Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 139, №2, P.6-11
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Д.Х. Козыбаев, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Сатпаева, 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан
(E-mail: kozybayev@gmail.com, altyngul.82@mail.ru)

Коалгебры Новикова [1]

Аннотация: В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коалгебра является левосимметричной коалгеброй. Описан метод построения коалгебр. Построен пример левосимметричной коалгебры. Приведены необходимые и достаточные условия, при которых левосимметричная коалгебра является коалгеброй Новикова. Построен пример не локально конечной коалгебры Новикова.

Ключевые слова: коалгебра, алгебра Новикова, левосимметричная коалгебра, многообразие.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/2.1

2000 Mathematics Subject Classification: 16T15.

1. Введение

Коалгебры рассматривались математиками долгое время как часть структурной теории алгебр Хопфа [7]. В настоящее время коалгебры стали активно изучаться в связи с исследованиеми квантовых групп. В. Дринфельд [2] вел понятие биалгебры Ли, в которой коумножение определяет структуру коалгебры Ли. Понятие йордановых, альтернативных коалгебр определено в [1].

Одним из основных вопросов в теории коалгебр является вопрос о локальной конечности данного многообразия коалгебр. В [7] доказана локальная конечность ассоциативных коалгебр. Аналогичный результат для йордановых и альтернативных коалгебр установлен в [1]. В. Михаэлисом [3] построен пример не локально конечной коалгебры Ли. В [4] и [5] приведены примеры не локально конечной дифференциальной коалгебры, коалгебры Новикова, коалгебры Ли, йордановой супералгебры и правоальтернативной коалгебры.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коалгебра является левосимметричной коалгеброй или коалгеброй Новикова. Построен пример не локально конечной коалгебры Новикова.

2. Критерий левосимметричной алгебры

Пусть F – произвольное поле. Для элементов x, y, z произвольной алгебры над полем F воспользуемся следующим стандартным обозначением

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

[1] Работа выполнена в рамках проекта AP08052290 МОН РК.

Определение 1. Алгебра A называется левосимметричной, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(x, y, z) = (y, x, z). \tag{1}$$

Определение 2. Левосимметричная алгебра A называется алгеброй Новикова, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(xy)z = (xz)y. \tag{2}$$

Определение 3. Векторное пространство A над полем F в котором задано линейное отображение $\Delta : A \to A \otimes A$ называется коалгеброй. Отображение Δ называется его коумножением. Будем называть пару (A, Δ) коалгеброй, чтобы подчеркнуть рассматриваемое коумножение.

Для любого $a \in A$, используя обозначение Свидлера (см. [7]), запишем

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Пусть $A^* = \{f : A \to F\}$ – двойственное к A пространтсво функционалов. Тогда определим спаривание

$$\langle A^*, A\rangle \to F,$$

пологая $\langle f, a\rangle = f(a)$, где $f \in A^*, a \in A$.

Определим операцию умножения на пространтсве A^* следующим образом

$$\langle f \cdot g, a\rangle = \langle f \otimes g, \Delta(a)\rangle = \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \cdot g(a_{(2)}),$$

где $f, g \in A^*, a \in A$. Легко проверить, что A^* является алгеброй относительно этого умножения.

Определение 4. Алгебра A^* называется двойственной алгеброй к алгебре A.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие алгебр над полем F. Коалгебра (A, Δ) называется $\mathfrak{M}$-коалгеброй, если алгебра A^* принадлежит $\mathfrak{M}$ [3].

