УДК 524.83, 524.834

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ $f(T,B)$ ГРАВИТАЦИИ С ФЕРМИОННЫМ ПОЛЕМ

Қошан Әсел Өмірзаққызы

asell.2000@icloud.com

Студент 4-го курса кафедры «Общая и теоретическая физика»,

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель - Е.М. Мырзакулов

В настоящее время одной из самых важных проблем в физике является понимание ускоренного расширения Вселенной в позднем времени. Кроме того, крупномасштабная структура, начиная от галактик и заканчивая сверхскоплениями, представляет проблему недостающей материи, т.е. светящейся материи недостаточно, чтобы гарантировать устойчивость и эволюцию самогравитирующих астрофизических систем. Есть несколько кандидатов для объяснения этих явлений, и наиболее популярными из них являются темная энергия и темная материя.

Недавно в работе [1] было предложено новое обобщение стандартной $f(T)$-гравитации. В этой теории функция $f(T)$ расширяется до $f(T,B)$, где B - граничный член, связанный со скаляром Риччи как $R = -T + B$.

В этой работе в рамках телепараллельной гравитации будет исследована космологическая модель Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) с фермионным полем [2,4], в которой фермионное поле неминимально связано как со скаляром кручения, так и с граничным членом. Используя подход симметрии Нетера [5] в такой теории, получаем явные формы связей и потенциала в зависимости от фермионного поля.

Действие модели имеет вид

$$S = \int d^4xe\left\{F(\Psi)f(T,B) + \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\left(\overleftarrow{\partial_{\mu}} - \Omega_{\mu}\right)\psi - \bar{\psi}\left(\overrightarrow{\partial_{\mu}} + \Omega_{\mu}\right)\Gamma_{\mu}\psi\right] - V(\Psi)\right\}, \qquad (1)$$

где T - скаляр кручения, $B = (2/e)\partial_{\mu}(eT^{\mu}) = \nabla_{\mu}T^{\mu}$ граничный член, $e = det(e^{a}_{\mu}) = \sqrt{-g}$, e^{a}_{μ} тетрада, ψ и $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$ спинорное поле и его сопряжение, крестик подразумевает комплексное сопряжение. $F(\Psi)$ функция связи и $V(\Psi)$ - потенциал фермионного поля.

Рассмотрим простейшую однородную и изотропную космологическую модель ФРУ, пространственно-плоская метрика, которой определяется выражением

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (2)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор Вселенной. Соответствующие компоненты тетрады для метрики ФРУ равны $(e^a_\mu) = diag(1, a, a, a)$, $(e^\mu_a) = diag(1, 1/a, 1/a, 1/a)$. При таком определении тетрадного поля скаляр кручения и граничный член могут быть выражены через масштабный фактор следующим образом

$$T = -6\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad B = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), \tag{3}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. Подставляя компоненты тетрады для плоской метрики ФРУ в действие (1) и используя уравнения (3), находим точечный лагранжиан следующим образом:

$$\begin{aligned} L \quad = \quad & Fa^3 f - Fa^3 T f_T - 6Fa\dot{a}^2 f_T - Fa^3 B f_B + 6\dot{F}a^2\dot{a} f_B + 6Fa^2\dot{a}\dot{T} f_{BT} + \\ & 6Fa^2\dot{a}\dot{B} f_{BB} + \frac{i}{2}a^3\left(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi\right) - a^3 V. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя метод Эйлера-Лагранжа определяем систему уравнении движения

$$\begin{aligned} & \dot{T}\dot{B} f_{BTB} + \dot{B}\dot{T} f_{BBT} + \dot{T}^2 f_{BTT} + \dot{B}^2 f_{BBB} - 2\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{T} f_{TT} + \dot{B} f_{TB}\right) + \\ & \left(2\frac{\dot{F}}{F}\dot{T} + \ddot{T}\right) f_{BT} + \left(2\frac{\dot{F}}{F}\dot{B} + \ddot{B}\right) f_{BB} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{2}T\right) f_T + \\ & \left(\frac{\ddot{F}}{F} + \frac{1}{2}B\right) f_B - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2F}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi\right) - V\right] = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\psi + iV'\gamma^0\psi - ifF'\gamma^0\psi = 0, \tag{6}$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\bar{\psi} - iV'\bar{\psi}\gamma^0 - ifF'\bar{\psi}\gamma^0 = 0, \tag{7}$$

с энергетическим состоянием

$$6\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{T} f_{BT} + \dot{B} f_{BB}\right) + \left(T - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) f_T + \left(B + 6\frac{\dot{F}}{F}\frac{\dot{a}}{a}\right) f_B - f + \frac{V}{F} = 0, \tag{8}$$

где штрих обозначает дифференцирование по Ψ.

