

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



Студенттер мен жас ғалымдардың  
**«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016»** атты  
XI Халықаралық ғылыми конференциясының  
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI Международной научной конференции  
студентов и молодых ученых  
**«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»**

PROCEEDINGS  
of the XI International Scientific Conference  
for students and young scholars  
**«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір  
Астана

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың  
«Ғылым және білім - 2016»  
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының  
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI Международной научной конференции  
студентов и молодых ученых  
«Наука и образование - 2016»**

**PROCEEDINGS  
of the XI International Scientific Conference  
for students and young scholars  
«Science and education - 2016»**

**2016 жыл 14 сәуір**

**Астана**

**ӘӨЖ 001:37(063)**

**КБЖ 72:74**

**F 96**

**F96** «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың XI Халық. ғыл. конф. = XI Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: <http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2016. – .... б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

**ISBN 978-9965-31-764-4**

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

**ӘӨЖ 001:37(063)**

**КБЖ 72:74**

**ISBN 978-9965-31-764-4**

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия  
ұлттық университеті, 2016

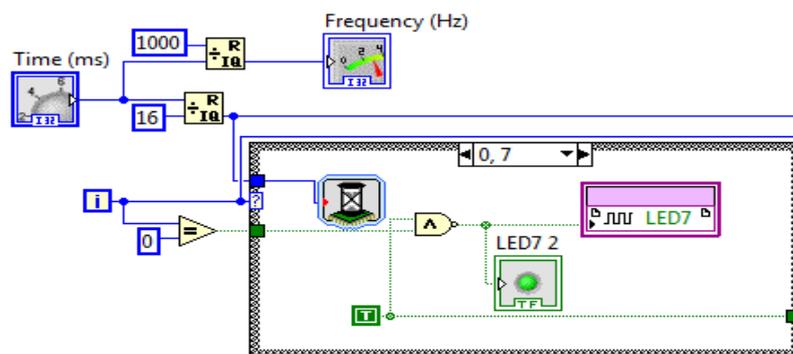


Рисунок 6. Готовая ВП

### Список использованных источников

1. Зотов Валерий. Инструментальный комплект Spartan-3E Starter Kit // Компоненты и технологии. 2005. №51.
2. Инструкция по эксплуатации устройства - Spartan-3E FPGA Starter Kit Board User Guide, Xilinx UG230, 2011.
3. Инструкция по эксплуатации устройства - National Instruments LabVIEW FPGA Training for the Spartan-3E XUP or NI R-Series Hardware, 2012.
4. Лекционный курс - Dr. Vlassis Petousis, Programming FPGAs using LabVIEW, Ruder Bošković Institut, 2011.

УДК 537.876.4

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА ЛЕНТЕ МЕТОДОМ ВИННЕР-ХОПФА

**Бегимова Әсел Жәнісбекқызы**

Магистрантка кафедры Радиотехника, электроника и телекоммуникации  
 ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан  
 Научный руководитель – Саутбеков С.С.

Аннотация. В данной статье решена задача дифракции на ленте с помощью метода факторизации. И приведены основные численные результаты.

### Введение

Задачи дифракции на ленточных решетках занимают особое место в теории дифракции вообще и в теории дифракции на периодических структурах в частности, поскольку, во-первых, позволяют получить полностью обоснованное строгое решение, а, во-вторых, выявить те общие закономерности, которые имеют место при взаимодействии электромагнитной волны с одномерно периодическими решетками. Также исследование ленточных решеток представляет несомненный интерес для современной радиофизики в силу того, что такие решетки используются при создании антенных, селективных устройств, метаматериалов и др. [1-4].

Актуальность. Данная задача является ключевой для микрополосковых линий передач. Трудность расчета этой задачи обусловлена двумя условиями, условием Мейкснера когда значение поля стремится к бесконечности на острие ленты, и вторым условием, когда ширина структуры и длина волны соизмеримы и асимптотические решения не могут показать достаточную точность. Поэтому моделирование данной задачи затрудняется и требуются строгие аналитические методы расчета. К таким методам относятся метод Римана

Гильберта и метод Виннер-Хопфа. До сегодняшнего дня асимптотическое решение данной задачи было получено в работах Вайнштейна, Миллара, Вестфаля, Люнебурга, Кибуртца и Штоккеля. Также эта задача была решена методом Римана Гильберта в работах Шестопалова С.В. Но данную ключевую задачу с высокой точностью и гораздо легче решить используя метод Виннер-Хопфа.

