



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»

студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS

of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»



14th April 2017, Astana



**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»**

**PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»**

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58

Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2017

только тогда, когда $B_1^* < \infty, B_2^* < \infty$. При этом $C^* \approx B_1^* + B_2^*$, где C^* -наименьшая константа неравенства (3).

Список использованных источников

1. Абылаева А. М. Ограниченность и компактность оператора дробного суммирования с весом. // Математический журнал, 2005 . Том 5 , № 4 (18) -С .5- 16 .
2. Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х. Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей // Изв. МН-АН РКю Сер. Физ.-мат. 1998.– С. 33-42.
3. Sawyer E.T Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1990. P. 145-158.

УДК 517.983:983.8

ИНВАРИАНТТЫ ІШКІ КЕҢІСТІКТЕРДІҢ БІР КЛАСЫНДА ВОЛЬТЕРРЛІК ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ ҚАЙТЫМДЫЛЫҒЫ

Мұқашева Тоғжан Дидарқызы

tojjan.95.08@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 5B060100-математика мамандығының 4-курс

студенті, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.Ибатов

Функционалдық-дифференциалдық теңдеулер теориясының кейбір есептері көп жағдайда

$$Ax = f \quad (A: X \rightarrow X) \quad (1)$$

сызықты операторлық теңдеулерді зерттеуге келтірілетіні белгілі. Осындай жағдайларда A операторы қайтымды болған кезде оның қандай қасиеттері оған кері A^{-1} операторы үшін сақталынады деген сұрақ туындайды. Нақтырақ бұл сұрақты былай қоюға болады: $X_0 \subset X$ сызықты, қайтымды $A: X \rightarrow X$ операторының инвариантты ішкі кеңістігі болсын $X_0 - A^{-1}$ операторы үшін инвариантты ішкі кеңістік бола ма?

Осындай мәселелер функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің асимптотикалық қасиеттерін зерттеген кезде туындайды. Осы бөлімде біз жоғарыдағы сұраққа дербес жағдай үшін жауап беруге тырысамыз. Осыған жақын сұрақтар [1,2] авторлардың жұмыстарында интегралдық теңдеулер үшін қарастырылған.

$R^n - n$ -өлшемді евклид кеңістігі, $E - n \times n$ -өлшемді бірлік матрица ($E \equiv E(t)$ функциялық матрица); $X - [0, \infty)$ жартылай өсінде анықталған, өлшемді $X: [0, \infty) \rightarrow R^n$ вектор-функциялардың банах K -кеңістігі; $\|\cdot\|_X - X$ кеңістігіндегі норма; $I: X \rightarrow X -$ бірлік оператор; $X^* - X$ кеңістігіне түйіндес кеңістік; $\Phi(x) \equiv \langle x, \Phi \rangle - \Phi \in X^*$ функционалының $x \in$ элементіне әсері:

$A^*: X^* \rightarrow X^* - A: X \rightarrow X$ сызықты операторына түйіндес оператор.

$(\forall \Phi \in X^*, \forall x \in X: \langle Ax, \Phi \rangle = \langle x, A^* \Phi \rangle$ немесе $\Phi(Ax) = [A^* \Phi](x)$);

$Y^\perp = \{\Phi \in X^*: \langle y, \Phi \rangle = 0, \forall y \in Y\} - Y \subset X$ ішкі кеңістігінің аннуляторы;

$X^b = \{x \in X: (b, \infty) - \text{аралығында барлық дерлік жерде нөлге айналатын}\} - \subset X$ ішкі кеңістігі;

$\chi_\Delta - \Delta$ жиынының характеристикалық функциясы: $x_b = \chi_{[0,b]} \cdot x, x^b = \chi_{(b,\infty)} \cdot x$.

1 - анықтама. Егер қандай да бір $b > 0$ үшін

$$x^b = 0 \quad (2)$$

барлық дерлік орындалатын болса, онда $x \in X$ функциясын финитті функция деп атайды.

