*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 93-102 беттер*
*http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz*

**МРНТИ**: **27.25.19**

Н.Ж. Наурызбаев [1], Г.Е. Таугынбаева [2], М. Бейсенбек [3]

[1,2] *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан,*
[3] *QSI Международная школа Астана, Нур-Султан, Казахстан*
*(E-mail: [1] nngmath@mail.ru, [2] galija_1981tau@mail.ru, [3] mbeisenbek2002@gmail.com)*

## Аспекты применения алгебраической теории чисел в финансовой математике

**Аннотация:** Рассматривается задача применения специальных математических методов в финансовом инжиниринге, то есть в комбинировании финансовых инструментов с различными параметрами риска и доходности. В особенности, когда речь идет об управлении крупными финансовыми ресурсами, где часто встречаются высокие уровни рисков, предупреждение и нейтрализация которых нередко сопровождается разработкой уникальных приемов и методов.

**Ключевые слова:** финансовый инжиниринг, равномерно распределенные сетки, метод квази-Монте Карло, дискрепанс

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-93-102

Основным моментом в финансовом инжиниринге является то, что при определенных обстоятельствах цена производной ценной бумаги – деривативa, то есть договора (контракт), по которому стороны получают право или обязуются выполнить некоторые действия в отношении базового актива, может быть представлена в виде ожидания – в более общем плане в виде интеграла (см. [1, стр. 282 ])

$$E(f) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Вычисления стоимости производной ценной бумаги, таким образом, сводится к вычислению интеграла. Во многих случаях размерность вычисляемого интеграла $s$ является очень большой или даже бесконечной, она обычно будет по крайней мере столь же большой как число временных шагов в моделировании. Это именно тот случай, в котором является метод квази-Монте Карло эффективным. Поскольку, обычно, в (1) не известна предварительная информация о гладкости подынтегральной функции, то здесь главным рабочим инструментом является метод квази-Монте Карло

$$E(f) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx \approx \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k), \tag{2}$$

где $\xi_1, ..., \xi_p$ конечная последовательность из $[0,\,1]^s$ , выбранная случайным образом.

Список литературы по финансовой математике в [1] (см. также [2-9] и библ. к ним) показывает современное состояние темы исследований, как активного развития эффективного соединения математических методов квази-Монте Карло и теории финансов.

Таким образом, задача вычисления стоимости производной ценной бумаги сводится к задаче вычисления кратного интеграла (1), что в свою очередь использует метод квази-Монте Карло (2). В методе квази-Монте Карло основным техническим инструментарием в финансовой математике выступает *теория малых дискрепансов* (см. [1, стр. 283]): «*Идея метода малых дискрепансов состоит в построении узлов* $\xi_1, ..., \xi_p$ *таким образом, чтобы ошибка в* (2) *была минимальной для большого класса функций*», где дискрепансом конечного множества точек из $[0,\,1]^s$ называют число

$$D_s(\xi_1,...,\xi_p) = \sup\left\{\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\chi_I(\xi_k) - \prod_{j=1}^{s}(d_j-b_j)\right| : I=[b_1,d_1]\times\cdots\times[b_s,d_s]\subset[0,1]^s\right\},$$

где $\chi_I(t)$ - характеристическая функция множества $I$, равная 1 или 0 смотря по тому $t\in I$ или $t\notin I$.

Об обширном применения дискрепанса пишут многие специалисты (см. напр., в [10]) "*Последний представляет собой теоретико-числовое понятие и соответствует ошибкам в наихудшей ситуации в так называемых квази-Монте Карло методах аппроксимации интегралов по d-мерному единичному кубу (см.,напр., [2], [3], [5], [6], [17], [21], [38], [42]). Эта связь собирает вместе исследователей сложности, вычислительной теории чисел, КМК, компьютерной теории и служит причиной многих новых достижений и результатов*".

Задача построения сеток $\xi_1,...,\xi_p$ с малым дискрепансом (т.е. равномерно распределенных сеток) является актуальной и относится к разряду сложнейших, чему посвящена обширная литература (см. [11-20], где результаты [15-20] основаны на алгебраический теории чисел).

На примере построения равномерно распределенных сеток (что, по сути, и составляет метод квази-Монте Карло) прокомментируем современное состояние технических средств в Международной финансовой математике.

В финансах сетка $\xi_1,...,\xi_p$ понимается как конечное множество точек, в которых сосредоточена финансовая и вспомогательная информация.

В целях исключения элемента случайности в построении равномерно распределенных сеток, присущей методу Монте Карло, было проведено большое количество исследований и построены различные теоретико-числовые и иные сетки.

Самыми популярными равномерно распределенными последовательностями являются последовательности ван дер Корпута (van der Corput, 1935), Холтона (Halton, 1960), Коробова Н.М. (1963), Соболя (Sobol', 1967, 1976), Фора (Faure 1982), Нидеррейтера (Niederreiter, 1988), Хэммерсли (Hammersley 1964), Бойля (Boyle) (см., напр., [11-20]).

Ряд равномерно распределенных последовательностей является $s$-мерным обобщением последовательности Ван дер Корпута $\gamma_n(b)$ $(n=1,2,\dots)$ получаемых обращением порядкового номера числа последовательности: функция обращения по базису $b$ представляется в виде

$$v_n(b)=\sum_{k=0}^{m_n}\frac{a_k(n)}{b^{k+1}},\quad n=\sum_{k=0}^{m_n}a_k(n)\,b^k,\ a_k(n)=0,1,\dots,b-1.$$

Последовательностью Холтона называется последовательность векторов, определяемая равенством

$$\gamma_{\mathbf{b}}(n)=\left(v_{b_1}(n),\dots,v_{b_s}(n)\right)\quad(n=1,2,\dots),$$

где $b_1,\dots,b_s$ – первые $s$ простые числа.