Далее ищем симметрии, используя подход Нетера для лагранжиана (4). В общем случае существует симметрия Нетера для данного лагранжиана, если выполняется условие

$$L_X \mathsf{L} = 0 \;\rightarrow\; X\mathsf{L} = 0. \tag{9}$$

В терминах компонент спинорного поля $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ и сопряженного с ним $\bar{\psi} = (\psi_0^\dagger, \psi_1^\dagger, -\psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger)$ наш лагранжиан можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L = {} & Fa^3 f - Fa^3 T f_T - 6Fa\dot{a}^2 f_T - Fa^3 B f_B + 6\dot{F}a^2\dot{a}f_B + 6Fa^2\dot{a}\dot{T}f_{BT} + \\ & 6Fa^2\dot{a}\dot{B}f_{BB} + \frac{i}{2}a^3\left(\overline{\psi}_i^\dagger\dot{\psi}_i - \dot{\psi}_i^\dagger\psi_i\right) - a^3 V. \end{aligned} \tag{10}$$

Векторное поле X для нашей модели можно записать как

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial T} + \gamma\frac{\partial}{\partial B} + \dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{T}} + \dot{\gamma}\frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \sum_{i=0}^{3}\left(\eta_i\frac{\partial}{\partial\psi_i} + \dot{\eta}_i\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_i} + \chi_i\frac{\partial}{\partial\psi_i^\dagger} + \dot{\chi}_i\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_i^\dagger}\right), \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\partial\alpha}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\alpha}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\alpha}{\partial B}\dot{B} + \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\psi_i}\dot{\psi}_i + \frac{\partial\alpha}{\partial\psi_i^\dagger}\dot{\psi}_i^\dagger\right), \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial\beta}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\beta}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\beta}{\partial B}\dot{B} + \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\psi_i}\dot{\psi}_i + \frac{\partial\beta}{\partial\psi_i^\dagger}\dot{\psi}_i^\dagger\right), \\ \dot{\gamma} &= \frac{\partial\gamma}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\gamma}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\gamma}{\partial B}\dot{B} + \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\psi_i}\dot{\psi}_i + \frac{\partial\gamma}{\partial\psi_i^\dagger}\dot{\psi}_i^\dagger\right), \\ \dot{\eta}_i &= \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\eta_i}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\eta_i}{\partial B}\dot{B} + \sum_{j=0}^{3}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial\psi_j}\dot{\psi}_j + \frac{\partial\eta_i}{\partial\psi_j^\dagger}\dot{\psi}_j^\dagger\right)\right), \\ \dot{\chi}_i &= \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial\chi_i}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\chi_i}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\chi_i}{\partial B}\dot{B} + \sum_{j=0}^{3}\left(\frac{\partial\chi_i}{\partial\psi_j}\dot{\psi}_j + \frac{\partial\chi_i}{\partial\psi_j^\dagger}\dot{\psi}_j^\dagger\right)\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \eta_i$ и χ_i - неизвестные функции переменных a, T, B, ψ_i и $\psi_i^\dagger$.

В общем случае условие симметрии Нетера приводит к выражению второй степени по скоростям ($\dot{a}$, $\dot{T}$, $\dot{B}$, $\dot{\psi}_i$ и $\dot{\psi}_i^\dagger$) с коэффициентами, являющимися частными производными от α, β, γ, η_i и χ_i по переменным a, T, B, ψ_i и $\psi_i^\dagger$. Таким образом, полученное выражение тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда эти коэффициенты равны нулю. Оно дает нам набор дифференциальных уравнений в частных производных α, β, γ, η_i и χ_i.

Таким образом, из уравнения (9) получены нетривиальные решения для системы дифференциальных уравнений следующим образом

$$\begin{aligned} &\alpha(a) = \alpha_0 a^n, \\ &\beta(a,T) = 2\alpha_0(n-1)a^{n-1}T, \\ &\gamma(a,B) = 2\alpha_0(n-1)a^{n-1}B, \\ &\eta_j(a,\psi_j) = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} + \varepsilon_j\eta_0\right)\psi_j, \\ &\chi_j(a,\psi_j^\dagger) = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} - \varepsilon_j\eta_0\right)\psi_j^\dagger. \end{aligned} \tag{13}$$

где α_0, η_0 и n - некоторые константы $(n \neq 1)$. Также получены частные решения для функции связи $F(\Psi)$, потенциала $V(\Psi)$ и $f(T,B)$ в виде

$$F(\Psi) = F_0 \Psi^{\frac{m}{3}}, \tag{14}$$

$$V(\Psi) = V_0 \Psi, \tag{15}$$

$$f(T,B) = C_0 T^{\frac{1}{2}\frac{m-2}{n-1}} + \frac{m(n-1)}{m-2n-1} T + B, \tag{16}$$

где C_0, F_0, V_0 и m - константы интегрирования.

