ӘОЖ 517.957, 532.5

ДАРБУ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАНАТЫН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ СОЛИТОНДЫҚ ШЕШІМДЕРІ

Тұрғанбай Гүлсая Сұлтанбекқызы
saya_sultankizi@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық Университеті студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Н.С. Серикбаев

Солитондар мен олармен байланысты шешімдерді зерттеу физика мен математикадағы белсенді зерттеу бағыттарының бірі болды. Бүгінгі таңда интегралданатын теңдеулердің солитонды және басқа да дәл шешімдерін табудың бірқатар жолдары белгілі. Бұл тарауда біз қарастыратын айналдыру моделінің шешімдерін құру үшін Дарбу түрлендіру әдісі қолданылады. Біз өзін-өзі үйлестіретін потенциалы бар жалпыланған айналдыру жүйесі үшін, атап айтқанда Мырзакулов Лакшманан IV теңдеуі үшін дарбу деп аталатын түрлендіруді құрамыз. Біз жасаған Дарбу түрлендіруін қолдана отырып, қарастырылып отырған теңдеудің солитондық шешімін табамыз.
Мырзакулов Лакшманан IV теңдеуінің жалпы түрі төмендегідей,

$$iS_t + 2\varepsilon_1 Z_x + i\varepsilon_2\left(S_{xy} + [S_x, Z]\right)_x + (wS)_x + \frac{1}{\omega}\,[S, W] = 0, \tag{1}$$

$$u_x - \frac{i}{4} tr\left(S\left[S_x, S_y\right]\right) = 0, \tag{2}$$

$$w_x - \frac{i}{4}\varepsilon_2[tr(S_x^2)]_y = 0, \tag{3}$$

$$iW_x + \omega[S, W] = 0. \tag{4}$$

мұндағы, Z төмендегі теңдеумен анықталады. Бұл теңдеу Лакс жұбы мағынасында да біріктіріледі. Төменде МЛ -IV теңдеуінің маңызды ерекшеліктерін ұсынамыз.

$$Z = \frac{1}{4}\,\left(\left[S, S_y\right] + 2iuS\right).$$

Мырзакулов Лакшманан IV теңдеуінің Лакс жұбы төмендегі ше жазылады:

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{5}$$

$$\Phi_t = (2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)\Phi_y + V\Phi, \tag{6}$$

мұндағы

$$U = -i\lambda S, \tag{7}$$

$$V = (2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)Z + \lambda V_1 + \frac{i}{\lambda + \omega}W - \frac{i}{\omega}W, \tag{8}$$

мұндағы

$$V_1 = wS + i\varepsilon_2\left(\, S_{xy} + [S_x, Z]\right), \tag{9}$$

$$W = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(5) және (6) формуладағы Лакс жұптарын төмендегіше түрлендіре аламыз.:

$$\Phi'_x = U'\Phi', \tag{12}$$

$$\Phi'_t = (2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)\Phi'_y + V'\Phi' . \tag{13}$$

(12) және (13) теңдеулердегі $\Phi' = L\Phi$ түрлендіруін қолданамыз және осы түрлендіруден x және t бойынша туындысын аламыз:

$$\Phi'_x = L_x\Phi + L\Phi_x, \tag{14}$$

$$\Phi'_t = L_t\Phi + L\Phi_t , \tag{15}$$

Жоғарыдағы түрлендірудегі L матрицасының мәні төмендегідей:

$$L = \lambda N - I, \tag{16}$$

мұндағы

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \text{ және } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осыдан

$$L_x + LU = U'L , \tag{17}$$

$$L_t + LV = (2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)L_y + V'L. \tag{18}$$

(17) формуладан бізде төмендегідей өрнек шығады:

$$N:\ \lambda_x = 0, \tag{17a}$$
$$\lambda^1:\ N_x = IiS' - IiS, \tag{17b}$$
$$\lambda^2:\ 0 = -iNS' + iNS. \tag{17c}$$

