 < \nu < \infty).$$

Отметим, что в критериях (4) и (7) также использовано то обстоятельство, что в необходимой части соответствующих утверждений строится неотрицательная невозрастающая на $(0,1]$ функция.

Теперь обратимся к ещё одному случаю выявления действия параметра α, а именно к неравенству (П.Л. Ульянова [6], Э.А.Стороженко [131], Гарсиа [132])

$$f^*(x) \le c(p)\left\{\int_x^1 t^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)} \omega_p(f,t)\,dt + \|f\|_p\right\} \quad (0 < x \le 1), \tag{9}$$

также относящемуся к центральным в теории вложений

Опять же в силу (3), неравенство (9) эквивалентно выполнению для всякой неотрицательной невозрастающей на $(0,1]$ функции $f(x) \in L^p(0,1)$ $(1 \leq p < \infty)$

$$f(x) \leq c(p) \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{0,p}(f,t)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \|f\|_p \right\} \quad (0 < x \leq 1), \tag{10}$$

которое, как это установлено в [130], при $0 < \alpha < 1$ переходит в определенном смысле (см. об этом ниже) неулучшаемое неравенство

$$f(x) \leq c(\alpha, p) \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p}\left(f, 2^{-1}\left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1\right) t^{1-\alpha}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \|f\|_p \right\} \; (0 < x \leq 1). \tag{11}$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ неравенство (11) сводится к (10).

В более подробном изложении доказаны следующие теоремы

Теорема 1 (К. Сулейменов, Н. Темиргалиев [130]). *Пусть даны числа* $1 \leq p < \infty, 0 \leq \alpha < 1$. *Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции* $f \in L^p(0,1)$ *справедливо неравенство*

$$f(x) \leq c(\alpha, p) \left\{ \int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p}\left(f, 2^{-1}\left(2^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1\right) t^{1-\alpha}\right)}{t^{\frac{1}{p}+1}} dt + \|f\|_p \right\} \; (0 < x \leq 1).$$

Имеет место

Предложение 1. *Пусть даны числа* $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$ *и* γ *такие, что* $0 < \alpha + \frac{1}{p} - 1 < \gamma < \frac{1}{p}$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\omega_{\alpha,p}\left(\frac{1}{x^\gamma}, \delta\right) \asymp \delta^{\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\gamma\right)} \; (0 < \delta \leq 1).$$

Отсюда следует неулучшаемость неравенства (11) в том смысле, что ее левые и правые части относительно $0 < x < 1$ имеют одинаковый порядок по отношению к каждому из параметров $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \tau < 1$ ($\omega_{\alpha,p}(x^{-\gamma}, \delta) \asymp \delta^\tau$).

Предложение 2. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty$ и $0 \leq \alpha < 1$. Тогда для функции $f(x) = \frac{1}{x^\gamma}$ при $\gamma = \frac{1}{p} - \tau(1-\alpha), 0 < \tau < 1$ модуль непрерывности имеет порядок $\omega_{\alpha,p}(x^{-\gamma}, \delta) \asymp \delta^\tau$ и справедливы следующие утверждения:

1) если $0 < \tau < 1, 0 \leq \alpha < 1$, то оценка (11) точна для всех $1 \leq p < \frac{1}{\tau(1-\alpha)}$,

2) если $1 \leq p < \infty$ и $0 < \tau < 1$, то оценка (11) точна для всех $1 - \frac{1}{p\tau} < \alpha < 1$,

3) если $0 \leq \alpha < 1$ и $1 \leq p < \infty$, то оценка (11) точна для всех $0 < \tau < \frac{1}{p(1-\alpha)}$.

Далее, справедливы

Теорема 2 (К. Сулейменов, Н. Темиргалиев [130]). *Пусть даны числа* $1 \leq p < \mu, 0 \leq \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu), 0 < \nu < \infty$. *Пусть также дан некоторый модуль непрерывности* $\omega(\delta)$. *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$\bar{H}^\omega_{\alpha,p} \subset L(\mu, \nu),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\frac{v}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^v\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Следствие 1. *При* $1 \leq p < \mu$, $0 \leq \alpha < 1-(1/p-1/\mu)$, $0 < \nu < \infty$, $\omega(\delta) = \delta^\tau (0 < \tau \leq 1)$, *имеем* $\overline{H}^{\delta^\tau}_{\alpha,p} \subset L(\mu, \nu) \Leftrightarrow \nu\tau > \frac{\nu}{1-\alpha}(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}) > 0$.

Следствие 2. *При* $1 \leq p < \mu$, $0 \leq \alpha < 1 - (1/p - 1/\mu)$, $0 < \nu < \infty$, $\omega(\delta) = \delta^\tau (0 < \tau \leq 1)$, $\omega(\delta) = \delta^{\frac{\nu}{1-\alpha}(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu})} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\tau}$ *имеем* $\overline{H}^{\delta^{\frac{\nu}{1-\alpha}(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu})}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\tau}}_{\alpha,p} \Leftrightarrow \tau\nu > 1$.

Теорема 3 (К. Сулейменов, Н. Темиргалиев [130]). *Пусть даны числа* $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \nu < \infty$ $0 < \nu < p$. *Пусть также дан модуль непрерывности* $\omega(\delta)$.

Тогда, для того чтобы имело место вложение

$$\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L\left(p,\nu\right),$$

достаточно, а в случае, когда $\omega\left(\delta\right) = \underline{\underline{0}}\left\{\omega\left(\delta^2\right)\right\}\left(0 \le \delta \le 1\right)$ *, и необходимо, чтобы*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\frac{\nu}{p}}} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

Следствие 1. *При* $1 \le p < \infty,\ 0 \le \alpha < 1,\ 0 < \tau < \infty\,,\ 0 < \nu < p\,,\ \omega(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\tau}$ *имеем*

$$\overline{H}_{\alpha,p} \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \nu(\frac{1}{p}+\tau) > 1.$$

Следствие 2. *При* $1 \le p < \infty,\ 0 \le \alpha < 1,\ 0 < \tau < \infty,\ 0 < \nu < p,\ \omega(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\left(1-\frac{\nu}{p}\right)}\left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\tau}$, *имеем* $\overline{H}^{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\left(1-\frac{\nu}{p}\right)}\left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\tau}}_{\alpha,p} \Leftrightarrow \tau\nu > 1$.

Замечание 1. Изученные здесь задачи ранее рассмотрены в статье N.X. Ку [133].

Так, как это утверждается в [133], влияние параметра α при замене в (10) модуля непрерывности $\omega_p\left(f,\delta\right) \equiv \omega_{0,p}\left(f,\delta\right)$ на $\omega_{\alpha,p}\left(f,\delta\right)$ будет следующее

$$f\left(x\right) \le C\left(p,\alpha\right)\left\{\int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p}\left(f,t\right)}{t^{\alpha+1+\frac{1}{p}}}dt + \|f\|_p\right\}\left(0 < x \le 1\right), \tag{12}$$

т.е. в отличие от замены $\omega_{0,p}\left(f,t\right)$ на $\omega_{\alpha,p}\left(f,t^{1-\alpha}\right)$ в числителе подынтегрального выражения в (10), предлагается замена $t^{1+\frac{1}{p}}$ на $t^{\alpha+1+\frac{1}{p}}$ в знаменателе. Не говоря об ошибочности доказательств в [133], как показывает пример в Предложении 1, неравенство (12) не является точным.

То же относится и к вложению в $L^q\left(0,1\right)$: в [133] утверждается, что для вложения $\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p} \subset L^q\left(0,1\right)\left(1 \le p < \infty, 0 \le \alpha < 1\right)$, достаточно, а в случае выполнения условий (в совокупности, по сути, противоречивых)

$$\liminf_{t\to 0}\frac{\omega\left(t\right)}{t} > 0, \int_0^{h^{1+\alpha}}\frac{\omega^p\left(t\right)}{t^{p\alpha+1}}dt = O\left\{\omega^p\left(h\right)\right\}\left(h\to 0\right), \int_{h^{1+\alpha}}^1\frac{\omega^p\left(t\right)}{t^{p+1}}dt = O\left\{\frac{\omega^p\left(h\right)}{h^p}\right\}\left(h \to 0\right)$$

и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha q+\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty,$$

в то время как неулучшаемым условием является (6).

