



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»

студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS

of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»



14th April 2017, Astana



**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»**

**PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»**

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58

Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2017

СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Жаңабергенова Назерке Салменқызы¹, Сагидуллаева Жанна Муратбековна²
zhanabergenova.ns@gmail.com, sagidullaeva_zhm@enu.kz

¹магистрант специальности «6М070500 - Математическое и компьютерное моделирование»,
²докторант PhD специальности «6D060400 - Физика»,
 ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Научные руководители – Г.Н. Нугманова, Р. Мырзакулов

Введение

Хорошо известно, что (1+1)-мерное уравнение ферромагнетика Гейзенберга (УФГ) имеет вид [1]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx}, \quad (1)$$

с граничным условием $\mathbf{S}^2 = 1$, где $\mathbf{S}(x, t)$ спиновый вектор, его область значений лежит на поверхности единичной сферы в R^3 , $\times$ векторное произведение, а индексы x, t означают производные соответствующих аргументов.

Уравнение (1) имеет ряд интегрируемых (2+1)-мерных обобщений:

(i) Уравнение Ишимори [2]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times (\mathbf{S}_{xx} + \alpha^2 \mathbf{S}_{yy}) + u_x \mathbf{S}_y + u_y \mathbf{S}_x, \quad (2)$$

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = -2\alpha^2 \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y). \quad (3)$$

Интегрируемость уравнения Ишимори (2)-(3), основанная на обобщенном преобразовании Дарбу показана в работе [3], там же построены точные решения.

(ii) Уравнение Мырзакулова-I [4]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xy} + u \mathbf{S}_x, \quad (4)$$

$$u_x = -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y). \quad (5)$$

Система уравнений (4)-(5), ее различные обобщения и другие связанные с ней задачи были изучены в [5]-[8].

В данной работе рассматривается интегрируемая иерархия уравнения (1) в следующей форме [9]

$$S_t - S_{xxx} - \frac{3}{4} \text{tr}(S_x^2) S_x - \frac{3}{4} [\text{tr}(S_x^2)]_x S = 0, \quad (6)$$

где $S = \sum_{j=1}^3 S_j(x, t) \sigma_j$ матричный аналог спинного вектора, и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

являются матрицами Паули. Компоненты матричной функции S удовлетворяют граничным условиям $S(x, t)|_{x \rightarrow \pm\infty} = (0, 0, 1)$.

Иерархическое уравнение ферромагнетика Гейзенберга (6) интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Его представление Лакса можно записать в виде

$$\Phi_x = -\frac{\lambda}{2} S \Phi, \quad (8)$$

$$\Phi_y = -\frac{\lambda^2}{2} S \Phi + \frac{\lambda}{2} S S_x \Phi, \quad (9)$$

$$\Phi_t = -\frac{\lambda^3}{2} S \Phi + \frac{\lambda^2}{2} S S_x \Phi - \frac{3\lambda}{8} \text{tr}(S_x^2) S \Phi - \frac{\lambda}{2} S_{xx} \Phi. \quad (10)$$

Здесь λ - спектральный параметр, Φ - решение линейной системы.

Калибровочная эквивалентность между уравнением (6) и уравнением Кадомцева-Петвиашвили с тремя связанными компонентами [10]

$$q_t = \frac{1}{4}(q_{xxx} - 6qq_x + 3\int q_{yy} dx + 6(pr)_x), \quad (11)$$

$$p_t = \frac{1}{2}(-p_{xxx} - 6qp_x + 3qp_x + 3p\int q_y dx - 3p_{xy}), \quad (12)$$

$$r_t = \frac{1}{2}(-r_{xxx} + 3qr_x - 3r\int q_y dx + 3r_{xy}), \quad (13)$$

установлена в работе [9]. Система (11)-(13) интегрируема и допускает мульти-солитонные решения [11].