Набор точек (сетка) Хэммерсли есть последовательность точек вида

$$h_{(b)}(n)=\left(\frac{n}{N},v_{b_1}(n),\dots,v_{b_{s-1}}(n)\right),\quad n=1,2,\dots N,$$

Для построения $s$-мерной последовательности Фауре $(n=1,2,\dots)$ также используется последовательность Ван дер Корпута с одним базисом, $s-1$ координат которых получаются преобразованием первой:

$$\varphi_{(b)}(n)=\left(v_b(n),T(v_b(n))\dots,T^{s-1}(v_b(n))\right),$$

где

$$T(v_b(n))=\sum_{k=0}^{m_n}\frac{d_k}{b^{k+1}},\quad d_k=\sum_{i=k}^{m_n}C_i^k a_i(n).$$

$s$-мерная последовательность Нидеррейтера $(n = 1, 2, \dots)$ определяется формулой

$$\eta_{(b)}(n) = \left(\sum_{k=0}^{m_n} \frac{z_k^{(1)}}{b^{k+1}}, \dots, \sum_{k=0}^{m_n} \frac{z_k^{(s)}}{b^{k+1}}\right), \quad z_k^j = \sum_{i=0}^{m_n} c_{k,i}^{(j)} a_i(n),$$

где $(c_{k,i}^j)$ - образующая матрица $j$-й координаты, алгоритм вычисления которой введен в [21].

Последовательность Соболя определяется как

$$s(n) = \left(\bigoplus \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) V_k^{(1)}, \dots, \bigoplus \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) V_k^{(s)}\right), \quad n = \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) 2^k, \ a_k(n) = 0, 1,$$

где $V_k^{(j)}$ - направляющие числа (выраженные в виде двоичной дроби), полученные из $s$ различных примитивных полиномов, а знак $\bigoplus \sum$ означает побитовую операцию XOR.

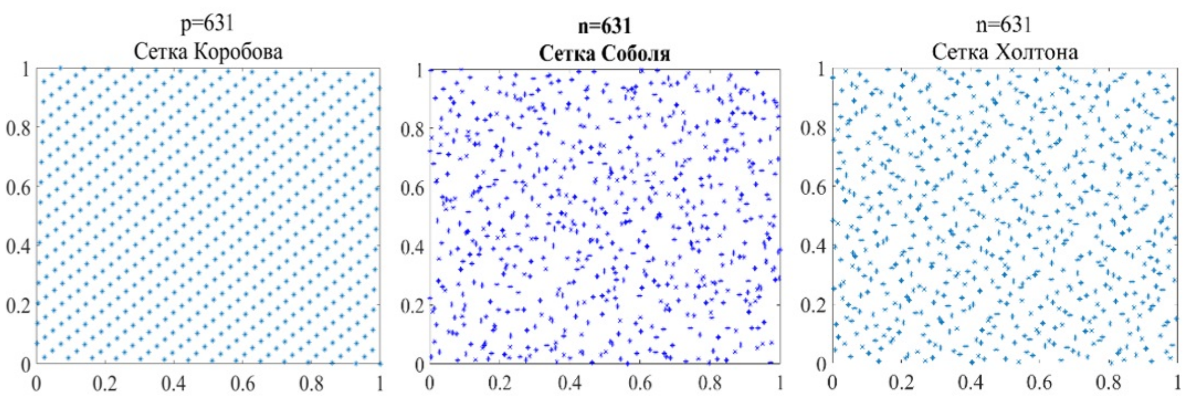
Сетки Коробова

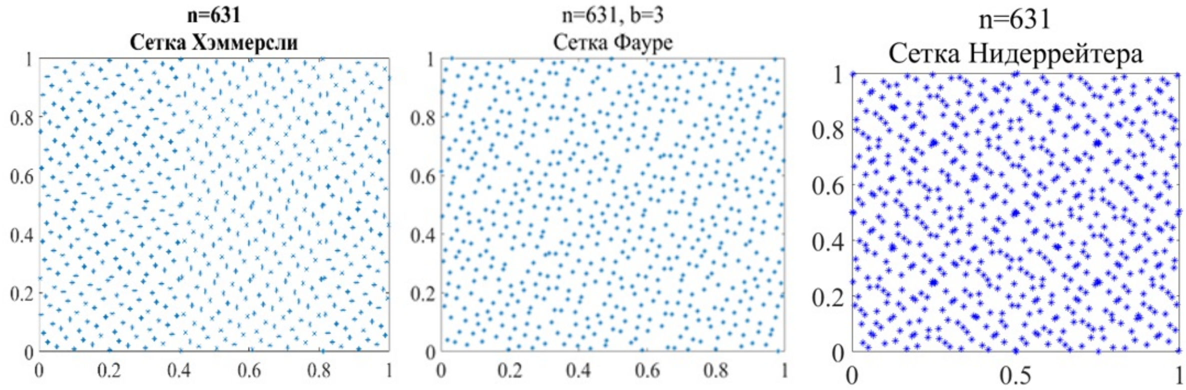
$$\xi_k(a) \equiv \xi_k(a_1, ..., a_s) = \left(\left\{\frac{a_1}{N}k\right\}, ..., \left\{\frac{a_s}{N}k\right\}\right) \ (k = 1, ..., N) \tag{3}$$