Финитті функциялар жиыны X кеңістігінің ішкі кеңістігін анықтайды. Оның тұйықтамасын X_0 деп белгілейік. X_0 кеңістігінің элементтері үшін

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \|x^b\|_X = 0 \quad (3)$$

теңдігі орынды, яғни X_0 кеңістігінің элементтері асимптоталық қасиетке ие.

2-анықтама. Егер

$$\forall b > 0: AX^b \subset X^b \quad (4)$$

қамтуы орындалатын болса, онда $A: X \rightarrow X$ операторын вольтеррлік оператор деп атайды.

Жоғарыда келтірілген анықтамада А.Н.Тихонов бойынша вольтеррлік оператор ұғымымен беттеседі.

1-теорема. Егер $A: X \rightarrow X$ сызықты шенелген вольтеррлік оператордың $A^{-1}: X \rightarrow X$ кері шенелген операторы бар болса және $A: X_0 \rightarrow X_0$ орындалса, онда $A^{-1}: X_0 \rightarrow X_0$ орындалады.

Теореманың дәлелдеуі негізінен төменде келтірілетін екі лемма тұжырымынан шығады. Сондықтан алдымен осы екі лемманың тұжырымын дәлелдейік.

1-лемма. $Y - X$ кеңістігінің тұйық ішкі кеңістігі және $A: X \rightarrow X$ сызықты оператор болсын. $AU \subset Y$ қамтуы орындалу үшін $A^*Y^\perp \subset Y^\perp$ қамтуының орындалуы қажетті және жеткілікті.

3 - анықтама. Егер

$$(\forall x \in X)(\forall b > 0): \Phi(x_b) = 0 \quad (5)$$

болса, онда $\Phi \in X^*$ функционалын $b = \infty$ нүктесінде сингулярлы функционал деп атайды.

Барлық сингуляр функционалдар жиынын X_s^* деп белгілейік. X кеңістігінің кез-келген x элементін

$$x = x_b + x^b \quad (6)$$

түрінде жазуға болатындықтан

$$(\forall \Phi \in X_s^*)(\forall b > 0): \Phi(x) = \Phi(x^b) \quad (7)$$

теңдігі орындалады. Осыдан $X_s^* = X_0^\perp$ аламыз.

4 - анықтама. Егер

$$\forall x \in X: \Phi(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Phi(x_b) \quad (8)$$

болса, онда $\Phi \in X^b$ функционалын $b = \infty$ нүктесінде үзіліссіз функционал деп атайды

Барлық үзіліссіз функционалдар жиынын X_c^* деп белгілейік.

Жоғарыда келтірілген анықтамадан

$$X_c^* \cap X_s^* = \{0\} \quad (9)$$

болатындығы шығады. Иосида-Хьюитта теоремасында [5,47бет] пайдаланған талдауларды қолданып

$$X^* = X_c^* \oplus X_s^* \quad (10)$$

болатындығын көрсетуге болады. Сонымен кез-келген $\Phi \in X^*$ функционалын

$$0\Phi = \Phi_c + \Phi_s$$

түрінде жазуға болады. Мұндағы

$$\Phi_c(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Phi(x_b) \text{ және } \Phi_s(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Phi(x^b) \quad (11)$$

4-теорема [3,381бет] дәлелдемесінде қолданылған схеманы пайдаланып X_c^* кеңістігінің *-

әлсіз секвенциальды толық болатындығын тексеруге болады. $X_s^* = X_0^\perp$ кеңістігі *-әлсіз тұйық [4, 4.7-теорема, 109 бет]. $X_s^* \cong X^* / X_s^*$ болғандықтан изоморфизм анықтамасы бойынша $X_0^* \cong X^* / X_0^\perp$ [4, 4.9-теорема, 109 бет]. Сондықтан X^* кеңістігінің X_c^* ішкі кеңістігі X_{00}^* кеңістігімен пара-пар болады. Бұдан

$$X^* = X_0^* \oplus X_0^\perp \quad (12)$$

жіктеуіне келеміз.