Далее используя полученные решения и проинтегрировав систему уравении (5)-(7) и (8), получим космологическое решения. Поскольку функции связи и потенциала зависят от билинейной функции Ψ, то, используя уравнения Дирака (6) и (7), получаем

$$\dot{\Psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\Psi = 0, \tag{17}$$

далее проинтегрировав получено

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^3}, \tag{18}$$

где Ψ_0 - постоянная интегрирования. Если подставить решения (14)-(16) в уравнения движения (5) и (8), то получим следующее выражение

$$\mu \dot{a}(t)^2 + \nu a(t)^{m-1} = 0. \tag{19}$$

Тогда общее решение уравнения (19) имеет вид

$$a(t) = 4^{\frac{1}{m-3}} \left(-\frac{\mu}{(m-3)^2 (t+t_0)^2 \nu} \right)^{\frac{1}{m-3}}, \tag{20}$$

где t_0 – постоянная интегрирования.

Давайте рассмотрим частный случай при $m=2$ и $t_0 = 0$. Тогда можем переписать найденный масштабный фактор (20) как

$$a(t) = -\frac{1}{4}\frac{t^2 \nu}{\mu}. \tag{21}$$

Параметр Хаббла определяется в виде

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{t}, \tag{22}$$

Плотность энергии и давления имеют вид

$$\rho = \frac{12}{t^2}, \tag{23}$$

$$p = -\frac{8}{t^2}. \qquad (24)$$

И наконец, находим уравнения состояния как

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{2}{3}, \quad (-1 < \omega < -1/3). \qquad (25)$$

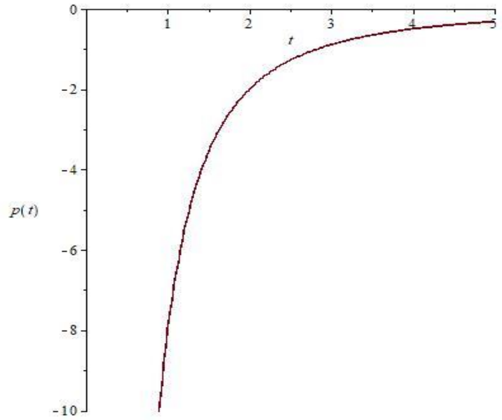

Рисунок 1. Динамика давления, описываемая уравнением (24)

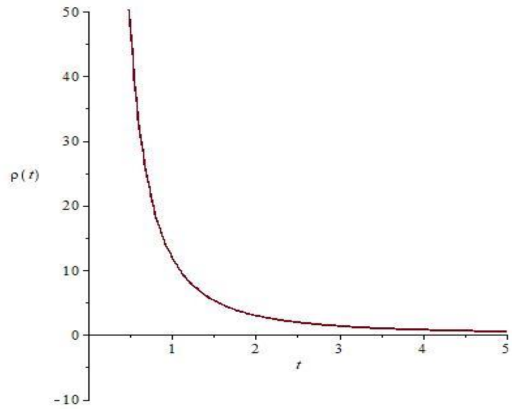

Рисунок 2. Эволюция плотности энергии

Только при условии $\omega < -1/3$ проявляется отрицательная гравитация и наступает ускоренное расширение Вселенной, то есть Вселенная описывается природой темной энергии (вакуум, фантомная энергия, квинтэссенция). Полученный нами результат соответствует современным наблюдательным данным.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP13067630.

Список использованных источников

1. Bahamonde S., Böhmer C.G., Wright M. Modified teleparallel theories of gravity //Physical Review D. – 2015. – Vol. 92, № 10. – P. 104042;
2. Gecim, G. Kucukakca Y. Scalar–tensor teleparallel gravity with boundary term by Noether symmetries // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2018. – Vol 15, № 09. https://doi.org/10.1142/S0219887818501517;

3. Kucukakca Y. Teleparallel dark energy model with a fermionic field via Noether symmetry // The European Physical Journal C. – 2014. – Vol. 74. – P. 3086;
4. Myrzakulov Y., Bekov S., K. Myrzakulov Noether symmetry approach in *f(T,B)* teleparallel gravity with a fermionic field // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2090. – P. 012058;
5. Bahamonde S., Capozziello S. Noether symmetry approach in *f(T,B)* teleparallel cosmology // The European Physical Journal C. – 2017. – Vol. 77. – P. 107.