ӘОЖ 517.958

ДИСКРЕТТІ ИНТЕГРАЛДАНУШЫ ЖҮЙЕЛЕР ЖӘНЕ ҚИСЫҚТЫҚ ГЕОМЕТРИЯСЫ

Мырзахан А.Е.

980101302959@enu.kz

7М05304-«Физика» мамандығының магистранты

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті Нұр-Сұлтан қ.

Бұл мақалада біз локальді емес бейсызықты Шредингер теңдеуіне қатысты геометрияны, олардың эквивалентті құрылымын зерттеу арқылы түсіндіруге тырысамыз. Локальді емес фокустау бейсызықты Шредингер теңдеуі Гейзенберг теңдеуіне тең калибрлік эквиваленттікті орнатуға болатындығын көрсетеміз.[1-4] Алдымен локальді емес фокустау үшін бейсызықты Шредингер теңдеуін жазайық

$$iq_t(x,t)+q_{xx}(x,t)+2q(x,t)q^*(-x,t)q(x,t)=0, \tag{1}$$

Лакс жұбын жазайық

$$M=\begin{pmatrix} -i\lambda & q(x,t) \\ -q^*(x,t) & i\lambda \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} -2i\lambda^2+iq(x,t)q^*(-x,t) & 2\lambda q(x,t)+iq_x(x,t) \\ -2\lambda q^*(-x,t)+iq_x^*(-x,t) & -2i\lambda^2-iq(x,t)q^*(-x,t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

локальді емес бейсызықты Шредингер теңдеуінің дискретті түрі келесі түрде жазылады[3]

$$i\frac{dQ_n}{d\tau}+Q_{n+1}+Q_{n-1}-2Q_n\pm Q_nQ_{-n}^*(Q_{n+1}+Q_{n-1})=0, \tag{3}$$

және оның Лакс жұбы

$$M_n=\begin{pmatrix} z & Q_{-n}^*z^{-1} \\ -Q_nz & z^{-1} \end{pmatrix},\ N_n=i\begin{pmatrix} 1-z^2+z-z^{-1}-Q_{-n}^*Q_{n-1} & -Q_{-n}^*+Q_{-n-1}^*z^{-2} \\ -Q_n+Q_{n-1}z^2 & -1+z^{-2}+z-z^{-1}+Q_nQ_{-n-1}^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

$S_n=G_n^{-1}\sigma_3G_n$, мұнда G_n сызықты есепті қанағаттырады

$$G_{n+1}=M_n(1)G_n \quad G_{n,\tau}=N_n(1)G_n \tag{5}$$

осы пішінде G_n төмендегі мәнді қабылдайды

$$G_n=\begin{pmatrix} f_n & -g_{-n}^* \\ g_n & f_{-n}^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

дискретті калибрлі түрлендіру кезінде

$$\tilde{M}_n=G_{n+1}^{-1}M_nG_n \quad \tilde{N}_n=G_n^{-1}N_nG_n-G_n^{-1}G_{n,\tau}, \tag{7}$$

бұдан аламыз

$$\tilde{M}_n = G_n^{-1}M_n^{-1}(1)M_nG_n = \frac{z+z^{-1}}{2}I + \frac{z-z^{-1}}{2}S_n, \tag{8}$$

$$\tilde{N}_n = G_n^{-1}(N_n - N_n(1))G_n$$

$$= iG_n^{-1}\begin{pmatrix} 1-z^2+z-z^{-1} & (z^{-2}-1)Q^*_{-n-1} \\ (z^2-1)Q_{n-1} & -1+z^2+z-z^{-1}\end{pmatrix}G_n$$

$$= i(z-z^{-1})I + i\left(\frac{z^2+z^{-2}}{2}-1\right)G_n^{-1}\begin{pmatrix} -1 & Q^*_{-n-1} \\ Q_{n-1} & 1\end{pmatrix}G_n \tag{9}$$

$$+\,i\frac{z^2-z^{-2}}{2}G_n^{-1}\begin{pmatrix} -1 & Q^*_{-n-1} \\ Q_{n-1} & 1\end{pmatrix}G_n$$

$$= i(z-z^{-1})I + i\left(1-\frac{z^2+z^{-2}}{2}\right)\frac{S_n+S_{n-1}}{1+\frac{1}{2}tr(S_nS_{n-1})} - i\frac{z^2-z^{-2}}{2}\frac{I+S_{n-1}S_n}{1+\frac{1}{2}tr(S_nS_{n-1})}.$$

