

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ



Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016» атты
XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»

PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»

2016 жыл 14 сәуір
Астана

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2016»
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2016»**

**PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір

Астана

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

Ғ 96

Ғ96 «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың XI Халық. ғыл. конф. = XI Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: <http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2016. – б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-764-4

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

ISBN 978-9965-31-764-4

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2016

САЛМАҚТЫ ЛЕБЕГ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ВЕЙЛЬ ТИПТЕС ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕНЕЛГЕНДІГІНІҢ БАЛАМАСЫ

Молдабаева Нурила Сатбергенқызы

n.m_satbergenkizi@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-ң магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.М. Абылаева

Бұл жұмыста Вейль типтес интегралдық оператордың $L_p \equiv L_p(I)$ кеңістігінен $L_q \equiv L_q(I)$ кеңістігіне шенелгендігін қарастырайық

$$I_\alpha g(s) = \omega(s) \int_s^\infty \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}}, \quad \forall s \in I.$$

Мұнда $0 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $I = (0, \infty)$ болсын. Ал ρ, ω - барлық жерде оң және $I = (0, \infty)$ аралығында интегралданатын функциялар. Ал L_p -кеңістігі деп нормасы төмендегідей анықталатын және ол ақырлы болатын

$$\|g\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$(0, \infty)$ аралығындағы барлық өлшемді функциялар жиынын айтамыз.

I_α операторымен қатар келесі Харди операторын

$$H_\alpha g(s) = \omega(s) \int_s^\infty \rho(x)x^{\alpha-1}g(x)dx$$

қарастырайық. Харди операторы үшін [1] әдебиетте келесі теорема берілген.

Теорема А. $1 < p \leq q < \infty$ болсын. H_α операторы $L_p \equiv L_p(I)$ кеңістігінен $L_q \equiv L_q(I)$ кеңістігіне шенелген болады сонда тек сонда ғана, егер

$$A_\alpha = \sup_{z \in I} \left(\int_z^\infty \rho^{p'}(x)x^{p'(\alpha-1)}dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^z \omega^q(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

және $\|H_\alpha\| \approx A_\alpha$.

Негізгі теоремаға көшейік.

Теорема. $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$ және ρ, ω функциялары $-I = (0, \infty)$ аралығында кемімейтін функциялар болсын. I_α операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелген болады, сонда тек сонда ғана, егер $A_\alpha < \infty$ және де $\|I_\alpha\| \approx A_\alpha$.

Дәлелдеуі: Қажеттілігі: I_α операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелген, онда $A_\alpha < \infty$.

$$I_\alpha g(s) = \omega(s) \int_s^\infty \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \geq \omega(s) \int_s^\infty \rho(x)x^{\alpha-1}g(x)dx = H_\alpha g(s),$$

$$\sup_{\|g\| \neq 0} \frac{\|I_\alpha g\|}{\|g\|} \geq \sup_{\|g\| \neq 0} \frac{\|H_\alpha g\|}{\|g\|}$$

соңғы теңсіздіктің екі жағы операторлардың нормасын береді, яғни

$$\|I_\alpha\| \geq \|H_\alpha\|.$$

Ал, теорема А бойынша $\|H_\alpha\| \approx A_\alpha$ берілген. Онда

$$A_\alpha \leq \|I_\alpha\| \quad (1)$$

бұдан шаманың ақырлығы шығады, яғни

$$A_\alpha < \infty.$$

Жеткіліктілігі: Теореманың жеткіліктілігін дәлелдеу үшін $x_k = 2^k$, $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $2^k \leq x \leq 2^{k+1}$,

$I_k = [x_k, x_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$ және $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$, ал $\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} dx = 2^{k+1}$ болсын деп алайық. $A_\alpha < \infty$ болғанда I_α

операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелгендігін көрсетейік:

$$\begin{aligned} \|I_\alpha g\|_{L_q}^q &= \int_0^\infty \left(\omega(s) \int_s^\infty \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds \leq \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left[\left(\int_s^{x_{k+1}} + \int_{x_{k+1}}^\infty \right) \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right]^q ds \leq \\ &\leq 2^{q-1} \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left[\left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds + \left(\int_{x_{k+1}}^\infty \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds \right] < < \\ &< \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds + \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^\infty \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Енді осы J_1 мен J_2 жеке-жеке бағалайық:

$$J_1 = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds \leq$$

соңғы жақшаның ішіндегі өрнекке Гельдер теңсіздігін қолдансақ

$$\begin{aligned} &\leq \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left[\left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{\rho^{p'}(x)dx}{(x-s)^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^q ds \leq \\ &\leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{\rho^{p'}(x)dx}{(x-s)^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} ds \leq \\ &\leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \rho^q(x_{k+1}) \left(\int_s^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-s)^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} ds \leq \end{aligned}$$

өрнектегі соңғы жақшаны айнымалы енгізу арқылы жеке есептеп алайық

$$\int_s^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x-s)^{p'(1-\alpha)}} = \left| \begin{array}{l} x = st \\ dx = sdt \\ x = s: s = st \Rightarrow t = 1 \\ x = x_{k+1}: x_{k+1} = st \Rightarrow t = \frac{x_{k+1}}{s} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} \frac{sdt}{(st-s)^{p'(1-\alpha)}} = \int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} \frac{sdt}{(s(t-1))^{p'(1-\alpha)}} = \int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} \frac{s^{1+p'(\alpha-1)} dt}{(t-1)^{p'(1-\alpha)}},$$

