

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ



ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ



Студенттер мен жас ғалымдардың  
**«ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2016»** атты  
XI Халықаралық ғылыми конференциясының  
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI Международной научной конференции  
студентов и молодых ученых  
**«НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2016»**

PROCEEDINGS  
of the XI International Scientific Conference  
for students and young scholars  
**«SCIENCE AND EDUCATION - 2016»**

2016 жыл 14 сәуір  
Астана

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ  
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың  
«Ғылым және білім - 2016»  
атты XI Халықаралық ғылыми конференциясының  
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XI Международной научной конференции  
студентов и молодых ученых  
«Наука и образование - 2016»**

**PROCEEDINGS  
of the XI International Scientific Conference  
for students and young scholars  
«Science and education - 2016»**

**2016 жыл 14 сәуір**

**Астана**

**ӘӨЖ 001:37(063)**

**КБЖ 72:74**

**Ғ 96**

**Ғ96** «Ғылым және білім – 2016» атты студенттер мен жас ғалымдардың XI Халық. ғыл. конф. = XI Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016» = The XI International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2016» . – Астана: [http://www.enu.kz/ru/nauka/ nauka-i-obrazovanie/](http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/), 2016. – .... б. (қазақша, орысша, ағылшынша).

**ISBN 978-9965-31-764-4**

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

**ӘӨЖ 001:37(063)**

**КБЖ 72:74**

**ISBN 978-9965-31-764-4**

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия  
ұлттық университеті, 2016

2. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. - М.: Мир, 1984.
3. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. - М.: Мир, 1977.
4. Параллельное и распределенное программирование с использованием C++.

УДК 517.957

## РАЗРУШИТЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

**Мыктыбай Жайна Маралқызы**

*myktybai\_zhm@mail.ru*

Магистрант механико-математического факультета, кафедры математического и компьютерного моделирования ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н. Г. Нугманова

Изучение свойств интегрируемых систем, имеющих различные приложения в области естественных наук, является одной из актуальных задач теоретической и математической физики. В качестве примера таких моделей в данной работе рассматривается модель ферромагнетика Гейзенберга (МФГ) [1]

$$iS_t = \frac{1}{2}[S_{xx}, S], \quad (1)$$

где фазовое пространство модели образовано вектор-функциями  $\vec{S}(x, t) = (S_1(x, t), S_2(x, t), S_3(x, t))$  принимающими значения на единичной сфере  $S^2$  в  $R^3$ .

Уравнение МФГ (1) представляется как условие нулевой кривизны

$$U_t - V_x + UV - VU = 0 \quad (2)$$

для связности  $(U(x, t, \lambda), V(x, t, \lambda))$  вида

$$U = -i\lambda S, \quad (3)$$

$$V = -2i\lambda^2 S - \lambda S_x S, \quad (4)$$

где  $S = S_i \sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Матричный аналог спинного вектора  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$  имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & -S_3 \end{pmatrix},$$

и удовлетворяет условию:

$$S^2 = I, \quad (5)$$

а  $\sigma_i$  - матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, условие нулевой кривизны (2) с учетом (5) эквивалентно уравнению (1). Так же нужно учесть граничные условия

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{S}(x) = \vec{S}_0,$$

где  $\vec{S}_0 = (0, 0, \pm 1)$ .

МФГ (1) описывает движение вектора намагниченности в изотропных ферромагнетиках. Разрешимость модели (1) осуществляется методом обратной задачи рассеяния с помощью пары Лакса

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (6)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (7)$$

где  $U$  и  $V$  имеют вид (3) и (4).

**Постановка задачи.** Разрушительные волны представляют собой внезапные одиночные волны большой высоты (до 30 м) на поверхности океана. Изучение таких волн началось в последние десятилетия. Разрушительные волны представляют не только теоретический, но и прикладной интерес, и наблюдаются в разных областях физики [2]. Нахождение решения в виде разрушительных волн для МФГ (1) является целью настоящей работы.

**Методом исследования** является метод преобразования Дарбу (ПД), который дает новые возможности нахождения различных точных решений исследуемой модели [3].