Жоғарыдағыларды ескеріп сәйкестендірулерді жазайық

$$1+\frac{1}{2}tr(S_{n+1}S_n) = \frac{2}{1+Q_nQ^*_{-n}}, \tag{10}$$

$$G_n^{-1}\begin{pmatrix} -1 & Q^*_{-n-1} \\ Q_{n-1} & 1\end{pmatrix}G_n = G_{n-1}^{-1}G_n = \frac{I+S_{n-1}S_n}{1+\frac{1}{2}tr(S_nS_{n-1})} \tag{11}$$

$$G_n^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -Q^*_{-n-1} \\ -Q_{n-1} & 1\end{pmatrix}G_n = \frac{S_n+S_{n-1}}{1+\frac{1}{2}tr(S_nS_{n-1})}. \tag{12}$$

содан кейін дискретті нөлдік қисықтық шарты $\tilde{M}_{n,\tau} = \tilde{N}_{n+1}\tilde{M}_n - \tilde{M}_n\tilde{N}_n$ теңдеуін пайдаланып және z қуатын салыстыра отырып, дискретті Гейзенберг моделі тәрізді теңдеу аламыз.

$$\frac{dS_n}{d\tau} = i\frac{[S_{n+1},S_n]}{1+\frac{1}{2}tr(S_{n+1}S_n)} - i\frac{[S_n,S_{n-1}]}{1+\frac{1}{2}tr(S_nS_{n-1})} \tag{13}$$

мұндағы S_n матрица мәні мынаған тең

$$S_n = G_n^{-1}\sigma_3G_n = \frac{1}{f_nf^*_{-n}+g_ng^*_{-n}}\begin{pmatrix} f_nf^*_{-n}-g_ng^*_{-n} & -2f^*_{-n}g^*_{-n} \\ -2f_ng_n & g_ng^*_{-n}-f_nf^*_{-n}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

$f_n = a_n + ib_n, \quad g_n = c_n + id_n$ деп белгілеу енгізе отырып, S_n матрицасының түрін жазамыз

$$S_n = \begin{pmatrix} s_{1n} + is_{2n} & s_{3(-n)} - is_{4(-n)} \\ s_{3n} + is_{4n} & -(s_{1n} + is_{2n}) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Беттерді параметрлеу және оларды дискреттеу

Параметрленген беттер мен торлар

Аналитикалық әдістермен зерттелген Евклид 3-өлшемді кеңістігіндегі беттер әдетте карталар түрінде сипатталады[5-7]

$$F : \Re \to R^3 \tag{16}$$

Мұндағы $\Re$-екі өлшемді әртүрлілік. $(u,\upsilon) : U \to R^2$ тең деп алсақ, онда $U \subset \Re$ аймағындағы жергілікті координаталар.

$$I = \prec dF, dF \succ = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2, \tag{17}$$

$$II = -\prec dF, dN \succ = Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2. \tag{18}$$

Мұнда $N : \Re \to S^3$ – Гаусс картасы. Негізгі қисықтықтар k_1, k_2 Вайнгартен операторының меншікті мәні болып табылады[6-7].

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{19}$$

батыру $(EG - F^2 \neq 0)$. Бұл орташа және Гаусс қисықтығы үшін келесідей түрде беріледі

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + LG - 2MF}{2(EG - F^2)}, \tag{20}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{21}$$

Қарапайым жағдайда $R - R^2$ аумағына немесе R^2 аумағының кейбір бөліктеріне сәйкес келеді. Біз айналысатын теория негізінен жергілікті болып табылады[7-8]. Біз бұл екі жағдайды белгілеріне сәйкес ажыратпаймыз және жазамыз

$$F : R^2 \to R^3, \tag{22}$$

F тек R^2 доменінде анықталуы мүмкін екенін ескере отырып аламыз.

Интегралданатын теңдеулермен сипатталған беттерді іріктеу және аналитикалық әдістермен зерттеу үшін үш өлшемді Евклид кеңістігін қиялдаған кватерниондардың ImH кеңістігімен анықтау және батыруды 2×2 матрицалары арқылы сипаттау ыңғайлы.

H арқылы кватерниондар алгебрасын, $H_* = H \setminus \{0\}$ арқылы кватерниондардың мультипликативті тобын және H арқылы $\{1, i, j, k\}$ стандартты базисін белгілейміз [9-10].

$$ij = k, \ \ jk = i, \ \ ki = j. \tag{23}$$

H стандартты матрицалық көрінісін қолдана отырып, σ_α − Паули матрицалары осы базиске келесідей байланысын көреміз:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\, \mathbf{i}, \ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \ \ j, \tag{24}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\, k, \ \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Тұрақты Гаусс қисықтығы бар дискретті беттер тиісті тегіс беттің қасиеттерінің табиғи дискретті аналогтарымен анықталады

Дискретті К-бет дискретті А-бет болып табылады.

$$F : G \to R^3 \tag{26}$$

осылайша, қарапайым төртбұрыштардың қарама-қарсы жиектерінің ұзындығы тең болады[6]. Атап айтқанда, $G = Z^2$ жағдайында бізде:

- әр нүкте үшін $F_{n,m}$ жазықтығы бар $P_{n,m}$ келесідей

$$F_{n,m}, F_{n+1,m}, F_{n-1,m}, F_{n,m+1}, F_{n,m-1}, \in P_{n,m}, \tag{27}$$

- қарапайым төртбұрыштардың қарама-қарсы жиектерінің ұзындығы тең
-

$$\left\| F_{n+1,m} - F_{n,m} \right\| = \left\| F_{n+1,m+1} - F_{n,m+1} \right\| = A_n \neq 0, \tag{28}$$

$$\left\| F_{n,m+1} - F_{n,m} \right\| = \left\| F_{n+1,m+1} - F_{n+1,m} \right\| = B_m \neq 0, \tag{29}$$

мұнда біз көріп тұрғанымыздай A_n m-ге тәуелді емес, ал B_m n-ге тәуелді емес екен деген тұжырымға келеміз.

Біздің мақалада геометриялық негізделген анықтамадан бастаймыз және интегралданатын дискретті жүйелер қалай пайда болатынын көрсетеміз. Осы бөлімде біз интегралданатын жүйелер теориясынан туындайтын басқа жолды ұстанамыз: біз Лакстың көрінісін табиғи түрде іріктейміз, оның цикл тобының құрылымын сақтап көрсетеміз.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP008857372

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. M.J. Ablowitz and Z.H.Musslimani, Phys. Rev. let. 110, 064105 (2013).
2. C.M. Bender and S.Boettcher, Phys. Rev. let. 80, 5243 (1998).
3. Berger, M. (1977). *Geometrie 2/espaces euclidiens, triangles, cercles at spheres.* Cedic/Fernand Nathan.
4. Bianchi, L. (1902). *Lezioni di geometria differenziale.* Spoerri, Pisa.
5. Bobenko, A.I. (1996). Discrete conformal maps and surfaces, GANG Preprint IV.27, University of Massachusetts, to appear in *Proceedings SIDE II Conference*, Canterburry, July 1-5, 1996, eds.: PClarkson, F.Nijhoff. Cambridge University Press.

6. Bobenko, A., Bordemann, M., Gunn, C., Pincall, U. (1993). On two integrable cellular automata. *Comm. Math. Phys.*, **158**, 127-134.
7. Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V.F. k-Inflation// Physics Letters B. – 1999. – Vol. 458. – P. 209-218.
8. Sym, A. (1985). Soliton surfaces and their application (Soliton geometry from spectral problems). In: Lecture Notes in Phys. 239, Springer, pp. 154-231.
9. Wente, H.C. (1986). Counterexample to a conjecture of H.Hopf. *Pac. J. Math.,* **121**, 193-243.
10. Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence// Physical Review D. – 2000. – Vol. 62. – P. 3511.

УДК 530.182

РЕШЕНИЕ ТИПА БРИЗЕР ДЛЯ (1+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Нұрбаева З.А[1]., Сагидуллаева Ж.М.[2]
nur.zerde98@gmail.com
[1]Магистрант 2 курса специальности «7М05304-Физика», [2]старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Алтайбаева А.Б.

Уравнение Хироты является широко используемым инструментом для описания взаимодействий бегущих волн в физике. Подробно об этом было написано в работе [1], где так же были рассмотрены мультисолитонные решения, решения типа разрушительных волн.

В данной статье было получено решение типа бризер для уравнения Хироты с помощью метода преобразования Дарбу. Данный метод обеспечивает более систематическое и удобное управление процессом нелинейных волновых уравнений. Некоторые из них представлены в виде графиков, чтобы показать поведение решений бегущей волны.

(2+1)-мерное нелокальное уравнение Хироты [2]

$$iq_t + \alpha q_{xy} + i\beta q_{xxy} - \vartheta q + i(wq)_x = 0, \tag{1}$$

$$\vartheta_x + 2\alpha\delta(qq^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y))_y - 2i\beta\delta\left(q^*_{xy}(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)q - q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)q_{xy}\right) = 0, \tag{2}$$

$$w_x - 2\beta\delta\left(qq^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y)\right)_y = 0, \tag{3}$$

где $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $q(x, y, t) -$ комплексная функция, $q^*(\epsilon_1 x, \epsilon_2 t, \epsilon_3 y) -$ ее комплексное сопряжение, $v(x, y, t), w(x, y, t)$- вещественные функции, α, β являются постоянными и $\delta = \pm 1$.

Соответствующая пара Лакса для (2+1)-мерных уравнений Хироты может быть выражена следующим образом

$$\Phi_x = A\Phi, \tag{4}$$

$$\Phi_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\Phi_y + \mathrm{B}\Phi. \tag{5}$$

С собственными функциями $\Phi = (\Phi_1;\ \Phi_2)^T$. Матричные операторы данной системы A и B запишутся как

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0,$$
$$B = \lambda B_1 + B_0,$$

где матрицы имеют следующие виды