

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Бейсебай П.Б.

**МАТЕМАТИКА 2 ПӘНІНЕН
ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫН ОРЫНДАУ
ҮЛГІЛЕРІ, ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ЖИНАҒЫ**

Оқу құралы

«Alash Book» баспасы

Алматы

2026

1

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1
Б38

Оқу құралы Л.Н. Гумилев атындағы ұлттық университеті Ғылыми кеңесінің отырысында басылымға ұсынылды (хаттама №15, 27.02.2025 ж.)

Пікір жазғандар:

Адамов А.А. – физика-математика ғылымдарының докторы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің «Математикалық және компьютерлік үлгілеу» кафедрасының профессоры;

Рысбайұлы Б. – физика-математика ғылымдарының докторы, Astana IT University-нің Есептеу және деректер кафедрасының профессоры;

Мұхамедиев Ғ.Х. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті математика кафедрасының қауымдастырылған профессоры;

Бейсебай П.Б.

Б38 Математика 2 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы. – Алматы, «Alash Book», 2026. – 470 б.

ISBN 978-601-383-310-1

Оқу құралы «Математика 2» пәндері бағдарламасы негізінде 6B06306 – «Ақпараттық қауіпсіздік жүйелері», 6B07102 - «Автоматтандыру және басқару» білім беру бағдарламасы бойынша және басқа да педагогикалық, инженер-техникалық мамандықтарда оқитын білім алушыларға арналып, қазақ тілінде жазылған.

Аталған жұмыста берілген теориялық мағлұматтар, әрбір мысалдардың толық сарапталған шешімдері студенттердің «Математика 2» пәндерінен білім сапасын, өз бетімен жұмыс істеу қабілеттілігін, қорытынды бақылау түрлеріне даярлықтарын арттыруға арналған.

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1

Бұл басылымға барлық құқықтар «Alash Book» баспасы мен авторға тиесілі. Авторлық құқық иесінің келісімінсіз кез келген тәсілмен көбейтуге тыйым салынады (келісім-шарт №177)

ISBN 978-601-383-310-1

© Бейсебай П.Б., 2026
© «Alash Book», 2026

МАЗМҰНЫ

	Кіріспе.....	4
1	Көп айнымалы функциялар. Еселі интегралдар (теориялық сұрақтар).....	6
2	Дифференциалдық теңдеулер (теориялық сұрақтар).....	25
3	Қатарлар (теориялық сұрақтар).....	40
4	Екі айнымалы функцияның дербес туындылары.....	55
5	Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль теңдеулері.....	71
6	Екі айнымалы функцияны экстремумдері.....	91
7	Екі еселі интегралдарды есептеу.....	109
8	Қисық сызықты интегралдар.....	122
9	Айнымалысы ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.....	138
10	Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.....	154
11	Сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.....	174
12	Толық дифференциалдық теңдеулер.....	194
13	Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.....	212
14	Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.....	235
15	Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулер.....	256
16	Сан қатарының қосындысы.....	283
17	Оң қатарлардың жинақтылық белгілері.....	306
18	Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығы.....	328
19	Дәрежелік қатардың жинақтылық облысы.....	343
20	Функцияны Маклорен қатарына жіктеу.....	363
21	Ықтималдықтар теориясының элементтері (теориялық сұрақтар).....	382
22	Ықтималдықтың классикалық және геометриялық анықтамалары.....	397
23	Ықтималдықтың қосу/ көбейту теоремалары және тым болмағанда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы.....	417
24	Толық ықтималдық және Байес формуласы.....	434
25	Бернулли, Пуассон формулалары, Лаплас теоремалары және ең ықтимал сан.....	453
	Әдебиеттер.....	469

КІРІСПЕ

Заман талабына сай педагогикалық, техникалық мамандарды даярлауда әрбір оқу пәнінің өзіндік орны ерекше, соның ішінде математикалық білімнің маңызы өте зор. Студенттер жалпы теориялық және арнайы инженерлік пәндерді меңгеруі үшін инженерлік есептерді орындауда тәжірибе жинақтай келе, іргелі ғылымдар жетістіктерін пайдаланып, химия, физика, сызба геометриясының негіздерімен танысып, математикалық ойлау қабілеті мен логикасын дамытуы тиіс.

Математикалық білім бере отырып алдымызға қояр негізгі мақсатымыз – бүгінгі таңда өмір, қоғам талабына сай кәсіби мамандық алуына қажетті белгілі математикалық білім жүйесін қолдана білетін, экономикалық, нарықтық қатынасты тереңнен түсінетін, жаңаша ойлау қабілеті бар, саяси ахуалды, мәдениетті жеке тұлғаны қалыптастыру.

«Математика 2 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы» оқу құралы «Математика», «Математика 2» пәндерінің бағдарламасына және математика бойынша жалпыға міндетті білім беру стандартының талаптарына сәйкес жазылып, көп айнымалы функциялар, еселі интегралдар, дифференциалдық теңдеулер, қатарлар теориясы, ықтималдықтар теориясы элементтері тарауларын қамтиды.

Ұсынылып отырған оқу құралының 1-3, 21 тараулары «Математика», «Математика 2» пәндерінің мазмұнын толық қамтитын теориялық сұрақтардан және 4-20, 22-25 тараулары тест есептерінен құралған, әрі әр тарауда 50 сұрақтан берілген, оның тек бір жауабы дұрыс деп саналады.

Кредиттік технология жүйесімен оқытуда студенттердің өзіндік жұмысына көп сағат бөлінген. Студент өзінің алған теориялық білімін практикада, өзіндік жұмыстарды орындауға қолдана білуі тиіс.

Жоғары оқу орындарына арналған жоғары математика пәні бойынша қазақ тілінде жарық көрген дәрістер және тәжірибелік жаттығулар жинағы бар болғанымен, өзіндік жұмыстарды орындауға арналған есептер жинағы жоқтың қасы. Әрі бұл оқу құралы үлгерімі төмен немесе белгілі себептермен сабақ босатқан немесе үлгерімі бойынша қосымша семестрге қалдырылған

студенттер үшін де өте ыңғайлы құрал. Көбінесе орыс тілінде басылған оқулықтар қолданылып келді. Қазіргі уақытта мемлекеттік тілге, оның ішінде ұлттық ғылыми тілді қалыптастыру қажеттілігі мемлекеттік деңгейге көтерілген кезде, оқулықтардың қай түрі болмасын мемлекеттік тілде жазылуы тиіс.

Сондықтанда бұл оқу құралы педагогикалық, инженер-техникалық мамандықтарда оқитын білім алушыларға арналып шығарылып отыр.

Автор ұсынған оқу құралын оқып шығып, өзінің сын-пікірлерін білдірген оқытушы - ғалымдарға, атап айтсақ, физика-математика ғылымдарының докторлары, профессор А.А. Адамовқа, Б. Рысбайұлына және физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Ғ.Х. Мұхамедиевке өз ризашылықтарын білдіреді.

1 КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 2» пәнінің «Көп айнымалы функциялар», «Еселі интегралдар» тарауларының тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

1.1 Тест тапсырмалары

1. $z = f(x; y)$ функциясының y айнымалысы бойынша екінші ретті дербес туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

A) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$

B) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$

C) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$

D) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$

E) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial y}$

2. $z = f(x; y)$ бетіне $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін көрсетіңіз.

A) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$

B) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + f'_z(z - z_0) = 0$

C) $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

D) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

E) $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} + \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} + \frac{z - z_0}{-1} = 0$

3. $z = f(x; y)$ бетіне осы бетте жатқан $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген нормальдің теңдеуін көрсетіңіз.

A) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$

B) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + f'_z(z - z_0) = 0$

C) $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

D) $f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

E) $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} + \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} + \frac{z - z_0}{-1} = 0$

4. $F(x; y; z) = 0$ бетіне осы бетте жатқан $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін көрсетіңіз:

A) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

B) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0$

C) $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

D) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$

E) $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} + \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} + \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)} = 0$

5. $F(x; y; z) = 0$ бетіне осы бетте жатқан $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі арқылы жүргізілген нормальдің теңдеуін көрсетіңіз.

A) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

B) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0$

C) $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}$

D) $F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$

E) $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} + \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} + \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)} = 0$

6. $F(x; y; z) = 0$ айқындалмаған түрінде берілген $z(x; y)$ функцияның

z'_x дербес туындысының формуласын көрсетіңіз.

A) $z'_x = \frac{F'_x}{F'_z}$

B) $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$

C) $z'_x = -\frac{F'_z}{F'_x}$

D) $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$

E) $z'_x = -F'_x \cdot F'_z$

7. $F(x; y; z) = 0$ айқындалмаған түрінде берілген $z(x; y)$ функциясының z'_y дербес туындысының формуласын көрсетіңіз.

A) $z'_y = \frac{F'_y}{F'_z}$

B) $z'_y = -\frac{F'_x}{F'_y}$

C) $z'_y = -\frac{F'_z}{F'_y}$

D) $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$

E) $z'_y = -F'_y \cdot F'_z$

8. $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын $z = f(x; y)$ функциясының осы нүктеде экстремумы болының қажетті шартын көрсетіңіз.

A)
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{M_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0} = 0 \end{cases}$$

$$\text{B) } \begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0 \end{cases}$$

$$\text{C) } \begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 1 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 1 \end{cases}$$

$$\text{D) } \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0} = 0 \end{cases}$$

$$\text{E) } \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0} = 1 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = 1 \end{cases}$$

9. $z = f(x; y)$ функциясы және оның дербес туындылары $z'_x(x; y), z'_y(x; y)$ стационарлық $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде үзіліссіз,

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} \text{ және } \Delta = A \cdot C - B^2.$$

$M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде минимум болады, егер де

$$\text{A) } \begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$$\text{B) } \begin{cases} \Delta < 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\text{C) } \begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

- D) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$
 E) $\begin{cases} \Delta < 1 \\ A = 0 \end{cases}$

10. $z = f(x; y)$ функциясы және оның дербес туындылары $z'_x(x; y)$, $z'_y(x; y)$ стационарлық $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде үзіліссіз,

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} \text{ және } \Delta = A \cdot C - B^2.$$

$M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде максимум болады, егер де

- A) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A > 0 \end{cases}$
 B) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A = 0 \end{cases}$
 C) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$
 D) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$
 E) $\begin{cases} \Delta < 1 \\ A = 0 \end{cases}$

11. $z = f(x; y)$ функциясының толық өсімшесін көрсетіңіз.

- A) $\Delta z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$
 B) $\Delta z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$
 C) $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$
 D) $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z$
 E) $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) + f(x; y)$

12. $z = f(x; y)$ функциясының y айнымалысы бойынша дербес туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

A) $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$

$$B) \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta y}$$

$$C) \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$D) \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$E) \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

13. $z = f(x; y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

$$A) \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$B) \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$C) \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta z}$$

$$D) \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{x}$$

$$E) \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x}$$

14. $z = f(x; y)$ функциясының x айнымалысы бойынша екінші ретті дербес туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

$$A) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

$$B) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$C) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$D) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$E) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

15. $z = f(x; y)$ функциясының екінші ретті аралас туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

$$A) f''_{xy} = f''_x \cdot f''_y$$

$$B) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$C) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$D) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$E) f''_{xy} = f'_x \cdot f'_y$$

16. $z = f(x; y)$ функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$A) \Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$$

$$B) \Delta_x z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

$$C) \Delta_x z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

$$D) \Delta_x z = \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{f(x + \Delta x; y + \Delta y)}$$

$$E) \Delta_x z = \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{f(x + \Delta x; y + \Delta y)}$$

17. $z = f(x; y)$ функциясының y бойынша дербес өсімшесі:

$$A) \Delta_y z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$$

$$B) \Delta_y z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

$$C) \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

$$D) \Delta_y z = \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{f(x + \Delta x; y + \Delta y)}$$

$$E) \Delta_y z = \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{f(x + \Delta x; y + \Delta y)}$$

18. $z = F(u; v)$, $u = \varphi(x; y)$, $v = \psi(x; y)$ функцияларының барлық аргументтері бойынша дербес туындылары үзіліссіз болсын. Онда

$\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары келесі формулалармен есептеледі:

- A) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$
- B) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$
- C) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$
- D) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$
- E) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

19. Егер $z = F(x; y; u)$, $y = f(x)$, $u = \psi(x)$ функциясы берілсе, онда толық туындысының формуласы:

- A) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$
- B) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$
- C) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$
- D) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$
- E) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$

20. $z = f(x; y)$ функциясының U айнымалысы бойынша екінші ретті дербес туындысының анықтамасын көрсетіңіз.

- A) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$

$$B) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$C) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$D) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$E) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial y}$$

21. $z = f(x; y)$ функциясы және оның дербес туындылары $z'_x(x; y)$, $z'_y(x; y)$ стационарлық $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде үзіліссіз,

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} \text{ және } \Delta = A \cdot C - B^2.$$

$M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде функция экстремум қабылдамайды, егер де

$$A) \Delta < 0$$

$$B) \Delta > 0$$

$$C) \Delta \leq 0$$

$$D) \Delta \geq 0$$

$$E) \Delta = 0$$

22. $z = f(x; y)$ функциясы және оның дербес туындылары $z'_x(x; y)$, $z'_y(x; y)$ стационарлық $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінде үзіліссіз,

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0}, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} \text{ және } \Delta = A \cdot C - B^2.$$

Функцияны қосымша зерттеу қажет, егер де

$$A) \Delta < 0$$

$$B) \Delta > 0$$

$$C) \Delta \leq 0$$

$$D) \Delta \geq 0$$

$$E) \Delta = 0$$

23. Егер D анықталу облысы Ox жазықтығына тиісті болса, ал E мәндер облысы Oz өсінде жататын болса, онда ондай екі айнымалы функциялардың жазылымы:

- A) $z = f(x; y; z)$
- B) $z = f(x; y)$
- C) $z = \frac{f(x; y)}{x}$
- D) $z = \frac{f(x; y)}{y}$
- E) $z = \frac{x}{f(x; y)}$

24. Жазықтықтағы $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің аймағы деп радиусы r , центрі M_0 нүктесі болатын шеңберсіз дөңгелекті айтамыз. Жазықтықта $U_r(M_0)$ аймағы қай теңсіздікпен анықталады?

- A) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$
- B) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq r^2$
- C) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
- D) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$
- E) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$

25. A саны $z = f(x; y)$ функциясының $(x_0; y_0)$ нүктесіндегі шегі деп аталады, егер әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылып, $U_\delta(x_0; y_0)$ аймағындағы барлық $(x; y)$ үшін, осы нүктеден басқа нүктелерде, төмендегі теңсіздік орындалса:

- A) $|f(x, y) - A| > \varepsilon$
- B) $|f(x, y) - A| \leq \varepsilon$
- C) $|f(x, y) - A| < \varepsilon$
- D) $|f(x, y) - A| \geq \varepsilon$
- E) $|f(x, y)| \leq \varepsilon$

26. Егер $z = f(x; y)$ функциясы мен $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ анықталған және $M(x; y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде

- A) $f''_{xx} = f''_{yy}$
- B) $f''_{xy} = f''_{yx}$

C) $f'_x = f'_y$

D) $f''_{xx} > f''_{yy}$

E) $f''_{xx} < f''_{yy}$

27. $z = f(x; y)$ функциясының толық дифференциалының белгіленуі:

A) $dz = dx + dy$

B) $dz = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$

C) $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

D) $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

E) $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

28. Егер $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x; y)$ шегі, $(x_0; y_0)$ нүктесіндегі функцияның мәні табылса және $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)$ болса, онда $z = f(x; y)$ функциясы $(x_0; y_0)$ нүктесінде ... деп аталады.

A) үзіліссіз

B) үзілісті

C) анықталған

D) жинақты

E) жинақсыз

29. Жоғарғы ретті дербес дифференциалдардың есептелуінің формуласын көрсетіңіз.

A) $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z$

B) $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$

C) $d^n z = (dx + dy)^n z$

$$D) d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z$$

$$E) d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)$$

30. Егер экстремумның жеткілікті шарты бойынша $A = f''_{xx}(a;b)$, $B = f''_{xy}(a;b)$, $C = f''_{yy}(a;b)$ болса, онда Δ дискриминантының есептелу формуласын көрсетіңіз.

A) $\Delta = AC - B$

B) $\Delta = BC - A^2$

C) $\Delta = AC - B^2$

D) $\Delta = AC + B^2$

E) $\Delta = B^2 - AC$

31. Жазықтықтағы радиусы r болатын $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің аймағы $U_r(M_0)$ деп радиусы r , центрі M_0 нүктесі болатын $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ теңсіздігімен анықталатын ... айтамыз.

A) сферасыз шарды

B) шарды

C) дөңгелекті

D) шеңберсіз дөңгелекті

E) шеңберді

32. Кеңістіктегі радиусы r болатын $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінің аймағы $U_r(M_0)$ деп радиусы r , центрі M_0 нүктесі болатын $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$ теңсіздігімен анықталатын ... айтамыз.

A) шеңберді

B) шарды

C) дөңгелекті

D) шеңберсіз дөңгелекті

E) сферасыз шарды

33. Оху декарт координаталар жазықтығында берілген D облысының ауданын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $S = 2 \iint_D dx dy$

- B) $S = \iint_D x dx dy$
 C) $S = \iint_D y dx dy$
 D) $S = \iint_D dx dy$
 E) $S = \frac{1}{2} \iint_D xy dx dy$

34. $J = \iint_D f(x; y) dx dy$ екі еселі интегралында полярлық координаталарға көшу формуласын көрсетіңіз.

- A) $J = - \iint_D f(x; y) \rho \sin \varphi \rho \cos \varphi d\rho d\varphi$
 B) $J = - \iint_D f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho \sin \varphi \rho \cos \varphi d\rho d\varphi$
 C) $J = \iint_D f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi$
 D) $J = \iint_D f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$
 E) $J = \iint_D f(\rho; \varphi) d\rho d\varphi$

35. D облысының ауданын полярлық координаталарда есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $S = \iint_D d\rho d\varphi$
 B) $S = \iint_D \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$
 C) $S = \iint_D \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi$
 D) $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$
 E) $S = \frac{1}{2} \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi$

36. $T = \{(x; y; z): 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c\}$ тік параллелепипедінің көлемін есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz$

$$B) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c x dz$$

$$C) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c y dz$$

$$D) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z dz$$

$$E) \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c xyz dz$$

37. Екі еселі интегралдың қасиетін көрсетіңіз.

$$A) \iint_D (f(x; y) + g(x; y)) dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy - \iint_D g(x; y) dx dy$$

$$B) \iint_D (f(x; y) \pm g(x; y)) dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy \pm \iint_D g(x; y) dx dy$$

$$C) \iint_D (f(x; y) \cdot g(x; y)) dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy \cdot \iint_D g(x; y) dx dy$$

$$D) \iint_D (f(x; y) \pm g(x; y)) dx dy = f(x; y) \iint_D dx dy \pm g(x; y) \iint_D dx dy$$

$$E) \iint_D (f(x; y) \cdot g(x; y)) dx dy = g(x; y) \iint_D f(x; y) dx dy$$

38. Екі еселі интегралдардың қасиетін көрсетіңіз.

$$A) \iint_D (f(x; y) + c) dx dy = c \cdot \iint_D f(x; y) dx dy, \quad c = const$$

$$B) \iint_D c \cdot f(x; y) dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy + c, \quad c = const$$

$$C) \iint_D c \cdot f(x; y) dx dy = c \iint_D f(x; y) dx dy, \quad c = const$$

$$D) \iint_D c \cdot f(x; y) dx dy = c \cdot f(x; y) \iint_D dx dy, \quad c = const$$

$$E) \iint_D c \cdot f(x; y) dx dy = f(x; y) \iint_D c dx dy, \quad c = const$$

39. Тығыздығы $\mu(x; y; z)$ болатын T денесінің массасын есептеу формуласын көрсетіңіз.

$$A) m = \iiint_T z \mu(x; y; z) dx dy dz$$

$$B) m = \iiint_T x \mu(x; y; z) dx dy dz$$

- C) $m = \iiint_T y\mu(x; y; z)dxdydz$
 D) $m = \iiint_T \mu(x; y; z)dxdydz$
 E) $m = \iiint_T xyzdxdydz$

40. $T = \{(x; y; z): 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c\}$ облысы бойынша $\iiint_T f(x; y; z)dxdydz$ үш еселі интегралын есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c xyzdz$
 B) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c xf(x; y; z)dz$
 C) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c yf(x; y; z)dz$
 D) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c zf(x; y; z)dz$
 E) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c f(x; y; z)dz$

41. Тығыздығы $\mu(x; y)$ болатын $D = \{(x; y): a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ жазық фигурасының массасын есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $m = \iint_D \mu(x; y)dxdy$
 B) $m = \iint_D x\mu(x; y)dxdy$
 C) $m = \iint_D y\mu(x; y)dxdy$
 D) $m = \iint_D dxdy$
 E) $m = \frac{1}{2} \iint_D xydxdy$

42. Охуз декарт координаталар кеңістігінде берілген T денесінің көлемін есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $V = \iiint_T x dx dy dz$
 B) $V = \iiint_T dx dy dz$
 C) $V = \iiint_T y dx dy dz$
 D) $V = \iiint_T xyz dx dy dz$
 E) $V = \frac{1}{2} \iint_D xy dx dy$

43. Егер (P) облысында $f(x; y)$ функциясы x және y бойынша үзіліссіз дербес туындылары болса, онда $z = f(x; y)$ бетінің xOy жазықтығына (P) проекциясымен алынған ауданы неге тең?

- A) $\sigma = \iint_{(P)} \sqrt{1 + [f''_{xx}]^2 + [f''_{yy}]^2} dx dy$
 B) $\sigma = \iint_{(P)} \sqrt{1 + [f'_x]^2 + [f'_y]^2} dx dy$
 C) $\sigma = \iint_{(P)} \sqrt{1 + [f''_{xx}]^2 + [f''_{yy}]^2} dx dy$
 D) $\sigma = \iint_{(P)} \sqrt{1 + [f''_{xy}]^2 + [f''_{yx}]^2} dx dy$
 E) $\sigma = \iint_{(P)} \sqrt{1 + 2[f'_x]^2 + [f'_y]^2} dx dy$

44. Жазық денелердің өстерге қатысты статистикалық сәтін (моментін) есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $S_x = \iint_{(P)} y^3 \mu(x, y) dx dy, \quad S_y = \iint_{(P)} x^3 \mu(x, y) dx dy$
 B) $S_x = \iint_{(P)} y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad S_y = \iint_{(P)} x^2 \mu(x, y) dx dy$
 C) $S_x = \iint_{(P)} x \mu(x, y) dx dy, \quad S_y = \iint_{(P)} y \mu(x, y) dx dy$
 D) $S_x = \iint_{(P)} y \mu(x, y) dx dy, \quad S_y = \iint_{(P)} x \mu(x, y) dx dy$
 E) $S_x = \frac{1}{2} \iint_{(P)} y \mu(x, y) dx dy, \quad S_y = \frac{1}{2} \iint_{(P)} x \mu(x, y) dx dy$

45. Жазық денелердің өстерге қатысты инерциялық сәтін (моментін) есептеу формуласын көрсетіңіз.

$$A) J_x = \frac{1}{3} \iint_{(P)} y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad J_y = \frac{1}{3} \iint_{(P)} x^2 \mu(x, y) dx dy$$

$$B) J_x = \iint_{(P)} y \mu(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_{(P)} x \mu(x, y) dx dy$$

$$C) J_x = \iint_{(P)} x^2 \mu(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_{(P)} y^2 \mu(x, y) dx dy$$

$$D) J_x = \iint_{(P)} y^3 \mu(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_{(P)} x^3 \mu(x, y) dx dy$$

$$E) J_x = \iint_{(P)} y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_{(P)} x^2 \mu(x, y) dx dy$$

46. Статистикалық сәттері S_x, S_y және массасы m жазық денелердің ауырлық центрінің координаталарын табу формуласын көрсетіңіз.

$$A) x_0 = \frac{S_x}{m}, \quad y_0 = \frac{S_y}{m}$$

$$B) x_0 = \frac{S_y}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m}$$

$$C) x_0 = \frac{S_x}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m}$$

$$D) x_0 = \frac{S_x}{\mu}, \quad y_0 = \frac{S_y}{\mu}$$

$$E) x_0 = 2 \frac{S_x}{m}, \quad y_0 = 2 \frac{S_y}{m}$$

47. Егер D облысы $\theta = \alpha, \theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) полюстен шығатын екі сәуле және $\rho = \rho_1(\theta), \rho = \rho_2(\theta)$ қисықтарымен шектелсе, онда екі еселі интеграл келесі формуламен есептеледі:

$$A) \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$$

$$B) \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$$

$$C) \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$$

$$D) \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$$

$$E) \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho$$

48. Массаның $M(x, y, z)$ координаталық центрін есептеу формуласын көрсетіңіз.

$$A) \bar{x} = \frac{M_{xy}}{2m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{yz}}{2m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{zx}}{2m}$$

$$B) \bar{x} = \frac{M_{xy}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{zx}}{m}$$

$$C) \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

$$D) \bar{x} = 2 \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = 2 \frac{M_{zx}}{m}, \quad \bar{z} = 2 \frac{M_{xy}}{m}$$

$$E) \bar{x} = \frac{M_{yz}}{3m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{3m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{3m}$$

49. Үш еселі интегралдың қасиетін көрсетіңіз.

$$A) \iiint_{(T)} kf(x, y, z) dx dy dz = k + \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$B) \iiint_{(T)} kf(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{k} \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$C) \iiint_{(T)} kf(x, y, z) dx dy dz = -\frac{1}{k} \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$D) \iiint_{(T)} kf(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$E) \iiint_{(T)} kf(x, y, z) dx dy dz = -k \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz$$

50. Егер $(T) = (T_1) + (T_2)$ болса, онда үш еселі интегралдың қасиетін көрсетіңіз.

$$A) \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{3} \left(\iiint_{(T_1)} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{(T_2)} f(x, y, z) dx dy dz \right)$$

$$B) \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(T_1)} f(x, y, z) dx dy dz - \iiint_{(T_2)} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{C) } \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{2} \left(\iiint_{(T_1)} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{(T_2)} f(x, y, z) dx dy dz \right)$$

$$\text{D) } \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{2} \left(\iiint_{(T_1)} f(x, y, z) dx dy dz - \iiint_{(T_2)} f(x, y, z) dx dy dz \right)$$

$$\text{E) } \iiint_{(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(T_1)} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{(T_2)} f(x, y, z) dx dy dz$$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 2» пәнінің «Дифференциалдық теңдеулер» тарауларының тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

2.1 Тест тапсырмалары

1. $y'' = f(x, y')$ теңдеуінің ретін төмендету үшін келесі ауыстыру қолданылады:

- A) $y' = p(y)$ ауыстыруы
- B) $y' = p(x)$ ауыстыруы
- C) $y'' = p(y)$ ауыстыруы
- D) $y = u(x)v(x)$ ауыстыруы
- E) $y'' = p(x)$ ауыстыруы

2. Берілген дифференциалдық теңдеулерден бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді көрсетіңіз.

- A) $P(x)dy - Q(y)dx = 0$
- B) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$
- C) $y' + p(x)y = q(x)$
- D) $y'' + py' + qy = 0$
- E) $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

3. $P(x)dy - Q(y)dx = 0$ дифференциалдық теңдеуінің түрін анықтаңыз.

- A) толық дифференциалды теңдеу
- B) айнымалылары ажыратылатын теңдеу
- C) сызықтық теңдеу
- D) біртекті теңдеу
- E) бернулли теңдеуі

4. $f(x, y', y'') = 0$ теңдеуінің ретін төмендету үшін келесі ауыстыру қолданылады:

- A) $y' = p(x)$ ауыстыруы
- B) $y' = p(y)$ ауыстыруы
- C) $y'' = p(y)$ ауыстыруы
- D) $y = u(x)v(x)$ ауыстыруы
- E) $y'' = p(x)$ ауыстыруы

5. $f(x, y'') = 0$ теңдеуінің ретін төмендету үшін келесі ауыстыру қолданылады:

- A) $y' = p(x)$ ауыстыруы
- B) $y' = p(y)$ ауыстыруы
- C) $x = p(y)$ ауыстыруы
- D) $y' = tx$ ауыстыруы
- E) $y = u(x)v(x)$ ауыстыруы

6. Егер ... шарты орындалса, онда $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ бірінші ретті дифференциалдық теңдеуі толық дифференциалдық теңдеу деп аталады, мұндағы $P(x, y), Q(x, y)$ - дифференциалданатын функциялар.

- A) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$
- B) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- C) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- D) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$
- E) $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$

7. Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу үрдісі ... деп аталады.

- A) дифференциалдау
- B) интегралдау
- C) логарифмдеу
- D) потенциалдау
- E) айнымалыны ажырату

8. Егер дифференциалдық теңдеуде белгісіз функция бір ғана айнымалыдан тәуелді функция болса, онда дифференциалдық теңдеу ... деп аталады.

- A) дербес туындылы теңдеу
- B) толық дифференциалды теңдеу
- C) біртекті теңдеу
- D) қарапайым теңдеу
- E) сызықты теңдеу

9. $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ жалпы шешіміне сәйкес келетін дифференциалдық теңдеудің ретін көрсетіңіз.

- A) 2
- B) 1
- C) 3
- D) 4
- E) 0

10. Бір немесе бірнеше айнымалы функцияны, айнымалыларды және функцияның туындыларын байланыстыратын теңдеу ... деп аталады.

- A) сипаттамалық теңдеу
- B) дифференциалдық теңдеу
- C) квадрат теңдеу
- D) бір немесе бірнеше белгісізді теңдеу
- E) кубтық теңдеу

11. n дәрежелі $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ дифференциалдық теңдеудің қанағаттандыратын, x айнымалысынан және c_1, c_2, \dots, c_n кез келген n өзара тәуелсіз тұрақты шамаларынан тәуелді $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ функциясын теңдеудің ... деп аталады.

- A) жалпы интегралы
- B) жалпы шешімі
- C) дербес шешімі
- D) Коши есебі
- E) дербес интегралы

12. $f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$ түріндегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің түрін анықтаңыз.

- A) Бернулли теңдеуі
- B) біртекті теңдеу
- C) сызықтық теңдеу
- D) айнымалылары ажыратылатын
- E) толық дифференциалды теңдеу

13. Сипаттамалық теңдеуінің түбірлері k_1, k_2 нақты және әр түрлі жағдайында екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеудің фундаменталдық шешімдерін көрсетіңіз.

- A) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}$
- B) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}$
- C) $y_1 = e^{k_2x}, y_2 = xe^{k_2x}$
- D) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{(k_1+k_2)x}$
- E) $y_1 = e^{(k_1+k_2)x}, y_2 = e^{k_2x}$

14. k_1 сипаттамалық теңдеуінің жалғыз түбірі болған жағдайында екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеудің фундаменталдық шешімдерін көрсетіңіз.

- A) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}$
- B) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_1x}$
- C) $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{2k_1x}$
- D) $y_1 = e^{2k_1x}, y_2 = e^{k_1x}$
- E) $y_1 = xe^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}$

15. Сипаттамалық теңдеуінің түбірлері $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ түйіндес комплекс сандар болған жағдайында екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеудің фундаменталдық шешімдерін көрсетіңіз:

- A) $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
- B) $y_1 = e^{\alpha x}, y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$
- C) $y_1 = e^{\alpha x}, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
- D) $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{k_2x}$

Е) $y_1 = xe^{k_1x}, \quad y_2 = xe^{k_2x}$

16. Сызықты тұрақты коэффициентті біртекті дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x) = e^{\alpha \cdot x}$ түрінде беріліп, мұндағы α сипаттамалық теңдеудің жай түбірі болса, онда $\tilde{y} = Ax^m e^{\alpha \cdot x}$ дербес шешіміндегі m саны қалай анықталады?

- A) $m = 1$
- B) $m = 0$
- C) $m = 2$
- D) $m = -1$
- E) $m = -2$

17. $y'' + py' + qy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің сипаттамалық теңдеуін көрсетіңіз.

- A) $k^2 + pk = 0$
- B) $k^2 + pk + q = 0$
- C) $k^2 + qk = 0$
- D) $2k + p = 0$
- E) $k^2 + p = 0$

18. Толық дифференциалдық теңдеуді шешудегі $U(x, y)$ функциясын есептеу формуласын көрсетіңіз.

- A) $U = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$
- B) $U = \int_{x_0}^x P(x_0, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$
- C) $U = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$
- D) $U = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y_0) dy$
- E) $U = \int_{x_0}^x P(x_0, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$

19. Егер $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ функциясы тек x айнымалысынан тәуелді болса, онда толық дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін

теңдеулерде $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ шарты орындалмаған жағдайда) теңдеуді интегралдаушы көбейткіш $M(x; y)$ функциясына көбейту қажет, есептелуі:

$$A) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx}$$

$$B) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{Q} \right) dx}$$

$$C) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{Q} \right) dx}$$

$$D) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} \right) dx}$$

$$E) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx}$$

20. Егер $\frac{-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ функциясы тек y айнымалысынан тәуелді болса, онда толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулерде $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ шарты орындалмаған жағдайда) теңдеуді интегралдаушы көбейткіш $M(x; y)$ функциясына көбейту қажет, есептелуі:

$$A) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) dy}$$

$$B) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} \right) dy}$$

$$C) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) dy}$$

$$D) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P} \right) dy}$$

$$E) M = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) dy}$$

21. $y'' + py' + qy = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}$ тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуде сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\alpha \neq k_1$ және $\alpha \neq k_2$ жағдайында біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

$$A) \tilde{y} = \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$B) \tilde{y} = x\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$C) \tilde{y} = x^2\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$D) \tilde{y} = \frac{1}{x}\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$E) \tilde{y} = \frac{1}{x^2}\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

22. $y'' + py' + qy = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}$ тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуде сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\alpha = k_1$ немесе $\alpha = k_2$ жағдайында біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

$$A) \tilde{y} = \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$B) \tilde{y} = \frac{1}{x}\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$C) \tilde{y} = x^2\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$D) \tilde{y} = x\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

$$E) \tilde{y} = \frac{1}{x^2}\bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

23. $y'' + py' + qy = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}$ тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуде сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$\alpha = k_1$ және $\alpha = k_2$ жағдайында біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

A) $\tilde{y} = \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$

B) $\tilde{y} = \frac{1}{x} \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$

C) $\tilde{y} = \frac{1}{x^2} \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$

D) $\tilde{y} = x \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$

E) $\tilde{y} = x^2 \bar{P}_n(x)e^{\alpha x}$

24. $y'' + py' + qy = (M \cos \beta x + N \sin \beta x)e^{\alpha x}$ тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуде сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\alpha \neq k_1$ және $\alpha \neq k_2$ жағдайында біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

A) $\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

B) $\tilde{y} = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

C) $\tilde{y} = x^2(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

D) $\tilde{y} = \frac{1}{x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

E) $\tilde{y} = \frac{1}{x^2}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

25. $y'' + py' + qy = (M \cos \beta x + N \sin \beta x)e^{\alpha x}$ тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеуде сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\alpha + \beta i = k_1$ немесе $\alpha - \beta i = k_2$ жағдайында біртекті емес теңдеудің дербес шешімі:

A) $\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

B) $\tilde{y} = \frac{1}{x^2}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

C) $\tilde{y} = x^2(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

D) $\tilde{y} = \frac{1}{x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

E) $\tilde{y} = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

26. $y' + P(x)y = Q(x)$ бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуде $Q(x) = 0$ болса, онда теңдеу ... деп аталады.

- A) қарапайым
- B) біртекті емес
- C) біртекті
- D) тұрақты коэффициентті
- E) сызықтық

27. $y' + P(x)y = Q(x)$ бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуде $Q(x) \neq 0$ болса, онда теңдеу ... деп аталады.

- A) қарапайым
- B) біртекті емес
- C) біртекті
- D) тұрақты коэффициентті
- E) сызықтық

28. $u = \frac{y}{x}$ ауыстырымынан кейін біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеу дифференциалдық теңдеулердің қай түріне келеді?

- A) Сызықтық теңдеуге
- B) Айнымалысы ажыратылатын теңдеуге
- C) Толық дифференциалдық теңдеуге
- D) Бернулли теңдеуіне
- E) Реті төменділетін теңдеуге

29. Дифференциалдық теңдеудің құрамындағы ең жоғарғы туындының реті теңдеудің несін анықтайды?

- A) күрделілігін
- B) ретін
- C) жалпы интегралын
- D) белгісіздер санын
- E) жалпы шешімін

30. n бастапқы $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ шарттарын қанағаттандыратын n -ші ретті ($n = 1, 2, 3, \dots$)

дифференциалдық теңдеудің дербес интегралын анықтау қандай атау алған?

- A) Коши есебі
- B) интегралдау есебі
- C) ретін төмендету есебі
- D) Бернулли есебі
- E) вариациалау есебі

31. Бірінші ретті $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ дифференциалдық теңдеуінің түрін анықтаңыз.

- A) айнымалылары ажыратылатын теңдеу
- B) Бернулли теңдеуі
- C) толық дифференциалды теңдеу
- D) біртекті теңдеу
- E) сызықтық теңдеу

32. Егер $f(x, y)$ функциясын айнымалылар қатынасымен алынған

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ теңдеуі түрінде көрсете алсақ, онда $y' = f(x, y)$

теңдеуін бірінші ретті деп атаймыз.

- A) сызықтық теңдеу
- B) біртекті теңдеу
- C) толық дифференциалды теңдеу
- D) айнымалысы ажыратылатын теңдеу
- E) Бернулли теңдеуі

33. Біртекті теңдеулерді шешудегі жаңа функцияны енгізу формуласын көрсетіңіз.

A) $u = \frac{e^x}{y}$

B) $u = e^{\frac{y}{x}}$

C) $u = \frac{y}{x}$

D) $u = e^x$

E) $u = e^{(y_1+y_2)x}$

34. Толық дифференциалды теңдеуді шешудегі $U(x, y)$ функциясының есептелуін көрсетіңіз.

A) $U = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy$

B) $U = \int_{x_0}^x P(x_0, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy$

C) $U = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y_0)dy$

D) $U = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy$

E) $U = \int_{x_0}^x P(x_0, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$

35. $y' + P(x)y = Q(x)$ түріндегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің атауы, мұндағы $P(x)$ және $Q(x)$ - үзіліссіз функциялар.

A) толық дифференциалдық теңдеу

B) Бернулли теңдеуі

C) сызықтық теңдеуі

D) айнымалысы ажыратылатын теңдеуі

E) біртекті теңдеуі

36. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын, яғни оны тепе-теңдікке айналдыратын $y = f(x)$ функциясы теңдеудің ... деп аталады.

A) жалпы интегралы

B) шешімі

C) сипаттамалық теңдеуі

D) Коши есебі

E) сызықтық теңдеуі

37. Төмендегі бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерде ауыстыру қолданылмайтын түрін көрсетіңіз.

A) айнымалылары ажыратылатын теңдеу

B) біртекті теңдеу

C) толық дифференциалдық теңдеу

D) сызықтық теңдеу

E) Бернулли теңдеуі

38. $y' + P(x)y = Q(x)$ сызықтық теңдеуін шешуде қолданылатын Бернулли ауыстыруын көрсетіңіз.

- A) $y = \frac{u}{v}$
- B) $y = uv$
- C) $y = u^2v$
- D) $y = uv^2$
- E) $y = \frac{v}{u}$

39. n - ші ретті $y^{(n)} = f(x)$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін ... табамыз.

- A) n санына көбейту арқылы
- B) n санына бөлу арқылы
- C) n рет интегралдау арқылы
- D) n рет туындылау арқылы
- E) n санын қосу арқылы

40. n - ші ретті $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін ... табамыз.

- A) n санына көбейту арқылы
- B) n рет интегралдау арқылы
- C) n санына бөлу арқылы
- D) $y^{(\kappa)} = z, y^{(\kappa+1)} = z', y^{(\kappa+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-\kappa)}$ ауыстыруы арқылы
- E) n рет туындылау арқылы

41. Тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес $y'' + py' + qy = f(x)$ сызықтық дифференциалдық теңдеуінде $f(x)$ функциясы теңдеудің ... деп аталады.

- A) коэффициенті
- B) белгісізі
- C) оң жағы
- D) жалпы шешімі
- E) дербес шешімі

42. Тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті емес $y'' + py' + qy = f(x)$ сызықтық дифференциалдық теңдеудіңде p, q тұрақты сандары - теңдеудің ... деп аталады.

- A) коэффициенттері
- B) белгісіздері
- C) оң жағы
- D) бос мүшелері
- E) дербес шешімдері

43. Егер $y'' + py' + qy = f(x)$ тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудіңде ... болса, онда ол біртекті теңдеу деп аталады.

- A) $f(x) < 0$
- B) $f(x) = 1$
- C) $f(x) \neq 0$
- D) $f(x) = -1$
- E) $f(x) \equiv 0$

44. Егер $y'' + py' + qy = f(x)$ тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудіңде $f(x) \neq 0$ болса, онда ол ... теңдеу деп аталады.

- A) біртекті
- B) біртекті емес
- C) сызықтық
- D) сызықтық емес
- E) реті төменділетін

45. Егер $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ тепе-теңдігі тек $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ жағдайында ғана орынды болса, онда $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары ... деп аталады.

- A) сызықтық тәуелді
- B) біртекті
- C) сызықтық тәуелсіз
- D) сызықтық емес
- E) біртектісіз

46. $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ тепе-теңдігі орынды болатындай тым болмаса біреуі нөлден өзгеше α_1, α_2 қос саны табылса, онда y_1, y_2 функциялары ... деп аталады.

- A) сызықтық тәуелді
- B) біртекті
- C) сызықтық тәуелсіз
- D) сызықтық емес
- E) біртектісіз

47. $y'' + py' + qy = 0$ біртекті теңдеуінің $k^2 + pk + q = 0$ сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты:

- A) $D = p^2 - 3q$
- B) $D = p^2 - 2q$
- C) $D = p^2 - 4q$
- D) $D = p^2 - q$
- E) $D = p^2 - \frac{q}{2}$

48. $y'' + py' + qy = 0$ біртекті теңдеуінің $k^2 + pk + q = 0$ сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты $D > 0$ болса, онда квадрат теңдеуінің түбірлері:

- A) $k_1 = \frac{-3p - \sqrt{D}}{2}, k_2 = \frac{-3p + \sqrt{D}}{2}$
- B) $k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{4}, k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{4}$
- C) $k_1 = \frac{-p - 3\sqrt{D}}{2}, k_2 = \frac{-p + 3\sqrt{D}}{2}$
- D) $k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$
- E) $k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{3}, k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{3}$

49. $y'' + py' + qy = 0$ біртекті теңдеуінің $k^2 + pk + q = 0$ сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты $D = 0$ болса, онда квадрат теңдеуінің түбірлері:

$$A) k_1 = k_2 = -\frac{p}{5}$$

$$B) k_1 = k_2 = -\frac{p}{3}$$

$$C) k_1 = k_2 = -\frac{p}{4}$$

$$D) k_1 = k_2 = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$E) k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

50. $y'' + py' + qy = 0$ біртекті теңдеуінің $k^2 + pk + q = 0$ сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты $D < 0$ болса, онда квадрат теңдеуінің түбірлері:

$$A) k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$B) k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

$$C) k_1 = k_2 = -\frac{p}{3}$$

$$D) k_{1,2} = \frac{\alpha \pm \beta i}{2}$$

$$E) k_1 = k_2 = -\frac{p}{5}$$

3 ҚАТАРЛАР

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 2» пәнінің «Қатарлар» тарауларының тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

3.1 Тест тапсырмалары

1. Егер қатардың ..., онда қатар жинақты дейміз.

- A) жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болмаса
- B) жалпы мүшесінің шегі шексіздікке тең болса
- C) дербес қосындысының шегі тұрақты сан болса
- D) дербес қосындысының шегі шексіздікке тең болса
- E) дербес қосындысының шегі жоқ болса

2. Егер қатардың ..., онда қатар жинақсыз дейміз.

- A) жалпы мүшесі шектеулі болса
- B) дербес қосындысы шектеулі болса
- C) дербес қосындысының шегі шексіздікке тең немесе жоқ болса
- D) дербес қосындысының шегі нөлге тең болмаса
- E) жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болса

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ қатары жинақты болса, онда

- A) $a_n \geq a_{n-1}$ кез келген n нөмірі үшін
- B) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- E) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ қатарының жинақсыз болуы үшін қай шарт жеткілікті болады?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

- B) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$
- C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$
- D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > -1$
- E) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ оң таңбалы қатары Даламбер белгісі бойынша жинақты болады, егер ... болса.

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$
- B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l = 1$
- C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$
- D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$
- E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегі жоқ

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ оң таңбалы қатары Даламбер белгісі бойынша жинақсыз болады, егер ... болса.

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$
- B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$
- C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$
- D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l = 1$
- E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегі жоқ

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ оң таңбалы қатары Коши белгісі бойынша жинақты болады, егер ... болса.

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l = 1$

B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$

C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \neq 0$

E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ оң таңбалы қатары Коши белгісі бойынша жинақсыз болады, егер ... болса.

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l = 1$

B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$

C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \neq 0$

E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ шегі жоқ

9. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы « n » мүшелерінің қосындысы қатардың ... деп аталады.

A) n -ші дербес қосындысы

B) жалпы мүшесі

C) қосындысы

D) мүшелері

E) дербес қосындылар тізбегі

10. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы « n » мүшесін алып тастағанда пайда

болатын $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ қатары қатардың ... деп аталады.

A) n -ші дербес қосындысы

- B) n -ші қалдығы
- C) жалпы мүшесі
- D) қосындысы
- E) мүшелері

11. Егер R_n берілген $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ жинақты қатарының қалдығы болса,

онда

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \neq 0$
- B) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n < 1$
- C) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$
- D) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n > -1$
- E) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \neq 1$

12. Сандық оң қатардың санаулы ғана мүшелерін өзгерткеннен оның жинақтылығы

- A) өзгереді
- B) абсолютті жинақты болады
- C) шартты жинақты болады
- D) өзгермейді
- E) ешқандай нәтиже бермейді

13. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ геометриялық қатары жинақты, егер

- A) $|q| = 0$
- B) $|q| \neq 0$
- C) $|q| \neq 1$
- D) $|q| > -1$
- E) $|q| < 1$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ геометриялық қатары жинақсыз, егер

- A) $|q| \geq 1$
- B) $|q| \neq 0$

- C) $|q| \neq 1$
- D) $|q| > -1$
- E) $|q| < 1$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ жалпы гармониялық қатары жинақты, егер

- A) $\lambda \neq 0$
- B) $\lambda > 1$
- C) $\lambda \neq 1$
- D) $\lambda > -1$
- E) $\lambda < 1$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ жалпы гармониялық қатары жинақсыз, егер

- A) $\lambda \neq 0$
- B) $\lambda > 1$
- C) $\lambda \leq 1$
- D) $\lambda > -1$
- E) $\lambda \neq 1$

17. Қатардың жалпы мүшесі көпмүшеліктердің қатынасы немесе көпмүшеліктердің түбірлерінің қатынасы түрінде берілсе, онда төмендегі жинақтылық белгілердің қайсысы қолданылады?