привлекательны в теоретическом и в вычислительном смысле (в то время как, вышеуказанные последовательности сеток требует выполнения большого количества операций для вычисления каждого узла) в том плане, что несмотря на обильное цитирование результатов (см., напр., [22-23] и имеющуюся в них библиографию) нигде не акцентируется, что сетка (3) есть такое *сжатие информации*, когда по $s+1$ целым числам выписывается сетка любого объема $N$. Именно, теоретический и практический интерес к построению сеток вида (3) объясняется, в частности, следующим. В общем случае, для записи сетки объема $N$ требуется $sN$ действительных чисел. Достоинством сеток вида (3) является тот факт, что она полностью определяется, независимо от объема $N$, заданием $s+1$ целых чисел $(N, a_1(N), ..., a_s(N)) \in Z^{s+1}$ (и легко выписывается за $\asymp N$ элементарных арифметических операций), причем каждая координата каждого узла сетки есть обыкновенная дробь с малым, в данных условиях, знаменателем $N$.

Так, например, при размерности $s = 10$ и количестве узлов сетки $N = 10^6$ объем записи и хранения сетки в памяти ЭВМ составляет $sN = 10^7$ чисел, в то время как в случае сетки вида (3) запись и хранение обеспечивается $s+1 = 11$ целыми числами (причем, независимо от числа узлов $N$).Тем самым, в случае равномерно распределенных сеток Коробова (3) речь идет о *сверхсжатии* информации объема $sN$ до $s+1$ и, по тем же причинам, в *сверхэкономном* хранении в памяти ЭВМ.

Равномерное заполнение единичного квадрата геометрический показывают следующие картинки (по программам Институте теоретической математики и научных вычислений ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (ИТМиНВ) вычислены сетки Коробова и по известным программам все остальные следующие сетки):






Большинство имеющиеся результатов по квази-Монте Карло методам имеют теоретический характер и не имеют оптимальных алгоритмов построения данных сеток или практически реализуемы только для малой размерности пространства и количества узлов сетки. В этом ключе в [24] разработан эффективный (в том числе $N$ узлов сетки находятся за предельно возможные $\asymp N \ln \ln N$ элементарных арифметических операций) алгоритм построения равномерно распределенных сеток на $s$-мерном единичном кубе $[0,1]^s$, что в принципе дает решение задачи нахождения оптимальных коэффициентов. Однако, при реализации алгоритма возникает задача вычисления норм целых алгебраических чисел, что есть многочлен степени большей или равной число переменных.

При возрастании размерности $s$ степень многочлена вместо с количеством его слагаемых сильно возрастает. Поэтому, для нахождения простых $N$ и соответствующих им *оптимальных коэффициентов* $a_1(N), ..., a_s(N)$, используется метод перебора, предложенный в [17].

**Алгоритм построения сетки Коробова:** *Пусть дано целое* $s(s = 2, 3, \ldots)$, *положительное* $r \geq 2$ *и* $R \geq 3$.

**Шаг 1.** Определяется простое $l = min\{t \in P : t \geq s+1\}$.

**Шаг 2.** Выписываются в порядке возрастания простые числа $p_n$,

$$p_n \equiv 1 (mod\ l),\ p_n \leq T \ \ (T = c(s)RlnsR).$$

**Шаг 3.** Для каждого $p_n$ находится наименьшее целое положительное число $a = a(s, p_n)$ такое, что $(a, p) = 1$, $a^{\frac{p_n-1}{l}} \not\equiv 1(mod\ p_n)$.

**Шаг 4.** По найденному числу $a = a(s, p_n)$ находятся целые положительные числа $a_j:\ 0 \leq a_j < p_n,\ a^{\frac{p_n-1}{l}(j-1)} \equiv a_j\ (mod\ p_n)\,(j = 2, \ldots, s)$.

**Шаг 5.** Затем вычисляются величины $(p = p_n)$

$$\triangle(s, r, p, a) \leq \beta_p 10^{-\tau}\ (1 \leq \beta_p < 10,\ \tau = 1, 2, \ldots).$$

**Шаг 6.** Величины $\beta_p 10^{-\tau}$ разбиваются на группы с одинаковым показателем $\tau(\tau = 1, 2, \ldots)$. Для каждого $\tau$ из данной группы берутся значения оптимальных коэффициентов соответствующих четырем (в некоторых случаях больше) наименьшим числом узлов $p$ (если таковы существуют).

Возникает задача сравнительного вычисления приведенного выше алгоритма построение сетки Коробова с известными, в качестве примера возьмем коллатизированную ипотечную облигацию.

Пашков и Трауб [25] изучали коллатизированную ипотечную облигацию из $m$ траншев. Основной пул составляет оплата в течение $n$ лет и поток денег поступает каждый месяц, т.е. имеется $s = m \cdot n$ денежных потоков. По факту правила достаточно сложные и они характеризуют финансовый проект.

Оценим сумму денежных потоков в каждом транше. Пусть $C$ - сумма ежемесячных выплат базового пула $i_j\ \ (j = 1, ..., s)$ есть процентная ставка соответствующая $j$-ому месяцу, $w_j$ процент предварительного платежа в $j$-ом месяце, а $a_{s-j+1}$ есть остаточный аннуитет после $j$-го месяца.