Билинейная форма для иерархии УФГ

В этом разделе построим билинейную форму уравнения (6). Для нашего удобства перепишем уравнение (6) в компонентах

$$S_t^+ - S_{xxx}^+ - \frac{3}{2}(S^+(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0, \quad (14)$$

$$S_t^- - S_{xxx}^- - \frac{3}{2}(S^-(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0, \quad (15)$$

$$S_{3t} - S_{3xxx} - \frac{3}{2}(S_3(S_x^+ S_x^- + S_{3x}^2))_x = 0. \quad (16)$$

Далее рассмотрим стереографическую проекцию матричной функции S в следующем виде:

$$S^+ = \frac{2\omega}{1+|\omega|^2}, \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1+|\omega|^2}, \quad S_3 = \frac{1-|\omega|^2}{1+|\omega|^2}. \quad (17)$$

Отсюда получим

$$\omega = \frac{S^+}{1+S_3}. \quad (18)$$

После подстановки выражения (17) в систему уравнений (14) – (16) получим уравнение (6) в терминах стереографической проекции

$$\omega_t - \omega_{xxx} + \frac{6\omega^* \omega_x \omega_{xx}}{1+|\omega|^2} - \frac{6(\omega^*)^2 \omega_x^3}{(1+|\omega|^2)^2} = 0. \quad (19)$$

Согласно прямому методу Хироты, для получения билинейной формы уравнения (6), введем новые комплексные функции f и g в виде $\omega = \frac{g}{f}$ в уравнении (19), и получим следующую билинейную форму для уравнений (14)-(16):

$$[D_t - D_x^3](f^* \cdot g) = 0, \quad (20)$$

$$[D_t - D_x^3](f^* \cdot f - g^* \cdot g) = 0, \quad (21)$$

$$[D_t - D_x^3](f \cdot g^*) = 0, \quad (22)$$

$$D_x(f^* \cdot f + g^* \cdot g) = 0, \quad (23)$$

$$D_x(f^* \cdot g^*)[D_x(f \cdot g)]^2 = 0, \quad (24)$$

где оператор Хироты представлен в виде

$$D_x^l D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_{x'})^l (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) \cdot g(x', t') \big|_{x=x', t=t'}. \quad (25)$$

Солитонное решение

Используя полученную выше билинейную форму (20)-(24), теперь можем построить солитонное решение для спиновой системы (6). С этой целью, разложим функции g и f в формальные ряды по произвольной постоянной ε :

$$g(x,t) = \varepsilon g_1(x,t) + \varepsilon^3 g_3(x,t) + \dots, \quad (26)$$

$$f(x,t) = 1 + \varepsilon^2 f_2(x,t) + \varepsilon^4 f_4(x,t) + \dots. \quad (27)$$

Для получения односолитонного решения уравнения (6), выберем $g = \varepsilon g_1$ и $f = 1 + \varepsilon^2 f_2$. Подставляя данные выражения в билинейную форму (20) – (24) получим

$$\varepsilon^1 : g_{1t} - g_{1xx} = 0, \quad (28)$$

$$\varepsilon^2 : f_{2x}^* - f_{2x} + g_{1x}^* g_1 - g_{1x} g_1^* = 0, \quad (29)$$

$$\varepsilon^2 : f_{2t}^* - f_{2t} - g_{1t}^* g_1 + g_{1t} g_1^* - f_{2xx}^* + f_{2xx} + g_{2xx}^* g_1 - 3g_{2xx}^* g_{1x} + 3g_{2x}^* g_{1xx} - g_{2x}^* g_{1xxx} = 0, \quad (30)$$

$$\varepsilon^3 : f_{2t}^* g_1 - g_{1t} f_2^* - f_{2xx}^* g_1 + 3f_{2xx}^* g_{1x} - 3f_{2x}^* g_{1xx} + f_2^* g_{1xxx} = 0, \quad (31)$$

$$\varepsilon^3 : g_{1x}^* g_{1x}^2 = 0, \quad (32)$$

$$\varepsilon^4 : f_{2t}^* f_2 - f_2^* f_{2t} - f_{2xx}^* f_2 + 3f_{2xx}^* f_{2x} - 3f_{2x}^* f_{2xx} + f_2^* f_{2xxx} = 0, \quad (33)$$

$$\varepsilon^4 : f_{2t}^* f_2 - f_2^* f_{2t} = 0, \quad (34)$$

$$\varepsilon^5 : g_{1x}^* g_{1x} g_{1x} f_{2x} + g_{1x}^* f_{2x}^* g_{1x}^2 = 0, \quad (35)$$

$$\varepsilon^7 : g_{1x}^* g_{1x}^2 f_{2x}^2 - 2f_2 g_{1x}^* g_{1x} g_{1x} f_{2x} - f_2 f_{2x}^* g_{1x}^2 + 2g_{1x}^* f_{2x} f_{2x}^* g_{1x} = 0, \quad (36)$$

$$\varepsilon^9 : f_{2x}^* f_{2x}^* g_{1x}^2 g_1^2 - 2f_2 f_{2x}^* f_{2x}^* g_{1x}^2 g_1 - g_{1x}^2 f_{2x}^2 f_2^* - f_{2x}^2 f_{2x}^* g_{1x}^2 + 2g_{1x}^* g_{1x} f_{2x}^* f_{2x} f_2 = 0. \quad (37)$$