- A) I салыстыру белгісі
- B) Даламбер белгісі
- C) Кошидің радикалдық белгісі
- D) II салыстыру белгісі
- E) Кошидің интегралдық белгісі

18. Қатардың жалпы мүшесінің құрамында a^n немесе $n!$ түріндегі көбейткіштер бар болса, онда төмендегі жинақтылық белгілерінің қайсысы қолданылады?

- A) I салыстыру белгісі
- B) II салыстыру белгісі
- C) Кошидің радикалдық белгісі
- D) Кошидің интегралдық белгісі
- E) Даламбер белгісі

19. Қатардың жалпы мүшесінің n - ші дәрежелі түбірі оңай алынатын болса, онда төмендегі жинақтылық белгілерінің қайсысы қолданылады?

- A) Кошидің радикалдық белгісі
- B) II салыстыру белгісі
- C) I салыстыру белгісі
- D) Даламбер белгісі
- E) Кошидің интегралдық белгісі

20. Қатардың жалпы мүшесі туындылайтын функциядан интеграл табу оңай болса, онда төмендегі жинақтылық белгілерінің қайсысы қолданылады?

- A) Кошидің радикалдық белгісі
- B) Кошидің интегралдық белгісі
- C) I салыстыру белгісі
- D) Даламбер белгісі
- E) II салыстыру белгісі

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ жағдайында $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты, ал S саны осы қатардың ... деп аталады.

- A) n - ші дербес қосындысы
- B) жалпы мүшесі
- C) қосындысы
- D) мүшелері
- E) дербес қосындылар тізбегі

22. Сандық қатардың қасиеттерінің қайсысы дұрыс емес?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = \lambda S$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 + S_2$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 - S_2$

D) Қатардың санаулы ғана мүшелерін өзгерткеннен оның жинақтылығы өзгермейді

Е) Қатардың санаулы ғана мүшелерін өзгерткеннен оның жинақтылығы өзгереді

23. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы:

A) $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$

B) $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{1 - 2q}, \quad q \neq 1$

C) $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{2 - q}, \quad q \neq 1$

D) $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{1 - 3q}, \quad q \neq 1$

E) $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{3 - q}, \quad q \neq 1$

24. Қатардың жинақтылығы алынбайтын теңдікті көрсетіңіз.

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

B) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$

E) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін. Егер кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $a_n \leq b_n$ теңсіздігі орынды болса, онда

A) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

E) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты

26. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары беріліп, кез келген $n \in N$ үшін $a_n \leq b_n$ теңсіздігі орынды болса, онда

A) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз

E) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

27. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$ және k - сан болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

оң қатарларының ... болады.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

E) екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз

28. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ болса,

онда

A) екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз

B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

E) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

29. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

болса, онда

A) екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз

B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

E) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

30. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

болса, онда

A) екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз

B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз

C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз

D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақсыз $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз

E) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақты $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты

31. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардың жинақтылығының жеткілікті белгісін атаңыз.

- A) Лейбниц белгісі
- B) Даламбер белгісі
- C) Кошидің радикалдық белгісі
- D) Салыстыру белгісі
- E) Кошидің интегралдық белгісі

32. Егер таңбасы ауыспалы қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақты болса, онда таңбасы ауыспалы қатар ... деп аталады.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) шартты жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

33. Егер қатардың өзі жинақты, ал оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақсыз болса, онда таңбасы ауыспалы қатар ... деп аталады.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) шартты жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

34. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$ таңбасы ауыспалы қатарының мүшелерінің абсолюттік шамасынан (модулінен) құралған

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots + |a_n| + \dots$ қатары жинақты болса, онда таңбасы ауыспалы қатары да ... болады.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақты
- C) шартты жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

35. $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ қатарының

атауының атауын көрсетіңіз, мұндағы $a_n > 0$ барлық $n \in \mathbb{N}$.

- A) таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар
- B) оң қатар
- C) абсолюттік шамасынан құралған қатар
- D) геометриялық қатар
- E) жалпы гармониялық қатар

36. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларының тізбегі монотонды кемімелі $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n > \dots$ және қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылса $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, онда таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар ... болады (Лейбниц белгісі).

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақты
- C) шартты жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

37. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарының мүшелерінің абсолюттік шамаларының тізбегі монотонды кемімелі $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n > \dots$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ болса, онда таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар ... болады (Лейбниц белгісі).

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) шартты жинақсыз
- D) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

38. Егер қатар абсолютті жинақты және қосындысы S болса, онда осы қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзерткеннен алынған қатар да ... және оның да қосындысы берілген қатардың S қосындысына тең (Дирихле теоремасы).

А) абсолютті жинақты

В) жинақты

С) шартты жинақсыз

Д) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

39. Қосындысы S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарларды мүшелеліп қосуға (азайтуға) болады. Нәтижесінде, қосындысы $S_1 + S_2$ (айырмасы $S_1 - S_2$) болатын ... қатарды аламыз.

А) абсолютті жинақты

В) жинақты

С) шартты жинақсыз

Д) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

40. $a_1 + a_2 + \dots$ және $b_1 + b_2 + \dots$ екі қатардың көбейтіндісі $(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_n) + \dots$ қосындылары S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарлардың көбейтіндісі ... қатар, қосындысы $S_1 \cdot S_2$.

А) шартты жинақсыз

В) жинақты

С) абсолютті жинақты

Д) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

41. Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орнын ауыстырғаннан қатардың қосындысы

А) өзгермейді

В) абсолютті жинақты болады

С) шартты жинақты болады

Д) өзгереді

Е) ешқандай нәтиже бермейді

42. Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзгертіп алдын ала берілген S қосындысы бар жинақты қатарды немесе жинақсыз қатарды алуға болады.

- А) Лагранж теоремасы
- В) Лейбниц теоремасы
- С) Дирихле теоремасы
- Д) Коши теоремасы
- Е) Риман теоремасы

43. Егер алынған $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ сандық қатары жинақты болса, онда x_0 нүктесі

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ функциялық қатарының ... деп аталады.

- А) жинақтылық нүктесі
- В) n -ші дербес қосындысы
- С) жалпы мүшесі
- Д) қосындысы
- Е) дербес қосындылар тізбегі

44. Егер алынған $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ сандық қатары

жинақсыз болса, онда x_0 нүктесі $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

функциялық қатарының ... деп аталады.

- А) n - ші дербес қосындысы
- В) жинақсыздық нүктесі
- С) жалпы мүшесі
- Д) қосындысы
- Е) дербес қосындылар тізбегі

45. x аргументінің функциялық қатар жинақты болатын сандық мәндерінің жиынын ... деп атаймыз.

- А) жинақсыздық нүктесі

- B) n - ші дербес қосындысы
- C) жалпы мүшесі
- D) жинақтылық облысы
- E) дербес қосындылар тізбегі

46. Мүшелері x аргументті дәрежелік функциялар болатын

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \text{ қатары } \dots \text{ деп аталады.}$$

- A) таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар
- B) оң қатар
- C) абсолюттік шамасынан құралған қатар
- D) дәрежелік қатар
- E) жалпы гармониялық қатар

47. e^x көрсеткіштік функциясының Маклорен қатарына жіктелуі:

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; +1]$

48. $\sin x$ тригонометрикалық функциясының Маклорен қатарына жіктелуі:

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

$$D) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$E) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; +1]$$

49. $\cos x$ тригонометрикалық функциясының Маклорен қатарына жіктелуі:

$$A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$C) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$D) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$E) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; +1]$$

50. $\frac{1}{1-x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуі:

$$A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$C) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$D) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$E) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; +1]$$

4 ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАРЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Екі айнымалы функцияның дербес туындыларын» табуға арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

4.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 4.1: Егер $z = e^{8x-4y}$ болса $3\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0; 0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

а) $z = f(x, y)$ үзіліссіз функциясы берілсін. $y = const$ деп есептеп, x айнымалысына Δx өсімшесін береміз, мұндағы $x + \Delta x \in D$.

z функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

z функциясының y бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y айнымалысының екеуіне де, сәйкесінше, $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

Анықтама 4.1. Егер $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left[\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right]$ табылса, онда оны z

функциясының x бойынша $[z$ функциясының y бойынша] дербес туындысы деп айтамыз және

$\frac{\partial z}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x \left[\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y \right]$ түрінде белгілейміз.

Анықтамадан, егер қандай да бір айнымалы бойынша дербес туынды табатын болсақ, онда бұл айнымалыдан басқа айнымалылардың барлығын тұрақты деп қарастырамыз.

b) $(e^u)' = e^u \cdot u'$ формуласын қолданып дербес туындыларын есептейік:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x \Big|_{y=const} = (e^{8x-4y})'_x = 8e^{8x-4y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y \Big|_{x=const} = (e^{8x-4y})'_y = -4e^{8x-4y};$$

$3 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0; 0)$ нүктесіндегі мәні:

$$\begin{aligned} \left(3 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{M(0;0)} &= (3 \cdot 8e^{8x-4y} - (-4e^{8x-4y})) \Big|_{M(0;0)} = (24e^{8x-4y} + 4e^{8x-4y}) \Big|_{M(0;0)} = \\ &= 28e^{8x-4y} \Big|_{M(0;0)} = 28e^{8 \cdot 0 - 4 \cdot 0} = 28 \cdot 1 = 28. \end{aligned}$$

c) Жауабы: 28.

Мысал 4.2: Егер $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

a) Келесі формулаларды қолданамыз:

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$\left(\frac{u}{c} \right)' = \frac{1}{c} u';$$

$$\left(\frac{c}{u} \right)' = -\frac{c}{u^2} u'.$$

b) Дербес туындыларын есептейік:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x \Big|_{y=const} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y}} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y \Big|_{x=const} = \left(\arctg \frac{x}{y} \right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \cdot x \left(-\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі мәні:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{M(0;1)} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{M(0;1)} = \frac{y-x}{x^2 + y^2} \Big|_{M(0;1)} = \frac{1-0}{0^2 + 1^2} = 1.$$

с) Жауабы: **1**.

Мысал 4.3: Егер $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$ болса $\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$

өрнегінің $M(0;1;2)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

а) Келесі формулаларды қолданамыз:

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u';$$

$$(cu)' = cu'.$$

б) Дербес туындыларын есептейік:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x \Big|_{y,z=const} = (x^3 + yz^2 + 3yx - x + z)'_x = 3x^2 + 3y - 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y \Big|_{x,z=const} = (x^3 + yz^2 + 3yx - x + z)'_y = z^2 + 3x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z \Big|_{x,y=const} = (x^3 + yz^2 + 3yx - x + z)'_z = 2yz + 1.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ өрнегінің $M(0;1;2)$ нүктесіндегі мәні:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{M(0;1;2)} &= ((3x^2 + 3y - 1) - 2(z^2 + 3x) + (2yz + 1)) \Big|_{M(0;1;2)} = \\ &= (3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1 - 1) - 2(2^2 + 3 \cdot 0) + (2 \cdot 1 \cdot 2 + 1) = -1. \end{aligned}$$

с) Жауабы: **-1**.

4.2 Тест тапсырмалары

1. Егер $z = e^{3x-2y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0; 0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

2. Егер $z = e^{x-2y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2; 1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -2
- B) -1
- C) 4
- D) -4
- E) 0

3. Егер $z = xy^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2; 1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -2
- C) 5
- D) -4
- E) 0

4. Егер $z = 1 + x - 2y^2$ болса $4\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2; 1)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4
- D) -4

Е) 0

5. Егер $z = x + e^{-2y}$ болса $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1; 0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -4
- B) -2
- C) 4
- D) 0
- E) 2

6. Егер $z = e^{2xy}$ болса $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2; 0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -4
- B) -2
- C) -1
- D) 4
- E) 0

7. Егер $z = 2x^3 y$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1; 0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -4
- B) -2
- C) 1
- D) 4
- E) 0

8. Егер $z = x^2 e^y$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(-2; 0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -2
- C) 0
- D) -4

Е) -1

9. Егер $z = \arctg(x^2 + y^2)$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

A) -2

B) 0

C) 4

D) -4

E) 1

10. Егер $z = \frac{x}{2y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

A) 2

B) -2

C) 4

D) -4

E) 0

11. Егер $z = e^{x-3y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(3;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

A) 7

B) -2

C) 4

D) -4

E) 0

12. Егер $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

A) -2

B) 1

C) 0

D) -4

Е) 5

13. Егер $z = \sin(x + 2y)$ болса $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 2

14. Егер $z = x + e^{2y}$ болса $2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -4
- B) -2
- C) -1
- D) 6
- E) 0

15. Егер $z = x + \sqrt{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + 8\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;4)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 0
- B) -2
- C) 1
- D) -4
- E) 3

16. Егер $z = 5x^2 + 2y^3$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 10
- B) -2,5
- C) 4
- D) -4
- E) 0

17. Егер $z = 2x^3 - y^2$ болса $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -2
- B) 12
- C) 4
- D) -4
- E) 0

18. Егер $z = \sqrt{xy}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 2
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

19. Егер $z = x^2 + y^3$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -2
- C) -3
- D) -4
- E) 0

20. Егер $z = x^2\sqrt{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 4\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;4)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -3
- C) 4
- D) -1

Е) 2

21. Егер $z = xy + x^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -28
- B) 4
- C) 40
- D) -47
- E) 21

22. Егер $z = xy + y^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 7
- B) -2
- C) -7
- D) -4
- E) 0

23. Егер $z = e^{2x+3y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) $-4e^2$
- B) $-2e^3$
- C) 1
- D) $5e^3$
- E) 0

24. Егер $z = 5xy - x^2 + y^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -2
- C) 4

- D) -4
- E) -1

25. Егер $z=5xy + x^2+y^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -1
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) -3

26. Егер $z = e^{5x-4y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0; 0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

27. Егер $z = e^{x-4y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) $-e^{-2}$
- B) -2
- C) $-3e^{-2}$
- D) e^{-2}
- E) 0

28. Егер $z = \text{arctg}(x^2 y^2)$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0; 0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4

- D) -4
E) 0

29. Егер $z = \ln(x - 3y^2)$ болса $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2;1)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 3
B) -2
C) 4
D) -4
E) 0

30. Егер $z = \ln(x + e^{-3y})$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -4
B) -1
C) 4
D) 0
E) 2

31. Егер $z = e^{x+y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 3
B) -2
C) 4
D) -4
E) 0

32. Егер $z = \sqrt{x+y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(3;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) 0

- D) -4
- E) 5

33. Егер $z = \sin(2x + y)$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -2
- C) 3
- D) -4
- E) 2

34. Егер $z = \ln(x + y)$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1; 1)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -2
- C) -1
- D) 1
- E) 0

35. Егер $z = \frac{x}{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1; 1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -2
- C) 1
- D) -4
- E) 0

36. Егер $z = 7x^2 + 3y^3$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -2,5
- C) 14

- D) -4
- E) 0

37. Егер $z = 5x^3 - 7y^2$ болса $2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 30
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

38. Егер $z = \sqrt{4xy^3}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 2
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

39. Егер $z = 3x^5 + y^9$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -3
- B) -9
- C) 4
- D) -4
- E) 0

40. Егер $z = x^4 \sqrt{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 4\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;4)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -3
- C) 4
- D) -1

Е) 7

41. Егер $z = 4xy + x^4$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;1)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 4
- B) -28
- C) 40
- D) -47
- E) 12

42. Егер $z = 3xy + y^3$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -9
- B) -2
- C) 7
- D) -4
- E) 0

43. Егер $z = e^{2x-7y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;1)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) $5e^3$
- B) $-5e^{-7}$
- C) 1
- D) $-4e^2$
- E) 0

44. Егер $z = 9xy - x^3 + y^2$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 3
- B) -2
- C) 6
- D) -4

Е) -1

45. Егер $z=4xy+x^2+y^5$ болса $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) -3
- B) -2
- C) 6
- D) -4
- E) -1

46. Егер $z=e^{10x-4y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 6
- D) -4
- E) 0

47. Егер $z=e^{9x-6y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(2;1)$ нүктесіндегі

мәнін табыңыз.

- A) $-e^{-2}$
- B) -2
- C) $3e^{12}$
- D) e^{-2}
- E) 0

48. Егер $z=\arctg(x^4y^2)$ болса $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(0;0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) 1
- B) -2
- C) 4
- D) -4
- E) 0

49. Егер $z = \ln(x - 5y^2)$ болса $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(-2; 1)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) -2
- B) 1
- C) 4
- D) -4
- E) 0

50. Егер $z = \ln(x + e^{-8y})$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің $M(1; 0)$

нүктесіндегі мәнін табыңыз.

- A) $-\frac{7}{2}$
- B) -1
- C) 4
- D) 0
- E) 2

5 БЕТКЕ ЖҮРГІЗІЛГЕН ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚ ПЕН НОРМАЛЬ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль теңдеулерін» табуға арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

5.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 5.1: $3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0$ бетінің $M_0(0;2;1)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы және нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі:

а) $U(x, y, z) = 0$ айқын емес функциясымен анықталған беттің кез келген $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуі:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0, \quad (5.1)$$

мұндағы

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0(x_0; y_0; z_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0(x_0; y_0; z_0)} = \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0(x_0; y_0; z_0)} = \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)$$

берілген $U(x, y, z) = 0$ функциясының $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесіндегі дербес туындыларының мәні.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ жанасу нүктесінде жанама жазықтыққа перпендикуляр жүргізілген түзу нормаль деп аталады. Оның канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)} \quad (5.2)$$

б) Берілген $M_0(0;2;1)$ нүктесіндегі функцияның дербес туындылары:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0(0;2;1)} = \left((3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz)'_x \right)_{M_0(0;2;1)} = (6x + y)_{M_0(0;2;1)} = 2;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0(0;2;1)} = \left((3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz) \Big|_y \right)'_{M_0(0;2;1)} = (-2y + x + z) \Big|_{M_0(0;2;1)} = -3;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0(0;2;1)} = \left((3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz) \Big|_z \right)'_{M_0(0;2;1)} = (3z^2 + y) \Big|_{M_0(0;2;1)} = 5.$$

Демек, $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0$

түріндегі жанама жазықтықтың теңдеуі:

$$2(x-0) - 3(y-2) + 5(z-1) = 0 \text{ немесе } 2x - 3y + 5z + 1 = 0.$$

Ал $\frac{x - x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)}$ түріндегі нормаль теңдеуі:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{5}.$$

с) Жауабы:

$$2x - 3y + 5z + 1 = 0 \text{ - жанама жазықтықтың теңдеуі,}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{5} \text{ - нормаль теңдеуі.}$$

Мысал 5.2: $z = 1 + x^2 + y^2$ бетінің $M_0(1;2;3)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы және нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі:

а) $z = f(x, y)$ айқын функциясымен анықталған беттің кез келген $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығының теңдеуі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = z - z_0, \quad (5.3)$$

нормаль теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (5.4)$$

б) z функциясының дербес туындылары $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі мәндері:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0(1;2;3)} = 2x \Big|_{M_0(1;2;3)} = 2,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0(1;2;3)} = 2y \Big|_{M_0(1;2;3)} = 4.$$

Осыдан, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = z - z_0$ түріндегі

жанама жазықтығының теңдеуі:

$$2(x-1) + 4(y-2) = z-3 \text{ немесе } 2x + 4y - z - 7 = 0,$$

ал $\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$ түріндегі нормаль теңдеуі:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

с) Жауабы:

$2x + 4y - z - 7 = 0$ - жанама жазықтықтың теңдеуі,

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$ - нормаль теңдеуі.

5.2 Тест тапсырмалары

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ бетіне $M_0(1;0;-2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $x + 5y + z + 1 = 0$

B) $x - 5y - z - 1 = 0$

C) $2x + y + z + 2 = 0$

D) $2x - y + z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

2. $z = 2x + y - x^2 - xy - y^2$ бетіне $M_0(0; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{5} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-1}$

$$B) \frac{x}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$C) \frac{x}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1}$$

3. $z = 1 - 12x + 2y - 6x^2 - y^2$ бетіне $M_0(0;0;1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$B) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 12x - 2y + z - 1 = 0$$

$$D) 2x - y + z + 2 = 0$$

$$E) x + 5y + z - 1 = 0$$

4. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x + 1$ бетіне $M_0(0;1;2)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$B) \frac{x}{5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

$$C) \frac{x+3}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-6}{-1}$$

$$D) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{15} = \frac{z+3}{-1}$$

5. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$ бетіне $M_0(1; 0; -3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $x + 5y + z - 1 = 0$

B) $x - 5y - z - 1 = 0$

C) $2x + y + z + 2 = 0$

D) $2x - y + z + 2 = 0$

E) $10x - 2y + z - 7 = 0$

6. $z = 5x + 3y - x^2 + xy + y^2$ бетіне $M_0(0; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$

B) $\frac{x}{5} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1}$

7. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 1$ бетіне $M_0(0; 0; -1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $7x - 2y - z - 1 = 0$

B) $6x + z + 1 = 0$

C) $5x + 6y + z + 2 = 0$

D) $12x - y + z + 2 = 0$

E) $13x + 5y + z - 1 = 0$

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 4x + 9$ бетіне $M_0(0;1;2)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-6}{-1}$

B) $\frac{x}{5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-1}$

C) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

D) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{15} = \frac{z+3}{-1}$

9. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 2$ бетіне $M_0(0;0;2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $2x - y + z + 2 = 0$

B) $x - 5y - z - 1 = 0$

C) $2x + y + z + 2 = 0$

D) $x + y - z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

10. $z = xy - x^2 - y^2 - 9x + 6y - 5$ бетіне $M_0(0;0;-5)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x+1}{-12} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$

B) $\frac{x}{-4} = \frac{y+7}{5} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-1}$

$$D) \frac{x}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x}{-9} = \frac{y}{6} = \frac{z+5}{-1}$$

11. $z=1-2x^2-xy-2y^2+15x$ бетіне $M_0(0;0;1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 15x - z + 1 = 0$$

$$B) 2x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 7x + y + z + 2 = 0$$

$$D) 5x - 6y + z + 2 = 0$$

$$E) x + 9y + z - 1 = 0$$

12. $z=x^2+xy+y^2-2x-y+3$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x}{-5} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$$

$$B) \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

$$C) \frac{x}{-2} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

13. $z=x^3+8y^3-6xy+5$ бетіне $M_0(1;1;8)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$B) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 3x - 18y + z + 7 = 0$$

D) $2x - y + z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

14. $z = 1 - 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$ бетіне $M_0(0;1;-1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-1}$

B) $\frac{x}{-15} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{-12} = \frac{y+8}{-14} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x}{-16} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{-1}$

E) $\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{-1}$

15. $z = 4 + 6x - x^2 - y^2 - xy$ бетіне $M_0(0;0;4)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $x + 5y + z = 0$

B) $x - z - 1 = 0$

C) $2x + y + 2 = 0$

D) $y + z + 2 = 0$

E) $6x - z + 4 = 0$

16. $z = x^2 + y^2 + 6xy + 2x + 2y + 1$ бетіне $M_0(0;0;1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

B) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$

C) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+8}{-5} = \frac{z}{-1}$

$$D) \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

17. $z = xy + 4x^2 + 2y^2 + 5x + 3$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + y + z = 0$$

$$B) 5x - z + 3 = 0$$

$$C) x - 5y - 1 = 0$$

$$D) 2x - y + 2 = 0$$

$$E) x + z - 1 = 0$$

18. $z = xy - x^2 + 2y^2 + 4y - 6$ бетіне $M_0(0;1;0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x}{12} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$B) \frac{x}{-5} = \frac{y+10}{-3} = \frac{z}{-1}$$

$$C) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{22} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-1}$$

19. $z = xy + x^2 + y^2 - 6x + 1$ бетіне $M_0(0;0;1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + y + z = 0$$

$$B) x - z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + 2 = 0$$

$$D) 6x + z - 1 = 0$$

Е) $5y + z - 1 = 0$

20. $z = 3x + 9y - x^2 + xy + y^2$ бетіне $M_0(0; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1}$

B) $\frac{x}{5} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{-1}$

21. $z = 3xy + 2y^2 - x^2 + 2x - 4y$ бетіне $M_0(0; 1; -2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $5x - z - 2 = 0$

B) $x - 5y - z = 0$

C) $2x + z + 2 = 0$

D) $2x - y + 2 = 0$

E) $x + z - 1 = 0$

22. $z = x^2 - xy + y^2 + 7x + 11$ бетіне $M_0(0; 1; 2)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-1}$

B) $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

C) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-6}{-1}$

$$D) \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{15} = \frac{z+3}{-1}$$

23. $z = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4y + 3$ бетіне $M_0(0; 0; 3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) y + z + 2 = 0$$

$$B) x - 5y - z = 0$$

$$C) 4y - z + 3 = 0$$

$$D) 2x + y + 2 = 0$$

$$E) x + z - 1 = 0$$

24. $z = xy - x^2 - y^2 - 11x + 3y - 5$ бетіне $M_0(0; 0; -5)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$B) \frac{x}{-4} = \frac{y+7}{5} = \frac{z}{-1}$$

$$C) \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{-11} = \frac{y}{3} = \frac{z+5}{-1}$$

$$E) \frac{x+1}{-12} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

25. $z = 4x^2 + y^2 - 2x - 5y - 2$ бетіне $M_0(0; 0; -2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) x + 5y + z - 1 = 0$$

$$B) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$D) 2x - y + z + 2 = 0$$

Е) $2x + 5y + z + 2 = 0$

26. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy - 3x$ бетіне $M_0(1; 1; 1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

B) $\frac{x}{-3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{-7} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{-1}$

27. $z = 2xy - 4x^2 - 4y^2 + 3x - 3$ бетіне $M_0(0; 0; -3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $x - 5y - z = 0$

B) $3x - z - 3 = 0$

C) $2x + y + 2 = 0$

D) $2x - z + 2 = 0$

E) $5y + z - 1 = 0$

28. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 2y + 9$ бетіне $M_0(0; 0; 3)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{-2} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$

B) $\frac{x}{-5} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{-6} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

29. $z = 2xy - 4x^2 - 4y^2 + 3x - 3$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x - z + 2 = 0$$

$$B) x - 5y - z = 0$$

$$C) 2x + y + 2 = 0$$

$$D) 3x - z + 3 = 0$$

$$E) 5y + z - 1 = 0$$

30. $z = 2x^2 + y^2 + 4x - y$ бетіне $M_0(1;0;6)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x-6}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-1}$$

$$B) \frac{x}{-5} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z+6}{-1}$$

$$C) \frac{x}{-2} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{8} = \frac{y}{-1} = \frac{z-6}{-1}$$

31. $z = xy - x^2 + 2y^2 - x$ бетіне $M_0(1;1;1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x - 5y + z + 2 = 0$$

$$B) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$D) 2x - y + z + 2 = 0$$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

32. $z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 8y$ бетіне $M_0(1; 0; -2)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-1}$

B) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+2}{-1}$

C) $\frac{x}{-2} = \frac{y+8}{-9} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x+4}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x-8}{-2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{-1}$

33. $z = 5x + 2y - x^2 - xy - 3y^2$ бетіне $M_0(0; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $3x + 3y - z + 3 = 0$

B) $2x + y + z + 2 = 0$

C) $6x + 8y - z + 8 = 0$

D) $2x - y + z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

34. $z = 5 - 10x + 2y - 4x^2 - y^2$ бетіне $M_0(0; 0; 1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

B) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

C) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-1}$

$$D) \frac{x}{-10} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{-1}$$

35. $z = x^2 - xy - y^2 + 4x + 3$ бетіне $M_0(0;1;2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + 2y - z = 0$$

$$B) x + 5y + z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$D) 2x - y + z + 2 = 0$$

$$E) 3x - 2y - z + 4 = 0$$

36. $z = 4xy - 3x^2 - y^2 + 7$ бетіне $M_0(1;0;-3)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x-1}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{-1}$$

$$B) \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{-1}$$

$$C) \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{9} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

37. $z = x^3 + y^3 - 4xy + 2$ бетіне $M_0(1;1;1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$B) x + y + z - 3 = 0$$

$$C) 2x + y + z + 2 = 0$$

D) $2x - y + z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z - 1 = 0$

38. $z = 2x^2 + 2y^2 - xy + 3x + 5$ бетіне $M_0(0;1;1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{-2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-3}{-1}$

B) $\frac{x}{-2} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$

D) $\frac{x}{10} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x-1}{-12} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{-1}$

39. $z = 2 + 4x - x^2 - y^2$ бетіне $M_0(0;0;2)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $6x - z + 4 = 0$

B) $x - z - 1 = 0$

C) $2x + y + 2 = 0$

D) $4x - z + 2 = 0$

E) $x + 5y + z = 0$

40. $z = xy + x^2 + y^2 + 2y - 4$ бетіне $M_0(0;2;0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{-12} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

B) $\frac{x}{-15} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z}{-1}$

$$C) \frac{x}{-33} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z}{-1}$$

41. $z = x^2 + y^2 + 4xy + x + y + 2$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) x + y - z + 3 = 0$$

$$B) x - 5y - z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + z + 2 = 0$$

$$D) 2x + 2y - z + 1 = 0$$

$$E) x + 5y + z - 1 = 0$$

42. $z = x^2 + y^2 + 8xy + 3x + 4y + 2$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x}{-5} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$$

$$B) \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

$$C) \frac{x}{-2} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$$

43. $z = x^3 + 7y^3 - 6xy + 3$ бетіне $M_0(1;1;8)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

- A) $2x + y + z + 2 = 0$
- B) $x - 5y - z - 1 = 0$
- C) $3x - 15y + z + 4 = 0$
- D) $2x - y + z + 2 = 0$
- E) $x + 5y + z - 1 = 0$

44. $z = 1 - 14x - 2x^2 - 6y^2 - xy$ бетіне $M_0(0;1;-1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

- A) $\frac{x}{13} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-1}$
- B) $\frac{x}{-15} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{-1}$
- C) $\frac{x}{-12} = \frac{y+8}{-14} = \frac{z}{-1}$
- D) $\frac{x}{-15} = \frac{y-1}{-12} = \frac{z+1}{-1}$
- E) $\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{7} = \frac{z}{-1}$

45. $z = 5 + 7x - x^2 - y^2 - 4xy$ бетіне $M_0(0;0;4)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

- A) $x + 5y + z = 0$
- B) $x - z - 1 = 0$
- C) $2x + y + 2 = 0$
- D) $y + z + 2 = 0$
- E) $7x - z + 4 = 0$

46. $z = x^2 + y^2 + 8xy + x + 2y + 3$ бетіне $M_0(0;0;1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

B) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$

C) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+8}{-5} = \frac{z}{-1}$

D) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

E) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-1}$

47. $z = xy + 3x^2 + 8y^2 + 5x + 7$ бетіне $M_0(0;0;3)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

A) $x - 5y - 1 = 0$

B) $5x - z + 3 = 0$

C) $2x + y + z = 0$

D) $2x - y + 2 = 0$

E) $x + z - 1 = 0$

48. $z = xy - x^2 + 5y^2 + 3y - 7$ бетіне $M_0(0;1;0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x}{12} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z}{-1}$

B) $\frac{x}{-5} = \frac{y+10}{-3} = \frac{z}{-1}$

C) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{-1}$

$$D) \frac{x}{6} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x-1}{22} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-1}$$

49. $z = 3xy + x^2 + y^2 - 2x + 7$ бетіне $M_0(0; 0; 1)$ нүктесі арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

$$A) 2x + y + z = 0$$

$$B) x - z - 1 = 0$$

$$C) 2x + y + 2 = 0$$

$$D) 2x + z - 1 = 0$$

$$E) 5y + z - 1 = 0$$

50. $z = 7x + 5y - x^2 + xy + y^2$ бетіне $M_0(0; -1; 0)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль теңдеуін жазыңыз.

$$A) \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1}$$

$$B) \frac{x}{5} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$C) \frac{x}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$D) \frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

$$E) \frac{x}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

6 ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ЭКСТРЕМУМДЕРІ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Екі айнымалы функцияны экстремумдерге» зерттеуге арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

6.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 6.1: $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешімі:

а) Егер барлық P нүктесінен өзге $P'(x, y)$ нүктелері үшін P нүктесінің жеткілікті аз аймағында $f(a, b) > f(x, y)$ ($f(a, b) < f(x, y)$) теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясының $P(a, b)$ нүктесінде $f(a, b)$ максимумы (минимумы) бар деп айтамыз. Функцияның максимумы немесе минимумы осы функцияның экстремумдары деп аталады.

Экстремумның қажетті шарты: Дифференциалданатын $f(x, y)$ функциясының экстремумы болатын (a, b) нүктесі кризистік (стационар, экстремумға күдікті) нүкте деп аталады. Ол

$$f'_x(a, b) = 0, f'_y(a, b) = 0 \quad (6.1)$$

теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады.

(6.1) жүйесі $df(x, y) = 0$ теңдеуіне эквивалентті.

Жалпы жағдайда, $f(x, y)$ функциясының $P(a, b)$ экстремум нүктесінде не $df(a, b) = 0$, не $df(a, b)$ табылмайды.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$$

және

$$A = f''_{xx}(a, b), B = f''_{xy}(a, b), C = f''_{yy}(a, b)$$

болсын. Онда дискриминант $\Delta = AC - B^2$.

Онда:

- 1) егер $\Delta > 0$ болса, онда функцияның $P(a, b)$ нүктесінде экстремумы бар. Егер $A < 0, C < 0$ болса, онда ол максимум нүктесі, егер $A > 0, C > 0$ болса, онда ол минимум нүктесі болады;
 - 2) егер $\Delta < 0$ болса, онда $P(a, b)$ нүктесінде экстремум жоқ;
 - 3) егер $\Delta = 0$ болса, онда $P(a, b)$ нүктесінің экстремум нүктесі болу, болмауы ашық сұрақ болып қалады (қосымша зерттеулер қажет).
- б) Экстремумның қажетті шарты бойынша $f(x, y)$ функциясының экстремумы болатын кризистік нүктесін табайық, яғни

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y)'_x = 4x - y - 5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y)'_y = -x + 6y + 7.$$

Кризистік нүктесінің координаталарын табу үшін

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

жүйесін шешсек $x = 1, y = -1$ шешімдерін

аламыз, яғни $M(1; -1)$ кризистік нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарты бойынша

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b)$$

болса, оның дискриминанты $\Delta = AC - B^2$.

Демек, ізделінді $M(1; -1)$ кризистік нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын есептейміз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x - y - 5)'_x = 4,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x - y - 5)'_y = -1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x + 6y + 7)'_y = 6.$$

Сонымен $\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0$ болса шарт бойынша экстремум бар.

$A > 0, C > 0$ болғандықтан $M(1; -1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды:

$$\begin{aligned} z_{\min} &= z(M) = (2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y)_{M(1;-1)} = \\ &= 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot (-1) + 3(-1)^2 - 5 \cdot 1 + 7(-1) = -6. \end{aligned}$$

с) Жауабы: $z_{\min} = -6$.

Мысал 6.2: $z = 15 - 2x^2 - 2y^2 - xy - 15x$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешімі:

а) Мысал 6.1 мысалында көрсетілген теориялық мағлұматтарға сүйенеміз.

б) Экстремумның қажетті шарты бойынша $f(x, y)$ функциясының экстремумы болатын кризистік нүктесін табайық, яғни

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (15 - 2x^2 - 2y^2 - xy - 15x)'_x = -4x - y - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (15 - 2x^2 - 2y^2 - xy - 15x)'_y = -4y - x.$$

Кризистік нүктесінің координаталарын табу үшін $\begin{cases} -4x - y - 15 = 0 \\ -x - 4y = 0 \end{cases}$ жүйесін шешсек $x = -4, y = 1$ шешімдерін

аламыз, яғни $M(-4; 1)$ кризистік нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарты бойынша

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b)$$

болса, оның дискриминанты $\Delta = AC - B^2$.

Демек, ізделінді $M(-4; 1)$ кризистік нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын есептейміз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-4x - y - 15)'_x = -4,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-4x - y - 15)'_y = -1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x - 4y)'_y = -4.$$

Сонымен $\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - (-1)^2 = 15 > 0$ болса шарт бойынша экстремум бар.

$A < 0, C < 0$ болғандықтан $M(-4; 1)$ нүктесінде берілген функция максимум мәнін қабылдайды:

$$\begin{aligned} z_{\max} &= z(M) = (15 - 2x^2 - 2y^2 - xy - 15x)_{M(-4;1)} = \\ &= 15 - 2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot 1^2 - (-4) \cdot 1 - 15 \cdot (-4) = 45. \end{aligned}$$

с) Жауабы: $z_{\max} = 45$.

Мысал 6.3: $z = 3xy + 2y^2 - x^2 - 5$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешімі:

а) Мысал 6.1 мысалында көрсетілген теориялық мағлұматтарға сүйенеміз.

б) Экстремумның қажетті шарты бойынша $f(x, y)$ функциясының экстремумы болатын кризистік нүктесін табайық, яғни

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3xy + 2y^2 - x^2 - 5)'_x = 3y - 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3xy + 2y^2 - x^2 - 5)'_y = 3x + 4y.$$

Кризистік нүктесінің координаталарын табу үшін $\begin{cases} 3y - 2x = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

жүйесін шешсек $x = 0, y = 0$ шешімдерін аламыз, яғни $M(0; 0)$ кризистік нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарты бойынша

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b)$$

болса, оның дискриминанты $\Delta = AC - B^2$.

Демек, ізделінді $M(0; 0)$ кризистік нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын есептейміз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3y - 2x)'_x = -2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3y - 2x)'_y = 3,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x + 4y)'_y = 4.$$

Сонымен $\Delta = AC - B^2 = -2 \cdot 4 - 3^2 = -17 < 0$ болса шарт бойынша экстремум жоқ.

с) Жауабы: экстремум жоқ.

6.2 Тест тапсырмалары

1. $z = xy - x^2 - y^2 - 9x + 6y - 5$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 16$

B) $z_{\min} = -16$

C) $z_{\min} = -10$

D) $z_{\max} = 10$

E) $z_{\min} = -15$

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 3$

B) $z_{\min} = 2$

C) $z_{\min} = 3$

D) $z_{\max} = 2$

E) $z_{\max} = 1$

3. $z = x^2 + 8y^2 - 6xy + 5$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 2$
- B) $z_{\max} = 4$
- C) $z_{\min} = 4$
- D) $z_{\max} = 2$
- E) экстремумы жоқ

4. $z = 1 - 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 21$
- B) $z_{\max} = 31$
- C) $z_{\min} = 31$
- D) $z_{\max} = 21$
- E) $z_{\max} = 41$

5. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 9$
- B) $z_{\max} = -9$
- C) $z_{\min} = -9$
- D) $z_{\max} = -19$
- E) $z_{\min} = 0$

6. $z = 2x^2 - y^2 + xy - 2y - 8x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -4$
- B) $z_{\max} = 9$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 0$
- E) $z_{\max} = -4$

7. $z = 1 - 12x + 2y - 6x^2 - y^2$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\max} = 6$

- B) $z_{\min} = 6$
- C) $z_{\max} = 8$
- D) $z_{\min} = 8$
- E) $z_{\min} = 0$

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x + 1$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -2$
- B) $z_{\max} = 2$
- C) $z_{\min} = 5$
- D) $z_{\max} = 5$
- E) $z_{\min} = 0$

9. $z = 2x^2 - y^2 + xy - 3y - 21x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -4$
- B) $z_{\max} = 7$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 0$
- E) $z_{\max} = -4$

10. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 1$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -15$
- B) $z_{\min} = -13$
- C) $z_{\max} = 13$
- D) $z_{\min} = -10$
- E) $z_{\max} = 10$

11. $z = 2x^2 - y^2 + 2xy - 4y + 4x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -4$

- B) $z_{\max} = 10$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 0$
- E) $z_{\max} = -4$

12. $z = 1 - 2x^2 - xy - 2y^2 + 15x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\max} = -37$
- B) $z_{\min} = -37$
- C) $z_{\max} = 31$
- D) $z_{\min} = 31$
- E) $z_{\min} = 39$

13. $z = 6x - x^2 - y^2 - xy - 7$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 2$
- B) $z_{\max} = 5$
- C) $z_{\min} = 5$
- D) $z_{\max} = -2$
- E) $z_{\max} = 1$

14. $z = x^2 + y^2 + 6xy + 22x + 2y + 1$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -6$
- B) $z_{\max} = -6$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 0$
- E) $z_{\max} = 1$

15. $z = xy + 4x^2 + 2y^2 + 3$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 3$
- B) $z_{\max} = 3$
- C) $z_{\min} = 1$
- D) экстремумы жоқ
- E) $z_{\max} = -3$

16. $z = xy - 2y^2 - x^2 + 14y - 20$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 2$
- B) $z_{\max} = 8$
- C) $z_{\min} = 8$
- D) $z_{\max} = 4$
- E) $z_{\max} = 1$

17. $z = 3xy + 2y^2 - x^2$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 1$
- B) $z_{\max} = 2$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = -1$
- E) $z_{\max} = 0$

18. $z = xy + x^2 + y^2 - 6x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -12$
- B) $z_{\max} = -6$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = -12$
- E) $z_{\max} = 6$

19. $z = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4y$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 4$
- B) $z_{\max} = 0$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 4$
- E) $z_{\max} = 1$

20. $z = 4x^2 + y^2 - xy - 15y$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -60$
- B) $z_{\max} = -15$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 15$
- E) $z_{\max} = 10$

21. $z = 7xy + 2y^2 - 7x^2$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 1$
- B) $z_{\max} = 2$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = -1$
- E) $z_{\max} = 0$

22. $z = 2xy - 4x^2 - 4y^2 + 30x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 30$
- B) $z_{\max} = 30$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 60$
- E) $z_{\max} = 10$

23. $z = 2x^2 - y^2 + xy - 4y - 16x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -4$

B) $z_{\max} = 4$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 0$

E) $z_{\max} = -4$

24. $z = 2x^2 + y^2 + 4x - y$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -2,25$

B) $z_{\max} = 0$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 0,25$

E) $z_{\max} = -2$

25. $z = xy - x^2 + 2y^2 - 9x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -9$

B) $z_{\max} = 0$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 9$

E) $z_{\max} = -1$

26. $z = xy - x^2 - y^2 - 9x + 6y - 15$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 6$

B) $z_{\min} = -16$

C) $z_{\min} = -10$

D) $z_{\max} = 10$

E) $z_{\min} = -17$

27. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 7$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 3$

B) $z_{\min} = 6$

C) $z_{\min} = 3$

D) $z_{\max} = 2$

E) $z_{\max} = 1$

28. $z = x^2 + 8y^2 - 6xy + 5$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = 4$

B) $z_{\max} = 4$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 2$

E) $z_{\min} = 2$

29. $z = 8 - 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 21$

B) $z_{\max} = 31$

C) $z_{\min} = 18$

D) $z_{\max} = 38$

E) $z_{\max} = 48$

30. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 10$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = 0$
- B) $z_{\max} = -9$
- C) $z_{\min} = -9$
- D) $z_{\max} = -29$
- E) $z_{\min} = -19$

31. $z = x^2 - xy + y^2 + x + 4y + 1$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -6$
- B) $z_{\max} = 1$
- C) $z_{\max} = -1$
- D) $z_{\min} = -1$
- E) $z_{\max} = 2$

32. $z = 2 - x^2 - xy - y^2 + 3x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -37$
- B) $z_{\max} = 5$
- C) $z_{\max} = 31$
- D) $z_{\min} = 31$
- E) $z_{\min} = 39$

33. $z = 4x^2 - y^2 + xy - 2y - 16x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\min} = -9$

- B) $z_{\max} = 4$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\max} = 0$
- E) $z_{\max} = -8$

34. $z = x^2 + y^2 + xy + 2x + 4y + 6$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\max} = 0$
- B) $z_{\max} = -6$
- C) экстремумы жоқ
- D) $z_{\min} = 2$
- E) $z_{\max} = 1$

35. $z = 4x + 2y - x^2 - xy + y^2$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) экстремумы жоқ
- B) $z_{\max} = 4$
- C) $z_{\min} = 4$
- D) $z_{\max} = 2$
- E) $z_{\min} = 2$

36. $z = 2x + y - x^2 - xy - y^2$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $z_{\max} = 1$
- B) $z_{\min} = 1$
- C) $z_{\max} = 2$
- D) $z_{\min} = 2$
- E) $z_{\max} = 3$

37. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 0$

B) $z_{\min} = 0$

C) $z_{\max} = 4$

D) $z_{\max} = 2$

E) $z_{\min} = 2$

38. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 2$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 1$

B) $z_{\min} = 1$

C) $z_{\max} = -1$

D) $z_{\min} = -1$

E) $z_{\max} = 2$

39. $z = x^2 + 8y^2 - 6xy + 5$ функциясының экстремумын табу керек.

A) экстремумы жоқ

B) $z_{\max} = 5$

C) $z_{\min} = 4$

D) $z_{\max} = 3$

E) $z_{\min} = 2$

40. $z = 3x^2 - y^2 + 3xy - 6y + 9x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -3$

- B) $Z_{\max} = 5$
- C) экстремумы жоқ
- D) $Z_{\max} = 0$
- E) $Z_{\max} = -4$

41. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy - 23x$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $Z_{\min} = -46$
- B) $Z_{\max} = 40$
- C) экстремумы жоқ
- D) $Z_{\max} = 23$
- E) $Z_{\max} = -23$

42. $z = 3x - x^2 - y^2 - xy + 5$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $Z_{\min} = 2$
- B) $Z_{\max} = 5$
- C) $Z_{\max} = 8$
- D) $Z_{\min} = 5$
- E) $Z_{\max} = 1$

43. $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3$ функциясының экстремумын табу керек.