(18) формуладан бізде төмендегідей өрнек шығады:

$$N: \lambda_t = 2\varepsilon_1\lambda\lambda_y + 4\varepsilon_2\lambda^2\lambda_y = \lambda_y(2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2), \tag{18a}$$

$$\lambda^0: 0 = iW'N + \frac{i}{\omega}W'I - iNW - \frac{i}{\omega}WI \tag{18b}$$

$$\lambda^1:\ N_t = 2\varepsilon_1\left(\frac{1}{4}\left([S, S_y] + 2iuS\right) - \frac{1}{4}\left([S', S'_y] + 2iuS'\right)\right) \tag{18c}$$

$$\lambda^2:\ 2\varepsilon_1 NZ + NV_1 - 4\varepsilon_2 IZ = 2\varepsilon_1 N_y + 2\varepsilon_1 NZ' + NV'_1 - 4\varepsilon_2 IZ' \tag{18d}$$

$$\lambda^3: N_y = N(Z - Z') = N\left(\frac{1}{4}\left([S, S_y] + 2iuS\right) - \frac{1}{4}\left([S', S'_y] + 2iuS'\right)\right) \tag{18g}$$

$$(\lambda+\omega)^{-1}: 0 = -i\omega W'N - iW'I + i\omega WN + iWI \quad (18j)$$

Енді біз Мырзакулов Лакшманан IV теңдеуіне Дарбу түрлендіруін қолдану арқылы S тің жаңа шешімін ала аламыз:

$$S' = S - iN_x \quad (19)$$

$$u' = u + itr\left(SN^{-1}N_y\right) \quad (20)$$

$$W' = (I+\omega N)W(I+\omega N)^{-1} \quad (21)$$

Кейбір есептеулерге сүйене отырып, N матрицасының элементтерін келесі түрде ұсына аламыз:

$$S' = S - iN_x = S - i\begin{pmatrix} n_{11x} & n_{12x} \\ -n_{12x}^* & n_{11x}^* \end{pmatrix},$$

$$u' = u + \frac{i}{|n_{11}|^2 + |n_{12}|^2}\begin{bmatrix} S_3\left(n_{11}^* n_{11y} + n_{12}^* n_{11y} + n_{12} n_{11y}^* - n_{11} n_{11y}^*\right) \\ -S^-\left(n_{12} n_{12y}^* - n_{11} n_{12y}^*\right) + S^+\left(n_{11}^* n_{12y} + n_{12}^* n_{12y}\right) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$W' = \frac{1}{|n_{11}|^2 + |n_{12}|^2}\begin{pmatrix} 1 + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -1 + A_{22} \end{pmatrix} \quad (23)$$

МЛ-IV теңдеуінің нақты шешімдерін құру үшін нақты N өрнектерін табу керек . Ол үшін біз мынаны болжаймыз,

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1} \quad (24)$$

Мұндағы H матрицасының мәні төмендегідей:

$$H = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1; t, x, y) & \Psi_1(\lambda_2; t, x, y) \\ \Psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \Psi_2(\lambda_2; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

N теңдеулерді қанағаттандырады және жоғарыда айтылып өткен симметрияны пайдаланып біз $\mathrm{N_x}, \mathrm{N_y}, \mathrm{N_t}$ төмендегідей жаза аламыз:

$$N_x = iNSN^{-1} - iS \quad (26)$$

$$N_y = \left[H_y H^{-1}, N\right] \quad (27)$$

$$N_t = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left[S, S_y\right] + 2iuS\right) - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left[S', S_y'\right] + 2iuS'\right) \quad (28)$$

Егер жүйенің матрицалық шешімдері Лакс жұбын қанағаттандырса, S үшін келесі шектеулер қанағаттандырылатынын ескеріңіз.

$$\Phi^+ = \Phi^{-1}, \quad S^+ = S^{-1},$$

Мұндағы $+$ эрмитті түйіндес білдіреді. Кейбір есептеулерден кейін формулаларды аламыз:

$$\lambda_2 = \lambda_1^*$$

$$H = \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1; t, x, y) & -\Psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ \Psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \Psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2}\begin{pmatrix} \Psi_1^*(\lambda_1; t, x, y) & \Psi_2^*(\lambda_1; t, x, y) \\ -\Psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \Psi_1(\lambda_1; t, x, y) \end{pmatrix},$$

мұндағы, $*$ комплексті түйіндесті білдіреді.

