



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ТҰҢҒЫШ ПРЕЗИДЕНТІ - ЕЛБАСЫНЫҢ ҚОРЫ

«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ – 2017»

студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ – 2017»

PROCEEDINGS

of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2017»



14th April 2017, Astana



**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**«Ғылым және білім - 2017»
студенттер мен жас ғалымдардың
XII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2017»**

**PROCEEDINGS
of the XII International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2017»**

2017 жыл 14 сәуір

Астана

УДК 378

ББК 74.58

Ғ 96

Ғ 96

«Ғылым және білім – 2017» студенттер мен жас ғалымдардың XII Халықаралық ғылыми конференциясы = The XII International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2017» = XII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2017». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2017. – 7466 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-827-6

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 378

ББК 74.58

ISBN 978-9965-31-827-6

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2017

$$\begin{aligned}\frac{dA_2}{dT} &= \Omega_{z_2} - \Omega_{x_2} - \Omega_{x_1} A_3 + \Omega_{x_3} A_1 + A_3 (\Omega_{z_1} - \Omega_{x_1}) \\ \frac{dA_3}{dT} &= \Omega_{z_3} - \Omega_{x_1} - \Omega_{x_1} A_2 + \Omega_{x_2} A_1 + A_1 (\Omega_{z_2} - \Omega_{x_2})\end{aligned}\quad (1.14)$$

Проведем нормализацию уравнений (1.14), считая дополнительно к (1.2) характерные значения величин A_1, A_2, A_3 равными ε , а характерные значения величин $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, \Omega_{x_3}$ равными Ω_* .

Получим

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= \omega_{z_1} - \omega_{x_1} + \varepsilon \left[-\omega_{x_2} \alpha_3 + \omega_{x_3} \alpha_2 + \alpha_2 (\omega_{z_3} - \omega_{x_3}) \right] \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \omega_{z_2} - \omega_{x_2} + \varepsilon \left[\omega_{x_1} \alpha_3 - \omega_{x_3} \alpha_1 + \alpha_3 (\omega_{z_1} - \omega_{x_1}) \right] \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \omega_{z_3} - \omega_{x_3} + \varepsilon \left[-\omega_{x_1} \alpha_2 + \omega_{x_2} \alpha_1 + \alpha_1 (\omega_{z_2} - \omega_{x_2}) \right]\end{aligned}\quad (1.15)$$

Система уравнений (1.6), (1.7), (1.9), (1.15) описывает движение гиростабилизатора вблизи трехгранника $x_1 x_2 x_3$. Эти уравнения отягощены излишними с точки зрения теории навигации подробностями. В навигации рассматриваются «медленные» движения с характерными временами порядка периода Шулера и времени движения объекта по траектории. Уравнениями же (1.6), (1.7), (1.9), (1.15) описывается полный спектр движений гиростабилизатора, включая нутационные движения, высокочастотные вынужденные колебания и т.п. Получим из (1.6), (1.7), (1.9), (1.15) систему уравнений, которой описываются только «медленные» составляющие движения гиростабилизатора.

Список использованных источников

1. Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 224 с.
2. Сыздыкова Д.Д. Екі дәрежелі роторлы дірілді гироскоптың қозғалыс теңдеуі. Сборник материалов XI международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование»-2016», - Астана: <http://enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obazovanie/>, 2016- (қазақша, орысша, ағылшынша)

УДК 519.63

КЕРНЕУДЕГІ СЕРПІМДІЛІК ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТЕНДЕУІН САНДЫҚ ШЕШУ

Серікказыева Әсем Дәуренқызы

asema.1720@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ механика-математика факультетінің математикалық және компьютерлік модельдеу мамандығының 4-курс студенті, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – М. М. Букенов

Берілген жұмыс кернеудегі серпімділік теориясының теңдеуін сандық шешуге арналған.

Кернеудегі серпімділік теориясының үш өлшемді динамикалық есебі үшін ыдырату әдісінің негізінде схема құрастырылды. Ұсынылған схеманың консервативтілігі көрсетілді.

