

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



Студенттер мен жас ғалымдардың
«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016» атты
XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»

PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»

2016 жыл 14 сәуір
Астана

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың
«Ғылым және білім - 2016»
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XI Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«Наука и образование - 2016»**

**PROCEEDINGS
of the XI International Scientific Conference
for students and young scholars
«Science and education - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір

Астана

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

Ғ 96

Ғ96 «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың XI Халық. ғыл. конф. = XI Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: <http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/>, 2016. – б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-764-4

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

ӘӨЖ 001:37(063)

КБЖ 72:74

ISBN 978-9965-31-764-4

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия
ұлттық университеті, 2016

ПОЛНОЕ К(В)П ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИЗ КЛАССА СОБОЛЕВА W_2^r

Оразкулова Балнур Мамыржанқызы

balnur_orazkulova@mail.ru

Магистрант, СНС 2-го курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.Ж. Наурызбаев

1. Введение

Задача восстановления по точной и по неточной информации ставится в различных постановках (см., напр., [1-5] и имеющуюся в них библиографию). Исходным в каждой из них является следующее определение

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y,$$

$$\text{где } \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \sup_{\substack{f \in F \\ \|f\|_Y \leq 1}} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N; \cdot)\|_Y.$$

Здесь Y есть нормированное пространство числовых функций (или $Y = C$, если оператор Tf числовой), определенных на множестве Ω_Y , F – класс функций, оператор Tf действует из F в Y . $\{\varepsilon_N\}$ – неотрицательная последовательность, в случае $\varepsilon_N \equiv 0$ речь будет идти о задаче восстановления по точной информации и, в противном случае, по неточной информации.

В соответствии с общим взглядом на данную проблематику «В традиционных областях математическими моделями служат функции, производные, интегралы, дифференциальные уравнения. Для использования компьютеров эти исходные модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечными наборами чисел с указанием конечных последовательностей действий (конечных алгоритмов) для их обработки» (см. [6, стр. 5-6]) в качестве Tf рассматриваются математические модели

$$Tf = f \text{ – модель «Функция», } Tf = f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} \text{ – «Производная», } Tf = \int_{\Omega} f(x) dx \text{ – «Интеграл»,}$$

$Tf = u(y, f)$ – «Решения уравнений в частных производных с теми или иными начальными и (или) граничными условиями f ».

Далее, $l^{(N)} \equiv (l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)})$ – набор функционалов (не обязательно линейных), заданных на функциональном классе F .

Алгоритм переработки информации есть, по определению, функция $(N+1)$ -й переменной $\varphi_N, \varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot): C^N \times \Omega_Y \mapsto C$, которая при всяком фиксированном $(z_1, \dots, z_N) \in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент нормированного пространства Y , причем $\varphi_N(0, \dots, 0; \cdot) \equiv 0$ (что означает «по нулевой информации – нулевой алгоритм»). Включение $\varphi_N \in Y$ будет означать, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным условиям, через $\{\varphi_N\}_Y$ обозначим множество, составленное из всех $\varphi_N \in Y$.

Тем самым, алгоритм переработки информации столь же широк, сколь и понятие функции (см. статью «Функция» Н.Н.Лузина в [7]).

Вычислительные агрегаты $(l^{(N)}, \varphi_N) \equiv (l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \varphi_N)$, определяемые по паре $l^{(N)}$ и φ_N , рассматриваются в двух видах: по точной информации – $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); \cdot)$ и по неточной информации –

$$\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot) \equiv \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N; \cdot), |l_N^{(\tau)} - z_j| \leq \varepsilon_N, |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau = 1, \dots, N),$$

где ε_N - показатель неточности информации, числовой набор (конечная последовательность) $\{z_j\}_{j=1}^N$ есть информационный шум (noisy information). Через $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\} \equiv \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}_{F,Y}$

обозначим множество, составленное из всех возможных вычислительных агрегатов, состоящих из функционалов (не обязательно линейных) $l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}$, определенных на функциональном классе F (в случае линейности l – на линейной оболочке F) и алгоритмов φ_N из Y .

Пусть $D_N \equiv D_N(F)_Y$ – данный набор комплексов $(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \varphi_N) \equiv (l^{(N)}, \varphi_N)$.

