



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN



Л. Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л. Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY



Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2015»
атты X Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
X Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS
of the X International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың X Халық. ғыл. конф. = X Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: <http://www.eni.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/>, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2015

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} \cos \pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)t \quad (9)$$

Выражение (9) представляет решение нашей задачи.

Литература

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М. 1980, 686 с.
2. Кузнецов А.В. Методы математической физики. Учеб. пособие Ярославль. 2004, 200 с.
3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М. 1976, 318 с.
4. Г.Е. Шилов „Математический анализ функции одного переменного”, Москва, „Наука”, 1970, 528 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2, 4. М. 1974, 656 с.

ӘОЖ 517

$ly = y^{(n)}$ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЫНЫҢ КОРРЕКТІЛІ ТАРЫЛУЛАРЫ ТУРАЛЫ

Суюнбекова Актоты

a.suyunbekova@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің «6М060100-Математика» мамандығының
магистранты, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – М.М. Байбурын

$C[0,1]$ кеңістігінде келесі шекаралық есепті қарастырайық:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x) \\ \sum_{k=1}^n [\alpha_{ik} y^{(k-1)}(0) + \beta_{ik} y^{(k+1)}(1)] = 0 \end{cases}$$

(1)

Мұндағы α_{ik}, β_{ik} , $i, k = \overline{1, n}$ - сандар, осы сандарға қандай шарт қойғанда, корректілі есептер алынатынын көрсетейік.

Жалпы $ly = y^{(n)}$ дифференциалдық өрнегі үшін М. Өтелбаевтың корректілі кеңеюлер теориясы негізінде [1] Қ. Отаровтың еңбегінде [2] корректілі шекаралық есептер көрсетілген болатын. Біз есепті жалпы жағдайда қарастырып отырмыз. Алдымен бұл есепті 1-ші ретті дифференциалдық жүйе үшін қойылған есепке келтірейік. Ол үшін мынадай функцияларды енгізейік:

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n.$$

Сол кезде І-ші ретті сызықтық дифференциалдық жүйесі үшін келесі шекаралық есепті аламыз:

$$\begin{cases} Y' = AY + F(x) \\ A_0 Y(0) + B_0 Y(1) = 0. \end{cases}$$

(2)

Осы есептегі теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

$$\text{Мұндағы } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - тұрақты матрица, ал } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \in C^1[0,1]_n,$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x) \end{pmatrix} \in C[0,1]_n \text{ - } n \text{ өлшемді вектор - функциялар. Мұндағы } C^1[0,1]_n \text{ - } n \text{ - өлшемді}$$

үзіліссіз дифференциалданатын вектор-функциялар жиыны. Шекаралық шарттағы $A_0 = \|\alpha_{ij}\|$, $B_0 = \|\beta_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, n -ші ретті тұрақты матрицалар. Онда шекаралық шарт келесідей жазылады:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot & \cdot & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdot & \cdot & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdot & \cdot & \beta_{1,n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdot & \cdot & \beta_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \cdot & \cdot & \beta_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(1) \end{pmatrix} = 0.$$

Осы жүйеге сәйкес келесі біртекті есепті қарастырайық:

$$\begin{cases} Y' = AY \\ A_0 Y(0) + B_0 Y(1) = 0. \end{cases}$$

(3)

Бұл біртекті теңдеудің жалпы шешімі матрицалық экспонента арқылы мына түрде жазылады:

$$Y(X) = e^{XA} \cdot C, \text{ мұндағы } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} - \text{кез-келген } n \text{ өлшемді тұрақты вектор.}$$

Ал $Y(0) = E \cdot C = C$, $Y(1) = e^A \cdot C$, осыдан келесіні аламыз:

$$A_0 Y(0) + B_0 Y(1) = A_0 C + B_0 e^A C = (A_0 + B_0 e^A) C = 0.$$

Есеп корректілі болу үшін біртекті жүйенің тек 0-дік шешімі болуы қажет. Ал ол келесі

$$|A_0 + B_0 e^A| \neq 0$$

шарты орындалғанда орындалады. Мұндағы $e^A = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + A^2 + \dots + A^{n-1} + \dots$