Остаточный аннуитет определяется $a_j = 1 + \nu_0 + ... + \nu_0^{j-1}$. Ставка дисконтирования $\nu_0 = \frac{1}{1+i_0}$ и $i_0$ месячная ставка. Здесь $C$ и $a_j$ – постоянные, а $i_j$ и $w_j$ – стохастические переменные, определяемые как

$$i_j = K_0 e^{\xi_j} i_{j-1} = K_0^j i_0 e^{\xi_1 + ... + \xi_k},$$

где $\{\xi_j\}_{j=1}^s$- нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и с дисперсией $\sigma^2 = 0,0004$, $K_0$ - заданная постоянная. Модель предварительной оплаты $w_j$ вычисляется по формуле

$$w_j = w_j(\xi_1, ..., \xi_j) = K_1 + K_2 arctg(K_3 i_j + K_4) = K_1 + K_2 arctg\left(K_3 K_0^j i_0 e^{\xi_1 + ... + \xi_j} + K_4\right),$$

где $K_1, K_2, K_3$ и $K_4$ заданные постоянные. Ежемесячный денежный поток $j$, $j = 1, 2, ..., N$ составляют

$$M_j = M_j(\xi_1, ..., \xi_j) = C \prod_{l=1}^{j-1} (1 - w_l(\xi_1, ..., \xi_l))(1 - w_l(\xi_1, ..., \xi_l) + w_l(\xi_1, ..., \xi_l) a_{s-l+1}).$$

Денежный поток распределяется по траншам, соответствеующим законам коллатизированной ипотечной облигации. Пусть $G_{j;T}(\xi_1, ..., \xi_j)$-часть денежного потока $M_j$ по траншу $T$ в $j$-ом месяце. Форма этой функции сложная, для нас достаточно того, что она непрерывна. Чтобы посчитать денежный поток $T$ транша $j$-ом месяце надо умножить на дисконтный коэффицент

$$u_j(\xi_1, ..., \xi_{k-1}) = v_0 v_1(\xi_1) ... v_{j-1}(\xi_1, ..., \xi_{j-1}).$$

Для всех $T$ траншев в $j$ -ом месяце текущаяя стоимость $PV_T$ равна

$$PV_T(\xi_1, ..., \xi_s) = \sum_{j=1}^{s} G_{j;T}(\xi_1, ..., \xi_j)\ u_j(\xi_1, ..., \xi_j).$$

Тогда, математическое ожидание $E[PV_T]$ вычисляется по формуле

$$E[PV_T] = \int\limits_{[0,1]^s} PV_T(y_1(x_1), ..., y_s(x_s))\, dx_1, ..., dx_s,$$

где $y_j = y_j(x_j)$ находится из условия $x_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{y_i} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt.$

Таким образом, задача сводиться к вычислению кратного интеграла в $s$-мерном кубе. После генерации равномерно распределенных на $[0,1]^s$ точек $\{(x_1^{(k)}, ..., x_s^{(k)})\}_{k=1}^N$, для каждого $x_j^{(k)}, j = 1, 2, ..., s, k = 1, ..., N$ посредством обратной куммулятивной функции вычисляются значения $\{(y_1^{(k)}, ..., y_s^{(k)})\}_{k=1}^N$.

Приведем результаты численного интегрирования интеграла $E[PV_T]$ методом квази - Монте Карло. Все расчеты проводились в программной среде Matlab. Рассматривается коллатизированная ипотечная облигация на общую сумму 400 млн у.е. разделенных на четыре транша, обозначаемые через А, Б, В, Г, с суммами 194500000, 36000000, 96500000, 73000000 соответственно.

Пусть базовый пул ипотеки имеет десятилетний срок погашения, выплачиваемого ежемесячно. Таким образом получается, что всего $10 \cdot 12 = 120$ денежных потоков, которые распределяются между траншами по правилу, согласно которому все предварительные выплаты сначала идут на погашение основного долга транша $A$, после его погашения — на погашение транша $B$ и так далее.

Сначала приведем все расчеты при количестве узлов $N \approx 10000 \cdot k$, $k = 1, 2; ; \ldots, 20$. Для наглядности результаты реализации представлены на графике (Рис. 1).

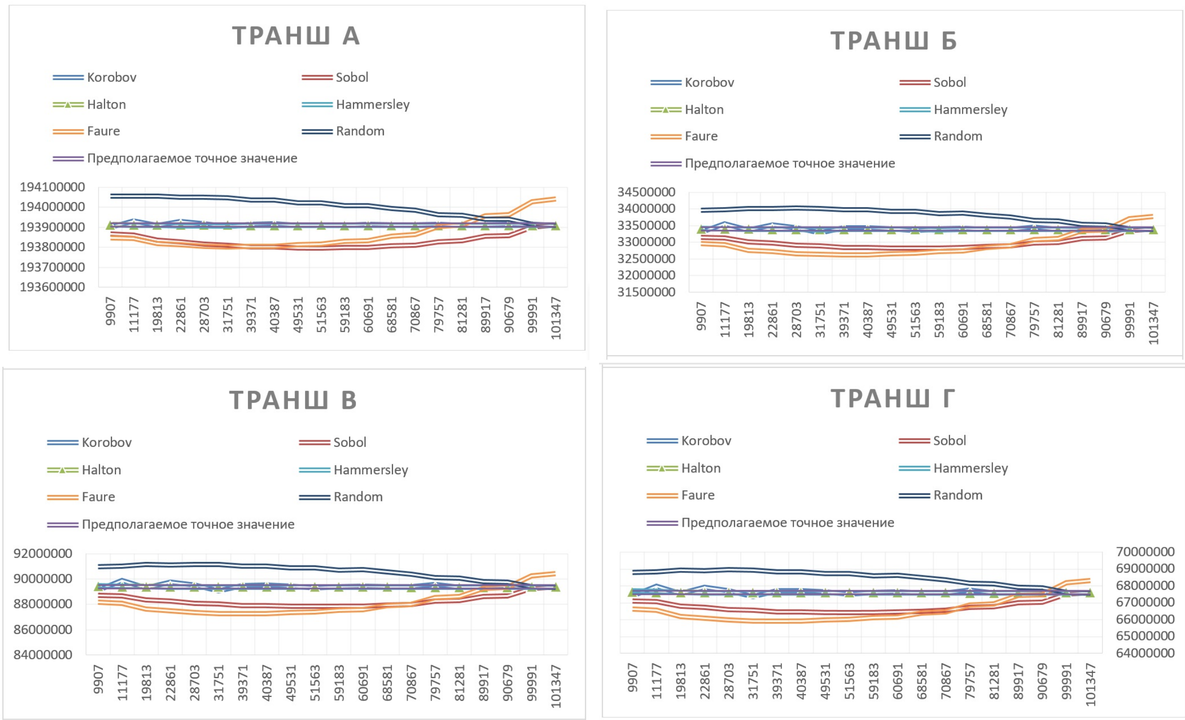
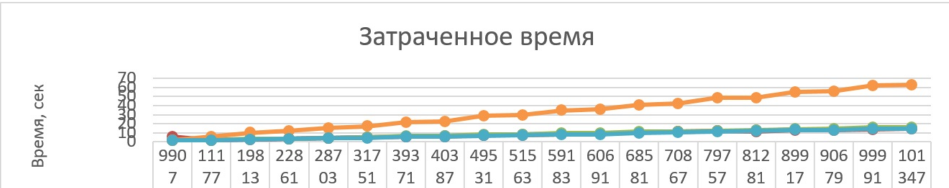



