ӘОЖ 517.957, 532.5

БЕЙСЫЗЫҚТЫ ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІ ҮШІН ЛИ НҮКТЕЛІК СИММЕТРИЯЛАРЫ

Балтабаева Дилноза Эрмахаммадқызы
baltabaeva-d@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті студенті
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Н.С. Серикбаев

Бейсызықты эволюциялық теңдеулерде (БТЭ) өте маңызды рөл атқаратын бейсызықты Шредингер теңдеуі (БШТ) сұйықтық динамикасы, бейсызықтыталшық, молекулалық биология, кванттық механика, терең су модельдеу сияқты көптеген құбылыстарда толық қолданылады және т.б. [1-3]. Соңғы бірнеше онжылдықта БТЭ-ның нақты шешімдері мұқият зерттелді. Қолданылатын негізгі әдістер Дарбу трансформациясы, кері шашырау әдісі, Хиротаның бисызықты әдісі, Ли симметрия тобының әдісі [4-5] БШТ үшін дамыған.

Бұл жұмыста біз (2+1) өлшемді БШТ бейсызықты және анизотропты әсерлесулермен қарастырамыз [1].

$$iq_t - iq_x + q_{xx} + q_{yy} - 2q_{xy} + 2q|q|^2 = 0, \tag{1}$$

мұндағы $q(x,y,t)$ – БШТ шешімін көрсететін білдіретін күрделі функция x, y және t сәйкесінше масштабталған кеңістік пен уақыт координаттарын, ал төменгі индекстер жартылай туындыларды білдіреді.

Бұл (2+1)-өлшемді БШТ үшін Ли нүктелік симметриясына талдау жасалды. Алдымен күрделі $q(x,y,t)$ функциясын келесі формада қарастырамыз:

$$q(x,y,t) = u(x,y,t) + i\upsilon(x,y,t), \tag{2}$$

мұндағы, $u(x,y,t)$ және $i\upsilon(x,y,t)$ нақты мәні бар функциялар, ал $q^*(x,y,t)q^*(x,y,t)$ комплексті түйіндес функцияны білдіреді, (2) формадағы түрлендіруді (1) теңдеуге қолданамыз және нақты және жорамал бөліктерін 0-ге теңестіру арқылы келесі теңдеулерді аламыз:

$$i(u_t + i\upsilon_t) - i(u_x + i\upsilon_x) + uu + i_{xx} + i\upsilon_{xx} + u_{yy} + i\upsilon_{yy} - 2(u_{xy} + i\upsilon_{xy}) + 2(u - i\upsilon)(u + i\upsilon)^2 = 0 \tag{3}$$

$$\upsilon_x - \upsilon_t + u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} + 2u^3 + 2u\upsilon^2 - 2\upsilon^3 + iu_t - iu_x + i\upsilon_{xx} + i\upsilon_{yy} - 2i\upsilon_{xy} + 2i\upsilon u^2 = 0. \quad (4)$$

Енді, (1) теңдеудің нүктелік симметриясын құру үшін алдымен Ли тобының Ли түрлендірулерінің бір параметрлі тобымен енгіземіз:

$$\begin{gathered}
x \to x + \varepsilon\xi^1(x,y,t,u,\upsilon) + O(\varepsilon^2) x \to x + \varepsilon\xi^1(x,y,t,u,v) + O(\varepsilon^2), \\
y \to y + \varepsilon\xi^2(x,y,t,u,v) + O(\varepsilon^2), \\
t \to t + \varepsilon\xi^3(x,y,t,u,v) + O(\varepsilon^2), \\
u \to u + \varepsilon\eta^1(x,y,t,u,v) + O(\varepsilon^2), \\
v \to v + \varepsilon\eta^2(x,y,t,u,v) + O(\varepsilon^2),
\end{gathered} \quad (5)$$

мұндағы, ε топтық параметрді білдіреді және $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1 \xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1$ және $\eta^2 \eta^2$ - шексіз шағын генераторлар. Жоғарыда аталған түрлендіру тобына сәйкес келетін векторлық өріс келесі түрде көрсетіледі:

$$V = \xi^1(x,,y,t,u,\upsilon)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,t,u,\upsilon)\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3(x,y,t,u,\upsilon)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^1(x,y,t,u,\upsilon)\frac{\partial}{\partial u} +$$

$$\eta^2(x,y,t,u,\upsilon)\frac{\partial}{\partial \upsilon} + \eta^1(x,y,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2(x,y,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad (6)$$

