ӘОЖ 517.957, 532.5

КЕҢЕЙТІЛГЕН МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ТАНГЕНС ӘДІСІ

Прімхан Нұрсая Талғатқызы[1], Муханмедина Камшат Тлеукабыловна[2]
nursayaprimkhan@gmail.ru, kama_2007@mail.ru
[1]Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ 4-курс студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]Жамбыл атындағы ММИ математика пәні мұғалімі, Қарағанды, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Г.Н.Шайхова

Бұл жұмыста жоғары деңгейлі сызықтық емес мүшелер мен бесінші ретті дисперсияны қамтитын кеңейтілген модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуін зерттейміз, ол

$$u_t + u_x + a(-6u^2 u_x + u_{xxx}) + a(6u^5 - 10uu_x^2 - 10u^2 u_{xx} + u_{xxxx})_x = 0 , \qquad (1)$$

мұндағы $u(x,t)$– кеңістіктік координатаның x және t уақытының нақты функциясы, a≪1 тереңдікке қатысты шағын толқын амплитудасының өлшемсіз өлшемі. Кеңейтілген модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің бесінші ретті модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеулерінің стандартты тобынан өзгешелігі төрт сызықты емес мүшелерді және екі сызықтық дисперсиялық мүшелерді қамтиды. Бұл теңдеу стандартты

Кортевег-де Фриз теңдеуінің жалпылауы болып табылады және Абловиц-Кауп-Ньюэлл-Сегур иерархиясымен сипатталған. [1,2]

Тангенс әдісінің сипаттамасы

Бұл бөлімде тангенс әдісін қарастырамыз [3-4]. Толқындық түрлендіруді қолдану арқылы тангенс-котангенс әдісі бойынша

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=(kx-ct)\,. \tag{2}$$

Берілген дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді

$$E_1\left(u_t\,,u_x\,,u_{xx}\,,u_{xxx},..\right)=0\,, \tag{3}$$

қарапайым дифференциалдық теңдеуге түрлендіруге болады

$$E_2\left(u,u^{'},u^{''},u^{'''},..\right)=0\,. \tag{4}$$

Сонда (4) теңдеу барлық мүшелері интегралдау константалары нөлге тең туындыларды қамтығанша интегралданады.Қарапайым дифференциалдық теңдеу(4) шешімдерін мына түрде көрсетуге болады

$$u(x,t)=\lambda\tan^{\beta}\left(\mu\xi\right)\,, \tag{5}$$

мұндағы $\xi=kx-ct$, μ – сәйкесінше толқын саны және c – толқын жылдамдығы болып табылады [5]. (5) теңдеудің туындылары

$$u'=\lambda\beta\mu\tan^{\beta-1}\left(\mu\xi\right)+\lambda\beta\mu\tan^{\beta+1}\left(\mu\xi\right), \tag{7}$$

$$u''=\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\tan^{\beta-2}\left(\mu\xi\right)+2\lambda\mu^2\beta^2\tan^{\beta}\left(\mu\xi\right)+\lambda\mu^2\beta^2(\beta+1)\tan^{\beta+2}\left(\mu\xi\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}u''''&=\lambda\mu^4\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)\tan^{\beta-4}(\mu\xi)+\lambda\mu^4\beta(4\beta^2-8\beta+8)(\beta-1)\tan^{\beta-2}\left(\mu\xi\right)+\\&+\lambda\mu^4\beta\left(6\beta^2+10\beta\right)\tan^{\beta}\left(\mu\xi\right)+\lambda\mu^4\beta(4\beta^2+8\beta+8)(\beta+1)\tan^{\beta+2}\left(\mu\xi\right)+\\&+\lambda\mu^4\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\tan^{\beta+4}(\mu\xi)\end{aligned}\,. \tag{9}$$

(5)-(9) теңдеулерді келтірілген қарапайым дифференциалдық теңдеуде қолданып, мүшелері $\tan^{r}(\mu\xi)$ болатын тригонометриялық теңдеуін аламыз. Содан кейін β-ны анықтау үшін алдымен әрбір тангенс жұбының дәрежелерін теңестіру арқылы параметрлерді анықтаймыз. Әрі қарай, біз $\tan^{r}(\mu\xi)$ үшін бірдей дәрежедегі барлық коэффициенттерді жинаймыз. Белгісіз λ және μ арасындағы алгебралық теңдеулер жүйесі беріледі және одан коэффициенттерді анықтауға болады.