**Рисунок 1 – Значения вычислительных агрегатов для** $E(PV_T)$
$(i_0 = 0.08125, K_0 = 1, K_1 = -4.09106, K_3 = 5, K_3 = 10, K_3 = 1, N \approx 10000 \cdot k, k = 1, 2, \ldots, 20)$.

На Рисунке 1 показаны результаты вычислений приведенных стоимостей четырех траншев применением случайной 120-мерной последовательности с нормальным распределением (в среде Matlab функция *normrnd*). Здесь сетки Коробова подсчитаны по алгоритму 1-6, а сетки Соболя, Холтона, Хэммерсли, Фора по приведенным выше формулам и составленным нами программам.

Как видно из Рисунка 1, при $9907 < N \leq 101347$ алгоритмы с сетками Коробова, Холтона, Хэммерсли группируются лучше к числам соответствующим значениям 193699678.3, 29998489.14, 79355687.16, 58494364.1 нежели с сетками Фора, Соболя и случайными числами.

На Рисунке 2 указано потраченное время на выполнение алгоритмов, с указанными выше сетками.



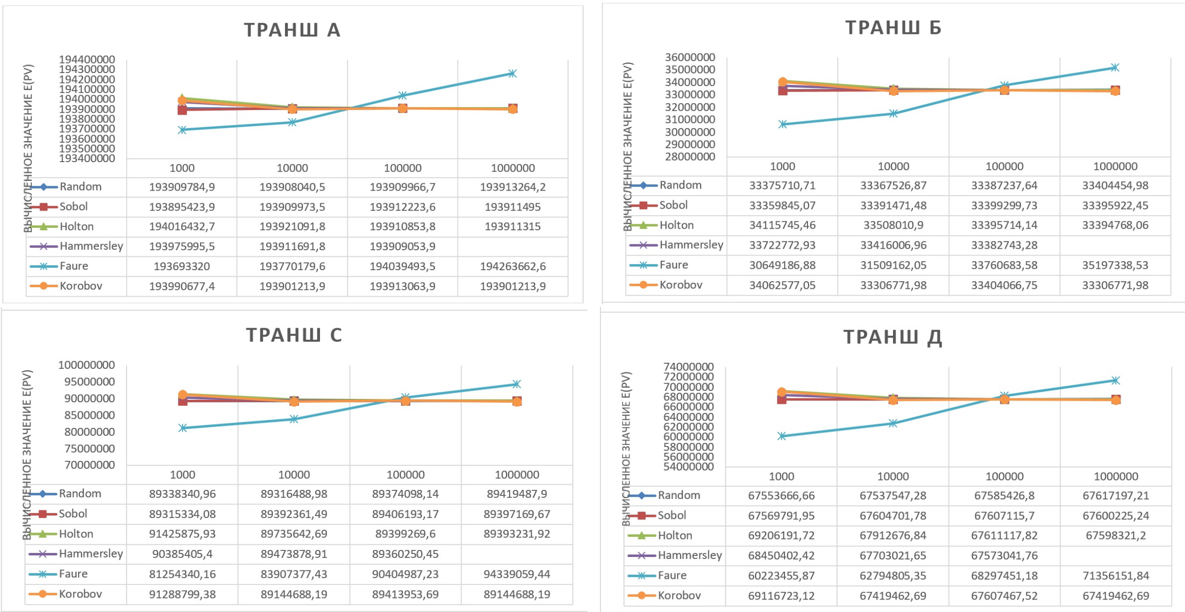

| | 9907 | 11177 | 19813 | 22861 | 28703 | 31751 | 39371 | 40387 | 49531 | 51563 | 59183 | 60691 | 68581 | 70867 | 79757 | 81281 | 89917 | 90679 | 99991 | 101347 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Korobov | 1,54 | 1,68 | 3,04 | 3,42 | 4,37 | 4,8 | 6,1 | 6,24 | 7,77 | 7,94 | 9,35 | 9,33 | 10,6 | 10,9 | 12,4 | 12,5 | 13,9 | 14 | 15,3 | 15,4 |
| Sobol | 5,89 | 1,7 | 2,92 | 3,47 | 4,35 | 4,81 | 5,7 | 5,71 | 7,15 | 7,65 | 8,59 | 8,91 | 10,4 | 11,1 | 11,9 | 11,5 | 12,9 | 12,7 | 14 | 14,3 |
| Halton | 1,63 | 1,81 | 3,06 | 3,55 | 4,47 | 4,99 | 6,35 | 6,54 | 7,88 | 8 | 9,52 | 9,55 | 11 | 11,6 | 12,5 | 12,8 | 14,1 | 14,3 | 16 | 16 |
| Faure | 1,63 | 5,64 | 10,2 | 11,9 | 15,5 | 17,3 | 22 | 22,5 | 28,6 | 29,6 | 34,8 | 36 | 40,7 | 42,2 | 48,7 | 48,8 | 54,9 | 55,5 | 61,9 | 62,7 |
| Random | 1,63 | 1,63 | 2,73 | 3,13 | 3,96 | 4,45 | 5,55 | 5,72 | 6,98 | 7,09 | 8,21 | 8,39 | 9,68 | 10,3 | 11,6 | 11,9 | 13,4 | 13,1 | 14,5 | 14,8 |

N

**Рисунок 2 – Затраченное время на реализацию вычислительных агрегатов для интеграла** $E(PV_T)$

Время подсчета во всех случаях сравнительно одинаково, за исключением сетки Фора.