Замечание 2. Изученные здесь задачи относились лишь к случаю неотрицательных невозрастающих функций $f\left(x\right) \in L^p\left(0,1\right)\left(1 \le p < \infty\right)$, что, в силу неравенства (3), в эквивалентных формулировках при $\alpha = 0$ сводились к известным случаям (2), (2) из п. 3 и к (9).

Нам неизвестно, имеет ли место неравенство

$$\omega_{\alpha,p}\left(f^*,\delta\right) \le c\left(\alpha,p\right)\omega_{\alpha,p}\left(f,\delta\right) \quad \left(0 \le \delta \le 1\right)$$

при всех $1 \le p < \infty,\ 0 < \alpha < 1$ и $f\left(x\right) \in L^p\left(0,1\right)$, как и справедливость теорем 1-3 для всех $f\left(x\right) \in L^p\left(0,1\right)$.

Замечание 3. Критерий (8) (теоремы 2 и 3), являют собой случаи, когда полностью выявлены границы разных форм ответов на одну и ту же постановку задачи (о чем достаточно подробно говорилось здесь в п.4).

Интересно отметить, что в «близком» случае вложения $\bar{H}^{\omega}_{\alpha,p}$ в $L\left(p,\nu\right)$, зависимость от α, $0 \le \alpha < 1$ только в константах в соответствующем неравенстве типа вложения $\left(1 \le p < \infty,\ 0 < \nu < p,\ 0 < \alpha < 1\right)$:

$$\|f\|_{L(p,\,\nu)} \le C(p,\,\nu,\,\alpha)(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln)^{\frac{\nu}{p}}}\omega^{\nu}_{\alpha,p}(f;\frac{1}{n}) + \|f\|_p^{\nu})^{\frac{1}{\nu}}. \tag{13}$$

Задачи. Большое количество задач можно получить, заменяя в известных результатах и новых задачах обычные модули гладкости на модули гладкости переменного приращения Дитциана-Тотика, следя за влиянием параметра α из определения (1) (или, в общем случае, за действием функции $\varphi(x)$) в разности $\Delta_{h,\varphi}f(x) \equiv f(x+h\varphi(x)) - f(x)$.

§3. Заключение и выводы

Итак, заданы оператор T на функциональном классе F со значениями из нормированного пространства Y .

Задача заключается в получении критерия вложения $TF \subset Y$ как условия формирования величины

$$\delta_N(0;T;FD_N)_Y \equiv \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \sup_{\substack{f\in F,\\ (\tau=1,\ldots,N)}} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot\right)\right\|_Y,$$

при минимальных условиях на T, F и Y .

Если по условиям поставленной задачи выполнено вложение $TF \subset Y$, то вопрос о критерии вложения, понятно, само собой снимается (например, если задача состоит в приближении функции $f(x) \in L^p(0,1)$ в метрике $L^q(0,1)$ при $1 \le q < p < \infty$).

При $Tf = f$ и $Tf = f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ это будут обычные теоремы вложения $F \subset Y \Leftrightarrow ?$ и $D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}F = F^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} = \left\{f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} : f\in F\right\} \subset Y \Leftrightarrow ?$

Если $Tf = u(y;f)$ есть решение дифференциального уравнения $Lu = 0$ с начальными и (или) граничными условиями, задаваемых набором функций $f = (f_1,\ldots,f_k)$, то речь будет идти о неулучшаемом вложении (см. [134–137])

$$\{Tf \equiv u(x;f) : f\in F\} \subset Y.$$

Так, например, приходим к теоремам вложения нового типа (см. [137] при $F_1 = W_2^{r_1}(0,1)^s, F_2 = W_2^{r_2}(0,1)^s$ и $Y = L^{s,\infty}$):

$$\Bigg\{u(x,t;f_1,f_2) = \sum_{m\in Z^s}\left[\widehat{f}_1(m)\cos(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}) + \widehat{f}_2(m)\frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}}\right]\cdot e^{2\pi i(m,x)} :$$

$$f_1\in F_1,\ f_2\in F_2\Bigg\} \subset Y, \qquad (1)$$

в котором требуется получить не только условие вложения, но еще и неулучшаемое. Тем самым, дискретизация проводится по числовой информации от $f = (f_1,f_2)$ в функциональном ряде из (1).

Если $Tf \equiv u(y;f)$ есть решения интегрального уравнения

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y,u(y))dy + f(x),$$

то речь будет идти о вложении (при фиксированном ядре $K(x,y,u(y))$)

$$\{u(x;f) : f\in F\} \subset Y.$$

Вместе с тем, в случае $Tf \equiv \int_{[0,1]^s} f(x)dx$ при условии $F \subset C(0,1)^s$ необходимо будет $Y = R \equiv (-\infty,\infty)$, так что, в силу $u(f) \equiv \sum_{k=1}^N c_k f(t_k) \in R \equiv Y$ нахождение условия вложения $TF \subset Y$ теряет смысл, поскольку выполняется по самой постановке задачи.

Беглый осмотр оглавлений классических монографий по теории вложений показывает, что содержание теории вложений состоит из изучения средств приближения, определения классов, прямых и обратных теорем теории приближений, эквивалентных норм и собственно теорем вложений.

То же в случае интегральных представлений с непосредственным обращением к теоремам вложений.

* * *

Этот номер Серии журнала завершает первый годовой цикл. Сложился определенный стиль журнала - одна программного характера несущая статья и несколько значимых статей на разные темы (с доказательством и без), в совокупности, ещё раз повторимся, нацеленные на внутренние казахстанские интересы.

Редакция журнала надеется на расширение списка авторов по несущей части, помимо, как это объявлялось в [138], статей по темам (в номерах 2–4 Серии уже освещены Направления 1 и 12, Темы 2 и 15, частично Направления 14 и 17):

НАУЧНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ИТМиНВ

Направление 1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в Теории приближений, Вычислительной математике, Численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, "включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты"

Тема 2. Классы (и пространства) функций, что, по словам А. Н. Колмогорова, решает проблему "Нас много", т. е. "многих" обеспечить публикациями

Направление 3. Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного интегрирования и теории случайных чисел

Направление 4. Математический инструментарий прямого применения: тензорные произведения функционалов в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного анализа, восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных по значениям начальных и граничных условий в точках

Направление 5. Иррегулярные распределения и метод квази-Монте Карло как, согласно К. Роту, перспективные направления исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями

Тема 6. Восстановление функций в контексте К(В)П

Тема 7. Численное дифференцирование функций в контексте К(В)П

Тема 8. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте К(В)П

Направление 9. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: конструирование вероятностных мер на классах функций

Тема 10. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов численного интегрирования "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Тема 11. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Направление 12. Теория вложений и приближений - решенные и нерешенные задачи

Тема 13. Ряды Фурье: преобразования коэффициентов и суммирование

Направление 14. Предпоперечник Колмогорова от Мирболата Сихова

Тема 15. Теория "Морри" не как "тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри"

Направление 16. Дискретные и быстрые "алгебраические" преобразования Фурье

Направление 17. Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных "алгебраических" преобразований Фурье. Генерирование случайных чисел Лехмера с максимальным периодом по требованиям Ковею-Макферсона и обширные их применения

Направление 18. "Геометрия чисел" в контексте алгебраической теории чисел

Направление 19. Метод Галеркина и новые теоретические разработки с последующими применениями в контексте всегда сопровождающей его уязвимости

Направление 20. К(В)П - анализ бесконечно гладких функций от Ерика Нурмолдина.

Список литературы

1 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье, Вестник Евразийского университета. -1997. -№3. -С. 90–144.

2 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88.

3 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97

4 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Дробные модули гладкости: учебн. пособие. –М.: МАКС Пресс, 2016. –340 с.

5 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб. -2007. -Т. 198. №11. -С. 3-20.

6 Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер.матем. -1968. -Т. 32. -№ 3. -С. 649-686.

7 Потапов М.К., Симонов Б.В. О взаимосвязи обобщенных классов функций Бесова-Никольского и Вейля-Никольского // Analysis Mathematica. -1996. -Т. 22. -С. 299-316.

8 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -М.: Наука, 1969.

9 Бабенко К.И. Основы численного анализа. -М.: Наука, 1986.

10 Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теорем вложения. -М.: ВИНИТИ, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. –1988. –Т. 26. -С. 1– 157.