Наконец, используя формулы (17) для компонентов матрицы S , получим

$$S^+ = \frac{2f^* g}{|f|^2 + |g|^2}, \quad S^- = \frac{2fg^*}{|f|^2 + |g|^2}, \quad S_3 = \frac{|f|^2 - |g|^2}{|f|^2 + |g|^2}. \quad (38)$$

Теперь мы готовы построить односолитонное решение для спиновой системы (6). Выберем g_1 как $g_1 = e^{i\theta}$, с $\theta = kx + lt + m$, где k, l и m - комплексные константы. Выражение для f_2 получим в виде

$$f_2 = \frac{i \operatorname{Re}(k)}{\operatorname{Im}(k)} e^{-2\operatorname{Im}(\theta)}. \quad (39)$$

Таким образом нами получено одно-солитонное решение для спиновой системы (6):

$$S^+ = -\frac{2\operatorname{Im}(k)(i \operatorname{Re}(k)e^{i \operatorname{Re}(\theta) - 3\operatorname{Im}(\theta)} - \operatorname{Im}(k)e^{i(\operatorname{Re}(\theta) + i \operatorname{Im}(\theta))})}{(\operatorname{Im}(k))^2(1 + e^{-2\operatorname{Im}(\theta)}) + (\operatorname{Re}(k))^2 e^{-4\operatorname{Im}(\theta)}}, \quad (40)$$

$$S^- = \frac{2\operatorname{Im}(k)(i \operatorname{Re}(k)e^{-i \operatorname{Re}(\theta) - 3\operatorname{Im}(\theta)} + \operatorname{Im}(k)e^{i(-\operatorname{Re}(\theta) + i \operatorname{Im}(\theta))})}{(\operatorname{Im}(k))^2(1 + e^{-2\operatorname{Im}(\theta)}) + (\operatorname{Re}(k))^2 e^{-4\operatorname{Im}(\theta)}}, \quad (41)$$

$$S_3 = \frac{(\operatorname{Im}(k))^2(1 - e^{-2\operatorname{Im}(\theta)}) + (\operatorname{Re}(k))^2 e^{-4\operatorname{Im}(\theta)}}{(\operatorname{Im}(k))^2(1 + e^{-2\operatorname{Im}(\theta)}) + (\operatorname{Re}(k))^2 e^{-4\operatorname{Im}(\theta)}}. \quad (42)$$

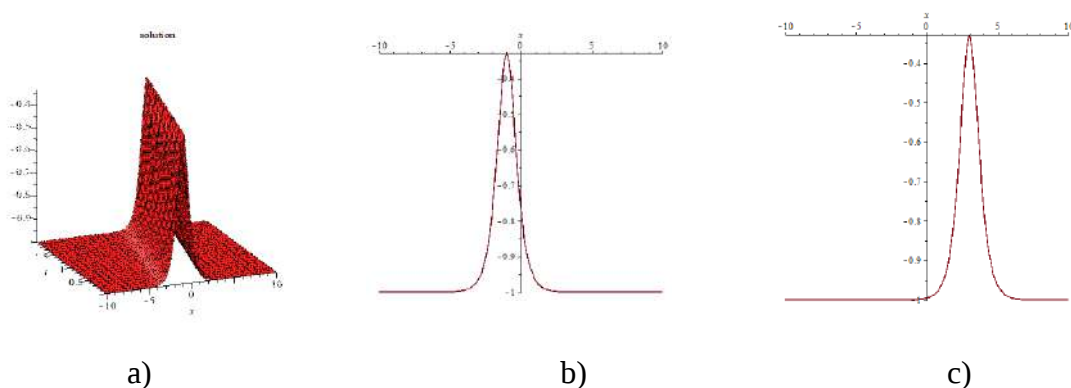


Рисунок 1. Односолитонное решение для S_3 , при произвольных значениях постоянных.