Далее приведем результаты вычисление значения $E(PV)$ для $N = 10^k$ $(k = 3, 4, 5, 6)$




ТРАНШ А

| | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|
| Random | 193909784,9 | 193908040,5 | 193909966,7 | 193913264,2 |
| Sobol | 193895423,9 | 193909973,5 | 193912223,6 | 193911495 |
| Holton | 194016432,7 | 193921091,8 | 193910853,8 | 193911315 |
| Hammersley | 193975995,5 | 193911691,8 | 193909053,9 | |
| Faure | 193693320 | 193770179,6 | 194039493,5 | 194263662,6 |
| Korobov | 193990677,4 | 193901213,9 | 193913063,9 | 193901213,9 |

ТРАНШ Б

| | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|
| Random | 33375710,71 | 33367526,87 | 33387237,64 | 33404454,98 |
| Sobol | 33359845,07 | 33391471,48 | 33399299,73 | 33395922,45 |
| Holton | 34115745,46 | 33508010,9 | 33395714,14 | 33394768,06 |
| Hammersley | 33722772,93 | 33416006,96 | 33382743,28 | |
| Faure | 30649186,88 | 31509162,05 | 33760683,58 | 35197338,53 |
| Korobov | 34062577,05 | 33306771,98 | 33404066,75 | 33306771,98 |

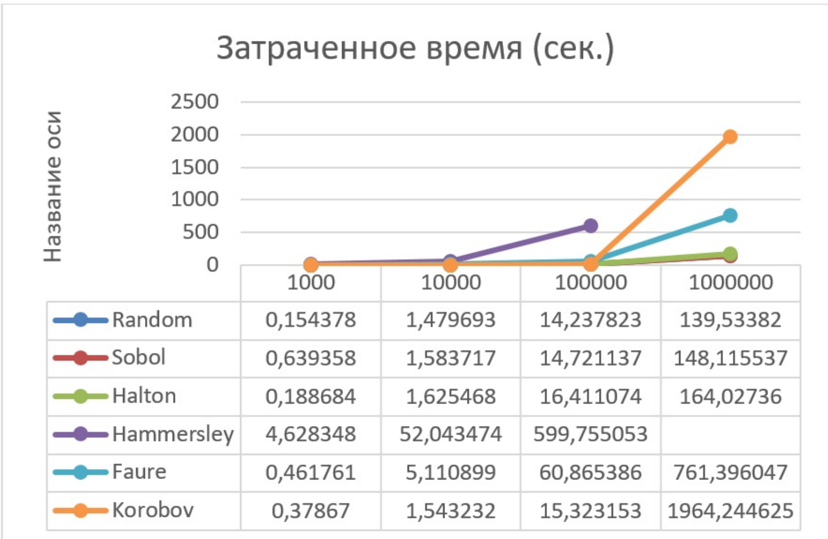
ТРАНШ С

| | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|
| Random | 89338340,96 | 89316488,98 | 89374098,14 | 89419487,9 |
| Sobol | 89315334,08 | 89392361,49 | 89406193,17 | 89397169,67 |
| Holton | 91425875,93 | 89735642,69 | 89399269,6 | 89393231,92 |
| Hammersley | 90385405,4 | 89473878,91 | 89360250,45 | |
| Faure | 81254340,16 | 83907377,43 | 90404987,23 | 94339059,44 |
| Korobov | 91288799,38 | 89144688,19 | 89413953,69 | 89144688,19 |

ТРАНШ Д

| | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|
| Random | 67553666,66 | 67537547,28 | 67585426,8 | 67617197,21 |
| Sobol | 67569791,95 | 67604701,78 | 67607115,7 | 67600225,24 |
| Holton | 69206191,72 | 67912676,84 | 67611117,82 | 67598321,2 |
| Hammersley | 68450402,42 | 67703021,65 | 67573041,76 | |
| Faure | 60223455,87 | 62794805,35 | 68297451,18 | 71356151,84 |
| Korobov | 69116723,12 | 67419462,69 | 67607467,52 | 67419462,69 |