Записи $A \ll B$ и $A \succ B$ соответственно означают $|A| \leq cB$ и одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$. В целях сокращения речи будем говорить «Вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \in D_N$ поддерживает оценку снизу $\mathcal{Q}_N \ll \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ », если выполнены неравенства $\delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \ll \mathcal{Q}_N$.

При заданных F, Y, T, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту) в рамках приведенных обозначений и определений, проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием «Компьютерный (вычислительный) перечень» (в сокращении – $K(B)П$), заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении трех задач:

К(В)П-1: Находится порядок $\succ \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, –информативная мощность набора вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$;

К(В)П-2: Производится построение вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\succ \delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y$ – К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) такой, что, во-первых,

$$\delta_N(0; D_N)_Y \succ \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y = \sup \left\{ \|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), \dots, z_N(f))\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau(f)| \leq \varepsilon_N (\tau = 1, \dots, N) \right\}$$

во-вторых,

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty): \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается массивность предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y$: находится как можно большое множество $D_N(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ (обычно связанных со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N) \equiv \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)$, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам $l_1, \dots, l_N$, таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty): \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

Сравнительный анализ известных результатов в задаче восстановления с задачей К(В)П проведен в [1].

Данная статья посвящена следующей конкретизации сформулированной общей задачи К(В)П: $Tf = u(x, t, f)$ решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad 0 \leq t \leq \infty, x \in R^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \in F, \quad x \in R^s \quad (2)$$

$F = W_2^r(0, 1)^s$ ($s = 1, 2, \dots; r > 1$) класс Соболева состоящего, по определению, множества всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега которых удовлетворяют условию

$$\|f\|_{W_2^r(0, 1)^s}^2 = \sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 \cdot (\overline{m_1}^{-2r} + \dots + \overline{m_s}^{-2r}) \leq 1, \quad r > 1 \quad (3)$$

где Z^s - множество всех векторов $m = (m_1, \dots, m_s)$ с целочисленными компонентами и $\overline{m_j} = \max\{1; |m_j|\}$ ($j = 1, \dots, s$).

$$Y = L^{2, \infty} \equiv \left\{ f : [0, 1]^s \times [0, +\infty) \rightarrow R : f : \|f\|_{L^{2, \infty}} \sup_{t \geq 0} \left(\int_{[0, 1]^s} |f(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{2, \infty} < \infty \right\},$$

функция измерима в смысле Лебега.

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_N(\varepsilon_N; \Phi_N)_{L^{2, \infty}} &\equiv \inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)} \in Z^s; \varphi_N} \sup \|u(x, t, f) - \varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_{L^{2, \infty}} : f \in W_2^r(0, 1)^s \quad u \quad |\hat{f}(m^{(\tau)}) - z_\tau| \leq \\ &\leq \varepsilon_N(\tau = 1, \dots, N) \equiv \inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)} \in Z^s; \varphi_N} \sup_{\substack{f \in W_2^r(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau = 1, \dots, N)}} \|u(x, t, f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N; \cdot)\|_{L^{2, \infty}}. \end{aligned}$$

В изучаемом здесь случае задача (1)-(2) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами $\{\hat{f}(m)\}_{m \in Z^s}$ тригонометрических коэффициентов Фурье. Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема N , полученной от функции f , математическая формулировка которой содержится в общей задаче восстановления.

Во всех случаях в этой статье восстановление производится по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье с произвольным конечным спектром, с дальнейшей переработкой по произвольным алгоритмам φ_N :

$$D_N = \Phi_N = \{l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}) : m^{(1)} \in Z^s, \dots, m^{(N)} \in Z^s\} \times \{\varphi_N\},$$

где $\hat{f}(m) = \int_{[0, 1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx$, и $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N; x)$ в случае восстановления функций,

$\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N; x, t)$ в случае дискретизации решений уравнения теплопроводности

Полный ответ на эту задачу дают: в К(В)П-1-2 последовательности $\delta_N(0; \Phi_N)_{L^2(0, 1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$ и

$\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}$, произвольные вычислительные агрегаты вида $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t)$ в К(В)П-3.

2. Основной результат и комментарии к нему. Теорема 1. Пусть даны целое положительное число s ($s = 1, 2, \dots$) и неотрицательные числа r такие, что $r > 1 + \frac{s}{2}$. Тогда справедливы следующие утверждения

К(В)П-1: $\delta_N(0; \Phi_N)_{L^{2, \infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$.