11 Трибель Х. Теория функциональных пространств. –М.: Мир, 1986.

12 Утесов А.Б. Задача восстановления функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности на обобщенных классах. Кандидатская диссертация. Алматы, –2001.

13 Коляда В.И. О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сиб. мат. журнал. –1973. –№ 4. -С. 766-790.

14 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. –М.: Физматгиз, 1963. –224 с.; 2-е изд., перераб. и доп. –М.: МЦНМО, 2004. –288 с.

15 Темиргалиев Н. Классы $U_s\left(\beta,\theta,\alpha;\psi\right)$ и квадратурные формулы // Докл. РАН. –2003. –Т. 393. № 5. –С. 605-608.

16 Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. –1990. –Т. 181. № 5. –С. 589-609.

17 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования. // Изв. РАН. Сер. матем. –2009. –Т. 73. № 2. –С. 183-224.

18 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. –М.:Физматлит, 1996.

19 Novak E., Sloan Ian H., Wozniakowski H. Tractability of Approximation for Weighted Korobov Spaces on Classical and Quantum Computers // Found. Comput. Math. –2004. –P. 121-156.

20 Ульянов П.Л. Представление функций рядами и классы $\varphi\left(L\right)$ // Успехи матем. наук. -1972. -Т. XXVII. –Вып.2. –С. 3-52.

21 Blozinski A.P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. -1981. -V. 263. -№ 1. -P. 149–167.

22 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. -Т.2. -М.: Мир, 1965; Пер. с англ.: Zygmund A. Trigonometric series. V. II. Place Name place Cambridge Place Type Univ. Press. State place New York, 1959.

23 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости // Матем. сб. -2003. -Т. 194. -№ 10. -С. 133–160.

24 Бочкарев С.В. Оценки коэффициентов Фурье функций из пространств Лоренца // Докл. РАН. -1998. -Т. 360. -№ 6. -С. 730–733.

25 Morrey C.B. Multiple integral problems in the calcuns of variations and related topics // Univ. State place California Dubl. -1943. -№ 1.

26 Джумакаева Г.Т., Наурызбаев К.Ж. О пространствах Лебега - Морри // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. -1982. -№ 5. -С. 7-12.

27 Burenkov V.I., Guliyev V.S. A. Serbetci and T.V. Tararykova. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces // Dockland Mathematics. -2008. -V. 422. -№ 1. -P. 11-14.

28 Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева - Морри $W^r_{p,\Phi}$ в пространство C // Матем. заметки. -1985. -Т. 37. -№ 3. -С. 399-406.

29 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А. , Джумакаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева–Морри в пространство равномерно непрерывных функций // Сиб. матем. журн. -2016. -Т.57. - № 5. –С. 1156-1170.

30 Джумакаева Г.Т. Об одной комбинации теорем вложения С.М. Никольского и Ч. Морри. Методы исследования операторных уравнений. Ярославль. -1982. -С. 53-66.
31 Yuan W., Sickel W. Dachun Yang Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel // City Springer-Verlag, State Berlin place City Heidelberg. 2010.
32 Джумакаева Г.Т. О непрерывности гладких в смешанной норме функций. Тезисы VII Межвузовской научной конференции по математике и механике (16-18 сентября 1981, Караганда). -С. 19-20.
33 Наурызбаев К.Ж., Темиргалиев Н., Джумакаева Г.Т. Критерий вложения классов Лебега – Морри в пространства Лоренца и смежные задачи // Вестн. Евраз. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева. -2012. -№ 6. -С. 6-28.
34 Шерстнева Л.А. О вложении некоторых классов измеримых функций из пространств Лоренца: кандидатская диссертация. -Москва. МГУ. 1986.
35 Шерстнева Л.А. Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вестн. МГУ. Серия матем. механ. -1984. -№4. -С. 75-79.
36 Симонов Б.В. О свойствах преобразованного ряда Фурье // Деп. в ВИНИТИ 22.06.81, № 3031-81. 45 с.
37 Titchmarch E.C. A note of Fourier transforms // J. London Math. Soc. -1927. -V. 2. -№ 7. -P. 148-150.
38 Hardy G.H., Littlewood J.E. A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. -1928. -V. 28. -№ 4. -P. 612-634.
39 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. -Алма-Ата: Гылым, 1976.
40 Peetre J. Especes d'interpolation et theoreme de Soboleff // Ann. Inst.Fourier. -1966. -V. 16. -№ 1. -P. 279-317.
41 Grisvard P. Commutative de deux foncteurs d'interpolation// J. Math. -1966. -V. 45. -№ 2. -P. 143-290.
42 Головкин К.К. Об одном обобщении интерполяционной теоремы Марцинкевича // Труды МИАН СССР. -1967. -102. -С. 5-28.
43 Андриенко В.А. О необходимых условиях вложения классов функций H_p^ω // Матем. сб. -1969. -Т. 78. -№ 2. -С. 280-300.
44 Ульянов П.Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье//Матем. сб. -1967. -Т. 72. -№ 2. -С. 193-225.
45 Андриенко В.А. Вложение некоторых классов функций//Изв. АН СССР. Сер. матем. -1967. -Т. 31. -№ 6. -С. 1311-1326.
46 Ульянов П.Л. О вложении некоторых классов функций // Матем. заметки. -1967. -Т. 1. -№ 4. -С. 405-414.
47 Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. -1970. -Т. 81(123). -№ 1. -С. 104-131.
48 Темиргалиев Н. О вложении некоторых классов функций // Матем. заметки. -1976. -Т. 20. -№ 6. -С. 835-841.
49 Коляда В.И. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Матем. сб. -1977. -Т. 102(144). -№ 2. -С. 195-215.
50 Коляда В.И. О соотношениях между наилучшими приближениями в разных метриках // Матем. заметки. -1986. -Т. 39. -№ 4. -С. 383-387.
51 Коляда В.И. О вложении в классы $\varphi(L)$ // Изв. АН СССР, серия матем. -1975. -Т.39. -С. 418-437.
52 Коляда В.И. О вложении в классы непрерывных функций многих переменных // Матем. сб. -1976. -Т. 99. -№ 3. -С. 421-432.
53 Коляда В.И. О вложении классов $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_\nu}$ // Матем. сб. -1985. -Т. 127(169). -№ 3. -С. 352-383.
54 Коляда В.И. Перестановки функций и теоремы вложения // Успехи матем. наук. -1989. -Т. 44 (269). -№ 5. -С. 61-95.
55 Kolyada V.I. Rearrangements of functions and embeddings of anisotropic spaces of Sobolev type // East J. on Appr. -1998. -V.4. -№2. -P. 111-199.
56 Kolyada V.I. On embedding theorems. In: NAFSA, v. 8, Prague. -2007. -P. 35-94.
57 Kolyada V.I. Fractional integrals andFourier transforms. arXiv:1709.07195 vl math.CA, 21 sep.2017
58 Темиргалиев Н. О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Матем. заметки. -1972. -Т. 12. -№ 2. -С. 139-148.
59 Темиргалиев Н. Об одной теореме вложения // Изв. ВУЗов. Математика. -1973. -№ 7. -С. 103-111.
60 Темиргалиев Н. О вложении некоторых классов функций в $C([0,2\pi]^m)$ // Изв. ВУЗов. Математика. -1978. -№ 8. -С. 88-90.
61 Темиргалиев Н. О многомерных теоремах вложения и о производных из классов $\varphi(L)$: автореферат дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.–матем. наук. Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР. Москва, 1973.
62 Темиргалиев Н. Некоторые теоремы вложения классов $H_{p,m}^\omega$ многих переменных // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. -1970. -№ 5. -С. 90-92.
63 Лизоркин П.И. Добавление. Пространства обобщенной гладкости // Трибель Х. Теория функциональных пространств: Пер. с англ. –М.: Мир. 1986.. С. 381-415.
64 Гольдман М.Л. Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Матем. ин-та АН СССР. -1984. -Т. 170. -С. 86-104.

65 Долженко Е.П., Ульянов П.Л. О некоторых вопросах теории функций // Вестн. МГУ. Сер. матем. механ. -1980. -№ 1. -С. 3-13.

66 Гольдштейн В.М., Водопьянов С.К. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях// ДАН. -1978. -Т. 238. -№ 5. -С. 1040-1042.

67 Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными// УМН. -1979. -Т. 34. -№1. -С. 17 – 65.

