УДК 524.834

ТОЧНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ С ФЕРМИОННЫМИ ПОЛЯМИ И ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

Сагинаев Ержан Ерланулы

saginaev.erzhan@gmail.com

Магистрант 2 курса ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов.

В этой работе мы изучаем гравитацию $F(R)$ с f эссенцию для плоской и однородной вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера. Для этой модели мы представили точечный Лагранжиан и соответствующие уравнения поля [1-2]. Чтобы описать динамику Вселенной, мы исследовали некоторые космологические решения для функций K, L и h. Показано, что эти решения описывают ускоренное расширение Вселенной в последнее время [3-4].

Для четырехмерного пространства-времени действие гравитации $F(R)$ с материей записывается как

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[F(R) + L_m\right], \tag{1}$$

где $g = \det(g_{ik})$- определитель метрической тензорной матрицы, $F(R)$ дифференцируемая функция скаляра Риччи R, L_m- лагранжиан материи и для нашего случая $8\pi G = 1$. Варьируя действия (1) относительно метрического тензора приводит к следующим уравнениям поля

$$F'(R)R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}F(R) - \nabla^i\nabla_k F'(R) + g_{ik}\Diamond F'(R) = kT_{ik}, \tag{2}$$

где простой символ a означает дифференцирование по отношению к R, а R_{ik} - тензор кривизны Римана, k - константа связи в гравитационных единицах. Кроме того, здесь $\Diamond = \nabla^i \nabla_k$ с ∇_k является ковариантной производной. Здесь $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса, и запишем это как

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\left(\sqrt{-g} L_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} L_m - 2\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{3}$$

Действие для $F(R)$ с f - эссенцию задается следующим выражением:

$$S = \int d^4 x e \{h(u) F(R) + 2K(Y, u)\}, \tag{4}$$

метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ)

$$\mathrm{ds}^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{5}$$

где $a(t)$ - масштабный коэффициент Вселенной. Для этой метрики мы имеем

$$\sqrt{-g} = a^3,\ R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),\ Y = \frac{1}{2} i\left(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi\right). \tag{6}$$

Затем точечный лагранжиан пишется

$$L = a^3 hF - a^3 hRF_R - 6a\dot{a}^2 hF_R - 6a^2\dot{a}h'\dot{u}F_R - 6a^2\dot{a}\dot{R}hF_{RR} + 2a^3 K\ . \tag{7}$$

Далее, для определения уравнений поля мы будем использовать следующие уравнения, для определения уравнений поля мы будем использовать следующие уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}}\dot{T} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}}\dot{\bar{\psi}} - L, \tag{8}$$

где q_i - обобщенные координаты, здесь точка указывает производные по космическому времени t. Для нашей модели у нас есть следующие уравнения поля:

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}F_{RR} + \left(3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{h'}{h}\dot{u} - \frac{1}{2}R\right)F_R + \frac{1}{2}F - \frac{1}{h}\left(K_Y Y - K\right) = 0, \tag{9}$$

$$K_Y\dot{\bar{\psi}} + \frac{1}{2}\left(3\frac{\dot{a}}{a}K_Y + \dot{K}_Y\right)\bar{\psi} - iK_u\bar{\psi}\gamma^0 -$$
$$-\frac{i}{2}\left[\left(R - 6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)h'\bar{\psi}\gamma^0 - 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_t\bar{\psi}\gamma^0 + 6\frac{\dot{a}}{a}(h')_\psi\dot{u}\gamma^0\right]F_R - \frac{1}{2}iFh'\bar{\psi}\gamma^0 = 0. \tag{10}$$

Из уравнений (9)-(10) мы видим, что эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями, соответственно, трудно найти решения. Для решения этих уравнений нужно найти вид функции $F(R), h(u)$, $K(Y, u)$. В следующем разделе мы будем использовать. Теперь мы рассмотрим подход Нетер к симметрии для нашей модели.