2-лемма. Егер $A: X \rightarrow X$ сызықты операторы вольтеррлік оператор болса, онда

$$A^* X_0^* \subset X_0^* \quad (13)$$

орынды.

Дәлелдеуі. $\Phi \in X_0^*$ кез-келген функционал болсын. Онда

$$\forall x \in X : \Phi(Ax) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi[(Ax)_m] = \lim_{m \rightarrow \infty} [A^* \Phi_m](x) \quad (14)$$

орынды. Мұндағы $\Phi_m - \Phi$ функционалының $X_m \subset X$ ішкі кеңістігіндегі тарылуы.

$\psi = A^* \Phi$ және $\psi_m = A^* \Phi_m (m \geq 1)$ деп белгілейік. A вольтеррлік оператор болғандықтан

$$(\forall b > m)(\forall x \in X) : \psi_m(x^b) = 0 \quad (15)$$

Сондықтан

$$\forall x \in X : \psi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(x). \quad (16)$$

Осы теңдіктен және $X_0^* = X_c^*$ кеңістігінің *-әлсіз секвенциальды толықтығынан

$$\psi = A^* \Phi \in X_0^* \quad (17)$$

болатындығын аламыз. Олай болса

$$A^* X_0^* \subset X_0^* \quad (18)$$

қамтуының орындалатындығын дәлелдедік.

1-теореманың дәлелдемесі. 1-лемманың тұжырымы бойынша, егер $(A^{-1})^* X_0^\perp \subset X_0^\perp$

болса, онда $(A^{-1})^* X_0 \subset X_0$ Сондықтан $(A^{-1})^* X_0^\perp \subset X_0^\perp$ болатындығын дәлелдеген жеткілікті. 1-теореманың шарты орындалған кезде 1-лемманың тұжырымынан

$$A^* X_0^\perp \subset X_0^\perp \quad (19)$$

қамтуының орынды болатындығы шығады. A -вольтеррлік оператор болғандықтан 2-

лемманың тұжырымынан $A^* X_0^* \subset X_0^*$.

$$\Phi \in X_0^* \text{ және } (A^{-1})\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

болсын. Мұндағы $\Phi_1 \in X_0^*$ және $\Phi_2 \in X_0^\perp$

$$\Phi = A^*(A^{-1})^* \Phi \quad (20)$$

теңдігінен

$$\Phi = A^* \Phi_1 + A^* \Phi_2 \text{ немесе } A^* \Phi_1 = \Phi + A^* \Phi_2$$

теңдігін аламыз.

$$X^* = X_0^* \oplus X_0^\perp \quad (21)$$

болғандықтан

$$A^* \Phi_1 = 0 \quad (22)$$

$A^* : X^* \rightarrow X^*$ сызықты операторының кері операторы бар болғандықтан

$$\Phi_1 = 0 \quad (23)$$

Олай болса,

$$(A^{-1})^* \Phi = \Phi_2 \in X_0^\perp \quad (24)$$

Бұдан

$$(A^{-1})^* X_0^\perp \subset X_0^\perp \quad (25)$$

қамтуының орындалатындығын көреміз.

Ескерту. Егер $A = I - B$ түрінде берілген болса, мұндағы B операторының спектрлік радиусы, $\tau(B) < 1$ онда 1-теореманың тұжырымын

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \quad (26)$$

теңдігінен алуға болады.

Егер $x_\infty \in R^n$ үшін $[x(\cdot) - x_\infty]$ вектор-функция X_0 кеңістігінің элементі болса, онда

$$x_\infty = X - \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (27)$$

деп жазатын боламыз.