68 Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. -М.: Мир, 1969.

69 Никишин Е.М. Гармонический анализ // Матем. энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1977. Т. 1.

70 Темиргалиев Н. О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца // Сиб. матем. журн. -1983. -Т. 24. -№ 2. -С. 160-172.

71 Темиргалиев Н. О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. ВУЗов. Математика. -1980. -№ 6. -С. 83-85.

72 Матвиюк Л.В. Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности (наилучших приближений): кандидатская диссертация. Одесса, 1990.

73 Акишев Г.А. Об условиях вложения классов функций многих переменных в пространство Лоренца и их приложения: кандидатская диссертация. -Алматы, 1983.

74 Жайнибекова М.А. О соотношениях между модулями непрерывности и наилучшими приближениями в разных метриках и некоторые многомерные теоремы вложения: кандидатская диссертация. КазГУ. -Алматы, 1985.

75 Aganin A.I., Potapov M.K. On imbedding of function classes $H^\omega_{\psi_1,q_1}$ into classes $E^{(\lambda)}_{\psi_2,q_2}$ //Acta Math. Hungar. -1995. 68(3). -С. 197-220.

76 Сихов М.Б. О некоторых соотношениях между модулями гладкости и наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами в разных метриках: кандидатская диссертация. КазГУ. -Алматы, 1988.

77 Ильясов Н.А. Об условиях вложения классов $E_p(\epsilon)$ в $W^r H_q^k[\varphi]$ // Азерб. университет. Баку, 1985. Den. в АзНИИНТИ 04.12.85, № 426-Аз. 11с.

78 Андриенко В.А. Теоремы вложения для функций одного переменного // Итоги науки и техники. Математический анализ. -М.: ВИНИТИ, 1971. -С. 203-262.

79 Тиман М.Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L_p(1 < p < \infty)$ // Матем. сб. -1958. -Т. 46. -№ 1. -С. 125-132.

80 Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. -Днiпропетровськ: «Полiграфiст», 2000.

81 Тиман М.Ф. Некоторые вопросы конструктивной теории функций в пространствах L_p : Дипл. работа. Днепропетровск, 1950.

82 Тиман М.Ф. Особенности основных теорем конструктивной теории функций. АН Азерб. ССР, Баку. -1965. -С. 18-25.

83 Тиман М.Ф. Особенности приближения функций в различных метриках// Исслед. по современным проблемам конструктивной теории функций. -М.: Физматгиз, 1961. -С. 69-72.

84 Ульянов П.Л. Теоремы вложения и наилучшие приближения// ДАН СССР. -1969. -Т. 184. -№ 5. -С. 1045-1047.

85 Стечкин С.Б. О теореме Колмогорова – Селивестрова, // Изв. АН СССР. Сер. матем. -1953. -Т. 17. -С. 499-512.

86 Тиман М.Ф. Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси // Изв. ВУЗов, Математика. -1961. -№ 6. -С. 108-120.

87 Кудайбергенов С.С. О вложении классов функций, определяемых посредством наилучших приближений по системам Франклина, Хаара и Уолша: кандидатская диссертация. Московский институт электронного машиностроения. Москва, 1990.

88 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. -М.: Наука, 1974.

89 Голубов Б.М., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. -М.: Наука, 1987.

90 Айдосов Е.Ж. О вложении классов функций многих переменных с заданной мажорантой наилучших приближений: кандидатская диссертация. КазГУ. -Алматы, 1992.

91 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. -2009. -№ 3. -С. 17-25.

92 Коляда В. И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. Матем. ин-та АН СССР. -1988. -Т. 181. -С. 117-136.

93 Сихов М.Б. О некоторых задачах многомерной теории приближений разных метрик. Докторская диссертация. Представлена в Институт математики МОН РК (Алматы) в январе 2005г. по спец. 01.01.01 – математический анализ, защищена 16 декабря(!) 2010 года в Казанском федеральном университете по спец. 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, утверждена ВАК России 21.X.2011.

94 Сихов М.Б. О прямых и обратных теоремах теории приближений с заданной мажорантой // Analysis Mathematica. -2004. -V. 30. -№ 2. -P. 137-146.
95 Сихов М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона – Никольского и их приложения // Изв. ВУЗов. Математика. -2002. -№ 8. -С. 57-64.
96 Сихов М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона – Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле // Матем. заметки. -2006. -Т.80. -№ 1. -С.95-104.
97 Сихов М.Б. О вложении и аппроксимативных свойствах классов функций с доминирующей смешанной разностью // Изв. ВУЗов. Математика. -2009. -№ 8. -С. 83-86.
98 Сихов М.Б. О вложении $E_p(\lambda) \subset H_c^{w_k}$ // Изв. ВУЗов. Математика. -1990. -№ 7. -С. 61-65.
99 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. -1986. -Т.178. -С. 1-112.
100 Favard J. Sur I'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques//C. R. Acad. Sci. (CityplaceParis). -1936. 203. -C. 1122-1124.
101 Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций// ДАН СССР. -1937. -Т. 15. -№ -С. 107-112.
102 Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами// Труды МИАН. -1945. -Т. 15. -С. 1-76.
103 Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. -М.: Наука, 1987.
104 Пустовойтов Н.Н. Многомерная теорема Джексона в пространстве L_p // Матем. заметки. -1992. -Т. 52. -С. 105-113.
105 Пустовойтов Н.Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. -1999. -Т. 65. -№ 1. -С. 107- 117.
106 Дьяченко М.И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // Усп. матем. наук. -1992. -Т. 47. -№ 5. -С. 97-162
107 Perz F., Szulc T. On an embedding theorem. Конструктивная теория функций 77. -София, -1980. -С. 455-460.
108 Ross I., Morrey A-Nikol'skii inequality// Proc. Amer. Math. Soc. -1980. 78. -C. 97-102.
109 OMTSA (Operators in Morrey-Type Spaces and Applications). Book of Abstracts. Dedicated to 70th birthday of professor Victor I. Burencov, 20-27 May, 2011, Place Name place Ahi PlaceNameEvran PlaceTypeUniversity. Kireehir. country-regionplaceTurkey (Website: http:// fef.ahievran.edu.tr/matematik/omtsa11).
110 8th International Conference on Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis (FSDONA-2011), September 18-24, 2011, in Tabarz/Thur. (Germany).
111 Haroske D.D., Skrzypczak L. On Sobolev and Franke-Jawerth embeddings of smoothness Morrey spaces//Rev. Math. Comput., July 2014. -Vol. 27. -Issue 2. -PP. 541-573.
112 Yuan W, Sickel W, Yang D. Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel, Lecture Notes in Mathematics. -2005.
113 Sawano Y., Hakim DI., Gunawan H. Non-smooth atomic decomposition for generalized Orlicz-Morrey spaces, Mathematische nachrichten. -2015. -Vol. 288. -№ 14-15. -Стр. 1741-1775.
114 Yuan W., Haroske DD, Moura SD. Skrzypczak L.,Yang DC. Limiting embeddings in smoothness Money spaces, continuity envelopes and applications// Journal of approximation theory. -2015. -Vol. 192. -PP. 306-335.
115 Zhu YP., Yang QX., Li PT. Stability and Morrey spaces related to multipliers// Taiwanese Journal of Mathematics. -2015. -Vol. 19. -№ 3. -PP. 819-848.
116 Ho K.-P. Atomic decomposition of Hardy-Morrey Spaces with variable exponents, Annales academiae scientiarum fennicae-mathematica. -2015. -Vol. 40. -№1. -PP. 31-62.
117 Yuan W., Sickel W., Yang DC. Compact embeddings of radial and subradial subspaces of some Besov-type spaces related to Morrey spaces// Journal of approximation theory. -2013. -Vol. 174. -PP. 121-139.
118 Haroske D.D., Skrzypczak L. Embeddings of Besov-Morrey spaces on bounded domains// Studia mathematica. -2013. -Vol. 218. -№ 2. -PP. 119-144.
119 Rosenthal M. Local means, wavelet bases and wavelet isomorphisms in Besov-Morrey and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces// Mathematische nachrichten. -2013. -Vol. 286. -№ 1. -PP. 59-87.
120 Guliev V., Samko S. Boundedness of maximal, potential and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces// Operator Theory: Advances and Applications. -2014. -Vol. 242. -PP. 135-158.
121 Chen, Y., Ding, Y., Wang, X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey spaces// Potential Ana. -2009. -Vol. 30. -Is. 4. -PP. 301–313.
122 Lu Y., Yang D., Yuan W. Interpolation of Morrey Spaces on Metric Measure Spaces// Canad. Math. Bull. -2014. -Vol. 57. -Is. 5. -PP. 598–608
123 Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа// Мат. сб. –1938. –Т. 4. –№ 3. –С. 471–497.
124 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумакаева Г.Т. Критерии вложения классов типа Морри// Изв. вузов. Матем. –2015. –№ 5. –С 80–85.
125 Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространств $W^l_{p,a,\aleph}(\Re)$ // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. –1971. –Т. 23. –С. 33-40.
126 Z. Ditzian and V. Totik. Moduli of smoothness// State place New York: Springer, 1987.

