Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Бейсебай П.Б.

МАТЕМАТИКА 1

Оқулық

Астана
2026

ӘОЖ 51
КБЖ 22.1
Б38

Оқулық Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті Ғылыми кеңесінің отырысында басылымға ұсынылды (хаттама №17, 19.05.2026 ж.)

Пікір жазғандар:
Адамов А.А. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, техникалық ғылымдарының докторы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің «Математикалық және компьютерлік модельдеу» кафедрасының профессоры;
Бокаев А.Н. – физика-математика ғылымдарының докторы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің «Іргелі математика» кафедрасының профессоры;
Мұхамедиев Ғ.Х. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті математика кафедрасының қауымдастырылған профессоры;
Ақжігітов Е.Ә. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Халықаралық Астана университетінің математика кафедрасының қауымдастырылған профессоры.

Бейсебай П.Б.
Б38 Математика 1: оқулық / П.Б. Бейсебай – Астана, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2026. – 520 б.

ISBN 978-601-385-267-6
ISBN 978-601-385-270-6

Оқулық «Математика», «Жоғары математика 1», «Математика 1» пәндері бағдарламасы негізінде 6В06306 – «Ақпараттық қауіпсіздік жүйелері», 6В07102 - «Автоматтандыру және басқару», 6В06104 – «Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету» білім беру бағдарламалары бойынша және басқа да педагогикалық, инженер-техникалық мамандықтарда оқитын білім алушыларға арналып, қазақ тілінде жазылған.

Аталған жұмыста берілген теориялық мағлұматтар, әрбір мысалдардың толық сарапталған шешімдері студенттердің аталған пәндер бойынша білім сапасын, өз бетімен жұмыс істеу қабілеттілігін, қорытынды бақылау түрлеріне даярлықтарын арттыруға арналған.

ISBN 978-601-385-270-6 ӘОЖ 51
ISBN 978-601-385-270-6 КБЖ 22.1
© Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, 2026
© Бейсебай П.Б., 2026

МАЗМҰНЫ

	КІРІСПЕ	7
1	СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ	9
1.1	Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар	9
1.2	Квадрат матрица	14
1.3	Анықтауыш	16
1.4	Кері матрица	32
1.5	Тарихи мағлұматтар. Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары	34
1.6	Теориялық сұрақтар	36
2	СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ	38
2.1	Матрицаның рангісі	38
2.2	Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерінің негізгі анықтамалары	40
2.3	Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері	43
2.4	n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі	52
2.5	Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданылуы	53
2.6	Теориялық сұрақтар	56
3	ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ	58
3.1	Геометриялық және координаталық векторлар	58
3.2	Векторлардың скалярлық көбейтіндісі және оның қасиеттері	67
3.3	Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері	69
3.4	Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері	72
3.5	Векторлардың қолданбалары	74
3.6	Теориялық сұрақтар	79
4	ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ	81
4.1	Оху жазықтығындағы сызықтың теңдеуі	81
4.2	Жазықтықтағы түзудің теңдеулері	81
4.3	Түзулердің қиылысу нүктесін табу	88
4.4	Берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтық	89
4.5	Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары	90
4.6	Екінші ретті қисықтар	93

4.7 Теориялық сұрақтар 98
5 КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ 100
5.1 Жазықтық теңдеулері 100
5.2 Кеңістіктегі түзудің теңдеуі 104
5.3 Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары 106
5.4 Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш 107
5.5 Аналитикалық геометрия объектілерінің қолданбалары 108
5.6 Теориялық сұрақтар 111
6 МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ 112
6.1 Сандар жиыны 112
6.2 Функция, оның берілу тәсілдері 115
6.3 Функцияның қолданбалары 123
6.4 Теориялық сұрақтар 124
7 ШЕКТЕР 125
7.1 Сандық тізбек және оның шектері 125
7.2 Функцияның шегі 128
7.3 Функция және оның шегінің қолданбалары 134
7.4 Теориялық сұрақтар 137
8 КОМПЛЕКС САНДАР 138
8.1 Комплекс сандар ұғымының енгізілуі 138
8.2 Комплекс сан және оның жиыны 139
8.3 Комплекс санның алгебралық пішіні (түрі) 142
8.4 Түйіндес комплекс сан 147
8.5 Комплекс санның модулі 149
8.6 Комплекс санның геометриялық кескіні 151
8.7 Комплекс санның аргументі 152
8.8 Комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндері 155
8.9 Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару 157
8.10 Теориялық сұрақтар 159
9 ШЕКСІЗ АЗ ЖӘНЕ ШЕКСІЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ 162
9.1 Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар (ШАШ және ШҮШ) 162
9.2 Негізгі анықталмағандықтар 162
9.3 Тамаша шектер 163