2-теорема. Бірінші теореманың шарттары орындалсын және $A_\infty = X - \lim_{t \rightarrow \infty} (AE)(t)$ ерекше емес шектік матрица бар болсын. Егер

$$X - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty \quad (28)$$

бар болса, онда

$$X - \lim_{t \rightarrow \infty} (A^{-1} f)(t) = x_\infty \quad (29)$$

бар болады. Сонымен қатар,

$$x_\infty = A_\infty^{-1} f_\infty \quad (30)$$

теңдігі орындалады.

Келтірілген теоремалардың қолданысын қарапайым мысал үшін қарастырайық.

$L[0, +\infty)$ деп $[0, +\infty)$ аралығында анықталған барлық өлшемді функциялар жиынын белгілейік. Әлбетте, $L[0, +\infty)$ жиыны сызықтық кеңістік болады

$$\begin{aligned} X = L_\infty[0, +\infty) &= \{x : x \in L[0, +\infty), \\ \|x\|_\infty &= \sup_{t \geq 0} |x(t)| < \infty \end{aligned} \quad (31)$$

болсын.

$S : L_\infty \rightarrow L_\infty$ әсері

$$S(x)(t) = \begin{cases} 0, & t > 1 \\ x(t-1), & t \geq 1 \end{cases} \quad (32)$$

арқылы анықталатын оператор болсын.

S операторының спектрі $\mathbb{C}$ комплекс жазықтықтың нүктелерінен тұратын

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad (33)$$

бірлік дөңгелекті береді.

$$A = I + aS + bS^2 \quad (34)$$

операторын қарастырайық. Мұндағы a және b тұрақты сандар.

10.28-теорема [4, 274 бет] тұжырымы бойынша A операторының шенелген керісі бар болады егер де

$$1 + az + bz^2 = 0 \quad (35)$$

Квадраттық теңдеудің түбірлері D -бірлік дөңгелектің сыртында жатса. Квадраттық теңдеудің түбірлері D жиынының сыртында жатуы

$$a) \quad a^2 \geq 4b \text{ және } |a| + \sqrt{a^2 + 4b} < 2$$

немесе

$$b) \quad a^2 < 4b \text{ және } b < 1$$

шарттарының біреуі орындалуына пара-пар.

а) немесе б) шарттарының біреуі орындалады деп ұйғарайық. Онда $A: L_\infty \rightarrow L_\infty$ операторының L_∞ кеңістігін L_∞ кеңістігіне бейнелейтін шенелген керісі бар болады. Сондықтан 1 және 2 теоремаларының тұжырымын пайдалануға болады.

$$f \in L_\infty \text{ және } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

$$\text{болсын. Мұндағы } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \quad (36)$$

болған кезде 1-теорема тұжырымынан

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A^{-1} f)(t) = 0 \quad (37)$$

болатындығын аламыз. а) немесе б) шарттарының біреуі орындалған кезде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (AE)(t) = 1 + a + b \neq 0 \quad (38)$$

Сондықтан, егер $f \in L_\infty$ үшін $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$ бар болса, онда 2-теорема тұжырымынан

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A^{-1} f) = x_\infty \quad (39)$$

бар болатындығын аламыз. Сонымен қатар,

$$x_\infty = (1 + a + b)^{-1} f_\infty \quad (40)$$

Айта кететін жәйт бұл жерде $B = aS + bS^2$ операторының $r(B)$ спектрлік радиусы $|a| + |b|$ тең болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. К вопросу о допустимости некоторых пар пространств для линейных операторов и уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения.-1983.-Т19, №4.-С.684-692
2. Пуляев В.Ф. О спектре линейных непрерывных операторов. -гзв. Северо- Кавказ. научн. центра высшей школ. Естеств. науки. -1985. -№4.-С.25-28
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. -М.: Наука, 1984. -752с.
4. Рудин У. Функциональный анализ. -М.:Мир, 1975. -443с.
5. Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его приложения в математике и экономике. -М.: Наука, 1985. -352с.
6. Ломоносов В.И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным, функц.анализ и его прил. -1973, 7, №3, с55-56.