Условие симметрии Нетер записывается в виде

$$XL = 0. \tag{11}$$

Векторное поле X задается формулой

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial R} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{R}} + \sum_{j=0}^{3} \left(\eta_j \frac{\partial}{\partial \psi_j} + \dot{\eta}_j \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_j} + \chi_j \frac{\partial}{\partial \psi_j^+} + \dot{\chi}_j \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_j^+} \right), \tag{12}$$

где α, β, η_i и χ_i зависят от a, R, ψ_i, ψ_i^+,применяя условие симметрии Нетер, мы получаем следующую систему уравнений в формах

$$\begin{gathered} \alpha F_R + \beta a F_{RR} + 2aF_R \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a^2 F_{RR} \frac{\partial \beta}{\partial a} + \\ + aF_R \frac{h_u}{h} \sum_{i=0}^{3} \left(\varepsilon_i \eta_i \psi_i^+ + \varepsilon_i \chi_i \psi_i \right) + a^2 F_R \frac{h_u}{h} \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_i^+ + \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_i \right) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

$$-6a^2 h F_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial R} = 0, \; -6a^2 F_R h_u \psi_i^+ \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} = 0, -6a^2 F_R h_u \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} = 0, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(F_R h_u \psi_i^+ \frac{\partial \alpha}{\partial R} + hF_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i} \right) = 0, \sum_{i=1}^{3} \left(F_R h_u \psi_i \frac{\partial \alpha}{\partial R} + hF_{RR} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_i^+} \right) = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j} \psi_i + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi_j^+} \psi_i^+ \right) = 0, \; \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial a} \psi_i^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial a} \psi_i \right) = 0, \; \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial R} \psi_i^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial R} \psi_i \right) = 0, \tag{16}$$

$$3\alpha \psi_j^+ + a\chi_j + a \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial \psi_j} \psi_i^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_j} \psi_i \right) = 0, \tag{17}$$

$$3\alpha \psi_j + a\eta_j - a \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \psi_j^+} \psi_i^+ - \frac{\partial \chi_j}{\partial \psi_j^+} \psi_i \right) = 0, \tag{18}$$

$$3\alpha \left(F - RF_R \right) - \beta a R F_{RR} + a \frac{h_u}{h} \left(F - RF_R \right) \sum_{i=0}^{3} \left(\varepsilon_i \eta_i \psi_i^+ + \varepsilon_i \chi_i \psi_i \right) = 0, \tag{19}$$

$$3\alpha \left(K - YK_Y \right) + aK_u \sum_{i=0}^{3} \left(\varepsilon_i \eta_i \psi_i^+ + \varepsilon_i \chi_i \psi_i \right) = 0 \; . \tag{20}$$

Из уравнений (18) видно, что функция α зависит только от функции a. После некоторых математических вычислений мы находим образующие α, β, η_j и χ_j как

$$\alpha = \alpha_0 a^n, \tag{21}$$

$$\beta = 2\alpha_0 (n-1) a^{n-1} R, \tag{22}$$

$$\eta_j = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} + \varepsilon_j \eta_0\right)\psi_j, \tag{23}$$

$$\chi_j = -\left(\frac{3}{2}\alpha_0 a^{n-1} + \varepsilon_j \eta_0\right)\psi_j^+. \tag{24}$$

где α_0 и η_0 - некоторая константа интегрирования. И функции h, K и F следующего вида

$$h = h_0 u^m \tag{25}$$

$$K = K_0(Y - \nu u) \tag{26}$$

$$F = C_1 R^{\frac{3(m-1)}{2(n-1)}}. \tag{27}$$

где h и K_0 - интегрируемая константа.

Используя уравнения (9) и (10), мы находим

$$\dot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}u = 0, \tag{28}$$

Интегрирование дает

$$u = \frac{u_0}{a^3}, \tag{29}$$

где u_0 - константа интегрирования. Если мы поместим уравнения (35)-(37) в уравнение (10), мы найдем

$$\dot{a} = a_0 a^n, \tag{30}$$

$$a(t) = \left[a_0(1-n)(t - C_2)\right]^{\frac{1}{1-n}}, \tag{31}$$

где C_2 - константа интегрирования, $n \neq 1$константа a_0 равна

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{-6u_0^{\frac{1}{3}(n-1)}}}\left[\frac{2K_0\nu(n-1)}{h_0C_1(n+2-3m)}\right]^{\frac{n-1}{3(m-1)}}. \tag{32}$$

$$u = u_0\left[a_0(1-n)(t - C_2)\right]^{-\frac{1}{1-n}}. \tag{33}$$

Параметр Хаббла равен

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{(1-n)(t - C_2)}. \tag{34}$$