9.4 Шексіз аз (үлкен) шамаларды салыстыру 165
9.5 Функцияның үзіліссіздігі 166
9.6 Функцияның үзіліс нүктелері 169
9.7 Аралықта үзіліссіз функциялар 171
9.8 Теориялық сұрақтар 173
10 БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ 174
10.1 Туынды ұғымы, оның механикалық және геометриялық мағынасы 174
10.2 Дифференциалдау ережелері 178
10.3 Жоғарғы ретті туындылар 185
10.4 Лопиталь ережесі 186
10.5 Теориялық сұрақтар 188
11 БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ 189
11.1 Функцияның дифференциалы 189
11.2 Күрделі функцияның дифференциалы 190
11.3 Функцияның жоғарғы ретті дифференциалы 190
11.4 Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы 191
11.5 Дифференциалданатын функция туралы теоремалар 192
11.6 Функцияны зерттеу 194
11.7 Туындының экономикада қолданылуы 200
11.8 Теориялық сұрақтар 201
12 АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ 202
12.1 Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл ұғымы 202
12.2 Анықталмаған интегралдың қасиеттері 204
12.3 Негізгі интегралдар кестесі 204
12.4 Интегралдаудың негізгі әдістері 206
12.5 Теориялық сұрақтар 212
13 РАЦИОНАЛ, ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ 213
13.1 Рационал өрнектердің интегралдануы 213
13.2 Тригонометриялық өрнектердің интегралдануы 219
13.3 Иррационал өрнектердің интегралдануы 222
13.4 Теориялық сұрақтар 224
14 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ, ҚАСИЕТТЕРІ, ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ НЕГІЗГІ ӘДІСТЕРІ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР 225
14.1 Анықталған интегралдың анықтамасы 225
14.2 Анықталған интегралдың қасиеттері 227

14.3	Ньютон – Лейбниц формуласы	228
14.4	Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі	229
14.5	Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау	230
14.6	Меншіксіз интегралдар	231
14.7	Теориялық сұрақтар	236
15	АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ	237
15.1	Жазық фигураның ауданын есептеу	237
15.2	Қисықтың доғасының ұзындығын табу	244
15.3	Дененің көлемін есептеу	247
15.4	Интегралдың экономикада қолданылуы	251
15.5	Теориялық сұрақтар	254
16	БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСТАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ОРЫНДАУ ҮЛГІЛЕРІ	256
17	ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЫҒАРУ ҮЛГІЛЕРІ	342
	ӘДЕБИЕТТЕР	519

КІРІСПЕ

Қазіргі заман талаптарына сәйкес педагогикалық және техникалық мамандарды даярлауда әрбір оқу пәнінің алатын орны айрықша маңызға ие. Атап айтсақ, осы орайда математикалық білімнің рөлі ерекше мәнге ие. Білім алушылардың жалпы теориялық және арнайы инженерлік пәндерді толыққанды меңгеруі үшін олардың инженерлік есептерді шешу барысында тәжірибе жинақтауы, іргелі ғылымдардың жетістіктерін тиімді пайдалануы, химия, физика және сызба геометриясы негіздерін игеруімен қатар математикалық ойлау қабілеті мен логикасын дамытуы қажетті шарт болып табылады.

Математикалық білім беру арқылы көзделетін басты мақсат – бүгінгі қоғамның әлеуметтік-экономикалық сұраныстарына жауап бере алатын, кәсіби құзыреттілігі жоғары тұлға қалыптастыру, даярлау. Бұл мақсат болашақ мамандардың нарықтық қатынастарды терең түсіну қабілетін, қажетті математикалық білім жүйесін тиімді қолдана білу дағдыларын, сонымен қатар саяси ахуалды саралай алатын және мәдениетті тұлға ретінде жаңаша ойлау қабілетін дамытуды көздейді.

«Математика 1» оқулығы «Математика», «Жоғары математика», «Математика 1» пәндерінің білім беру бағдарламасының талаптарына сәйкес жазылып, сызықтық және векторлық алгебра элементтері, жазықтықтағы және кеңістіктегі аналитикалық геометрия, математикалық талдау тарауларын қамтиды.

Әрбір тақырып бойынша берілген теориялық сұрақтар білім алушылардың пән бойынша теориялық білімдерін тереңдетіп, олардың математикалық диктант және коллоквиум түріндегі бақылау шараларына сапалы дайындық деңгейін қамтамасыз етуге мүмкіндік береді.

Ұсынылып отырған оқулықтың басқа оқулықтардан ерекшелігі үлгерімі төмен немесе белгілі себептермен сабақ босатқан, жазғы семестр білім алушыларының немесе басқа жоғары оқу орындарынан ауысып келген студенттердің пән айырмашылықтарын тапсыру мақсатында өз беттерімен емтиханға даярлануына арналған. Әрі өте қарапайым, оқырмандарға жетік тілде жазылып, тіптен әр тараудан тұратын емтиханға даярлық есептерінің үлгілері, олардың шығару жолдарының әдістері көрсетілген. «Математика», «Жоғары математика», «Математика 1» пәндерінің мазмұнын толық қамтитын

25 тараулардан, оның 4 тараулары теориялық сұрақтардан және 21 тараулары тест есептерінен құралған.

Оқулық соңында берілген бұл «Тест тапсырмалары және оларды шығару үлгілері» білім алушылардың ағымдық, аралық және емтихан жұмыстарына тақырыбына сай өтілген тақырыптар бойынша әр апта сайын даярлықтарын арттырады.

Кредиттік технология жүйесімен оқытуда студенттердің өзіндік жұмысына көп сағат бөлінген. Студент өзінің алған теориялық білімін практикада, өзіндік жұмыстарды орындауға қолдана білуі тиіс.

Қазіргі уақытта мемлекеттік тілге, оның ішінде ұлттық ғылыми тілді қалыптастыру қажеттілігі мемлекеттік деңгейге көтерілгендіктен оқулықтардың қай түрі болмасын мемлекетік тілде жазылуы тиіс.

Жоғары оқу орындарына арналған жоғары математика пәні бойынша қазақ тілінде жарық көрген дәрістер және тәжірибелік жаттығулар жинағы бар болғанымен, теориясына сай мысалдармен көмкерілген өзіндік жұмыстарды орындауға арналған оқулықтың жоқтың қасы. Сондай-ақ, бұл оқулық бейне материал және MICROSOFT POWERPOINT бағдарламасында даярланып MOOC.ENU.KZ, MOODLE.ENU.KZ платформаларында студенттерге қолжетімді болғандықтан оқу үрдісінде қолданылады.