- A) $Z_{\min} = 2$
- B) $Z_{\max} = 8$
- C) $Z_{\max} = 1$
- D) $Z_{\max} = 4$
- E) $Z_{\min} = -10$

44. $z = xy - x^2 + 2y^2 - 18x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -18$

B) $z_{\max} = 0$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 18$

E) $z_{\max} = -1$

45. $z = xy - x^2 - y^2 - 9x + 6y - 8$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 13$

B) $z_{\min} = -13$

C) $z_{\min} = -10$

D) $z_{\max} = 10$

E) $z_{\min} = -15$

46. $z = x^2 + xy + y^2 - 8x - y + 5$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -14$

B) $z_{\max} = -14$

C) $z_{\min} = 3$

D) $z_{\max} = 2$

E) $z_{\max} = 14$

47. $z = xy - x^2 + 3y^2 - 13x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -13$

B) $z_{\max} = 0$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 9$

E) $z_{\max} = -13$

48. $z = xy - x^2 - y^2 + x + 4y - 1$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 6$

B) $z_{\min} = -16$

C) $z_{\min} = -6$

D) $z_{\max} = 10$

E) $z_{\min} = -11$

49. $z = xy - x^2 - y^2 - x + 5y - 7$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\max} = 12$

B) $z_{\min} = -15$

C) $z_{\min} = -10$

D) $z_{\max} = 0$

E) $z_{\min} = -15$

50. $z = xy - 4x^2 + 2y^2 - 33x$ функциясының экстремумын табу керек.

A) $z_{\min} = -9$

B) $z_{\max} = 0$

C) экстремумы жоқ

D) $z_{\max} = 9$

E) $z_{\max} = -1$

7 ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЕСЕПТЕУ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Екі еселі интегралдарды есептеуге» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

7.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

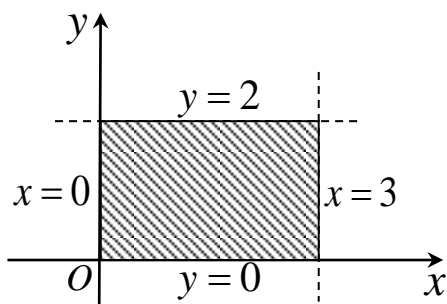
Мысал 7.1: $\iint_D 9y dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

Шешімі:

а) Егер $f(x, y)$ функциясы $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышында үзіліссіз функция болса, онда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \text{ – қайталанатын интеграл.}$$

б) Интегралдау облысы ретінде жақтары координаталық өстеріне параллель болатын



тік төртбұрыш болғандықтан қайталанатын интегралдағы интегралдау шектері тұрақты болады $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$, яғни интегралдау облысы $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$, олай болса

$$\iint_D 9y dx dy = 9 \int_0^3 dx \int_0^2 y dy = 9 \int_0^3 dx \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} = 9 \cdot 2 \int_0^3 dx = 18x \Big|_0^3 = 18 \cdot 3 = 54.$$

с) Жауабы: 54.

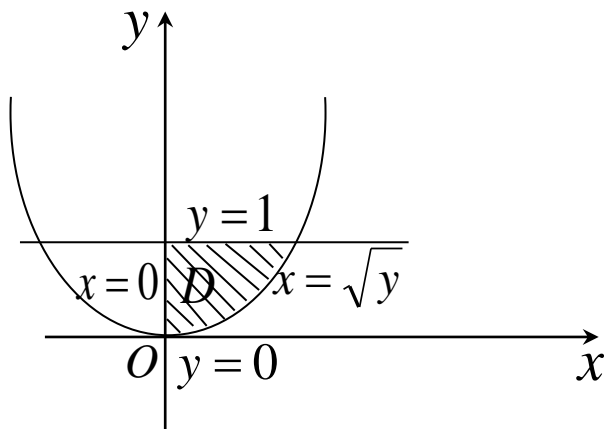
Мысал 7.2: $\int_0^1 15 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

Шешімі:

- a) Егер $f(x, y)$ функциясы $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ жазық облысында үзіліссіз, ал $y = y_1(x), y = y_2(x)$ функциялары D облысының $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз функциялар болса, онда

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy - \text{қайталанатын интеграл.}$$

- b) Интегралдау облысы



қисық сызықты D облысы болғандықтан қайталанатын интегралдағы интегралдау шектері $0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1$ теңсіздіктермен анықталатын болады, яғни интегралдау облысы $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$, олай болса

$$\int_0^1 15 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dx = 15 \int_0^1 dy \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{15}{4} \int_0^1 y^2 dy = \frac{15}{4} \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{5}{4}.$$

- c) Жауабы: $\frac{5}{4}$.

7.2 Тест тапсырмалары

1. $\iint_D 4y dx dy, D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 4
- B) -4
- C) 8
- D) -8
- E) 2

2. $\int_0^1 12dy \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 1
- B) 9
- C) 12
- D) 8
- E) 7

3. $\iint_D 3x^2 dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 1
- B) -1
- C) 0
- D) -2
- E) 2

4. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -2
- B) -4
- C) 1
- D) -1
- E) 0

5. $\iint_D 4 dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 10
- B) 8
- C) 6
- D) 4
- E) 2

6. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 3x dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -1
- B) -3
- C) 1

- D) 3
- E) 2

7. $\iint_D 2(x-1)dxdy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 2
- B) 1
- C) -1
- D) -2
- E) 0

8. $\int_0^2 dx \int_x^{3x} 3dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -6
- B) 6
- C) 9
- D) -12
- E) 12

9. $\iint_D 2(x+1)dxdy$, $D: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 2
- B) 1
- C) $\frac{1}{2}$
- D) -1
- E) -2

10. $\int_1^2 dx \int_x^{x+3} 2dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 2
- C) -2
- D) 6
- E) -6

11. $\iint_D x^2 dxdy$, $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 11
- B) 9
- C) 7
- D) 5
- E) 3

12. $\int_0^1 20dy \int_0^{\sqrt{y}} xdx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 1
- B) 9
- C) 5
- D) 8
- E) 7

13. $\iint_D (y-4)dxdy$, $D:0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) -8
- C) 8
- D) 4
- E) -4

14. $\int_0^5 4dx \int_0^{\sqrt{5-x}} ydy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 25
- B) -40
- C) 1
- D) -15
- E) 0

15. $\iint_D (x-3)dxdy$, $D:1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -4
- B) 4
- C) -2

- D) 2
- E) 0

16. $\int_0^3 dx \int_0^x 4y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 24
- B) 18
- C) 12
- D) 8
- E) 6

17. $\iint_D x dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -1
- B) 1
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $-\frac{1}{2}$
- E) 3

18. $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2+y}} x dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 9
- B) 7
- C) 5
- D) 3
- E) 1

19. $\iint_D y dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 4

Е) 5

20. $\int_0^1 dx \int_x^{2x} 4y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

A) 0

B) 2

C) -2

D) 4

E) -4

21. $\iint_D 2 dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

A) -2

B) 2

C) 1

D) -1

E) 4

22. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} 2 dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

A) 4

B) -4

C) 0

D) 2

E) -2

23. $\iint_D 4(y-2) dx dy$, $D: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

A) 0

B) 2

C) 4

D) -2

E) -4

24. $\int_0^3 x dx \int_0^{2-x} dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 9
- B) 18
- C) -9
- D) -18
- E) 0

25. $\iint_D 2(y-1) dx dy$, $D: -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -2
- B) 2
- C) 1
- D) 0
- E) -1

26. $\int_0^1 dx \int_{2-x}^2 12x dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -1
- B) -3
- C) 4
- D) 3
- E) 2

27. $\iint_D 5x dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -1
- B) 5
- C) 1
- D) $-\frac{1}{2}$
- E) 3

28. $\int_0^3 dx \int_x^{5x} 4dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -56
- B) 76
- C) 9
- D) 72
- E) 12

29. $\iint_D x dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 4
- E) 5

30. $\int_1^3 dx \int_x^{x+4} 6dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 40
- B) 24
- C) -23
- D) 48
- E) -6

31. $\iint_D 9x^2 dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 3
- B) 9
- C) 7
- D) 5
- E) 11

32. $\int_0^1 28dy \int_0^{\sqrt{y}} x dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 1
- B) 19

- C) 15
- D) 14
- E) 7

33. $\iint_D (y-3) dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) -8
- C) -4
- D) 4
- E) -9

34. $\int_0^4 5 dx \int_0^{\sqrt{7-x}} y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 25
- B) -40
- C) 1
- D) 50
- E) 0

35. $\iint_D (x-5) dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) -4
- B) 4
- C) -2
- D) 2
- E) -8

36. $\int_0^2 dx \int_0^{3x} 5 y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 24
- B) 18
- C) 60
- D) 8
- E) 6

37. $\iint_D (x+4) dx dy$, $D: -4 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 2

- C) 9
- D) 8
- E) -2

38. $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{2+y}} x dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 8
- B) 7
- C) 5
- D) 3
- E) 1

39. $\iint_D 12x dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 6
- B) 4
- C) 2
- D) 12
- E) 8

40. $\int_0^1 dx \int_x^{4x} 6y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 15
- C) -20
- D) 4
- E) -40

41. $\iint_D 6y dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 6
- B) -4
- C) 8
- D) -8
- E) 2

42. $\int_0^4 dx \int_x^{3x} 6y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 4

- B) -46
- C) 96
- D) 24
- E) -28

43. $\iint_D 6x^2 dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 1
- B) -1
- C) 0
- D) -2
- E) 4

44. $\int_0^3 x dx \int_0^{4-x} dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 9
- B) 18
- C) -9
- D) -18
- E) 0

45. $\iint_D 7 dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 10
- B) 14
- C) 6
- D) 4
- E) 2

46. $\int_0^2 x dx \int_0^{2x} 8y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 24
- B) 18
- C) 64
- D) 8
- E) 6

47. $\iint_D (x+2) dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0

- B) 6
- C) 9
- D) -9
- E) -2

48. $\int_0^6 dy \int_0^{\sqrt{5+y}} x dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 24
- B) 70
- C) 15
- D) 32
- E) 14

49. $\iint_D 18x dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 6
- B) 4
- C) 2
- D) 9
- E) 8

50. $\int_0^1 dx \int_x^{7x} 2y dy$ интегралының мәнін есептеңіз.

- A) 0
- B) 16
- C) -30
- D) 4
- E) -50

8 ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Қисық сызықты интегралдарды» есептеуге арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

8.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 8.1: Есептеңіз: $\int_L (8x - y)dx$, $L: y = x$, $O(1;1)$, $A(3;3)$.

Шешімі:

а) Екінші текті қисық сызықты интегралды есептеуде интеграл астындағы өрнекті толықтай не «х-тен», не «у-тен» байланыстыра отырып, анықталған интегралды есептеуге келтіреміз.

Ескерту: Интегралдау бағытын дұрыс таңдау қажет.

б) Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 1$, $x_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8x - x)dx = \int_1^3 7x dx = 7 \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9 - 1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 1$, $y_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8y - y)dy = \int_1^3 7y dy = 7 \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9 - 1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болатынын көруге болады.

с) Жауабы: 28.

Мысал 8.2: Есептеңіз: $\int_L y^3 dx + (x + 2y)dy$, $L: x = y$, $O(2;2)$, $A(4;4)$.

Шешімі:

а) Егер L қисығы $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)] \cdot dx \quad (8.1)$$

формуласымен есептеледі.

Егер L қисығы $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(\psi(y), y) + Q(\psi(y), y) \cdot \psi'(y)] \cdot dy \quad (8.2)$$

формуласымен есептеледі.

- b) (8.1) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «x-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 2$, $x_2 = 4$:

$$\begin{aligned} \int_L y^3 dx + (x + 2y)dy &= \left| \begin{array}{l} x=y \\ dx=dy \end{array} \right| = \int_2^4 x^3 dx + (x + 2x)dx = \int_2^4 x^3 dx + 3xdx = \\ &= \int_2^4 (x^3 + 3x)dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^4 + 3 \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} \right) + 3 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \\ &= 64 - 4 + 3(8 - 2) = 78. \end{aligned}$$

(8.2) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «y-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 2$, $y_2 = 4$:

$$\begin{aligned} \int_L y^3 dx + (x + 2y)dy &= \left| \begin{array}{l} x=y \\ dx=dy \end{array} \right| = \int_2^4 y^3 dy + (y + 2y)dy = \\ &= \int_2^4 y^3 dy + 3ydy = \int_2^4 (y^3 + 3y)dy = \frac{y^4}{4} \Big|_2^4 + 3 \frac{y^2}{2} \Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} \right) + 3 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \\ &= 64 - 4 + 3(8 - 2) = 78. \end{aligned}$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болды.

- c) Жауабы: 78.

Мысал 8.3: Есептеңіз: $\int_L -7ydx + xdy$, $L: y=x^3$, $O(0; 0)$, $A(2; 8)$.

Шешімі:

- a) Егер L қисығы $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл (8.1) формуласымен, ал егер L қисығы $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$ формуласымен берілсе, онда қисық

СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ (8.2) формуласымен есептелетіні 8.2-мысалында көрсетілді.

- б) (8.1) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 0-ден 2-ге дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 0$, $x_2 = 2$:

$$\int_L -7ydx + xdy = \left| \begin{array}{l} y=x^3 \\ dy=3x^2 dx \end{array} \right| = \int_0^2 -7x^3 dx + x \cdot 3x^2 dx = \int_0^2 -4x^3 dx =$$

$$= -4 \int_0^2 x^3 dx = -4 \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = -(2^4 - 0) = -16.$$

(8.2) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 0-ден 8-ге дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 0$, $y_2 = 8$:

$$\int_L -7ydx + xdy = \left| \begin{array}{l} x=y^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy \end{array} \right| = \int_0^8 -7y \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy + y^{\frac{1}{3}} dy =$$

$$= \int_0^8 \left(-\frac{7}{3} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \right) dy = -\frac{4}{3} \int_0^8 y^{\frac{1}{3}} dy = -\frac{4}{3} \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = -y^{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = -\left((2^3)^{\frac{4}{3}} - 0 \right) = -16.$$

Бұл есепте де интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болатынына көз жеткіздік.

- с) Жауабы: -16 .

8.2 Тест тапсырмалары

1. Есептеңіз: $\int_L (3x - y)dx$, $L: y = x$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) 1
- B) 2
- C) -2
- D) 4
- E) -4

2. Есептеңіз: $\int_L y^2 dx + (x + y) dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) $\frac{4}{3}$
- B) 20
- C) $-\frac{2}{7}$
- D) $\frac{16}{3}$
- E) -4

3. Есептеңіз: $\int_L -y dx + x dy$, $L: y = x^3$, $O(0; 0)$, $A(2; 8)$.

- A) 8
- B) -8
- C) 4
- D) 2
- E) -2

4. Есептеңіз: $\int_L 2y dx + (7x - 2y) dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) 27
- B) -27
- C) 9
- D) 14
- E) 0

5. Есептеңіз: $\int_L xy dy$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(2; 4)$.

- A) 16
- B) $\frac{64}{5}$
- C) $\frac{32}{5}$
- D) 8
- E) 10

6. Есептеңіз: $\int_L (3x - y)dx$, $L: x = \frac{1}{2}y$, $O(0; 0)$, $A(2; 4)$.

- A) 12
- B) 8
- C) -8
- D) 2
- E) 4

7. Есептеңіз: $\int_L xdy - 2dx$, $L: y = x^3 - 2x$, $O(0; 0)$, $A(2; 4)$.

- A) 0
- B) 2
- C) -4
- D) 4
- E) -2

8. Есептеңіз: $\int_L y^2dx + (4x - y)dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) $\frac{7}{3}$
- B) 20
- C) $\frac{11}{6}$
- D) $\frac{13}{3}$
- E) -4

9. Есептеңіз: $\int_L xdy - 2dx$, $L: y = x^3 - 2x$, $O(0; 0)$, $A(1; -1)$.

- A) $-\frac{9}{4}$
- B) $\frac{9}{4}$
- C) $\frac{13}{4}$

- D) $\frac{1}{4}$
E) -2

10. Есептеңіз: $\int_L ydx + (x - 3y)dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) $\frac{7}{3}$
B) 0
C) $\frac{1}{6}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) -4

11. Есептеңіз: $\int_L xdy - ydx$, $L: y = x^2 - 1$, $A(0; -1)$, $B(3; 8)$.

- A) 6
B) 1
C) -1
D) -12
E) 12

12. Есептеңіз: $\int_L 2ydx + (x + 4y)dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(4; 4)$.

- A) 56
B) 0
C) 34
D) $-\frac{1}{2}$
E) -43

13. Есептеңіз: $\int_L ydx - xdy$, $L: y = 5x - 2$, $A(0; -2)$, $B(2; 8)$.

- A) 4
B) 2

- C) -2
- D) -4
- E) 0

14. Есептеңіз: $\int_L 8ydx + (x + 3y)dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) $\frac{1}{3}$
- B) 24
- C) 32
- D) -92
- E) -4

15. Есептеңіз: $\int_L 2xydx - x^2 dy$, $L: y = 3x - 2$, $A(0; -2)$, $B(2; 4)$.

- A) 0
- B) 16
- C) 2
- D) -2
- E) 3

16. Есептеңіз: $\int_L 3ydx + (6x - y)dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) 36
- B) $\frac{1}{4}$
- C) -3
- D) 16
- E) 3

17. Есептеңіз: $\int_L (x^2 - 2xy)dx$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $B(1; 1)$.

- A) 2
- B) -1
- C) $-\frac{1}{6}$

- D) $\frac{1}{6}$
E) -21

18. Есептеңіз: $\int_L (5y - 8x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(3; 3)$.

- A) 3
B) -35
C) $-\frac{27}{2}$
D) $-\frac{33}{4}$
E) 1

19. Есептеңіз: $\int_L xy dx + (y - x) dy$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) $-\frac{2}{3}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{1}{6}$
D) $-\frac{1}{12}$
E) $\frac{1}{12}$

20. Есептеңіз: $\int_L (x^2 + y^2) dx$, $L: x = \frac{1}{3}y$, $O(0; 0)$, $A(1; 3)$.

- A) $\frac{10}{3}$
B) 10
C) 5
D) -5
E) 4

21. Есептеңіз: $\int_L -2ydx + xdy$, $L: y = x^3$, $O(0;0)$, $A(2;8)$.

- A) 8
- B) -8
- C) 4
- D) 2
- E) -2

22. Есептеңіз: $\int_L xydy$, $L: x = 1 - \frac{y^2}{4}$, $A(1;0)$, $B(0;2)$.

- A) 3
- B) $\frac{9}{16}$
- C) $\frac{15}{16}$
- D) 1
- E) $\frac{1}{16}$

23. Есептеңіз: $\int_L (x + y)dx - 3xdy$, $L: y = 3 - x$, $A(0;3)$, $B(2;1)$.

- A) 6
- B) 12
- C) 0
- D) -3
- E) 3

24. Есептеңіз: $\int_L (xy - x)dx$, $L: x = y^2$, $O(0;0)$, $A(1;1)$.

- A) $\frac{1}{10}$
- B) $-\frac{1}{10}$
- C) 0

- D) $\frac{1}{20}$
- E) $\frac{1}{40}$

25. Есептеңіз: $\int_L (4x - y)dx$, $L: y = x$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) 1
- B) 2
- C) -2
- D) 6
- E) -4

26. Есептеңіз: $\int_L y^2 dx + (x - y)dy$, $L: x = y^2$, $O(0; 0)$, $A(4; 2)$.

- A) $\frac{1}{3}$
- B) 20
- C) $-\frac{2}{3}$
- D) $\frac{26}{3}$
- E) -4

27. Есептеңіз: $\int_L (2x^2 - y^2)dx$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) $\frac{4}{5}$
- B) 0
- C) $\frac{7}{15}$
- D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{3}$

28. Есептеңіз: $\int_L (14y - 3x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(4; 4)$.

- A) 6
- B) 12
- C) 88
- D) -83
- E) 38

29. Есептеңіз: $\int_L 2xy dy$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(2; 4)$.

- A) 16
- B) $\frac{128}{5}$
- C) $\frac{312}{5}$
- D) $\frac{12}{5}$
- E) 10

30. Есептеңіз: $\int_L 3y dx + (6x + 5y) dy$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) 257
- B) -125
- C) 933
- D) -139
- E) 28

31. Есептеңіз: $\int_L 2x dy - y dx$, $L: y = x^2 - 2$, $A(0; -2)$, $B(3; 7)$.

- A) 33
- B) 1
- C) -1
- D) -12
- E) 12

32. Есептеңіз: $\int_L 9ydx + (3x - 4y)dy$, $L: x = y$, $O(0;0)$, $A(2;2)$.

- A) $\frac{1}{3}$
- B) 24
- C) 16
- D) -92
- E) -4

33. Есептеңіз: $\int_L ydx - xdy$, $L: y = 3x + 1$, $A(0;1)$, $B(2;7)$.

- A) 4
- B) -2
- C) 2
- D) -4
- E) 0

34. Есептеңіз: $\int_L 10ydx + (2x - y)dy$, $L: x = y$, $O(0;0)$, $A(2;2)$.

- A) $\frac{1}{3}$
- B) 24
- C) 22
- D) -92
- E) -4

35. Есептеңіз: $\int_L 4xydx - x^2dy$, $L: y = 2x + 3$, $A(0;3)$, $B(2;7)$.

- A) 0
- B) 16
- C) 2
- D) -2
- E) 40

36. Есептеңіз: $\int_L (2y - x)dx$, $L: x = y$, $O(0;0)$, $A(2;2)$.

- A) -1

- B) $-\frac{1}{10}$
- C) 2
- D) $\frac{1}{20}$
- E) 3

37. Есептеңіз: $\int_L (x^2 - y^2) dx$, $L: y = x^2$, $O(0;0)$, $A(1;1)$.

- A) $\frac{4}{5}$
- B) 0
- C) $\frac{2}{15}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) $\frac{1}{3}$

38. Есептеңіз: $\int_L (3y - x) dx$, $L: x = y$, $O(0;0)$, $A(3;3)$.

- A) -1
- B) 9
- C) 2
- D) $\frac{1}{2}$
- E) -3

39. Есептеңіз: $\int_L 3x dy - y dx$, $L: y = x^2$, $O(0;0)$, $A(1;1)$.

- A) $-\frac{5}{3}$
- B) 5
- C) 6
- D) $\frac{5}{3}$

E) 3

40. Есептеңіз: $\int_L (5y - x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(4; 4)$.

A) -1

B) 92

C) 23

D) 32

E) -3

41. Есептеңіз: $\int_L 3x dy - 3y dx$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 1

E) 3

42. Есептеңіз: $\int_L (7y - x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(3; 3)$.

A) -17

B) 92

C) 27

D) 36

E) -3

43. Есептеңіз: $\int_L 5x dy - y dx$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

A) -1

B) 1

C) -2

D) -3

E) 3

44. Есептеңіз: $\int_L (6y - 5x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(3; 3)$.

A) -1

- B) $\frac{9}{2}$
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) -3

45. Есептеңіз: $\int_L xydx - x^2 dy$, $L: y = x^3$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) -2
- B) 2
- C) $-\frac{2}{5}$
- D) 1
- E) 0

46. Есептеңіз: $\int_L (10y - 4x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(3; 3)$.

- A) -1
- B) 27
- C) 90
- D) $\frac{1}{2}$
- E) -23

47. Есептеңіз: $\int_L 4x dy + y dx$, $L: y = x^2$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) -1
- B) 3
- C) -2
- D) -3
- E) 1

48. Есептеңіз: $\int_L (12y - 7x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$.

- A) -1

- B) 10
- C) 21
- D) 11
- E) -13

49. Есептеңіз: $\int_L 4x^2 dy - xy dx$, $L: y = x$, $O(0; 0)$, $A(1; 1)$.

- A) -2
- B) 2
- C) $-\frac{2}{5}$
- D) 1
- E) 0

50. Есептеңіз: $\int_L (13y - 4x) dx$, $L: x = y$, $O(0; 0)$, $A(4; 4)$.

- A) -21
- B) 72
- C) 21
- D) 71
- E) -13

9 АЙНЫМАЛЫСЫ АЖЫРАТЫЛАТЫН БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Айнымалысы ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерге» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

9.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 9.1: $x^3 dx + \frac{1}{y} dy = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

a) $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ (9.1)

түріндегі теңдеу *айнымалылары ажыратылған теңдеу* деп аталады. (9.1) теңдеуінің ерекшелігі – оның оң жағындағы әрбір қосылғыш тек бір ғана айнымалыдан тәуелді: $P(x)dx$ – тек x айнымалысынан, $Q(y)dy$ – тек y айнымалысынан тәуелді. Теңдіктің екі жағын да интегралдап, теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

b) Теңдіктің екі жағын интегралдаймыз:

$$\int x^3 dx + \int \frac{1}{y} dy = \int 0$$

$$\frac{x^4}{4} + \ln|y| = c - \text{жалпы интегралы, осыдан } y \text{-ті айқын түрде}$$

өрнектеп қойсақ

$$\ln|y| = c - \frac{x^4}{4}$$

$$\ln|y| = \ln c - \ln e^{\frac{x^4}{4}}$$

$$y = \frac{c}{e^{\frac{x^4}{4}}} - \text{жалпы шешімі.}$$

a) Жауабы: $y = \frac{c}{e^{\frac{x^4}{4}}}$.

Мысал 9.2: $y' = \frac{27x^8 - 6}{y + 7}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

а) Бірінші ретті

$$y' = f(x, y) \quad (9.2)$$

түріндегі теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады, егер $f(x, y)$ функциясын x және y айнымалыларынан тәуелді $f_1(x)f_2(y)$ екі функцияның көбейтіндісі түрінде жаза алсақ, мұндағы

$$y' = \frac{dy}{dx}. \text{ Айнымалыларын ажыратқаннан кейін, теңдіктің екі}$$

жағын да интегралдап, теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{27x^8 - 6}{y + 7}$

$$(y + 7)dy = (27x^8 - 6)dx$$

Теңдіктің екі жағын интегралдаймыз:

$$\int (y + 7)dy = \int (27x^8 - 6)dx$$

$$\frac{y^2}{2} + 7y = 27 \frac{x^9}{9} - 6x + c$$

$$y^2 + 14y = 6x^9 - 12x + c - \text{жалпы шешімі.}$$

с) Жауабы: $y^2 + 14y = 6x^9 - 12x + c$.

9.2 Тест тапсырмалары

1. $y' = \frac{3x^2 - 1}{y + 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $y^2 + 2y = 2x^3 + x + c$

В) $y^2 + 2y = 2x^3 - 2x + c$

С) $y^2 - 2y = 2x^3 + x + c$

Д) $y^2 + 2y = 2x^3 + x^2 + c$

Е) $y^2 + 2y = x^3 + x + c$

2. $y' = \frac{4x^3 + 1}{y - 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 4y = 2x^4 + 2x + c$

B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$

C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$

D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$

E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

3. $y' = \frac{2x + 1}{y - 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$

B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$

C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$

D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$

E) $y^2 - 2y = 2x^2 + 2x + c$

4. $y' = \frac{1 - 2x}{y + 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 + 4y - 2x^2 = 2x + c$

B) $y^2 + 4y + 2x^2 = x + c$

C) $y^2 + 4y + 2x^2 = 2x + c$

D) $y^2 + 4y + x^2 = 2x + c$

E) $y^2 - 4y + 2x^2 = 2x + c$

5. $y' = \frac{1 - 3x^2}{y - 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$

B) $y^2 - 2y + 2x^3 = 2x + c$

C) $y^2 - 2y - 2x^3 = 2x + c$

D) $y^2 + 2y + 2x^3 = 2x + c$

Е) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

6. $y' = \frac{1-4x^3}{y-2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $y^2 - 2y + 2x^4 = x + c$

В) $y^2 - 4y + 2x^3 = 2x + c$

С) $y^2 - 4y + 2x^4 = 2x + c$

Д) $y^2 - 2y - 2x^4 = 2x + c$

Е) $y^2 - 2y + x^4 = 2x + c$

7. $y' = \frac{1-6x}{y+3}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $y^2 + 6y + 6x^2 = x + c$

В) $y^2 + 6y + 3x^2 = 2x + c$

С) $y^2 + 6y + 6x^2 = 2x + c$

Д) $y^2 + 3y + 6x^2 = 2x + c$

Е) $y^2 + 6y - 6x^2 = 2x + c$

8. $y' = \frac{5x+3}{2y-1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $2y^2 - y = x^2 + 6x + c$

В) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 3x + c$

С) $2y^2 - 2y = x^2 + 3x + c$

Д) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 6x + c$

Е) $2y^2 - 4y = 5x^2 + 6x + c$

9. $y' = \frac{6x^2-1}{3-2y}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $3y - y^2 = 2x^3 + x + c$

В) $3y - y^2 = 2x^3 - x + c$

С) $3y - y^2 = x^3 - x + c$

D) $3y + y^2 = 2x^3 - x + c$

E) $3y - y^2 = 2x^2 - x + c$

10. $y' = \frac{8x^3 + 4}{4 - 3y^2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $4y - y^3 = 2x^4 + 2x + c$

B) $4y - y^3 = 2x^4 - 4x + c$

C) $4y + y^3 = 2x^4 + 4x + c$

D) $4y - y^3 = 2x^4 + 4x + c$

E) $4y - 2y^3 = 2x^4 + 4x + c$

11. $y' = \frac{4x^3 + 3}{y - 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 4y = 2x^4 + 6x + c$

B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$

C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$

D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$

E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

12. $y' = \frac{2 - 4x^3}{y - 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 2y + 2x^4 = x + c$

B) $y^2 - 4y + 2x^3 = 2x + c$

C) $y^2 - 4y + 2x^4 = 4x + c$

D) $y^2 - 2y - 2x^4 = 2x + c$

E) $y^2 - 2y + x^4 = 2x + c$

13. $y' = \frac{7 - 3x^2}{y - 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$
- B) $y^2 - 2y + 2x^3 = 14x + c$
- C) $y^2 - 2y - 2x^3 = 2x + c$
- D) $y^2 + 2y + 2x^3 = 2x + c$
- E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

14. $y' = \frac{2x+3}{y-1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$
- B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$
- D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$
- E) $y^2 - 2y = 2x^2 + 6x + c$

15. $y' = \frac{5x+8}{2y-1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $2y^2 - y = x^2 + 6x + c$
- B) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 3x + c$
- C) $2y^2 - 2y = x^2 + 3x + c$
- D) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 16x + c$
- E) $2y^2 - 4y = 5x^2 + 6x + c$

16. $y' = \frac{3x^2-2}{y+1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 2y = 2x^3 + x + c$
- B) $y^2 + 2y = 2x^3 - 4x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^3 + x + c$
- D) $y^2 + 2y = 2x^3 + x^2 + c$
- E) $y^2 + 2y = x^3 + x + c$

17. $y' = \frac{4x^3 + 5}{y - 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 4y = 2x^4 + 10x + c$
- B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$
- C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$
- D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$
- E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

18. $y' = \frac{2x + 7}{y - 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$
- B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$
- D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$
- E) $y^2 - 2y = 2x^2 + 14x + c$

19. $y' = \frac{5 - 2x}{y + 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 4y - 2x^2 = 2x + c$
- B) $y^2 + 4y + 2x^2 = x + c$
- C) $y^2 + 4y + 2x^2 = 10x + c$
- D) $y^2 + 4y + x^2 = 2x + c$
- E) $y^2 - 4y + 2x^2 = 2x + c$

20. $y' = \frac{5 - 3x^2}{y - 1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$
- B) $y^2 - 2y + 2x^3 = 10x + c$
- C) $y^2 - 2y - 2x^3 = 2x + c$

D) $y^2 + 2y + 2x^3 = 2x + c$

E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

21. $y' = \frac{3-4x^3}{y-2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 2y + 2x^4 = x + c$

B) $y^2 - 4y + 2x^3 = 2x + c$

C) $y^2 - 4y + 2x^4 = 6x + c$

D) $y^2 - 2y - 2x^4 = 2x + c$

E) $y^2 - 2y + x^4 = 2x + c$

22. $y' = \frac{5-6x}{y+3}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 + 6y + 6x^2 = x + c$

B) $y^2 + 6y + 3x^2 = 2x + c$

C) $y^2 + 6y + 6x^2 = 10x + c$

D) $y^2 + 3y + 6x^2 = 2x + c$

E) $y^2 + 6y - 6x^2 = 2x + c$

23. $y' = \frac{5x+4}{2y-1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $2y^2 - y = x^2 + 6x + c$

B) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 3x + c$

C) $2y^2 - 2y = x^2 + 3x + c$

D) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 8x + c$

E) $2y^2 - 4y = 5x^2 + 6x + c$

24. $y' = \frac{6x^2-4}{3-2y}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $3y - y^2 = 2x^3 + x + c$

B) $3y - y^2 = 2x^3 - 4x + c$

- C) $3y - y^2 = x^3 - x + c$
- D) $3y + y^2 = 2x^3 - x + c$
- E) $3y - y^2 = 2x^2 - x + c$

25. $y' = \frac{8x^3 + 3}{4 - 3y^2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $4y - y^3 = 2x^4 + 2x + c$
- B) $4y - y^3 = 2x^4 - 4x + c$
- C) $4y + y^3 = 2x^4 + 4x + c$
- D) $4y - y^3 = 2x^4 + 3x + c$
- E) $4y - 2y^3 = 2x^4 + 4x + c$

26. $y' = \frac{3x^2 - 1}{y + 3}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 2y = 2x^3 + x + c$
- B) $y^2 + 6y = 2x^3 - 2x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^3 + x + c$
- D) $y^2 + 2y = 2x^3 + x^2 + c$
- E) $y^2 + 2y = x^3 + x + c$

27. $y' = \frac{4x^3 + 1}{y - 4}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 8y = 2x^4 + 2x + c$
- B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$
- C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$
- D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$
- E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

28. $y' = \frac{2x+1}{y-2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$
- B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$
- D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$
- E) $y^2 - 4y = 2x^2 + 2x + c$

29. $y' = \frac{1-2x}{y+5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 4y - 2x^2 = 2x + c$
- B) $y^2 + 4y + 2x^2 = x + c$
- C) $y^2 + 10y + 2x^2 = 2x + c$
- D) $y^2 + 4y + x^2 = 2x + c$
- E) $y^2 - 4y + 2x^2 = 2x + c$

30. $y' = \frac{1-3x^2}{y-2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$
- B) $y^2 - 4y + 2x^3 = 2x + c$
- C) $y^2 - 2y - 2x^3 = 2x + c$
- D) $y^2 + 2y + 2x^3 = 2x + c$
- E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

31. $y' = \frac{5x^4+3}{y-1}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y = 2x^5 + 6x + c$
- B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$
- C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$

D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$

E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

32. $y' = \frac{8 - 3x^2}{y - 3}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 2y + 2x^4 = x + c$

B) $y^2 - 6y + 2x^3 = 16x + c$

C) $y^2 - 4y + 2x^4 = 4x + c$

D) $y^2 - 2y - 2x^4 = 2x + c$

E) $y^2 - 2y + x^4 = 2x + c$

33. $y' = \frac{8 - 4x^3}{y - 5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$

B) $y^2 - 2y + 2x^3 = 14x + c$

C) $y^2 - 10y + 2x^4 = 16x + c$

D) $y^2 + 2y + 2x^3 = 2x + c$

E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

34. $y' = \frac{2x + 4}{y - 6}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$

B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$

C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$

D) $y^2 - 12y = 2x^2 + 8x + c$

E) $y^2 - 2y = 2x^2 + 6x + c$

35. $y' = \frac{3x + 4}{2y - 5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

A) $2y^2 - y = x^2 + 6x + c$

- B) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 3x + c$
- C) $2y^2 - 2y = x^2 + 3x + c$
- D) $2y^2 - 2y = 5x^2 + 16x + c$
- E) $2y^2 - 10y = 3x^2 + 8x + c$

36. $y' = \frac{3x^2 - 7}{y + 5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 2y = 2x^3 + x + c$
- B) $y^2 + 10y = 2x^3 - 14x + c$
- C) $y^2 - 2y = 2x^3 + x + c$
- D) $y^2 + 2y = 2x^3 + 14x^2 + c$
- E) $y^2 + 2y = x^3 + x + c$

37. $y' = \frac{4x^3 + 3}{y - 10}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 4y = 2x^4 + 10x + c$
- B) $y^2 - 20y = 2x^4 + 6x + c$
- C) $y^2 - 40y = 2x^4 + 3x + c$
- D) $y^2 - 4y = x^4 + 2x + c$
- E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

38. $y' = \frac{5x + 3}{y - 2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$
- B) $y^2 + 2y = 2x^2 + 2x + c$
- C) $y^2 - 4y = 5x^2 + 6x + c$
- D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$
- E) $y^2 - 4y = 2x^2 + 10x + c$

39. $y' = \frac{10-3x}{y+6}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 4y - 2x^2 = 2x + c$
- B) $y^2 + 40y + 2x^2 = x + c$
- C) $y^2 + 12y + 3x^2 = 20x + c$
- D) $y^2 + 4y + x^2 = 22x + c$
- E) $y^2 - 4y + 2x^2 = 2x + c$

40. $y' = \frac{15-9x^2}{y-3}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$
- B) $y^2 - 6y + 6x^3 = 30x + c$
- C) $y^2 - 2y - 2x^3 = 2x + c$
- D) $y^2 + 30y + 2x^3 = 2x + c$
- E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 30x + c$

41. $y' = \frac{9-8x^3}{y-4}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^4 = x + c$
- B) $y^2 - 4y + 2x^3 = 2x + c$
- C) $y^2 - 8y + 4x^4 = 18x + c$
- D) $y^2 - 2y - 2x^4 = 2x + c$
- E) $y^2 - 2y + 7x^4 = 12x + c$

42. $y' = \frac{7-3x}{y+4}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 2y + 6x^2 = 14x + c$
- B) $y^2 + 6y + 3x^2 = 2x + c$
- C) $y^2 + 8y + 3x^2 = 14x + c$
- D) $y^2 + 3y + 6x^2 = 2x + c$

Е) $y^2 + 6y - 6x^2 = 2x + c$

43. $y' = \frac{4x+3}{14y-5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $12y^2 - y = x^2 + 6x + c$

В) $14y^2 - 2y = 5x^2 + 3x + c$

С) $14y^2 - 2y = x^2 + 3x + c$

Д) $7y^2 - 10y = 4x^2 + 6x + c$

Е) $12y^2 - 4y = 5x^2 + 6x + c$

44. $y' = \frac{6x^2-5}{3-4y}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $3y - y^2 = 2x^3 + x + c$

В) $3y - 2y^2 = 2x^3 - 5x + c$

С) $3y - y^2 = x^3 - x + c$

Д) $3y + y^2 = 2x^3 - x + c$

Е) $3y - y^2 = 2x^2 - x + c$

45. $y' = \frac{8x^3+5}{4-6y^2}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $4y - y^3 = 2x^4 + 2x + c$

В) $4y - y^3 = 2x^4 - 5x + c$

С) $4y + y^3 = 2x^4 + 4x + c$

Д) $4y - 2y^3 = 2x^4 + 5x + c$

Е) $4y - 2y^3 = 2x^4 + 4x + c$

46. $y' = \frac{3x^2-7}{y+9}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

А) $y^2 + 2y = 2x^3 + x + c$

В) $y^2 + 18y = 2x^3 - 14x + c$

- C) $y^2 - 2y = 2x^3 + x + c$
 D) $y^2 + 12y = 2x^3 + 7x^2 + c$
 E) $y^2 + 2y = x^3 + x + c$

47. $y' = \frac{4x^3 + 5}{y - 8}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 16y = 2x^4 + 10x + c$
 B) $y^2 - 2y = 2x^4 + 2x + c$
 C) $y^2 - 4y = 2x^4 + x + c$
 D) $y^2 - 14y = x^4 + 12x + c$
 E) $y^2 - 4y = 2x^4 - 2x + c$

48. $y' = \frac{8x + 3}{y - 5}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - y = 2x^2 + 2x + c$
 B) $y^2 + 12y = 8x^2 + 6x + c$
 C) $y^2 - 2y = 2x^2 + x + c$
 D) $y^2 - 2y = x^2 + 2x + c$
 E) $y^2 - 10y = 8x^2 + 6x + c$

49. $y' = \frac{3 - 7x}{y + 8}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 + 4y - 2x^2 = 2x + c$
 B) $y^2 + 4y + 2x^2 = x + c$
 C) $y^2 + 16y + 7x^2 = 6x + c$
 D) $y^2 + 4y + x^2 = 2x + c$
 E) $y^2 - 14y + 2x^2 = 6x + c$

50. $y' = \frac{1 - 6x^2}{y - 9}$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - 2y + 2x^3 = x + c$
- B) $y^2 - 18y + 4x^3 = 2x + c$
- C) $y^2 - 12y - 3x^3 = 2x + c$
- D) $y^2 + 12y + 2x^3 = 2x + c$
- E) $y^2 - 2y + 2x^2 = 2x + c$

10 БІРТЕКТІ БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Біртексті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулерге» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

10.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 10.1: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 14 \frac{y^3}{x^3}$.

Шешімі:

а) Егер $y' = f(x, y)$ функциясын $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ айнымалылар қатынасымен алынған функция түрінде, яғни

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10.1)$$

теңдеуі түрінде көрсете алсақ, онда $y' = f(x, y)$ теңдеуді *бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу* деп аталады. Мұндай теңдеулерді шешу үшін $u = \frac{y}{x}$ жаңа функциясын енгізіп, айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіреміз, мұндағы $y = ux$,

$$y' = u'x + u. \quad (10.2)$$

б) $y' = \frac{y}{x} - 14 \frac{y^3}{x^3}$ біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеуіне (10.2) белгілеуін енгіземіз:

$$u'x + u = u - 14u^3$$

$u'x = -14u^3$, мұндағы $u' = \frac{du}{dx}$ екенін ескерсек

$\frac{du}{dx} x = -14u^3$ түріндегі айнымалылары ажыратылатын

дифференциалдық теңдеуге келеміз.

Бұдан теңдеудің айнымалыларын ажыратып

$$\frac{du}{u^3} = -14 \frac{dx}{x},$$

екі жағын интегралдаймыз

$$\int \frac{du}{u^3} = -14 \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = -14 \ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln \left| \frac{c}{x^{14}} \right|$$

u функциясының орнына $u = \frac{y}{x}$ ауыстыруын қойсақ

$$-\frac{1}{2 \frac{y^2}{x^2}} = \ln \left| \frac{c}{x^{14}} \right|$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln \left| \frac{c}{x^{14}} \right|$$

с) Жауабы: $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln \left| \frac{c}{x^{14}} \right|.$

Мысал 10.2: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{\frac{5y}{x}} + \frac{y}{x}.$

Шешімі:

а) $y' = e^{\frac{5y}{x}} + \frac{y}{x}$ функциясын $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ айнымалылар

қатынасымен алынған функция, яғни (10.1) теңдеуі түрінде көрсете алғандықтан бірінші ретті біртекті дифференциалдық

теңдеу деп қарастырамыз. $u = \frac{y}{x}$ жаңа функциясы мен (10.2)

белгілеуін енгізіп, айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіреміз.

б) $y' = e^{\frac{5y}{x}} + \frac{y}{x}$ біртекті бірінші ретті дифференциалдық

теңдеуіне (10.2) белгілеуін енгіземіз:

$$u'x + u = e^{5u} + u$$

$u'x = e^{5u}$, мұндағы $u' = \frac{du}{dx}$ екенін ескерсек

$\frac{du}{dx} x = e^{5u}$ түріндегі айнымалылары ажыратылатын

дифференциалдық теңдеуге келеміз. Бұдан теңдеудің айнымалыларын ажыратып

$$\frac{du}{e^{5u}} = \frac{dx}{x}$$

екі жағын интегралдаймыз

$$\int \frac{du}{e^{5u}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{e^{-5u}}{-5} = \ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{5e^{5u}} = \ln cx$$

u функциясының орнына $u = \frac{y}{x}$ ауыстыруын қойсақ

$$-\frac{1}{5e^{\frac{5y}{x}}} = \ln cx$$

$$\ln cx + \frac{1}{5e^{\frac{5y}{x}}} = 0$$

с) Жауабы: $\ln cx + \frac{1}{5e^{\frac{5y}{x}}} = 0.$

10.2 Тест тапсырмалары

1. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 2\frac{y^3}{x^3}.$

A) $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln\left|\frac{c}{x^2}\right|$

B) $x = y^2 \cdot \ln|cx|$

C) $y^2 = 2x^2 \cdot \ln|cx|$

D) $y^2 = \ln|cx|$

E) $x^2 = \ln|cy|$

2. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{\frac{2y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $\ln\left|\frac{c}{x}\right| + e^{-\frac{2y}{x}} = 0$

B) $\ln|cx| + \frac{1}{2}e^{-\frac{2y}{x}} = 0$

C) $\ln\left|\frac{c}{x}\right| = e^{\frac{y}{x}}$

D) $\ln|cx| + 2\frac{y}{x} = 0$

E) $\ln|cx| + e^y = 0$

3. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 4\frac{y}{x}$.

A) $x - y = c$

B) $x + y = c$

C) $x + 3y = cx^4$

D) $x + y = x^2 + c$

E) $x - y = x^2 + y^2 + c$

4. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 5\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

A) $y = \ln|cx|$

B) $y^2 = 5x^2 \ln|cx|$

C) $y^2 = \ln|cx|$

D) $y^2 = 2x^2(5 \ln|x| + c)$

E) $y^2 = x \ln|cx^5|$

5. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + 2\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

A) $y = cx$

B) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = cx$

C) $\sin \frac{y}{x} = cx^2$

D) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

E) $\cos \frac{y}{x} = cx$

6. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \sin^2 \frac{y}{x}$.

A) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln |cx| = 0$

B) $\operatorname{tg} \frac{x}{y} + \ln \left| \frac{c}{x} \right| = 0$

C) $\cos \frac{y}{x} + \ln |cx| = 1$

D) $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = \ln |cx|$

E) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

7. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 2 \frac{y}{x}$.

A) $x - y = c$

B) $x + \frac{y}{x} = cx$

C) $x + y = cx^2$

D) $x + y = x^2 + c$

E) $x - y = x^2 + y^2 + c$

8. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + \frac{y}{x}$.

A) $x = y(\ln|x| + c)$

B) $y = cx$

C) $y = x + c$

D) $y = x(\ln|x| + c)$

E) $y = cx^2$

9. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$.