Сызықты серпімділік теориясының динамикалық есебін γ шекарасы бар $Q = \{D \times [0 \leq t \leq t_1]\}$, $D \subset R^3$ цилиндрінде қарастырайық, [1] сәйкес

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + R^* \bar{\sigma} = \bar{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} - R \bar{\sigma} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}, \quad (3)$$

Мұндағы $\bar{\mathcal{G}} = \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3\}^T$ – жылдамдық векторы, $\bar{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$ – кернеу векторы, $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^T$ – деформация векторы, $K = K^T$ – симметриялы, оң анықталған және λ, μ Ламе тұрақтыларынан тәуелді 6×6 өлшемді матрица. R тірек операторы – сызықты матрицалы-дифференциалды оператор:

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T, \quad R^* = -R^T, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Егер көлемдік тығыздық $\rho \equiv 1$ болса, онда (1) тендеу импульстің сақталу заңын өрнектейді. (2) арақатынасы

$$\bar{\varepsilon} = R \bar{u}, \quad (4)$$

орын ауыстыру-деформация арақатынасының салдары болып табылады, мұндағы $\bar{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ – орын ауыстыру векторы. $\bar{u}$ орын ауыстыру векторы мен $\bar{\mathcal{G}}$ жылдамдық векторы $\bar{\mathcal{G}} = \partial \bar{u} / \partial t$ арақатынасы арқылы байланысқан. (3) арақатынасы физикалық сызықты серпімді орта үшін кернеу-деформация күйінің теңдеуін (Гук заңын) анықтайды.

(1) – (4) жүйенің шешімі Q цилиндрінде ізделінеді. Бұған қоса,

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) = \bar{\psi}(x), \quad x \in D,$$

және сәйкесінше

$$\bar{\mathcal{G}}(x, 0) = \bar{\psi}(x), \quad \bar{\varepsilon}(x, 0) = R \bar{\varphi}(x), \quad (5)$$

$\bar{u}(x, t)$ орын ауыстырулар келесі арақатынастан анықталады:

$$\bar{u}(x, t) = \bar{\varphi}(x) + t \bar{\psi}(x) + \int_0^t (t-s) \bar{r}(x, s) ds, \quad \bar{r}(x) = -R^* \bar{\sigma}.$$

Q цилиндрінің бүйір бетінде ізделінетін шешім келесі біртекті шекаралық шарттардың біреуін қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) = 0, \quad x \in \gamma, \quad \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(x, t) n_k = 0, \quad x \in \gamma; \\ \bar{u}(x, t) = 0, \quad x \in \gamma_1, \quad \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(x, t) n_k = 0, \quad x \in \gamma_2, \quad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Берілген (1) – (6) есебі үшін интегралдық сақталу заңы орындалады, себебі,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\|v\|_{H^*}^2 + (\sigma, \varepsilon)_H \right] \quad (7)$$

«Жылдамдық – кернеу» қойылымы үшін торлы есепті қарастырайық.

$\bar{D}$ – куб: $\bar{D} = D \cup \gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_m \leq l_m, m = 1, 2, 3\}$ болсын. $\bar{D}$ -ға әр x_m : $h_m > 0, N_m h_m = l_m$ координатасы бойынша бірқалыпты D_h торын енгізейік. $\tau > 0$ болсын,

онда $\overline{Q}_{\tau,h} = \overline{Q}_h = \{D_h \times [0 \leq t = n\tau \leq t_1]\}$. Үзіліссіз аргументтердің векторларынан $\overline{Q}_h$ торында берілген $v(x, n\tau) = v_h^n, x \in D_h, \quad \varepsilon(x, n\tau) \in \varepsilon_h^n, \quad \sigma(x, n\tau) = \sigma_h^n$ дискретті аргументтердің векторларына көшейік.

«Жылдамдық – кернеудегі» есеп үшін

$$v_i^{n+1} + \frac{1}{3} R_h^*(\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}) = f^n, \quad v_h^0 = \psi_h(x), \quad x \in D_h \quad (8)$$

$$\varepsilon_i^{n+1} - \frac{1}{3} R_h(v_h^n + v_h^{n+1}) = 0, \quad \sigma_h = K_h \varepsilon_h, \quad \varepsilon_h(x, 0) = \varepsilon_h^0 = R_h \varphi_h(x)$$