Әрі қарай, $\mathrm{S} = \sigma_3$, $\mathrm{u} = 0$, $\mathrm{W} = \mathrm{b}\sigma_3$ тең болғандағы нақты жағдайды қарастырайық, содан кейін бізде төмендегідей өрнек шығады:

$$S' = \sigma_3 - \frac{i}{\lambda_1\lambda_1^*\Delta}\begin{bmatrix} e^{2\theta_1}\lambda_1^* + e^{2\theta_2}\lambda_1 & (\lambda_1^* - \lambda_1)e^{\theta_1 + i\chi_1}e^{\theta_2 - i\chi_2} \\ (\lambda_1^* - \lambda_1)e^{\theta_2 + i\chi_2}e^{\theta_1 - i\chi_1} & e^{2\theta_2}\lambda_1^* + e^{2\theta_1}\lambda_1 \end{bmatrix}_x \qquad (29)$$

$$W' = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b(\omega^2(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + \omega(n_{11} + n_{11}^*) + 1) & -2\omega n_{11}n_{12} - 2n_{12} \\ -2\omega n_{11}^* n_{12}^* - 2n_{12}^* & -b(\omega^2(|n_{11}|^2 - |n_{12}|^2) + \omega(n_{11} + n_{11}^*) + 1) \end{pmatrix}$$

(29) өрнектің солитондық шешімдері төмендігідей:

$$S_3' = -2i\beta^2 \tanh(2\theta_1) + \alpha, \qquad (29a)$$

$$S^{+'} = -\frac{2i\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{-i\chi_1 + i\chi_2} \frac{1}{cosh2\theta_1}, \qquad (29b)$$

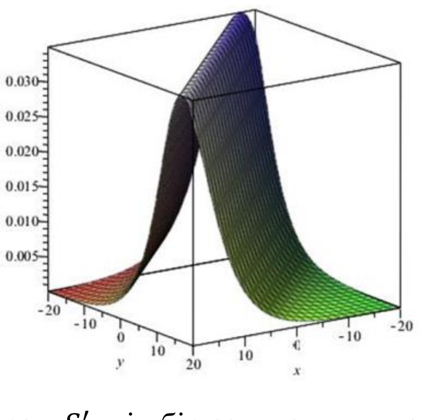
$$S^{-'} = -\frac{2i\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{i\chi_1 - i\chi_2} \frac{1}{cosh2\theta_1}. \qquad (29c)$$

(30) өрнектің солитондық шешімдері:

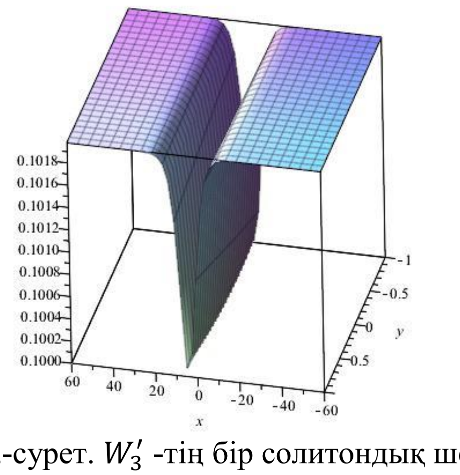
$$W_3' = \left(\frac{\omega^2}{cosh^2 2\theta_1}\left(sinh^2 2\theta_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right) + 2\alpha\omega + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right)\frac{b}{\omega^2+\beta^2}, \qquad (30a)$$

$$W^{+'} = \frac{2\beta\omega e^{-2i\chi_1 + i\delta_0}b}{(\alpha^2+\beta^2)(\omega^2+\beta^2)cosh2\theta_1}\left(\beta\omega tanh2\theta_1 - i(\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2)\right), \qquad (30b)$$

$$W^{-'} = \frac{2\beta\omega e^{2i\chi_1 - i\delta_0}b}{(\alpha^2+\beta^2)(\omega^2+\beta^2)cosh2\theta_1}\left(\beta\omega tanh2\theta_1 + i(\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2)\right). \qquad (30c)$$