A) $x = y \ln|cx|$

B) $x^2 = 2y^2 \ln|cx|$

C) $y^2 = 2x^2 \ln|cx|$

D) $y^2 = \ln|cx|$

E) $x^2 = \ln|cy|$

10. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $e^{\frac{y}{x}} = cx$

B) $e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$

C) $e^{\frac{x}{2y}} = \ln|cx|$

D) $e^{-\frac{y}{x}} = 2 \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

E) $\frac{1}{2} e^{\frac{2y}{x}} = \ln|cx|$

11. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{1}{5} + 2\frac{y}{x}$.

A) $\frac{y}{x} + \frac{1}{5} = xc$

B) $\frac{x}{y} = \frac{c}{\ln|x|}$

C) $5\frac{y}{x} + 1 = cx$

D) $2\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^2$

E) $5\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^3$

12. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{3x}{4y} + \frac{y}{x}$.

A) $y = \ln|cx|$

B) $2y^2 = x^2(3\ln|x| + c)$

C) $y^2 = \ln|cx|$

D) $y^2 = x^2\ln|cx|$

E) $y^2 = x\ln|cx|$

13. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

A) $\frac{y^2}{x} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

B) $\frac{y^2}{x} = \ln|cx|$

C) $\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cx|$

D) $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|cx|$

E) $\frac{x^2}{y^2} = \ln|cx|$

14. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$.

A) $\frac{1}{y} = \ln|cx|$

B) $y = \ln|cx|$

C) $-\frac{x}{y} = \ln |cx|$

D) $y = x \ln |cx|$

E) $x = y \ln |cx|$

15. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{-\frac{2y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $e^{\frac{y}{x}} = cx$

B) $2e^{\frac{2y}{x}} = \ln |cx|$

C) $e^{\frac{x}{2y}} = \ln |cx|$

D) $e^{-\frac{2y}{x}} = 2 \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

E) $\frac{1}{2}e^{\frac{2y}{x}} = \ln |cx|$

16. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

A) $y = cx$

B) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = cx$

C) $\sin \frac{y}{x} = cx$

D) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

E) $\cos \frac{y}{x} = cx$

17. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$.

A) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

B) $\sin \frac{y}{x} = cx$

C) $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = cx$

D) $\cos \frac{y}{x} = -cx$

E) $1 = cx \cdot \cos \frac{y}{x}$

18. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 1$.

A) $\frac{x}{y} = \ln |cx|$

B) $\frac{x}{y} = \frac{c}{\ln |x|}$

C) $\frac{y}{x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

D) $\frac{y}{x} = \ln |cx|$

E) $\frac{y}{x} = \ln |cx^2|$

19. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| + e^{-\frac{y}{x}} = 0$

B) $\ln |cx| + e^{-\frac{y}{x}} = 0$

C) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| = e^{\frac{y}{x}}$

D) $\ln|cx| + \frac{y}{x} = 0$

E) $\ln|cx| + e^y = 0$

20. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$.

A) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln|cx| = 0$

B) $\operatorname{tg} \frac{x}{y} + \ln \left| \frac{c}{x} \right| = 0$

C) $\cos \frac{y}{x} + \ln|cx| = 1$

D) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|cx|$

E) $\operatorname{tg} \frac{y}{y} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

21. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 9 \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

A) $y^2 = x^2 \cdot \ln(cx^9)^2$

B) $y^2 = x^2 \cdot \ln|cx|$

C) $y^2 = 9 \frac{\ln|cx|}{x}$

D) $y^2 = \frac{9x^2}{\ln|cx|}$

E) $y = c \cdot \ln|x|$

22. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$.

A) $x = y \cdot \ln|cx|$

- B) $x^2 = 2y^2 \cdot \ln|cx|$
- C) $y^2 = 2x^2 \cdot \ln|cx|$
- D) $y^2 = \ln|cx|$
- E) $x^2 = \ln|cy|$

23. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $\frac{1}{2} + \frac{y}{x} = y'$.

- A) $y = -\frac{1}{2}x(\ln|x| + c)$
- B) $y = 2x(\ln|x| + c)$
- C) $y = \frac{1}{2}x(\ln|x| + c)$
- D) $y = -2x(\ln|x| + c)$
- E) $y = x(\ln|x| + c)$

24. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $\frac{y}{x} - \frac{y^2}{4x^2} = y'$.

- A) $y = \ln|x| + c$
- B) $y = 4\ln|x| + c$
- C) $y = 4x(\ln|x| + c)$
- D) $y = \frac{4x}{\ln|x| + c}$
- E) $y = -4\ln|x| + c$

25. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}$.

- A) $x = y \ln|cx|$
- B) $x^2 = \ln|cy|$
- C) $y^2 = 2x^2 \ln|cx|$
- D) $y^2 = \ln|cx|$

E) $-x^2 = 2y^2 \ln|cx|$

26. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 3\frac{y}{x}$.

A) $x - y = c$

B) $x + 2y = cx^3$

C) $x + y = c$

D) $x + y = x^2 + c$

E) $x - y = x^2 + y^2 + c$

27. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{1}{2} + 3\frac{y}{x}$.

A) $\frac{y}{x} + \frac{1}{5} = xc$

B) $\frac{x}{y} = \frac{c}{\ln|x|}$

C) $4\frac{y}{x} + 1 = cx^2$

D) $2\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^2$

E) $5\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^3$

28. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + 2\frac{y^3}{x^3}$.

A) $x = y \ln|cx|$

B) $-x^2 = 2y^2 \ln|cx^2|$

C) $y^2 = 2x^2 \ln|cx^2|$

D) $y^2 = \ln|cx^2|$

E) $x^2 = \ln|cy|$

29. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{\frac{3y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| + e^{-\frac{y}{x}} = 0$

B) $\ln |cx| + \frac{1}{3} e^{-\frac{3y}{x}} = 0$

C) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| = e^{\frac{y}{x}}$

D) $\ln |cx| + \frac{y}{x} = 0$

E) $\ln |cx| + e^y = 0$

30. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 6\frac{y}{x}$.

A) $\frac{y}{x} + \frac{1}{5} = cx$

B) $\frac{x^2}{y} = \frac{c}{\ln|x|}$

C) $5\frac{y}{x} + 1 = cx^5$

D) $2\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^2$

E) $5\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^5$

31. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

A) $y = cx$

B) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = cx$

C) $\sin \frac{y}{x} = cx$

D) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

E) $\cos \frac{y}{x} = cx$

32. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$.

A) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

B) $\sin \frac{y}{x} = cx$

C) $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = cx$

D) $\cos \frac{y}{x} = cx$

E) $1 = cx \cdot \cos \frac{y}{x}$

33. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x}$.

A) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln |cx| = 0$

B) $\operatorname{tg} \frac{x}{y} + \ln \left| \frac{c}{x} \right| = 0$

C) $\cos \frac{y}{x} + \ln |cx| = 1$

D) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln |cx|$

$$\text{E) } \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$$

34. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + \sin^2 \frac{y}{x}$.

$$\text{A) } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln |cx| = 0$$

$$\text{B) } \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \ln \left| \frac{c}{x} \right| = 0$$

$$\text{C) } \cos \frac{y}{x} + \ln |cx| = 1$$

$$\text{D) } -\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = \ln |cx|$$

$$\text{E) } \operatorname{tg} \frac{y}{y} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$$

35. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 5 \frac{y}{x}$.

$$\text{A) } 4 \frac{y}{x} + \frac{1}{5} = cx$$

$$\text{B) } \frac{x}{4y} = \frac{c}{\ln |x|}$$

$$\text{C) } 4 \frac{y}{x} + 1 = cx^4$$

$$\text{D) } 2 \frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^2$$

$$\text{E) } 5 \frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^5$$

36. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 3 \frac{y^3}{x^3}$.

- A) $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln \left| \frac{c}{x^3} \right|$
- B) $x = y^3 \cdot \ln |cx|$
- C) $y^2 = 2x^3 \cdot \ln |cx|$
- D) $y^3 = \ln |cx|$
- E) $x^2 = \ln |cy|$

37. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{-\frac{3y}{x}} + \frac{y}{x}$.

- A) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| + e^{-\frac{2y}{x}} = 0$
- B) $\ln |cx| - \frac{1}{3} e^{\frac{3y}{x}} = 0$
- C) $\ln \left| \frac{c}{x} \right| = e^{\frac{y}{x}}$
- D) $\ln |cx| + 2 \frac{y}{x} = 0$
- E) $\ln |cx| + e^y = 0$

38. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 7 \frac{y}{x}$.

- A) $x - y = c$
- B) $x + y = c$
- C) $x + 6y = cx^7$
- D) $x + 6y = x^7 + c$
- E) $x - 7y = x^2 + y^7 + c$

39. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 6 \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

- A) $y = 6 \ln |cx|$

- B) $y^2 = 5x^2 \ln|cx|$
- C) $y^2 = \ln|cx^6|$
- D) $y^2 = 2x^2(6 \ln|x| + c)$
- E) $y^2 = x \ln|cx^6|$

40. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 2 \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

- A) $y = cx$
- B) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = cx$
- C) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x^2}$
- D) $\sin \frac{y}{x} = \frac{c}{x}$
- E) $\cos \frac{y}{x} = cx$

41. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 2 \sin^2 \frac{y}{x}$.

- A) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln|cx^2| = 0$
- B) $\operatorname{tg} \frac{x}{y} + \ln \left| \frac{c}{x^2} \right| = 0$
- C) $\cos \frac{y}{x} + \ln|cx| = 1$
- D) $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = \ln|cx^2|$
- E) $\operatorname{tg} \frac{y}{y} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

42. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 8\frac{y}{x}$.

A) $x - y^8 = c$

B) $1 + 7\frac{y}{x} = cx^7$

C) $8x + y = c$

D) $x + y = x^2 + c$

E) $x - y = x^7 + y^2 + c$

43. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 10\frac{y}{x}$.

A) $x = 10y(\ln|x| + c)$

B) $y = cx$

C) $y = x^{10} + c$

D) $y = x(\ln|x| + c)$

E) $y = \frac{cx^{10} - x}{9}$

44. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} - 2\frac{y^2}{x^2}$.

A) $-\frac{x}{y} = \ln \frac{c}{x^2}$

B) $x^2 = y^2 \ln|cx|$

C) $y^2 = 2x^2 \ln|cx|$

D) $y = \ln|cx|$

E) $x = \ln|cy|$

45. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $e^{\frac{4y}{x}} = cx$

B) $e^{\frac{4y}{x}} = \ln|x| + c$

C) $e^{\frac{x}{2y}} = \ln |cx|$

D) $e^{-\frac{4y}{x}} = 4 \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

E) $-\frac{1}{4e^{\frac{4y}{x}}} = \ln |cx|$

46. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 1 + 9\frac{y}{x}$.

A) $\frac{y}{x} + \frac{1}{5} = xc$

B) $8\frac{x}{y} = \frac{c}{\ln|x|}$

C) $8\frac{y}{x} + 1 = cx^8$

D) $8\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^2$

E) $5\frac{y}{x} + \frac{1}{2} = cx^8$

47. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 7\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

A) $y = \ln|cx|$

B) $y^2 = 2x^2(7\ln|x| + c)$

C) $y^2 = 7\ln|cx|$

D) $y^2 = x^7\ln|cx|$

E) $y^2 = 7x\ln|cx|$

48. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = 8\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

A) $\frac{y^2}{8x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

B) $\frac{y^2}{x} = \ln |cx|$

C) $\frac{x^2}{8y^2} = \ln |cx|$

D) $\frac{y^2}{2x^2} = \ln |cx^8|$

E) $\frac{x^2}{y^2} = \ln |cx|$

49. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = \frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}$.

A) $\frac{1}{y} = \ln |cx^2|$

B) $2y = \ln |cx|$

C) $-\frac{x}{y} = \ln |cx^2|$

D) $y = x \ln |cx|$

E) $x = y \ln |cx|$

50. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' = e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$.

A) $e^{\frac{y}{x}} = cx$

B) $2e^{\frac{4y}{x}} = \ln |cx|$

C) $e^{\frac{x}{2y}} = \ln |cx|$

D) $e^{-\frac{2y}{x}} = 4 \ln \left| \frac{c}{x} \right|$

E) $\frac{1}{4}e^{\frac{4y}{x}} = \ln |cx|$

11 СЫЗЫҚТЫҚ БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

11.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (11.1)$$

бірінші ретті дифференциалдық теңдеуі y және оның y' туындысына қатысты *сызықтық теңдеу* деп аталады, мұндағы $p(x)$ пен $q(x)$ функциялары x - тан тәуелді берілген функциялар. Егер $q(x) = 0$ болса, онда теңдеу біртекті деп, ал $q(x) \neq 0$ болса, онда біртектісіз (біртекті емес) деп аталады.

Сызықтық теңдеулерді шешу әдістері:

Бернулли әдісі. Біртектісіз сызықтық теңдеуді шешу үшін

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv' \quad (11.2)$$

Бернулли алмастыруын қолданамыз, яғни шешімді белгісіз екі функцияның көбейтіндісі түрінде іздейміз.

(11.2) алмастыруынан кейін (11.1) теңдеуі

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad (11.3)$$

түріне келеді, екінші және үшінші қосылғыштан u функциясын жақшаның сыртына ортақ көбейткіш ретінде шығарсақ

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (11.4)$$

Бұл теңдеуді айнымалылары ажыратылатын екі теңдеу ретінде қарастырып u және v функцияларын табамыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге теңестірсек

$$v' + p(x)v = 0, \quad (11.5)$$

онда

$$u'v = q(x) \quad (11.6)$$

(11.5) теңдеуінің шешімін $v = e^{-\int p(x)dx}$ түріндегі дербес шешім ретінде табамыз.

v функциясын (11.6) теңдеуіне қойсақ

$$u' = q(x)v^{-1} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Бұдан $u = c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$, яғни $y = uv$ алмастыруы бойынша

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

берілген біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Еркін тұрақтыны вариациялау әдісі.

1. $y' + p(x)y = q(x)$ біртекті теңдеудің $y' + p(x)y = 0$ біртекті теңдеуіне келтіреміз;
2. біртекті теңдеудің $y = \varphi(x, c)$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысын $c = c(x)$ функциясы түрінде белгілейміз;
3. u біртекті теңдеудің шешімін, оның u' туындысын берілген бастапқы біртекті теңдеуге қойып оның жалпы шешімін табамыз.

Мысал 11.1.1: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Шешімі:

- a) $y' + 2xy = e^{-x^2}$ біртекті сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеу, мұндағы $p(x) = 2x$, $q(x) = e^{-x^2}$. Теңдеуге (11.2) алмастыруын қолданамыз, яғни шешімді белгісіз екі функцияның көбейтіндісі түрінде іздейміз.

- b) (11.2) алмастыруынан кейін $y' + 2xy = e^{-x^2}$ теңдеуі

$$u'v + uv' + 2xuv = e^{-x^2}$$

түріне келеді, екінші және үшінші қосылғыштан u функциясын жақшаның сыртына ортақ көбейткіш ретінде шығарсақ

$$u'v + u(v' + 2xv) = e^{-x^2}.$$

Бұл теңдеуді айнымалылары ажыратылатын екі теңдеу ретінде қарастырып u және v функцияларын табамыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге теңестірсек

$$v' + 2xv = 0, \tag{11.7}$$

онда

$$u'v = e^{-x^2} \quad (11.8)$$

(11.7) теңдеуінің шешімін

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ түріндегі дербес шешім ретінде табамыз.

v функциясын (11.8) теңдеуіне қойсақ

$$u'e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$u' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$\int du = \int dx$$

Бұдан $u = x + c$, жоғарғыдағы $y = uv$ Бернулли алмастыруын

ескерсек $y' + 2xy = e^{-x^2}$ біртекті сызықтық теңдеудің

$$y = (x + c)e^{-x^2}$$

жалпы шешімін аламыз.

с) Жауабы: $y = (x + c)e^{-x^2}$.

Мысал 11.1.2: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

а) $y' + 2xy = e^{-x^2}$ біртекті теңдеудің $y' + 2xy = 0$ біртекті теңдеуіне келтіреміз. Біртекті теңдеудің $y = \varphi(x, c)$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысын $c = c(x)$ функциясы түрінде белгілейміз. Біртекті теңдеудің u шешімін, оның u'

туындысын берілген бастапқы біртекті теңдеуге қойып оның жалпы шешімін табамыз.

$$b) \quad y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

$y = ce^{-x^2}$ - біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

Осы біртекті теңдеудің жалпы шешімінде c тұрақтысын $c = c(x)$ функциясы түрінде белгілесек.

Біртекті теңдеудің $y = c(x)e^{-x^2}$ шешімін, оның $y' = c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2}$ туындысын берілген бастапқы $y' + 2xy = e^{-x^2}$ біртекті теңдеуіне қойып оның жалпы шешімін табамыз.

$$c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$c'(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$c'(x) = 1$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = 1$$

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) = x + c$$

$y = c(x)e^{-x^2}$ шешіміне $c(x) = x + c$ функциясын қойсақ

$y = (x + c)e^{-x^2}$ біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

$$c) \quad \text{Жауабы: } y = (x + c)e^{-x^2}.$$

11.2 Тест тапсырмалары

1. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{x}$.

- A) $y = x(x^3 + c)$
- B) $y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right)$
- C) $y = \frac{1}{x^2} (e^{2x} + c)$
- D) $y = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right)$
- E) $y = x^2 e^{2x} + c$

2. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2y = 2x$.

- A) $y = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$
- B) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$
- C) $y = \ln|x| + x^3 + c$
- D) $y = x^3 + c$
- E) $y = \frac{1}{x^3 + c}$

3. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$.

- A) $y = cx^2$
- B) $y = \frac{c}{x}$
- C) $y = cx - 2$
- D) $y = \frac{c}{x^2}$
- E) $y = cx$

4. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

A) $y = e^{-x^2} + c$

B) $y = x^2 + ce^{-2x}$

C) $y = ce^{-x^2} + x$

D) $y = e^{-x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)$

E) $y = \frac{x^3}{3} + e^{-2x} + c$

5. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = x \operatorname{ctg} x$.

A) $y = x(\sin x + c)$

B) $y = x(\cos x + c)$

C) $y = \ln|\sin x| + x + c$

D) $y = x(\ln|\sin x| + c)$

E) $y = x(\operatorname{tg} x + c)$

6. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

A) $y = (\cos x + c) \operatorname{tg} x$

B) $y = \cos x (\operatorname{tg} x + c)$

C) $y = c \cdot \cos x$

D) $y = \sin x + c$

E) $y = \operatorname{ctg} x + c$

7. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$.

A) $y = 3x + c$

B) $y = \frac{c}{x} + 3$

C) $y = 3x + \frac{c}{x}$

D) $y = 6 - \frac{c}{x}$

E) $y = \frac{cx + 3}{x}$

8. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2y = e^{3x}$.

A) $y = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

B) $y = ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$

C) $y = ce^{-2x} + x$

D) $y = \frac{1}{5}e^{5x} + c$

E) $y = ce^{5x} + \frac{1}{3}x$

9. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

A) $y = \frac{x^3}{3} + e^{-2x} + c$

B) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$

C) $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{c}{x}$

D) $y = \frac{x^3}{3} + c$

E) $y = \ln|x| + \frac{x^3}{3} + c$

10. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - y = e^x$.

- A) $y = (x + c)e^x$
- B) $y = c(e^x + x)$
- C) $y = (cx + 1)e^x$
- D) $y = e^x + c$
- E) $y = x + c$

11. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = x^3$.

- A) $y = \frac{x^3}{3} + e^{-2x} + c$
- B) $y = \frac{1}{x} \left(\frac{x^5}{5} + c \right)$
- C) $y = \frac{c}{x} (x^5 + 1)$
- D) $y = \ln|x|(x^3 + c)$
- E) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$

12. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 4y = e^{2x}$.

- A) $y = ce^{4x} + e^x$
- B) $y = ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$
- C) $y = ce^{2x} - 3x$
- D) $y = c + e^{2x}$
- E) $y = ce^{2x} + 5$

13. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = 1$.

- A) $y = cx^2(1+x^2)$
- B) $y = c(1+x^2)$
- C) $y = cx^2 + \arccos x$
- D) $y = (x^2 + 1)(\operatorname{arctg}x + c)$
- E) $y = c\sqrt{1+x^2}$

14. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - y = e^{2x}$.

- A) $y = e^x(x+c)$
- B) $y = ce^x - x - 1$
- C) $y = xe^{-2x} + c$
- D) $y = ce^x(1+x)$
- E) $y = e^x(e^x + c)$

15. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{xy}{1-x^2} = 1$.

- A) $y = \sqrt{\arcsin x} + c$
- B) $y = \sqrt{1-x^2} + c$
- C) $y = \sqrt{1-x^2}(\arcsin x + c)$
- D) $y = c \cdot \arcsin x$
- E) $y = c\sqrt{1-x^2}$

16. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + x^2 y = x^2$.

- A) $y = \frac{x^3}{3} + c$
- B) $y = c \ln|x|$
- C) $y = \frac{1}{x} + c$
- D) $y = \ln|x| + c$

E) $y = 1 + ce^{-\frac{x^3}{3}}$

17. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = 1 + x^2$.

A) $y = (c + x^2)(x - 1)$

B) $y = c(1 + x^2)$

C) $y = (x + c)(1 + x^2)$

D) $y = x(1 + x^2) + c$

E) $y = \frac{1}{c}(x^2 - 2x)$

18. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos x}$.

A) $y = (\cos x + c) \operatorname{tg} x$

B) $y = \cos x(2 \operatorname{tg} x + c)$

C) $y = c \cdot \cos x$

D) $y = \sin x + c$

E) $y = \operatorname{ctg} x + c$

19. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$.

A) $y = \cos x + c$

B) $y = \operatorname{ctg} x + c$

C) $y = x \sin x + c$

D) $y = \frac{1}{\cos x}(c + x^2)$

E) $y = x^2 + \sin x + c$

20. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 2y = e^{2x}$.

A) $y = (x + c)e^{2x}$

B) $y = c(e^x + x)$

C) $y = (x + c)e^{-2x}$

D) $y = e^x + c$

E) $y = x + c$

21. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = x$.

A) $y = c(x^2 + 1)$

B) $y = x^2 + cx$

C) $y = c(x^3 + x)$

D) $y = x^2 - cx$

E) $y = cx - x^3$

22. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 4y = e^{4x}$.

A) $y = c(e^{4x} + 1)$

B) $y = (c + x)e^{4x}$

C) $y = (c + x)e^{-4x}$

D) $y = c + e^{4x}$

E) $y = ce^{4x} + 5$

23. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

A) $y = \frac{1}{x}(x^3 + c)$

B) $y = \frac{1}{x}(x + c)$

C) $y = x(x^2 + c)$

D) $y = x^2(x + c)$

E) $y = \frac{1}{x}(x^2 + c)$

24. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x}$.

- A) $y = (\ln|\sin x| + c) \frac{1}{\cos x}$
- B) $y = (\ln|\cos x| + c) \frac{1}{\sin x}$
- C) $y = c \cdot \ln|\cos x| + \sin x$
- D) $y = (\ln|\sin x| + c)(x + 1)$
- E) $y = \ln|\operatorname{ctg} x| + c$

25. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = x \cos 3x$.

- A) $y = x^3(\sin x + c)$
- B) $y = x \left(\frac{1}{3} \sin 3x + c \right)$
- C) $y = x^2(\sin x + c)$
- D) $y = x \sin 3x + c$
- E) $y = x + \sin 3x + c$

26. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 2xy = 2x$.

- A) $y = (e^{-x^2} + c)x$
- B) $y = (e^{-x^2} + c)x^2$
- C) $y = (x + c)x^3$
- D) $y = ce^{-x^2} - 1$
- E) $y = \frac{x^3}{3} + cx$

27. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = 4x^2$.

A) $y = \frac{1}{x}(x^4 + c)$

B) $y = x(x^3 + c)$

C) $y = cx + \frac{1}{x}$

D) $y = x^2 + \frac{c}{x}$

E) $y = x(x^4 + c)$

28. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 3x^2 y = x^2$.

A) $y = \frac{x^3}{3} + ce^{-x^3}$

B) $y = c \ln|x| + e^x$

C) $y = \frac{1}{x} + ce^{x^3}$

D) $y = \ln|x| + ce^{x^2}$

E) $y = -\frac{1}{3} + ce^{-x^3}$

29. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \frac{5}{x}$.

A) $y = x + c$

B) $y = 5 + \frac{c}{x}$

C) $y = 4x + c$

D) $y = \ln|x| + c$

E) $y = c \ln|x|$

30. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2xy = x$.

A) $y = e^{-x^2} + c$

B) $y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$

C) $y = ce^{-x^2}$

D) $y = e^{-x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)$

E) $y = \frac{x^3}{3} + e^{-2x} + c$

31. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{1+x} = -x^2$.

A) $y = x^2 + c$

B) $y = \frac{1}{x+1} \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c \right)$

C) $y = c(1+x)$

D) $y = x^2 + (c+x)$

E) $y = \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4} + c$

32. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 5y = e^{5x}$.

A) $y = cx^2(1+x)$

B) $y = c(1+e^{5x})$

C) $y = (x+c)e^{5x}$

D) $y = (x^2+1)+c$

E) $y = c\sqrt{1+e^{5x}}$

33. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}$.

A) $y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \right)$

$$\text{B)} \quad y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} \right)$$

$$\text{C)} \quad y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \right)$$

$$\text{D)} \quad y = x \left(c + x^{\frac{4}{3}} \right)$$

$$\text{E)} \quad y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} \right)$$

34. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2xy = 3x$.

$$\text{A)} \quad y = e^{-x^2} + c$$

$$\text{B)} \quad y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

$$\text{C)} \quad y = ce^{-x^2}$$

$$\text{D)} \quad y = e^{-x^2} \left(c + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\text{E)} \quad y = \frac{3}{2} + ce^{-x^2}$$

35. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{x}$.

$$\text{A)} \quad y = x(x^3 + c)$$

$$\text{B)} \quad y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + c \right)$$

$$\text{C)} \quad y = \frac{1}{x^2} (e^{2x} + c)$$

$$\text{D)} \quad y = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right)$$

$$\text{E)} \quad y = x^2 e^{2x} + c$$

36. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$.

A) $y = e^{x^2} + \sin x + c$

B) $y = x \left(\frac{1}{3} \cos x + c \right)$

C) $y = x^2 (\sin x + c)$

D) $y = e^{x^2} \cos x + c$

E) $y = e^{x^2} (\sin x + c)$

37. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$.

A) $y = cx^2$

B) $y = \frac{c}{x}$

C) $y = cx - 3$

D) $y = \frac{c}{x^2}$

E) $y = cx$

38. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 3x$.

A) $y = \cos 3x \cdot \left(c - \frac{1}{3} \ln |\cos 3x| \right)$

B) $y = x \left(\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + c \right)$

C) $y = x^2 \left(\frac{2}{3} \ln |\sin 3x| + c \right)$

D) $y = \sin 3x (\cos 3x + c)$

E) $y = (\ln |\sin 3x| + c) \cdot \cos 3x$

39. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{y}{x} = 2x \operatorname{ctg} x$.

- A) $y = x(\sin x + c)$
- B) $y = x(\cos x + c)$
- C) $y = \ln|\sin x| + x + c$
- D) $y = x(2\ln|\sin x| + c)$
- E) $y = x(\operatorname{tg}x + c)$

40. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + y \cos x = \cos x$.

- A) $y = \sin x(e^{-x} + c)$
- B) $y = 1 - ce^{\cos x}$
- C) $y = \cos x + ce^{\sin x}$
- D) $y = ce^{-\sin x} + e^{\cos x}$
- E) $y = 1 + ce^{-\sin x}$

41. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \frac{4}{x}$.

- A) $y = 3x + c$
- B) $y = \frac{c}{x} + 4$
- C) $y = 3x + \frac{c}{x}$
- D) $y = 6 - \frac{c}{x}$
- E) $y = \frac{c}{x} + \frac{3}{x}$

42. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 6y = e^{6x}$.

- A) $y = cx^2(1 + x)$
- B) $y = c(1 + e^{6x})$
- C) $y = (x^2 + 1) + c$
- D) $y = c\sqrt{1 + e^{6x}}$
- E) $y = (x + c)e^{6x}$

43. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$.

A) $y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{3}{4} \sqrt{x} \right)$

B) $y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} \right)$

C) $y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} \right)$

D) $y = x \left(c + \sqrt{x} \right)$

E) $y = \frac{1}{x} \left(c + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right)$

44. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 2xy = 1 + x^2$.

A) $y = e^{x^2} + \frac{x^2}{2} + c$

B) $y = \frac{1}{2} + ce^{x^2}$

C) $y = ce^{-x^2}$

D) $y = e^{x^2} \left(c + x + \frac{x^3}{3} \right)$

E) $y = \frac{x^3}{3} + e^{-2x} + c$

45. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$.

A) $y = (x^4 + x + c)x^2$

B) $y = (x+c)(x+1)^2$

- C) $y = -x + x^3 + cx^2$
- D) $y = (x^3 + x)(1 + cx)$
- E) $y = (x^2 + x + c)x^2$

46. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - 7y = e^{7x}$.

- A) $y = cx^2(1 + x)$
- B) $y = c(1 + e^{7x})$
- C) $y = (x^2 + 1) + c$
- D) $y = c\sqrt{1 + e^{7x}}$
- E) $y = (x + c)e^{7x}$

47. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + \frac{5y}{x} = \frac{4}{x}$.

- A) $y = \frac{1}{x^5}(x^4 + c)$
- B) $y = \frac{c}{x^5} + 3x$
- C) $y = \frac{4}{5} + \frac{c}{x^5}$
- D) $y = 6x^5 - \frac{c}{x}$
- E) $y = \frac{1}{x^4}(4x + c)$

48. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$.

- A) $y = e^{-x^2} + \sin x + c$
- B) $y = x\left(\frac{1}{3}\cos x + c\right)$
- C) $y = x^2(\sin x + c)$
- D) $y = e^{-x^2}(c - \cos x)$

E) $y = e^{x^2} (c - \sin x)$

49. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' - \frac{3y}{x+2} = (x+2)^2$.

A) $y = (\ln|x+2| + c)(x+2)$

B) $y = (\ln|x+2| + c)(x+1)$

C) $y = c \cdot \ln|x+2| + \sin x$

D) $y = (\ln|x+2| + c)(x+2)^3$

E) $y = \ln|x+2| + c(x+2)$

50. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y' + y \sin x = \sin x$.

A) $y = \sin x (e^{-x} + c)$

B) $y = ce^{\cos x} - 1$

C) $y = \cos x + ce^{\sin x}$

D) $y = ce^{-\sin x} + e^{\cos x}$

E) $y = 1 + ce^{-\sin x}$

12 ТОЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Толық дифференциалды теңдеулер» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

12.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Егер бірінші ретті

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (12.1)$$

теңдеуінің $P(x, y)$ және $Q(x, y)$ коэффициенттері

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (12.2)$$

шартын қанағаттандырса, яғни теңдеудің сол жақ бөлігі $U(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болса, онда бұл теңдеу *толық дифференциалды теңдеу* деп аталады.

Толық дифференциалды теңдеулерді шешу әдістеріне мысалдар келтірейік.

Мысал 12.1.1: $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 2$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

Шешімі:

а) *Бірінші әдіс:* Жалпы шешімі

$$U(x, y) = c \quad (12.3)$$

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) \quad (12.4)$$

өрнегімен есептелінеді, мұндағы

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \quad (12.5)$$

екенін ескере отырып (12.4) теңдігіндегі $\varphi(y)$ функциясын тауып (12.3) және (12.4) теңдеулерін теңестіріп ізделінді жалпы интегралды табамыз.

б) (12.2) шартының орындалуын тексереміз. Есептің шарты бойынша

$$P(x, y) = 2x - y + 1, \quad Q(x, y) = 2y - x - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x - y + 1)'_y = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (2y - x - 1)'_x = -1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(12.3) шарты орындалғандықтан бұл теңдеу толық дифференциалды теңдеу.

Бірінші әдіс бойынша

$$U(x, y) = c$$

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

$$U(x, y) = \int (2x - y + 1)dx + \varphi(y) = x^2 - xy + x + \varphi(y).$$

$\varphi(y)$ функциясын табу үшін

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$$

теңдігін құраймыз

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = -x + \varphi'_y(y)$$

$$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1.$$

Демек, $\varphi'_y = 2y - 1$. Теңдеудің екі жағын интегралдасақ

$$\varphi(y) = \int (2y - 1)dy = y^2 - y + c_1.$$

Сонымен

$$U(x, y) = c$$

$$U(x, y) = x^2 - xy + x + y^2 - y + c_1.$$

теңдеулерін теңестіріп ізделінді жалпы интегралды табамыз

$$c = x^2 - xy + x + y^2 - y.$$

$y(0) = 2$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімді

табу үшін c тұрақтысының мәнін табуымыз керек, яғни

$x_0 = 0, y_0 = 2$ мәндерін жалпы интегралға қоямыз:

$$c = 0 - 0 + 0 + 2^2 - 2, \quad c = 2.$$

Ізделінді дербес шешім:

$$x^2 - xy + x + y^2 - y = 2.$$

с) Жауабы: $x^2 - xy + x + y^2 - y = 2$.

Мысал 12.1.2: $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 2$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

Шешімі:

a) *Екінші әдіс:* $U(x, y)$ функциясын

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \quad (12.6)$$

немесе

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \quad (12.7)$$

өрнектері арқылы есептеуге болады, мұндағы x_0, y_0 сандары $P(x, y), Q(x, y)$ функцияның анықталу облыстарына тиісті сандар.

b) (12.6) формуласы бойынша

$$U(x, y) = c$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (2x - y + 1) dx + \int_0^y (2y - 0 - 1) dy = (x^2 - xy + x) \Big|_0^x + (y^2 - y) \Big|_0^y = \\ &= x^2 - xy + x + y^2 - y, \end{aligned}$$

мұндағы $x_0 = 0, y_0 = 0$ сандары $P(x, y), Q(x, y)$ функцияның анықталу облыстарына тиісті сандар.

Жалпы интегралы

$$c = x^2 - xy + x + y^2 - y.$$

(12.7) формуласы бойынша

$$U(x, y) = c$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (2x - 0 + 1) dx + \int_0^y (2y - x - 1) dy = (x^2 + x) \Big|_0^x + (y^2 - xy - y) \Big|_0^y = \\ &= x^2 + x + y^2 - xy - y. \end{aligned}$$

Жалпы интегралы

$$c = x^2 - xy + x + y^2 - y.$$

(12.6) және (12.7) формулаларының бірдей жауаптарға әкелетінін көруге болады.

$y(0) = 2$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімді табу үшін c тұрақтысының мәнін табуымыз керек, яғни $x_0 = 0, y_0 = 2$ мәндерін жалпы интегралға қоямыз: $c = 0 - 0 + 0 + 2^2 - 2, c = 2$.

Ізделінді дербес шешім:

$$x^2 - xy + x + y^2 - y = 2.$$

c) Жауабы: $x^2 - xy + x + y^2 - y = 2$.

12.1 Тест тапсырмалары

1. $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x + y^2 e^x = 1$

B) $\frac{y^2}{2} + y + ye^x = 2,5$

C) $(x + y)e^x = 1$

D) $e^x + ye^x = 2$

E) $ye^x + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$

2. $(y \sin x - 1)dx + (\cos y - \cos x)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $-y \cos x + \sin y - x = c$

B) $y \sin x + \sin y + x + y = c$

C) $x \cos x + \cos x + x + y = c$

D) $x \cos y - \cos x - x - y = c$

E) $\cos x - \cos y = c$

3. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = 1\frac{1}{3}$

B) $\frac{x^3}{3} - xy^2 + x^2 y + e^y = 1\frac{1}{3}$

C) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + xe^y = 1\frac{1}{3}$

D) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = -\frac{2}{3}$

E) $\frac{x^3}{3} + 2xy + y^2 + e^y = 1\frac{1}{3}$

4. $(2x + 2y + 3x^2 y)dx + (2x - 2y + x^3)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $2x+2y-3x^2y = c$
- B) $2x-2y+x^3 = c$
- C) $x^2+2xy+x^3y-y^2 = c$
- D) $y^2-2xy-xy^3+x^2 = c$
- E) $4xy-3x^5y = c$

5. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\frac{x^3}{3} + x \sin y + y = 1$
- B) $\frac{x^3}{3} + 3y + x \sin y = 3$
- C) $3x^3 + 6y + x \sin y = 6$
- D) $x^3 - 3y + 3x \sin y = -3$
- E) $\frac{x}{3} - 3y + x \sin y = -3$

6. $4(x^3+y^3)dx+(12xy^2-1)dy=0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $4x^3+4y^3+12xy^2-1 = c$
- B) $x^3+y^3+xy^2 = c$
- C) $x^4+4xy^3-y = c$
- D) $y^3+4x^3y-x = c$
- E) $x^2+y^2+12y+24xy = c$

7. $(x^2 + y)dx + (y^2 + x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + xy = 0$
- B) $x^2y + xy^2 + x^3 = 1$
- C) $x^3 + y^3 + xy = 0$
- D) $x^3 - y^3 + xy = 0$

E) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy = 2$

8. $(1+2x \cos y)dx + (2y - x^2 \sin y)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x + x^2 \cos y + y^2 = c$
- B) $1 + 2x \cos y + 2y - x^2 \sin y = c$
- C) $2 + 2x \cos y + 2y - x^2 \sin y = c$
- D) $-2x \sin y + 2y - x^2 \sin y = c$
- E) $y + 2x \sin y + 2xy - x^3 \sin y = c$

9. $2xydx + (x^2 - e^y)dy = 0$ теңдеуінің $y(2) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $x^2y - 2xy + e^y = 1$
- B) $xy^2 + xe^y = 2$
- C) $x^2y + xe^y = -2$
- D) $y - xe^y = 2$
- E) $x^2y - e^y = -1$

10. $2(x+y)dx + (2x - 2y + 1)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x^2 + 2xy + x^2 - y^2 + y = c$
- B) $x^2 + 2xy - y^2 + y = c$
- C) $2xy - y^2 = c$
- D) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = c$
- E) $x^2 + y^2 + x - y = c$

11. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $2e^y - xy - 2x = 0$
- B) $x^3 - e^y + y = 0$
- C) $x^3e^y - y = 1$

D) $x^2 e^y - y^2 - 1 = 0$

E) $x^2 e^{-y} + y - 1 = 0$

12. $(3y^2 + 2x + y)dx + (6xy + x - 3)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $3y^2 + 2x + y + 6xy + x - 3 = c$

B) $\frac{1}{3}y^3 + x^2 + y^2 = c$

C) $x^2 y + x^2 - 3y = c$

D) $3y^2 x + x^2 + yx - 3y = c$

E) $x^3 + x + yx^2 = c$

13. $(\cos 2y - x)dx - (5 + 2x \sin 2y)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x \cos 2y - 3y = 0$

B) $x \cos 2y - \frac{x^2}{2} - 5y = 0$

C) $\cos 2y - 5xy = 0$

D) $\cos 2x + xy = 0$

E) $\cos 2y - 5x = 0$

14. $(3x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $x^3 + xy^2 + x = c$

B) $x^3 + y^2 + x + xy^2 = c$

C) $3x^2 + y^2 + 2xy = c$

D) $6x + 2y + 2xy = c$

E) $x^3 + x + yx^2 = c$

15. $(y^2 + e^x)dx + (2xy + e^{2y})dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $xy^2 + e^{2y} - 1 = 0$

B) $e^x + e^{2y} - 2 = 0$

C) $xy^2 + e^x + \frac{1}{2}e^{2y} = \frac{3}{2}$

D) $xy^2 - e^{2y} + 1 = 0$

E) $xy + e^{2y} = 1$

16. $(3x^2 + 2y - 3)dx + (2x + 3y^2 + 1)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $3x^2 + 2y + 2x + y^2 = c$

B) $6x + 4y = c$

C) $x^3 + 2xy - 3x + y^3 + y = c$

D) $x^3 - 3x + y = c$

E) $2xy + y^3 + y = c$

17. $\left(\frac{1}{x} - y^2\right)dx - (2xy - e^{2y})dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын

қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $\ln|x| - xy^2 + \frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2} = 0$

B) $\ln x - xy + e^{2y} = 1$

C) $\ln x - x^2 y^2 = 0$

D) $\ln x + xy + y^2 = 0$

E) $2\ln x - ye^{2y} = 0$

18. $(y^2 - 2xy)dx + (2xy - x^2 + 1)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 - x^2 = c$

B) $y^3 - x^3 = c$

C) $y^2 x - x^2 y + y = c$

D) $y^2 x^2 - xy^2 = c$

E) $y^3 - x^3 - 4x^2 y = c$

19. $(y^2x - 2e^{-2x})dx + (x^2y - 2)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x^2y^2 + e^{-2x} + 1 = 0$

B) $xy + e^{-2x} - 1 = 0$

C) $\frac{1}{2}x^2y^2 + e^{-2x} - 2y + 1 = 0$

D) $2x + ye^{-2x} - 3y + 2 = 0$

E) $\frac{x^2y^2}{2} - 2x + y - 1 = 0$

20. $(y^2 + y + 1)dx + (2yx + x - 4)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 + y + 2xy + x = c$

B) $y^3 + y^2 + y + xy^2 + x^2 = c$

C) $y^3 + x^3 + y^2 + x^2 + xy = c$

D) $y^2x + yx + x - 4y = c$

E) $y^2x + yx^2 = c$

21. $(x + ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 4$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x - y + ye^x = 0$

B) $x^2 + y^2 - 4ye^x = 0$

C) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + ye^x = 12$

D) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - e^x = 0$

E) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - ye^x + y - 16 = 0$

22. $(x^3 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $\frac{x^4}{4} + xy + \frac{y^4}{4} = c$

- B) $\frac{1}{3}y^3 + x^2 + y^2 = c$
- C) $x^2y + x^2 - 3y = c$
- D) $3y^2x + x^2 + yx - 3y = c$
- E) $x^3 + x + yx^2 = c$

23. $(\cos 2x + 3y)dx + (3x - e^{-y})dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\sin 2x + 2x^2y + e^y = 0$
- B) $\sin 2x + e^{-y} - 1 = 0$
- C) $\sin 2x + 3xy^2 = 1$
- D) $\frac{1}{2}\sin 2x + 3xy + e^{-y} = 1$
- E) $\cos 2x + 2x^2y - 1 = 0$

24. $(4x^3 + y^2 + 2)dx + 2xydy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x^3 + xy^2 + x = c$
- B) $x^4 + xy^2 + 2x = c$
- C) $3x^2 + y^2 + 2xy = c$
- D) $6x + 2y + 2xy = c$
- E) $x^3 + x + yx^2 = c$

25. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $x^3 + x^2y^2 + y^3 = 0$
- B) $x^3 - 2xy + y^3 - 1 = 0$
- C) $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = 0$
- D) $x^3y^2 + xy + y^4 = 0$
- E) $x^2y - 2xy + y^3 = 0$

26. $(5x^4 + 2y - 4)dx + (2x + 5y^4 + 3)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $3x^2+2y+2x+y^2 = c$
- B) $6x+4y = c$
- C) $x^5+y^5 + 2xy-4x+3y = c$
- D) $x^3 - 3x+y = c$
- E) $2xy+y^3+y = c$

27. $(x^2 + y)dx + (\cos y + x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = \frac{\pi}{2}$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $x \sin y + y = \frac{\pi}{2}$
- B) $x^3 + 3 \sin y = 0$
- C) $\frac{1}{3}x^3 + xy + \sin y = 1$
- D) $5x^3 + 2 \sin y = \pi$
- E) $x^3 + \sin y = 1$

28. $(y^2 - 2xy)dx + (2xy - x^2 + 7)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $y^2 - x^2 = c$
- B) $y^3 - x^3 = c$
- C) $y^3 - x^3 - 4x^2y = c$
- D) $xy^2 - x^2y + 7y = c$
- E) $y^2x^2 - xy^2 = c$

29. $(e^y + x)dx + (xe^y + 3)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $x^2 + e^y + y^3 - 1 = 0$
- B) $e^y + xy^2 = 1$
- C) $\frac{x^2}{2} + e^y + y = \frac{3}{2}$

D) $\frac{x^2}{2} + xe^y + 3y = \frac{3}{2}$

E) $x^2 + xe^y + 2y = 1$

30. $(y^3 + y^2 + 4)dx + (3xy^2 + 2xy + 5)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $y^2 + y + 2xy + x = c$

B) $y^3 + y^2 + y + xy^2 + x^2 = c$

C) $y^3 + x^3 + y^2 + x^2 + xy = c$

D) $y^2x + yx + x - 4y = c$

E) $xy^3 + xy^2 + 4x + 5y = c$

31. $2ye^x dx + (y + 2e^x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x + y^2e^x = 1$

B) $\frac{y^2}{2} + y + ye^x = 2,5$

C) $(x + y)e^x = 1$

D) $e^x + ye^x = 2$

E) $2ye^x + \frac{y^2}{2} = \frac{5}{2}$

32. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз

A) $x^2y - 2xy + e^y = c$

B) $3y^2x + x^2 + yx - 3y = c$

C) $x^2y + xe^y = c$

D) $x^3 - 2xy + y^3 - 1 = c$

E) $x^3y + 2xy + 3x + y^3 = c$

33. $(x^2 + 3y^2 + y)dx + (6xy + x + e^y)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\frac{x^3}{3} + 3xy^2 + xy + e^y = 1\frac{1}{3}$
 B) $\frac{x^3}{3} - xy^2 + x^2y + e^y = 1\frac{1}{3}$
 C) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + xe^y = 1\frac{1}{3}$
 D) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = -\frac{2}{3}$
 E) $\frac{x^3}{3} + 2xy + y^2 + e^y = 1\frac{1}{3}$

34. $(3x^2 - 2xy^2)dx + (5y^4 - 2x^2y)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x^3 + xy^2 + x = c$
 B) $x^4 + xy^2 + 2x = c$
 C) $3x^2 + y^5 + 2xy = c$
 D) $6x + 2y + 2xy = c$
 E) $x^3 - x^2y^2 + y^5 = c$

35. $(x^2 + 4\sin y)dx + 4(1 + x\cos y)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\frac{x^3}{3} + 4x\sin y + 4y = 4$
 B) $\frac{x^3}{3} + 3y + x\sin y = 3$
 C) $3x^3 + 6y + x\sin y = 6$
 D) $x^3 - 3y + 3x\sin y = -3$
 E) $\frac{x}{3} - 3y + x\sin y = -3$

36. $(e^x + 3x^2e^y)dx + (x^3e^y + 3y^2)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x^2 y - 2xy + e^y = c$
- B) $3y^2 x + x^2 + yx - 3y = c$
- C) $e^x + x^3 e^y + y^3 = c$
- D) $x^3 - 2xy + y^3 - 1 = c$
- E) $e^y + 2xy + 3x + y^3 = c$

37. $(x^2 + 5y)dx + (y^2 + 5x)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + 5xy = 0$
- B) $x^2 y + xy^2 + x^3 = 1$
- C) $x^3 + y^3 + xy = 0$
- D) $x^3 - y^3 + xy = 0$
- E) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy = 2$

38. $(4x^3 + 3x^2 y^2)dx + (2x^3 y + 3y^2)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

- A) $x^4 + x^3 y^2 + y^3 = c$
- B) $y^3 + x^2 + y^2 = c$
- C) $x^2 y + x^2 - 3y = c$
- D) $3y^2 x + x^2 + yx - 3y = c$
- E) $x^3 + x + yx^2 = c$

39. $2xydx + (x^2 - 7e^y)dy = 0$ теңдеуінің $y(2) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

- A) $x^2 y - 2xy + e^y = 1$
- B) $xy^2 + xe^y = 2$
- C) $x^2 y + xe^y = 2$
- D) $y - xe^y = 2$

Е) $x^2y - 7e^y + 7 = 0$

40. $(5x^4 + y^4)dx + (4xy^3 + 3y^2)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

А) $x^4 + x^3y^2 + y^3 = c$

В) $y^5 + x^2y + y^2 = c$

С) $x^2y + x^2 - 3y = c$

Д) $x^5 + y^4x + y^3 = c$

Е) $x^3 + x + yx^2 = c$

41. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

А) $x^3 + 2xy - 3y + 3 = 0$

В) $2x^3 + xy - 3y = 0$

С) $\frac{1}{2}x^2y^2 + e^{-2x} - 2y + 1 = 0$

Д) $x^3 + 2x^2y - 3y - 3 = 0$

Е) $x^2 + 2xy - 5y - 5 = 0$

42. $(3x^2 - y^2)dx - 2yxdy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

А) $x^2 + 2xy = c$

В) $x^3 + 12xy + y^3 = c$

С) $x^3 + 6xy + y^2 = c$

Д) $x^3 + 2x^2y - 3y = c$

Е) $x^3 - y^2x = c$

43. $(x^2 + 4y)dx + (4x + y^2)dy = 0$ теңдеуінің $y(0) = 1$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

А) $x^3 + 2xy - 3y - 3 = 0$

В) $x^3 + 12xy + y^3 - 1 = 0$

С) $x^3 + 6xy + y^3 - 2 = 0$

D) $x^3 + 2x^2y - 3y - 3 = 0$

E) $x^2 + 2xy - 5y - 5 = 0$

44. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $x \cos 2y + y = c$

B) $x^3 + 3 \sin y = c$

C) $\frac{1}{3}x^3 + xy + \sin y = c$

D) $x^2 \cos 2y + 2x = c$

E) $x^3 + \sin y = c$

45. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x^3 + x^2y^2 + y^3 = 0$

B) $x^3 - 2xy + y^3 - 1 = 0$

C) $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = 0$

D) $x^3y^2 + xy + y^4 = 0$

E) $x^2y - 2xy + y^3 = 0$

46. $e^{-y} dx + (1 - xe^{-y}) dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $y + xe^{-y} = c$

B) $\frac{y^2}{2} + y + ye^x = c$

C) $(x + y)e^x = c$

D) $e^x + ye^x = c$

E) $2ye^x + y^2 = c$

47. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x^3 e^y - y - 1 = 0$

B) $e^y + xy^2 = 1$

C) $\frac{x^2}{2} + e^y + y = \frac{3}{2}$

D) $\frac{x^2}{2} + xe^y + 3y = \frac{3}{2}$

E) $x^2 + xe^y + 2y = 1$

48. $(3x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + \cos y)dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $\frac{x^3}{3} + 4x \sin y + 4y = c$

B) $\frac{x^3}{3} + 3y + x \sin y = c$

C) $3x^3 + 6y + x \sin y = c$

D) $x^3 - 3y + 3x \sin y = c$

E) $x^3 + xy^2 + xy + \sin y = c$

49. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$ теңдеуінің $y(1) = 0$ шартын қанағаттандыратын дербес интегралын табыңыз.