Цель: Оптимальное вычисление задачи о дифракции на ленте методом Виннер-Хопфа и оценка полученного аналитического решения с заданной точностью.

### Основная часть

#### Постановка задачи

Пусть на идеально проводящую ленту  $|z| \leq a$ ,  $y=0$ ,  $-\infty < x < \infty$  падает плоская Н-волна:

$$\begin{aligned} E_x^o &= (k\sqrt{\mu/\varepsilon}/4\pi)A_o \exp\{ik(y \sin \vartheta_0 + z \cos \vartheta_0)\}, & E_y^o &= E_z^o = 0, \\ H_y^o &= E_x^o \sqrt{\varepsilon/\mu} \cos \vartheta_0, & H_z^o &= -E_x^o \sqrt{\varepsilon/\mu} \sin \vartheta_0, & H_x^o &= 0, A_o - \text{const} \end{aligned} \quad (1)$$

Гармонический множитель от времени  $\exp(-i\omega t)$  всюду опускаем.

Электромагнитное поле соответствует следующим уравнениям:

$$E_x = ikcA_x, \quad H_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} A_x, \quad H_z = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} A_x \quad (2)$$

Направление распространения падающей волны составляет с осью  $x$  прямой угол, а с осью  $z$  - угол  $\vartheta_0$  (рис.1.).

Для магнитной волны, отлична от нуля единственная составляющая векторного потенциала  $A$ :

$$A_x(y, z) = -\mu\psi(y, z) * J_x(z), \quad \psi(y, z) = -i/4H_0^{(1)}(k\sqrt{y^2 + z^2}), \quad (3)$$

где  $H_0^{(1)}(x)$  - функция Ханкеля первого рода. С помощью векторного потенциала  $A_x$  дифрагированные поля определяются формулами в (1.35). При этом важно чтобы удовлетворялось граничное условие:

$$E_z = 0 \text{ при } |z| \leq a, (y=0, -\infty < x < \infty).$$

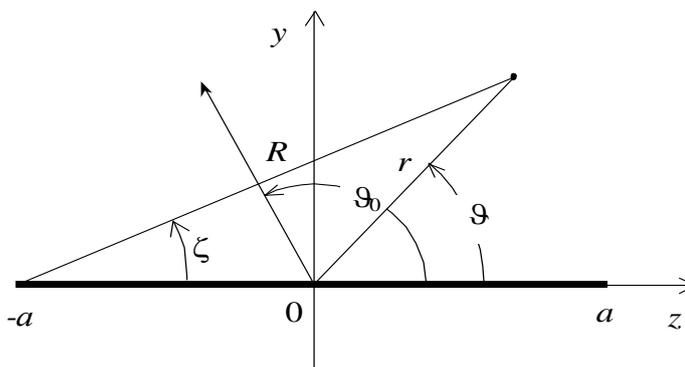


Рисунок 1.

Дифракционная задача сводится к нахождению поверхностной плотности наведенных токов на плоских проводящих поверхностях. Отметим, решение должно удовлетворять и условию на ребре (условие Мейкснера). В связи с этим возникает проблема построения искомой функции в пространстве оригинала и выполнения граничных условий на острие. Однако проблему можно разрешить с помощью метода ВХФ, если построить искомую функцию в пространстве изображения, используя свойства разрывных сингулярных интегралов.

Переобозначив проекцию волнового вектора  $k$  на ось  $z$  далее как  $w = k_z$ , запишем его в интегральном виде

$$A_x(y, z) = \frac{i\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp\{i(wz + v|y|)\} F(w) dw, \quad (5)$$

где  $v = \sqrt{k^2 - w^2}$ , следовательно, и граничное условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iwz) \frac{1}{v} F(w) dw + A_0 \exp(ihz) = 0, \quad -a \leq z \leq a, \quad (6)$$

где  $h = k \cos \theta_0$ , ( $h$  фиксируем в нижней полуплоскости (НП)). Чтобы векторный потенциал (5) удовлетворял уравнению Гельмгольца вне ленты, необходимо выполнение следующего условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iwz) F(w) dw = 0, \quad z < -a, \quad z > a \quad (7)$$

Его физический смысл заключается в том, что наведенные токи вне ленты отсутствуют.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти искомую функцию  $F(w)$ , удовлетворяющую парным интегральным уравнениям (6) и (7)[5].