Мұндағы $\xi^1(x,,y,t,u,\upsilon), \xi^2(x,y,t,u,\upsilon), \xi^3(x,y,t,u,\upsilon), \eta^1(x,y,t,u,\upsilon), \eta^2(x,y,t,u,\upsilon)$ және $\eta^2(x,y,t,u,v)$ айқындалатын коэффициенттің функциялары болып табылады. (3) және (4) жүйе үшін pr^2 болады, оның өзгермейтіндігі келесі шартты қанағаттандыру тиіс:

$$pr^2V(\Delta_1)\big|_{\Delta_1} = 0 \; \mathrm{pr}^2V(\Delta_1)|_{\Delta_1=0} = 0, \quad (7)$$

$$\mathrm{pr}^2V(\Delta_2)|_{\Delta_2=0} = 0, \quad (8)$$

мұндағы, Δ_2, Δ_2 келесідей шамаларға тең:

$$\begin{gathered}
\Delta_1 = \upsilon_x - \upsilon_t + u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} + 2u^3 + 2u\upsilon^2 - 2\upsilon^3 \\
\Delta_1 = v_x - v_t + u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} + 2u^3 + 2uv^2 - 2v^3,
\end{gathered} \quad (9)$$

$$\begin{gathered}
\Delta_2 = iu_t - iu_x + i\upsilon_{xx} + i\upsilon_{yy} - 2i\upsilon_{xy} + 2i\upsilon u^2 \\
\Delta_2 = iu_t - iu_x + iv_{xx} + iv_{yy} - 2iv_{xy} + 2ivu^2 0.
\end{gathered} \quad (10)$$

Ли теориясына сүйене отырып, (9) және (10) теңдеулердің pr^2, яғни (7), (8) шарттарын пайдаланып, жазамыз:

$$pr^2V = \eta^1\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2\frac{\partial}{\partial \upsilon} + \eta^{2t}\frac{\partial}{\partial \upsilon_t} + \eta^{2x}\frac{\partial}{\partial \upsilon_x} + \eta^{1xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{1yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{1xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}$$

$$\mathrm{pr}^2V = \eta^1\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2\frac{\partial}{\partial v} + \eta^{2t}\frac{\partial}{\partial v_t} + \eta^{2x}\frac{\partial}{\partial v_x} + \eta^{1xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{1yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{1xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}, \quad (11)$$

$$\mathrm{pr}^2V = \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \upsilon} + \eta^{1t} \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{1x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{2xx} \frac{\partial}{\partial \upsilon_{xx}} + \eta^{2yy} \frac{\partial}{\partial \upsilon_{yy}} + \eta^{2xy} \frac{\partial}{\partial \upsilon_{xy}}, \qquad (12)$$

бұл жердегі, коэффициенттердің функциялары келесідей көрсетілген:

$$\begin{aligned}
\eta^{1x} &= D_x(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t) + \xi^1 u_{xx} + \xi^2 u_{xy} + \xi^3 u_{xt},\\
\eta^{1t} &= D_t(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t) + \xi^1 u_{xt} + \xi^2 u_{yt} + \xi^3 u_{tt},\\
\eta^{2x} &= D_x(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xx} + \xi^2 \upsilon_{xy} + \xi^3 \upsilon_{xt},\\
\eta^{2y} &= D_y(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xy} + \xi^2 \upsilon_{yy} + \xi^3 \upsilon_{yt},\\
\eta^{2t} &= D_t(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xt} + \xi^2 \upsilon_{yt} + \xi^3 \upsilon_{tt},\\
\eta^{1xx} &= D_{xx}(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t) + \xi^1 u_{xxx} + \xi^2 u_{xxy} + \xi^3 u_{xxt}, \qquad (13)\\
\eta^{1yy} &= D_{yy}(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t) + \xi^1 u_{xyy} + \xi^2 u_{yyy} + \xi^3 u_{yyt},\\
\eta^{2xx} &= D_{xx}(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xxx} + \xi^2 \upsilon_{xxy} + \xi^3 \upsilon_{xxt},\\
\eta^{2yy} &= D_{yy}(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xyy} + \xi^2 \upsilon_{yyy} + \xi^3 \upsilon_{yyt},
\end{aligned}$$