«Математика 1» оқулығы педагогикалық, инженер-техникалық мамандықтарда оқитын білім алушыларға арналып ұсынылып отыр.

Ұсынған оқулығына өзінің сын-пікірлерін білдірген оқытушы - ғалымдарға, атап айтсақ, физика-математика ғылымдарының кандидаты, техникалық ғылымдарының докторы, профессор А.А. Адамовқа, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор А.Н. Бокаевқа және физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Ғ.Х. Мұхамедиевке, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Е.Ә. Ақжігітовке автор өз алғысын білдіреді.

1 СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

1.1 Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

1.1-анықтама. $m\times n$ *өлшемді матрица* немесе $(m\times n)$ - *матрицасы* деп

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}=(a_{ij})=\|a_{ij}\|,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

түріндегі m жол (жатық жол) мен n бағаннан (тік жолдан) тұратын тіктөртбұрышты кестені айтамыз. a_{ij} - *матрицаның элементі* деп аталады, мұндағы i, j индекстері сәйкесінше a_{ij} элементі орналасқан жол мен бағанның нөмірлерін көрсетеді.

A матрицасы, оның өлшемі көрсетіле отырып, $A(m\times n)$ немесе $A(m,n)$ түрінде де белгіленеді.

1.1-мысал: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасы - 2×3 өлшемді матрица. Матрицаның a_{21}, a_{13} элементтерін көрсетейік: $a_{21}=0, a_{13}=3$.

Тек бір жолдан немесе бір бағаннан тұратын матрицаны сәйкесінше *жол-матрица* немесе *баған-матрица* деп аталады:

$A(1,m)=(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m)$ - жол матрица,

$B(n,1)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - баған матрица.

1.2-мысал:

$A(1,3)=(1 \quad 2 \quad 3)$ - жол матрица,

$B(2,1)=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ - баған матрица.

1.2-анықтама. Элементтерінің барлығы нөлге тең матрица *нөлдік матрица* деп аталады. Нөлдік матрица әдетте O әрпімен белгіленеді:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ - *нөлдік матрица*.

1.3-анықтама. *Матрицалар тең* деп аталады, егер олардың
1) өлшемдері тең;
2) сәйкес элементтері тең болса.

$$A(m\times n)=\mathrm{B(s\times p)} \Leftrightarrow \mathrm{m=s,\ n=p},\ a_{ij}=b_{ij},\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

мұндағы a_{ij}, b_{ij} - сәйкесінше *A* және *B* матрицаларының элементтері.

1.3-мысал: $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{pmatrix}$ матрицалары тек $x=2$ және $y=3$ болғанда ғана тең болады.

Матрицаларға қолданылатын амалдар:

1. Матрицалар қосындысы

Бірдей өлшемді матрицалардың қосындысы деп олардың сәйкес элементтерінің қосындыларынан тұратын матрица айталады. *A, B* матрицаларының қосындысы $A+B$ түрінде белгіленеді.

Егер

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

болса, онда

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

болады.

1.4-мысал: $A=\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ матрицаларының қосындысын табыңыз.

Шешімі:

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4-1 & 6+7 & -2-5 \\ 2+3 & -5-4 & 8-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 13 & -7 \\ 5 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ескерту. Қосынды анықтамасынан қосынды ұғымы тек бірдей өлшемді матрицалар үшін ғана тән екендігі шығады.

1.5-мысал:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -5 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрицаларының өлшемдері бірдей болмағандықтан, олардың қосындысының мағынасы болмайды.

2. Матрицаны санға көбейту

Матрицаның санға көбейтілуі деп матрицаның әрбір элементін осы санға көбейткенде пайда болған матрица аталады. α саны мен A матрицасының көбейтіндісі $\alpha \cdot A$ түрінде белгіленеді.

Анықтамадан, егер $A = (a_{ij})$ болса, онда

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$$

болатыны шығады.

1.6-мысал:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 48 \\ 30 & 24 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.4-анықтама. Егер екі матрицаның қосындысы нөлдік матрицаға тең болса, онда олар *қарама-қарсы матрицалар* деп аталады.

A матрицасына қарама-қарсы матрица $-A$ түрінде белгіленеді:

$$-A + A = 0.$$

Анықтамадан

$$-A = (-1) \cdot A$$

болатыны шығады.

1.5-анықтама. *Бірдей өлшемді* A, B *матрицаларының айырмасы* деп $A + (-B)$ матрицасы аталады. A, B матрицаларының айырмасы $A - B$ түрінде белгіленеді.

Анықтамадан

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

болса

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

болатыны шығады.

1.7-мысал: $A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $4A-2B$ матрицасын табыңыз.

Шешімі:

$$4A-2B=4\begin{pmatrix}10 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 12\\ 20 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 10 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 8\\ 10 & 10\end{pmatrix}.$$

Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттері:

1. $A+O=O+A$;
2. $A+B=B+A$ (коммутативтілік-ауыстырымдылық);
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативтілік-терімділік);
4. $A-A=O$;
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
6. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

мұндағы α, β - сандар, ал A, B матрицалар.

3. Матрицаларының көбейтіндісі

1.6-анықтама. *$m\times n$ өлшемді $A=(a_{ij})$ матрицасы мен $n\times p$ өлшемді $B=(b_{jk})$ матрицаларының $A\cdot B$ көбейтіндісі* деп i жолымен k бағанында орналасқан c_{ik} элементі

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk},\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p}$$

теңдігімен анықталатын $m\times p$ өлшемді C матрицасы аталады.