127 Осколков К.И., Теляковский С.А. К оценкам П.Л. Ульянова для интегральных модулей непрерывности// Изв. АН Арм. ССР, Математика. -1971. -Т. 6. -№5. -С. 406-411.
128 Брудный Ю.А. Модули непрерывности и перестановки// Мат. заметки. -1975. -Т. 18. -№ 1. -С. 63-66.
129 Освальд П. О модулях непрерывности равноизмеримых функций в классах $\varphi(L)$ // Математические заметки. -1975. -Т. 17. -№ 2. -С. 231-244.
130 Сулейменов К. Темиргалиев Н. О вложении классов $H^{\omega}_{\alpha,p}$ в пространства Лоренца // Analysis Mathematica. -2006. -V. 32. -№ 4. -P. 283-317.
131 Стороженко Э.А. Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. -1973. -Т. 37. -С. 386-398.
132 Adriano Garsia. Combinatorial inequalities and smoothness of functions // Notices Amer. Math. Soc. –1974. –№ 151. A-115.
133 Nguyen Xuan StateplaceKy. Some embedding theorems concerning the moduli of Ditzian and Totik // Analysis Mathematica. –1993. –V. 19. –P. 255-265.
134 Ибатулин И.,Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике //Дифф. уравн. –2008. –Т. 44. -№4. –С. 491-506.
135 Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнений теплопроводности//Матем. заметки. –2007. –Т. 82. -№2. -С. 177-182.
136 Абикенова Ш., Темиргалиев Н. О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения //Дифф. уравн. -2010. –Т. 46, №8. –С. 1201-1204.
137 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Утесов А. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем.заметки. –2012. –Т. 91, № 3. –С. 459-463.
138 Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. –2018. –Т. 122, №1. –С. 8-69.
139 Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды Матем. ин-та АН СССР. –1961. –Т. 60. –С. 42-81.
140 Taibleson M.H. On the theory of Lipschitz spaces of distribution in Euclidean p-space. //I. Principal properties. J. Math. Mech. –1964, –№ 13. –P. 407-479; II. Translation invariant operators, duality, and interpolation. // Ibid. –1965. –№. 14. –P. 821-839.
141 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. "Мир", –1980.

Н. Темірғалиев

Л.Н. Гумилева атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Астана, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр және функциялар теориясының ішкі мәселелері мәнмәтініндегі жуықтау және енгізу теориясы

Аннотация: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, біздің ойымызша, Жуықтау теориясы, Есептеуіш математика және Сандық анализдің басты есептерін айқын «Барлық уақытқа!» деңгейінде тікелей компьютерлік есептеу қызметімен қоса береді. Сонымен есеп қойылып жатқан кездегі оның дұрыстығына қойылатын алғашқы шарттарға енгізу теориясының жақсармайтын теоремалары сәйкес келеді. Сонымен қатар, П.Л. Ульяновтің сөзімен айтқанда, олардың өзінде – бұл жерде ол – Енгізу теориясы және жуықтау теориясы, – «ішкі мәселелері» бар. Осы мақала соның дәл өзіне арналған.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, Енгізу теориясы, Жуықтау теориясы, функциялар классы мен кеңістіктері, тегістік модулі, ең жақсы жуықтау.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions

Abstract: The Computational (numerical) diameter, as we see it, is quite distinctly at the level "For all times!" formulates the main tasks of the Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis with the accompanying computer service maintenance. Moreover, already at the task formulation stage, the corresponding unimprovable theorems of the theory of embeddings are among the first requirements for the correctness of the statement. At the same time, as P.L. Ulyanov claimed, that "internal problems" were in the Embedding Theorems and Approximation Theory. This article is devoted to this.

Keywords: The Computational (numerical) diameter, embedding theory, Approximation Theory, classes and spaces of functions, module of smoothness, best approximations.

References

1 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Number-theoretic methods and probability-theoretic approach to the problems of analysis. Theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (3), 90–144(1997).[in Russian].

2 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).

3 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).

4 Potapov M.K., Simonov B.V., Tihonov S.Ju. Drobnye moduli gladkosti: uchebn. posobie [Fractional modules of smoothness: studies. allowance] (MAKS Press, Moscow, 2016, 340 p.).[in Russian].

5 Azhgaliev Sh.U., Temirgaliev N. Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω , Mat. Sb., 198(11), 3–20(2007).

6 Ul'yanov P.L. The imbedding of certain function classes H_p^ω , Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 32(3), 649–686 (1968).

7 Potapov M.K., Simonov B.V. O vzaimosvjazi obobshhennyh klassov funkcij Besova-Nikol'skogo i Vejl-jaNikol'skogo[On the relationship of generalized classes of Besov-Nikolsky and Weyl-Nikolsky functions], Analysis Mathematica, 22, 299-316(1996).[in Russian].

8 Nikol'skij S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija [Approximation of functions of several variables and embedding theorems] (Nauka, Moscow, 1969).[in Russian].

9 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza [Basics of numerical analysis] (Nauka, Moscow, 1986). [in Russian].

10 Kudrjavcev L.D., Nikol'skij S.M. Prostranstva differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh i teorem vlozhenija [Spaces of differentiable functions of several variables and embedding theorems], Moscow, VINITI, Itogi nauki i tehniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija, 26, 1–157(1988). [in Russian].

11 Tribel' H. Teorija funkcional'nyh prostranstv [Theory of functional spaces] (Mir, Moscow, 1986). [in Russian].

12 Utesov A.B. Zadacha vosstanovlenija funkcij, integralov i reshenij uravnenija teploprovodnosti na obobshhennyh klassah. Kandidatskaja dissertacija[he task of recovering functions, integrals, and solutions of the heat equation on generalized classes. PhD thesis], Almaty, 2001. [in Russian].

13 Koljada V.I. O vlozhenii nekotoryh klassov funkcij mnogih peremennyh [On the embedding of some classes of functions of several variables], Sib. mat. zhurnal, (4), 766-790 (1973).[in Russian].

14 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number theoretic methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963). Pererabotannoe i dopolnennoe izdanie vtoroe: Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Revised and the enlarged edition of the second: Theoretical-numerical methods in approximate analysis] (MCNMO, Moscow, 2004). [in Russian].

15 Temirgaliev N. Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas, Dockland mathematics, **68**(3), 414-415 (2003).

16 Ul'yanov P.L. On classes of infinitely differentiable functions, Mat. Sb., 181(5), 589–609(1990).

17 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).

18 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija [Integral representations of functions and embedding theorems] (Fizmatlit, Moscow, 1996). [in Russian].

19 Novak E., Sloan Ian H., Wozniakowski H. Tractability of Approximation for Weighted Korobov Spaces on Classical and Quantum Computers, Found. Comput. Math., P. 121-156(2004).

20 Ul'janov P.L. Predstavlenie funkcij rjadami i klassy $\varphi(L)$, Uspehi matem. nauk., XXVII(2), 3-52(1972).

21 Blozinski A.P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. -V. 263. № 1. -P. 149–167.

22 Zigmund A. Trigonometricheskie rjady [Trigonometric series] (Mir, Moscow, 1965). [in Russian].

23 Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. Quadrature formulae for classes of functions of low smoothness, Mat. Sb., 194(10), 133–160(2003).

24 Bochkarev S.V. Ocenki kojefficientov Fur'e funkcij iz prostranstv Lorenca[Estimates for the Fourier coefficients of functions from Lorentz spaces], Dokl. RAN, 360(6), 730-733(1998).