ге тең болады, себебі A матрицасының келесі дәрежесін тапқанда, 1-ден тұратын диагональ

$$\text{келесі диагональға көшуі себепті } A^n = 0. \text{ Сондықтан } e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ болады.}$$

Онда

$$A_0 + B_0 e^A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{11} + \beta_{12} & \alpha_{13} + \sum_{k=1}^3 \beta_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} + \sum_{k=1}^n \beta_{1k} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{21} + \beta_{22} & \alpha_{23} + \sum_{k=1}^3 \beta_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} + \sum_{k=1}^n \beta_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1} & \alpha_{n1} + \beta_{n1} + \beta_{n2} & \alpha_{n3} + \sum_{k=1}^3 \beta_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} + \sum_{k=1}^n \beta_{nk} \end{pmatrix}.$$

(4)

болады.

Сонымен осы матрицаның анықтаушы 0-ден өзгеше болуы есептің корректілі болуы үшін қажетті шарт болып табылады. Осы шарттың жеткілікті болатынын көрсетейік. Ол үшін

$$\begin{cases} Y' = AY + F \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

Коши есебін қарастырайық.

$$Y(x) = e^{xA} \int_0^x e^{-tA} F(t) dt$$

осы есептің шешімі болады. Осы Коши есебін тудыратын L_1 -ге кері оператор келесі түрде ізделінеді:

$$L_1^{-1} F(x) = e^{xA} \int_0^x e^{-tA} F(t) dt.$$

Енді корректілі тарылу туралы Өтелбаев теоремасы [1] бойынша максималды L операторының барлық корректілі тарылулары L_k былай табылады:

$$(5) \quad Y(x) = L_1^{-1}F(x) + KF(x) - L_1^{-1}(L(K)F)(x),$$

Мұндағы $K : C[0,1] \rightarrow D(L)$, $(D(L) = C^1[0,1]_n)$ үзіліссіз оператор. Егер K операторын

$$KF(x) = \Phi(x)e^A \int_0^1 e^{-tA} F(t) dt \quad \text{түрінде іздесек, мұндағы } \Phi - \text{элементтері үзіліссіз}$$

дифференциалданатын n -ретті квадраттық матрица, онда $Ly = Y' - AY$ операторының барлық тарылулары (5) теңдігінен былай табылады:

$$\begin{cases} Y' = AY + F(x) \\ Y(0) = KF(0). \end{cases}$$

Бұдан,

$$\begin{aligned} Y(0) = KF(0) &= De^A \int_0^1 e^{-tA} F(t) dt = De^A \int_0^1 e^{-tA} (Y'(t) - AY(t)) dt = De^A \left[\int_0^1 e^{-tA} d(Y) - \int_0^1 e^{-tA} AY(t) dt \right] = \\ &= De^A \left[e^{-tA} Y(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 Ae^{-tA} Y(t) dt - \int_0^1 Ae^{-tA} Y(t) dt \right] = De^A (e^{-A} Y(1) - Y(0) = D(Y(1) - e^A Y(0))) \end{aligned}$$

Демек, келесі тұжырым дәлелденді.

1-теорема.

$$\begin{cases} Y' = AY + F(x) \\ Y(0) = D(Y(1) - e^A Y(0)), \end{cases}$$

мұндағы D - кез-келген тұрақты n -ретті матрица, корректілі шекаралық есепті анықтайды.

Осы теореманы пайдалансақ,

$$\begin{aligned} A_0 Y(0) + B_0 Y(1) &= (A_0 + B_0 e^A) Y(0) + B_0 Y(1) - B_0 e^A Y(0) = (A_0 + B_0 e^A) Y(0) + B_0 (Y(1) - e^A Y(0)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (A_0 + B_0 e^A) Y(0) &= -B_0 (Y(1) - e^A Y(0)) \Rightarrow Y(0) = -(A_0 + B_0 e^A)^{-1} B_0 (Y(1) - e^A Y(0)) = \\ &= D(Y(1) - e^A Y(0)), \text{ мұндағы } D = -(A_0 + B_0 e^A)^{-1} \cdot B_0 \text{ және шарт бойынша } |A_0 + B_0 e^A| \neq 0. \end{aligned}$$

$$\textbf{2-теорема.} \quad \begin{cases} Y' = AY + F(x) \\ A_0 Y(0) + B_0 Y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{теңдеуі } C[0,1]_n \text{ кеңістігінде корректілі шекаралық}$$

есепті анықтауы үшін $|A_0 + B_0 e^A| \neq 0$ болуы қажетті және жеткілікті.