A, B матрицаларының көбейтіндісі $A\cdot B$ түрінде белгіленеді.

$$A\cdot B=(c_{ik})=(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}),\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p}.$$

Анықтамадан:

1. екі матрицаның көбейтіндісі ұғымының тек сол жақтағы матрицаның бағандар саны оң жақтағы матрицаның жолдар санына тең матрицалар үшін ғана тән болатыны шығады:
   $A(m\times n)B(s\times p)$ - мағыналы $\Leftrightarrow n=s$;
2. жалпы жағдайда $A\cdot B\neq B\cdot A$ болатыны, яғни матрицалар көбейтіндісінің ауыстырмалы (коммутативті) болмайтыны шығады;
3. $A\cdot B$ көбейтіндісінің i жолы мен j бағанында орналасқан c_{ij} элементінің сол жақтағы A матрицасының i жолы мен оң жақтағы

B матрицасының j бағанының сәйкес элементтерінің көбейтінділерінің қосындысына тең болатыны шығады.

1.8-мысал: $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A$ көбейтінділерін табыңыз.

Шешімі:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+3\cdot 7 & 0\cdot 2+3\cdot 6\\ 5\cdot 1+4\cdot 7 & 5\cdot 2+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 18\\ 33 & 34\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 4\\ 7\cdot 0+6\cdot 5 & 7\cdot 3+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 11\\ 30 & 45\end{pmatrix}.$$

Есептеуіміз бойынша $A\cdot B\neq B\cdot A$.

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

көбейтіндісі болмайды, себебі сол жақтағы матрицаның бағандарының саны оң жақтағы матрицаның жолдар санына тең емес: $2\neq 3$.

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 0+0\cdot 5 & 4\cdot 3+0\cdot 4\\ 0\cdot 0+3\cdot 5 & 0\cdot 3+3\cdot 4\\ 1\cdot 0+5\cdot 5 & 1\cdot 3+5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 15 & 12\\ 25 & 23\end{pmatrix}.$$

1.7-анықтама. Егер $A\cdot B=B\cdot A$ болса, онда A және B матрицалары *ауыстырмалы* матрицалар деп аталады.

1.9-мысал: $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ матрицалары үшін

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3+0\cdot 0 & 5\cdot 0+0\cdot 3\\ 2\cdot 3+(-3)\cdot 0 & 2\cdot 0+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0\\ 6 & -9\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 5+0\cdot 2 & 3\cdot 0+0\cdot(-3)\\ 0\cdot 5+3\cdot 2 & 0\cdot 0+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0\\ 6 & -9\end{pmatrix},$$

яғни $A\cdot B=B\cdot A$, олай болса A және B матрицалары - ауыстырмалы матрицалар.

Қосынды мен көбейтінділердің қасиеттері:

1. $A(BC)=(AB)C$;
2. $A(B+C)=AB+AC$;
3. $(A+B)C=AC+BC$;
4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$.

мұндағы α - сан, ал A, B, C - матрицалар.

1.8-анықтама. A матрицасының жолдарын сәйкес бағандарымен алмастыруды A матрицасын *транспонирлеу (тасымалдау)* дейміз де, пайда болған матрица *транспонирленген (тасымалданған) матрица* деп аталады. Транспонирленген матрица A^T түрінде белгіленеді.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.10-мысал: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасын транспонирлеңіз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонирлеу амалының қасиеттері:

1. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
2. $(AB)^T=B^TA^T$.

1.2 Квадрат матрица

1.9-анықтама. Егер матрицаның жолдар саны мен бағандар саны тең болса, онда матрица *квадрат (текше, шаршы) матрица* деп аталады.

$A(n\times n)$ - квадрат матрицасы n - *ші ретті квадрат матрица* деп атаймыз.

1.10-анықтама. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - $(n\times n)$ квадрат матрицаның

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ бірдей индексті элементтері *бас диагональ элементтері*, ал $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ элементтері *қосалқы диагональ элементтері* деп аталады.

1.11-мысал: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ квадрат матрицасының

- бас диагональ элементтері: $4, 0, 6$;
- қосалқы диагональ элементтері: $3, 0, 5$.

1.11-анықтама. Бас диагональ элементтерінен басқа элементтері нөлге тең квадрат матрица *диагональдық матрица* деп аталады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - диагональдық матрица.

1.12-мысал: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональдық матрицалар.

1.12-анықтама. Бас диагональ элементтерінің барлығы бірге тең диагональдық матрица *бірлік матрица* деп аталады. Бірлік матрица E әрпімен белгіленеді.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$ - бірлік матрица.

Өлшемі E матрицасының өлшемімен бірдей кез келген A матрицасы үшін

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

теңдіктері орынды болады.

1.13-анықтама. Бас диагональдық элементтерінен төмен (жоғары) орналасқан барлық элементтері нөлге тең квадрат матрица *үшбұрышты* матрица деп аталады. Үшбұрышты матрицалар *жоғарғы үшбұрышты* және *төменгі үшбұрышты* болып екі түрге бөлінеді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - жоғарғы үшбұрышты матрица;

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ - төменгі үшбұрышты матрица.

1.3 Анықтауыш

Анықтауыш ұғымын енгізу үшін келесі ұғымдарды енгіземіз.

1.14-анықтама. n *натурал санының факториалы* деп

$$n!=1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$$

санын айтамыз.