### Решение задачи

В работе [5] было получено следующее общее решение задачи о дифракции на ленте:

$$F(w) = F_1(w) + F_2(w) \quad (8)$$

Где

$$F_2(w) = \sqrt{k-w} (A_2(w) + B^+(w)) \exp(iwa), \quad (9)$$

$$F_1(w) = \sqrt{k+w} (A_1(w) + B^-(w)) \exp(-iwa). \quad (10)$$

В этих функциях искомые  $B^+(w)$  и  $B^-(w)$  находятся посредством эталонного интеграла

$$I(w) = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(2ka) - \sqrt{\frac{k-w}{k+w}} \exp(i2aw) \Gamma(ka, w/k) \quad (11)$$

где:

$$\Gamma(ka, w/k) = \sin \beta \int_{\infty}^{ka} H_0^{(1)}(2t) \exp(-2it \cos \beta) dt \quad (12)$$

Используя тождество в работе [6] мы привели данную специальную функцию к виду:

$$\Gamma(ka, w/k) = -1 + \frac{\beta}{\pi} + \sin \beta \int_0^{ka} H_0^{(1)}(2t) \exp(-2it \cos \beta) dt \quad (13)$$

Для нахождения поля отраженного от ленточной структуры мы использовали специальную функцию  $X(ka, \phi)$  введенную в работе [7] и интегрируемого по контуру  $S$  (Рис. 2):

$$X(R, \omega) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty \sin(\omega/2)}^{2\sqrt{kR} \sin(\omega/2)} \exp(it^2/2) dt = \frac{1}{4\pi i} \int_S \exp\{ikR(\cos \alpha - \cos \omega)\} \frac{d\alpha}{\sin((\alpha + \omega)/2)}$$

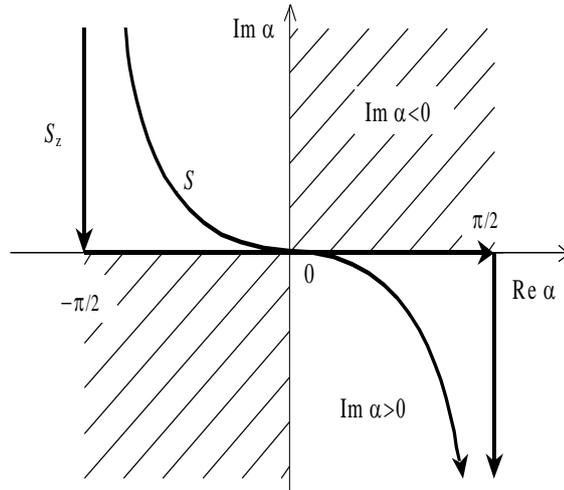


Рисунок 2.

Так как нижний предел интеграла стремится к бесконечности а для численного расчета это не допустимо, мы записываем данный интеграл в виде суммы двух интегралов.используя свойства интеграла Френеля [8]

$$\begin{aligned}
 X(R, \omega) &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 \exp(it^2/2) dt + \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\sqrt{kR} \sin(\omega/2)} \exp(it^2/2) dt = \\
 &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\sqrt{kR} \sin(\omega/2)} \exp(it^2/2) dt - \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Далее используя специальную функцию  $X(ka, \phi)$  и подставляя значения  $A_1(w), A_2(w), B^+(w)$  и  $B^-(w)$  в (9)(10) записываем составляющую векторного потенциала  $A_x$ :

$$\begin{aligned}
 A_x(\vartheta) &= \frac{A_0 \sqrt{2\pi kr}}{i \left( kr + \frac{\pi}{4} \right)} \left[ \exp(ikR^+(\vartheta) \cos(\vartheta_0 - \xi(\vartheta))) X(R^+(\vartheta), \xi(\vartheta) - \vartheta_0) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp(ikR^+(\vartheta) \cos(\vartheta_0 + \xi(\vartheta))) X(R^+(\vartheta), \xi(\vartheta) + \vartheta_0) \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ -\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \exp(ika \cos(\vartheta_0)) \left[ I(-\cos(\xi(\vartheta))) - I(-\cos(\vartheta_0) + \exp(ika \cos(\vartheta_0))) \right] \right\} + \\
 &\quad + \left[ \exp(ikR^-(\vartheta) \cos(\vartheta_0 - \zeta(\vartheta))) X(R^-(\vartheta), \zeta(\vartheta) - \vartheta_0) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp(ikR^-(\vartheta) \cos(\vartheta_0 + \zeta(\vartheta))) X(R^-(\vartheta), \zeta(\vartheta) + \vartheta_0) \right] \cdot \\
 &\cdot \left\{ -\operatorname{ctg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \exp(-ika \cos(\vartheta_0)) \left[ I(\cos(\zeta(\vartheta))) - I(\cos(\vartheta_0) + \exp(ika \cos(\vartheta_0))) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
 R^+(\vartheta) &= \sqrt{r^2 + 2ra \cos(\vartheta) + a^2} & R^-(\vartheta) &= \sqrt{r^2 - 2ra \cos(\vartheta) + a^2} \\
 \xi(\vartheta) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{r \sin(\vartheta)}{r \cos(\vartheta) + a} \right) & \zeta(\vartheta) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{r \sin(\vartheta)}{|r \cos(\vartheta) - a|} \right)
 \end{aligned}$$