A) $x \cos y + y = \frac{\pi}{2}$

B) $x^3 + 3 \sin y = 0$

C) $x^2 \cos^2 y + y^2 - 1 = 0$

D) $5x^3 + 2 \cos y = \pi$

E) $x^3 + \cos^2 y = 1$

50. $(y + x \ln y) dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1 \right) dy = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $\frac{x^2}{2} \ln y + yx + y = c$

B) $x^2 y + xy^2 + x^3 = c$

C) $x^3 \ln y + y^3 + xy = c$

D) $x^3 - y^3 \ln y + xy = c$

E) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy = c$

13 РЕТІ ТӨМЕНДЕТІЛЕТІН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер» тақырыбына арналған. Аталған тарауда теңдеулердің үш түрі бар. Алмастырулардың көмегімен бұл теңдеулерді бірінші ретті дифференциалдық теңдеуге келтіреміз де, өзіміз білетін әдістермен шешімін табамыз. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

13.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (13.1)$$

n-ші ретті дифференциалдық теңдеу немесе

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (13.2)$$

бас туындыға қатысты шешілген дифференциалдық теңдеу деп аталады.

n - ші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін тек кейбір жағдайларда ғана анықтауға болады және теңдеулердің түрлеріне сәйкес келесі жағдайларды қарастырайық.

Мысал 13.1: $y'' = x^2 - 2x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі:

а) $y^{(n)} = f(x), \quad (13.3)$

$y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ - қатыспаған жағдай.

$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ жалпы шешімі *n* рет интегралдау арқылы (13.3) түрінде алынады.

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + c_1) dx = f_2(x) + c_1 x + c_2$$

$$y^{(n-3)} = \int (f_2(x) + c_1 x + c_2) dx = f_3(x) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

.....

$$y = f_n(x) + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1} x + c_n \quad (13.4)$$

Дербес жағдайда, егер $n=2$ болса, онда $y'' = f(x)$ теңдеуінің жалпы шешімі екі рет интегралдау арқылы табылады

$$y' = \int f(x)dx + c_1 = f_1(x) + c_1,$$

$$y = \int (f_1(x) + c_1)dx = f_2(x) + c_1x + c_2.$$

b) $y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + c_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + c_1,$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + c_1 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2.$$

c) Жауабы: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2.$

Мысал 13.2: $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі:

a) $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$ (13.5)

y - қатыспаған жағдай.

$y^{(\kappa)} = z(x)$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады, мұндағы

$$y^{(\kappa+1)} = z'$$

$$y^{(\kappa+2)} = z''$$

.....

$$y^{(n)} = z^{(n-1)}.$$

b) $y'' = y' + x$ теңдеуіне $y' = z$, $y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек $z' - z = x$ бірінші ретті сызықтық теңдеуін аламыз.

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'$$

алмастыруынан кейін $z' - z = x$ теңдеуі

$$u'v + uv' - uv = x$$

түріне келеді, екінші және үшінші қосылғыштан u функциясын жақшаның сыртына ортақ көбейткіш ретінде шығарсақ

$$u'v + u(v' - v) = x$$

Бұл теңдеуді айнымалылары ажыратылатын екі теңдеу ретінде қарастырып u және v функцияларын табамыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге теңестірсек

$$v' - v = 0 \quad (13.6)$$

онда

$$u'v = x \quad (13.7)$$

(13.6) теңдеуінің шешімін

$$\frac{dv}{dx} = v$$

$$\frac{dv}{v} = dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln|v| = x$$

$v = e^x$ түріндегі дербес шешім ретінде табамыз. v функциясын (13.7) теңдеуіне қойсақ:

$$u'e^x = x$$

$$u' = \frac{x}{e^x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{e^x}$$

$$du = xe^{-x} dx$$

$$\int du = \int xe^{-x} dx$$

$$u = \left. \begin{array}{l} \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 \\ u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = e^{-x} dx \\ v_1 = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c_1.$$

Бұдан $u = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$, жоғарғыдағы $z = uv$ Бернулли алмастыруын ескерсек $z' - z = x$ біртектісіз сызықтық теңдеудің

$$z = (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1)e^x = ((-x-1)e^{-x} + c_1)e^x = -x-1 + c_1e^x$$

жалпы шешімін аламыз, ал ретін төмендету үшін енгізілген белгілеу

$$z = y'.$$

Соңғы екі теңдеудің оң жақтарын теңестірсек

$$y' = -x - 1 + c_1 e^x.$$

y -ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет

$$y = \int (-x - 1 + c_1 e^x) dx = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2 - \text{ізделінді жалпы}$$

шешім.

с) Жауабы: $y = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^x + c_2.$

Мысал 13.3: $(y')^2 + 2yy'' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі:

a) $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (13.7)

x - қатыспаған жағдай

$y' = z(y)$ ауыстыруын енгіземіз, келесі туындылардың табылу реті:

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz : dy}{dx : dy} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = y' \frac{dz}{dy} = z \frac{dz}{dy}$$

$$y''' = z \left(z \frac{d^2 z}{d^2 y} + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right), \text{ т.с.с. жалғасады.}$$

b) $y' = z, y'' = zz'$ ауыстыруын берілген $(y')^2 + 2yy'' = 0$

теңдеуіне қойсақ

$z^2 + 2yzz' = 0$ - бірінші ретті айнымалысы ажыратылатын теңдеу алынады.

$$2yzz' = -z^2$$

$$2yz \frac{dz}{dy} = -z^2$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{2y}$$

$$\ln z = -\frac{1}{2} \ln y + \ln c_1$$

$$z = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

жалпы шешімін аламыз, ал ретін төмендету үшін енгізілген белгілеу

$$z = y'.$$

Соңғы екі теңдеудің оң жақтарын теңестірсек

$$y' = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int y^{\frac{1}{2}} dy = c_1 \int dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 (x + c_2)$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} c_1 (x + c_2)$$

$$y = \left(\frac{3}{2} c_1 \right)^{\frac{2}{3}} (x + c_2)^{\frac{2}{3}}$$

$y = c_1 (x + c_2)^{\frac{2}{3}}$ - ізделінді жалпы шешім.

с) Жауабы: $y = c_1 (x + c_2)^{\frac{2}{3}}$.

13.2 Тест тапсырмалары

1. $y'' = \sin x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \cos x + c_1 x + c_2$

B) $y = \operatorname{tg} x + c_1 x + c_2$

C) $y = -\sin x + c_1 x + c_2$

D) $y = \operatorname{ctg} x + c_1 x + c_2$

E) $y = \sin x + c_1 x + c_2$

2. $y''' = e^{4x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{64} e^{4x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{64} e^{2x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

$$C) y = \frac{1}{4}e^{4x} + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$D) y = \frac{1}{12}\sin 4x + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$E) y = \frac{1}{12}\cos 4x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

3. $y''' = \cos 4x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

$$A) y = -\frac{1}{64}\sin 4x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$B) y = \frac{1}{64}\cos 4x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$C) y = \frac{1}{8}\sin 4x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$D) y = \frac{1}{12}\sin 4x + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$E) y = -\sin 4x + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

4. $y'' = \frac{1}{3(y')^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{3}{4}(x + c_1)^{\frac{4}{3}} + c_2$$

$$B) y = \frac{1}{4}x^3 + c_1x + c_2$$

$$C) y = -\frac{4}{3}x^2 + c_1x + c_2$$

$$D) y = 3x^2 + c_1x + c_2$$

$$E) y = -\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c_1x + c_2$$

5. $y''' = \frac{6}{x^3}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{\ln x}{x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{x^3} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

C) $y = x^3 \ln x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

D) $y = 3 \ln|x| + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = \ln x + \frac{c_1}{x^2} + c_2 x + c_3$

6. $y'' - \frac{y' + 1}{x} = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = x^2 + c_1 x + c_2$

B) $y = \frac{c_1 x^2}{2} - x + c_2$

C) $y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$

D) $y = \frac{x^2}{4} + c_1 x + c_2$

E) $y = 3x^2 + c_1 x + c_2$

7. $y''' = \sin 2x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{8} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{8} \sin 2x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{1}{8} \cos 2x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

E) $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1x^2 + c_2x + c_3$

8. $y''' = e^{-4x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4}e^{-4x} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

B) $y = -\frac{1}{64}e^{-4x} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

C) $y = \frac{1}{16}e^{4x} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

D) $y = \frac{1}{8}e^{4x} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

E) $y = \frac{1}{2}e^{4x} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

9. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \ln|\operatorname{tg}x| + c_1x + c_2$

B) $y = \cos x + c_1 \sin x + c_2$

C) $y = \ln|\sin x| + c_1x + c_2$

D) $y = -\ln|\cos^2 x| + c_1x + c_2$

E) $y = -\ln|\cos x| + c_1x + c_2$

10. $3y''(y')^2 = 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4}x^3 + c_1x + c_2$

B) $y = 3x^2 + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{3}{4}(x + c_1)^{\frac{4}{3}} + c_2$

E) $y = -\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c_1x + c_2$

11. $y'' = \frac{4}{x^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = x^3 + c_1x + c_2$

B) $y = \frac{1}{x} + c_1x + c_2$

C) $y = 2\ln|x| + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{4}{x^3} + c_1x + c_2$

E) $y = -4\ln|x| + c_1x + c_2$

12. $y'' = \frac{y'}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$

B) $y = \sqrt{(x + c_1)^3} + c_2$

C) $y = \frac{x^2}{2}c_1 + c_2$

D) $y = \frac{3}{2}\sqrt{(x + c_1)} + c_2$

E) $y = (x^2 + c_1) + c_2$

13. $y'' = -2\sin x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{2}\cos x + c_1x + c_2$

B) $y = -2\operatorname{tg}x + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{1}{2}\sin x + c_1x + c_2$

D) $y = -2\operatorname{ctg}x + c_1x + c_2$

E) $y = 2\sin x + c_1x + c_2$

14. $y'' = e^{5x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{5}e^{5x} + c_1x + c_2$

B) $y = \frac{1}{25}e^{5x} + c_1x + c_2$

C) $y = xe^{5x} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{1}{16}e^{4x} + c_1x + c_2$

E) $y = \frac{1}{10}e^{5x} + c_1x + c_2$

15. $y'' = -\cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \cos x + c_1x + c_2$

B) $y = -\operatorname{tg}x + c_1x + c_2$

C) $y = \sin x + c_1x + c_2$

D) $y = \operatorname{ctg}x + c_1x + c_2$

E) $y = -\sin x + c_1x + c_2$

16. $y'' = \frac{1}{(y')^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{3}{4}(3(x + c_1))^{\frac{4}{3}} + c_2$

B) $y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$

C) $y = -\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{c_1x^2}{2} - x + c_2$

E) $y = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$

17. $y'' = x^2 - \sin x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$

B) $y = x^4 + \cos x + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{x^4}{12} + \sin x + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{x^3}{9} + \cos x + c_1x^2 + c_2$

E) $y = x^4 - \sin x + c_1x + c_2$

18. $xy'' - y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = c_1x + c_2$

B) $y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$

C) $y = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

D) $y = c_1 \frac{x^4}{4} + c_2$

E) $y = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$

19. $y'' = \sin 3x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{9} \cos 3x + c_1x + c_2$

B) $y = \frac{1}{9} \operatorname{tg} 3x + c_1x + c_2$

C) $y = -\frac{1}{9} \sin 3x + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{1}{9} \operatorname{ctg} 3x + c_1x + c_2$

E) $y = 3 \sin 3x + c_1x + c_2$

20. $y'' = e^{7x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{25}e^{5x} + c_1x + c_2$

B) $y = \frac{1}{49}e^{7x} + c_1x + c_2$

C) $y = xe^{7x} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{1}{7}e^{7x} + c_1x + c_2$

E) $y = \frac{1}{14}e^{7x} + c_1x + c_2$

21. $y''' = \cos 5x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

A) $y = -\frac{1}{125}\sin 5x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

B) $y = \frac{1}{25}\cos 5x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

C) $y = -\frac{1}{25}\sin 5x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

D) $y = \frac{1}{5}\sin 5x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

E) $y = \frac{1}{5}\cos 5x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

22. $y'' = (y')^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = c_1x^2 + c_2x$

B) $y = -\ln|x + c_1| + c_2$

C) $y = \ln|x| + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

E) $y = \frac{1}{2}\ln|c_1x| + c_2$

23. $y'' = x^2 + 2x + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

B) $y = x^4 + x^3 + x^2 + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + c_1 \frac{x}{2} + c_2$

E) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

24. $y'' - \frac{y' + 2}{x} = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = c_1 \frac{x^3}{3} - 5x + c_2$

B) $y = c_1 \frac{x^2}{2} - 2x + c_2$

C) $y = \frac{x^2}{4} + c_1x + c_2$

D) $y = c_1 \frac{x^3}{3} - 3x + c_2$

E) $y = 3x^2 + c_1x + c_2$

25. $y''' = \sin 4x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4} \sin 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

B) $y = \frac{1}{64} \cos 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

C) $y = \frac{1}{8} \sin 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

$$D) y = \frac{1}{8} \cos 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$E) y = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

26. $y''' = e^{2x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{1}{8} e^{2x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$B) y = \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2$$

$$C) y = \frac{1}{8} e^{2x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$D) y = \frac{1}{14} e^{2x} + c_1 x + c_2$$

$$E) y = \frac{1}{16} e^{2x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

27. $y'' = -3 \cos 3x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = -3 \cos 3x + c_1 x + c_2$$

$$B) y = \frac{1}{3} \sin 3x + c_1 x + c_2$$

$$C) y = -\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c_1 x + c_2$$

$$D) y = 3 \operatorname{ctg} 3x + c_1 x + c_2$$

$$E) y = \frac{1}{3} \cos 3x + c_1 x + c_2$$

28. $y''(y')^2 = 1$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$$

B) $y = -\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{c_1x^2}{2} - x + c_2$

D) $y = \frac{3}{4}(3(x + c_1))^{\frac{4}{3}} + c_2$

E) $y = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$

29. $y''' = -x + \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{x^4}{16} - \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

B) $y = x^4 + \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

C) $y = -\frac{x^4}{12} + \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

D) $y = -\frac{x^4}{24} - \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

E) $y = \frac{x^4}{4} - \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$

30. $y''(x+1) - y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \ln|x| + c_2$

B) $y = \frac{c_1(x+1)^2}{2} + c_2$

C) $y = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{(x+1)^2}{4} + c_1x + c_2$

E) $y = c_1 \ln(x+1) + c_2$

31. $y'' = -\sin 5x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{25} \sin 5x + c_1 x + c_2$

B) $y = -\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + c_1 x + c_2$

C) $y = \frac{1}{5} \sin 5x + c_1 x + c_2$

D) $y = 5 \operatorname{ctg} x + c_1 x + c_2$

E) $y = \frac{1}{25} \cos 5x + c_1 x + c_2$

32. $y''' = e^{-3x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = 3e^{-3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{6} e^{-3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{1}{9} e^{-3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = -\frac{1}{27} e^{-3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

33. $y''' = 2 \cos 2x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

A) $y = \frac{1}{2} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{8} \sin 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{8} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

$$D) y = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$E) y = \frac{1}{4} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

34. $y'' = 2y'$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$$

$$B) y = \frac{x^3}{3} + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$C) y = c_1 \frac{e^{2x}}{2} + c_2$$

$$D) y = e^{2x} + c_1 x + c_2$$

$$E) y = \frac{e^{-2x}}{2} + c_1 x + c_2$$

35. $y'' = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{x^5}{5} - \ln|x| + c_1 x + c_2$$

$$B) y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$C) y = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{x^2} + c_1 x + c_2$$

$$D) y = \frac{x^2}{4} + \ln|x| + c_1 x + c_2$$

$$E) y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c_1 x + c_2$$

36. $y'' = \frac{2y'}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$

B) $y = \sqrt{(x + c_1)^3} + c_2$

C) $y = c_1 \frac{x^3}{3} + c_2$

D) $y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$

E) $y = \frac{2x^2}{3} + c_1 x + c_2$

37. $y'' = \sin \frac{2}{3}x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{2}{3} \cos \frac{2}{3}x + c_1 x + c_2$

B) $y = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3}x + c_1 x + c_2$

C) $y = -\frac{9}{4} \sin \frac{2}{3}x + c_1 x + c_2$

D) $y = \operatorname{ctg} \frac{2}{3}x + c_1 x + c_2$

E) $y = -\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}x + c_1 x + c_2$

38. $y''' = 3e^{6x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{72} e^{6x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{36} e^{6x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{24} e^{6x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

$$D) y = \frac{1}{6}e^{6x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$E) y = \frac{1}{12}e^{6x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

39. $y'' = \cos 6x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз:

$$A) y = -\frac{1}{36} \sin 6x + c_1x + c_2$$

$$B) y = \frac{1}{6} \cos 6x + c_1x + c_2$$

$$C) y = -\frac{1}{36} \cos 6x + c_1x + c_2$$

$$D) y = \frac{1}{6} \sin 6x + c_1x + c_2$$

$$E) y = \frac{1}{12} \cos 6x + c_1x + c_2$$

40. $y'' = \frac{4}{(y')^2}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$A) y = \frac{3}{4}(12(x + c_1))^{\frac{4}{3}} + c_2$$

$$B) y = \frac{x^3}{3} + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$C) y = \frac{(x+1)^2}{4} + c_1x + c_2$$

$$D) y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$$

$$E) y = \frac{3}{4}(3(x + c_1))^{\frac{4}{3}} + c_2$$

41. $y''' = 3x^2 + 2x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{x^5}{20} - \ln|x| + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = -\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{x^5}{25} - \frac{1}{x^2} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

42. $y'' - \frac{y'}{x} + 3 = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = c_1 \frac{x^3}{3} - 3x + c_2$

B) $y = \frac{c_1 x^2}{2} - 3x + c_2$

C) $y = e^{\frac{c_1 x^2}{2}} + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{(x+1)^2}{4} + c_1 x + c_2$

E) $y = 3x^2 + c_1 x + c_2$

43. $y''' = 8 \sin 4x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4} \sin 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = \frac{1}{8} \cos 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{2} \sin 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{1}{16} \cos 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = -\frac{1}{16} \sin 4x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

44. $y'' = 2e^{-2x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = -\frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2$

B) $y = x e^{-2x} + c_1 x + c_2$

C) $y = \frac{1}{8} e^{-2x} + c_1 x + c_2$

D) $y = \frac{1}{2} e^{-2x} + c_1 x + c_2$

E) $y = -\frac{1}{16} e^{-2x} + c_1 x + c_2$

45. $y''' = -4 \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = 4 \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = -4 \operatorname{tg} x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{4} \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

D) $y = 4 \operatorname{ctg} x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = 4 \sin x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

46. $y'' = 1 + y'$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = x e^x + c_1 x + c_2$

B) $y = c_1 e^x - x + c_2$

C) $y = e^x + c_1x + c_2$

D) $y = \frac{3}{4}e^{-2} + c_1x + c_2$

E) $y = c_1e^{-3x} + x + c_2$

47. $y'' = \frac{1}{x^3} + 2x^2$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{x^4}{4} - \ln|x| + c_1x + c_2$

B) $y = -\frac{2}{3x} + \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2$

C) $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{x^2} + c_1x + c_2$

D) $y = -\frac{1}{3x} + \frac{x^4}{8} + c_1x + c_2$

E) $y = \frac{1}{2x} + \frac{x^4}{6} + c_1x + c_2$

48. $y'' = \frac{3y'}{x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{2}{3}(x + c_1) + c_2$

B) $y = c_1 \frac{x^4}{4} + c_2$

C) $y = c_1 \frac{x^3}{3} - 3x + c_2$

D) $y = \frac{3}{2}(x^2 + c_1)^4 + c_2$

E) $y = \frac{c_1x^2}{2} - 3x + c_2$

49. $y'' = -2\sin 6x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = \frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x + c_2$

B) $y = \frac{1}{18} \cos 6x + c_1 x + c_2$

C) $y = \frac{1}{6} \cos 6x + c_1 x + c_2$

D) $y = \frac{1}{6} \operatorname{ctg} 6x + c_1 x + c_2$

E) $y = \frac{1}{18} \sin 6x + c_1 x + c_2$

50. $y''' = 3e^{3x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

A) $y = 3e^{3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

B) $y = -\frac{1}{3} e^{3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

C) $y = \frac{1}{6} e^{3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

D) $y = \frac{1}{9} e^{3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

E) $y = -\frac{1}{27} e^{3x} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

14 БІРТЕКТІ ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (14.1)$$

біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу, мұндағы p, q тұрақты сандар.

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (14.2)$$

теңдеуі (14.1) теңдеуінің *сипаттамалық теңдеуі* деп аталады.

Сипаттамалық теңдеудің дискриминанты

$$D = p^2 - 4q. \quad (14.3)$$

(14.1) теңдеуінің жалпы шешімін дискриминанттың $D > 0, D = 0, D < 0$ болу жағдайларына сәйкес кесте 14.1 бойынша табамыз:

Кесте 14.1

№	Сипаттамалық теңдеудің дискриминанты	Сипаттамалық теңдеудің түбірлері	Біртекті теңдеудің жалпы шешімі
I	$D > 0$	$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2},$ $k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$ <p>нақты әртүрлі түбірлері бар $k_1 \neq k_2.$</p>	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
II	$D = 0$	$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ <p>нақты бірдей түбірлері бар $k_1 = k_2.$</p>	$y = (c_1 + x c_2) e^{k_1 x}$

III	$D < 0$	$k_1 = \alpha + i\beta,$ $k_2 = \alpha - i\beta$ түбірлері комплекс сандар.	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$
-----	---------	---	--

14.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 14.1: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - y' - 2y = 0.$

Шешімі:

a) $y'' - y' - 2y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі
 $k^2 - k - 2 = 0$, мұндағы $p = -1$, $q = -2$.

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0.$$

Кесте 14.1 бойынша I - жағдай.

b) Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

c) Жауабы: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$

Мысал 14.2: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Шешімі:

a) $y'' - 10y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі
 $k^2 - 10k + 25 = 0$ мұндағы $p = -10$, $q = 25$.

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 0.$$

Кесте 14.1 бойынша II - жағдай.

b) Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{-10}{2} = 5.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (c_1 + xc_2)e^{5x}.$$

c) Жауабы: $y = (c_1 + xc_2)e^{5x}$.

Мысал 14.3: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Шешімі:

a) $y'' + 6y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі
 $k^2 + 6k + 25 = 0$ мұндағы $p = 6$, $q = 25$.

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64 = 64i^2.$$

Кесте 14.1 бойынша III - жағдай.

b) Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-6 - \sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6 - 8i}{2} = -3 - 4i,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6 + 8i}{2} = -3 + 4i.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

c) Жауабы: $y = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

14.2 Тест тапсырмалары

1. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' - 5y' + 2y = 0$.

A) $y = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

D) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

E) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

2. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 4y' + 4y = 0$.

A) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x}$

B) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$

C) $y = e^{4x} (c_1 + xc_2)$

D) $y = e^{-4x} (c_1 + xc_2)$

E) $y = e^{2x} (c_1 + xc_2)$

3. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 4y' + 5y = 0$.

A) $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

B) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

C) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

D) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

E) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

4. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' - y' - 2y = 0$.

A) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

D) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

E) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

5. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 6y' + 9y = 0$.

A) $y = e^{-6x}(c_1 + xc_2)$

B) $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{9x}$

C) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$

D) $y = e^{3x}(c_1 + xc_2)$

E) $y = e^{-3x}(c_1 + xc_2)$

6. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

A) $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

B) $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

C) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right)$

D) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right)$

E) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

7. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық

дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - 3y' + y = 0.$

A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$

C) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^x$

D) $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^x$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$

8. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $9y'' - 12y' + 4y = 0.$

A) $y = e^{-\frac{4}{3}x} (c_1 + xc_2)$

B) $y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2)$

C) $y = e^{\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2)$

D) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$

E) $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

9. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 8y' + 5y = 0.$

A) $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

B) $y = e^{-2x} \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right)$

C) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right)$

D) $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Е) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

10. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 9y' - 2y = 0.$

А) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x}$

В) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{5}x}$

С) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{5}x}$

Д) $y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x}$

Е) $y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x}$

11. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $9y'' - 6y' + y = 0.$

А) $y = c_1 e^x + c_2 e^x$

В) $y = e^{\frac{1}{3}x} (c_1 + xc_2)$

С) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$

Д) $y = e^{-\frac{1}{3}x} (c_1 + xc_2)$

Е) $y = e^{-x} (c_1 + xc_2)$

12. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' + y = 0.$

А) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$

В) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

С) $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

D) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

E) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

13. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - y' - 6y = 0.$

A) $y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

C) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

D) $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{2x}$

E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

14. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 4y' + y = 0.$

A) $y = e^{\frac{3}{2}x} (c_1 + xc_2)$

B) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$

C) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x}$

D) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$

E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$

15. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 8y' + 13y = 0.$

$$A) y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right)$$

$$B) y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$C) y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

$$D) y = e^{2x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$$

$$E) y = e^x \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right)$$

16. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

$$A) y = c_1 e^{-8x} + c_2 e^{-6x}$$

$$B) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x}$$

$$C) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$$

$$D) y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

$$E) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

17. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

$$A) y = e^{-2x} (c_1 + xc_2)$$

$$B) y = e^{-5x} (c_1 + xc_2)$$

$$C) y = e^{5x} (c_1 + xc_2)$$

$$D) y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{5x}$$

$$E) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$$

18. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық

дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

- A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$
- B) $y = e^{2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
- C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
- D) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
- E) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

19. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' = 0$.

- A) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{3x}$
- B) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$
- C) $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{5}{3}x}$
- D) $y = c_1 e^{-\frac{5}{3}x} + c_2 e^x$
- E) $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{3}x}$

20. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + y = 0$.

- A) $y = e^{2x} (c_1 + xc_2)$
- B) $y = e^{-2x} (c_1 + xc_2)$
- C) $y = e^{-x} (c_1 + xc_2)$
- D) $y = c_1 e^x + c_2 e^x$
- E) $y = e^x (c_1 + xc_2)$

21. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық

дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y' + 29y = 0$.

- A) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
- B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$
- C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$
- D) $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$
- E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

22. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

- A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
- B) $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x}$
- C) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x}$
- D) $y = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x}$
- E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x}$

23. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 4y' + y = 0$.

- A) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$
- B) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x}$
- C) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$
- D) $y = e^{-2x} (c_1 + xc_2)$

Е) $y = e^{2x}(c_1 + xc_2)$

24. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y = 0$.

А) $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

В) $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

С) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

Д) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Е) $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

25. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 6y' - 8y = 0$.

А) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x}$

В) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{4}{5}x}$

С) $y = c_1 e^{\frac{4}{5}x} + c_2 e^{2x}$

Д) $y = c_1 e^{-\frac{4}{5}x} + c_2 e^{2x}$

Е) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{4}{5}x}$

26. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 6y' + 9y = 0$.

А) $y = e^{-3x}(c_1 + xc_2)$

В) $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{9x}$

С) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$

D) $y = e^{3x}(c_1 + xc_2)$

E) $y = e^{-6x}(c_1 + xc_2)$

27. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 4y' + 13y = 0$.

A) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$

C) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

D) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

28. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' + 2y = 0$.

A) $y = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{-x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$

D) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$

29. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 2y' + y = 0$.

A) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$

- В) $y = e^{-x}(c_1 + xc_2)$
 С) $y = e^x(c_1 + xc_2)$
 D) $y = e^{-2x}(c_1 + xc_2)$
 E) $y = e^{2x}(c_1 + xc_2)$

30. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 9y = 0$.

- A) $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
 B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$
 C) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$
 D) $y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
 E) $y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

31. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + y' - 2y = 0$.

- A) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x}$
 B) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$
 C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{7}x}$
 D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$
 E) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x$

32. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 8y' + 16y = 0$.

- A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}$
- B) $y = e^{-2x} (c_1 + x c_2)$
- C) $y = e^{4x} (c_1 + x c_2)$
- D) $y = e^{2x} (c_1 + x c_2)$
- E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$

33. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 8y' + 32y = 0$.

- A) $y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
- B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$
- C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$
- D) $y = e^{4x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$
- E) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

34. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' + 3y' + y = 0$.

- A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
- B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$
- C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$
- D) $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^x$
- E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$

35. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 8y' + 16y = 0$.

- A) $y = e^{-x} (c_1 + x c_2)$

B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$

C) $y = e^x (c_1 + x c_2)$

D) $y = e^{-4x} (c_1 + x c_2)$

E) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$

36. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 9y = 0$.

A) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right)$

B) $y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

C) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$

D) $y = c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x$

E) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$

37. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' - 9y' - 2y = 0$.

A) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x}$

C) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{5}x}$

D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

E) $y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x}$

38. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$9y'' + 6y' + y = 0.$$

A) $y = e^{-\frac{1}{3}x} (c_1 + xc_2)$

B) $y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2)$

C) $y = c_1 + c_2 e^x$

D) $y = e^{-x} (c_1 + xc_2)$

E) $y = c_1 \cos \frac{1}{3}x + c_2 \sin \frac{1}{3}x$

39. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$5y'' - 2y' + y = 0.$$

A) $y = e^{2x} \left(c_1 \cos \frac{3}{4}x + c_2 \sin \frac{3}{4}x \right)$

B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

D) $y = e^{\frac{1}{5}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{5}x + c_2 \sin \frac{2}{5}x \right)$

E) $y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{\frac{3}{5}x}$

40. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$2y'' + y' - 6y = 0.$$

A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

C) $y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

$$D) y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{2x}$$

$$E) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

41. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y' + 4y = 0$.

$$A) y = e^{2x}(c_1 + xc_2)$$

$$B) y = e^{-x}(c_1 + xc_2)$$

$$C) y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-x}$$

$$D) y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^x$$

$$E) y = e^{-2x}(c_1 + xc_2)$$

42. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + 10y = 0$.

$$A) y = e^{-x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$$

$$B) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$C) y = e^{2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$$

$$D) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

$$E) y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$$

43. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

$$A) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$B) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

$$C) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

E) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

44. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 4y' + y = 0$.

A) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x}$

B) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2)$

C) $y = e^{-2x} (c_1 + xc_2)$

D) $y = e^x (c_1 + xc_2)$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

45. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - 2y' + y = 0$.

A) $y = e^{-2x} \left(c_1 \cos \frac{2}{3}x + c_2 \sin \frac{2}{3}x \right)$

B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$

C) $y = e^{\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$

D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

E) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$

46. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 2y' - 35y = 0$.

A) $y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{5x}$

- B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$
 C) $y = c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x$
 D) $y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{2x}$
 E) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{5x}$

47. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

- A) $y = e^{-\frac{4}{3}x} (c_1 + xc_2)$
 B) $y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2)$
 C) $y = e^{\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2)$
 D) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x}$
 E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

48. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 8y' + 4y = 0$.

- A) $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
 B) $y = e^{-\frac{4}{5}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{5}x + c_2 \sin \frac{2}{5}x \right)$
 C) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right)$
 D) $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
 E) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{2}{5}x + c_2 \sin \frac{2}{5}x \right)$

49. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 10y' + 24y = 0$.

- A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$
- B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$
- C) $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-4x}$
- D) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$
- E) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-2x}$

50. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $16y'' + 8y' + y = 0.$

- A) $y = e^{-x}(c_1 + xc_2)$
- B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
- C) $y = e^x(c_1 + xc_2)$
- D) $y = e^{-\frac{1}{4}x}(c_1 + xc_2)$
- E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

15 БІРТЕКСІЗ ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулер» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

15.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

$$y'' + p y' + q y = f(x) \quad (15.1)$$

біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеу, мұндағы p, q тұрақты сандар, ал $f(x)$ - функциясы *теңдеудің оң жағы немесе бос мүшесі* деп аталады.

(15.1) теңдеудің жалпы шешімі \bar{y} - біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен \tilde{y} - біртексіз теңдеудің қандай да бір дербес шешімінің қосындысына тең болады

$$y = \bar{y} + \tilde{y}. \quad (15.2)$$

\bar{y} - біртекті теңдеудің жалпы шешімі 14 тарауда берілген Кесте 14.1 бойынша табылады.

\tilde{y} - біртексіз теңдеудің дербес шешімін таңдау $f(x)$ функциясының арнайы түріне байланысты *Кесте 15.1* бойынша табылады.

Кесте 15.1.

$f(x)$	Сипаттамалық теңдеудің түбірлері	Біртексіз теңдеудің дербес шешімі
$y'' + p y' + q y =$ $= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) e^{\alpha x} =$ $= P_n(x) e^{\alpha x}$ мұндағы $P_n(x)$ - берілген n дәрежелі көпмүшелік.	1) $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$ 2) $\alpha = k_1$ немесе $\alpha = k_2$ 3) $\alpha = k_1$ және $\alpha = k_2$	1) $\tilde{y} = \bar{P}_n(x) e^{\alpha x}$ 2) $\tilde{y} = x \bar{P}_n(x) e^{\alpha x}$ 3) $\tilde{y} = x^2 \bar{P}_n(x) e^{\alpha x}$

Ескерту: Көпмүшеліктің коэффициенттерін белгісіз коэффициенттер әдісімен табуға болады.

15.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 15.1: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x}.$$

Шешімі:

a) $y'' - y' - 2y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі $k^2 - k - 2 = 0$, мұндағы $p = -1$, $q = -2$.

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 > 0.$$

Кесте 14.1 бойынша I - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

b) Біртекті теңдеудің дербес шешімін

$$\tilde{y} = Ae^{3x}$$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 2e^{3x}$ функциясында $\alpha = 3$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^{3x}$ біртекті теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$$\tilde{y}' = 3Ae^{3x},$$

$$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$$

берілген $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ теңдеуіне қоямыз:

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 2e^{3x}.$$

Бұдан $4A = 2$, $A = \frac{1}{2}$, онда біртекті теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} e^{3x}.$$

Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

с) Жауабы: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$

Мысал 15.2: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 10y' + 25y = 3e^x.$

Шешімі:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі
 $k^2 - 10k + 25 = 0$ мұндағы $p = -10, q = 25.$

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 0.$$

Кесте 14.1 бойынша II - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{-10}{2} = 5.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (c_1 + xc_2)e^{5x}.$$

б) Біртекті теңдеудің дербес шешімін

$$\tilde{y} = Ae^x$$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 3e^x$ функциясында $\alpha = 1$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2.$

$\tilde{y} = Ae^x$ біртекті теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$$\tilde{y}' = Ae^x,$$

$$\tilde{y}'' = Ae^x$$

берілген $y'' - 10y' + 25y = 3e^x$ теңдеуіне қоямыз:

$$Ae^x - 10Ae^x + 25Ae^x = 3e^x$$

Бұдан $16A = 2$, $A = \frac{1}{8}$, онда біртекті теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = \frac{1}{8} e^x.$$

Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = (c_1 + xc_2)e^{5x} + \frac{1}{8}e^x.$$

с) Жауабы: $y = (c_1 + xc_2)e^{5x} + \frac{1}{8}e^x.$

Мысал 15.3: Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 6y' + 25y = 4e^{-2x}.$

Шешімі:

а) $y'' + 6y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі
 $k^2 + 6k + 25 = 0$ мұндағы $p = 6$, $q = 25$.

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64 = 64i^2.$$

Кесте 14.1 бойынша III - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-6 - \sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6 - 8i}{2} = -3 - 4i,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6 + 8i}{2} = -3 + 4i.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$y = e^{-3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

б) Біртекті теңдеудің дербес шешімін

$$\tilde{y} = Ae^{-2x}$$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 4e^{-2x}$ функциясында $\alpha = -2$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^{-2x}$ біртекті теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$$\tilde{y}' = -2Ae^{-2x},$$

$$\tilde{y}'' = 4Ae^{-2x}$$

берілген $y'' + 6y' + 25y = 4e^{-2x}$ теңдеуіне қоямыз:

$$4Ae^{-2x} - 12Ae^{-2x} + 25Ae^{-2x} = 4e^{-2x}.$$

Бұдан $17A = 4$, $A = \frac{4}{17}$, онда біртекті теңдеудің дербес шешімі

$$\tilde{y} = \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

с) Жауабы: $y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$

15.2 Тест тапсырмалары

1. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' - 5y' + 2y = 3e^{-x}.$

A) $y = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x}$

B) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x + \frac{3}{10}e^{-x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3}e^{2x}$

D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{5}e^{-2x}$

E) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^x + \frac{1}{2}e^{3x}$

2. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{3x}.$$

A) $y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{3} e^{3x}$

B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + 2e^{-2x}$

C) $y = e^{4x} (c_1 + xc_2) + e^{-3x}$

D) $y = e^{2x} (c_1 + xc_2) + 2e^{3x}$

E) $y = e^{-4x} (c_1 + xc_2) - \frac{2}{5} e^{2x}$

3. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$4y'' - 4y' + 5y = e^{2x}.$$

A) $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{5}{6} e^{-2x}$

B) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 4e^{2x}$

C) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{7} e^{-x}$

D) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{13} e^{2x}$

E) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3e^x$

4. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$3y'' - y' - 2y = 2e^{-2x}.$$

A) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^x + \frac{1}{6} e^{-2x}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$

$$C) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x} + 3e^{3x}$$

$$D) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{3}{10} e^{-3x}$$

$$E) y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x + \frac{1}{5} e^{2x}$$

5. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$.

$$A) y = e^{-6x}(c_1 + xc_2) + 2e^x$$

$$B) y = e^{3x}(c_1 + xc_2) + e^x$$

$$C) y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{9x} + \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$D) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$$

$$E) y = e^{-3x}(c_1 + xc_2) + 2e^{2x}$$

6. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 8y' + 5y = 5e^{-3x}$.

$$A) y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2e^{-3x}$$

$$B) y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{6} e^{2x}$$

$$C) y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3e^{3x}$$

$$D) y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{7} e^{-2x}$$

$$E) y = e^x \left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{13} e^{-3x}$$

7. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - 3y' + y = -2e^{2x}$.

A) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^x - \frac{2}{3} e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{2}{5} e^{-2x}$

C) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 5e^{-2x}$

D) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^x + 7e^{2x}$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

8. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $9y'' - 12y' + 4y = 10e^{-x}$.

A) $y = e^{-\frac{4}{3}x} (c_1 + xc_2) + \frac{2}{3} e^{-x}$

B) $y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2) + e^x$

C) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{3}{5} e^{2x}$

D) $y = e^{\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2) + \frac{2}{5} e^{-x}$

E) $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + 4e^x$

9. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 8y' + 5y = 6e^{-4x}$.

- A) $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{2}{7}e^{3x}$
- B) $y = e^{-2x}\left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{36}e^{4x}$
- C) $y = e^{-x}\left(c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2}\right) + \frac{6}{37}e^{-4x}$
- D) $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 6e^{2x}$
- E) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{3}{13}e^{-2x}$

10. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 9y' - 2y = -10e^{3x}$.

- A) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x} + \frac{1}{7}e^{-3x}$
- B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{5}x} + 10e^{3x}$
- C) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{5}x} + \frac{1}{2}e^x$
- D) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{5}x} - \frac{1}{7}e^{3x}$
- E) $y = c_1 e^{-\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5}e^{-x}$

11. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $9y'' - 6y' + y = 8e^x$.

- A) $y = c_1 e^x + c_2 e^x + 3e^x$
- B) $y = e^{\frac{1}{3}x}(c_1 + xc_2) + 2e^x$

- C) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2) + 3e^{2x}$
- D) $y = e^{-\frac{1}{3}x} (c_1 + xc_2) - \frac{1}{4}e^{-2x}$
- E) $y = e^{-x} (c_1 + xc_2) + \frac{2}{5}e^{-x}$

12. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + y = 7e^{4x}$.

- A) $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{3}{16}e^{4x}$
- B) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 5e^{-4x}$
- C) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{7}{17}e^{4x}$
- D) $y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{6}e^{3x}$
- E) $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) - 8e^{-3x}$

13. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - y' - 6y = 11e^{4x}$.

- A) $y = c_1e^{-\frac{3}{2}x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$
- B) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x}$
- C) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{\frac{3}{2}x} + 3e^{-4x}$

$$D) y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x$$

$$E) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + 9e^{-x}$$

14. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 4y' + y = 3e^{-2x}$.

$$A) y = e^{\frac{3}{2}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{3} e^{-2x}$$

$$B) y = e^{\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2) + 2e^{2x}$$

$$C) y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{3} e^{-2x}$$

$$D) y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{5} e^{2x}$$

$$E) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + 7e^{-x}$$

15. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 8y' + 13y = 6e^{-x}$.

$$A) y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 2e^{-x}$$

$$B) y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right) + \frac{2}{3} e^{-x}$$

$$C) y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{1}{3} e^x$$

$$D) y = e^{2x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right) + \frac{2}{3} e^{-2x}$$

$$E) y = e^x \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right) + \frac{1}{5}e^{2x}$$

16. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 7y' + 12y = 2e^x$.

$$A) y = c_1 e^{-8x} + c_2 e^{-6x} + \frac{1}{3}e^x$$

$$B) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x} - \frac{4}{7}e^{-x}$$

$$C) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x} + 3e^{-x}$$

$$D) y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x$$

$$E) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

17. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 10y' + 25y = 6e^{-2x}$.

$$A) y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{3}e^{-4x}$$

$$B) y = e^{5x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{4}e^x$$

$$C) y = e^{-5x}(c_1 + xc_2) + \frac{2}{3}e^{-2x}$$

$$D) y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{5x} + \frac{2}{3}e^{-2x}$$

$$E) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 3e^{-4x}$$

18. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті

дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + 2y = 5e^{3x}$.

A) $y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{3x}$

B) $y = e^{2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - 2e^{2x}$

C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 4e^{-x}$

D) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{2}{11} e^{-2x}$

E) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{5} e^{3x}$

19. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' = 4e^{2x}$.

A) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{9} e^{2x}$

B) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} + \frac{2}{3} e^{-x}$

C) $y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{\frac{5}{3}x} + \frac{4}{5} e^x$

D) $y = c_1 e^{-\frac{5}{3}x} + c_2 e^x + 6e^{-2x}$

E) $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{3}x} + \frac{2}{11} e^{2x}$

20. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + y = 8e^{-x}$.