Пусть V, W – векторные пространства. Определим линейное отображение $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$, пологая

$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v, v \in V, w \in W.$$

Теорема 1. *Коалгебра (A, Δ) является левосимметричной тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть (A, Δ) левосимметричная коалгебра. Пусть $f, g, h \in A^*$ и $a \in A$. Тогда

$$\langle (fg)h - f(gh) - (gf)h + g(fh), a\rangle = \sum_{(a)} \left\langle fg, a_{(1)}\right\rangle h(a_{(2)}) - \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \left\langle gh, a_{(2)}\right\rangle$$

$$- \sum_{(a)} \left\langle gf, a_{(1)}\right\rangle h(a_{(2)}) + \sum_{(a)} g(a_{(1)}) \left\langle fh, a_{(2)}\right\rangle = \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} f(a_{(11)}) g(a_{(12)}) h(a_{(2)})$$

$$- \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} f(a_{(1)}) g(a_{(21)}) h(a_{(22)}) - \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} g(a_{(11)}) f(a_{12}) h(a_{(2)})$$

$$+ \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} g(a_{(1)}) f(a_{(21)}) h(a_{(22)})$$

$$= \left\langle f \otimes g \otimes h, \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} a_{(11)} \otimes a_{(12)} \otimes a_{(2)} - \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} a_{(1)} \otimes a_{(21)} \otimes a_{(22)} \right\rangle$$

$$-\left\langle g\otimes f\otimes h, \sum_{(a)}\sum_{(a_{(1)})} a_{(11)}\otimes a_{(12)}\otimes a_{(2)} - \sum_{(a)}\sum_{(a_{(2)})} a_{(1)}\otimes a_{(21)}\otimes a_{(22)}\right\rangle$$

$$= \langle (1-\tau\otimes 1)(f\otimes g\otimes h), (\Delta\otimes 1 - 1\otimes\Delta)\Delta(a)\rangle$$

$$= \langle f\otimes g\otimes h, (1-\tau\otimes 1)(\Delta\otimes 1 - 1\otimes\Delta)\Delta(a)\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle (fg)h - f(gh) - (gf)h + g(fh), a\rangle = \langle f\otimes g\otimes h, (1-\tau\otimes 1)(\Delta\otimes 1 - 1\otimes\Delta)\Delta(a)\rangle = 0. \quad (4)$$

Из этого вытекает, что тожество (1) в алгебре A^* эквивалентно тождеству (3) в алгебре A. Теорема доказана.

3. Критерий коалгебры Новикова

Следующая лемма устанавливает взаимно-однозначное соответствие между конечномерными алгебрами и коалгебрами.

Лемма 1. *Для любой конечномерной алгебры A найдется коалгебра B такая, что $B^* \cong A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис алгебры A с таблицей умножения

$$e_i e_j = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^k e_k,$$

где $\gamma_{ij}^k \in F$ – структурные коэффициенты.

Рассмотрим пространство B с базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Определим на пространстве B структуру коалгебры, полагая

$$\Delta(f_k) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^k f_i \otimes f_j.$$

Через $f_j^* \in B^*$ обозначим фунционал, определенный правилом

$$f_j^*(f_k) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Функционалы $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*$ образуют базис алгебры B^*. Имеем

$$\langle f_i^* \cdot f_j^*, f_k\rangle = \langle f_i^* \otimes f_j^*, \Delta(f_k)\rangle = \sum_{s,t} \gamma_{st}^k f_i^*(f_s) f_j^*(f_t) = \gamma_{ij}^k,$$

т.е.

$$f_i^* f_j^* = \sum_k \gamma_{ij}^k f_k^*.$$

Следовательно, линейное отображение $\phi : B^* \to A$, определенное правилом $\phi(f_i^*) = e_i, 1 \le i \le n$, является изоморфизмом алгебр. Лемма доказана.

Теперь приведем пример левосимметричной алгебры и коалгебры

Пример 1

Левосимметичная алгеба	Левосимметичная коалгеба
$e_1e_1 = e_1$, $e_1e_2 = e_1$, $e_2e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_1$	$\Delta(e_1) = e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1 + e_2\otimes e_2$, $\Delta(e_2) = 0$

В работе [5] найдены необходимое и достаточное условия, при которых левосимметричная коалгебра (A, Δ) является коалгеброй Новикова.