Тангенс әдісін қолдану

Мына түрде берілген толқындық түрлендіруді

$$u(x,t)=u(\xi)=u\left(kx-ct\right), \tag{10}$$

(1) теңдеуге қойып, келесі қарапайым дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$u^{'}(k-c)-2aku^3+ak^3u^{'''}+a^2(6u^5-10k^2u(u^{'})^2-10k^2u^2u^{''}+k^4u^{iv})=0\,, \tag{11}$$

(11) теңдеуді бір рет интегралдасақ, келесі нәтиже шығады

$$u(k-c)-2aku^3+ak^3u^{''}+a^2(6u^5-10k^2u(u^{'})^2-10k^2u^2u^{''}+k^4u^{iv})=L\,, \tag{12}$$

мұндағы L интегралдау тұрақтысы. $L=0$ интегралдау тұрақтысын алу арқылы біз келесі теңдеуді жазамыз

$$u(k-c)-2aku^3+ak^3u^{''}+a^2(6u^5-10k^2u(u^{'})^2-10k^2u^2u^{''}+k^4u^{iv})=0\,. \tag{13}$$

Енді (13) теңдеуді тангенс әдісімен шешеміз. Шешімді алу үшін

$$u(x,t)=\lambda\tan^{\beta}(\mu\xi), \tag{14}$$

түрінде берілген функцияның туындыларын табамыз (13) теңдеуге сәйкесінше (5) және (9) теңдеулерді қойып, келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned}
&(k-c)\lambda\tan^{\beta}(\mu\xi)-2ak\lambda^3\tan^{3\beta}(\mu\xi)+ak^3\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi)+2ak^3\lambda\mu^2\beta^2\tan^{\beta}(\mu\xi)+\\
&+ak^3\lambda\mu^2\beta(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)+6a^2\lambda^5\tan^{5\beta}(\mu\xi)-10a^2k^2\lambda^3\mu^2\beta^2\tan^{3\beta-2}(\mu\xi)-\\
&-10a^2k^2\lambda^3\mu^2\beta^2\tan^{3\beta+2}(\mu\xi)-10a^2k^2\lambda^3\mu^2\beta(\beta-1)\tan^{3\beta-2}(\mu\xi)-20a^2k^2\lambda^3\mu^2\beta\tan^{3\beta}(\mu\xi)-\\
&-10a^2k^2\lambda\mu^2\beta(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)+a^2k^4\lambda\mu^4\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)\tan^{\beta-4}(\mu\xi)+\\
&+a^2k^4\lambda\mu^4\beta(4\beta^2-8\beta+8)(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi)+a^2k^4\lambda\mu^4\beta(6\beta^2+10\beta)\tan^{\beta}(\mu\xi)+\\
&+a^2k^4\lambda\mu^4\beta(4\beta^2+8\beta+8)(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)+a^2k^4\lambda\mu^4\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\tan^{\beta+4}(\mu\xi)=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Тепе-теңдік әдісін қолданып, (15) теңдеудегі $\tan^r$ функциясының дәрежелерін теңестіреміз және β мәнін анықтаймыз

$$3\beta=\beta-2\ ,\qquad 5\beta=3\beta-4\,,$$

осыдан

$$\beta=-1\ . \tag{16}$$

Табылған β мәнін (15) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз

$$\begin{aligned}
&(k-c)\lambda\tan^{-1}(\mu\xi)-2ak\lambda^3\tan^{-3}(\mu\xi)+2ak^3\lambda\mu^2\tan^{-3}(\mu\xi)+2ak^3\lambda\mu^2\tan^{-1}(\mu\xi)+\\
&+6a^2\lambda^5\tan^{-5}(\mu\xi)-10a^2k^2\lambda^3\mu^2\beta^2\tan^{-5}(\mu\xi)-10a^2k^2\lambda^3\mu^2\tan^{-1}(\mu\xi)-\\
&-20a^2k^2\lambda^3\mu^2\tan^{-5}(\mu\xi)+20a^2k^2\lambda^3\mu^2\tan^{-3}(\mu\xi)+10a^2k^2\lambda^3\mu^2\tan^{-1}(\mu\xi)+\\
&+24a^2k^4\lambda\mu^4\tan^{-5}(\mu\xi)+40a^2k^4\lambda\mu^4\tan^{-3}(\mu\xi)+16a^2k^4\lambda\mu^4\tan{-1}(\mu\xi)=0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Тангенс функцияларының әрбір жұбының коэффициенттерін теңестіру арқылы келесі алгебралық теңдеулер жүйесін табамыз

$$\tan^{-1}(\mu\xi)\Big|(k-c)\lambda+2ak^3\lambda\mu^2+16a^2k^4\lambda\mu^4=0\,, \tag{18}$$

$$\tan^{-3}(\mu\xi)\Big| -2ak\lambda^3 + 2ak^3\lambda\mu^2 + 20a^2k^2\lambda^3\mu^2 + 40a^2k^4\lambda\mu^4 = 0 \;, \tag{19}$$

$$\tan^{-1}(\mu\xi)\Big| 6a^2\lambda^5 - 10a^2k^2\lambda^3\mu^2 - 20a^2k^2\lambda^3\mu^2 + 24a^2k^4\lambda\mu^4 = 0 . \tag{20}$$