Салдар. (1) шекаралық есеп корректілі есеп анықтауышы үшін (4)-ші матрицаның анықтауышы 0-ден өзгеше болуы қажетті және жеткілікті.

Осындай жолмен мына тұжырымды дәлелдеуге болады:

$$\textbf{3-теорема.} \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x) \\ \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n [\alpha_{ik}^{(j)} y^{(k-1)}(x_j)] = 0, \end{cases}$$

мұндағы $i = \overline{1, n}$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s \leq 1$, көпнүктелі есебі берілсін. Бұл есеп корректілі болуы үшін

$$B = \sum_{j=1}^s \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(j)} & \alpha_{11}^{(j)} \frac{x_j}{1!} + \alpha_{12}^{(j)} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}^{(j)} \frac{x_j^{n-k}}{(n-k)!} \\ \alpha_{21}^{(j)} & \alpha_{21}^{(j)} \frac{x_j}{1!} + \alpha_{22}^{(j)} & & & & \sum_{k=1}^n \alpha_{2k}^{(j)} \frac{x_j^{n-k}}{(n-k)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}^{(j)} & \alpha_{n1}^{(j)} \frac{x_j}{1!} + \alpha_{n2}^{(j)} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{nk}^{(j)} \frac{x_j^{n-k}}{(n-k)!} \end{pmatrix}$$

матрицасының анықтаушы 0-ден өзгеше болуы қажетті және жеткілікті.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории расширения и сужения операторов. – Ч.1. //Известия АН КазССР. Серия физико-математическая, 1982.-№5., Ч.2. //Известия АН КазССР. Серия физико-математическая, 1983.-№1.
2. Отаров Х. Т. Спектральные свойства корректно и везде разрешимых расширений и сужений обыкновенных дифференциальных операторов // Автореферат диссертации к.ф.-м.н. – Алма-Ата, 1983, - 16с

УДК 512.55

ДУАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА РАЗМЕРНОСТЕЙ 1 И 2 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Таджекеева Акмарал

maral_enu@mail.ru

Магистрант 2-го курса специальности «6М010900–Математика»

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – А.С. Науразбекова

Линейное пространство A над полем k , снабженное билинейной операцией $x \cdot y$, называется *дуальной алгеброй Лейбница* [1], если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(xy)z = x(yz) + x(zy). \quad (1)$$

Алгебра A называется *нильпотентной*, если существует целое N такое, что левонормированное умножение любых N элементов алгебры A равно нулю, т.е.

$$a_1 \cdot (a_2 \cdot (\dots (a_{N-1} \cdot a_N) \dots)) = 0.$$

Минимальное N с таким свойством называется *индексом nilпотентности*. Используя тождество (1) не сложно заметить, что, если A nilпотентная дуальная алгебра Лейбница с индексом nilпотентности N , то произведение любых N элементов с произвольной расстановкой скобок равно нулю.

А.С. Джумадильдаев и К.М. Туленбаев [2] доказали что, каждая конечномерная дуальная алгебра Лейбница над комплексным полем является nilпотентной, они также классифицировали дуальные алгебры Лейбница размерностей ≤ 3 над алгебраически замкнутым полем. В данной работе мы изучили дуальные алгебры Лейбница размерностей 1 и 2 над полем характеристики 0 и показали, что они являются nilпотентными.

Теорема 1. Пусть A – произвольная дуальная алгебра Лейбница размерности 1 над полем k характеристики 0 и e_1 - его базис. Тогда $e_1 \cdot e_1 = 0$.

Доказательство. Пусть

$$e_1 \cdot e_1 = \alpha e_1, \text{ где } \alpha \in k. \quad (2)$$

По тождеству (1) имеем

$$(e_1 \cdot e_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot e_1) = 2e_1 \cdot (e_1 \cdot e_1).$$