### Преобразование Дарбу для модели ферромагнетика Гейзенберга

Пусть  $\Phi = (\phi_1(\lambda_1; t; x), \phi_2(\lambda_1; t; x))^T$  является решением системы (6) и (7), тогда новое решение этой системы  $\hat{\Phi} = (\phi_1(\lambda_2; t; x), \phi_2(\lambda_2; t; x))^T$ , полученное из

$$\hat{\Phi} = D\Phi \quad (8)$$

с  $D = \frac{1}{\lambda}I - S$ , удовлетворяет пару Лакса

$$\hat{\Phi}_x = \hat{U}\hat{\Phi}, \quad (9)$$

$$\hat{\Phi}_t = \hat{V}\hat{\Phi}. \quad (10)$$

Тогда искомые матрицы  $\hat{U}$  и  $\hat{V}$  зависят от искомого решения  $\hat{S}$  как

$$\hat{U} = -i\lambda\hat{S},$$

$$\hat{V} = -2i\lambda^2\hat{S} - \lambda\hat{S}_x\hat{S},$$

также как  $U$  и  $V$  зависят от  $S$  в виде (3) и (4).

Из условий совместимости (9) и (10) видно, что  $D$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$D_x + UD = \hat{U}D, \quad (11)$$

Сравнивая коэффициенты  $\lambda^i$  в уравнении (11), получим формулу, преобразующую известное решение МФГ (1) на ее новое решение в виде

$$\hat{S} = S - iS_x. \quad (12)$$

### Решение модели ферромагнетика Гейзенберга

Следующий шаг – вывод формулы, выражающую переход от решений линейной системы (6) и (7) к решению МФГ (1).

Полагаем, что

$$S = H\Lambda^{-1}H^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_1; t; x) & \phi_1(\lambda_2; t; x) \\ \phi_2(\lambda_1; t; x) & \phi_2(\lambda_2; t; x) \end{pmatrix}.$$

Здесь первый столбец матрицы  $H$  является решением линейной системы (6) и (7), а второй столбец – искомое решение.

В результате некоторых вычислений получим, что

$$\lambda_2 = \lambda_1^*, \quad H = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\phi_2^* \\ \phi_2 & \phi_1^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, связь между решениями линейной системы (6) и (7) и соответствующей нелинейной модели (1) выражается в следующем виде:

$$S = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} |\phi_1|^2 + \lambda_1^{*-1} |\phi_2|^2 & (\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{*-1}) \phi_1 \phi_2^* \\ (\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{*-1}) \phi_1^* \phi_2 & \lambda_1^{-1} |\phi_2|^2 + \lambda_1^{*-1} |\phi_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $\Delta = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ ,  $\lambda_1^*, \phi_1^*, \phi_2^*$  обозначают комплексные сопряжения  $\lambda_1, \phi_1, \phi_2$ . В компонентах матрицы  $S$  формулу (14) можно переписать в виде

$$S_1 = \frac{(\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{*-1})}{2\Delta} (\phi_1 \phi_2^* + \phi_1^* \phi_2), \quad S_2 = \frac{i(\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{*-1})}{2\Delta} (\phi_1 \phi_2^* - \phi_1^* \phi_2), \quad S_3 = \frac{1}{\Delta} (\lambda_1^{-1} |\phi_1|^2 + \lambda_1^{*-1} |\phi_2|^2). \quad (15)$$

Теперь подставляя (15) в (12), получим искомое решение МФГ (1):

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 = & (S_1(4|\lambda_1|^2 |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 + ((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_1)^2)(|\phi_1|^4 + |\phi_2|^4) - (\lambda_1 - \lambda_1^*)^2 ((\phi_1^*)^2 (\phi_2)^2 + \\ & + (\phi_1)^2 (\phi_2^*)^2)) + iS_2(((\lambda_1)^2 - (\lambda_1^*)^2)(|\phi_1|^4 - |\phi_2|^4) + (\lambda_1 - \lambda_1^*)^2 ((\phi_1^*)^2 (\phi_2)^2 - (\phi_1)^2 (\phi_2^*)^2)) + \\ & + 2S_3(\lambda_1 - \lambda_1^*)(\phi_1 \phi_2^* (\lambda_1 |\phi_2|^2 + \lambda_1^* |\phi_1|^2) - \phi_1^* \phi_2 (\lambda_1 |\phi_1|^2 + \lambda_1^* |\phi_2|^2))) / 2|\lambda_1|^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 = & (-iS_1((\lambda_1^* - \lambda_1)^2 ((\phi_1)^2 (\phi_2^*)^2 - (\phi_1^*)^2 (\phi_2)^2) + ((\lambda_1)^2 - (\lambda_1^*)^2)(|\phi_1|^4 - |\phi_2|^4)) + \\ & + S_2(4|\lambda_1|^2 |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 + ((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_1)^2)(|\phi_1|^4 + |\phi_2|^4) + (\lambda_1^* - \lambda_1)^2 ((\phi_1^*)^2 (\phi_2)^2 + (\phi_1)^2 (\phi_2^*)^2)) + \\ & + 2iS_3(\lambda_1 - \lambda_1^*)(\phi_1^* \phi_2 (\lambda_1 |\phi_1|^2 + \lambda_1^* |\phi_2|^2) + \phi_1 \phi_2^* (\lambda_1 |\phi_2|^2 + \lambda_1^* |\phi_1|^2))) / 2|\lambda_1|^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_3 = & (S_1(((\lambda_1^*)^2 - |\lambda_1|^2)(\phi_2^* \phi_1 |\phi_2|^2 - \phi_1^* \phi_2 |\phi_1|^2) + ((\lambda_1)^2 - |\lambda_1|^2)(\phi_2 \phi_1^* |\phi_2|^2 - \\ & - \phi_1 \phi_2^* |\phi_1|^2)) + iS_2((\lambda_1^*)^2 - |\lambda_1|^2)(\phi_1^* \phi_2 |\phi_1|^2 + \phi_2^* \phi_1 |\phi_2|^2) - ((\lambda_1)^2 - |\lambda_1|^2)(\phi_1 \phi_2^* |\phi_1|^2 + \\ & + \phi_2 \phi_1^* |\phi_2|^2)) + S_3(2|\phi_1|^2 |\phi_2|^2 ((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_1)^2) + |\lambda_1|^2 (|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2)^2) / |\lambda_1|^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Солитонные решения получаются при условии  $S = \sigma_3$  [4]. Для построения решения в виде разрушительных волн, мы используем решения типа плоских волн отличных от нуля