айырымдылық схемасын қарастырайық. Мұндағы

$$R_h = \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & \nabla_2^- & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & \nabla_1^- & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & \nabla_1^- & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T, \quad R_h^* = - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & \nabla_2^+ & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & \nabla_1^+ & 0 & \nabla_3^+ \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & \nabla_1^+ & \nabla_2^+ \end{pmatrix}^T \quad (9)$$

$$\nabla_i^- = (\cdot)_{\bar{x}_i}, \quad \nabla_i^+ = (\cdot)_{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad g_i^{n+1} = \frac{g^{n+1} - g^n}{\tau}, \quad \varepsilon_i^{n+1} = \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau}.$$

(8)-ден (7) тура сәйкес келетін «жылдамдық-кернеудегі» есеп үшін торлы сақталу заңы

$$J^{n+1} = \|v_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h} = 0 \quad (10)$$

шығады.

Теорема 1. (8) айырымдылық схемасы толығымен консервативті.

Дәлелдеуі. [3, 4] жұмыстардың терминологиясын қолданайық. R тірек операторының аппроксимациясы оған түйіндес R^* операторының нақты аппроксимациясына алып келеді. Бұл торлы деңгейде осы есеп үшін дифференциалдық есептің құрылымы мен (7) энергиясының интегралының құрылымын сақтауға мүмкіндік береді. J қандай да бір кернеудің торлы вектор-функциясының құрама нормасы деп түсіндіруге болады. Онда (10)-нан J нормасында бастапқы мәліметтер бойынша (8) айырымдылық схемасының бірқалыпты орнықтылығы шығады. Осыдан стандартты түрде [4, гл. VI] оң жақ бөлігі бойынша орнықтылық және де салдар ретінде жинақталу теоремасы шығады.

(8) консервативті айырымдылық схемасының сандық іске асырылуы кезінде негізгі мәселелер көп өлшемді операторларды айналдырумен байланысты. Берілген (1) – (7) есебі үшін айналдыруға тек бір өлшемді операторлар ғана келетін (10) сақталу заңы бар консервативті айырымдылық схемасын құрастырайық. Бұл схема [5-7] ыдырату схемасына негізделген.

(9)-дағы R_h тірек торлы операторы аддитивті жіктеледі:

$$R_h = \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = R_{1h} + R_{2h} + R_{3h}, \quad (11)$$

ол өз кезегінде оған түйіндес торлы оператордың аддитивті жіктелуіне алып келеді

$$R_h^* = - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ \end{pmatrix}^T -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^+ \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = R_{1h}^* + R_{2h}^* + R_{3h}^*, \quad (12)$$

$\mathcal{G}^n, \sigma^n \rightarrow \mathcal{G}^{n+1}, \sigma^{n+1} (n \rightarrow n+1)$ ауысуды $n \rightarrow n+1/3 \rightarrow n+2/3 \rightarrow n+1$ тізбектей ауысулардың көмегімен іске асырамыз. Осындай әр ауысуға (11), (12) аддитивті жіктелуден туындайтын «жылдамдық-кернеудегі» бір өлшемді торлы динамикалық есебін сәйкес қоямыз.

Сонымен, берілген $\mathcal{G}^n, \varepsilon^n$ кезінде $n \rightarrow n+1/3$ ауысуды

$$\mathcal{G}_t^{n+1/3} + \frac{1}{3} R_{1h}^* (\sigma^n + \sigma^{n+1/3}) = f^n,$$

$$\varepsilon_t^{n+1/3} - \frac{1}{3} R_{1h} (\mathcal{G}^n + \nu^{n+1/3}) = 0, \quad (13)$$

$$\sigma^{n+1/3} = K_h \varepsilon^{n+1/3}$$

бір өлшемді айырымдылық схемасының көмегімен іске асырамыз. Онда жеңіл түрлендірулерден кейін $\mathcal{G}^{n+1/3}$ үшін

$$\nu^{n+1/3} + \frac{\tau^2}{9} R_{1h}^* K R_{1h} \nu^{n+1/3} = \mathcal{F}^n - \frac{2\tau}{3} R_{1h}^* K \varepsilon^n - \frac{\tau^2}{9} R_{1h}^* K R_{1h} \nu^n + \nu^n$$