$$\eta^{1xy} = D_{xy}\left(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t\right) + \xi^1 u_{xxy} + \xi^2 u_{xyy} + \xi^3 u_{xyt}\, \eta^{1xy} = D_{xy}(\eta^1 - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_t) + \xi^1 u_{xxy} + \xi^2 u_{xyy} + \xi^3 u_{xyt},$$

$$\eta^{2xy} = D_{xy}\left(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t\right) + \xi^1 \upsilon_{xxy} + \xi^2 \upsilon_{xyy} + \xi^3 \upsilon_{xyt}\, \eta^{2xy} = D_{xy}(\eta^1 - \xi^1 \upsilon_x - \xi^2 \upsilon_y - \xi^3 \upsilon_t) + \xi^1 \upsilon_{xxy} + \xi^2 \upsilon_{xyy} + \xi^3 \upsilon_{xyt}.$$

Анықтама. Теңдеудің (1) шексіз кіші симметриясының Ли алгебрасы келесі алты сызықты тәуелсіз оператормен қамтылған:

$$\begin{gathered}
V_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_4 = \upsilon\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial \upsilon},\\
V_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - \upsilon\frac{\partial}{\partial \upsilon},\\
V_5 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\upsilon(y-x)\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}(y-x)u\frac{\partial}{\partial \upsilon}. \qquad (14)
\end{gathered}$$

Lie	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	0	0	0	V_1	$V_2 - \frac{1}{2}V_3$
V_2	0	0	0	0	$-V_2$	$-\frac{1}{2}V_4$
V_3	0	0	0	0	V_3	$\frac{1}{2}V_4$
V_4	0	0	0	0	0	0
V_5	$-V_1$	V_2	$-V_3$	0	0	V_6
V_6	$\frac{1}{2}V_3 - V_2$	$\frac{1}{2}V_4$	$-\frac{1}{2}V_4$	0	V_6	0

1-кесте. Ли жүйесінің коммутациялық қатынастары.

$[V_k, V_j] = V_k V_j - V_j V_k$ коммутатор операторына сүйене отырып, біз (3) және (4) жүйенің коммутациялық функциясын аламыз (1-кестені қараңыз).

Бұл жұмыста (2+1) өлшемді БШТ зерттеледі. Жоғарыда айтқанымыздай, алдыңғы [4, 5] жұмыстармен салыстырғанда бұл жұмыста оңтайлы жүйе, симметрияны азайту шешімдері (1) теңдеуі үшін қарастырылды және жаңа нәтижелерге қол жеткіздік. Біріншіден, біз күрделі модельді (1) теңдеуге (3) және (4) жүйені алу үшін $q(x,y,t) = u(x,y,t) + i\upsilon(x,y,t)$ түрлендіруді қолдана отырып түрлендірдік. Содан кейін Ли симметриясын талдау әдісін қолдана отырып, біз оңтайлы жүйелер мен жүйенің симметриясын анықтадық.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP08857372.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. G.X. Huang, Z.P. Shi, X.X. Dai, Phys. Rev. – 1991.-Vol. 43, № 11197.
2. A. Biswas, A.H. Kara, L. Moraru, A.H. Bokhari, F.D. Zaman, Conservation laws of coupled Klein–Gordon equations with cubic and power law nonlinearities, Proc. Rom. Acad., A, Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci. – 2014.-Vol.15, № 2. -P .123–129.
3. A. Biswas, M. Song, H. Triki, A.H. Kara, B.S. Ahmed, A. Strong, A. Hama, Solitons, shock waves, conservation laws and bifurcation analysis of Boussinesq equation with power law nonlinearity and dual dispersion, Appl. Math. Inf. Sci. – 2014. –P.949–957.
4. N.H. Ibragimov, A new conservation theorem, J. Math. Anal. Appl. – 2007. - P 311–328.
5. N.H. Ibragimov, Transformation Groups in Mathematical Physics, Nauka, Moscow.-1983 English transl.: Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Riedel, Dordrecht.- 1985.