Теорема 2. *[5] Для того чтобы левосимметричная коалгебра (A, Δ) была коалгеброй Новикова необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее равентсво*

$$(1 - 1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta = 0. \quad (5)$$

Пример 2 Проверим этот критерий для левосимметричной коалгебры из примера 1. Имеем

$$(1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta(e_1) = (1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)(e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)$$

$$= (1-1\otimes\tau)\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i\otimes e_j\otimes e_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i\otimes e_j\otimes e_k - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i\otimes e_k\otimes e_j = 0,$$

$$(1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta(e_2) = 0.$$

Как мы видим тождество (5) выполняется. Следовательно, левосимметричная коалгебра из примера 1 является коалгеброй Новикова.

Пример 3 Пусть $\Delta(e_1) = e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_1$, $\Delta(e_2) = e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_2$. Тогда непосредственные вычисления дают

$$(1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta(e_1) = (1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_1)$$

$$= (1-1\otimes\tau)(e_1\otimes e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1\otimes e_2)$$

$$= e_1\otimes e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1\otimes e_2 - e_1\otimes e_2\otimes e_1 - e_2\otimes e_2\otimes e_1 \neq 0.$$

Согласно теореме 2, эта алгебра не является коалгеброй Новикова.

4. Не локально конечные коалгебры

Пусть (A_1,Δ_1) и (A_2,Δ_2) – коалгебры. Морфизмом коалгебр (A_1,Δ_1) и (A_2,Δ_2) называется линейное отображение

$$f : A_1 \to A_2$$

такое, что

$$\Delta_2 f = (f\otimes f)\Delta_1.$$

Определение 6. Коалгебра (K,Δ_k) называется подкоалгеброй коалгебры (A,Δ), если K – векторное подпространство A и включение

$$i_N : K \subset A$$

является морфизмом коалгебр. Другими словами, K является подкоалгеброй тогда и только тогда, когда $\Delta(K)\subseteq K\otimes K$.

Определение 7. Коалгебра называется локально конечной, если каждый ее элемент лежит в конечномерной подкоалгебре. Это означает, что всякая конечно-порожденная подкоалгебра конечномерна.

Лемма 2. *Если K – подпространство, $x\in K$ и $x\otimes y\in K\otimes K$, тогда $y\in K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ – базис подкоалгебры K. Тогда базис пространтсва $K\otimes K$ имеет вид

$$x\otimes x_k, x_k\otimes x, x_i\otimes x_j, i,j,k\geq 1.$$

Следовательно,

$$K\otimes K = x\otimes K \oplus x_1\otimes K\oplus\ldots\oplus x_k\otimes K\oplus\ldots$$

Так как $x\otimes y\in K\otimes K$, имеем $x\otimes y\in x\otimes K$, т.е.

$$x\otimes y = \lambda x\otimes x + \sum_i \lambda_i x\otimes x_i.$$

Следовательно,

$$x \otimes (y - \lambda x - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_k x_k - \ldots) = 0.$$

Откуда получаем, что

$$y = \lambda x + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \ldots \in K.$$

Лемма доказана.

В работе [5] доказано, что многообразие коалгебр Новикова не является локально конечным. Следовательно, многообразие левосимметричных алгебр также не локально конечно.

Приведем еще один пример не локально конечной алгебры Новикова.

Пример 4 Пусть A – векторное пространство с базисом $e, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Определим коалгебру (A, Δ), пологая

$$\Delta(e) = 0,$$

$$\Delta(f_{3n-2}) = e \otimes f_{3n+1},$$

$$\Delta(f_{3n-1}) = e \otimes f_{3n},$$

$$\Delta(f_{3n}) = e \otimes f_{3n+2}.$$

Сначала проверим тождество (3):

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(e) = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n-2}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n+1})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+4}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+4} + e \otimes e \otimes f_{3n+4} = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n-1}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+2}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+2} + e \otimes e \otimes f_{3n+2} = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n+2})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+3}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+3} + e \otimes e \otimes f_{3n+3} = 0.$$

Следовательно, по Теореме 1 данная коалгебра является левосимметричной. Теперь проверим тождество (5):

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(e) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n-2}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n+1}) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n-1}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n}) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n+2}) = 0.$$

Согласно теореме 2 данная коалгебра является коалгеброй Новикова.