Теңдеулер жүйесі (18)-(20) шешу арқылы келесі шешімдерді табамыз

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{10ak}} \;, \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{10ak}} \;, \; c = k + 2ak^3\mu^2 + 16a^2k^4\mu^4, \tag{21}$$

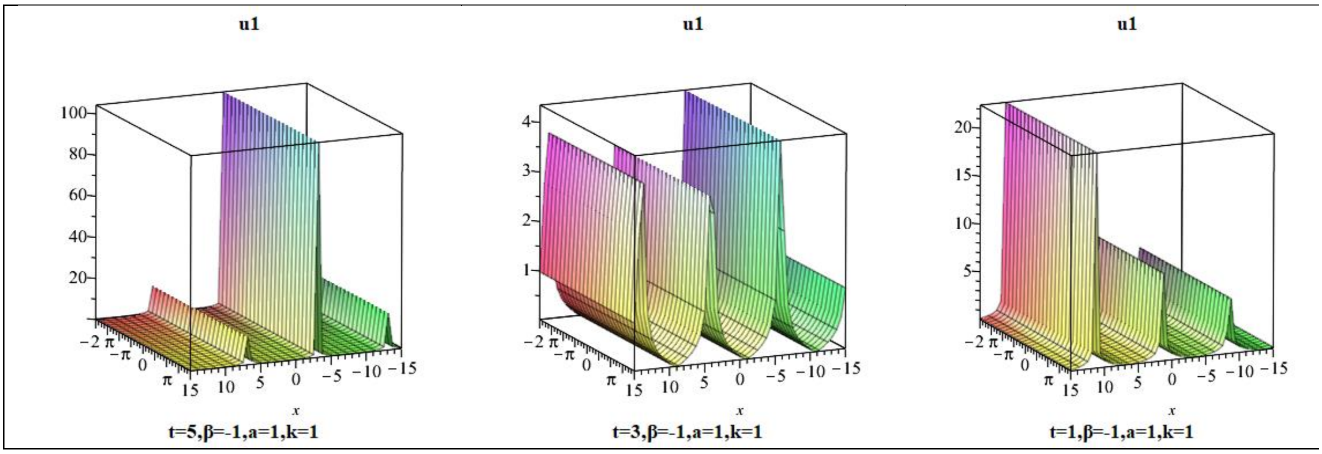
мұндағы a, κ нақты сан.

Бұл шешімдерді (14) теңдеуге қойсақ, кеңейтілген модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің (1) тангенсті шешімі шығады

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{1}{10ak}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{10ak}}(kx - ct)\right), \tag{22}$$

мұндағы $c = k + 2ak^3\mu^2 + 16a^2k^4\mu^4$.

Табылған шешімнің графигін “Maple” бағдарламасы арқылы құрамыз



1-сурет. Кеңейтілген модификацияланған КдФ теңдеуінің шешімі

Тангенс-котангенс әдісі кеңейтілген модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуін аналитикалық өңдеу үшін тиімді қолданылды. Бұл теңдеу стандартты Кортевег-де Фриз теңдеуінің жалпылауы болып табылады және Абловиц-Кауп-Ньюэлл-Сегур иерархиясымен сипатталған. Зерттеу жұмысында қозғалмалы толқын шешімдері алынды. Алынған шешімдер кейбір практикалық физикалық есептерге қолданылуы мүмкін. Қолданылатын әдіс сызықты емес теңдеулерінің басқа түрлері үшін қолданылуы мүмкін.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Marchant T.R., Smyth N.F. Soliton interaction for the extended Korteweg-de Vries equation. IMA Journal of Applied Mathematics. -1996.-Vol.56.-P. 157–176
2. Marchant T.R., Smyth N.F. The extended Korteweg-de Vries equation and the resonant flow of a fluid over topography. Journal of Fluid Mechanics.-1990.-Vol.221.-P.263-288

3. Jawal M., Al-Shaeer A. Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations by Tan-Cot Method.// IOSR Journal of Mathematics, vol 5, Issue 3. 2013, pp 06-11.
4. Jawal A.J. New exact solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using Tan-Cot Function Method.// Studies in Mathematical sciences, Vol.5, No 2, 2012, pp 13 – 25
5. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory // Springer.-2009.-P.746