аламыз. Бұл теңдеу $\mathcal{G}^{n+1/3}$ қатысты берілген $\mathcal{G}^n$ кезінде x_1 бойынша үш нүктелі қуалау әдісімен шешіледі. (13) екінші теңдеуінен $\varepsilon^{n+1/3}$ үшін

$$\varepsilon^{n+1/3} = \frac{\tau}{3} R_{1h} (\nu^n + \nu^{n+1}) + \varepsilon^n$$

аламыз. $\varepsilon^{n+1/3}$ тапқаннан кейін сәйкесінше (13) үшінші теңдеуінен $\sigma^{n+1/3}$ аламыз. Келесі, берілген $\mathcal{G}^{n+1/3}, \varepsilon^{n+1/3}$ кезінде $\mathcal{G}^{n+2/3}, \varepsilon^{n+2/3}$ x_2 бойынша үш нүктелі қуалау әдісі арқылы және $\sigma^{n+2/3}$

$$\mathcal{G}_t^{n+2/3} + \frac{1}{3} R_{2h}^* (\sigma^{n+1/3} + \sigma^{n+2/3}) = f^{n+1/3},$$

$$\varepsilon_t^{n+2/3} - \frac{1}{3} R_{2h} (\mathcal{G}^{n+1/3} + \nu^{n+2/3}) = 0, \quad (14)$$

$$\sigma^{n+2/3} = K_h \varepsilon^{n+2/3}$$

бірөлшемді айырымдылық схемасының көмегімен табылады.

Және берілген $\mathcal{G}^{n+2/3}, \varepsilon^{n+2/3}$ кезінде x_3 бойынша үш нүктелі қуалау әдісін қолдана отырып,

$$\mathcal{G}_t^{n+1} + \frac{1}{3} R_{3h}^* (\sigma^{n+2/3} + \sigma^{n+1}) = f^{n+2/3},$$

$$\varepsilon_i^{n+1} - \frac{1}{3} R_{3h}(\vartheta^{n+2/3} + \nu^{n+1}) = 0, \quad (15)$$

$$\sigma^{n+1} = K_h \varepsilon^{n+1}$$

бір өлшемді айырымдылық схемасынан $\vartheta^{n+1}, \varepsilon^{n+1}, \sigma^{n+1}$ және т.с.с. табамыз.

Теорема 2. (13), (14), (15) аддитивті айырымдылық схемасы (10) торлы сақталу заңына ие.

Бұл теореманың дәлелдемесі $n \rightarrow n+1/3$, $n+1/3 \rightarrow n+2/3$ және $n+2/3 \rightarrow n+1$ әр ауысуда берілген (1) – (7) дифференциалдық есептің құрылымын сақтап қалумен байланысты. Сондықтан теорема 1 дәлелденгендей (13) үшін

$$\|\nu_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h} = \|\nu_h^n\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^n, \varepsilon_h^n]_{H_h}, \quad (16)$$

(14) үшін

$$\|\nu_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h} = \|\nu_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h}, \quad (17)$$

ал (15) үшін

$$\|\nu_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h} = \|\nu_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h} \quad (18)$$

бар болады. Енді (16), (17), (18)-ден (13), (14), (15) аддитивті айырымдылық схемасы үшін (10) торлы сақталу заңының әділеттілігі шығады

$$J^{n+1} = J^n = \dots = J^0. \quad (19)$$

(19)-дан жинақталу теоремасына алып келетін алдағы стандартты тұжырымдамалар үшін (1) – (7) есептің (13), (14), (15) айырымдылық схемасымен аппроксимациясын жиынтық ретінде қарастыру керек [2, гл. IX, § 3] екенін ескертіп кету ғана қалады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Коновалов Н.А. Динамическая задача теории упругости в постановке “скорости-напряжения” // Дифференц. уравнения, Т. 35, №2, 1999, С. 238-248.
1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656 с.
2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // Журн. вычисл. матем. и мат. физики, Т. 9, №4, 1969, С. 953–958.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975, 350 с.
4. Багриновский К.А., Годунов С.К. Разностные схемы для многомерных задач // Докл. АН СССР, Т. 115, №3, 1957, С. 431-433.
5. Анучина Н.Н., Яненко Н.Н. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем // Докл. АН СССР, Т. 128, №6, 1959, С. 1103-1106.
6. Яненко Н.Н. Об экономических неявных схемах (метод дробных шагов) // Докл. АН СССР, Т. 134, №5, 1960, С. 1034-1036.