1-сурет. S_3' -тің бір солитондық шешімі



2-сурет. W_3' -тің бір солитондық шешімі

Бұл мақалада біз Гейзенберг ферромагниттік теңдеуінің өзін-өзі реттейтін потенциалдары бар (2+1) өлшемді жалпылауының бірі болып табылатын МЛ-IV интегралданатын теңдеуді қарастырдық. Біз МЛ- IV теңдеуі үшін шығардық. ДТ шешімдерін қолдана отырып, біз 1-солитон шешімін жасадық. Сол сияқты, жоғары ретті ДТ-ді қолдана отырып, позитон, жалған толқын, тыныс алу және т.б. сияқты басқа типтегі шешімдер де жасалуы мүмкін.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP08857372.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Gutshabash E. Sh. On some set of models of magnets and chiral fields: integrability, Darboux transformation and exact solutions. Zapiski nauqnyh seminarov POMI, 269, 164-179 (2000)
2. Nian-Ning Huang, Bing Xu. Darboux Tranformation Method for Finding Soliton Solutions of the Landau-Lifshitz Equation of a Classical Heisenberg Spin Chain, Commun. Theor. Phys., 12, 121-126 1989).
3. G. Nugmanova, Z. Zhunussova, K. Yesmakhanova, G. Mamyrbekova, R. Myrzakulov. Integrable Heisenberg Ferromagnet Equations with self-consistent potentials. International Journal of Mathematical, Computational, Statistical, Natural and Physical Engineering, 9, N8, 328- 331 (2015).
4. J.-S. He, Y. Cheng, Y.-S. Li. Commun. Theor. Phys., 38, 493-496 (2002).
5. U. Saleem, M. Hasan. Quasideterminant solutions of the generalized Heisenberg magnet model J. Phys. A: Math. Theor., 43, 045204 (2010).
6. M. Lakshmanan, Phil. Trans. R. Soc. A, 369 1280-1300 (2011).

ӘОЖ 524.4; 524.82; 524.83; 524.85

ТҰТҚЫР СҰЙЫҚТЫҒЫ БАР СТАРОБИНСКИЙ МОДЕЛІ

Шарлез Ақмарал Қанатқызы
sharlezakmaral.98@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 2 курс магистранты,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Мырзақұл Ш.Р.

Бұл жұмыста Фридман-Робертсон-Уокердің (ФРУ) біртекті Старобинскийдің моделі қарастырылады. Сәйкес қозғалыс теңдеулері анықталып, масштабты фактор шешімі алынады. Сонымен қатар, Хаббл параметрі, күй теңдеуінің параметрі және тежеу параметрі сияқты космологиялық параметрлер табылды. Алынған нәтижелер күңгірт энергия модельдерін қанағаттандырады және Ғаламның эволюциясын кейінгі уақытта сипаттауға мүмкіндік береді.

Әсер және қозғалыс теңдеулері

Бұл бөлімде біз ФРУ метрикасы үшін Старобинскийдің моделін қарастырамыз. Жалпы, $F(R)$ гравитациясы әсер арқылы көрінеді

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2k}F(R) + L_m\right), \qquad (1)$$

мұндағы $k = \frac{8\pi G}{c^4}$, g -метрикалық тензордың $g_{\mu\nu}$ анықтаушысы, $F(R)$-Риччи скалярының кейбір функциясы R, ал L_m – материя Лагранжиан. $F(R)$ функциясының Риччи скалярына тәуелділігі осы жұмыста Старобинский $F(R) = \alpha R + \beta R^2$ моделіне ұқсас беріледі, бұл