A) $y = e^{2x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{8} e^{-x}$

- B) $y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{2}e^{-2x}$
- C) $y = e^x(c_1 + xc_2) + 2e^{-x}$
- D) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^x + \frac{4}{9}e^{2x}$
- E) $y = e^{-x}(c_1 + xc_2) + 3e^{3x}$

21. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y' + 29y = 2e^{-4x}$.

- A) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{4x}$
- B) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x) + \frac{2}{29}e^{-4x}$
- C) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + \frac{3}{5}e^{2x}$
- D) $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{2}e^{-x}$
- E) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{2}{5}e^{-4x}$

22. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' - 2y = 4e^{3x}$.

- A) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$
- B) $y = c_1e^{\frac{1}{3}x} + c_2e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-2x}$
- C) $y = c_1e^{-\frac{1}{3}x} + c_2e^{2x} + 4e^{-2x}$

$$D) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{10} e^{3x}$$

$$E) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

23. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 4y' + y = 5e^{2x}$.

$$A) \quad y = e^{2x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{12} e^{2x}$$

$$B) \quad y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x} + 4e^{-3x}$$

$$C) \quad y = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 + xc_2) - \frac{6}{7} e^{-x}$$

$$D) \quad y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) + 3e^x$$

$$E) \quad y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 + xc_2) + \frac{5}{9} e^{2x}$$

24. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y = 10e^{4x}$.

$$A) \quad y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} e^{-x}$$

$$B) \quad y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 5e^{-x}$$

$$C) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2} e^{4x}$$

$$D) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{4x}$$

$$E) y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{3}{8}e^{2x}$$

25. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 6y' - 8y = 6e^x$.

$$A) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x} + \frac{2}{5}e^{-x}$$

$$B) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{4}{5}x} + 2e^x$$

$$C) y = c_1 e^{\frac{4}{5}x} + c_2 e^{2x} + 2e^{2x}$$

$$D) y = c_1 e^{-\frac{4}{5}x} + c_2 e^{2x} - e^{-2x}$$

$$E) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{4}{5}x} + \frac{3}{4}e^x$$

26. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 6y' + 9y = 5e^{-2x}$.

$$A) y = e^{-3x}(c_1 + xc_2) + 5e^{-2x}$$

$$B) y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{9x} + \frac{2}{9}e^{3x}$$

$$C) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{15}e^{2x}$$

$$D) y = e^{3x}(c_1 + xc_2) + 6e^{-3x}$$

$$E) y = e^{-6x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

27. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 4y' + 13y = 9e^{2x}$.

A) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{2} e^{3x}$

B) $y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{2x}$

C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 2e^{-x}$

D) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{4}{5} e^x$

28. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + 5y' + 2y = 7e^{-3x}$.

A) $y = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{2} e^{-3x}$

B) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{2x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + 3e^{-2x}$

D) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x + \frac{3}{5} e^{-x}$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} e^{-3x}$

29. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 2y' + y = 4e^{3x}$.

A) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + 2e^{2x}$

B) $y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) + 4e^x$

C) $y = e^x(c_1 + xc_2) + \frac{1}{2}e^{-x}$

D) $y = e^{-x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{4}e^{3x}$

E) $y = e^{2x}(c_1 + xc_2) - \frac{2}{3}e^{3x}$

30. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 9y = 2e^{-x}$.

A) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{1}{4}e^{-x}$

B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{8}e^{-x}$

C) $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 3e^{2x}$

D) $y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 2e^{-2x}$

E) $y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^x$

31. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $3y'' + y' - 2y = 4e^{4x}$.

A) $y = c_1 e^{-\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5}e^{4x}$

B) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{7}x} + 5e^{3x}$

D) $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^x - \frac{5}{2}e^x$

$$\text{E)} \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{2}{3}x} + \frac{2}{25} e^{4x}$$

32. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 8y' + 16y = -6e^x$.

$$\text{A)} \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3} e^{-x}$$

$$\text{B)} \quad y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) + \frac{4}{5} e^{2x}$$

$$\text{C)} \quad y = e^{4x}(c_1 + xc_2) - \frac{2}{3} e^x$$

$$\text{D)} \quad y = e^{2x}(c_1 + xc_2) - 4e^{-2x}$$

$$\text{E)} \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{13} e^{3x}$$

33. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 8y' + 32y = 3e^{-x}$.

$$\text{A)} \quad y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-x}$$

$$\text{B)} \quad y = e^{4x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{3}{41} e^{-x}$$

$$\text{C)} \quad y = e^{-2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{7}{5} e^x$$

$$\text{D)} \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

$$\text{E)} \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{7} e^{-2x}$$

34. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' + 3y' + y = 7e^{-4x}$.

- A) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3} e^{-4x}$
- B) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + 2e^{3x}$
- C) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5} e^{-4x}$
- D) $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$
- E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{3} e^x$

35. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 8y' + 16y = 6e^{2x}$.

- A) $y = e^{-x}(c_1 + xc_2) - \frac{1}{4} e^{2x}$
- B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{-3x}$
- C) $y = e^{-4x}(c_1 + xc_2) + \frac{1}{6} e^{2x}$
- D) $y = e^x(c_1 + xc_2) + 5e^{3x}$
- E) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$

36. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 9y = 5e^{-2x}$.

- A) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right) + e^x$

$$B) y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{5} e^{-2x}$$

$$C) y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right) + e^{2x}$$

$$D) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$E) y = c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x + \frac{1}{5} e^{-2x}$$

37. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' - 9y' - 2y = 4e^{3x}$.

$$A) y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{\frac{2}{5}x} + 3e^x$$

$$B) y = c_1 e^{-\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

$$C) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{1}{5}x} + 5e^{4x}$$

$$D) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$$

$$E) y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{7} e^{-3x}$$

38. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $9y'' + 6y' + y = 8e^{-x}$.

$$A) y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{4} e^x$$

$$B) y = e^{-\frac{1}{3}x} (c_1 + xc_2) + 2e^{-x}$$

- C) $y = c_1 + c_2 e^x + \frac{7}{10} e^{-x}$
- D) $y = e^{-x} (c_1 + x c_2) + \frac{3}{5} e^{2x}$
- E) $y = c_1 \cos \frac{1}{3} x + c_2 \sin \frac{1}{3} x + 6e^{-x}$

39. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' - 2y' + y = 13e^{-3x}$.

- A) $y = e^{2x} \left(c_1 \cos \frac{3}{4} x + c_2 \sin \frac{3}{4} x \right) + e^{3x}$
- B) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{9} e^{-3x}$
- C) $y = e^{-2x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{6}{5} e^{-x}$
- D) $y = c_1 e^{\frac{1}{5}x} + c_2 e^{\frac{3}{5}x} + \frac{3}{7} e^x$
- E) $y = e^{\frac{1}{5}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{5} x + c_2 \sin \frac{2}{5} x \right) + \frac{1}{4} e^{-3x}$

40. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' + y' - 6y = 3e^{4x}$.

- A) $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{8} e^{4x}$
- B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + \frac{5}{6} e^x$
- C) $y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{3}{2}x} + 4e^{-4x}$

$$D) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{10} e^{4x}$$

$$E) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{3x}$$

41. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 4y' + 4y = -e^{-4x}$.

$$A) y = e^{2x}(c_1 + xc_2) - 5e^x$$

$$B) y = e^{-x}(c_1 + xc_2) + \frac{3}{4}e^{-2x}$$

$$C) y = e^{-2x}(c_1 + xc_2) - \frac{1}{4}e^{-4x}$$

$$D) y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^x + 3e^{3x}$$

$$E) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

42. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 2y' + 10y = 3e^{2x}$.

$$A) y = e^{-x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + e^{-x}$$

$$B) y = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{3}{10}e^{2x}$$

$$C) y = e^{2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + 2e^{3x}$$

$$D) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{8}{3}e^{2x}$$

$$E) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{5}e^x$$

43. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' - 3y' + 2y = 5e^{-x}$.

A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{4}{5} e^x$

B) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{5}{6} e^{-x}$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - \frac{1}{2} e^{2x}$

D) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3} e^x$

E) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 6e^{-2x}$

44. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' + 4y' + y = 9e^{-2x}$.

A) $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{4} e^{-x}$

B) $y = e^x (c_1 + xc_2) + 2e^{2x}$

C) $y = e^{-2x} (c_1 + xc_2) + \frac{3}{2} e^x$

D) $y = e^{-\frac{1}{2}x} (c_1 + xc_2) + e^{-2x}$

E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-2x}$

45. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $2y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$.

$$A) y = e^{-2x} \left(c_1 \cos \frac{2}{3}x + c_2 \sin \frac{2}{3}x \right) + e^{-x}$$

$$B) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x$$

$$C) y = e^{\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right) + \frac{3}{5} e^{2x}$$

$$D) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-2x}$$

$$E) y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right) + e^{3x}$$

46. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 2y' - 35y = 11e^{4x}$.

$$A) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{2}{3} e^{-x}$$

$$B) y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{5x} - e^{4x}$$

$$C) y = c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x + 5e^{2x}$$

$$D) y = c_1 e^{-7x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} e^{4x}$$

$$E) y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{5x} + \frac{1}{3} e^x$$

47. Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $4y'' - 12y' + 9y = e^{3x}$.

$$A) y = e^{\frac{4}{3}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{5} e^{-x}$$

- B) $y = e^{-\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2) + 4e^x$
- C) $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{2} e^{2x}$
- D) $y = e^{\frac{2}{3}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{9} e^{3x}$
- E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{2}{3} e^{3x}$

48. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $5y'' + 8y' + 4y = 5e^{-3x}$.

- A) $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \frac{1}{2} e^{-2x}$
- B) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right) + 2e^{2x}$
- C) $y = e^{-\frac{4}{5}x} \left(c_1 \cos \frac{2}{5}x + c_2 \sin \frac{2}{5}x \right) + \frac{1}{5} e^{-3x}$
- D) $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{2}{3} e^{-3x}$
- E) $y = e^x \left(c_1 \cos \frac{2}{5}x + c_2 \sin \frac{2}{5}x \right) + 8e^x$

49. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:
 $y'' + 10y' + 24y = 2e^{-5x}$.

- A) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-5x}$
- B) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + 6e^{4x}$

- C) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-2x} + \frac{4}{3} e^x$
- D) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{2} e^{-x}$
- E) $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-4x} - 2e^{-5x}$

50. Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$16y'' + 8y' + y = 3e^{-x}.$$

- A) $y = e^{-\frac{1}{4}x} (c_1 + xc_2) + \frac{1}{3} e^{-x}$
- B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + 7e^{4x}$
- C) $y = e^x (c_1 + xc_2) + \frac{1}{6} e^{-x}$
- D) $y = e^{-x} (c_1 + xc_2) + \frac{2}{3} e^{2x}$
- E) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{5} e^x$

16 САН ҚАТАРЫНЫҢ ҚОСЫНДЫСЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Сан қатарының қосындысын» табуға тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

16.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (16.1)$$

сандық қатары берілсін.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы « n » мүшелерінің қосындысы оның n -ші дербес қосындысы деп аталады, да

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

түрінде белгіленеді. Демек,

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

.....

$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ дербес қосындылар тізбегі - сан тізбегі.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ дербес қосындысының шегін қарастырамыз. үш жағдай болуы мүмкін

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ - сан;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ - жоқ.

1) жағдайында $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақты*, ал S саны осы қатардың *қосындысы* деп аталады, яғни бұл жағдайда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

деп аламыз.

2) және 3) жағдайларында $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақсыз* деп аталады. Жинақсыз қатардың қосындысы болмайды.

Геометриялық қатар.

Геометриялық прогрессия берілсін:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

Осы прогрессияның мүшелерінен құрылған

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad (a \neq 0) \quad (16.2)$$

қатары *геометриялық қатар* деп аталады.

Прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

формуласымен есептелінетіні белгілі.

Осы қосындының шегін табайық:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q}.$$

Тұжырым:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \text{ жинақты және } \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q} \text{ егер } |q| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \text{ жинақсыз, егер } |q| \geq 1.$$

Мысал 16.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешімі:

а) қатардың қосындысын табу үшін оның $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ дербес қосындысының шегін қарастырамыз.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

қатарының S_n дербес қосындысы:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Демек, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ берілген қатар жинақты және

қатардың қосындысы $S = 1$.

с) Жауабы: $S = 1$.

Мысал 16.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{8} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешімі:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{8} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{5}{8} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \dots$$

қатары шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған қатар. Тұжырым бойынша оның қосындысын табамыз.

b) Қатардың бірінші мүшесі

$$b_1 = \frac{5}{8},$$

еселігі

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5},$$

қатардың қосындысы

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{24}.$$

с) Жауабы: $S = \frac{25}{24}$.

16.2 Тест тапсырмалары

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) 5
- B) $-\frac{1}{5}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) 2

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) -7
- B) $-\frac{1}{7}$
- C) $\frac{1}{7}$
- D) $-\frac{7}{2}$
- E) $-\frac{1}{2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{5}{2}$
- C) $\frac{1}{5}$
- D) 1

E) $\frac{1}{3}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $-\frac{1}{3}$

B) 2

C) $\frac{1}{3}$

D) 3

E) $-\frac{1}{4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{12}$

B) $\frac{3}{5}$

C) -5

D) $-\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{5}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) -8

B) $-\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $-\frac{1}{2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) 2

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{5}{7}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{4}{15}$

B) $-\frac{4}{15}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $-\frac{2}{15}$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{15}$

B) $\frac{5}{12}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{4}{13}$

E) 2

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{5}{3}$

B) $\frac{3}{5}$

C) -5

D) $-\frac{1}{5}$

E) $-\frac{3}{5}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{5}$
- B) 2
- C) -5
- D) $\frac{5}{2}$
- E) 5

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{2}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{2}{9}$
- B) $-\frac{4}{15}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) $\frac{2}{7}$
- E) $-\frac{9}{2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{18}$
- B) $\frac{3}{2}$
- C) $\frac{1}{2}$

- D) $\frac{4}{3}$
E) 2

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{5}$
B) 2
C) 5
D) $\frac{5}{2}$
E) $\frac{1}{6}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) 7
B) $-\frac{4}{7}$
C) $\frac{3}{4}$
D) 6
E) -2

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 2

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{3}{4}$

D) 4

E) $-\frac{1}{2}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{5}{3}$

B) $\frac{3}{5}$

C) -3

D) $-\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{5}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) 2

C) 5

D) $\frac{1}{7}$

E) 1

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 5

B) $-\frac{1}{5}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{8}$

E) 2

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) 1

D) 2

E) $\frac{1}{5}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) 2

C) 5

D) $\frac{1}{10}$

E) 1

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{5}{3}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{5}$

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{3}{4}$

D) 4

E) $-\frac{1}{2}$

26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{11}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{10}$

E) 1

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{10}{11}$

B) $\frac{21}{72}$

C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{5}{24}$

E) $\frac{4}{5}$

29. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{7}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{4}{3}$

E) 2

30. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{5}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{1}$

E) $\frac{1}{5}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{1}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{10}$

E) $\frac{1}{6}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{4}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{4}{3}$

- B) $\frac{1}{63}$
- C) $\frac{11}{63}$
- D) $\frac{5}{63}$
- E) $\frac{13}{63}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{30}$
- B) $\frac{1}{15}$
- C) -5
- D) $-\frac{1}{7}$
- E) $\frac{1}{14}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{6}{7}$
- B) $\frac{1}{6}$

- C) $\frac{3}{7}$
- D) $\frac{7}{3}$
- E) $\frac{1}{5}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{5}$
- B) 2
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{1}{10}$
- E) $\frac{1}{8}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{5}{3}$
- B) $\frac{3}{5}$
- C) -5
- D) $-\frac{1}{5}$

E) $-\frac{3}{5}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{7}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{7}$

B) $\frac{3}{25}$

C) $\frac{1}{42}$

D) $\frac{1}{36}$

E) 2

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 4

B) $\frac{5}{6}$

C) $\frac{1}{6}$

D) 6

E) 5

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{14}$

B) 2

C) $\frac{1}{18}$

D) $\frac{1}{10}$

E) $\frac{1}{8}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{5}{4}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{2}{7}$

D) $\frac{1}{9}$

E) $\frac{1}{7}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 5

B) $-\frac{1}{5}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{9}$

E) 2

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 7

B) 8

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{5}{7}$

E) 5

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{14}$

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{3}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

A) 8

- B) $\frac{3}{8}$
- C) -5
- D) $-\frac{1}{5}$
- E) $-\frac{3}{5}$

45. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{8}$
- B) $\frac{1}{10}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) 4
- E) $\frac{1}{16}$

46. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{15}$
- B) $\frac{1}{9}$
- C) $\frac{4}{15}$

- D) $\frac{1}{4}$
E) $\frac{2}{13}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{14}$
B) 2
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{10}$
E) $\frac{1}{3}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^{-n}$ қатарының қосындысын табу керек.

- A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{7}$
C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{5}{7}$

49. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{22}$

B) $\frac{1}{11}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{33}$

E) 2

50. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ қатарының қосындысын табу керек.

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{11}$

17 ОҢ ҚАТАРЛАРДЫҢ ЖИНАҚТЫЛЫҚ БЕЛГІЛЕРІ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Оң қатарлардың жинақтылық белгілері» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

17.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты бойынша қатарды жинақтылыққа зерттеу.

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ теңдігінен қатардың жинақтылығы алынбайды.
- 3) Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз болады.
(қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты).

Мысал 17.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша зерттеңіз.

Шешімі:

а) Қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты бойынша қатардың жалпы мүшесінен шек табамыз, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, егер ол нөлден айрықша болса, онда қатар жинақсыз болады.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Демек, қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты

бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ қатары жинақсыз болады.

с) Жауабы: жинақсыз.

Оң қатарлардың жинақтылығының салыстыру белгілері
I Салыстыру белгісі.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін.

Егер кез келген $n \in N$ үшін

$$a_n \leq b_n \tag{17.1}$$

теңсіздігі орынды болса, онда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақты} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақты},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақсыз}.$$

Үлгі қатарлар:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0 - \text{геометриялық қатары} \begin{cases} |q| < 1 \text{ болса жинақты} \\ |q| \geq 1 \text{ болса жинақсыз} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} - \text{жалпы гармониялық қатары} \begin{cases} \lambda > 1 \text{ болса жинақты} \\ \lambda \leq 1 \text{ болса жинақсыз} \end{cases}$$

Нұсқау: *I салыстыру белгісі* қатардың жалпы мүшесі мен оның құрамындағы жинақтылығы белгілі үлгі қатарларды салыстыра алған жағдайда қолдануға қолайлы.

Мысал 17.2.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ қатарын *I салыстыру белгісі* бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

a) *I салыстыру белгісі* бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары беріліп, (17.1) шарты бойынша салыстырылуы қажет.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ - есептің шартындағы берілген қатар,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ - оның құрамындағы геометриялық қатар

еселігі $|q| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$. болғандықтан жинақты қатар.

(17.1) шарты бойынша

$$\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Бұдан берілген қатар I салыстыру белгісі бойынша жинақты, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n} - \text{жинақты} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \text{жинақты}.$$

с) Жауабы: жинақты.

Мысал 17.2.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$ қатарын I салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) I салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары беріліп, (17.1) шарты бойынша салыстырылуы қажет.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$ - есептің шартындағы берілген қатар,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - оның құрамындағы гармониялық қатарда $\lambda = 1$

болғандықтан жинақсыз қатар.

(17.1) шарты бойынша

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n} > \frac{1}{n}.$$

Бұдан берілген қатар I салыстыру белгісі бойынша жинақсыз, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақсыз}.$$

с) Жауабы: жинақсыз.

II Салыстыру белгісі (Шектік салыстыру белгісі).

1) Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$ және k - сан болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

оң қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады.

2) Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақты} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақты},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақсыз}.$$

3) Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақты} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақты},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{жинақсыз}.$$

Нұсқау: *II салыстыру белгісі* қатардың жалпы мүшесі көпмүшеліктердің қатынасы немесе көпмүшеліктердің түбірлерінің қатынасы түрінде берілсе қолдануға қолайлы.

Мысал 17.3.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n}$ қатарын *II салыстыру белгісі* бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

a) *II салыстыру белгісі* бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары беріліп, (1)-(3) шарттарының біреуі бойынша салыстырылуы қажет.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n}$ - есептің шартындағы берілген қатар,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - оның құрамындағы гармониялық қатарда $\lambda = 1$

болғандықтан жинақсыз қатар.

(1) шарты бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0.$$

Бұдан II салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз.

Олай болса гармониялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n} - \text{жинақсыз.}$$

с) Жауабы: жинақсыз.

Мысал 17.3.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^n - 5}$ қатарын II салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) II салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары беріліп, (1)-(3) шарттарының біреуі бойынша салыстырылуы қажет.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^n - 5}$ - есептің шартындағы берілген қатар,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ - оның құрамындағы геометриялық қатар

еселігі $|q| = \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} < 1$ болғандықтан жинақты қатар.

шарты бойынша

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3 \cdot 4^n - 5}}{\frac{1}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3 \cdot 4^n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - \frac{5}{4^n}} = \frac{1}{3 - \frac{5}{\infty}} = \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Бұдан II салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^n - 5}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз.

Олай болса геометриялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \text{жинақты} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^n - 5} - \text{жинақты.}$$

с) Жауабы: жинақты.

Даламбер белгісі.

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ болса, онда

$D < 1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты,

$D > 1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $D = 1$ болғанда Даламбер белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Даламбер белгісін қатардың жалпы мүшесінің құрамында a^n немесе $n!$ түріндегі көбейткіштер бар жағдайда қолдану қолайлы болады.

Мысал 17.4.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) Қатардың n -ші мүшесі a_n берілген, оның $n+1$ -ші мүшесін a_{n+1}

белгілеп, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегін есептейміз де оны 1 санымен салыстырамыз.

б) $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

демек, $D = 0 < 1$.

Олай болса Даламбер белгісі бойынша қатар жинақты.

с) Жауабы: жинақты.

Мысал 17.4.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) Қатардың n -ші мүшесі a_n берілген, оның $n+1$ -ші мүшесін a_{n+1} белгілеп, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегін есептейміз де оны 1 санымен салыстырамыз.

$$b) a_n = \frac{3^n}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n^2}{3^n (n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n^2}{3^n (n+1)^2} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = 3 \cdot 1 = 3, \text{ демек, } D = 3 > 1.$$

Олай болса Даламбер белгісі бойынша қатар жинақсыз.

с) Жауабы: жинақсыз.

Кошидің радикалдық белгісі.

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K$ болса, онда

$K < 1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты,

$K > 1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $K = 1$ болғанда Коши белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесінің n дәрежелі түбірі оңай алынатын жағдайларда қолдану тиімді.

Мысал 17.5.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4} \right)^n$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

a) Қатардың n -ші мүшесі a_n берілген, оның $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ шегін есептейміз де оны 1 санымен салыстырамыз.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{5 + \frac{4}{n}} = \frac{2 + \frac{3}{\infty}}{5 + \frac{4}{\infty}} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5},$$

демек, $D = \frac{2}{5} < 1$.

Олай болса Кошидің радикалдық белгі бойынша қатар жинақты.

c) Жауабы: жинақты.

Мысал 17.5.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

a) Қатардың n -ші мүшесі a_n берілген, оның $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ шегін есептейміз де оны 1 санымен салыстырамыз.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

демек, $D = e > 1$.

Олай болса Кошидің радикалдық белгі бойынша қатар жинақсыз.

c) Жауабы: жинақсыз.

Кошидің интегралдық белгісі

Егер

1. $a_n > 0, \forall n \in N$;
2. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$;
3. $f(x)$ функциясы $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі;
4. $\forall n \in N \quad f(n) = a_n$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары мен $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ дәйексіз интегралының екеуі де жинақты немесе жинақсыз болады.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесі туындылайтын функциядан интеграл табу оңай болған жағдайларда қолдану тиімді.

Ескерту: $x = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) нүктелерінде $f(n)$ - ге тең $f(x)$ функциясын тұрғызу үшін, $f(n)$ функциясының натурал аргументін, яғни n - ді үздіксіз аргумент x - ке ауыстырамыз.

Мысалы:

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x(x+1)};$$

$$f(n) = \frac{1}{n^2} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Мысал 17.6.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) Қатардың n -ші мүшесі $a_n = f(n)$ берілген, онда $f(x)$ функциясын белгілейміз, бұл функция $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі функция болу керек.

б) $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ болғандықтан, $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ болады. Бұл функция $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі функция.

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln \ln(b+1) - \ln \ln 2] = \infty.$$

Демек, дәйексіз интеграл жинақсыз, онда берілген қатар да жинақсыз.

с) Жауабы: жинақсыз.

Мысал 17.6.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

а) Қатардың n -ші мүшесі $a_n = f(n)$ берілген, онда $f(x)$ функциясын белгілейміз, бұл функция $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі функция болу керек.

б) $f(n) = \frac{n}{e^{n^2}}$ болғандықтан, $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ болады. Бұл функция $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі функция.

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{x}{e^{x^2}} dx = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x^2} d(-x^2) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-x^2}}{2} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2e^{b^2}} + \frac{1}{2e} \right) = \frac{1}{2e}.$$

Демек, дәйексіз интеграл жинақты, онда берілген қатар да жинақты.

с) Жауабы: жинақты.

17.1 Тест тапсырмалары

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n+1}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша зерттеңіз.

- А) дербес қосындысының шегі жоқ
- В) шартты жинақты
- С) жинақты
- Д) жинақсыз
- Е) абсолютті жинақты

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) абсолютті жинақты
- В) жинақсыз
- С) жинақты
- Д) шартты жинақты
- Е) дербес қосындысының шегі жоқ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) жинақты

- В) абсолютті жинақты
- С) дербес қосындысының шегі жоқ
- Д) шартты жинақты
- Е) жинақсыз

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) шартты жинақты
- В) жинақсыз
- С) абсолютті жинақты
- Д) дербес қосындысының шегі жоқ
- Е) жинақты

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\ln(5n-3)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) жинақсыз
- В) жинақты
- С) абсолютті жинақты
- Д) дербес қосындысының шегі жоқ
- Е) шартты жинақты

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n+3}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша

зерттеңіз.

- А) жинақсыз
- В) жинақты
- С) абсолютті жинақты
- Д) дербес қосындысының шегі жоқ
- Е) шартты жинақты

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- А) жинақты

- В) шартты жинақты
- С) жинақсыз
- Д) дербес қосындысының шегі жоқ
- Е) абсолютті жинақты

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) жинақты
- В) абсолютті жинақты
- С) шартты жинақты
- Д) дербес қосындысының шегі жоқ
- Е) жинақсыз

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) жинақсыз
- В) шартты жинақты
- С) дербес қосындысының шегі жоқ
- Д) жинақты
- Е) абсолютті жинақты

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(2n+1)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) жинақты
- В) шартты жинақты
- С) дербес қосындысының шегі жоқ
- Д) жинақсыз
- Е) абсолютті жинақты

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{3n-8}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- А) абсолютті жинақты
- В) жинақты

- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) шартты жинақты
- C) жинақсыз
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^4 + 3}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln(3n+4)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) дербес қосындысының шегі жоқ
- C) жинақсыз

- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n+2}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) абсолютті жинақты

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+2}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақты
- C) жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) дербес қосындысының шегі жоқ
- C) абсолютті жинақты
- D) жинақсыз
- E) шартты жинақты

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n+5}$ қатарын жинақтылықтың қажетті шарты бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) шартты жинақты
- B) жинақты
- C) жинақсыз
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) абсолютті жинақты

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^3+7}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) шартты жинақты
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) абсолютті жинақты
- E) жинақсыз

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) дербес қосындысының шегі жоқ
- B) жинақсыз
- C) абсолютті жинақты
- D) жинақты
- E) шартты жинақты

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(7n+3)\ln(7n+3)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) жинақсыз
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{12n+3}$ қатарын қажетті шарты бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) шартты жинақты
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) жинақсыз
- E) абсолютті жинақты

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^2 + 8}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) абсолютті жинақты
- E) шартты жинақты

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + 2n) \ln(3 + 2n)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) жинақсыз
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n + 5}$ қатарын қажетті шарты бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) жинақсыз
- C) абсолютті жинақты
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) дербес қосындысының шегі жоқ
- B) жинақты
- C) жинақсыз
- D) абсолютті жинақты
- E) шартты жинақты

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9n^3 + 5}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 3}{5n + 6}$ қатарын қажетті шарты бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) абсолютті жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n^2 - 7}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) дербес қосындысының шегі жоқ
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)\ln(3+8n)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) шартты жинақты
- C) жинақсыз
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) абсолютті жинақты

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n-6}$ қатарын қажетті шарты бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) шартты жинақты
- B) жинақсыз
- C) абсолютті жинақты
- D) жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) жинақсыз
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{7n^3+1}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша

жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақты
- C) жинақсыз
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+8)\ln(n+8)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі

бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақсыз
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) шартты жинақты

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2n-6}$ қатарын қажетті шарты бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) жинақсыз
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ қатарын Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа

зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) дербес қосындысының шегі жоқ

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{3n^2 + 1}$ қатарын салыстыру белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) жинақсыз

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{13^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын Кошидің радикалдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) дербес қосындысының шегі жоқ
- E) абсолютті жинақты

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7) \ln(2n+7)}$ қатарын Кошидің интегралдық белгісі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) дербес қосындысының шегі жоқ
- D) абсолютті жинақсыз
- E) шартты жинақты

18 ТАҢБАСЫ АУЫСПАЛЫ ҚАТАРЛАРДЫҢ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығы» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

18.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad (18.1)$$

мұндағы $a_n > 0$ барлық $n \in \mathbb{N}$, (яғни оң және теріс мүшелері алма-кезек орналасқан).

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардың жинақтылығының жеткілікті белгісі - *Лейбниц белгісі*.

Теорема 18.1 (Лейбниц белгісі). (1) таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар жинақты, егер:

1) Қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларының тізбегі монотонды кемімелі

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n > \dots$$

болса;

2) Қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Сондай-ақ (1) қатарының S қосындысы

$$0 < S < a_1 \quad (18.2)$$

шартын қанағаттандырады.

Лейбниц белгісінің екі шарты да орындалса, онда қатар *жинақты*, ал оның бірі орындалмай қалса қатар *жинақсыз*. Лейбниц белгісі бойынша жинақты қатарды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттейміз.

Ескерту: Төмендегі екі анықтама бойынша таңбасы ауыспалы қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан (модулінен) құралған

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots + |a_n| + \dots \quad (18.2)$$

қатарын құраймыз, оны оң қатарлардың жинақтылық белгілерінің бірімен зерттейміз (Салыстыру белгілері, Даламбер белгісі, Кошидің радикалдық және интегралдық белгілері), бұдан қатардың абсолютті немесе шартты жинақты болуын анықтаймыз.

Таңбасы ауыспалы қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы.

- Таңбасы ауыспалы қатар *абсолютті жинақты* деп аталады, егер оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақты болса.
- Таңбасы ауыспалы қатар *шартты жинақты* деп аталады, егер қатардың өзі жинақты, ал оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақсыз болса.

Мысал 18.1: Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Шешімі:

а) Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болса, Лейбниц белгісінің шарттарын тексереміз. Лейбниц белгісінің шарттары орындалса, онда қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның тым болмаса біреуі орындалмаса, онда қатар жинақсыз. Лейбниц белгісі бойынша жинақты қатарды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттейміз.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ таңбасы алма-

кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармониялық қатар жинақсыз.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ қатары шартты жинақты.

с) Жауабы: шартты жинақты.

Мысал 18.2: Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Шешімі:

а) Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болса, Лейбниц белгісінің шарттарын тексереміз. Лейбниц белгісінің шарттары орындалса, онда қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның тым болмаса біреуі орындалмаса, онда қатар жинақсыз. Лейбниц белгісі бойынша жинақты қатарды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттейміз.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} + \dots$ таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

қатарын зерттейік.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Бұдан $D = 0 < 1$, демек қатар Даламбер белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ жинақты қатар.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ қатары абсолютті жинақты.

с) Жауабы: абсолютті жинақты.

Мысал 18.3: Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n-8}.$$

Шешімі:

а) Берілген қатар таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар болса, Лейбниц белгісінің шарттарын тексереміз. Лейбниц белгісінің шарттары орындалса, онда қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның тым болмаса біреуі орындалмаса, онда қатар жинақсыз. Лейбниц белгісі бойынша жинақты қатарды абсолютті немесе шартты жинақтылыққа зерттейміз.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n-8} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{6} - \frac{3}{5} + \dots - \frac{(-1)^{n+1} n}{n-8} + \dots$ таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

$$1) \frac{1}{7} < \frac{1}{3} < \frac{3}{5} < \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{8}{n}} = 1 \neq 0$$

Лейбниц белгісінің тым болмаса бір шарты орындалмаса, онда қатар жинақсыз, бізде екі шарты да орындалмаған.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n-8}$ қатары жинақсыз.

с) Жауабы: жинақсыз.

18.2 Тест тапсырмалары

1. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

2. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}$.

А) жинақсыз

В) жинақты

С) шартты жинақты

Д) абсолютті жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

3. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$.

А) жинақсыз

В) жинақты

С) шартты жинақты

Д) абсолютті жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

4. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$.

А) абсолютті жинақты

В) жинақсыз

С) жинақты

Д) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

5. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$.

А) шартты жинақты

В) жинақты

С) жинақсыз

Д) абсолютті жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

6. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

А) жинақсыз

В) жинақты

- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

7. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

8. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 + 1}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

9. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n+1}}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

10. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$.

- A) абсолютті де, шартты да жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

11. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n+5}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

12. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) абсолютті жинақты
- D) абсолютті де, шартты да жинақты
- E) шартты жинақты

13. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{5^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

14. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+7}$.

- A) абсолютті де, шартты да жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

15. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

- A) шартты жинақты
- B) жинақты
- C) жинақсыз

- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

16. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

17. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

18. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақты
- D) жинақсыз
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

19. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{12^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті жинақты
- C) абсолютті де, шартты да жинақты
- D) жинақты
- E) шартты жинақты

20. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2 + 1}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

21. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+7}}$.

- A) абсолютті де, шартты да жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақсыз
- D) жинақты
- E) шартты жинақты

22. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{8^n}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

23. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+7}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) абсолютті жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

24. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)!}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

25. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6^n}$.

- A) жинақсыз
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) жинақты

26. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2 + 2}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақсыз
- D) жинақты
- E) шартты жинақты

27. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$.

- A) шартты жинақты
- B) жинақты
- C) жинақсыз
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

28. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6^n}$.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақсыз
- D) жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

29. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n+8}$.

- A) шартты жинақты
- B) жинақты
- C) абсолютті де, шартты да жинақты
- D) жинақсыз

Е) абсолютті жинақты

30. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

А) жинақсыз

В) жинақты

С) шартты жинақты

Д) абсолютті жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

31. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{8^n}$.

А) жинақсыз

В) абсолютті жинақты

С) жинақты

Д) шартты жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

32. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2 + 8}$.

А) абсолютті де, шартты да жинақты

В) абсолютті жинақты

С) жинақсыз

Д) жинақты

Е) шартты жинақты

33. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+9}}$.

А) шартты жинақты

В) жинақты

С) жинақсыз

Д) абсолютті жинақты

Е) абсолютті де, шартты да жинақты

34. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

А) жинақсыз

В) абсолютті жинақты

- С) жинақты
- Д) шартты жинақты
- Е) абсолютті де, шартты да жинақты

35. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{7n+2}$.

- А) жинақсыз
- В) жинақты
- С) шартты жинақты
- Д) абсолютті жинақты
- Е) абсолютті де, шартты да жинақты

36. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$.

- А) жинақсыз
- В) жинақты
- С) шартты жинақты
- Д) абсолютті жинақты
- Е) абсолютті де, шартты да жинақты

37. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{13^n}$.

- А) абсолютті де, шартты да жинақты
- В) жинақсыз
- С) абсолютті жинақты
- Д) жинақты
- Е) шартты жинақты

38. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+3}$.

- А) жинақсыз
- В) жинақты
- С) шартты жинақты
- Д) абсолютті жинақты
- Е) абсолютті де, шартты да жинақты

39. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)}}$.

- A) абсолютті де, шартты да жинақты
- B) шартты жинақты
- C) жинақты
- D) жинақсыз
- E) абсолютті жинақты

40. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi}{7^n}$.

- A) абсолютті де, шартты да жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті жинақты

41. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{9n - 2}$.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақты
- D) жинақсыз
- E) абсолютті жинақты

42. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

43. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{e^n}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) абсолютті де, шартты да жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) шартты жинақты

44. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + 3}$.

- A) шартты жинақты
- B) жинақсыз
- C) жинақты
- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

45. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n+3}}$.

- A) абсолютті жинақты
- B) жинақсыз
- C) абсолютті де, шартты да жинақты
- D) жинақты
- E) шартты жинақты

46. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{9^n}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) абсолютті жинақты
- D) шартты жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

47. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5}$.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті де, шартты да жинақты
- C) жинақсыз
- D) жинақты
- E) абсолютті жинақты

48. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+4)!}$.

- A) жинақсыз
- B) жинақты
- C) шартты жинақты

- D) абсолютті жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

49. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{10^n}$.

- A) шартты жинақты
- B) жинақсыз
- C) абсолютті жинақты
- D) жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

50. Таңбасы ауыспалы қатарды жинақтылыққа зерттеңіз: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + 9}$.

- A) шартты жинақты
- B) абсолютті жинақты
- C) жинақсыз
- D) жинақты
- E) абсолютті де, шартты да жинақты

19 ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРДЫҢ ЖИНАҚТЫЛЫҚ ОБЛЫСЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Дәрежелік қатардың жинақтылық облысын» табуға арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

19.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

түрінде берілген функциялық қатар *дәрежелік қатар* деп аталады, мұндағы $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - нақты сандар.

Абель теоремасы.

1. Егер дәрежелік қатар $x = x_0$ болғанда жинақты болса, онда $|x-a| < |x_0-a|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар *жинақты* болады.

2. Егер дәрежелік қатар $x = x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда $|x-a| > |x_1-a|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар *жинақсыз* болады.

Абель теоремасынан мынадай тұжырым жасауға болады: Кез келген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы ретінде $a-R < x < a+R$ интервалы алынады, мұндағы R - *жинақтылық радиусы*, ал $(a-R, a+R)$ *жинақтылық интервалы* деп аталады.

$x = a \pm R$ нүктелерінде қатардың жинақтылығын тексеру үшін дәрежелік қатарға $x = a \pm R$ мәндерін қойғанда пайда болатын сандық қатарды тексеру жеткілікті. Егер

- $R = 0$ болса, онда дәрежелік қатар тек $x = a$ нүктесінде жинақты болады;
- $R = \infty$ болса, онда дәрежелік қатар x -тің кез келген мәнінде жинақты болады.

Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (19.1)$$

немесе

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \quad (19.2)$$

формулаларымен есептеледі.

9.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 19.1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі:

а) Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу (19.1) формуласын қолданамыз.

б) $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

яғни $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ жинақтылық облысы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

1) $x = -\frac{1}{3}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ қатары жинақты, себебі

Лейбниц белгісінің шарттары орындалады:

а) $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

2) $x = \frac{1}{3}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатар жинақсыз (Дирихле қатары $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Олай болса, жинақтылық облысы $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$.

с) Жауабы: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Мысал 19.2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ қатарының жинақтылық облысын анықтау

керек.

Шешімі:

a) Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу (19.2) формуласын қолданамыз.

b) $a_n = \frac{1}{2^n n^2};$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n^2}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 2,$$

яғни $(-2; 2)$ жинақтылық облысы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

1) $x = -2$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ қатары абсолютті жинақты болады, себебі мүшелерінің абсолюттік шамасы бойынша алынған қатар жинақты.

2) $x = 2$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатарда жинақты (Дирихле қатары, $\alpha = 2 > 1$).

Олай болса, жинақтылық облысы $-2 \leq x \leq 2$.

c) Жауабы: $[-2; 2]$.

19.2 Тест тапсырмалары

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^n \sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-10; 10)$

B) $(-10; 10)$

C) $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$

D) $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right]$

Е) $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-1; 2]$

B) $(-1; 1)$

C) $(0; 2)$

D) $[0; 2)$

E) $[0; 2]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n^3 + 1}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-\infty; +\infty)$

B) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$

C) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

D) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

E) $(-1; 1)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^5}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-1; 2]$

B) $(-2; 2)$

C) $(0; 2)$

D) $[0; 2)$

E) $[0; 2]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{7^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-1; 7)$

- B) $\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$
- C) $(-7; 7)$
- D) $[-7; 7]$
- E) $(-\infty; +\infty)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(0; 2)$
- B) $(-1; 2)$
- C) $(-2; 2)$
- D) $[0; 2]$
- E) $[0; 2)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- C) $[-2; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[1; 3)$
- B) $(-3; 3)$
- C) $[-1; 3]$
- D) $(1; 3)$

Е) [1; 3]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^2}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) (-2; 2]

B) [0; 2]

C) (1; 2)

D) [-1; 1)

E) (-1; 1)

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (x-2)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) [-1; 3]

B) (-3; 3)

C) (1; 3)

D) [1; 3)

E) [1; 3]

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n^2 + 7}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

B) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

C) [-3; 3)

D) (-3; 3)

E) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) [0; 2)

B) (-2; 2)

- C) (0; 2)
- D) (-2; 2]
- E) [0; 2]

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^4}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) (-2; 2]
- B) [0; 2]
- C) (1; 2)
- D) [-1; 1]
- E) (-1; 1)

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) [-1; 3]
- B) (-3; 3)
- C) (1; 3)
- D) [1; 3)
- E) [1; 3]

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$
- B) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- C) [-3; 3)
- D) (-3; 3)
- E) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^5}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) [-1; 3]

- B) $(-3; 3)$
- C) $(1; 3)$
- D) $[1; 3)$
- E) $[1; 3]$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{11^n \sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-\infty; +\infty)$
- B) $\left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right]$
- C) $\left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$
- D) $\left(-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$
- E) $[-11; 11)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-4; 2)$
- B) $(2; 4)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 4]$
- E) $[0; 4]$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^3 + 1}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-5; 5)$
- B) $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$
- C) $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$
- D) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$
- E) $(-1; 5)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[0; 2)$
- B) $(-2; 2)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $[0; 2]$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[5]{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-2; 2]$
- B) $[0; 2]$
- C) $(1; 2)$
- D) $[-1; 1)$
- E) $(-1; 1)$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-5; 3]$
- B) $(-3; 5)$
- C) $(3; 5)$
- D) $[1; 3)$
- E) $[1; 5]$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^n}{n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-9; 9)$
- B) $\left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$
- C) $\left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right]$

D) $\left(-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$

E) $(-1; 9)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-1; 3]$

B) $(-3; 3)$

C) $(1; 3)$

D) $[1; 3)$

E) $[1; 3]$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-5; 3]$

B) $(-3; 5)$

C) $(3; 5)$

D) $[-5; 5)$

E) $[-5; 5]$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[0; 2)$

B) $(-2; 2)$

C) $(0; 2)$

D) $(-2; 2]$

E) $[0; 2]$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-6; 6)$

B) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$

C) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$

D) $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$

E) $(-1; 6)$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[0; 2)$

B) $(-2; 2)$

C) $(0; 2)$

D) $(-2; 2]$

E) $[0; 2]$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n+1}n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-5; 5)$

B) $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

C) $[-5; 5)$

D) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

E) $(-1; 5)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-2; 2]$

B) $[0; 2]$

C) $(1; 2)$

D) $[-1; 1)$

E) $(0; 2)$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-10; 10)$
- B) $(-10; 10)$
- C) $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$
- D) $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right]$
- E) $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^3}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-1; 3]$
- B) $(-3; 3)$
- C) $(1; 3)$
- D) $[1; 3)$
- E) $[1; 3]$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-2; 2)$
- B) $(-2; 2)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $[0; 2]$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-2)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[-1; 3]$
- B) $(-3; 3)$
- C) $(1; 3)$
- D) $[1; 3)$
- E) $[1; 3]$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

C) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

D) $(-2; 2]$

E) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-1; 3]$

B) $(-3; 3)$

C) $(1; 3)$

D) $[1; 3)$

E) $[1; 3]$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 4^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-4; 4)$

B) $(-2; 4)$

C) $(0; 2)$

D) $(-4; 4]$

E) $[0; 4]$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} (x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-2; 2)$

B) $(-2; 2)$

C) $(0; 2)$

D) $(-2; 2]$

E) $[0; 2]$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $(-5; 5)$

B) $\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

C) $[-5; 5)$

D) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

E) $(-1; 5)$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[0; 2)$

B) $(-2; 2)$

C) $(0; 2)$

D) $(-2; 2]$

E) $[0; 2]$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-3; 3]$

B) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

C) $[-3; 3)$

D) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

E) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

A) $[-1; 3]$

- B) $(-3; 3)$
- C) $(1; 3)$
- D) $[1; 3)$
- E) $[1; 3]$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{n^2 + 1}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-1; 7)$
- B) $\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$
- C) $(-7; 7)$
- D) $\left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right]$
- E) $(-\infty; +\infty)$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[0; 2)$
- B) $(-2; 2)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $[0; 2]$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{8^n n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-8; 8)$
- B) $[-8; 8)$
- C) $\left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$
- D) $\left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$
- E) $(-1; 8)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[0; 2)$
- B) $(-2; 2)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $[0; 2]$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-\infty; +\infty)$
- B) $\left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right]$
- C) $\left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$
- D) $\left(-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$
- E) $[-11; 11]$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^4}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[0; 2)$
- B) $(-2; 2)$
- C) $(0; 2)$
- D) $(-2; 2]$
- E) $[0; 2]$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{6^n}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $(-6; 6)$
- B) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$

- C) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$
D) $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$
E) $(-1; 6)$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} (x-1)^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

- A) $[0; 2)$
B) $(-2; 2)$
C) $(0; 2)$
D) $(-2; 2]$
E) $[0; 2]$

20 ФУНКЦИЯНЫ МАКЛОРЕН ҚАТАРЫНА ЖІКТЕУ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Функцияны Маклорен қатарына жіктеу» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

20.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

x_0 нүктесінің аймағында анықталған және осы аймақта $(n+1)$ -ші ретті туындылары бар $f(x)$ функциясы үшін *Тейлор формуласы* орындалады:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

мұндағы

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x) - \text{қалдық мүшесі (Лагранж}$$

түріндегі), c санын

$$c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

түріндегі жазуға болады.

Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің аймағында кез келген ретті туындысы бар (яғни шексіз дифференциалданатын) және $n \rightarrow \infty$ қалдық мүшесі $R_n \rightarrow 0$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$), онда Тейлор формуласынан *Тейлор қатары* деп аталатын $f(x)$ функциясының $(x-x_0)$ дәрежесі бойынша жіктелуі алынады:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned} \quad (20.1)$$

Егер $x_0 = 0$ болса, онда

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (20.2)$$

Маклорен қатарын аламыз.

Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі:

- 1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty)$
- 2) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty)$
- 3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty)$
- 4) $\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty)$
- 5) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty)$
- 6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (-1 \leq x \leq 1)$
- 7) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$
- 8) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; +1]$
- 9) $\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$
 $x \in [-1; +1];$
- 10) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} x^n =$
 $= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} x^n + \dots,$

$$\begin{cases} [-1; 1], & \alpha \geq 0 \\ (-1; 1], & -1 < \alpha < 0 \\ (-1; 1), & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Мысал 20.1: $y = 5^x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

а) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!} x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

б) $y = 5^x$ функциясының $x_0 = 0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$$\begin{aligned}
y' &= (5^x)' = 5^x \ln 5, & y'(0) &= \ln 5; \\
y'' &= (5^x \ln 5)' = 5^x \ln^2 5, & y''(0) &= \ln^2 5; \\
y''' &= (5^x \ln^2 5)' = 5^x \ln^3 5, & y'''(0) &= \ln^3 5; \\
y^{IV} &= (5^x \ln^3 5)' = 5^x \ln^4 5, & y^{IV}(0) &= \ln^4 5.
\end{aligned}$$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$5^x = 1 + x \ln 5 + \frac{x^2 \ln^2 5}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 5}{3!} + \frac{x^4 \ln^4 5}{4!} + \dots$$

x^4 алдындағы коэффициент $\frac{\ln^4 5}{4!} = \frac{\ln^4 5}{24}$ болады.

с) Жауабы: $\frac{\ln^4 5}{24}$.

Мысал 20.2: $y = x \sin 5x$ функциясын Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

а) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

б) $y = x \sin 5x$ функциясының $x_0 = 0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$$y' = (x \sin 5x)' = \sin 5x + 5x \cos 5x, \quad y'(0) = 0;$$

$$y'' = (\sin 5x + 5x \cos 5x)' = 5 \cos 5x + 5 \cos 5x - 25x \sin 5x, \quad y''(0) = 10;$$

$$y''' = (10 \cos 5x - 25x \sin 5x)' = -50 \sin 5x - 25 \sin 5x - 125x \cos 5x,$$

$$y'''(0) = 0.$$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$x \sin 5x = 0 + 0 + \frac{10x^2}{2!} + \frac{0}{3!}x^3 + \dots$$

x^3 алдындағы коэффициент $\frac{0}{3!} = 0$ болады.

с) Жауабы: 0.

20.2 Тест тапсырмалары

1. $y = \cos 2x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{3}$

2. $y = x \sin x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{4}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) 1

E) $\frac{2}{3}$

3. $y = x^4 + 2x^2 - 5x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $-\frac{4}{3}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) 1

E) $\frac{2}{3}$

4. $y = \sqrt{1+x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 1

B) $\frac{1}{4}$

C) $-\frac{1}{8}$

D) 0

E) $\frac{2}{3}$

5. $y = xe^{-2x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $-\frac{4}{3}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) 1

E) 2

6. $y = \cos x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{24}$

- C) $-\frac{1}{12}$
- D) $-\frac{1}{16}$
- E) $\frac{2}{3}$

7. $y = \sin 2x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $-\frac{3}{2}$
- D) 1
- E) $-\frac{4}{3}$

8. $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 5
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 3
- D) $\frac{1}{8}$
- E) 2

9. $y = \sqrt{1 + x^2}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 1

- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{9}$
- D) 0
- E) $\frac{2}{3}$

10. $y = 2 - e^{2x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $-\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) $-\frac{1}{4}$

11. $y = x \cos x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 1
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) 0
- E) $\frac{1}{2}$

12. $y = 2 \sin x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{12}$

C) 2

D) $\frac{1}{8}$

E) 4

13. $y = 2x^4 - 3x^2 + x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 1

B) $\frac{1}{4}$

C) 2

D) 0

E) $\frac{2}{3}$

14. $y = \sqrt{2+x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 1

B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $-\frac{1}{16\sqrt{2}}$

D) 0

Е) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

15. $y = xe^{2x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

В) 2

С) 5

Д) $\frac{1}{8}$

Е) 4

16. $y = \cos 3x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) 0

В) $\frac{1}{24}$

С) $-\frac{1}{2}$

Д) $-\frac{5}{16}$

Е) $\frac{27}{8}$

17. $y = \sin 3x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) 0

В) $\frac{1}{4}$

- C) $-\frac{9}{2}$
- D) 1
- E) $-\frac{2}{3}$

18. $y = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) 3
- C) $\frac{2}{3}$
- D) 2
- E) $\frac{1}{4}$

19. $y = \sqrt{4 + x^2}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 1
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $-\frac{1}{9}$
- D) 0
- E) $\frac{2}{3}$

20. $y = 5 + e^{-2x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $-\frac{4}{3}$

D) 2

E) $\frac{1}{4}$

21. $y = x \cos x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 1

B) $\frac{1}{4}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) 0

E) $\frac{2}{3}$

22. $y = x \sin 2x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{4}$

C) 2

D) 1

Е) $\frac{2}{3}$

23. $y = 4x^3 - x^2 + 2x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

В) 6

С) $\frac{2}{3}$

Д) 4

Е) $\frac{1}{4}$

24. $y = \sqrt{5+x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\sqrt{5}$

В) $\frac{1}{4}$

С) $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Д) 0

Е) $-\frac{2}{40\sqrt{5}}$

25. $y = xe^x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) $\frac{1}{4}$

26. $y = \cos 4x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{32}{3}$
- B) $\frac{1}{24}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $-\frac{1}{4}$
- E) $\frac{3}{32}$

27. $y = \sin 4x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0
- B) $\frac{1}{24}$
- C) $-\frac{1}{32}$

D) $-\frac{1}{4}$

E) $-\frac{32}{3}$

28. $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $\frac{3}{4}$

B) 2

C) $\frac{2}{3}$

D) 1

E) $\frac{1}{4}$

29. $y = \sqrt{2 + x^2}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 1

B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) 0

E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

30. $y = 3 - e^{-2x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $-\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $-\frac{4}{3}$

D) 2

E) $\frac{1}{4}$

31. $y = x \cos 3x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{4}$

C) $-\frac{9}{2}$

D) $-\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{3}$

32. $y = x \sin 3x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) 0

B) $\frac{1}{4}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{4}$

Е) $\frac{2}{3}$

33. $y = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

В) 3

С) 6

Д) $\frac{1}{8}$

Е) 2

34. $y = \sqrt{3+x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) 1

В) $-\frac{1}{24\sqrt{3}}$

С) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

Д) 0

Е) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

35. $y = xe^{-3x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

В) $\frac{9}{2}$

- C) 5
- D) 2
- E) $\frac{1}{4}$

36. $y = \cos 5x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0
- B) $\frac{625}{24}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $-\frac{8}{49}$
- E) $\frac{264}{13}$

37. $y = \sin 5x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0
- B) $\frac{1}{312}$
- C) $-\frac{125}{6}$
- D) $-\frac{1}{4}$
- E) $\frac{256}{3}$

38. $y = 3x^3 - 2x^2 + x + 7$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) 2
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) 3

39. $y = \sqrt{5 + x^2}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$
- D) 0
- E) $\frac{2}{3}$

40. $y = 4 + e^{4x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{16}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{32}{3}$
- D) 2

Е) $\frac{1}{32}$

41. $y = x \cos 4x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) 0

В) $\frac{1}{4}$

С) -8

Д) $-\frac{1}{4}$

Е) 8

42. $y = x \sin 4x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) 0

В) $\frac{1}{4}$

С) 3

Д) 4

Е) $\frac{2}{3}$

43. $y = 3x^4 - 4x^2 - 5$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

А) $\frac{3}{4}$

В) $\frac{1}{2}$

С) 3

- D) $\frac{1}{8}$
E) 5

44. $y = \sqrt{4-x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 1
B) $-\frac{1}{64}$
C) $-\frac{1}{29}$
D) 0
E) $\frac{32}{3}$

45. $y = xe^{3x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $-\frac{4}{3}$
D) 2
E) $\frac{9}{2}$

46. $y = \cos 6x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0

- B) $\frac{1}{4}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $-\frac{1}{4}$
- E) $\frac{2}{3}$

47. $y = \sin 6x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) 0
- B) $\frac{27}{4}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) -36
- E) $\frac{2}{35}$

48. $y = 2x^3 + 3x^2 - x - 2$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

- A) $\frac{3}{4}$
- B) 4
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{1}{8}$
- E) 2

49. $y = \sqrt{3 + x^2}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^2 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\sqrt{3}$

D) 0

E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

50. $y = 5 + e^{-5x}$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

A) $\frac{3}{49}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $-\frac{125}{6}$

D) 2

E) $\frac{123}{4}$

21 ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Ықтималдықтың теориясының элементтері» тақырыбынан теориялық сұрақтарға арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

21.1 Тест тапсырмалары

1. A оқиғасының орындалуы үшін қолданылатын классикалық анықтаманы көрсетіңіз:

A) $P(A) = m \cdot n$

B) $P(A) = \frac{n}{m}$

C) $P(A) = \frac{m}{n}$

D) $P(A) = n - m$

E) $P(A) = m + n$

2. Ақиқат оқиға ықтималдығы нешеге тең болатынын көрсетіңіз:

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 0

D) 1

E) -1

3. Кез келген A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ қандай теңсіздікті қанағаттандыратынын көрсетіңіз:

A) $1 \leq P(A) \leq 2$

B) $0 \leq P(A) < 1,5$

C) $0 \leq P(A) \leq \frac{1}{2}$

D) $0 \leq P(A) < \frac{1}{2}$

E) $0 \leq P(A) \leq 1$

4. Екі үйлесімсіз оқиғаның біреуінің орындалу ықтималдығының формуласын көрсетіңіз:

A) $P(A + B) = P(A) - P(B)$

B) $P(A + B) = P(A) \cdot P(B)$

C) $P(A + B) = P(A) + P(B)$

D) $P(A + B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

E) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

5. A және \bar{A} қарама - қарсы оқиғаларының ықтималдықтары үшін қай теңдік орынды?

A) $P(A) \cdot P(\bar{A}) = 1$

B) $P(A) - P(\bar{A}) = 1$

C) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

D) $P(A) = P(\bar{A})$

E) $P(A) + P(\bar{A}) = 2$

6. Екі тәуелді оқиғалардың бірдей орындалу ықтималдығының формуласын көрсетіңіз:

A) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

B) $P(AB) = P(A) \cdot P_B(A)$

C) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

D) $P(AB) = P(A) - P(B)$

E) $P(AB) = P(A) + P(B)$

7. Үйлесімді A және B оқиғаларының тым болмаса біреуінің орындалу ықтималдығын көрсетіңіз:

A) $P(A + B) = P(A) + P(B)$

B) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

C) $P(A + B) = P(A) \cdot P(B)$

D) $P(A + B) = P(A) - P(B)$

E) $P(A+B) = P(A) + P(B) + P(AB)$

8. Толық ықтималдық формуласын көрсетіңіз:

A) $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$

B) $P(A) = P(A)P_A(B_1) + P(A) \cdot P_A(B_2) + \dots + P(A)P_A(B_n)$

C) $P(A) = P(B_1)P_A(B_1) + P(B_2)P_A(B_2) + \dots + P(B_n)P_A(B_n)$

D) $P(A) = P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) + \dots + P(A)P(B_n)$

E) $P(A) = P(A)P_{B_1}(B_2) + P(A) \cdot P_{B_1}(B_3) + \dots + P(A)P_{B_1}(B_n)$

9. Толық топ құрайтын үйлесімсіз A_1, A_2, \dots, A_n оқиғалары ықтималдықтарының қосындысы нешеге тең болатынын көрсетіңіз:

A) 0,8

B) 0

C) 0,5

D) 1

E) 0,25

10. Әр сынақта орындалу ықтималдығы p болатын оқиғаның n тәуелсіз сынақтарда тура k рет орындалу ықтималдығының формуласын көрсетіңіз (Бернулли формуласы):

A) $P_n(k) = C_n^k p^{k-1} q^{n-k}$

B) $P_n(k) = C_n^k p^k q^n$

C) $P_n(k) = C_{n-3}^k p^k q^{n-k}$

D) $P_n(k) = C_n^k p^k q^k$

E) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

11. A оқиғасы B_1, B_2, \dots, B_n үйлесімсіз оқиғалардың (гипотезалардың) біреуі пайда болғанда ғана орындала алатын болса $P_A(B_i)$ шартты ықтималдығы қай формуламен табылады (Бейес формуласы)?

A) $P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_A(A)}{P(A)}$

B) $P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$

$$C) P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B)}$$

$$D) P_A(B_i) = P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) + \dots + P(A)P(B_n)$$

$$E) P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A/B)}$$

12. Әр сынақта орындалу ықтималдығы p болатын оқиғаның n тәуелсіз сынақтарда k реттен кем орындалу ықтималдығын көрсетіңіз ($0 \leq k \leq n$):

$$A) P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$$

$$B) P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k)$$

$$C) P_n(0) + P_n(2) + \dots + P_n(k+1)$$

$$D) P_n(0) + P_n(3) + \dots + P_n(k)$$

$$E) P_n(2) + P_n(3) + \dots + P_n(k-2)$$

13. Әр сынақта орындалу ықтималдығы p болатын оқиғаның n тәуелсіз сынақтарда k реттен артық орындалу ықтималдығын көрсетіңіз ($0 \leq k \leq n$):

$$A) P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n+1)$$

$$B) P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(k)$$

$$C) P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$$

$$D) P_n(0) + P_n(3) + \dots + P_n(k)$$

$$E) P_n(2) + P_n(3) + \dots + P_n(k-2)$$

14. Әр сынақта орындалу ықтималдығы p болатын оқиғаның n тәуелсіз сынақтарда k реттен кем емес орындалу ықтималдығын көрсетіңіз:

$$A) P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n+1)$$

$$B) P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(k)$$

$$C) P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$$

$$D) P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$$

$$E) P_n(2) + P_n(3) + \dots + P_n(k-2)$$

15. Әр сынақта орындалу ықтималдығы p болатын оқиғаның n тәуелсіз сынақтарда k реттен артық емес орындалу ықтималдығын көрсетіңіз:

- A) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$
- B) $P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k)$
- C) $P_n(0) + P_n(2) + \dots + P_n(k+1)$
- D) $P_n(0) + P_n(3) + \dots + P_n(k)$
- E) $P_n(2) + P_n(3) + \dots + P_n(k-2)$

16. Айырмашылықтары тек элементтерінің құрамында болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша (қайталанусыз) теру:

- A) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- B) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- C) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$
- D) $C_n^k = n!$
- E) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$

17. Жалған оқиға ықтималдығы нешеге тең болатынын көрсетіңіз:

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 0
- D) 1
- E) -1

18. Кездейсоқ A оқиғасының ықтималдығы $P(A)$ қандай теңсіздікті қанағаттандыратынын көрсетіңіз:

- A) $1 < P(A) < 2$

- B) $0 \leq P(A) < 1,5$
- C) $0 < P(A) < \frac{1}{2}$
- D) $0 \leq P(A) < \frac{1}{2}$
- E) $0 < P(A) < 1$

19. Әртүрлі n элементтен құралған (қайталанусыз) алмастыру:

- A) $P_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- B) $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- C) $P_n^k = \frac{n!}{k!}$
- D) $P_n = n!$
- E) $P_n = (n+1)!$

20. Әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша (қайталанусыз) орналастыру:

- A) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- B) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- C) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$
- D) $A_n^k = n!$
- E) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$

21. Егер бір сынақта бір оқиғаның орындалуы басқа оқиғалардың орындалуын жоққа шығарса, онда оқиғалар ... деп аталады.

- A) үйлесімсіз

- B) үйлесімді
- C) жалған
- D) ақиқат
- E) кездейсоқ

22. Оқиғалардың тым болмағанда біреуінің пайда болуынан тұратын оқиғаны олардың ... деп айтамыз.

- A) көбейтіндісі немесе қилысуы
- B) қосындысы немесе бірігуі
- C) айырмасы
- D) бөліндісі
- E) қарама-қарсы оқиғасы

23. Оқиғалардың бір уақытта бірге қатар орындалуын олардың ... деп айтамыз.

- A) айырмасы
- B) қосындысы немесе бірігуі
- C) көбейтіндісі немесе қилысуы
- D) бөліндісі
- E) қарама-қарсы оқиғасы

24. Егер оқиғалардың біреуінің ықтималдығы екіншісінің пайда болуына әсері болмаса, олар ... деп айтамыз.

- A) эквивалентті
- B) үйлесімді
- C) үйлесімсіз
- D) тәуелсіз
- E) тәуелді

25. Өзара тәуелсіз A_1, A_2, \dots, A_n оқиғаларының тым болмағанда біреуінің орындалу ықтималдығы неге тең?

- A) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- B) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$
- C) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- D) $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$
- E) $P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$

26. Әртүрлі n элементтен құралған (қайталануы бар) алмастыру:

A) $P_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

B) $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

C) $P_n^k = \frac{n!}{k!}$

D) $P_n = n!$

E) $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

27. Әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша (қайталануы бар) орналастыру:

A) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

B) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

C) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$

D) $A_n^k = n!$

E) $A_n^k = n^k$

28. Айырмашылықтары тек элементтерінің құрамында болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша (қайталануы бар) теру:

A) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

B) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

C) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$

D) $C_n^k = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! p!}$

Е) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$

28. A немесе B оқиғаларының (екеуінің тым болмаса біреуісі) орындалуы ($\omega \in \Omega$, мұндағы ω - нәтиже, Ω - барлық мүмкін нәтижелердің жиыны, яғни кеңістігі):

- А) $\omega \in A \cup B$
- В) $\omega \in A \cap B$
- С) $\omega \in A/B$
- Д) $\omega \in B/A$
- Е) $A \subset B$

29. A және B оқиғаларының (екеуі де) орындалуы ($\omega \in \Omega$, мұндағы ω - нәтиже, Ω - барлық мүмкін нәтижелердің жиыны, яғни кеңістігі):

- А) $\omega \in A \cup B$
- В) $\omega \in A \cap B$
- С) $\omega \in A/B$
- Д) $\omega \in B/A$
- Е) $A \subset B$

30. A оқиғасы орындалса, B оқиғасының да орындалуы (A оқиғасының орындалуы B оқиғасының да орындалуына әкелуі):

- А) $A \cup B$
- В) $A \cap B$
- С) A/B
- Д) B/A
- Е) $A \subset B$

31. A және B бірге орындала алмауы (біріншісің орындалуы екіншісінің орындалуын жоққа шығаруы):

- А) $A \cup B = \emptyset$
- В) $A \cap B$
- С) A/B

- D) B/A
- E) $A \subset B$

32. А оқиғасы орындалып, В оқиғасы орындалмайтын оқиға:

- A) $A \cup B = \emptyset$
- B) $A \cap B$
- C) A/B
- D) B/A
- E) $A \subset B$

33. Жазықтықтағы М облысы N облысының ішінде орналасқан болсын. N облысына лақтырылған нүктенің М облысына түсуін А оқиғасы деп белгілесек, А оқиғасының ықтималдығы неге тең (М облысының ауданы S_M , N облысының ауданы S_N)?

- A) $P(A) = \frac{S_M}{S_N}$
- B) $P(A) = \frac{S_N}{S_M}$
- C) $P(A) = S_M \cdot S_N$
- D) $P(A) = S_M + S_N$
- E) $P(A) = \frac{S_M \cdot S_N}{2}$

34. l кесіндісі L кесіндісінің бөлігін құрасын. Кездейсоқ L кесіндісіне нүкте лақтырылған. Нүктенің l кесіндісіне түсуінің ықтималдығы осы кесіндінің ұзындығына тәуелді және оның осы L кесіндісі арқылы орналасуына тәуелсіз болса, онда нүктенің l кесіндісіне түсуі А оқиғасының ықтималдығы неге тең?

- A) $P(A) = (l \text{ ұзындығы}) / (L \text{ ұзындығы})$
- B) $P(A) = (l \text{ ұзындығы}) \cdot (L \text{ ұзындығы})$

- C) $P(A)=(l \text{ ұзындығы})+(L \text{ ұзындығы})$
- D) $P(A)=(L \text{ ұзындығы})/(l \text{ ұзындығы})$
- E) $P(A)=(l \text{ ұзындығы})-(L \text{ ұзындығы})$

35. Кеңістіктегі v денесі V денесінің бөлігін құрайтын болса, нүктенің v денесіне түсуі A оқиғасының ықтималдығы неге тең?

- A) $P(A)=(v \text{ көлемі}) (V \text{ көлемі})$
- B) $P(A)=(v \text{ көлемі})/(V \text{ көлемі})$
- C) $P(A)=(V \text{ көлемі})/(v \text{ көлемі})$
- D) $P(A)=(v \text{ көлемі})-(V \text{ көлемі})$
- E) $P(A)=(v \text{ көлемі})+(V \text{ көлемі})$

36. Екі тәуелсіз оқиғалардың бірдей орындалу ықтималдығының формуласын көрсетіңіз:

- A) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$
- B) $P(AB) = P(A) \cdot P_B(A)$
- C) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- D) $P(AB) = P(A) - P(B)$
- E) $P(AB) = P(A) + P(B)$

37. A оқиғасының B оқиғасы орындалғандағы шартты ықтималдығының белгіленуі:

- A) $P_A(B)$
- B) $P_B(A)$
- C) $P(B \cup A)$
- D) $P(A/B)$
- E) $P(B \cap A)$

38. Берілген әртүрлі n элементтен бір-бірінен айырмашылығы тек орналасу ретінде ғана болатын топтар жиынының атауы қандай?

- A) алмастыру
- B) орналастыру
- C) теру
- D) топтау
- E) сұрыптау

39. Бір-бірінен айырмашылығы элементтерінің құрамында немесе элементтердің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтен m -нен жасалған топтар топтар жиынының атауы қандай ($m < n$)?

- A) алмастыру
- B) орналастыру
- C) теру
- D) топтау
- E) сұрыптау

40. Бір-бірінен айырмашылығы ең болмағанда бір элементінде болатын әртүрлі n элементтен m -нен жасалған топтар жиынының атауы қандай ($m < n$)?

- A) алмастыру
- B) орналастыру
- C) теру
- D) топтау
- E) сұрыптау

41. Егер n рет тәжірибе жүргізгенде A оқиғасы M рет пайда болатын болса, онда M/n санын A оқиғасының жиілікті ықтималдығы (жиілігі) немесе статистикалық ықтималдығы деп аталып, келесі түрде белгілейді:

- A) $w(A) = M \cdot n$
- B) $w(A) = \frac{n}{M}$
- C) $w(A) = \frac{M}{n}$
- D) $w(A) = n - M$
- E) $w(A) = M + n$

42. Лақтырған нүктенің бір облыс бөлігіне түсу мүмкіндігі сол облыс пен оның бөлігінің геометриялық өлшемдеріне байланысты болса, онда лақтырған нүктенің E облысының бөлігі болатын A облысына түсу ықтималдығы деп:

- A) $P(A) = \frac{m(A)}{n(E)}$
- B) $P(A) = m(A) \cdot n(E)$

- C) $P(A) = m(A) + n(E)$
 D) $P(A) = m(A) - n(E)$
 E) $P(A) = \frac{n(E)}{m(A)}$

43. A_1, A_2, \dots, A_n оқиғаларының қосындысы A_1 оқиғасының, немесе A_2 оқиғасының, немесе т.с.с., немесе A_n оқиғасының пайда болуынан тұратын оқиғаны атап, келесі түрде белгілейді:

- A) $\sum_{i=1}^n A_i$
 B) $\prod_{i=1}^n A_i$
 C) $1 - \sum_{i=1}^n A_i$
 D) $1 - \prod_{i=1}^n A_i$
 E) $1 + \sum_{i=1}^n A_i$

44. Бірнеше оқиғаның көбейтіндісі сол оқиғалардың барлығының ортақ пайда болуынан тұратын оқиғаны атап, келесі түрде белгілейді:

- A) $\sum_{i=1}^n A_i$
 B) $\prod_{i=1}^n A_i$
 C) $1 - \sum_{i=1}^n A_i$
 D) $1 - \prod_{i=1}^n A_i$
 E) $1 + \sum_{i=1}^n A_i$

45. Егер $A \subset B$ орындалса, онда

- A) $A+B=B$

- B) $A+B=A$
- C) $A+B=\emptyset$
- D) $A-B=B$
- E) $A-B=A$

46. Егер $A \subset B$ орындалса, онда

- A) $AB=B$
- B) $AB=A$
- C) $AB=\emptyset$
- D) $A-B=B$
- E) $A-B=A$

47. A , B , C үш кездейсоқ оқиғалары берілсе, онда тек A оқиғасының орындалуын өрнектеңіз:

- A) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
- B) ABC
- C) $\overline{A}BC$
- D) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
- E) ABC

48. A , B , C үш кездейсоқ оқиғалары берілсе, онда ең болмағанда бір оқиғасының орындалуын өрнектеңіз:

- A) ABC
- B) $A+B+C$
- C) $\overline{A}BC$
- D) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
- E) ABC

49. A , B , C үш кездейсоқ оқиғалары берілсе, онда осы барлық оқиғалардың орындалуын өрнектеңіз:

- A) ABC
- B) $A+B+C$
- C) $\overline{A}BC$
- D) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
- E) ABC

50. A, B, C үш кездейсоқ оқиғалары берілсе, онда тек қана A мен B оқиғаларының орындалуын өрнектеңіз:

A) ABC

B) $A + B + C$

C) $\overline{A}BC$

D) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

E) $A\overline{B}\overline{C}$

22 ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ АНЫҚТАМАЛАРЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Ықтималдықтың классикалық және геометриялық анықтамалары» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

22.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 22.1: Қорапта 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Қораптан кез келген бір шар алынды. Алынған шардың қара болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) A оқиғасының ықтималдығы деп

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{мүмкін нәтижелер саны}}{\text{барлық нәтижелер саны}}. \quad (22.1)$$

б) A – қара шар пайда болу оқиғасы болсын. Барлық нәтижелер саны осы қораптағы шарлар санына тең:

$$\omega_i (i = \overline{1,20}) \Rightarrow n = 20,$$

ал мүмкін нәтижелер саны қораптағы қара шарлар санына тең:
 $m = 9$.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{9}{20} = 0,45.$$

с) Жауабы: $P(A) = 0,45$.

Мысал 22.2: $[1; 13]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x - 5| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

Шешімі:

а) *Геометриялық ықтималдық бір өлшемді жағдайда:*

$$P(A) = \frac{l}{L},$$

мұндағы l - кіші, L - үлкен ұзындық, $l \subset L$.

б) A – нүктенің $|x - 5| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 5 \leq 2$ теңсіздігін сипаттайтын $[3; 7]$ кесіндісіне түсу оқиғасы болсын. Демек

$[1;13]$ кесіндісінің ұзындығы $L=12$ болса, $[3;7]$ кесіндісінің ұзындығы $l=4$. Онда нүктенің $|x-5| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

с) Жауабы: $P(A) = \frac{1}{3}$.

22.2 Тест тапсырмалары

1. Жәшіктегі 10 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың ақ доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{5}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{3}{5}$
- D) $\frac{4}{5}$
- E) 1

2. Радиусы $R=4$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{1}{4\pi}$
- D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- E) 1

3. Радиусы $R=12$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
E) 1

4. $[1; 8]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-3| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{4}{7}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$
E) 1

5. Жәшіктегі 8 доптың үшеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың ақ доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{3}{8}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{4}{5}$
E) 1

6. Радиусы $R=4$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
B) $\frac{4}{3}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) 1

7. Радиусы $R=3$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) 1

8. $[1; 9]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-1| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{4}{7}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$

Е) 1

9. Жәшіктегі 10 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың қара доп болу ықтималдығын табыңыз.

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) 1

10. Радиусы $R=5$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

A) $\frac{2}{\pi}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{4\pi}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

E) 1

- D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
E) 1

12. $[1;7]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x - 4| \leq 1$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$
E) 1

13. Жәшіктегі 5 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың қара доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{3}{5}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{4}{5}$
E) 1

14. Радиусы $R=1$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
B) $\frac{3}{4}$

- C) $\frac{1}{4\pi}$
 D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
 E) 1

15. Радиусы $R=8$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
 B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
 C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
 D) $\frac{4\pi}{3}$
 E) 1

16. $[1; 8]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-7| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{4}{7}$
 B) $\frac{1}{2}$
 C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{5}$
 E) 1

17. Жәшіктегі 3 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың ақ доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{2}{3}$

- B) $\frac{3}{5}$
- C) $\frac{1}{5}$
- D) $\frac{4}{5}$
- E) 1

18. Радиусы $R=6$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{1}{4\pi}$
- D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- E) 1

19. Радиусы $R=5$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- B) 1
- C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
- D) $\frac{3\sqrt{2}}{4\pi}$
- E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

20. $[-1; 8]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x - 7| \leq 5$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

A) $\frac{4}{9}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{1}{5}$

E) 1

21. Қораптағы 10 қарындаштың төртеуі қызыл, ал қалғаны көк түсті қарындаштар. Таңдап алынған қарындаштың көк болу ықтималдығын табыңыз.

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{4}{5}$

E) 1

22. Радиусы $R=8$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

A) $\frac{2}{\pi}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{4\pi}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

E) 1

23. Радиусы $R=4$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
 A) $\frac{4\pi}{1}$
 B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$
 D) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
 E) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

24. $[-1;9]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-3| \leq 4$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- $\frac{4}{5}$
 A) $\frac{1}{3}$
 B) $\frac{2}{3}$
 C) $\frac{2}{5}$
 D) $\frac{5}{1}$
 E) $\frac{1}{5}$

25. Қораптағы 6 қарындаштың төртеуі қызыл, ал қалғаны көк түсті қарындаштар. Таңдап алынған қарындаштың қызыл болу ықтималдығын табыңыз.

- $\frac{2}{3}$
 A) $\frac{3}{5}$
 B) $\frac{1}{5}$
 C) $\frac{5}{5}$

- D) $\frac{4}{5}$
E) 1

26. Радиусы $R=2$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
B) $\frac{4}{1}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4\pi}{1}$
E) 1

27. Радиусы $R=6$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
B) 1
C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
D) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$
E) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
E) 2

28. $[-1; 15]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-6| \leq 4$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{4}{9}$

- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) 1

29. Қораптағы 5 қарындаштың төртеуі қызыл, ал қалғаны көк түсті қарындаштар. Таңдап алынған қарындаштың көк болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{5}$
- B) $\frac{3}{5}$
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $\frac{4}{5}$
- E) 1

30. Радиусы $R=7$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{1}{4\pi}$
- D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- E) 1

31. Радиусы $R=9$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$
D) 4π
E) 1

32. $[-1; 13]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-6| \leq 3$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3}{7}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$
E) 1

33. 20 қараша күні жол жүру ережесін бұзған 20 жүргізушінің бесеуі жылдамдық үдету үшін айыпталды. Сәтіне қарай алған жол жүру ережесін бұзушыға жылдамдық үдеткені үшін айып тағылу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{3}{5}$
C) $\frac{2}{3}$

- D) $\frac{4}{5}$
E) 1

34. Радиусы $R=9$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
B) $\frac{4}{3}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) 4π
E) 1

35. Радиусы $R=1$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$
D) 4π
E) 1

36. $[-2;8]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $[1,5; 6,5]$ бөлігінен алыну ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{5}$

- C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{2}{5}$
 E) 1

37. Кітапханадағы 500 математикалық оқулықтардың 200 - і есеп жинақтары. Сәтіне қарай алынған оқулықтың есеп жинағы болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{2}{5}$
 B) $\frac{3}{5}$
 C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{4}{5}$
 E) 1

38. Радиусы $R=10$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
 B) $\frac{3}{4}$
 C) $\frac{1}{4\pi}$
 D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
 E) 1

39. Радиусы $R = \sqrt{5}$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- B) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$
- C) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$
- D) $\frac{3\sqrt{5}}{4\pi}$
- E) 1

40. $[-2; 13]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-5| \leq 3$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{5}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) 1

41. Жәшіктегі 20 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың ақ доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{10}$
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{3}{5}$
- D) $\frac{4}{5}$
- E) 1

42. Радиусы $R=11$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
- D) 4π
- E) 1

43. Радиусы $R = \sqrt{2}$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
- D) 4π
- E) 1

44. $[-1; 7]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x - 5| \leq 3$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3}{4}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $\frac{1}{4}$

- D) $\frac{1}{5}$
E) 1

45. Жәшіктегі 12 доптың үшеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың ақ доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{3}{8}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{1}{4}$
E) 1

46. Радиусы $R = \sqrt{7}$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) 1

47. Радиусы $R = \sqrt{3}$ сантиметрге тең дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің үшбұрыштың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

- B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
 D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
 E) 1

48. $[-1; 8]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x - 6| \leq 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{4}{9}$
 B) $\frac{1}{2}$
 C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{5}$
 E) 1

49. Жәшіктегі 14 доптың екеуі ақ, ал қалғаны қара доп. Таңдап алынған доптың қара доп болу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{6}{7}$
 B) $\frac{3}{5}$
 C) $\frac{1}{5}$
 D) $\frac{2}{3}$
 E) 1

50. Радиусы $R=15$ сантиметрге тең дөңгелекке квадрат іштей сызылған. Дөңгелекте сәтіне қарай белгіленген нүктенің квадраттың ішінде болу ықтималдығы неге тең?

- A) $\frac{2}{\pi}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{1}{4\pi}$
- D) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- E) 1

23 ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ҚОСУ/ КӨБЕЙТУ ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ТЫМ БОЛМАҒАНДА БІР ОҚИҒАНЫҢ ПАЙДА БОЛУ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Ықтималдықтың қосу/ көбейту теоремалары және тым болмағанда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

23.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 23.1: Институт бақылау жұмыстарының жоспарын үш қаладан алады. Жоспарды бірінші және екінші қаладан алу ықтималдығы сәйкесінше 0,7 және 0,2-ге тең. Жоспарды үшінші қаладан алу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) Өзара үйлесімсіз A_1, A_2, A_3 оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

б) A, B, C арқылы институт бақылау жұмыстарының жоспарларын алатын қалаларды белгілейік. Бұл оқиғалар оқиғалардың толық тобын құрайды, сондықтан

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Ендеше, ізделінді ықтималдық: $P(B) = 1 - 0,7 - 0,2 = 0,1$.

с) Жауабы: $P(B) = 0,1$.

Мысал 23.2: Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынғаннан кейін ғана, келесі шар алынған болса, алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу (C) ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) Егер A_1, A_2, \dots, A_n оқиғалар жинағы бойынша тәуелсіз болса, онда

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n),$$

- b) Есеп шарты бойынша A, B, C оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{144}.$$

- c) Жауабы: $P(ABC) = \frac{5}{144}$.

Мысал 23.3: Нысанаға үш оқ атылды. Бірінші оқтың нысанаға тию ықтималдығы - 0,6, екіншісінікі - 0,7, ал үшіншісінікі - 0,8. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

- a) A_1, A_2, \dots, A_n оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \dots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \dots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \dots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \dots A_n).$$

- b) Оқиғалардың белгілеулері: A - бірінші оқ нысанаға тиді, B - екінші оқ нысанаға тиді, C - үшінші оқ нысанаға тиді, ал D - осы үш оқтың тым болмағанда біреуі нысанаға тиді деген оқиға болсын. Онда $D = A + B + C$, мұндағы A, B, C - үйлесімді жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар. Ендеше,

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,976.$$

- c) Жауабы: $P(D) = 0,976$.

23.2 Тест тапсырмалары

1. Сөреде бірдей өлшемді 2 ақ, 3 қызыл, 5 көк түспен түптелген кітаптар бар. Кездейсоқ алынған кітаптың ақ болмауының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{4}{5}$
 B) $\frac{1}{3}$
 C) $-\frac{1}{5}$

- D) $\frac{1}{10}$
E) 1

2. Бір-бірінен тәуелсіз екі А және В оқиғаларының ықтималдықтары сәйкес $P(A)=0,3$ ал $P(B)=0,8$ болса, онда олардың АВ көбейтіндісінің ықтималдығы неге тең?

- A) 0,24
B) 0,32
C) 0,11
D) 0,12
E) 0,25

3. Екі мерген нысанаға бір-бірден атыс жүргізді. 1-ші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9, ал екіншісінікі 0,7. Тым болмаса бір мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,97
B) 1,6
C) 0,63
D) 0,2
E) 0,12

4. Сөмкеде 3 ақ, 4 қызыл, 3 көк түсті шарлар бар. Кездейсоқ алынған шардың ақ болмауының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{7}{10}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{10}$
E) 1

5. Бірінші жәшікте 2 ақ және 10 қара шар, ал екінші жәшікте 8 ақ және 4 қара шар бар. Әр жәшіктен бір-біріне тәуелсіз бір шардан алса, екі шардың да ақ болуының ықтималдығы қандай?

- A) $1/9$
- B) $1/8$
- C) $1/3$
- D) $1/2$
- E) $1/10$

6. Бірінші қорапта 2 ақ, 8 қызыл, екіншісінде 6 ақ, 4 қызыл шарлар бар. Екі қораптан бір-бірден шарлар алынған. Алынған шарлар арасында тым болмаса 1 ақ шар болу ықтималдығын табу керек.

- A) 0,68
- B) 1,06
- C) 0,22
- D) 0,44
- E) 0,35

7. Жәшіктегі 5 ақ, 1 жасыл, 4 көк шарлардың ішінен кездейсоқ алынған шардың ақ емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) 1

8. Бірінші жәшікте 4 ақ және 12 қара шар, ал екінші жәшікте 10 ақ және 6 қара шар бар. Әр жәшіктен бір-біріне тәуелсіз бір шардан алса, бірінші жәшіктен ақ, екінші жәшіктен қара шар шығуының ықтималдығы қандай?

- A) $3/32$
- B) $1/32$

- C) $1/33$
- D) $2/33$
- E) $4/33$

9. Екі мерген нысанаға бір-бірден атыс жүргізді. 1-ші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7, ал екіншісінікі 0,9. Тым болмаса бір мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,97
- B) 1,6
- C) 0,63
- D) 0,2
- E) 0,12

10. Аяз атаның сөмкесінде ішінде 7 ақ, 1 қызыл, 2 көк түсті шарлар бар. Кездейсоқ алынған шардың қызыл емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{9}{10}$
- B) $\frac{1}{7}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{3}{10}$
- E) 1

11. Бірінші жәшікте 4 ақ және 12 қара шар, ал екінші жәшікте 10 ақ және 6 қара шар бар. Әр жәшіктен бір шардан алса, бірінші жәшіктен қара, екінші жәшіктен ақ шар шығуының ықтималдығы қандай?

- A) $15/32$
- B) $1/32$
- C) $2/33$
- D) $15/33$
- E) $7/32$

12. Ұшып бара жатқан үйректі екі аңшының біреуі $\frac{2}{3}$, екіншісі $\frac{3}{4}$ ықтималдығымен атып түсіре алады. Ұшып бара жатқан үйрекке тым болмаса біреуінің оқ тигізу ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{11}{12}$
- B) $\frac{11}{13}$
- C) 0,25
- D) 0,31
- E) $\frac{10}{13}$

13. Жәшіктің ішінде 5 ақ, 1 қызыл, 2 көк түсті шарлар бар. Кездейсоқ алынған шардың қызыл емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{7}{8}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{9}{10}$
- E) 1

14. Бір-бірінен тәуелсіз үш А, В және С оқиғаларының ықтималдықтары сәйкес $P(A)=0,8$ ал $P(B)=0,2$, $P(C)=0,7$ болса, онда олардың АВС көбейтіндісінің ықтималдығы неге тең?

- A) 0,112
- B) 0,312
- C) 0,56
- D) 0,14
- E) 0,25

15. 1-ші жәшіктегі 5 детальдің 3-і боялған, ал 2-ші жәшіктегі 5 детальдің 1-і боялған. Деталь жинаушы әр жәшіктен бір-бірден 2 деталь алды. Олардың тым болмаса біреуі боялғандығының ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{17}{25}$
- B) $\frac{5}{16}$

- C) $1/51$
- D) $2/5$
- E) $1/3$

16. Қораптың ішінде 7 ақ, 1 қызыл, 2 көк түсті қарындаштар бар. Кездейсоқ алынған қарындаштардың көк емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{4}{5}$
- B) $\frac{1}{7}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{9}{10}$
- E) 1

17. Қорапта 6 ақ және 8 қара қарындаш, ал сөреде 7 ақ және 7 қара қарындаштар бар. Бір-біріне тәуелсіз қораптан қара, ал сөреден ақ қарындаш алынуының ықтималдығы қандай?

- A) $2/7$
- B) $1/9$
- C) $2/3$
- D) $3/4$
- E) $1/6$

18. Жұмысшы 2 станоктың істен шықпауын қамтамасыз етеді. 1 сағат ішінде жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеу ықтималдығы 1-станок үшін 0,3 –ке тең, 2-сі үшін - 0,5. Бір сағат бойында тым болмаса бір станок жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеуінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,65
- B) 0,3
- C) 0,6
- D) 0,41
- E) 0,37

19. Қораптағы қарындаштардың ішінде 6 ақ, 4 қызыл, 2 көк түсті. Кездейсоқ алынған қарындаштардың көк емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{5}{6}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{6}{9}$
D) $\frac{10}{10}$
E) 1

20. Үш мерген бір-бірінен тәуелсіз нысананы атуда. Біріншісінің нысанаға тию ықтималдығы 0,75, екіншісінікі 0,8, үшіншісінікі 0,9. Үш мергеннің де бір уақытта нысанаға тию ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{27}{50}$
B) $\frac{23}{50}$
C) $\frac{11}{50}$
D) $\frac{13}{50}$
E) $\frac{3}{50}$

21. Жанұядағы бір сыныпта оқитын апалы-сіңілілі екі баланың 1-нің алгебрадан емтиханды жақсы тапсыру ықтималдығы 0,6-ға тең, ал екіншісінің емтиханды жақсы тапсыру ықтималдығы 0,8 - ге тең. Тым болмағанда біреуінің емтиханды жақсы тапсыру ықтималдығын табу керек.

- A) 0,92
B) 0,99
C) 0,56
D) 0,47
E) 0,5

22. Қораптағы қарындаштардың ішінде 5 ақ, 3 қызыл, 3 көк түсті. Кездейсоқ алынған қарындаштардың қызыл емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{8}{11}$
 B) $\frac{11}{5}$
 C) $\frac{11}{3}$
 D) $\frac{11}{9}$
 E) $\frac{10}{1}$

23. Үш мерген бір-бірінен тәуелсіз нысананы атуда. Біріншісінің нысанаға тию ықтималдығы 0,25, екіншісінікі 0,8, үшіншісінікі 0,6. Үш мергеннің де бір уақытта нысанаға тию ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{3}{25}$
 B) $\frac{3}{50}$
 C) $\frac{7}{25}$
 D) $\frac{7}{50}$
 E) $\frac{1}{50}$

24. Студенттің «жоғары математика» пәнінен емтиханды «өте жақсы» деген бағаға тапсыру ықтималдығы 0,3 ал «экономикалық теория» пәнінен бұл бағаны алу ықтималдығы – 0,85. Тым болмаса бір емтиханды «өте жақсыға» тапсыру ықтималдықтарын табу керек.

- A) 0,895
 B) 0,31
 C) 0,456
 D) 0,295
 E) 0,123

25. Дүкендегі бірдей өлшемді 20 көк, 10 қызыл, 12 қара түсті қаламсаптардан кездейсоқ алынған біреуінің көк емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{11}{21}$

- B) $\frac{1}{21}$
 C) $\frac{21}{9}$
 D) $\frac{10}{10}$
 E) 1

26. 11 «А» сыныпта 12 ұл және 18 қыз бала бар, ал 11 «Б» сыныпта 15 ұл және 12 қыз бала бар. Екі сыныптан бір-бірден алып екі адамнан тұратын делегацияны кездейсоқ таңдайтын болса, оның екеуі де ұл болуының ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{2}{9}$
 B) $\frac{3}{5}$
 C) $\frac{1}{5}$
 D) $\frac{1}{12}$
 E) $\frac{2}{5}$

27. Нысанаға екі мерген бір-бірден оқ атты. Бірінші мергеннің оғының нысанаға тию ықтималдығы 0,6, екіншісінің бұл ықтималдығы 0,5. Тым болмаса 1 мергеннің оғы нысанаға тиюінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,8
 B) 0,1
 C) 0,5
 D) 0,3
 E) 0,4

28. Дүкендегі бірдей өлшемді 10 көк, 10 қызыл, 12 қара түсті қаламсаптардан кездейсоқ алынған біреуінің қара емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{5}{8}$
 B) $\frac{16}{3}$
 C) $\frac{8}{8}$

- D) $\frac{9}{10}$
E) 1

29. 11 «А» сыныпта 12 ұл және 18 қыз бала бар, ал 11 «Б» сыныпта 15 ұл және 12 қыз бала бар. Екі сыныптан бір-бірден алып екі адамнан тұратын делегацияны кездейсоқ таңдайтын болса, оның екеуі де қыз болуының ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{4}{15}$
B) $\frac{3}{25}$
C) $\frac{2}{9}$
D) $\frac{1}{12}$
E) $\frac{2}{5}$

30. Екі мерген аңға бір-бірден атыс жасады. 1-ші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,4, ал 2-сінікі 0,8. Тым болмаса бір мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,88
B) 0,16
C) 0,35
D) 0,52
E) 0,62

31. Кітапханаға жаңа басылымдардан 2 математика, 3 физика, 5 химия оқулықтары әкелінді. Кездейсоқ алынған кітаптың математика оқулығы болмауының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{4}{5}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{10}$
E) 1

32. Бір-бірінен тәуелсіз екі А және В оқиғаларының ықтималдықтары сәйкес $P(A)=0,7$ ал $P(B)=0,8$ болса, онда олардың АВ көбейтіндісінің ықтималдығы неге тең?