Учитывая что  $E_x = ikcA_x$  и опуская множители получаем диаграмму рассеяния:

$$1. \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 0.1 \text{ метр (рис 3.)}$$

2.  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lambda = 0.1$  метр (рис. 4)

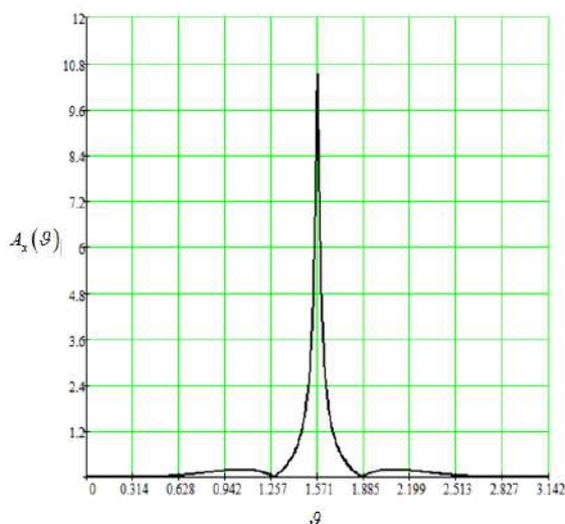


Рисунок 3.

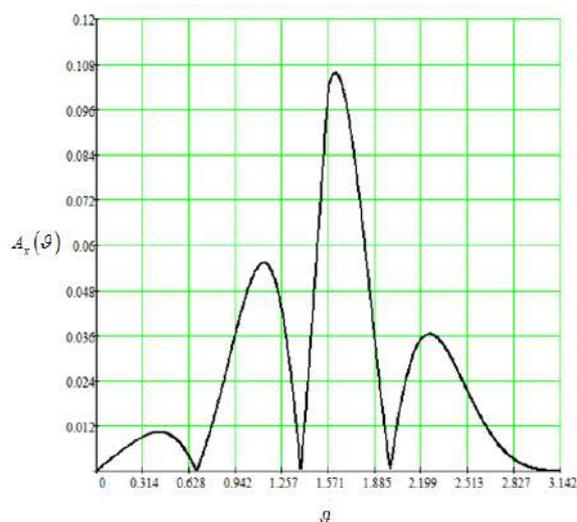


Рисунок 4.

### Заключение

В данной статье основным результатом является оптимальный расчет задачи о дифракции на ленте и получение численных результатов. Полученные решения отличаются от ранее известных асимптотических решений равномерной сходимостью по углам и простотой в использовании, а также обладают высокой точностью. Условие Мейкснера или на остром крае выполняется автоматически. Более того, полученное решение охватывает резонансный случай, когда длина волны и ширина структуры соизмеримы. Эти численные результаты могут быть полезны в предугадании основных особенностей поля излучения в других сложных системах состоящих из n-ного количества лент.

### Список использованных источников

1. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ. 1962. Т. 32. № 4. С. 381-384.
2. Алексеева Л. А. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса для решений волнового уравнения  $R^2 x t$  // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. №11. С. 1920-1921.
3. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №4. С. 611-622.
4. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Обобщенные функции в стационарных краевых задачах электродинамики // Вестник КазГУ: Серия физико-математическая. 1999. №7. С. 233-238.
5. Саутбеков С.С. Factorization method for finite fine structure // Progress In Electromagnetics Research B. 2010. Vol. 25. № 1(21).
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. - М.: Наука, 1983.
7. Вайнштейн Л.А. Теория диффракции и метод факторизации. – М.: Советское радио, 1966.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979.