Рассмотрим подкоалгебру K, порожденную элементами e, f_2. Имеем

$$\Delta(f_2) = e \otimes f_3 \in K \otimes K,$$

т.е. $f_3 \in K$ в силу Леммы 2. Далее имеем

$$\Delta(f_3) = e \otimes f_5 \in K \otimes K.$$

Тогда по Лемме 2 $f_5 \in K$. Продолжая этот процесс, получим, что $f_3, f_4, \ldots, f_n, \ldots \in K$. Подкоалгебра K бесконечномерна. Следовательно, данная коалгебра Новикова не является локально конечной.

Список литературы

1 Anquella J., Cortes T., Montaner F. Nonassociative Coalgebras// Comm. in Algebra. -1994. -Vol. 22. N 12, -P. 4693 – 4716.
2 Drinfeld V.G. Quantum Groups// Proc. Int. Congress Math., Berkeley. -1986.
3 Michaelis W. Lie Coalgebras// Adv. Math. -1980. -Vol. 38. -P. 1–54.
4 Козыбаев Д. Х. Правоальтернативные и правосимметричные коалгебры// Наука и Образование Южного Казахстана. -2000. -Vol. 19. N 12. -P. 155-163.
5 Kozybaev, D., Umirbaev, U., Zhelyabin, V. Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras//Linear Algebra and Its Applications, -2022, -Vol. 643. -P. 235-257.
6 Slinko A. Local finites of coalgebraic Lie Coalgebras// Comm. in Algebra. -1995. -Vol. 23. N 3. -P. 1165–1170.
7 Sweedler M. Hopf algebras// W.A. Benjamin Inc. New York, -1969.

Д.Х. Козыбаев, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаева, 2, Нұр-Сұлтан, 010008, Қазақстан

Новиков коалгебралары

Аннотация: Осы жұмыста коалгебра сол-симметриялы коалгебра болатын қажетті және жеткілікті шарттар табылды. Коалгебраларды құру әдісі сипатталды. Сол-симметриялы коалгебрасының мысалы құрастырылды. Сол-симметриялы коалгебра Новиков коалгебра болатын қажетті және жеткілікті шарттар берілді. Локальді ақырлы емес Новиков коалгебрасының мысалы құрастырылды.

Түйін сөздер: коалгебрла, Новиков коалгебрасы, сол-симметриялы коалгебра, көпбейнелілік.

D.Kh. Kozybaev, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan

The Novikov coalgebras

Abstract: In the present paper, necessary and sufficient conditions are found under which a coalgebra is a left-symmetric coalgebra. A method for constructing coalgebras is described. An example of a left-symmetric coalgebra is constructed. Necessary and sufficient conditions are given under which a left-symmetric coalgebra is a Novikov coalgebra. An example of a non-locally finite Novikov coalgebra is constructed.

Keywords: coalgebra, Novikov coalgebra, left-symmetric coalgebra, variety.

References

1 Anquella J., Cortes T., Montaner F. Nonassociative Coalgebras, Comm. in Algebra. 1994. Vol. 22. N 12. P. 4693 – 4716.
2 Drinfeld V.G. Quantum Groups, Proc. Int. Congress Math., Berkeley. 1986.
3 Michaelis W. Lie Coalgebras, Adv. Math. 1980. Vol. 38. P. 1–54.
4 Козыбаев Д. Х. Правоальтернативные и правосимметричные коалгебры, Наука и Образование Южного Казахстана. 2000. Vol. 19. N 12. P. 155-163.
5 Kozybaev, D., Umirbaev, U., Zhelyabin, V. Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras, Linear Algebra and Its Applications, 2022. Vol. 643. P. 235-257.
6 Slinko A. Local finites of coalgebraic Lie Coalgebras, Comm. in Algebra. 1995. Vol. 23. N 3. P. 1165–1170.
7 Sweedler M. Hopf algebras, W.A. Benjamin Inc. New York, 1969.

Сведения об авторах:

Козыбаев Д.Х. – декан механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан.

Науразбекова А.С. – ***автор для корреспонденции,*** PhD, доцент кафедры алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан.

Kozybaev D.Kh. – Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – ***Corresponding author,*** PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 17.05.2022