**Рисунок 3 – Значения вычислительных агрегатов для** $E(PV_T)$
$(N = 10^k, \quad k = 3, 4, 5, 6)$.




| | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|
| Random | 0,154378 | 1,479693 | 14,237823 | 139,53382 |
| Sobol | 0,639358 | 1,583717 | 14,721137 | 148,115537 |
| Halton | 0,188684 | 1,625468 | 16,411074 | 164,02736 |
| Hammersley | 4,628348 | 52,043474 | 599,755053 | |
| Faure | 0,461761 | 5,110899 | 60,865386 | 761,396047 |
| Korobov | 0,37867 | 1,543232 | 15,323153 | 1964,244625 |

**Рисунок 4 – Затраченное время на реализацию вычислительных агрегатов для интеграла** $E(PV_T)$

По итогам вычисления видим, что математический инструмент хорошо применяется в финансовых проблемах. На примере показано, что через $n$ – мерный интеграл можно оценить сумму денежных потоков в каждом транше. В свою очередь, значение $n$ – мерного интеграла определяется по методу квази-Монте Карло, который требует построение равномерно распределенной сетки с малыми дискрепансами.

Приведенные результаты вычислительных экспериментов показывают только взаимоотношения между значениями используемых в финансах математических инструментов, но без оценок возникающих при этом погрешностей.

Исследование точности квадратурных формул это отдельный тема исследований (см. напр., [11-13])

## Список литературы


1 Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. –New York: Springer-Verlag, –2003. 596 p.
2 Glasserman P., Yu B. Simulation for American Options: Regression Now or Regression Later? In: Niederreiter H. (eds) Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2002. Springer, Berlin, Heidelberg. –2004.
3 Garcia D. Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule // Journal of Economic Dynamics and Control. –2003. –V.27, №10. –P.1855-1879. –V. 27. –P. 855–1879.
4 Glasserman P., Yu B. Large sample properties of weighted Monte Carlo estimators // Operat. Res. –2005. –V. 53. –P. 298-312.
5 Paskov S.H. Computing high dimensional integrsls with applicationsto finance //Journal of portfolio management. –1995. –P. 13-20.
6 Джекел П. Применение методов Монте-Карло в финансах. –М: Интернет-Трейдинг, –2004. –263 с.
7 Korn R., Korn E., Kroisandt G. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. CRC Press, –2010. – 410 p.
8 Галиц Л. Финансовый инжиниринг: инструменты и способы управления финансовым риском. / Лоуренс Галиц. – М.: ТВП, 1998. – 600 с.
9 Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. Monte Carlo methods forsecurity pricing // Journal of Economic Dynamics and Control. –1997. –№21. –P. 1267–1321.
10 Василковский Г. В., Возняковский Г. Обзор сложности в средней ситуации для линейных многомерных проблем // Изв. вузов. Матем. – 2009. –№4. –С. 3–19.
11 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е издание, переработанное и дополненное. –Москва: МЦНМО. –2004. –287 стр.
12 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. In: Schriftenreihe der Osterreichischen Computer Gesellschaft. –Vol. 12. R. Oldenbourg Verlag, Wien/Munchen. –1981.
13 Hua L.-K., Wang Y. Application of Number Theory of Numerical Analysis. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science press. Beijing, –1981. –241 p.
14 Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. –Москва: Наука, –1985. – 408 с.
15 Баилов Е. А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. –Т. 54, № 7. – С. 1059-1077.
16 Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Быстрые "Алгебраические" преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках// Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 5. –С. 93-98.
17 Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН. – 2007. –Т. 416, №2. – С.169-173.
18 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики. –2009. –Т.49, №1. –С. 14-25.
19 Темиргалиев Н. Обзор-2010: Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. // Вест.ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. -С. 1-194.
20 Темиргалиев Н. Обзор-1997: Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского ун-та. –1997. –№ 3. –С. 90-144.
21 Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. SIAM. Philadelphia, Pennsylvania, –1992. 241 pages.
22 Бабенко К.И. Основы численного анализа. –Москва-Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». –2002. –848 с.
23 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. 2-е изд. –М.: Наука, –1975. –472 с.
24 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем.сб. –1990. –Т.181, № 4. –С. 490-505.
25 Paskov S. Computing High Dimensional Integrals with Applications to Finance. Technical Report CUCS-023-94. Department of Computer Science, Columbia University, New York. –1993.



**Н.Ж. Наурызбаев [1] , Г.Е. Таугынбаева [2] , М. Бейсенбек [3]**

[1,2] *Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан,*

[3] *QSI Астана халықаралық мектебі, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*


### Алгебралық сандар теориясының қаржылық математикада қолдану аспектілері


**Аннотация.** Қаржы инжинирингінде, яғни әртүрлі тәуекел мен кірістілік параметрлерлі қаржы құралдарың құрамдастыруда арнайы математикалық әдістердіқолдану мәселелері қарастырылады. Әсіресе жоғары деңгейлі тәуекелдер жиі кездесетін үлкен қаржылық ресурстарды басқарғанда, олардың алдын алу және бейтараптандыру барысында бірегей әдістер мен тәсілдерді құру қатар жүреді.

**Түйін сөздер:** қаржылық инженерия, бірқалыпты үлестірілген торлар, квази-Монте-Карло әдісі, дискрепанс.

**N. Zh. Nauryzbayev [1], G.E. Taugynbayeva [2], M. Beisenbek [3]**

[1,2] *Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,*
[3] *QSI International School of Astana, Nur-Sultan, Kazakhstan*

**Application aspects of algebraic number theory in financial mathematics**

**Abstract.** The problem of applying special mathematical methods in financial engineering that is, in combining financial instruments with various risk and profitability parameters, is considered. Especially when it comes to managing large financial resources, where high levels of risks are often encountered, the prevention and neutralization of which is often accompanied by the development of unique techniques and methods.

