УДК 524.834

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Төлепберген Нұрсая Жомартқызы
tnursaya.2000@gmail.com
Студент 4 курса ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – К.Р. Мырзакулов.

В данной работе исследуем космологическую динамику взаимодействующих моделей темной энергии, в которых функция взаимодействия является нелинейной с точки зрения плотностей энергии. Явно рассматривая взаимодействие между темной материей без давления и скалярным полем, минимально связанным с гравитацией Эйнштейна, здесь исследуем динамику пространственно плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера для степенной зависимости потенциальной энергии со скалярным полем. Для решения полевых уравнений использован метод решения дифференциальных уравнений – автономные системы дифференциальных уравнений. Получены точные решения для масштабного фактора $a(t)$ и скалярного поля $\phi(t)$ при $\omega = -1$. Эти результаты соответствуют известной модели темной энергии и способны описать позднюю эволюцию расширения Вселенной.

В больших масштабах наша Вселенная однородна, изотропна и почти плоская. Такая геометрическая конфигурация хорошо описывается пространственно плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера, которая характеризуется следующим линейным элементом

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{1}$$

где $a(t)$ — масштабный коэффициент расширения Вселенной. В этом пространстве-времени считаем, что основными составляющими нашей Вселенной являются материя без давления и неканоническое скалярное поле, где материz и скалярное поле взаимодействуют друг с другом через негравитационное взаимодействие.

Интеграл действия такого космологической модели определяется выражением

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2k^2} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] + L_m, \tag{2}$$

где L_m обозначает лагранжиан для членов поля материи, что означает материю без давления и скалярное поле. Для действия (1) плотность энергии и давление для скалярного поля принимают вид

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \tag{3}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \tag{4}$$

Параметр уравнения состояния для скалярного поля ω_ϕ определяется как

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \tag{5}$$

Кроме того, здесь предполагаем, что ρ_m и p_m — соответственно плотность энергии и давление для материи. Так как предполагаем безнапорное вещество, то имеем $p_m = 0$ и, следовательно, параметр уравнения состояния для этого сектора вещества ω_m.

Уравнения поля можно получить, варьируя действие относительно метрических тензора $g_{\mu\nu}$ пространства-времени как

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(\rho_m + p_\phi\right), \tag{6}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left(\rho_m + \rho_\phi + p_m\right). \tag{7}$$

Здесь точка над буквой производную по космологической времени, $\mathrm{H} = \frac{\dot{a}}{a}$ — параметр Хаббла. Более того, из тождества Бьянки имеем, что ${}_{eff}T^{ab}_{;b} = 0$, где ${}_{eff}T^{ab} = {}_\phi T^{ab} + {}_m T^{ab}$. Однако, поскольку здесь рассматриваем взаимодействие между скалярным полем и пылевой жидкостью, тождество Бьянки дает следующие уравнения

$${}_\phi \mathrm{T}^{\mathrm{ab}}_{;\mathrm{b}} + {}_m T^{ab}_{;b} = 0, \tag{8}$$

Или

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \tag{9}$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1+\omega_\phi)\rho_\phi = -Q. \tag{10}$$

Следующая наша задача решить полевые уравнения (6), (7), (9) и (10). Эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Ниже применим подход решения таких уравнений, как автономные системы дифференциальных уравнении. Для этого здесь продолжаем с введением безразмерных переменных

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}H}. \tag{11}$$

Здесь в H-нормализации. Более того, предполагаем, что новой независимой переменной является время прохождения $N = \ln a$, которое также называется параметром e-фолдой. Рассмотрим частные решения

$$V(\phi) = \lambda\phi^n. \tag{12}$$

В новых переменных уравнения гравитационного поля (6), (7), (10) и (11) сводятся к следующей автономной системе дифференциальных уравнении

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + \frac{3x}{2}\left((2+r)x^2 + ry^2\right) - (6x)^{-1}Q, \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dN} = -3\sqrt{2}\lambda xy + 3\sqrt{3}y\left((2+r)x^2 + ry^2\right), \tag{14}$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}x\lambda^2(\Gamma(\lambda) - 1), \tag{15}$$

$$\frac{dr}{dN} = 3\left(x^2 + y^2\right)^{-1}\left((1+r)Q + 9r\left(x^2 - y^2\right)\right). \tag{16}$$