$$S_1 = \alpha(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\alpha \cos(\theta), \quad S_2 = i\alpha(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = -2\alpha \sin(\theta), \quad S_3 = \beta, \quad \theta = ax - \beta a^2 t, \quad (19)$$

где  $a, \alpha, \beta$  - действительные числа и удовлетворяют  $4\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Так же, решения пары Лакса уравнения (6) и (7) соответствующие собственному значению  $\lambda_1 = -\frac{a}{2}(\beta + 2i\alpha)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sqrt{\frac{2}{a\alpha}} e^{\frac{1}{2}i\theta} (4a^2 \alpha^2 t - 2\alpha + (2a\alpha x - 4a^2 \alpha \beta t - \beta)i), \\ \phi_2 = & \sqrt{\frac{2}{a\alpha}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} (2a\alpha x - 4a^2 \alpha \beta t + \beta - (4a^2 \alpha^2 t + 2\alpha)i). \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, нами получены решения типа разрушительных волн в виде (16)-(18) с учетом (19) и (20).

Теперь приведем с помощью программного пакета Maple компьютерные модели полученных результатов. Рассмотрим два частных случая:

$$1) a=1, \alpha = \frac{2}{5}, \beta = \frac{3}{5}; \quad 2) a=1, \alpha = \frac{12}{25}, \beta = \frac{7}{25}.$$