- A) 0,56
- B) 0,32
- C) 0,11
- D) 0,12
- E) 0,25

33. Екі мерген нысанаға бір-бірден атыс жүргізді. 1-ші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,55, ал екіншісінікі 0,7. Тым болмаса бір мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,974
- B) 1,634
- C) 0,865
- D) 0,201
- E) 0,122

34. Қорапта 3 қызыл, 4 көк, 3 жасыл түсті қаламдар бар. Кездейсоқ алынған қаламның қызыл болмауының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{7}{10}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{4}{1}$
- D) $\frac{1}{10}$
- E) 1

35. Бірінші қорапта 2 сары және 10 қара шар, ал екінші қорапта 8 сары және 4 қара шар бар. Әр қораптан бір-біріне тәуелсіз бір шардан алса, екі шардың да сары болуының ықтималдығы қандай?

- A) $\frac{1}{9}$

- B) $1/8$
- C) $1/3$
- D) $1/2$
- E) $1/10$

36. Бірінші жәшікте 2 ақ, 8 қызыл, екіншісінде 6 ақ, 4 қызыл доптар бар. Екі жәшіктен бір-бірден доптар алынған. Алынған доптар арасында тым болмаса 1 ақ доп болу ықтималдығын табу керек.

- A) 0,68
- B) 1,06
- C) 0,22
- D) 0,44
- E) 0,35

37. Сөредегі тұрған 5 ақ, 1 жасыл, 4 көк борлардың ішінен кездейсоқ алынған бордың ақ емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$
- E) 1

38. Бірінші жәшікке 4 көк және 12 қара, ал екінші жәшікте 10 көк және 6 қара қаламдар салынған. Әр жәшіктен бір-біріне тәуелсіз бір қаламнан алса, бірінші жәшіктен көк, екінші жәшіктен қара қалам шығуының ықтималдығы қандай?

- A) $3/32$
- B) $1/32$
- C) $1/33$
- D) $2/33$
- E) $4/33$

39. Екі мерген нысанаға бір-бірден атыс жүргізді. 1-ші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,7, ал екіншісінікі 0,95. Тым болмаса бір мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,985
- B) 1,612
- C) 0,637
- D) 0,245
- E) 0,124

40. Қорапта 7 ақ, 1 қызыл, 2 көк түсті түймелер бар. Кездейсоқ алынған түйменің қызыл емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{9}{10}$
- B) $\frac{1}{7}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{10}{10}$
- E) 1

41. Бірінші жәшікте 4 жасыл және 12 қара шар, ал екінші жәшікте 10 жасыл және 6 қара шар бар. Әр жәшіктен бір шардан алса, бірінші жәшіктен қара, екінші жәшіктен жасыл шар шығуының ықтималдығы қандай?

- A) $\frac{15}{32}$
- B) $\frac{1}{32}$
- C) $\frac{2}{33}$
- D) $\frac{15}{33}$
- E) $\frac{7}{32}$

42. Аңды екі аңшының біреуі $\frac{2}{3}$, екіншісі $\frac{3}{4}$ ықтималдығымен атып ала алады. Аңға тым болмаса біреуінің оқ тигізу ықтималдығын табыңыз.

- A) 11/12
- B) 11/13
- C) 0,25
- D) 0,31
- E) 10/13

43. Қораптың ішінде 5 қара, 1 қызыл, 2 көк түсті шарлар бар. Кездейсоқ алынған шардың қызыл емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{7}{8}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{9}{10}$
- E) 1

44. Бір-бірінен тәуелсіз үш А, В және С оқиғаларының ықтималдықтары сәйкес $P(A)=0,8$ ал $P(B)=0,25$, $P(C)=0,7$ болса, онда олардың АВС көбейтіндісінің ықтималдығы неге тең?

- A) 0,11
- B) 0,31
- C) 0,56
- D) 0,14
- E) 0,25

45. 1-ші жәшіктегі 5 детальдің 1-і боялған, ал 2-ші жәшіктегі 5 детальдің 3-і боялған. Деталь жинаушы әр жәшіктен бір-бірден 2 деталь алды. Олардың тым болмаса біреуі бояландығының ықтималдығын табу керек.

- A) 17/25
- B) 5/16
- C) 1/51
- D) 2/5
- E) 1/3

46. Қораптың ішінде 7 жасыл, 1 қызыл, 2 көк түсті қарындаштар бар. Кездейсоқ алынған қарындаштардың көк емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{4}{5}$
- B) $\frac{1}{7}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{9}{10}$
- E) 1

47. Қорапта 6 қызыл және 8 қара қарындаш, ал сөреде 7 қызыл және 7 қара қарындаштар бар. Бір-біріне тәуелсіз қораптан қара, ал сөреден қызыл қарындаш алынуының ықтималдығы қандай?

- A) $2/7$
- B) $1/9$
- C) $2/3$
- D) $3/4$
- E) $1/6$

48. Жұмысшы 2 станоктың істен шықпауын қамтамасыз етеді. 1 сағат ішінде жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеу ықтималдығы 1-станок үшін 0,5 –ке тең, 2-сі үшін - 0,3. Бір сағат бойында тым болмаса бір станок жұмысшының қадағалауынсыз жұмыс істеуінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,65
- B) 0,3
- C) 0,6
- D) 0,41
- E) 0,37

49. Қораптағы қарындаштардың ішінде 6 қоңыр, 4 қызыл, 2 көк түсті. Кездейсоқ алынған қарындаштардың көк емес басқа түсті болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) $\frac{5}{6}$
B) $\frac{4}{1}$
C) $\frac{6}{9}$
D) $\frac{10}{1}$
E) 1

50. Үш мерген бір-бірінен тәуелсіз нысананы атуда. Біріншісінің нысанаға тию ықтималдығы 0,8, екіншісінікі 0,75, үшіншісінікі 0,9. Үш мергеннің де бір уақытта нысанаға тию ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{27}{50}$
B) $\frac{23}{50}$
C) $\frac{11}{50}$
D) $\frac{13}{50}$
E) $\frac{3}{50}$

24 ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ЖӘНЕ БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Толық ықтималдық және Байес формуласы» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

24.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 24.1: Цехта өнімділігі бірдей 3 түрлі құрылғы бірдей заттар жасап шығарады. Бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылардың сапалы зат шығару ықтималдығы сәйкесінше 0,94; 0,9 және 0,85. Жәшікте 10 заттың 5-і бірінші түрдегі құрылғымен, 3-і екінші түрдегі құрылғымен, ал қалған 2-і үшінші түрдегі құрылғымен жасалған. Жәшіктен кез келген бір зат алынды. Алынған заттың сапалы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) Егер A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын B_1, B_2, \dots, B_n болжамдарының (гипотезалар) біреуі орындалғанда орындалса, онда A оқиғасының орындалу ықтималдығы әр гипотеза ықтималдығының A оқиғасының шартты ықтималдығына көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \quad (24.1)$$

және болжамдар ықтималдықтардың толық тобын құрайтындықтан

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) = 1.$$

б) A - жәшіктен алынған заттың сапалы болуы.

Онда болжамдар:

B_1 - зат бірінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_2 - зат екінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_3 - зат үшінші түрдегі құрылғымен жасалған деген оқиғалар болсын.

Есеп шарты бойынша:

$$P(B_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{3}{10}, \quad P(B_3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Егер заттың жекелей бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылармен жасалғаны белгілі болса, онда оның сапалы болу ықтималдығы:

$$P_{B_1}(A) = 0,94, \quad P_{B_2}(A) = 0,9, \quad P_{B_3}(A) = 0,85.$$

Толық ықтималдықтың формуласын бойынша жәшіктен алынған заттың сапалы болу ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0,94 + \frac{3}{10} \cdot 0,9 + \frac{1}{5} \cdot 0,85 = 0,91.$$

с) Жауабы: $P(A) = 0,91$.

Мысал 24.2: Жоғарыдағы 24.1-мысалында алынған заттың сапалы екені белгілі болсын, яғни $P(A) = 0,91$. Осы алынған заттың екінші түрдегі құрылғымен жасалу ықтималдығы неге тең, яғни $P_A(B_2)$ неге тең?

Шешімі:

а) А оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын B_1, B_2, \dots, B_n болжамдардың біреуі орындалғанда орындалсын. Егер А оқиғасы орындалса, онда болжамдар ықтималдығы Бейес формуласымен бағаланады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (24.2)$$

бұл формуладағы $P(A)$ жоғарғыдағы (24.1) формуласымен есептеледі.

б) $P(B_2) = \frac{3}{10}$ - болжамның А оқиғасы орындалғанға дейінгі ықтималдығы, $P_A(B_2)$ шартты ықтималдығы А оқиғасы орындалғаннан кейінгі ықтималдығы.

Байес формуласын қолдансақ:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) P_{B_i}(A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0,9}{0,91} \approx 0,297.$$

с) Жауабы: $P(A) \approx 0,297$.

24.2 Тест тапсырмалары

1. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,6; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,675
- B) 0,765
- C) 0,810
- D) 0,521
- E) 0,745

2. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8, ал екіншісінікі 0,4 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) 1

3. 350 механизмдердің 160 - бірінші сортқа, 110 - екінші сортқа, 80 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын механизмдердің ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,01, ал екінші сортқа жататындардың арасында - 0,02, үшінші сортқа жататындардың арасында - 0,04 тең. Кез келген бір механизм алынды. Алынған механизмнің сапасыз екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,02
- B) 0,28

- C) 0,53
- D) 0,96
- E) 0,64

4. Құрылыс отрядында 70 бірінші курс, 30 екінші курс студенттері бар. Бірінші курс студенттерінің ішінде 10, ал екінші курс студенттерінің ішінде 5 қыз бар. Барлық қыздар кезекпен асханада жұмыс істейді. Кез келген бір күнде тексергенде асханада бірінші курста оқитын қыз жұмыс істеп жатқандығының ықтималдығы қандай?

- A) $\frac{70}{85}$
- B) $\frac{11}{77}$
- C) $\frac{15}{71}$
- D) $\frac{2}{11}$
- E) 1

5. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,3; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,9. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,83
- B) 0,76
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

6. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,8 болса, онда нысанаға тиген оқ екінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0

- B) $\frac{3}{5}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{7}{7}$
- E) $\frac{5}{7}$

7. Спортшылардың бір тобында 20 шаңғышы, 10 велосипедші бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы шаңғышылар үшін 0,85 тең, ал велосипедшілер үшін 0,7 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,8
- B) 0,9
- C) 0,6
- D) 0,7
- E) 0,3

8. Екі студент бірдей көлемді мәтінді компьютерге енгізді. Бірінші студенттің қате жіберу ықтималдығы 0,04, ал екіншісінікі 0,2. Тексергенде бір қате табылды. Қате жіберген бірінші студент екендігінің ықтималдығы қандай?

- A) 0,17
- B) 0,81
- C) 0,51
- D) 0,14
- E) 0,15

9. Цехта үш автоматты құрылғы барлығы 5500 бұйым жасап шығарды. Оның ішінде бірінші құрылғыда 1000, екіншісінде - 2000, ал үшіншісінде - 2500 бұйым жасалып шығарылды. Егер бірінші құрылғының сапасыз бұйым шығаруы 0,3, екіншісінікі 0,2, үшіншісінікі 0,4 болса, алынған кез келген бір бұйымның сапасыз болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,309
- B) 0,347
- C) 0,210

- D) 0,503
- E) 0,013

10. Жолаушы билет алу үшін үш кассаның біреуіне бару керек еді. Кассалардың әртүрлі қашықтықта орналасуына байланысты бұл кассаларға баруының сәйкес ықтималдықтары 0,5; 0,3; 0,2. Ал жолаушы келгенде кассаларда билеттің бар болуының ықтималдығы сәйкес кассалар үшін 0,6; 0,5; 0,4. Жолаушы билетті кассалардың бірінен алды. Билетті бірінші кассадан алу ықтималдығын табу керек.

- A) 0,566
- B) 0,614
- C) 0,144
- D) 0,544
- E) 0,853

11. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,1; 0,2; 0,7 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,9; 0,8; 0,6. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,84
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

12. Жолаушы орманда адасып жүріп алаңға шықты. Алаңнан 2 жол шығады екен. Осы жолдармен жүргенде орманнан шығудың сәйкес жолдар үшін ықтималдықтары 0,6; 0,4 . Егер жолаушының орманнан шыққаны белгілі болса, онда оның бірінші жолмен шыққандығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,3
- B) 0,6
- C) 0,5
- D) 0,8
- E) 1

13. 350 механизмдердің 120 - бірінші сортқа, 150 - екінші сортқа, 80 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын механизмдердің ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,2, ал екінші сортқа жататындардың арасында 0,3, үшінші сортқа жататындардың арасында 0,4 тең. Кез келген бір механизм алынды. Алынған механизмнің сапасыз екендігінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,18
- B) 0,29
- C) 0,53
- D) 0,96
- E) 0,64

14. Машинаның құрылысындағы 2 шамның біреуі жанып кеткен. Шамдардың жанып кетуінің сәйкес ықтималдықтары 0,3; 0,1. Жанып кеткен екінші шам екендігінің ықтималдығын табу керек?

- A) 0,25
- B) 0,72
- C) 0,57
- D) 0,75
- E) 1

15. Спортшылардың бір тобында 40 шаңғышы, 50 велосипедші бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы шаңғышылар үшін 0,75 тең, ал велосипедшілер үшін 0,9 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,83
- B) 0,95
- C) 0,67
- D) 0,79
- E) 0,35

16. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,3; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары

сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,9. Егер радиошам белгілі мерзімде жұмыс істеген болса, онда 1-ші партиядан алыну ықтималдығы қандай?

- A) 0,169
- B) 0,837
- C) 0,512
- D) 0,675
- E) 0,747

17. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,5; 0,3 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,8; 0,7; 0,6. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,69
- B) 0,81
- C) 0,52
- D) 0,75
- E) 0,45

18. Дайын бұйымдар қоймасындағы бұйымдардың 70%-ті бірінші автоматта, ал 30%-ті екінші автоматта дайындалған. Бірінші автоматтың сапалы бұйымдар дайындауының ықтималдығы 0,98, ал екіншісінікі 0,95-ке тең. Алынған кез келген бір бұйым сапалы болып шықты. Осы бұйымның бірінші автоматта дайындалғандығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,806
- B) 0,606
- C) 0,706
- D) 0,506
- E) 0,406

19. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,1; 0,7; 0,2 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,4; 0,5; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,55
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

20. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,4; 0,1; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,6. Егер радиошам белгілі мерзімде жұмыс істеген болса, онда 3-ші партиядан алыну ықтималдығы қандай?

- A) 0,16
- B) 0,45
- C) 0,51
- D) 0,67
- E) 0,74

21. 250 механизмдердің 60 - бірінші сортқа, 10 - екінші сортқа, 180 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын механизмдердің ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,04, ал екінші сортқа жататындардың арасында - 0,01, үшінші сортқа жататындардың арасында - 0,02 тең. Кез келген бір механизм алынды. Алынған механизмнің сапасыз екендігінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,584
- B) 0,024
- C) 0,333
- D) 0,962
- E) 0,646

22. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,8 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{1}{3}$

- B) $\frac{3}{7}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) 1

23. Қоймаға үш партия радиошам әкелінді. Алынған кез келген радиошамның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,5; 0,2; 0,3 тең. Ал әрбір партиялардағы радиошамдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,9; 0,7; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған радиошамның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,33
- C) 0,83
- D) 0,67
- E) 0,44

24. Екі атқыш бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,7 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,11
- B) 0,32
- C) 0,96
- D) 0,22
- E) 0,46

25. Спортшылардың бір тобында 30 шаңғышы, 20 велосипедші бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы шаңғышылар үшін 0,15 тең, ал велосипедшілер үшін 0,3 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,88
- B) 0,91

- C) 0,68
- D) 0,21
- E) 0,35

26. Екі аңшы бір-бірінен тәуелсіз бір аңға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ аңға тиді. Егер бірінші атқыштың аңға тигізу ықтималдығы 0,8, ал екіншісінікі 0,4 болса, онда аңға тиген оқ бірінші атқыштікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) 1

27. 350 балалар ойыншықтарының 160 - бірінші сортқа, 110 - екінші сортқа, 80 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын ойыншықтардың ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,01, ал екінші сортқа жататындардың арасында - 0,02, үшінші сортқа жататындардың арасында - 0,04 тең. Кез келген бір ойыншық алынды. Алынған ойыншықтардың сапасыз екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,02
- B) 0,28
- C) 0,53
- D) 0,96
- E) 0,64

28. «Жасыл ел» көгалдандыру отрядында 70 бірінші курс, 30 екінші курс студенттері бар. Бірінші курс студенттерінің ішінде 10, ал екінші курс студенттерінің ішінде 5 қыз бар. Барлық қыздар кезекпен асханада жұмыс істейді. Кез келген бір күнде тексергенде асханада бірінші курста оқитын қыз жұмыс істеп жатқандығының ықтималдығы қандай?

- A) $\frac{70}{85}$
- B) $\frac{11}{77}$
- C) $\frac{15}{71}$
- D) $\frac{2}{11}$
- E) 1

29. Қоймаға үш партия айналмалы аралар әкелінді. Алынған кез келген айналмалы аралардың осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,3; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы айналмалы аралардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,9. Осы партиялардың бірінен алынған айналмалы аралардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,83
- B) 0,76
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

30. Екі мерген бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,8 болса, онда нысанаға тиген оқ екінші мергендікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0
- B) $\frac{3}{5}$
- C) 1
- D) $\frac{4}{7}$
- E) $\frac{5}{7}$

31. Спортшылардың бір тобында 20 бадминтон, 10 бейсбол ойыншылары бар. Квалификациялық мөлшерді орындау

ықтималдығы бадминтон ойыншылары үшін 0,85 тең, ал бейсбол ойыншылары үшін 0,7 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,8
- B) 0,9
- C) 0,6
- D) 0,7
- E) 0,3

32. Екі оқушы бірдей өлең жолдарын компьютерге енгізді. Бірінші оқушының қате жіберу ықтималдығы 0,04, ал екіншісінікі 0,2. Тексергенде бір қате табылды. Қате жіберген бірінші оқушы екендігінің ықтималдығы қандай?

- A) 0,17
- B) 0,81
- C) 0,51
- D) 0,14
- E) 0,15

33. Бұйымдар жасайтын цехта үш электрлік жабдық барлығы 5500 құрылғы бөлшегін жасап шығарды. Оның ішінде бірінші электрлік жабдықта 1000, екіншісінде - 2000, ал үшіншісінде - 2500 құрылғы бөлшегі жасалып шығарылды. Егер электрлік жабдығының сапасыз құрылғы бөлшегін шығаруы 0,3, екіншісінікі 0,2, үшіншісінікі 0,4 болса, алынған кез келген бір құрылғы бөлшегінің сапасыз болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,309
- B) 0,347
- C) 0,210
- D) 0,503
- E) 0,013

34. Саяхатшы билет алу үшін үш кассаның біреуіне бару керек еді. Кассалардың әртүрлі қашықтықта орналасуына байланысты бұл кассаларға баруының сәйкес ықтималдықтары 0,5; 0,3; 0,2. Ал саяхатшы келгенде кассаларда билеттің бар болуының ықтималдығы сәйкес кассалар үшін 0,6; 0,5; 0,4. Саяхатшы билетті кассалардың

бірінен алды. Билетті бірінші кассадан алу ықтималдығын табу керек.

- A) 0,566
- B) 0,614
- C) 0,144
- D) 0,544
- E) 0,853

35. Құрылыс дүкеніне үш партия трансформаторлар әкелінді. Алынған кез келген трансформатордың осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,1; 0,2; 0,7 тең. Ал әрбір партиялардағы трансформаторлардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,9; 0,8; 0,6. Осы партиялардың бірінен алынған трансформатордың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,84
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

36. Саңырауқұлақ теруші орманда адасып жүріп алаңға шықты. Алаңнан 2 жол шығады екен. Осы жолдармен жүргенде орманнан шығудың сәйкес жолдар үшін ықтималдықтары 0,6; 0,4. Егер Саңырауқұлақ терушінің орманнан шыққаны белгілі болса, онда оның бірінші жолмен шыққандығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,3
- B) 0,6
- C) 0,5
- D) 0,8
- E) 1

37. Алынған 350 өлшеу құрылғыларының 120 - бірінші сортқа, 150 - екінші сортқа, 80 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын өлшеу құрылғыларының ішінде сапасыз механизм болуының ықтималдығы 0,2, ал екінші сортқа жататындардың арасында 0,3, үшінші сортқа жататындардың арасында 0,4 тең. Кез келген бір өлшеу құрылғысы алынды. Алынған өлшеу құрылғысының сапасыз екендігінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,18
- B) 0,29
- C) 0,53
- D) 0,96
- E) 0,64

38. Мотоцикл көлігінің 2 шамының біреуі жанып кеткен. Шамдардың жанып кетуінің сәйкес ықтималдықтары 0,3; 0,1. Жанып кеткен екінші шам екендігінің ықтималдығын табу керек?

- A) 0,25
- B) 0,72
- C) 0,57
- D) 0,75
- E) 1

39. Спортшылардың бір тобында 40 велокросс, 50 мотобол ойыншылары бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы велокросс ойыншылары үшін 0,75 тең, ал мотобол ойыншылары үшін 0,9 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,83
- B) 0,95
- C) 0,67
- D) 0,79
- E) 0,35

40. Қоймаға үш партия бра шамдары әкелінді. Алынған кез келген бра шамының осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,3; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы бра шамдарының белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,9. Егер бра шамы белгілі мерзімде жұмыс істеген болса, онда 1-ші партиядан алыну ықтималдығы қандай?

- A) 0,169
- B) 0,837
- C) 0,512
- D) 0,675
- E) 0,747

41. Дүкенге үш партия жарық беретін ленталар әкелінді. Алынған кез келген лентаның осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,2; 0,5; 0,3 тең. Ал әрбір партиялардағы ленталардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,8; 0,7; 0,6. Осы партиялардың бірінен алынған лентаның белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,69
- B) 0,81
- C) 0,52
- D) 0,75
- E) 0,45

42. Зауыттағы бұйымдардың 70%-ті бірінші құрылғыда, ал 30%-ті екінші құрылғыда дайындалған. Бірінші құрылғының сапалы бұйымдар дайындауының ықтималдығы 0,98, ал екіншісінікі 0,95-ке тең. Алынған кез келген бір бұйым сапалы болып шықты. Осы бұйымның бірінші құрылғыда дайындалғандығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,806
- B) 0,606
- C) 0,706
- D) 0,506
- E) 0,406

43. Сауда үйіне үш партия сақтандырғыштар әкелінді. Алынған кез келген сақтандырғыштың осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,1; 0,7; 0,2 тең. Ал әрбір партиялардағы сақтандырғыштардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,4; 0,5; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған сақтандырғыштың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,55
- C) 0,52
- D) 0,67
- E) 0,74

44. Құрылыс алаңына үш партия ұзартқыш сымдар әкелінді. Алынған кез келген ұзартқыш сымның осы партиялардың

әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,4; 0,1; 0,5 тең. Ал әрбір партиялардағы ұзартқыш сымдардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,7; 0,8; 0,6. Егер ұзартқыш сым белгілі мерзімде жұмыс істеген болса, онда 3-ші партиядан алыну ықтималдығы қандай?

- A) 0,16
- B) 0,45
- C) 0,51
- D) 0,67
- E) 0,74

45. Фабриканың 250 өнімінің 60 - бірінші сортқа, 10 - екінші сортқа, 180 - үшінші сортқа жатады. Бірінші сортқа жататын өнімнің ішінде сапасыз өнім болуының ықтималдығы 0,04, ал екінші сортқа жататындардың арасында - 0,01, үшінші сортқа жататындардың арасында - 0,02 тең. Кез келген бір өнім алынды. Алынған өнімнің сапасыз екендігінің ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,584
- B) 0,024
- C) 0,333
- D) 0,962
- E) 0,646

46. Екі тир ойыншысы бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші тир ойыншысының нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,8 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші ойыншыныкі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{3}{7}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) 1

47. Қоймаға үш партия автоматтар әкелінді. Алынған кез келген автоматтың осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,5; 0,2; 0,3 тең. Ал әрбір партиялардағы автоматтардың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары сәйкесінше 0,9; 0,7; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған автоматтың белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,76
- B) 0,33
- C) 0,83
- D) 0,67
- E) 0,44

48. Екі мерген бір-бірінен тәуелсіз бір нысанаға бір-бірден оқ атты. Сонда бір оқ нысанаға тиді. Егер бірінші мергеннің нысанаға тигізу ықтималдығы 0,6, ал екіншісінікі 0,7 болса, онда нысанаға тиген оқ бірінші мергендікі екендігінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,11
- B) 0,32
- C) 0,96
- D) 0,22
- E) 0,46

49. Спортшылардың бір тобында 30 сноуборд, 20 джиббинг ойыншылары бар. Квалификациялық мөлшерді орындау ықтималдығы сноуборд ойыншылары үшін 0,15 тең, ал джиббинг ойыншылары үшін 0,3 тең. Осы топтан алынған кез келген бір спортшының квалификациялық мөлшерді орындауының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,88
- B) 0,91
- C) 0,68
- D) 0,21
- E) 0,35

50. Қоймаға үш партия стартерлер әкелінді. Алынған кез келген стартердің осы партиялардың әрқайсысынан алынуының сәйкес ықтималдықтары 0,25; 0,5; 0,25 тең. Ал әрбір партиялардағы стартерлердің белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдықтары

сәйкесінше 0,7; 0,6; 0,8. Осы партиялардың бірінен алынған стартердің белгілі мерзімде жұмыс істеу ықтималдығы қандай?

- A) 0,675
- B) 0,765
- C) 0,810
- D) 0,521
- E) 0,745

25 БЕРНУЛЛИ, ПУАССОН ФОРМУЛАЛАРЫ, ЛАПЛАС ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ЕҢ ЫҚТИМАЛ САН

Бұл тараудағы есептер «Математика 2» пәнінің «Бернулли, Пуассон формулалары, Лаплас теоремалары және ең ықтимал сан» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

25.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Мысал 25.1: Нысананы тәуелсіз 6 рет оқ атылды. Әрқайсысында оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0,9$. Атылған тәуелсіз 6 оқтың тура төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

- а) n тәуелсіз сынақта A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(k) = P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k q^{n-k} \quad (25.1)$$

Бернулли формуласымен есептеледі, мұндағы $q = 1 - p$ (n неғұрлым аз болса).

- б) оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0,9$, бұдан $q = 0,1$.

Сынақтар саны $n=6$, ал $k=4$. Демек

$$P_6(4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} (0,9)^4 \cdot (0,1)^2 = 0,984.$$

- с) Жауабы: $P(A) \approx 0,984$.

Мысал 25.2: Әрбір 21 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,2 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

Шешімі:

- а) p ықтималдығы ең үлкен мән қабылдайтын $k = k_0$ мәнін *ең ықтимал сан* деп атаймыз:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (25.2)$$

- б) $n=21$ тәуелсіз сынақта A оқиғасының ықтималдығы $p=0,2$, мұндағы $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$ ең үлкен мән қабылдайтын $k = k_0$ мәнін *ең ықтимал сан* деп атаймыз:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \Rightarrow 21 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_0 \leq 21 \cdot 0,2 + 0,2 \Rightarrow 3,4 \leq k_0 \leq 4,4$$

Жауабы: $k_0 = 3$.

Мысал 25.3: Егер A оқиғасының әр сынақта орындалу ықтималдығы $p = 0,2$ –ге тең болса, онда 200 тәуелсіз сынақтарда A оқиғасының

- 40 рет орындалу ықтималдығын;
- 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдықтарын табу керек.

Шешімі:

- Лаплас теоремалары.* n - өте үлкен сан және $p > 0,1$ болған жағдайда, Лапласстың локалдық немесе интегралдық теоремасын қолданамыз.

Лапласстың локалдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізілгенде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad (25.3)$$

мұндағы $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының мәнін кестеден табамыз және $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Лапласстың интегралдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының k_1 -ден кем емес және k_2 -ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (25.4)$$

Бұл формуладағы

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (25.5)$$

Лаплас функциясы, мұндағы $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ және

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

b) а) есеп шарты бойынша: $n = 200; k = 40; p = 0,2; q = 0,8$

Муавр Лапласстың локалдык формуласын қолдансақ:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x)$$

$$\text{бұдан } x = \frac{40 - 200 \cdot 0,2}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0$$

Кестеден $\varphi(0) = 0,3989$, осыдан ізделінді ықтималдық:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot 0,3989 \approx 0,07$$

б) 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдығын табайық, есеп шарты бойынша:

$$n = 200; k_1 = 60; k_2 = 80; p = 0,2; q = 0,8$$

Муавр Лапласстың интегралдык формуласын қолданаық:

$$P_{200}(60,80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Интегралдың жоғарғы және төменгі шектерін есептейік:

$$x_1 = \frac{60 - 200 \cdot 0,2}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 3,54, \quad x_2 = \frac{80 - 200 \cdot 0,2}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 7,07.$$

Сонымен: $P_{200}(60,80) \approx \Phi(7,07) - \Phi(3,54)$, кестеден

$$\Phi(7,07) \approx 0,5; \quad \Phi(3,54) \approx 0,4996.$$

Бұдан ізделінді ықтималдық:

$$P_{200}(60,80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0,5 - 0,4996 \approx 0,0004.$$

с) Жауабы: $P_{200}(40) \approx 0,07, P_{200}(60,80) \approx 0,0004.$

Мысал 25.4: Телефон станциясында әрбір қоңырау шалу кезінде ақау болу ықтималдығы 0,002. Барлығы 1000 қоңырау шалынған болса, оның ішінде 9 ақау болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ($npq < 9$ болатындай) және $\lambda = np$ шамасы тұрақты болған жағдайда Пуассон формуласы қолданылады.

Пуассон теоремасы. Егер $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ болып және $\lambda = np \neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (25.6)$$

- b) Есептің шарты бойынша: $n=1000$, $k=9$, $p=0,002$.
Пуассон формуласы бойынша есептесек:

$$P_{1000}(9) = \frac{(1000 \cdot 0,002)^9}{9!} e^{-2} \approx 0,00019.$$

- c) Жауабы: $P_{1000}(9) \approx 0,00019$.

25.2 Тест тапсырмалары

1. Автоматты станокта стандартты деталь дайындау ықтималдығы 0,6-ға тең. Алынған 5 детальдің үшеуі стандартты деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,579
- B) 0,3456
- C) 0,4147
- D) 0,1888
- E) 1

2. Әрбір 16 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,7 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

- A) 10
- B) 13
- C) 11
- D) 14
- E) 12

3. Әрбір атыста нысанаға тигізу ықтималдығы 0,9-ге тең. 600 рет атқанда нысанаға 530 рет тигізудің ықтималдығы қандай?

- A) 0,091
- B) 0,087
- C) 0,021
- D) 0,042
- E) 0,065

4. Әр сынақта оқиғаның орындалу ықтималдығы 0,25-ке тең. Жасалған 243 сынақ кезінде оқиғаның 70 рет орындалу ықтималдығын табыңыз:

- A) 0,0412
- B) 0,0231
- C) 0,0518
- D) 0,0857
- E) 0,0055

5. Әр сынақта А оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,6-ға тең болса, онда 2400 сынақ кезінде 1400 рет А оқиғасы болу ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,0041
- B) 0,0149
- C) 0,0019
- D) 0,0086
- E) 0,005

6. Дүкенге 50 деталь келіп түсті. Егер стандартсыз детальдың болу ықтималдығы 0,05-ке тең болса, онда осы партияда стандартсыз деталь болуының ең ықтимал санын табыңыз:

- A) 5
- B) 4
- C) 3
- D) 2
- E) 1

7. Сапалы деталь жасаудың ықтималдығы 0,7-ге тең. Жасалған 5 детальдың ішінде үшеуі сапалы деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,4015
- B) 0,1847
- C) 0,3087
- D) 0,5175
- E) 0,0057

8. Зауыт дайындайтын бұйымдардың 60%-тін бірінші сортпен шығарады. Қабылдаушы 200 дайын бұйымды қабылдап алды. Осы 200 бұйымның ішінде 120-дан 150-ге дейін бірінші сортты бұйымдар болатындығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,665

- B) 0,534
- C) 0,499
- D) 0,187
- E) 0,678

9. Тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,5-ке тең. 196 сынақта оқиғаның 100 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,054
- B) 0,612
- C) 0,081
- D) 0,075
- E) 0,554

10. Дүкенге жіберілген 4000 сапалы бұйымның жол бойында зақым алу-бұзылу ықтималдығы 0,0005-ке тең. Ендеше дүкенге 3 бұзылған бұйым келу ықтималдығы неге тең?

- A) 0,8014
- B) 0,1804
- C) 0,4065
- D) 0,5123
- E) 0,6956

11. Сапалы деталь жасаудың ықтималдығы 0,4-ге тең. Жасалған 5 детальдың ішінде төртеуі сапалы деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,4015
- B) 0,1847
- C) 0,0768
- D) 0,5175
- E) 0,0057

12. Нысана бір рет оқ атқанда тигізу ықтималдығы 0,2-ке тең. Тәуелсіз 22 рет оқ атқанда нысанаға оқ тигізудің ең ықтимал санын табыңыз.

- A) 4
- B) 1
- C) 3

- D) 2
- E) 5

13. Егер әрбір ағаштың өсіп шығуының ықтималдығы 0,2-ге тең екендігі белгілі болса, онда отырғызылған 400 ағаштан 104 ағаштың өсіп шығуының ықтималдығы қандай болады?

- A) 0,0006
- B) 0,0087
- C) 0,0075
- D) 0,0086
- E) 0,0154

14. 100 сынақта мергеннің нысанаға тию ықтималдығы 0,8-ге тең. Нысанаға 75-тен кем емес және 90-нан артық емес рет дәл тиюінің ықтималдығын табу керек.

- A) 0,7252
- B) 0,2351
- C) 0,9189
- D) 0,8882
- E) 0,5102

15. Оқиғаның орындалу ықтималдығы әрбір тәуелсіз 100 сынақта тұрақты және 0,8-ге тең. Оқиғаның 75 рет орындалуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,0917
- B) 0,0457
- C) 0,0215
- D) 0,0426
- E) 0,0659

16. Нысана бір рет оқ атқанда тигізу ықтималдығы 0,85-ке тең. Тәуелсіз 25 рет оқ атқанда нысанаға оқ тигізудің ең ықтимал санын табыңыз.

- A) 20
- B) 11
- C) 30
- D) 22
- E) 12

17. Тәуелсіз сынақтарда оқиганың пайда болу ықтималдығы 0,2-ге тең. 6 сынақта оқиганың 2 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,246
- B) 0,615
- C) 0,387
- D) 0,871
- E) 1

18. Оқиганың орындалу ықтималдығы әрбір тәуелсіз 100 сынақта тұрақты және 0,8-ге тең. Оқиганың 90 рет орындалуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,0917
- B) 0,0457
- C) 0,0044
- D) 0,0426
- E) 0,0659

19. Зауытқа сапалы заттардың әкеліну ықтималдығы 0,9-ге тең. 600 заттың ішінде 530-ы сапалы болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,091
- B) 0,087
- C) 0,021
- D) 0,042
- E) 0,065

20. Кітапханадағы оқулықтардың ішінде «Математика» оқулығының кездесу ықтималдығы 0,25-ке тең. Алынған 243 оқулықтың 70-і «Математика» оқулығы болуының ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,0412
- B) 0,0231
- C) 0,0518
- D) 0,0857
- E) 0,0055

21. Лотереяда бір билетке ұтыс шығуының ықтималдығы 0,3-ке тең болса, алынған 10 билеттің ішінде ұтыс шығуының ең ықтимал саны қандай?

- A) 4
- B) 3
- C) 5
- D) 6
- E) 1

22. Теңгені 5 рет лақтырғанда елтаңбаның 2 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,3125
- B) 0,7147
- C) 0,5256
- D) 0,2631
- E) 0,4358

23. Дүкенге келіп түскен 4000 тауарлардың сапалық көрсеткіші өте жоғары болса, ал жолда зақым келу ықтималдығы 0,001-ке тең болса, онда дүкенге 3 сапасыз тауар келу ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,19
- B) 0,84
- C) 0,35
- D) 0,77
- E) 0,04

24. Егер әрбір сынақта оның орындалу ықтималдығы 0,6 болса, онда А оқиғасының 600 сынақта дәл 380 рет орындалу ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,0062
- B) 0,0082
- C) 0,0052
- D) 0,0017
- E) 0,0310

25. Оқу орнында жақсы оқитын студенттерді кездестіру ықтималдығы 0,6-ға тең болса, онда 2400 студенттің 1400 студенті жақсы оқитындығының ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,0041
- B) 0,0149
- C) 0,0019
- D) 0,0086
- E) 0,005

26. Тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,6-ға тең. 6 сынақта оқиғаның 2 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,885
- B) 0,517
- C) 0,138
- D) 0,956
- E) 0,696

27. Тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,6-ға тең. 10 тәуелсіз сынақта оқиғаның пайда болуының ең ықтимал саны қандай?

- A) 9
- B) 6
- C) 2
- D) 7
- E) 5

28. Зауыт дайындайтын бұйымдардың 60%-тін екінші сортпен шығарады. Қабылдаушы 200 дайын бұйымды қабылдап алды. Осы 200 бұйымның ішінде 120-дан 150-ге дейін екінші сортты бұйымдар болатындығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,665
- B) 0,534
- C) 0,499
- D) 0,187
- E) 0,678

29. Тест сұрақтарынан емтиханда жеңіл сұрақтардың келу ықтималдығы 0,5-ке тең. 196 сұрақтың 100 сұрағының жеңіл болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,054

- B) 0,612
- C) 0,081
- D) 0,075
- E) 0,554

30. Зауыт даярлаған 4000 сапалы бұйымның жол бойында бұзылу ықтималдығы 0,0005-ке тең. Дүкенге 3 бұзылған бұйым келу ықтималдығы неге тең?

- A) 0,8014
- B) 0,1804
- C) 0,4065
- D) 0,5123
- E) 0,6956

31. Егер әрбір ағаштың өсіп шығуының ықтималдығы 0,8-ге тең екендігі белгілі болса, онда отырғызылған 4 ағаштан 1 ағаштың өсіп шығуының ықтималдығы қандай болады?

- A) 0,0256
- B) 0,8112
- C) 0,7212
- D) 0
- E) 1

32. Белгілі бір оқиға 25 тәуелсіз сынақта 0,7 ықтималдықпен пайда болады. Оқиғаның пайда болуының ең ықтимал санын табу керек.

- A) 11
- B) 18
- C) 19
- D) 21
- E) 16

33. Әрбір дәннің өсіп шығуының ықтималдығы 0,2-ге тең. Егілген 400 дәннің 104 дәнінің өсіп шығуының ықтималдығы қандай болады?

- A) 0,0006
- B) 0,0087
- C) 0,0075
- D) 0,0086

E) 0,0154

34. 100 тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,8-ке тең. Оқиғаның 75-тен кем емес және 90-нан артық емес орындалу ықтималдығын табыңыз.

A) 0,7252

B) 0,2351

C) 0,9189

D) 0,8882

E) 0,5102

35. Әрбір атыста нысанаға тигізу ықтималдығы 0,8-ге тең. 500 рет атқанда нысанаға 420 рет тигізудің ықтималдығы қандай?

A) 0,0036

B) 0,0873

C) 0,0214

D) 0,0426

E) 0,0658

36. Фабрика жасап шығарған бұйымдардың 25 %-і сапасыз болатындығы белгілі еді. Тексеруге кез келген 8 бұйым алынды. Осы сегіз бұйымның алтауының сапасыз болуының ықтималдығы қандай?

A) 0,0248

B) 0,0346

C) 0,0038

D) 0,0812

E) 0,5

37. Әрбір 10 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,4 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

A) 5

B) 4

C) 3

D) 1

E) 2

38. Әр сынақта оқиғаның орындалу ықтималдығы 0,5-ке тең. Жасалған 240 сынақ кезінде оқиғаның 140 рет орындалу ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,4412
- B) 0,0018
- C) 0,5518
- D) 0,8857
- E) 0,1155

39. Әр сынақта А оқиғасының орындалу ықтималдығы 0,6-ға тең болса, онда 2500 сынақ кезінде 1500 рет А оқиғасы болу ықтималдығын табыңыз.

- A) 0,004
- B) 0,049
- C) 0,016
- D) 0,008
- E) 0,005

40. Зауыт дайындайтын бұйымдардың 50%-тін бірінші сортпен шығарады. Қабылдаушы 200 дайын бұйымды қабылдап алды. Осы 200 бұйымның ішінде 120-дан 110-ге дейін бірінші сортты бұйымдар болатындығының ықтималдығы қандай?

- A) 0,665
- B) 0,534
- C) 0,499
- D) 0,002
- E) 0,678

41. Автоматты станокта стандартты деталь дайындау ықтималдығы 0,2-ға тең. Алынған 5 детальдің екеуі стандартты деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,5791
- B) 0,2048
- C) 0,4145
- D) 0,1829
- E) 1

42. Дүкенге 20 деталь келіп түсті. Егер стандартсыз детальдың болу ықтималдығы 0,5-ке тең болса, онда осы партияда стандартсыз деталь болуының ең ықтимал санын табыңыз.

- A) 56
- B) 45
- C) 34
- D) 10
- E) 11

43. Тәуелсіз сынақтарда оқиғаның пайда болу ықтималдығы 0,6-ке тең. 195 сынақта оқиғаның 100 рет пайда болуының ықтималдығы қандай?

- A) 0,0541
- B) 0,6126
- C) 0,0815
- D) 0,0759
- E) 0,0027

44. Сапалы деталь жасаудың ықтималдығы 0,3-ге тең. Жасалған 5 детальдың ішінде 4 сапалы деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,4018
- B) 0,1847
- C) 0,0284
- D) 0,5173
- E) 0,0056

45. Дүкенге 30 деталь келіп түсті. Егер стандартсыз детальдың болу ықтималдығы 0,7-ке тең болса, онда осы партияда стандартсыз деталь болуының ең ықтимал санын табыңыз.

- A) 58
- B) 15
- C) 21
- D) 10
- E) 16

46. Автоматты станокта стандартты деталь дайындау ықтималдығы 0,3-ға тең. Алынған 4 детальдің екеуі стандартты деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,2646
- B) 0,3456
- C) 0,4147
- D) 0,1888
- E) 1

47. Әрбір 10 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,4 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

- A) 3
- B) 4
- C) 1
- D) 5
- E) 9

48. Дүкенге 30 деталь келіп түсті. Егер стандартсыз детальдың болу ықтималдығы 0,2 - ге тең болса, онда осы партияда стандартсыз деталь болуының ең ықтимал санын табыңыз.

- A) 5
- B) 4
- C) 6
- D) 2
- E) 1

49. Сапалы деталь жасаудың ықтималдығы 0,5-ге тең. Жасалған 3 детальдың ішінде біреуі сапалы деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,401
- B) 0,184
- C) 0,087
- D) 0,375
- E) 0,005

50. Сапалы деталь жасаудың ықтималдығы 0,1-ге тең. Жасалған 4 детальдың ішінде үшеуі сапалы деталь болуының ықтималдығын табу керек.

- A) 0,4015
- B) 0,1847
- C) 0,0768
- D) 0,5175
- E) 0,0036

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Ақжігітов Е.Ә. Математика 2: есептер жинағы / Е.Ә.Ақжігітов, М.Ш. Тілепиев. –Астана: С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ, 2015. –208 б.
- 2 Айдос Е.Ж. Жоғары математика: оқулық / Е.Ж. Айдос – Алматы: «Бастау», 2012. – 425 б.
- 3 Байарыстанов А.О. Жоғары математика теориясы және жаттығулар жинағы / А.О. Байарыстанов.– Алматы: «Нұр-Принт» ЖШС, 2018. – 371 б.
- 4 Дүйсек А.К. Жоғары математика: оқулық / А.К. Дүйсек, С.К. Қасымбеков. – Алматы: КБП, 2015. –409 б.
- 5 Саханов Н. Жоғары математика: оқулық / Н. Саханов, Б. Жаңбырбаев. – Алматы: Қайнар, 2016. –184 б.
- 6 Пискунов Н.С. Дифференциалдық және интегралдық есептеулер: оқулық / Н.С. Пискунов. –М.: Наука, 2015. – 266 б.
- 7 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. –М.: Наука, 2014. –315 б.
- 8 Такабаев К.К. СЫЗЫҚТЫҚ алгебра элементтері: оқу құралы / К.К. Такабаев, З.А. Ракишева, Б.А. Ильясова. –Астана: С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ, 2015. –206 б.
- 9 Тілепиев М.Ш. Математика 1: есептеу-графикалық жұмыстары / М.Ш. Тілепиев. –Астана: С. Сейфуллин атындағы ҚАТУ, 2016. –124 б.
- 10 Махмеджанов М.Н. Жоғары математика: оқулық / М.Н. Махмеджанов. –Алматы: Бастау, 2017.–397 б.
- 11 Әубәкір С.Б. Жоғары математика: оқулық / С.Б. Әубәкір. – Алматы: Қайнар, 2012. –320 б.
- 12 Бейсебай П.Б., Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: оқулық / П.Б. Бейсебай. –Астана: С. Сейфуллин атындағы ҚазАТЗУ, 2023. –392 б.
- 13 Бейсебай П.Б. Жоғары математика*: оқулық / П.Б. Бейсебай. –Астана: С. Сейфуллин атындағы ҚазАТЗУ, 2023. –296 б.
- 14 Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / П.Б. Бейсебай - Алматы, Alash Book, 2024. – 456 б.

Бейсебай Перизат Бейсебайқызы

**МАТЕМАТИКА 2 ПӘНІНЕН
ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫН ОРЫНДАУ
ҮЛГІЛЕРІ, ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ЖИНАҒЫ**

Оқу құралы

Бас редактор: Камбарова К.М.
Шығарушы редактор: Укенова Л.Н.
Дизайн, беттеу: Сламова А.Б.

ЖШС «Alash Book» баспасы»
Алматы қ., Желтоқсан к-сі, 96/98
Тел.: +7 777 880 08 05, +7 778 977 08 08
e-mail: info@alashbook.kz

Дайын түпнұсқаның сапасына толық сәйкестікте
басылуға 28.01.2025 ж. қол қойылды.
Пішімі 60x84 1/16. Көлемі 31 б.т.
Таралымы 500 дана