25 Morrey C.B. Multiple integral problems in the calcuns of variations and related topics, Univ. State place California Dubl., (1), 1943.

26 Dzhumakaeva G.T., Nauryzbaev K.Zh. O prostranstvah Lebega-Morri [On Lebesgue-Morrie spaces], Izv. AN KAZ SSR. Ser. fiz.-mat., (5), 7-12(1982). [in Russian].

27 Burenkov V.I., Guliyev V.S., Serbetci A., Tararykova T.V. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces, Dockland Mathematics, 422(1), 11-14(2008).

28 Dzhumakaeva G.T. A criterion for the imbedding of the Sobolev-Morrey class $W_{p,\Phi}^r$ in the space C , Mat. Zametki, 37(3), 399–406(1985).

29 Temirgaliev N. , M. A. Zhainibekova, G. T. Dzhumakaeva "A criterion for embedding of anisotropic Sobolev-Morrey spaces into the space of uniformly continuous functions", Siberian Mathematical Journal, **57**(5), 905–917(2016).

30 Dzhumakaeva G.T. Ob odnoj kombinacii teorem vlozhenija S.M. Nikol'skogo i Ch. Morri. Metody issledovanija operatornyh uravnenij[On a combination of the embedding theorems of S.M. Nikol'skii and C. Morrey. Methods for the investigation of operator equations], Yaroslavl, 1982. P. 53-66.

31 Wen Yuan, Winfried Sickel, Dachun Yang Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel, City Springer-Verlag, State Berlin place City Heidelberg. 2010.

32 Dzhumakaeva G.T. O nepreryvnosti gladkih v smeshannoj norme funkcij [On continuity of smooth functions in a mixed norm], Tezisy VII Mezhvuzovskoj nauchnoj konferencii po matematike i mehanike [Theses VII Intercollegiate Scientific conferences on mathematics and mechanics], 1981, Karaganda, 16-18 September, p. 19-20. [in Russian].

33 Nauryzbaev K.Zh., Temirgaliev N., Dzhumakaeva G.T. Kriterij vlozhenija klassov Lebega – Morri v prostranstva Lorenca i smezhnye zadachi [An embedding criterion for Lebesgue-Morrey classes in Lorentz spaces and related problems], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (6), 6-28(2012). [in Russian].

34 Sherstneva L.A. O vlozhenii nekotoryh klassov izmerimyh funkcij iz prostranstv Lorenca [On the embedding of certain classes of measurable functions from Lorentz spaces], Kandidatskaja dissertacija [PhD thesis], Moskow, MSU, 1986. [in Russian].

35 Sherstneva L.A. Neravenstva Nikol'skogo dlja trigonometricheskih polinomov v prostranstvah Lorenca[Nikolsky's inequality for trigonometric polynomials in Lorentz spaces], Bulletin of Moscow State University. Mathematics-Mechanics series, (4), 75-79(1984). [in Russian].

36 Simonov B.V. O svojstvah preobrazovannogo rjada Fur'e[On the properties of the transformed Fourier series], Dep. v VINITI [Dep. in VINITI] 22.06.81, No 3031-81. 45 p.

37 Titchmarch E.C. A note of Fourier transforms, J. London Math. Soc., 2(7), 148-150(1927). [in Russian].

38 Hardy G.H., Littlewood J.E. A convergence criterion for Fourier series, Math. Z., 28(4), 612-634(1928).

39 Amanov T.I. Prostranstva differenciruemyh funkcij s dominirujushhej smeshannoj proizvodnoj[Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative](Gylym, Alma-Ata, 1976). [in Russian].

40 Peetre J. Especes d'interpolation et theoreme de Soboleff, Ann. Inst.Fourier., 16(1), 279-317(1966).

41 Grisvard P. Commutative de deux foncteurs d'interpolation, J. Math., 45(2), 143-290(1966).

42 Golovkin K.K. A generalization of Marcinkiewicz's interpolation theorem, Trudy Mat. Inst. Steklov., 102, 5–28(1967).

43 Andrienko V.A. Necessary conditions for imbedding the function classes H_p^ω , Mat. Sb., 78(120), No 2, 280–300(1969).

44 Ul'yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series, Mat. Sb., 72(114), No 2, 193–225(1967).

45 Andrienko V.A. The imbedding of certain classes of functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 31(6), 1311–1326(1967).

46 Ul'yanov P.L. Imbedding of certain classes of functions, Mat. Zametki, 1(4), 405–414(1967).

47 Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics, Mat. Sb. (N.S.), 81(123), N 1, 104–131(1970).

48 Temirgaliev N. The inclusion of certain classes of functions, Mat. zametki, **20**(6), 1026-1030(1976).

49 Kolyada V.I. Imbedding theorems and inequalities in various metrics for best approximations, Mat. Sb., 102(144), No 2, 195–215(1977).

50 Kolyada V.I. Relationships between the best approximations in different metrics, Mat. Zametki, 39(3), 383–387(1986).

51 Kolyada V.I. On imbedding in classes $\varphi(L)$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 39(2), 418–437(1975).

52 Kolyada V.I. On embedding in classes of continuous functions of several variables, Mat. Sb., 99(141), No 3, 421–432(1976).

53 Kolyada V.I. O vlozhenii klassov $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_\nu}$ [About embedding classes $H_p^{\omega_1,\ldots,\omega_\nu}$], Mat. Sb., 127(169), No 3, 352-383(1985). [in Russian].

54 Kolyada V.I. Rearrangements of functions and embedding theorems, Uspekhi Mat. Nauk, 44(5(269)), 61–95(1989).

55 Kolyada V.I. Rearrangements of functions and embeddings of anisotropic spaces of Sobolev type, East J. on Appr., 4(2), 111-199(1998).

56 Kolyada V.I. On embedding theorems. In: NAFSA, Prague, 2007, V. 8, P. 35-94.

57 Kolyada V.I. Fractional integrals andFourier transforms. arXiv:1709.07195 vl math.CA, 21 sep.2017

58 Temirgaliev N. A connection between inclusion theorems and the uniform convergence of multiple Fourier series, Mat. zametki, **12**(2), 518-523 (1972).

59 Temirgaliev N. Ob odnoj teoreme vlozhenija[On a theorem of embedding], Izv. vyssh. ucheb. zaved. Matematika [IzvestiyaVuz. Matematika], (7), 103-111(1973).

60 Temirgaliev N. On embedding classes of function into $C([0,2\pi]^m)$, IzvestiyaVuz. Matematika, **22**(8), 69-71(1978).

61 Temirgaliev N. O mnogomernyh teoremah vlozhenija i o proizvodnyh iz klassov $\varphi(L)$ [On multidimensional embedding theorems and on derivatives from classes of $\varphi(L)$], avtoreferat diss. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk [abstracts diss. for the degree of candidate of physical and mathematical sciences], Steklov Mathematical Institute of AS USSR, Moscow, 1973.

62 Temirgaliev N. Nekotorye teoremy vlozhenija klassov $H^{\omega}_{p,m}$ mnogih peremennyh, Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-matem [Izv. Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Ser. Phys.-Math.], (5), 90-92(1970). [in Russian].

63 Lizorkin P.I. Prostranstva obobshhennoj gladkosti[Spaces of generalized smoothness], Dopolnenie k knige [8][Supplement to the book [8]], P. 381-415. [in Russian].

64 Gol'dman M.L. Imbedding theorems for anisotropic Nikol'skii–Besov spaces with moduli of continuity of a general type, Trudy Mat. Inst. Steklov., **170**, 86–104(1984).

65 Dolzhenko E.P., Ul'janov P.L. O nekotoryh voprosah teorii funkcij[On some issues of the theory of functions], Vestn. MGU. Ser. matem., mehan.[Vestn. Moscow State University. Ser. Mat., mehan.], (1), 3-13(1980).

66 Gol'dshtejn V.M., Vodop'janov S.K. Metricheskoe popolnenie oblasti pri pomoshhi konformnoj emkosti, invariantnoe pri kvazikonformnyh otobrazhenijah[Metric completion of a domain by means of a conformal capacity, invariant under quasiconformal mappings], DAN, 238(5), 1040-1042(1978). [in Russian].

67 Vodop'yanov S.K., Gol'dstein V.M., Reshetnyak Yu.G. On geometric properties of functions with generalized first derivatives, Uspekhi Mat. Nauk, 34, Is. 1(205), 17–65(1979).