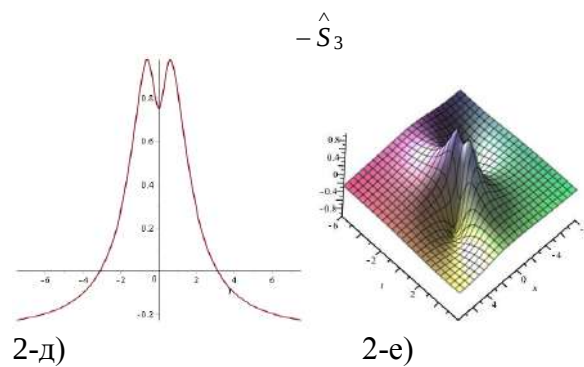
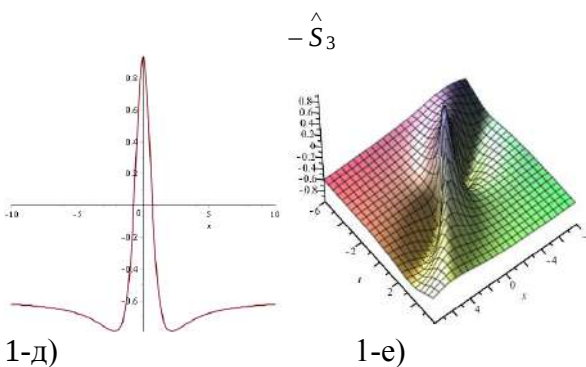
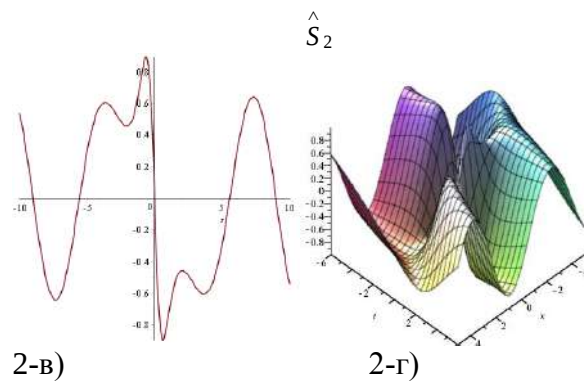
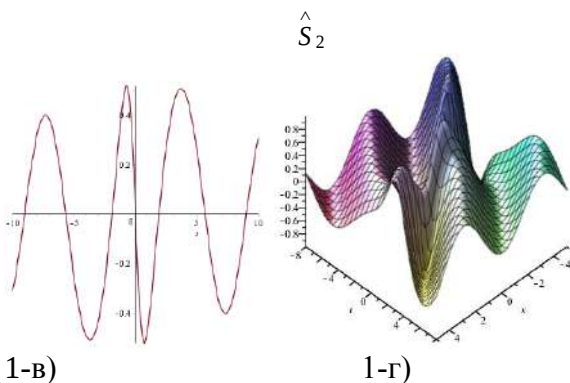
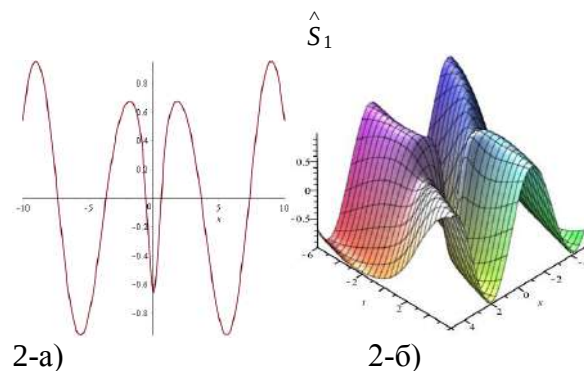
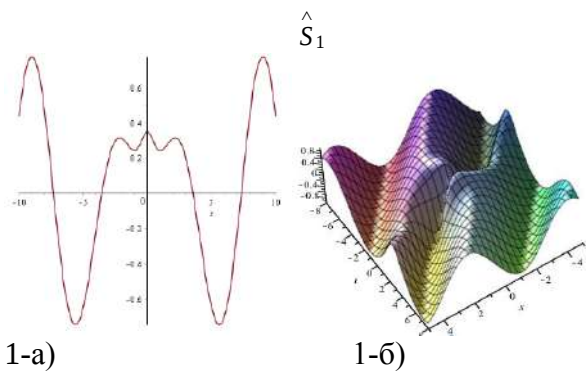


Рисунок 1 - Разрушительные волны

$\hat{S}_1, \hat{S}_2, -\hat{S}_3$  в (1-a)-(1-e),  
где  $a=1, \alpha=\frac{2}{5}, \beta=\frac{3}{5}$  и  $t=0$ .

Рисунок 2 - Разрушительные волны

$\hat{S}_1, \hat{S}_2, -\hat{S}_3$  в (2-a)-(2-г), где  
 $a=1, \alpha=\frac{12}{25}, \beta=\frac{7}{25}$  и  $t=0$ .

Из рисунков видно, что при  $t=0$  волны сконцентрированы вокруг  $(0, 0)$ . В обоих случаях наблюдается двойное возмущение в  $(0, 0)$  для  $\hat{S}_1$  и  $\hat{S}_2$ . При этом  $\hat{S}_3$  в первом случае достигает максимума в точке  $(0, 0.95)$ , а во втором случае изменяется в направлении оси  $x$ .

Таким образом, в данной работе построено преобразование Дарбу для модели ферромагнетика Гейзенберга. С его помощью найдено решение типа разрушительные волны. Изучены свойства решений при выборе различных значений параметров.

#### Список использованных источников

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова Думка, 1983.-190с.
2. Захаров В.Е., Шамин Р.В., Юдин А.В. Энергетический портрет волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 9, с. 597-600. – 2014.
3. Yersultanova Z.S., Nugmanova G.N. et al. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics. -2016. –Vol. 13, 1550134 (13 pages).
4. Chen Chi, Zhou Zi-Xiang Darboux transformation and exact solutions of the Myrzakulov-I equation // Chinese Physics Letters.-2009.-Vol. 26, 080504 (4 pages).