К(В)П-2: Для частичной суммы $S_N(f; x, t) = \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s, \\ |m_j| \leq n(j=1, \dots, s)}} (\hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)})$,

$N = n^s$ величина $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r-1}{s-2}}$ является предельной погрешностью:
во-первых,

$$\delta_N(0; \Phi_N)_{L^2(0,1)^s} \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; S_N(f, x, t))_{L^2(0,1)^s} = \sup_{\substack{f \in W_2^r(0,1)^s \\ |\hat{f}(m) - z_m| \leq \tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r-1}{s-2}}, \\ m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s, \\ |m_j| \leq n(j=1, \dots, s)}} \left\| u(x, t, f) - \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s, \\ |m_j| \leq n(j=1, \dots, s)}} z_m e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\eta_N N^{-\frac{r-1}{s-2}}; S_N(f; x, t))_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(0; \Phi_N)_{L^{2,\infty}}} = +\infty.$$

К(В)П-3: Всякий вычислительный агрегат $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x)$, построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности $S_N(f; x, t)$: для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r-1}{s-2}}; \Phi_N\right)_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(0; \Phi_N)_{L^{2,\infty}}} = +\infty.$$

Тем самым, в случае, когда гладкость функций определяется принадлежностью к многомерным классическим пространствам Соболева, а информация снимается с тригонометрических коэффициентов Фурье – одного из основных функционалов, задача дискретизации уравнения в частных производных решена в полном объеме. Именно, выписаны правильные порядки $\delta_N(0; \Phi_N)_{L^{2,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$ дискретизации производных в случае, когда используются точные значения функционалов. Величины $\delta_N(0; \Phi_N)_Y$ называем информативной мощностью данного класса функционалов, в изучаемом здесь случае – тригонометрических коэффициентов Фурье. Найдена величина погрешности вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r-1}{s-2}}$, сохраняющая порядок погрешности при дискретизации по точной информации, которую можно понимать как идеализированный показатель, но с определяющим ее дополнительным условием: сколь угодно медленное бесконечное увеличение этой погрешности ведет к потере этого порядка. Затем показано, что с лучшей предельной погрешностью вычислительных агрегатов по тригонометрическим коэффициентам Фурье не существует.

Список использованных источников

1. Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

(МИАН). – М.: МИАН, 2013. Вып. 17: Математика и информатика. 2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, С. 179–207.

2. Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв.ВУЗов. Математика, 2013, № 8, С. 86–93.

3. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник как синтез известного и нового в численном анализе // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2014, №4 (101) часть I, С. 16-33.

4. L. Plaskota. Noisy information and computational complexity, Cambridge University Press, 1996, P. 1-308.

5. Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B, Кандидатская диссертация. Алматы, 1998.

6. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. Пособие. – 2-е изд., исправл. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000, 296 с.

7. Лузин Н.Н. Собрание сочинений: В 3-х т. — М.: Изд-во АН СССР, С. 1953–1959.

УДК. 517.5

ЖАЛПЫЛАНҒАН ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ ҮШІН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сабит Баймен

baimen95@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А. Көпежанова

Бұл жұмыста $\Lambda_\infty(\omega, R)$ жалпыланған Лоренц кеңістігіндегі функциялардың нормаларының жоғарғы бағалауы алынған.

Айталық

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \quad x \in R$$

– $f \in L_1(R)$ функциясының Фурье түрлендіруі.

Айталық $1 < p < 2$, $p' = \frac{p}{p-1}$, және $0 < q \leq \infty$, онда келесі теңсіздіктер орынды

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_{p'}(R)} &\leq c_1 \|f\|_{L_p(R)} \\ \|\hat{f}\|_{L_{p,q}(R)} &\leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}(R)} \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы $L_{p,q}(R)$ - классикалық Лоренц кеңістігі. Бұл теңсіздіктерді сәйкесінше Хаусдорф-Юнг және Харди-Литтлвуд-Стейн теңсіздіктері деп атайды [1].

[2] жұмыста (қосымша [3] жұмысты қараңыз) келесідей нәтиже алынған.

Айталық $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Онда

$$\|\hat{f}\|_{N_{p',q}} \leq c_2 \|f\|_{L_{p,q}(R)} \quad (2)$$

Бұл жердегі $N_{p',q}$ - торлы кеңістіктер, нормасы