с алгебраическим ограничением

$$1 - (1 + \mathrm{r})\left(x^2 + y^2 = 0\right). \tag{17}$$

Здесь

$$r = \frac{6H^2}{\alpha^2 e^{2t(\alpha-1)} + 2\lambda\phi^n} - 1, \tag{18}$$

в котором

$$\lambda = -\frac{V,_\phi}{V}, \quad \overline{Q} = \frac{Q}{H^3}, \quad \Gamma = \frac{VV,_{\phi\phi}}{(V_{\phi\phi})}. \tag{19}$$

Кроме того, первое уравнение Фридмана (6) в безразмерных переменных принимает вид

$$\Omega_m = 1 - x^2 - y^2$$

или

$$\Omega_m = 1 - \frac{\alpha^2 e^{2t(\alpha-1)}}{6H^2} - \frac{\lambda\phi^n}{3H^2}. \tag{20}$$

Где то $\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}\rho_m H^{-2}$ является безразмерным параметром плотности для материи. Космологические параметры для скалярного поля, а именно параметр уравнения состояния ω_ϕ и безразмерный параметр плотности Ω_ϕ в новых переменных, могут быть записаны следующим образом

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2 \tag{21}$$

в то время как общее уравнение параметра состояния равно

$$\omega_{tot} = \frac{p_\phi}{\rho_m + \rho_m} = x^2 - y^2, \tag{22}$$

тогда общее значение нашего параметра уравнения состояния можно будет записать, как

$$\omega_{tot} = x^2 - y^2 = -1 + \frac{6H^2 + \dot{\phi}^2 + 2\lambda\phi^n}{6H^2}. \tag{23}$$

Принимая, что для ускоренного расширения Вселенной параметр уравнения равен $\omega = -1$, то

$$6H^2 + \dot{\phi}^2 + 2\lambda\phi^n = 0 \; . \tag{24}$$

При ускоренном расширений Вселенной скалярное поле скатывается медленно, то в этом режиме $\dot{\phi}^2 << \lambda\phi$, соответственно уравнение (24) примет вид

$$3H^2 + \lambda\phi^n = 0. \tag{25}$$

Или

$$\dot{a} - \sqrt{\frac{\lambda}{3}}\phi^{\frac{n}{2}} a = 0. \tag{26}$$

Интегрируя, найдем

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\phi(t)}. \tag{27}$$

Откуда параметр Хаббла будет равен $H = \sqrt{\frac{\lambda}{3} a_0}$. Уравнение Клена-Гордона для скалярного поля запищим в виде

$$\ddot{\phi} + 3H^2\dot{\phi} + V' = 0\,. \qquad (28)$$

Или для нашего случая

$$\ddot{\phi} + \xi\dot{\phi} + \lambda n\phi^{n-1} = 0\,. \qquad (28)$$

где $\xi = \lambda a_0^2$ является некой константой. Проинтегрировав уравнение (28), получим

$$\phi(t) = \frac{1}{\xi}\left(C_1 e^{\xi t} + \xi C_2 - \lambda t\right). \qquad (29)$$

Здесь C_1 и C_2 являются константами интегрирования.

Таким образом, в данной работе нами была рассмотрена плоская и однородная Вселенная Фридмана заполненная неким скалярным полем ϕ и обычной материей, где скалярное поле и материя не взаимодействуют с гравитацией. Получены соответствующие полевые уравнения и для их решения нами был использованы методы решения автономных дифференциальных систем уравнения. Потенциальную энергию рассмотрели в виде $V(\phi) = \lambda\phi^n$. Найдены точные решения для масштабного фактора $a(t)$ и скалярного поля $\phi(t)$ при $\omega = -1$. Эти результаты соответствуют известной модели темной энергии и способны описать позднюю эволюцию расширения Вселенной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP08052034.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту Мырзакулову К.Р. за постановку задачи.

Список использованных источников

1. Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy // International Journal of Modern Physics D. – 2006. – Vol. 15, N11. – P. 1753-1935\\

2. Edmund J. Copeland, Andrew R.liddje, and David Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solution // Physical Review D. - 1998. - Vol. 57. – P. 4686.