68 Al'fors L. Lekcii po kvazikonformnym otobrazhenijam [Lectures on quasiconformal mappings] (Mir, Moscow, 1969).

69 Nikishin E.M. Garmonicheskij analiz [Harmonic analysis] // Matem. jenciklopedija [Matem. encyclopedia] (Sovetskaja jenciklopedija, Moscow, 1977. T. 1). [in Russian].

70 Temirgaliev N. Embeddings of the classes H^{ω}_{p} in Lorentz spaces, Sibirskii matematicheskii zhurnal, 24(2), 287-298(1983).

71 Temirgaliev N. On embedding into some Lorentz spaces, IzvestiyaVuz. Matematika, **24**(6), 101-103(1980).

72 Matvijuk L.V. Teoremy vlozhenija klassov funkcij s zadannymi mazhorantami modulej nepreryvnosti (nailuchshih priblizhenij)[Embedding theorems for classes of functions with given majorant moduli of continuity (best approximations)]: kandidatskaja dissertacija [cand. diss.]. Odessa, 1990. [in Russian].

73 Akishev G.A. Ob uslovijah vlozhenija klassov funkcij mnogih peremennyh v prostranstvo Lorenca i ih prilozhenija[On conditions for the embedding of classes of functions of several variables in the Lorentz space and their applications]: kandidatskaja dissertacija [cand. diss.]. Almaty, 1983. [in Russian].

74 Zhajnibekova M.A. O sootnoshenijah mezhdu moduljami nepreryvnosti i nailuchshimi priblizhenijami v raznyh metrikah i nekotorye mnogomernye teoremy vlozhenija[On the relations between moduli of continuity and best approximations in different metrics and some multidimensional embedding theorems]: kandidatskaja dissertacija [cand. diss.]. KazSU. Almaty, 1985.[in Russian].

75 Aganin A.I. and Potapov M.K. On imbedding of function classes $H^{\omega}_{\psi_1,q_1}$ into classes $E^{(\lambda)}_{\psi_2,q_2}$, Acta Math. Hungar. 68(3), 197-220(1995).

76 Sihov M.B. O nekotoryh sootnoshenijah mezhdu moduljami gladkosti i nailuchshimi priblizhenijami trigonometricheskimi polinomami v raznyh metrikah[On some relations between the moduli of smoothness and best approximations by trigonometric polynomials in different metrics]: kandidatskaja dissertacija[cand. diss.]. KazSU. Almaty, 1988.[in Russian].

77 Il'jasov N.A. Ob uslovijah vlozhenija klassov $E_p(\epsilon)$ v $W^r H^k_q[\varphi]$ [On conditions for the embedding of the classes $E_p(\epsilon)$ in $W^r H^k_q[\varphi]$], Azerb. universitet. Baku, 1985. Den. v AzNIINTI 04.12.85, № 426-Az. 11p. [in Russian].

78 Andrienko V.A. Imbedding theorems for functions of one variable, Itogi Nauki. Ser. Matematika. Mat. Anal. 1971, Pages 203–262.

79 Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in $L_p(1 < p < \infty)$ spaces, Mat. Sb., 46(88), N 1, 125–132(1958).

80 Timan M.F. Approksimacija i svojstva periodicheskih funkcij[Approximation and properties of periodic functions]. («Poligrafist», Dnipropetrovs'k, 2000). [in Russian].

81 Timan M.F. Nekotorye voprosy konstruktivnoj teorii funkcij v prostranstvah L_p [Some questions of the constructive theory of functions in L_p spaces]: Dipl. rabota[Dipl. project]. Dnepropetrovsk, 1950.

82 Timan M.F. Osobennosti osnovnyh teorem konstruktivnoj teorii funkcij[Features of the main theorems of the constructive theory of functions], AN Azerb. SSR, Baku. 1965. P. 18-25. [in Russian].

83 Timan M.F. Osobennosti priblizhenija funkcij v razlichnyh metrikah[Features of approximation of functions in various metrics], Issled. po sovremennym problemam konstruktivnoj teorii funkcij[Issled. on modern problems of the constructive theory of functions](Fizmatgiz, Moscow, 1961, P. 69-72). [in Russian].

84 Ul'janov P.L. Teoremy vlozhenija i nailuchshie priblizhenija[Embedding theorems and best approximations], DAN SSSR, **184**(5), 1045-1047(1969). [in Russian].

85 Stechkin S.B. On the theorem of Kolmogorov–Seliverstov, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 17(6), 499–512(1953).

86 Timan M.F. Best approximation and modulus of smoothness of functions prescribed on the entire real axis, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., (6), 108–120(1961).

87 Kudajbergenov S.S. O vlozhenii klassov funkcij, opredeljaemyh posredstvom nailuchshih priblizhenij po sistemam Franklina, Haara i Uolsha[On the nesting of classes of functions defined by the best approximations using the systems of Franklin, Haar, and Walsh]: kandidatskaja dissertacija[cand. diss]. Moskovskij institut jelektronnogo mashinostroenija[Moscow Institute of Electronic Engineering]. Moskow, 1990.

88 Kashin B.S., Saakjan A.A. Ortogonal'nye rjady [Orthogonal rows.] (Izd-vo AFC, Moscow, 1999). [in Russian].

89 Golubov B.I., Efimov A.V., Skvorcov V.A. Rjady i preobrazovanija Uolsha: Teorija i primenenija [alsh Series and Transformations: Theory and Applications] (Nauka, Moscow, 1987, 346p.).[in Russian].

90 Ajdosov E.Zh. O vlozhenii klassov funkcij mnogih peremennyh s zadannoj mazhorantoj nailuchshih priblizhenij[On the embedding of classes of functions of several variables with a given majorant of best approximations]: Kandidatskaja dissertacija[cand. diss.]. KazGU. Almaty, 1992. [in Russian].

91 Potapov M.K., Simonov B.V., Tihonov S.Ju. O sootnoshenijah mezhdu moduljami gladkosti v raznyh metrikah[On the relations between the moduli of smoothness in different metrics], Vestn. MGU. Ser. 1, Matematika. Mehanika[Vestn. Moscow State University. Ser. 1, Mathematics. Mechanics], (3), 17-25(2009). [in Russian].

92 Kolyada V.I. On the relations between moduli of continuity in various metrics, Trudy Mat. Inst. Steklov., 181, 117–136(1988). This article is cited in 14 scientific papers (total in 14 papers)

93 Sihov M.B. O nekotoryh zadachah mnogomernoj teorii priblizhenij raznyh metrik[On some problems of the multidimensional theory of approximations of different metrics]: doktorskaja dissertacija. Predstavlena v Institut matematiki MON RK (Almaty) v janvare 2005g. po spec. 01.01.01 – matematicheskij analiz, zashhishhena 16 dekabrja(!) 2010 goda v Kazanskom federal'nom universitete po spec. 01.01.01 – veshhestvennyj, kompleksnyj i funkcional'nyj analiz, utverzhdena VAK Rossii 21.X.2011[Doctoral dissertation. Presented to the Institute of Mathematics of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Almaty) in January 2005. on spec. 01.01.01 - mathematical analysis, defended on December 16 (!) Of 2010 at Kazan Federal University on spec. 01.01.01 - material, complex and functional analysis, approved by the Higher Attestation Commission of Russia 21.X.2011]. [in Russian].

94 Sihov M.B. O prjamyh i obratnyh teoremah teorii priblizhenij s zadannoj mazhorantoj[On direct and inverse theorems of approximation theory with a given majorant], Analysis Mathematica, 30(2), 137-146(-2004).

95 Sikhov M. B. Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol'skii types and their applications, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **46**(8), 54-61 (2002).

96 Sikhov M. B. Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol'skii type and estimates of the norms of derivatives of Dirichlet kernels, Mathematical Notes, **80**(1), 91-100(2006).

97 Sikhov M. B. The embedding and approximation for classes of functions with a dominant mixed difference, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **53**(8), 69-71(2009).

98 Sikhov M. B. On the embedding $E_p(\lambda) \subset H_C^{\omega_k}$, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **34**(7), 70-75(1990).

99 Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative, Trudy Mat. Inst. Steklov., 178, 3–113 (1986).

100 Favard J. Sur I'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques//C. R. Acad. Sci. (CityplaceParis). -1936. 203. -C. 1122-1124.