осы алмастыруды теңсіздіктің өз орнына апарып, бағалауды жалғастырсақ:

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \rho^q(x_{k+1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} s^{1+p'(\alpha-1)} (t-1)^{p'(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{q}{p'}} ds \leq \\
& \leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \rho^q(x_{k+1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) s^{\frac{q}{p'}} s^{q(\alpha-1)} \left(\int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} (t-1)^{p'(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{q}{p'}} ds \leq \\
& \leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \rho^q(x_{k+1}) 2^{\frac{q}{p'}k} 2^{q(\alpha-1)(k-1)} \left(\int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} (t-1)^{p'(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{q}{p'}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) ds.
\end{aligned}$$

Ал теореманың берілгені бойынша $\alpha < \frac{1}{p}$ онда $\frac{x_{k+1}}{s} = \infty$ болғанда $\int_1^{\frac{x_{k+1}}{s}} (t-1)^{p'(\alpha-1)} dt < \infty$. Енді

$$G = \rho^q(x_{k+1}) 2^{\frac{q}{p'}k} 2^{q(\alpha-1)(k-1)}$$

деп белгілеу енгізіп, осы G шамасын бағалайық. $\alpha - 1 < 0$ болғандықтан

$$\begin{aligned}
G &= \rho^q(x_{k+1}) 2^{\frac{q}{p'}(k+1)} 2^{-\frac{q}{p'}} 2^{3q|\alpha-1|} 2^{q(\alpha-1)(k+2)} = 2^{3q|\alpha-1|} 2^{-\frac{q}{p'}} \rho^q(x_{k+1}) 2^{q(\alpha-1)(k+2)} 2^{\frac{q}{p'}(k+1)} = \\
&= 2^{3q|\alpha-1| - \frac{q}{p'}} \rho^q(x_{k+1}) 2^{q(\alpha-1)(k+2)} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} dx \right)^{\frac{q}{p'}} \leq \\
&\leq 2^{3q|\alpha-1| - \frac{q}{p'}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \rho^{p'}(x) x^{p'(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{q}{p'}}.
\end{aligned}$$

Осы бағалауды пайдаланып

$$\begin{aligned}
J_1 &<< \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) ds \left(\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \rho^{p'}(x) x^{p'(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{q}{p'}} \leq \\
&\leq \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \left[\sup_{x_k} \int_0^{x_k} \omega^q(s) ds \left(\int_{x_k}^{\infty} \rho^{p'}(x) x^{p'(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{q}{p'}} \right] \leq
\end{aligned}$$

теореманың берілгені бойынша $\frac{q}{p} > 0$ болғандықтан, қосындыға Иенсен теңсіздігін пайдаланып

$$\leq A_\alpha^q \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right) \right)^{\frac{q}{p}} \leq A_\alpha^q \left(\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x)|^p dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} << A_\alpha^q \|g\|_{L_p}^q$$

аламыз, сонда

$$J_1 < A_\alpha^q \|g\|_{L_p}^q. \quad (3)$$

Енді J_2 жоғарыдан бағаласақ

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-s)^{1-\alpha}} \right)^q ds \leq \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \frac{\rho(x)g(x)dx}{(x-x_k)^{1-\alpha}} \right)^q ds \leq \\ &\left| x_k = 2^k = \frac{1}{2} \times 2^{k+1} \right| \text{ деп алсақ} \\ &\leq \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \frac{\rho(x)g(x)dx}{\left(x - \frac{1}{2}x_{k+1}\right)^{1-\alpha}} \right)^q ds \leq \\ &\leq 2^{(1-\alpha)q} \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \frac{\rho(x)g(x)dx}{\left(x - \frac{1}{2}x\right)^{1-\alpha}} \right)^q ds < \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega^q(s) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \rho(x)g(x)x^{\alpha-1}dx \right)^q ds \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \omega^q(x) \left(\int_s^{\infty} \rho(x)x^{\alpha-1}g(x)dx \right)^q ds = \|H_\alpha g\|_{L_q}^q, \end{aligned}$$

Онда А теоремасы бойынша

$$\begin{aligned} \|H_\alpha g\|_{L_q} &\leq A_\alpha \|g\|_{L_p} \\ J_2 &\leq A_\alpha^q \|g\|_p^q. \\ \|I_\alpha g\|_{L_q}^q &\leq J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (4)$$

болғандықтан, (3) және (4) теңсіздіктерден шығатыны

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &\leq 2A_\alpha^q \|g\|_p^q < A_\alpha^q \|g\|_p^q \\ \|I_\alpha\| &\leq A_\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Сонымен (1) және (5) теңсіздіктерден $\|I_\alpha\| \approx A_\alpha$ шығады.

Теорема толығымен дәлелденді.

Қолданылған әдебиет

1. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. The Hardy inequality -about its history and some related results // University of West Bohemia, Plzen, 2007, 152 p.