1.13-мысал: $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$

Ескерту. $0!=1.$

1.15-анықтама. Берілген бірнеше санның қандай да бір ретпен орналасуы *ауыстыру* деп аталады.

Тұжырым. Берілген n саннан тұратын барлық ауыстырулар саны $n!$ санына тең болады.

1.14-мысал: 1, 3, 4, 9 сандарынан тұратын барлық ауыстырулар саны

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

санына тең:

№	Ауыстыру	№	Ауыстыру	№	Ауыстыру	№	Ауыстыру
1	1, 4, 9, 3	**7**	9, 1, 3, 4	**13**	1, 9, 3, 4	**19**	9, 3, 1, 4
2	4, 1, 9, 3	**8**	3, 1, 9, 4	**14**	4, 9, 3, 1	**20**	3, 9, 1, 4
3	9, 1, 4, 3	**9**	1, 9, 4, 3	**15**	9, 4, 3, 1	**21**	1, 3, 9, 4
4	3, 1, 4, 9	**10**	4, 9, 1, 3	**16**	3, 4, 9, 1	**22**	4, 3, 9, 1
5	1, 4, 3, 9	**11**	9, 4, 1, 3	**17**	1, 3, 4, 9	**23**	9, 3, 4, 1
6	4, 1, 3, 9	**12**	3, 4, 1, 9	**18**	4, 3, 1, 9	**24**	3, 9, 4, 1

1.16-анықтама. Егер ауыстырудың қандай да бір екі санын салыстырғанда сол жақтағы сан оң жақтағы саннан үлкен болып шықса, онда ауыстырудың осы екі саны (жұбын) *инверсия* деп аталады.

1.15-мысал: 9, 3, 1, 4 ауыстыруының инверсияларының санын анықтау керек.

Шешімі: Ауыстырудың екі санынан, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған барлық жұптары:

(9, 3), (9, 1), (9, 4), (3, 1), (3, 4), (1, 4).

1. (9, 3) - 9 > 3, сондықтан (9, 3) - инверсия.
2. (9, 1) - 9 > 1, сондықтан (9, 1) - инверсия.
3. (9, 4) - 9 > 4, сондықтан (9, 4) - инверсия.
4. (3, 1) - 3 > 1, сондықтан (3, 1) - инверсия.
5. (3, 4) - 3 < 4, сондықтан (3, 4) - инверсия емес.
6. (1, 4) - 1 < 4, сондықтан (1, 4) - инверсия емес.

9, 3, 1, 4 ауыстыруында барлығы 4 инверсия бар:

(9,3), (9,1), (9,4), (3,1).

Ескерту.

1) Анықтамадан инверсия ұғымы тек құрамындағы сандардың саны екіден кем болмайтын ауыстыруларға ғана тән екендігі шығады.
2) Ауыстыру бір ғана саннан тұрған жағдайда инверсия саны нөлге тең деп ұйғарамыз.

1.17-анықтама. n - ретті квадрат матрицасының *анықтауышы* немесе *детерминанты* деп келесі шарттарды қанағаттандыратын алгебралық қосынды айталады:

1) қосынды $n!$ қосылғыштардан тұрады;

2) әрбір қосылғыш матрицаның әр бір жолы мен бағанынан бір бірден ғана алынған n элементінің өз таңбасымен немесе қарама-қарсы таңбамен алынған көбейтіндісі болады;
3) егер көбейткіштердің бірінші индекстерінің ауыстыруының инверсияларының саны мен екінші индекстерінің ауыстыруының инверсияларының санының қосындысы екіге бөлінетін сан болса, онда көбейтінді өз таңбасымен алынады, болмаса көбейтінді қарама-қарсы таңбамен алынады.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицасының *анықтауышы* $\det A$, $|A|$ немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

түрінде белгіленеді.

1.16-мысал: $A=(a_{11})$ бірінші ретті матрицасының анықтауышын табу керек.

Шешімі: Есептің шарты бойынша n=1.

Анықтауыштың анықтамасының 1) шарты бойынша анықтауыш $n!=1!=1$ қосылғыштан тұрады.

Анықтаманың 2) *шарты бойынша* анықтауыш өз таңбасымен немесе қарама қарсы таңбамен алынған 1 -жол мен 1 - бағанға тиісті жалғыз a_{11} санына тең болады.

Анықтаманың 3) *шарты бойынша* a_{11} санының бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары жалғыз 1 санынан тұратындықтан, ескертудің 2) тармағы бойынша, олардың инверсиялары нөлге тең болады. Онда олардың инверсияларының қосындысы нөлге тең, яғни екіге бөлінетін сан болады да, анықтаманың 3) шарты бойынша a_{11} саны өз таңбасымен алынады.

Сонымен, $A=(a_{11})$ *бірінші ретті матрицасының анықтауышын оның жалғыз* a_{11} элемсентіне тең болатынын алдық:

$$|A| = |(a_{11})| = a_{11}.$$

1.17-мысал: $A = (-5) \Rightarrow |A| = -5$.

1.18-мысал: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.

Шешімі: Берілгені бойынша анықтауыштың реті $n = 2$.

Анықтауыштың анықтамасының 1) шарты бойынша анықтауыш $n! = 2! = 2$ қосылғыштан тұрады.

Анықтаманың 2) *шарты бойынша* қосынды өз таңбасымен немесе қарама-қарсы таңбамен алынған $a_{11}a_{22}$ (a_{11} - бірінші жолмен бірінші бағанның элементі, a_{22} - екінші жолмен екінші бағанның элементі)және $a_{12}a_{21}$ (a_{12} - бірінші жолмен екінші бағанның элементі, a_{21} - екінші жолмен бірінші бағанның элементі) көбейтінділерінің қосындысы болады.