Кроме того, мы находим плотность энергии и давление в этой форме

$$\rho = 3H^2 = \frac{3}{(1-n)^2(t - C_2)^2}, \tag{35}$$

$$p = -3H^2 - 2\dot{H} = -\frac{2n+1}{(1-n)^2 (t - C_2)^2}. \tag{36}$$

Для нашей модели уравнение параметра состояния можно определить как

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{3}(1+2n). \tag{37}$$

Как было показано ранее для нашей модели, константа $n \neq 1$. В нашей модели мы рассматриваем значение $n > 1$, тогда мы имеем $\omega < -1$, что эта фаза является фантомной фазой, а если $n = 0$, то мы имеем $\omega = -\frac{1}{3}$ - фаза квинтэссенции. Параметр замедления для фермионного поля определяют как

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -n, \tag{38}$$

из этого примера мы видим, что при $n > 0$ расширение нашей Вселенной может быть ускоренным, а при $n < 0$ замедляющимся. Когда $n = -\frac{1}{2}$, мы можем видеть

$$\rho_n = \frac{4}{3(t - C_2)^2}, p = 0. \tag{39}$$

Из этого примера мы имеем стандартное поле вещества без давления. Мы приходим к выводу, что фермионное поле ведет себя как фантомная, так и квинтэссенционная фаза ускоряющейся расширяющейся Вселенной.

В этой статье мы рассмотрели подход симметрии Нетер для $F(R)$ гравитации с f эссенцию. Мы использовали подход симметрии Нетер для определения форм физических величин как $F = C_1 R^{\frac{3(m-1)}{2(n-1)}}$, $K = K_0 (Y - vu)$ и $h = h_0 u^m$. Взяв производную от масштабного коэффициента по времени, мы можем определить тип параметра как Хаббла. Далее мы нашли значения энергии и давления для фермионного поля. Наконец, для нашей модели мы получили уравнение параметра состояния в виде $\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{3}(1+2n)$. Из этого уравнения мы можем видеть, что постоянная n может принимать значение $n > 1$, тогда мы имеем $\omega < -1$, что эта фаза является фантомной фазой, и если $n = 0$, мы имеем $\omega = -\frac{1}{3}$ - это фаза квинтэссенции. Как было показано ранее для нашей модели, константа $n \neq 1$. Однако, когда $n = 1$, для нашей модели это не имеет физического смысла. Также рассматривался случай , когда $n = -\frac{1}{2}$. Для этого случая мы имеем $\rho_n = \frac{4}{3(t - C_2)^2}$ и $p = 0$. Мы можем видеть, что это решение для фермионного поля дает нам стандартное поле материи без давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP08052034.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту Мырзакулову К.Р. за постановку задачи.

Список использованных источников

1. Bekov S., Myrzakulov K.R., Gomez D.S-C. General Slow-Roll Inflation in $f(R)$ Gravity under the Palatini Approach // Symmetry. – 2020. – Vol. 12. – P. 1958. Published: 26 November 2020. (impact factor 2019 = 2.645).

2. Karmakar S., Myrzakulov K.R., Chattopadhyay S., Myrzakulov R. Reconstructed $f(R)$ Gravity and Its Cosmological Consequences in the Chameleon Scalar Field with a Scale Factor Describing the Pre-Bounce Ekpyrotic Contraction // Symmetry. – 2020. – Vol. 12, No. 9. – P. 1559.

3. Myrzakulov K.R., Kenzhalin D., Myrzakulov N.A. Teleparallel gravity with non-minimally coupled f-essence via Noether symmetry approach // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1730. – P. 012022.

4. Myrzakulov Y., Bekov S., Myrzakulov K. Noether symmetry approach in $f(T,B)$ teleparallel gravity with a fermionic field // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2090. – P. 012058.