101 Ahiezer N.I., Krejn M.G. O nailuchshem priblizhenii trigonometricheskimi summami differenciruemyh periodicheskih funkcij[On the best approximation by trigonometric sums of differentiable periodic functions], DAN SSSR, 15, 107-112(1937).

102 Nikol'skii S.M. Approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials, Travaux Inst. Math. Stekloff, 15, 3–76(1945).

103 Kornejchuk N.P. Tochnye konstanty v teorii priblizhenija [Exact constants in approximation theory] (Nauka, Moscow, 1987). [in Russian].

104 Pustovoitov N.N. The multidimensional Jackson theorem in L_p , Mat. Zametki, 52(1), 105–113(1992).

105 Pustovoitov N.N. Approximation of multidimensional functions with a given majorant of mixed moduli of continuity, Mat. Zametki, 65(1), 107–117(1999) [in Russian].

106 Dyachenko M.I. Some problems in the theory of multiple trigonometric series, Uspekhi Mat. Nauk, 47, Is. 5(287), 97–162(1992).

107 Perz F., Szulc T. On an embedding theorem, Konstruktivnaja teorija funkcij [Constructive theory of functions] 77. Sofija, 1980. P. 455-460.

108 Ross I., Morrey A-Nikol'skii inequality, Proc. Amer. Math. Soc. 78, 97-102(1980).

109 OMTSA (Operators in Morrey-Type Spaces and Applications). Book of Abstracts. Dedicated to 70th birthday of professor Victor I. Burencov, 20-27 May, 2011, Place Name place Ahi PlaceNameEvran PlaceTypeUniversity. Kireehir. country-regionplaceTurkey (Website: http:// fef.ahievran.edu.tr/matematik/omtsa11).

110 8th International Conference on Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis (FSDONA-2011), September 18-24, 2011, in Tabarz/Thur. (Germany).

111 Haroske D.D., Skrzypczak L. On Sobolev and Franke-Jawerth embeddings of smoothness Morrey spaces//Rev. Math. Comput., July 2014. Vol. 27. Issue 2. PP. 541-573.

112 Yuan W, Sickel W, Yang D. Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel, Lecture Notes in Mathematics. -2005.

113 Sawano Y., Hakim DI., Gunawan H. Non-smooth atomic decomposition for generalized Orlicz-Morrey spaces, Mathematische nachrichten, 288(14-15), 1741-1775(2015).
114 Yuan W., Haroske DD, Moura SD. Skrzypczak L.,Yang DC. Limiting embeddings in smoothness Money spaces, continuity envelopes and applications, Journal of approximation theory. 192, 306-335(2015).
115 Zhu YP., Yang QX., Li PT. Stability and Morrey spaces related to multipliers, Taiwanese Journal of Mathematics, 19(3), 819-848(2015).
116 Ho K.-P. Atomic decomposition of Hardy-Morrey Spaces with variable exponents, Annales academiae scientiarum fennicae-mathematica. 40(1), 31-62(2015).
117 Yuan W., Sickel W., Yang DC. Compact embeddings of radial and subradial subspaces of some Besov-type spaces related to Morrey spaces, Journal of approximation theory, 174, 121-139(2013).
118 Haroske D.D., Skrzypczak L. Embeddings of Besov-Morrey spaces on bounded domains, Studia mathematica, 218(2), 119-144(2013).
119 Rosenthal M. Local means, wavelet bases and wavelet isomorphisms in Besov-Morrey and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces, Mathematische nachrichten, 286(1), 59-87(2013).
120 Guliev V., Samko S. Boundedness of maximal, potential and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces, Operator Theory: Advances and Applications, 242, 135-158(2014).
121 Chen, Y., Ding, Y., Wang, X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey spaces, Potential Ana, 30(4), 301–313(2009).
122 Lu Y., Yang D., Yuan W. Interpolation of Morrey Spaces on Metric Measure Spaces, Canad. Math. Bull., 57(5), 598–608(2009).
123 Soboleff S. Sur un the?ore?me d'analyse fonctionnelle, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 4(46), N 3, 471–497(1938).
124 Temirgaliev N. , M. A. Zhainibekova, G. T. Dzhumakaeva Criteria for embedding of classes of Morrey type, Russian Mathematics, **59**(5), 69-73(2015).
125 Il'in V.P. O nekotoryh svojstvah funkcij iz prostranstv $W^l_{p,a,\aleph}(\Re)$ [On some properties of functions from the spaces $W^l_{p,a,\aleph}(\Re)$], Zap. nauch. sem. LOMI AN SSSR[Notes scientific sem. LOMI USSR Academy of Sciences], 23, 33-40(1971). [in Russian].
126 Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness, State place New York: Springer, 1987.
127 Oskolkov K.I., Teljakovskij S.A. K ocenkam P.L. Ul'janova dlja integral'nyh modulej nepreryvnosti[To the estimates of P.L. Ulyanova for integral moduli of continuity], Izv. AN Arm. SSR, Matematika[Izv. AN Arm. SSR, Mathematics], 6(5), 406-411(1971). [in Russian].
128 Brudnyj Ju.A. Moduli nepreryvnosti i perestanovki[Modules of continuity and permutations], Mat. zametki, 18(1), 63-66(1975). [in Russian].
129 Oswald P. On the moduli of continuity of equimeasurable functions in the classes $\varphi(L)$, Mat. Zametki, 17(2), 231–244(1975).
130 Sulejmenov K. Temirgaliev N. O vlozhenii klassov $H^{\omega}_{\alpha,p}$ v prostranstva Lorenca[On the embedding of the classes $H^{\omega}_{\alpha,p}$ in Lorentz spaces], Analysis Mathematica, 32(4), 283-317(2006). [in Russian].
131 Storozhenko E.A. Necessary and sufficient conditions for the imbedding of some classes of functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 37(2), 386–398(1973).
132 Adriano Garsia. Combinatorial inequalities and smoothness of functions, Notices Amer. Math. Soc., № 151. A-115(1974).
133 Nguyen Xuan StateplaceKy. Some embedding theorems concerning the moduli of Ditzian and Totik, Analysis Mathematica, 19, 255-265(1993).
134 Ibatulin I.,Temirgaliev N. Ob informativnoj moshhnosti vseh vozmozhnyh linejnyh funkcionalov pri diskretizacii reshenij uravnenija Klejna-Gordona v metrike[On the informative power of all possible linear functionals at discretization of solutions of the Klein – Gordon equation in the metric], Diff. uravn.[Differ. Eq.], 44(4), 491-506(2008).
135 Azhgaliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Mathematical Notes, **82**(2), 153-158(2007).
136 Abikenova Sh., Temirgaliev N. O tochnom porjadke informativnoj moshhnosti vseh vozmozhnyh linejnyh funkcionalov pri diskretizacii reshenij volnovogo uravnenija[On the exact order of the informative power of all possible linear functionals when discretizing solutions of the wave equation], Diff. uravn.[Differ. Eq.], 46(8), 1201-1204(2010). [in Russian].
137 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Utesov A. O diskretizacii reshenij volnovogo uravnenija s nachal'nymi uslovijami iz obobshhennyh klassov Soboleva[On the discretization of solutions of the wave equation with initial conditions from the generalized Sobolev classes], Matem.zametki, 91(3), 459-463(2012). [in Russian].
138 Temirgaliyev N. Introdaction of the Editor-in-chief of the journal "The Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series" about the issue purposes and the ways of its implementation, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 122(1), 8-67 (2018).[in Russian].
139 Besov O.V. Issledovanie odnogo semejstva funkcional'nyh prostranstv v svjazi s teoremami vlozhenija i prodolzhenija [The study of a single family of functional spaces in the theorems with the embeddins and

continuity]. Trudy Matem. in-ta AN SSSR [Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences], 60, 42-81 (1961).

140 Taibleson On the theory of Lipschitz spaces of distribution in Euclidean p-space. I. Principal properties. J. Math. Mech., 13, 407-479 (1964); II. Translation invariant operators, duality, and interpolation. Ibid., 14, 821-839 (1965).

141 Berg J., Lefstrem J. Interpoljacionnye prostranstva. Vvedenie [Interpolation spaces. Introduction] ("Mir", 1980).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 07.12.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –M: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 4(125)- Астана: ЕҰУ. 128-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды