ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ

Студенттер мен жас ғалымдардың **«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016»** атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ XI Международной научной конференции студентов и молодых ученых **«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»**

PROCEEDINGS of the XI International Scientific Conference for students and young scholars **«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір

Астана

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2016»
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2016»

PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2016»

2016 жыл 14 сәуір

Астана

ӘӨЖ 001:37(063)
КБЖ 72:74
Ғ 96

Ғ96 «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың XI Халық. ғыл. конф. = XI Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/ nauka-i-obrazovanie/, 2016. – .... б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-764-4

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

ӘОЖ 001:37(063)
КБЖ 72:74

ISBN 978-9965-31-764-4

УДК 517.951

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННОЙ С ГЕОМЕТРИЕЙ ЭЙНШТЕЙНА-ВЕЙЛЯ

Гузиенко Николай Сергеевич
nikolay_03.12@mail.ru
Магистрант 2 курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Р. Мырзакулов

Интегрируемые системы, не имеющие "очевидной" групповой симметрии, начиная с результатов Пуанкаре-Брунса конца прошлого века, воспринимались как экзотика. Их весьма незначительный список до шестидесятых годов 20 века практически не менялся. Положение коренным образом поменялось с открытием *метода обратной задачи*. Всевозрастающий интерес к этому связан с тем, что он оказался применим к ряду нелинейных уравнений математической физики, которые, как стало ясно к середине шестидесятых годов, обладает замечательным свойством универсальности. Они возникают при описании (в простейшем, после линейного, приближении) самых разнообразных явлений в физике плазмы, теории элементарных частиц, теории сверхпроводимости, нелинейной оптике и ряде других задач, сводимых к пространственно одномерным. Возникая в самых разнобразных задачах физики, механики и отчасти чистой математики, по степени универсальности эти интегрируемые системы стали сравнимы с основными уравнениями математической физики [1].

Наиболее плодотворной в теории интегрируемых систем оказалась схема, основанная на применении методов классической алгебраической геометрии [2].

Таким образом, теория Эйнштейна-Вейля требует, помимо инвариантности всех геометрических соотношений и физических законов относительно преобразования координат так же как и в геометрии Римана, еще и инвариантность относительно подстановок

$$\bar{g}_{ij} = \lambda g_{ij}\ , \tag{1}$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\ , \tag{2}$$

то есть относительно калибровочных изменений (калибровочная инвариантность).

Одной из диффренциальных геометрий многообразий такого рода является геометрия Эйнштейна Вейля. Геометрия, называемая геометрией Эйнштейна - Вейля, в пространстве M^3 состоит из конформной струкртуры $[g]$ и симметричных связей D, совместных с $[g]$ в том смысле, что для любого $g \in [g]$ выполняется соотношения

$$D_k g_{ij} = \omega_k g_{ij}\ , \tag{3}$$

$$R_{(ij)} = \Lambda g_{ij}\ , \tag{4}$$

где $\omega = \omega_k dx^k$ есть ковектор, $R_{(ij)}$ - симметричный тензор Риччи и Λ - некоторая функция [4].

Выражения (3), (4) представляют собой уравнения Эйнштейна-Вейля.

Пространство Вейля это гладкое многообразие с заданной конформной метрикой g_{ij} с симметричной связностью

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{2}(\omega_i\delta_j^k + \omega_j\delta_i^k - \omega_l g^{kl} g_{ij})\ , \tag{5}$$

с условием ковариантного диффренцирования (3).

Пространство Вейля, удовлетворяющее условию Эйнштейна $\frac{1}{2}(W_{lj}+W_{jl})=\lambda g_{jl}$, для некоторой функции λ, собственно и называется пространством Эйнштейна - Вейля или геометрией Эйнштейна - Вейля [3].

В 3-мерном случае эта формула инвариантна относительно трансформаций

$$\overline{g}\to\lambda g\,,\overline{\omega}\to\omega+d\ln\lambda\,, \tag{6}$$

где λ есть некоторая функция, калибровочный множитель, установление которого в геометрии Эйнштейна-Вейля произвольно подобно тому, как происходит выбор системы координат в Римановой геометрии. Это сохраняет инвариантность уравнений Эйнштейна-Вейля.

Интегрируемая система имеет вид

$$(u^2)_{xy}+u_{yy}+2u_{xt}=0\,. \tag{7}$$

Данный класс дифференциальных уравнений обсуждался в [4]. Уравнения данного типа относятся к классу бездисперсионных диференциальных уравнений в частных производных. Они возникают в широком диапозоне примениний в математической физике, общей относительности, дифференциальной геометрии и теориии интегрируемых систем (как дисперсионные пределы интегрируемых уравнений солитонов). Линеаризированная форма данного уравнения, согласно выражения

$$2uv_{xy}+v_{yy}+2v_{xt}=0\,. \tag{8}$$

Следовательно

$$V(u)=\begin{pmatrix}0 & u & 1\\ u & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

Конформная структура, соответствующую уравнению (7), имеет следующий вид

$$g=2dxdt+dy^2-2udydt+u^2dt^2\,. \tag{10}$$

Соответствующий ковектор

$$\omega=2u_xdy+2(u_y-uu_x)dt\,. \tag{11}$$

Воспользовавшись прямым методом Хироты, наидем решение этого уравнения. Для этого приведем это уравнение к билинейной форме [5]

$$[D_y^2+2D_xD_t+4D_xD_y](f\cdot f)+8f[D_xD_y](f\cdot 1)=0\,. \tag{12}$$

Для односолитонного решения уравнения (7) функцию f зададим в виде

$$f_1=Ae^{\theta_1}\,, \tag{13}$$

в данном решениии будем полагать $A=1$.

$$\theta_1=k_1x+\omega_1t+l_1y+\delta_1\,, \tag{14}$$

где k_1, ω_1, l_1, δ_1 - некоторые постоянные.

$$\omega_1=-\frac{8k_1l_1+l_1^2}{2k_1}\,. \tag{15}$$

Таким образом, односолитонное решение уравнения (7) принимает вид

$$u=\frac{k_1^2}{2\cosh^2(\frac{\theta}{2})}, \tag{16}$$

где

$$\theta_1=k_1x-\frac{8k_1l_1+l_1^2}{2k_1}t+l_1y+\delta_1\,.$$

Графики односолитонного решения уравнения (7) продемонстрирован на рисунке 1.

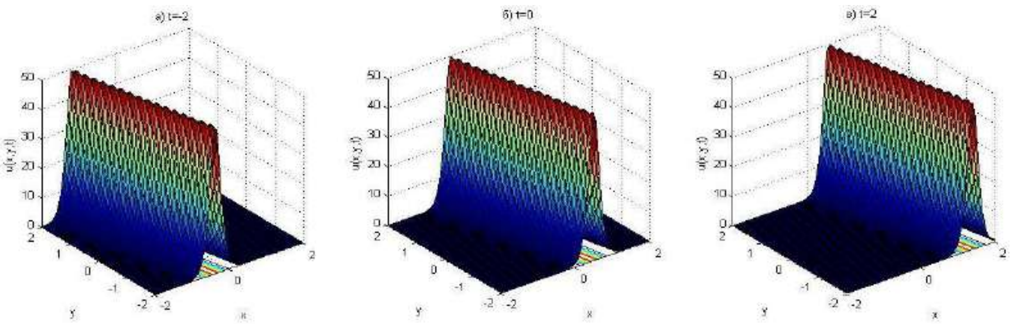


Рисунок 1. Односолитонное решение уравнения (7) при $k_1 = 5$, $l_1 = 2$ и $\delta = 1$

Для двухсолитонного решения уравнения (7) будем полагать

$$f = 1 + f_1 + f_2 , \tag{17}$$

$$f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} , \tag{18}$$

$$f_2 = A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} , \tag{19}$$

где $A_{12} = const$,

$$\omega_1 = -\frac{8k_1 l_1 + l_1^2}{2k_1} , \tag{20}$$

$$\omega_2 = -\frac{8k_2 l_2 + l_2^2}{2k_2} . \tag{21}$$

$$A_{12} = \frac{l_1 l_2 + k_1\omega_2 + k_2\omega_1 + 2(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)}{l_1 l_2 + k_1\omega_2 + k_2\omega 1 + 4k_1 l_2 + 4k_2 l_1} . \tag{22}$$

$$u = 2\left(\frac{k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2} + A_{12}(k_1 + k_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}} - \frac{(k_1 e^{\theta_1} + k_2 e^{\theta_2} + A_{12}(k_1 + k_2) e^{\theta_1 + \theta_2})^2}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2})^2} \right), \tag{23}$$

Покажем двухсолитонное решения уравнения (7), заданное выражением (23), на рисунке 2 при $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $l_1 = 0{,}2$, $l_2 = 0{,}3$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 1$.

Для трехсолитонного решения уравнения (7) положим

$$f = 1 + f_1 + f_2 + f_3 , \tag{24}$$

$$f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} , \tag{25}$$

$$f_2 = A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{23} e^{\theta_2 + \theta_3} + A_{13} e^{\theta_1 + \theta_3} , \tag{26}$$

$$f_3 = B_{123} e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} , \tag{27}$$

где $A_{12}, A_{23}, A_{13}, B_{123} = const$.

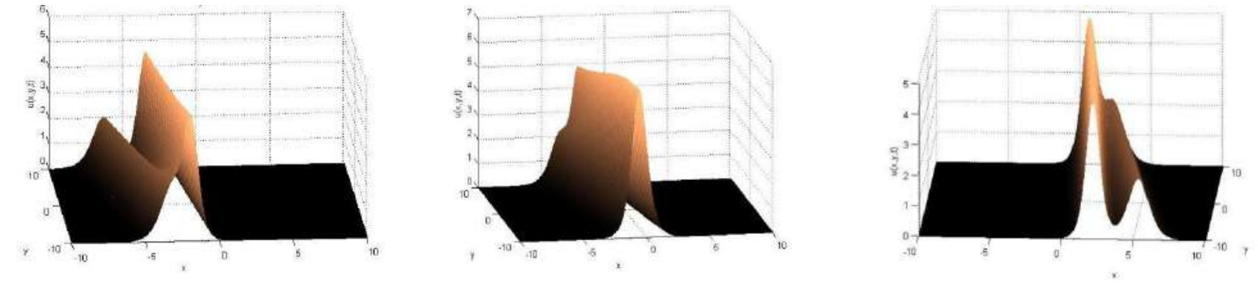
$$\omega_1 = -\frac{8k_1 l_1 + l_1^2}{2k_1}, \omega_2 = -\frac{8k_2 l_2 + l_2^2}{2k_2}, \omega_3 = -\frac{8k_3 l_3 + l_3^2}{2k_3} . \tag{28}$$

$$A_{12} = \frac{l_1 l_2 + k_1\omega_2 + k_2\omega_1 + 2(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)}{l_1 l_2 + k_1\omega_2 + k_2\omega 1 + 4k_1 l_2 + 4k_2 l_1} . \tag{29}$$

$$A_{23} = \frac{l_2 l_3 + k_2\omega_3 + k_3\omega_2 + 2(k_2 + k_3)(l_2 + l_3)}{l_2 l_3 + k_2\omega_3 + k_3\omega_2 + 4k_2 l_3 + 4k_3 l_2} . \tag{30}$$

$$A_{13} = \frac{l_1 l_3 + k_1\omega_3 + k_3\omega_1 + 2(k_1 + k_3)(l_1 + l_3)}{l_1 l_3 + k_1\omega_3 + k_3\omega 1 + 4k_1 l_3 + 4k_3 l_1} . \tag{31}$$

$$B_{123} = A_{12} A_{23} A_{13} \tag{32}$$

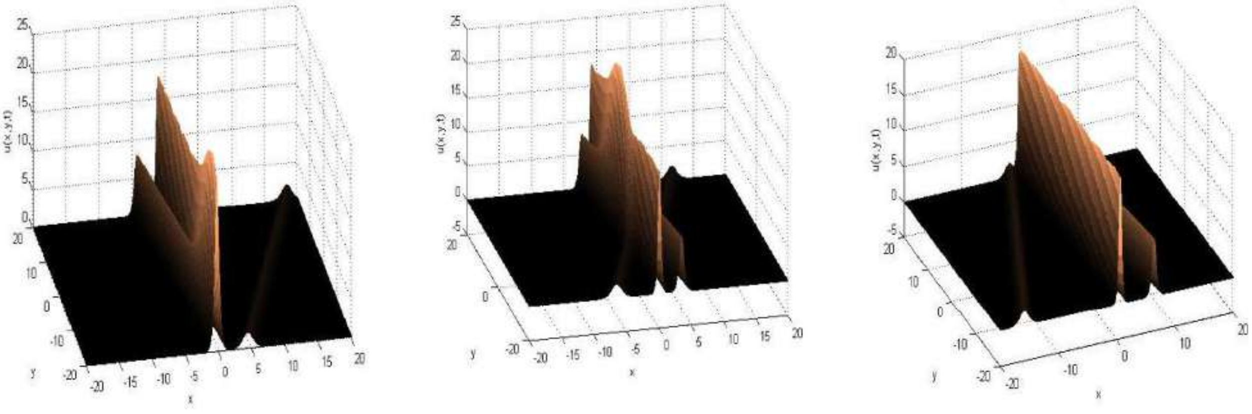


а) $t=-5$ б) $t=0$ в) $t=5$

Рисунок 2. Двухсолитонное решение уравнения (7).

$$u=2\Big[\frac{k_1^2e^{\theta_1}+k_2^2e^{\theta_2}+k_3^2e^{\theta_3}+A_{12}(k_1+k_2)^2e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}(k_2+k_3)^2e^{\theta_2+\theta_3}}{1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}e^{\theta_2+\theta_3}+A_{13}e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}}+$$
$$+\frac{A_{13}(k_1+k_3)^2e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}(k_1+k_2+k_3)^2e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}}{1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}e^{\theta_2+\theta_3}+A_{13}e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}}-$$
$$-\Big(\frac{(k_1e^{\theta_1}+k_2e^{\theta_2}+k_3e^{\theta_3}+A_{12}(k_1+k_2)e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}(k_2+k_3)e^{\theta_2+\theta_3}}{(1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}e^{\theta_2+\theta_3}+A_{13}e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3})^2}+$$
$$+\frac{A_{13}(k_1+k_3)e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}(k_1+k_2+k_3)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3})^2}{(1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+A_{12}e^{\theta_1+\theta_2}+A_{23}e^{\theta_2+\theta_3}+A_{13}e^{\theta_1+\theta_3}+B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3})^2}\Big)\Big]. \qquad (33)$$

Покажем графики трехсолитонного решения уравнения (7) при $k_1=2$, $k_2=4$, $k_3=6$, $l_1=-0.7$, $l_2=0.4$, $l_3=0.1$, $\delta_1=-1$, $\delta_2=1$, $\delta_3=3$ на рисунке 3.



а) $t=-5$ б) $t=0$ в) $t=5$

Рисунок 3. Трехсолитонное решение уравнения (7)

Иерархия систем линейных уравнений, соответствующих нелинейному $(2+1)$-мерному уравнению (45), снабженному начальным и граничным условиями

1. $\begin{cases}\phi_y=U_0\phi+\lambda\phi\,, \\ \phi_t=\lambda\phi_x+A\phi+\lambda B\phi\,,\end{cases}$

2. $\begin{cases}\phi_y=U_0\phi+\lambda\phi\,, \\ \phi_t=\lambda\phi_x+A\phi+\lambda B\phi+\lambda^2C\phi\,,\end{cases}$

3. $\begin{cases}\phi_y=U_0\phi+\lambda\phi\,, \\ \phi_t=\lambda\phi_x+A\phi+\lambda B\phi+\lambda^2C\phi+\lambda^3D\phi\,,\end{cases}$

4. $\begin{cases} \phi_y = U_0\phi + \lambda\phi \,, \\ \phi_t = \lambda\phi_x + A\phi + \lambda B\phi + \lambda^2 C\phi + \lambda^3 D\phi + \ldots, \end{cases}$

где $\lambda = \lambda(x,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2\psi_x \\ 2\overline{\psi}_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$\lambda_t = \lambda\lambda_x \,, \tag{36}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2\psi\psi_x - \psi_y \\ -2\overline{\psi}\overline{\psi}_x - \overline{\psi}_y & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2\partial_y^{-1}(\psi_{xx}) - 4i\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -2\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_{xx}) + 4i\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & -i \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$C = D = \ldots = \begin{pmatrix} i & -4i\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ 4i\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & -i \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Результаты данного исследования интегрируемой системы, связанной с геометрией Эйнштейна-Вейля, указывают на то, что уравнение (7) обладает следующими свойствами

1. уравнение обладает бесконечным числом законов сохранения;
2. оно имеет решение в виде уединенных волн – солитонов;
3. если солитонное уравнение допускает решения типа уединенных волн, то оно должно допускать решения, представляющие собой нелинейную суперпозицию N уединенных волн при произвольном N;
4. существует каноническое преобразование (метод обратной задачи рассеяния — МОЗР), которое трансформирует солитонное уравнение в бесконечную систему отдельных уравнений с переменными типа действие-угол, каждое из которых может быть проинтегрировано тривиальным образом (из условия нулевой кривизны следует существование бесконечного числа законов сохранения);
5. оно обладает свойством Хироты, имеет билинейные формы, которое дает возможность построить N-солитонные решения (нелинейную суперпозицию N уединенных волн);

Список использованной литературы

1. Glaser V., Grosser H., Martin A. Bound on the number of eigenvalues Schredinger operator // Comm. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 197-212.
2. Zotov A.V. The classical integrated systems and their theory-field generalizations // Physics of elementary particles and an atomic nucleus. 2006. №37. P. 759-843.
3. Pauli V. Relativity theory. - Moscow: Nauka, 1991, №3, 328 p.
4. Burovskii P.A., Ferapontov E.V. and Tsarev S.P. Second order quasilinear PDEs and conformal structures in projective space // International J. Math. 2010. № 6. P. 799-841.
5. Ferapontov E.V., Huard B. and Zhang A.On the central quadric ansatz: integrable models and Painleve reductions // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. № 45. P. 195-204.