**Keywords:** financial engineering, uniform distributed grids, quasi-Monte Carlo method, discrepancy.

# References

1 Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Springer-Verlag, New York, 2003, 596 p.).
2 Glasserman P., Yu B. Simulation for American Options: Regression Now or Regression Later? In: Niederreiter H. (eds) Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2002 (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004).
3 Garcia D. (2003) Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule, Journal of Economic Dynamics and Control. V.27. №10. P.1855-1879.
4 Glasserman P., Yu B. (2005) Large sample properties of weighted Monte Carlo estimators, Operat. Res. V. 53. P. 298-312.
5 Paskov S.H. (1995) Computing high dimensional integrsls with applicationsto finance, Journal of portfolio management. P. 13-20.
6 Jackel P. Monte Carlo Methods in Finance (New York, John Wiley & Sons Inc, 2002. -238 p.).
7 Korn R., Korn E., Kroisandt G. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance (CRC Press, 2010, 410 p.).
8 Galic L. Finansovyj inzhiniring: instrumenty i sposoby upravlenija finansovym riskom [Financial engineering: tools and methods for managing financial risk]. (TVP, Moscow, 1998, 600p.).
9 Boyle, P., Broadie, M., and Glasserman, P. (1997) Monte Carlo methods forsecurity pricing, Journal of Economic Dynamics and Control. №21. P. 1267–1321.
10 Vasilkovskij G. V., Voznjakovskij G. (2009) Obzor slozhnosti v srednej situacii dlja linejnyh mnogomernyh problem [A survey of average case complexity for linear multivariate problems], Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. [Russian Math. (Iz. VUZ), V. 53. No. 4. P. 1-14]. V. 53. No. 4. P. 3-19.
11 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize. 2-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe [Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis. 2nd. revised and extended edition ] (MTsNMO, Moscow, 2004, 287p.).
12 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. In: Schriftenreihe der Osterreichischen Computer Gesellschaft. Vol. 12. (R. Oldenbourg Verlag, Wien/Munchen. 1981).
13 Hua L.-K., Wang Y. Application of Number Theory of Numerical Analysis (Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science press, Beijing, 1981, 241 p.).
14 Kuipers L., Niederreiter H. Ravnomernoe raspredelenie posledovatel'nostej [Uniform Distribution of Sequences] (Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974; Nauka, Moscow, 1985).
15 Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. (2014) Ob obshhem algoritme chislennogo integrirovanija funkcij mnogih peremennyh [On an algorithm for constructing uniformly distributed Korobov grids], Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. [Comput. Math. Math. Phys., Vol. 54. No. 7). P. 1061-1078]. Vol. 54, No 7. P. 1059-1077.
16 Temirgaliyeva Zh. N. , Temirgaliyev N. (2016) Bystrye "Algebraicheskie" preobrazovanija Fur'e na ravnomerno raspredelennyh setkah [Rapid “algebraic” Fourier transforms on uniformly distributed meshes], Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. [Russian Math. (Iz. VUZ), Vol. 60. No 5. P. 81-85]. No 5. P. 93-98.
17 Temirgaliev N., Bailov E.A., Zhubanysheva A.Zh. (2007) Ob obshhem algoritme chislennogo integrirovanija periodicheskih funkcij mnogih peremennyh [General Algorithm for the Numerical Integration of Periodic Functions of Several Variables], Dokl. Akad. Nauk [Dokl. Math. Vol. 76, P. 681-685]. Vol. 416. No2. P.169-173.
18 Zhubanysheva A.Zh., Temirgaliev N., and Temirgalieva Zh.N. (2009) Primenenie teorii divizorov k postroeniju tablic optimal'nyh kojefficientov kvadraturnyh formul [Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas], Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. [Comput. Math. Math. Phys. Vol.49. No. 1. P. 12-22] Vol. 49. No. 1. P. 14-25.
19 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series. ], Vest. ENU

im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU], 1-194 (2010)

20 Temirgaliyev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Numerical-theoretic methods and the probability-theoretic approach to the problems of the Analysis. The theory of embeddings and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Vestnik Evrazijskogo universiteta [Bulletin of the Eurasian University], (3), 90-144 (1997).

21 Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods (SIAM. Philadelphia, Pennsylvania, 1992, 241 p.).

22 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza [Foundations of numerical analysis] ( Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, Moscow-Izhevsk, 2002, 848 p.).

23 Ermakov S.M. Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy [The Monte Carlo method and related problems] (Moscow, Nauka, 1975, 472 p.).

24 Temirgaliev N. (1990) Primenenie teorii divizorov k chislennomu integrirovaniju periodicheskih funkcij mnogih peremennyh [Application of Divisor Theory to Numerical Integration of Periodic Functions of Several Variables]. Mat. Sb. [Math. USSR-Sb. (1991), Vol. 69. No. 2 , P. 527–542] Vol. 181. No. 4. P. 490–505.

25 Paskov S. Computing High Dimensional Integrals with Applications to Finance (Technical Report CUCS-023-94. Department of Computer Science, Columbia University, New York,1993).

**Сведения об авторах:**

*Наурызбаев Н.Ж.* – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

*Таугынбаева Г.Е.* – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

*Бейсенбек М.* – учащийся "QSI Международная школа Астана", Нур-Султан, Казахстан

*Nauryzbayev N. Zh.* – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Taugynbayeva G.E.* – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Beisenbek M.* – Pupil at "QSI International School of Astana", Nur-Sultan, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 02.02.2020*