Анықтаманың 3) *шарты бойынша* $a_{11}a_{22}$ және $a_{12}a_{21}$ көбейтінділерінің қандай таңбамен алынатынын анықтаймыз:

- $a_{11}a_{22}$ көбейтіндісінің көбейткіштерінің бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары, сәйкесінші 1,1 және 2,2 түрінде жазылады. Бұл екі ауыстырудың әрқайсысының инверсияларының саны нөлге тең (екеуінде де инверсия жоқ) болғандықтан, олардың инверсияларының сандарының қосындысы нөлге тең, яғни екіге бөлінетін сан болады. Онда, 3) шарты бойынша, $a_{11}a_{22}$ көбейтіндісі өз таңбасымен алынады.
- $a_{12}a_{21}$ көбейтіндісінің көбейткіштерінің бірінші және екінші индекстерінің ауыстырулары, сәйкесінше 1,2 және 2,1 түрінде жазылады. Бұл екі ауыстырудың біріншісінің инверсияларының саны нөлге тең (инверсия жоқ) де, ал екіншісінің инверсияларының саны бірге тең (себебі 2>1) болғандықтан, олардың инверсияларының сандарының қосындысы бірге тең, яғни екіге бөлінбейтін сан болады. Онда, 3) шарты бойынша, $a_{12}a_{21}$ көбейтіндісі қарама - қарсы таңбамен алынады.

  Сонымен, анықтауыштың $a_{11}a_{22}$ және - $a_{12}a_{21}$ қосылғыштарының қосындысы болатынын алдық:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Бұл теңдіктен екінші ретті анықтауыштың бас диагональ элементтерінің көбейтіндісінен қосалқы диагональ элементтерінің көбейтіндісін азайтқанға тең болатыны шығады.

1.19-мысал: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеңіз.

Шешімі:. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 23.$

1.1-тапсырма. Тәжірибелік сабақта үшінші ретті анықтауышты анықтама бойынша өз беттеріңізбен есептеп көрсету керек.

Бұл мысалдан жоғары ретті анықтауышты оның анықтамасы бойынша есептеудің өте күрделі әрі көп есептеулерді талап ететінін көруге болады. Дегенмен, анықтауыштардың қасиеттерін қолдануға негізделген, анағұрлым жеңіл есептеу әдістері де бар. Енді осы қасиеттер мен оларды тұжырымдауға қажетті ұғымдарға тоқталайық.

Анықтауыштың элементінің миноры мен алгебралық толықтауышы

1.18-анықтама. n - ші ретті $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{ij} элементінің *миноры* деп, осы анықтауыштың a_{ij} элементі орналасқан i - жолы мен j - бағанын сызып тастағанда пайда болатын $n-1$ - ретті анықтауыш аталады.

a_{ij} элементінің миноры M_{ij} түрінде белгіленеді.

1.20-мысал: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 6 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{23}, a_{31} элементтерінің минорларын табайық:

Шешімі:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}, \; M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

1.19-анықтама. n - ші ретті

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының a_{ij} *элементінің алгебралық толықтауышы* деп $(-1)^{i+j}$ саны мен M_{ij} минорының көбейтіндісі аталады.

a_{ij} *элементінің алгебралық толықтауышы* A_{ij} түрінде белгіленеді:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

1.21-мысал: $\begin{vmatrix} 5 & 9 & 8 \\ -1 & 2 & -6 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{21}, a_{33} элементтерінің алгебралық толықтауыштарын табайық:

Шешімі:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ -7 & 4 \end{vmatrix};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың қасиеттері

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

теңдігінің оң жағын $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ анықтауышының

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -a_{12}, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = a_{11}.$$

Алгебралық толықтауыштары арқылы өрнектесек

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}$$

теңдіктерін аламыз.

Бұл теңдіктерден екінші ретті анықтауыш кез келген жолының немесе бағанының элементтерінің өздерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысына тең болатынын көреміз.

Екінші ретті анықтауыштың бұл қасиеті кез келген анықтауышқа тән болады.

Ескерту. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда оның анықтауышы не функция не сан болуы мүмкін.

1.22-мысал: $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

1.23-мысал: $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ 1 & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1.$

1 – қасиет. Анықтауыш кез келген жолының немесе бағанының элементтерінің өздерінің алгебралық толықтауыштарына көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1.1)$$

немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (1.2)$$

(1.1) теңдігі *анықтауыштың i жолы бойынша жіктелінуі*, ал (1.2) теңдігі *анықтауыштың j бағаны бойынша жіктелінуі* деп аталады.

1.24-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші жолы бойынша жіктеп есептеңіз.

Шешімі: (1.1) формуласында $i = 2$ және $n = 3$ деп аламыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \left|\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}\right| =$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2\cdot 6 - 3\cdot(-3)) + 0(1\cdot 6 - 5\cdot 3) - 4(1\cdot(-3) - 5\cdot 2) = 42 + 0 + 52 = 94.$$

1.25-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауышын бірінші бағаны бойынша жіктеп есептеңіз.

Шешімі: (1.2) формуласында $j = 1$ және $n = 3$ деп аламыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \left|\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}\right| =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(0\cdot 6 - 4\cdot(-3)) + 2(2\cdot 6 - 3\cdot(-3)) + 5(2\cdot 4 - 3\cdot 0) = 12 + 42 + 40 = 94.$$

1.1-салдар. Егер анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

Салдар анықтауыштың барлық элементтері нөлге тең жол (баған) бойынша жіктелінуінің нөлге тең болатынынан шығады.

