ӘОЖ 517.957, 532.5

ЖОҒАРЫ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІ ҮШІН СИНУС ӘДІСІ

Құдайбергенов Ғазиз Исабекұлы[1], Муханмедина Камшат Тлеукабыловна[2]
gaziz.kudaibergenov.01@bk.ru, kama_2007@mail.ru
[1]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]Жамбыл атындағы ММИ математика мұғалімі, Қарағанды, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Г.Н.Шайхова

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер ғылымның әртүрлі салаларында, мысалы биология, қатты дене физикасы, сұйықтар механикасы, плазма физикасы, конденсирленген орта физикасы, оптикалық талшықтар және химиялық физикада физикалық құбылыстарды сипаттауда кеңінен қолданылады [1]. Әртүрлі әдістер, атап айтсақ, Дарбу түрлендіру әдісі [2], Хирота әдісі [3], синус-косинус әдісі [4-5] және тағыда басқа әдістер сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін дамыған.

Екі өлшемді жоғары ретті сызықты емес Шредингер теңдеуі

$$iq_t - iq_x + q_{xx} + q_{yy} - 2q_{xy} + 2|q|^2 q = 0, \tag{1}$$

мұндағы q-кеңістіктік комплексті функция координатаның күрделі мәні x, y және уақытқа t тәуелді, индекстер x, y, t айнымалылары бойынша дербес туындыларды білдіреді.

Синус әдісінің сипаттамасы

Бұл бөлімде синус әдісін сипаттаймыз [4-5]. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді

$$E_1(Q_t, Q_x, Q_{xx}, Q_{xxx}, ...) = 0, \tag{2}$$

қарапайым дифференциалды теңдеуге айналдырамыз

$$E_2(Q, Q', Q'', Q''', ...) = 0. \tag{3}$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеудің (3) шешімдері келесі түрде ізделінеді

$$Q(x,t) = \lambda \sin^k(\mu\xi), \tag{4}$$

мұндағы λ, μ және k анықталатын параметрлер, μ толқындық сан [1]. (4) теңдеудің туындылары келесідей болады [4-5].

$$Q' = k\mu\lambda \sin^{k-1}(\mu x)\cos(\mu x), \tag{5}$$

$$Q'' = \mu^2 \lambda k(k-1)\sin^{k-2}(\mu x) - \mu^2 k^2 \lambda \sin^k(\mu x). \quad (6)$$

Жоғарыда келтірілген теңдеулерді келтірілген қарапайым дифференциалдық теңдеуге қолдана отырып, біз $\sin^{\beta}(\mu\xi)$ мүшеден тұратын тригонометриялық теңдеуді аламыз. Содан кейін біз k-ны анықтау үшін алдымен синус жұптарының көрсеткіштерін теңдестіру арқылы параметрлерді анықтаймыз. Содан кейін біз барлық коэффициенттерді $\sin^k(\mu\xi)$-ге тең етіп жинаймыз, онда бұл коэффициенттер нөлге тең болуы керек. k,λ және μ белгісіздер арасында алгебралық теңдеулер жүйесі беріледі және осыдан коэффициенттерді анықтай аламыз.

Синус әдісін қолдану

(1) теңдеу күрделі функция болғандықтан, біз келесі түрлендіруді қолданамыз

$$q(x,y,t) = Q(\xi)e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma t + \varphi_0)}, \quad (7)$$

мұндағы $\xi = x + \tau y - \theta t$.

Түрлендіруден кейінгі теңдеу келесідей көріністе

$$\begin{aligned} &-i\theta Q_\xi - \gamma Q - iQ_\xi + \alpha Q + Q_{\xi\xi} + 2i\alpha Q_\xi - \alpha^2 Q + \tau^2 Q_{\xi\xi} + 2i\tau\beta Q_\xi - \beta^2 Q - \\ &-2\tau Q_{\xi\xi} - 2i\beta Q_\xi - 2i\tau\alpha Q_\xi + 2\alpha\beta Q + 2Q^3 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

(8) теңдеуді келесідей нақты және жорамал бөліктерге бөлу арқылы қарастырамыз

$$-\gamma Q + \alpha Q + Q_{\xi\xi} - \alpha^2 Q + \tau^2 Q_{\xi\xi} - \beta^2 Q - 2\tau Q_{\xi\xi} + 2\alpha\beta Q + 2Q^3 = 0, \quad (9)$$

$$-\theta Q_\xi - Q_\xi + 2\alpha Q_\xi + 2\tau\beta Q_\xi - 2\beta Q_\xi - 2\tau\alpha Q_\xi = 0. \quad (10)$$

Жорамал бөлігін интегралдаймыз, интегралдау тұрақтысы 0-ге тең.

$$Q(-\theta - 1 + 2\alpha + 2\tau\beta - 2\beta - 2\tau\alpha) = 0. \quad (11)$$

(11) теңдеу мына шартты қанағаттандырады

$$\theta = -1 + 2\alpha + 2\tau\beta - 2\beta - 2\tau\alpha. \quad (12)$$

Теңдеудің шешімін алу үшін нақты бөлікпен жұмыс жасаймыз

$$(-\gamma + \alpha - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)Q + (1 - 2\tau + \tau^2)Q'' + 2Q^3 = 0, \quad (13)$$

Синус шешімі

Біз (4) теңдеуді және оның туындыларын (5),(6) қолданамыз

$$\begin{aligned} &(-\gamma + \alpha - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)\lambda\sin^k(\mu\xi) + (1 - 2\tau + \tau^2)[k(k-1)\mu^2\lambda\sin^{k-2}(\mu\xi) - \\ &-k^2\mu^2\lambda\sin^k(\mu\xi)] + 2\lambda^3\sin^{3k}(\mu\xi) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