На рисунке 1 представлено односолитонное решение для S_3 при произвольных значениях постоянных: а) Зависимость решения для S_3 от x и t , в интервале времени от 0 до 10; б) Зависимость решения для S_3 от x , при $t=0$; в) Зависимость решения для S_3 от x , при $t=2$. Как видно из графика, движение волны с течением времени не изменяется, что и характеризует структурно устойчивую уединённую волну, т.е. солитон.

Заключение

Это исследование является продолжением работы [9], в которой иерархия для уравнения ферромагнетика Гейзенберга получена в виде (6), где была сформулирована и доказана теорема об эквивалентности этой иерархии и связанного уравнения КП (11)-(13). В настоящей работе построена билинейная форма для иерархии уравнения ферромагнетика Гейзенберга (6) и прямым методом Хироты найдено односолитонное решение этого уравнения. Построены соответствующие графики. Далее рекуррентным образом можно построить двух-, трех-, и n -солитонные решения, которые имеют конкретные приложения в области естественных наук.

Список использованных источников

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова думка, 1983, 189 с.
2. Y. Ishimori Multi-Vortex solutions of the a two-dimensional nonlinear wave equation // Progress of Theoretical Physics. 1984 №72. P.33-37.
3. R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, R. Syzdykova, M. Lakshmanan On the simplest (2+1)-dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrodinger equations // Journal of Mathematical Physics. 1998 №39. P.2122-2139.
4. R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, G.N. Nugmanova, M. Lakshmanan A (2+1) - dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. 1997 №233. P.391-396.
5. R. Myrzakulov, G. Nugmanova, A. Danlybaeva Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. 1999 №118. P.347-358.
6. R. Myrzakulov, G. Nugmanova, R. Syzdykova Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 1998 №31. P.9535-9545.
7. Zh-H. Zhang, M. Deng, W-Zh. Zhao, W. Ke On the integrable inhomogeneous Myrzakulov I equation // arXiv:nlin/0603069v1 [nlin.SI] 2006.
8. Ch. Chen, Zi.-X. Zhou Darboux transformation and exact solutions of the Myrzakulov I equation // Chinese Physics Letters. 2009 №26(8) 080504.
9. G. Nugmanova, A. Azimkhanova Integrable hierarchies of Heisenberg ferromagnet equation // Journal of Physics: Conference Series. 2016 №738 012132.
10. Wazwaz Integrability of two coupled Kadomtsev-Petviashvili equations // Pramana -

- journal of physics. 2011 №77. P.233.
 11. S. Isojima, R. Willox, J. Satsuma On Various Solutions of the Coupled KP Equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002 №35 6893.

УДК 519.95

РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПУНКТАМИ

Заурбек И.С.

Магистрант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
 Научный руководитель А.А. Адамов

Абстракт.

В работе доказывается эквивалентность классической транспортной задачи и транспортной задачи с промежуточными пунктами. Составлена программа реализующий алгоритм нахождения оптимального плана транспортной задачи с промежуточными пунктами.

Введение.

Классическая транспортная задача известна как задача Монжа-Канторовича. Гаспар Монж [1] сформулировал классическую транспортную задачу в 1781 году. Л.В. Канторович [2] развил теорию и положил начало линейному программированию. Предлагаемый в работе алгоритм основан на возможности сведения поиска оптимального плана обобщенной задачи к решению классической транспортной задачи.

Транспортная задача в классическом понимании является задачей о нахождении оптимального плана перевозок однородных продуктов из источников к стокам. Обозначим через m количество источников, а через n – количество стоков. Положим, что объем поставок i -го источника равен $S_i > 0$ для $i = \overline{1, m}$, а объем потребления j -го стока равен $D_j > 0$ для $j = \overline{1, n}$. Пусть стоимость перевозки каждой единицы продукта от i -го источника к j -ому стоку равна c_{ij} . Далее, общий объем поставок всех источников равен общему объему потребления всех стоков. План перевозок обозначим через матрицу $X = \{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$, элементы которой обозначают количество продуктов, перевозимых из i -го источника к j -ому стоку. Тогда математическая модель классической транспортной задачи примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j, j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Положим источники и стоки транспортной задачи за вершины ориентированного графа, причем вершины будут связаны ребром, если определена возможность перевозки из источника к стоку. Тогда, транспортную задачу можно будет представить в виде ориентированного графа (см. рисунок 1).