1.26-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

2 - қасиет. Анықтауыштың жолдарын (бағандарын) сәйкес бағандармен (жолмен) алмастырғаннан анықтауыш өзгермейді, яғни матрица мен транспонирленген матрицаның анықтауыштары тең болады:

$$|A| = |A^T|.$$

Анықтауыштың бұл қасиеті оның A матрицасының i-ші жолы бойынша жіктелінуі мен A^T матрицасының i-ші бағаны бойынша жіктелінуінің тең болатындықтарынан шығады.

1.27-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 17$ және $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 17$, яғни $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 17.$

3 - қасиет. Егер екі жолдың (бағанның) орындарын алмастырсақ, онда анықтауыш таңбасын өзгертеді:

Дәлелдеуі: n – ші ретті анықтауыштың $n!$ қосылғыштарының әрқайсысын көбейткіштері бірінші индекстер инверсияларының саны нөлге тең болатын $1,2,\ldots,n$ ауыстыруына сәйкес ретпен жазып аламыз. Екінші индекстер ауыстыруының инверсияларының саны S болсын. Инверсиялар сандарының қосындысы $0+s=s$ санына тең болады.

Анықтауышытң k-шы жолымен $k+l$ – ші жолдарының орындарын ауыстырсақ, көбейтіндінің көбейткіштерінің құрамы сақталады да, бірінші индекстердің ауыстыруының m индексі мен $k+l$ индексінің орындары ауысады, яғни

$1,2,\ldots,m-1,m,m+1,\ldots,k+l-1,k+l,k+l+1,\ldots,n$

ауыстыруы

$1,2,\ldots,m-1,k+l,m+1,\ldots,k+l-1,m,k+l+1,\ldots,n$

ауыстыруына түрленеді.

Соңғы ауыстырудың

$(k+l),\ldots,(k+l-1),(m+1,m),\ldots,(k+l-1)$

инверсияларының саны $2l-1$ болады да, жолдардың орындарын ауыстырғаннан кейін инверсиялар қосындысы $2l-1+s$ санына тең болады. $2l-1$ – тақ сан болғандықтан, S пен $2l-1+s$ – жұптықтары әртүрлі сандар болады да, алғашқы ауыстыру мен соңғы ауыстыруға сәйкес қосылғыштар қарама қарсы таңбалы болады. Олай болса оларға сәйкес қосынды да, яғни алғашқы анықтауыш пен ауыстыру нәтижесінде алынған анықтауыштар тек таңбаларымен өзгешеленетін анықтауыштар болады.

1.28-мысал:

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ (екі жолдың алмасуы),

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ (екі бағанның алмасуы).

4 - қасиет. Бірдей екі жолы (бағаны) бар анықтауыш нөлге тең болады.

Дәлелдеуі: Бірдей екі жолы бар анықтауыш Δ санына тең болсын.

Біріншіден, екі бірдей жолды ауыстырғаннан анықтауыштық жолдары өзгермейтіндіктен, пайда болған анықтауыш та Δ санына тең болады.

Екіншіден, 3 – ші қасиет бойынша, пайда болған анықтауыш $-\Delta$ санына тең болады.

Нәтижесінде $\Delta = -\Delta$, яғни $\Delta = 0$ теңдігін аламыз.

1.29-мысал:

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (алғашқы екі жолдың сәйкес элементтері тең);

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 7 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (1 және 3 бағандардың сәйкес элементтері тең).

5 – қасиет.

$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0,$ егер $i \neq j.$

Анықтауыштың бұл қасиеті теңдіктің оң жағындағы қосындының i - ші және j - ші жолдары бірдей болатын нөлге тең анықтауыштың j - ші жолы бойынша жіктелуін беретінінен шығады.

6 – қасиет. Анықтауыштың жолының (бағанының) элементтерінің ортақ көбейткішін анықтауыш белгісінің алдына шығарға болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka_{i1} \ldots ka_{ij} \ldots ka_{in} & = k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} \ldots & a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots & a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} \ldots & a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots ka_{1j} \ldots a_{1n} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1} \ldots ka_{ij} \ldots a_{in} & = k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} \ldots ka_{nj} \ldots a_{nn} & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots & a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} \ldots & a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Анықтауыштың бұл қасиеті оның аталынған жолы (бағаны) бойынша жіктелуінен шығады.

1.30-мысал:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 & 2\cdot 7 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

7 – қасиет. Егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.
Анықтауыштың бұл қасиет оның 4, 6 қасиеттерінің салдары болады.

1.31-мысал:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$ (алғашқы екі жолдың элементтері пропорционал);

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0$$ (соңғы екі бағанның элементтері пропорционал).

8 – қасиет. Егер анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтері қосылғыштар саны бірдей қосындылардан тұратын болса, онда анықтауыш сол жолдың (бағанның) элементтері жеке қосылғыштар болып табылатын анықтауыштардың қосындысына тең:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \dots & b_{kn}+c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k1} & \dots & b_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k1} & \dots & c_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеуі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \dots & b_{kn}+c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

анықтауышын k-шы жолы бойынша жіктесек

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \dots & b_{kn}+c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (b_{k1}+c_{k1})A_{k1} + (b_{k2}+c_{k2})A_{k1} + \dots +$$

$$+(b_{kn}+c_{kn})A_{k1} = (b_{k1}A_{k1} + b_{k2}A_{k1} + \dots + b_{kn}A_{k1}) + (c_{k1}A_{k1} + c_{k2}A_{k1} + \dots + c_{kn}A_{k1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k1} & \dots & b_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k1} & \dots & c_{k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

теңдігін аламыз.