алынған (14) теңдеуден көрсеткіштерді теңестіру арқылы k-ны анықтаймыз

$$3k = k - 2 \Rightarrow k = -1, \quad (15)$$

алынған мәнді (14) теңдеуге қоямыз

$$
\begin{aligned}
&(-\gamma+\alpha-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)\lambda\sin^{-1}(\mu\xi)+(1-2\tau+\tau^2)[2\mu^2\lambda\sin^{-3}(\mu\xi)-\\
&-\mu^2\lambda\sin^{-1}(\mu\xi)]+2\lambda^3\sin^{-3}(\mu\xi)=0,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(16) теңдеуден бізде келесі теңдеулер жүйесі шығады

$$\sin^{-1}(\mu\xi):-\gamma+\alpha-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta-\mu^2-\mu^2\tau^2+2\tau\mu^2=0, \tag{17}$$

$$\sin^{-3}(\mu\xi):\mu^2+\mu^2\tau^2-2\mu^2\tau+\lambda^2=0\Rightarrow-\mu^2-\mu^2\tau^2+2\mu^2\tau=\lambda^2 . \tag{18}$$

Теңдеулер жүйесінің шешімі келесідей

$$\lambda=\pm\sqrt{\gamma-\alpha+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta} , \tag{19}$$

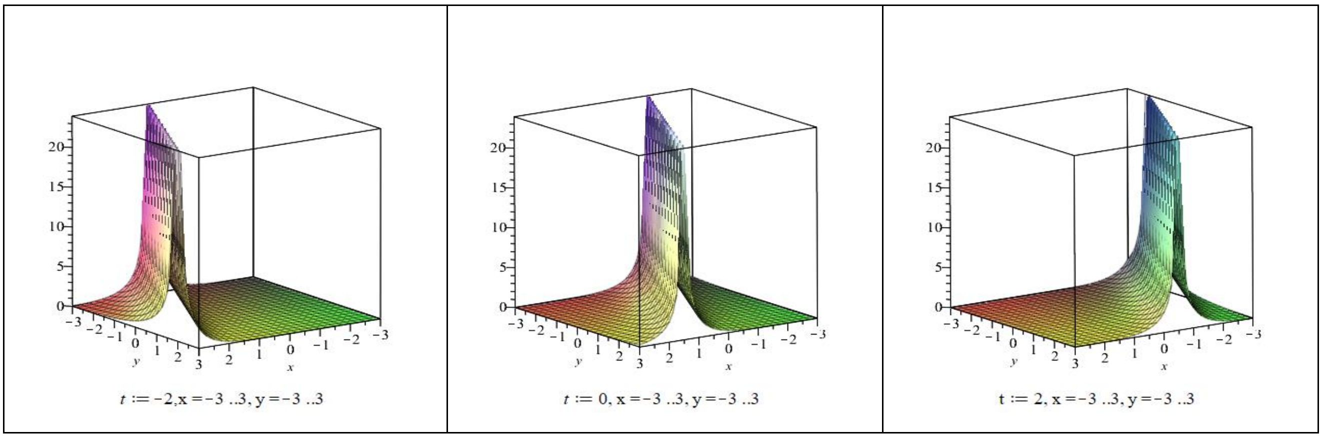
$$\mu=\pm i\frac{\sqrt{\gamma-\alpha+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}{1-\tau} , \tag{20}$$

(19),(20) тендулерді (4)теңдеуге қойып, содан кейін алынған өрнекті (7) теңдеуге ауыстыру арқылы біз синус шешімін аламыз

$$q(x,y,t)=\pm\sqrt{\gamma-\alpha+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}\sin^{-1}(\pm i\frac{\sqrt{\gamma-\alpha+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}{1-\tau}\xi)e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma t+\varphi_0)}. \tag{21}$$

мұндағы $\xi=x+\tau y-\theta t$ және $\theta=-1+2\alpha+2\tau\beta-2\beta-2\tau\alpha$.

Жоғарыда табылған шешімнің графиктері келесі суреттерде көрсетілген



1-сурет. $q(x,y,t)$ шешімінің 3D графигі

Қорытынды

Бұл жұмыста біз екі өлшемді жоғары ретті сызықты емес Шредингер теңдеуін зерттедік. Синус әдісі арқылы осы теңдеудің нақты толқындық шешімін алдық. Алынған шешімдерді Maple бағдарламасында 3D-графигін тұрғыздық. Бұл әдісті математикалық физикадағы басқа сызықты емес дифференциалдық теңдеулерге де қолдануға болады деп санаймыз.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory. Springer, 2009, pp. 479-502.
2. Kutum B.B., Shaikhova G.N. q-soliton solution for two-dimensional q-Toda lattice. Bulletin of the Karaganda university. Physics series., 2019, No. 2 (95), pp. 22-26.
3. Wazwaz A.M. The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures. Applied Mathematics and Computation, 2004, vol. 159(2), pp. 559-576.
4. Yusufoglu E., Bekir A. Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using Sine-Cosine method. International Journal of Computer Mathematics , 2006, vol. 83(12), pp. 915-924.
5. Shaikhova G.N., Kutum B.B., Altaybaeva A.B., Rakhimzhanov B.K. Exact solutions for the (3+1)-dimensional Kudryashov-Sinelshchikov equation. Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1416, pp. 012030(1-7).