9 – қасиет. Анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) элементтерін, оларды алдын ала бір санға көбейтіп алып, басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қосқаннан анықтауыш өзгермейді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың бұл қасиеті оның 7, 8 қасиеттерінің салдары болады.

1.32-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$ | 9-қасиетті қолданамыз:
1) 2-ші жолдың элементтеріне 1-ші жолдың сәйкес элементтерін оларды алдын ала 2- ге көбейтіп алып қосамыз;
2) 3-ші жолдың элементтеріне 1-ші жолдың элементтерін, оларды алдын ала (-5)-ке көбейтіп алып қосамыз. | =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{1-ші бағанның элемент-} \\ \text{теріне жіктейміз} \end{array} \right| = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -9 & -9 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1\cdot 1\cdot(-27-(-9)\cdot 10) = 63.$$

1.33-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \underline{\underline{R_1 + 3R_2}} \begin{vmatrix} 10 & 29 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ немесе $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 + (-1)C_2}} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

10 – қасиет. Матрицалардың көбейтіндісінің анықтауышы көбейткіштердің анықтауыштарының көбейтіндісіне тең болады. Анықтауыштың бұл қасиеті оның 6, 8 қасиеттерінің салдары болады.

Анықтауышты есептеу тәсілдері.

1. Үшінші ретті анықтауышты есептеу тәсілдері

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ анықтауышын бірінші жолы бойынша жіктесек

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

теңдігін аламыз. Теңдіктің оң жағындағы екінші ретті анықтауыштарға жоғарыда келтірілген

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

формуласын қолдансақ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (1.3)$$

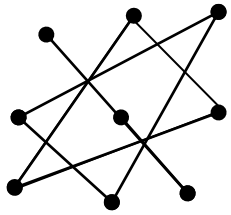
теңдігін аламыз.

(1.3) теңдігінің оң жағындағы қосындысының әрбір қосылғышы анықтауыштың үш элементінің көбейтіндісі түрінде анықталған және бұл көбейтінділердің алғашқы үшеуі өз таңбасымен (+), соңғы үшеуі қарама қарсы таңбамен (-) алынған.

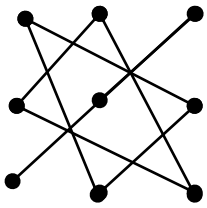
Біз енді осы көбейтінділер мен олардың таңбаларын анықтаудың *үшбұрыштар* және *Саррюс әдісі* деп аталатын екі қарапайым тәсілін келтірейік.

1.1 Үшбұрыштар әдісі

(1.3) теңдігінің оң жағындағы көбейтінділерді құру схемары:



- өз таңбасымен алынатын $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ көбейтінділерді құру схемасы;



- қарама қарсы таңбамен алынатын $a_{13}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{23}a_{32}a_{11}$ көбейтінділерді құру схемасы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

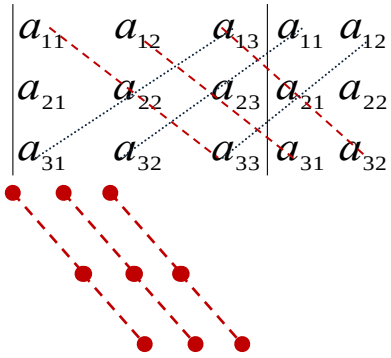
1.34-мысал: Анықтауышты үшбұрыштар әдісімен есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-3)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 5 - (-2)\cdot 2\cdot 6 - 4\cdot(-3)\cdot 1 =$$

$$= 0 + 40 + 18 - 0 + 24 + 12 = 94;$$

1.2 Саррюс әдісі:

(1.3) теңдігінің оң жағындағы көбейтінділерді құру схемасы:



- өз таңбасымен алынатын $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$ көбейтінділерді құру схемасы;



- қарама қарсы таңбамен алынатын $a_{13}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{23}a_{32}a_{11}$ көбейтінділерді құру схемасы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

1.35-мысал: Анықтауышты Саррюс әдісімен есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 3\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot(-3) - 2\cdot(-2)\cdot 6 =$$

$$= 0 + 40 + 18 - 0 + 12 + 24 = 94.$$

Салдар 1: Үшбұрышты матрицаның анықтауышы (үшбұрышты анықтауыш) бас диагональ элементтерінің көбейтіндісіне тең.

1.36-мысал: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 6 = -12.$

2. Анықтауыштың ретін төмендету тәсілі.

Тәсіл анықтауыштың 1 – қасиетінде келтірілген

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n},$$

және

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

жіктелінулерін қолдану арқылы жүргізіледі.

Алгебралық толықтауыштың реті анықтауыштың ретінен бірге кем болатындықтан, бұл жіктеулер берілген анықтауышты есептеуді реті оның ретінен төмен анықтауыштардың қосындысын есептеуге әкелетін тәсіл болып табылады. Әрине, анықтауыш жіктелетін жолдың (бағанның) нөлге тең элементтері неғұрлым көп болса есептейтін алгебралық толықтауыштардың саны солғұрлым аз, яғни берілген анықтауышты есептеу жеңіл болады. Бір айта кетерлік жайт, анықтауыштың қасиеттерін пайдалана отырып, анықтауыш жіктелетін жолдың (бағанның) бір элементінен басқа барлық элементтерін алдын ала нөлге айналдырып алу арқылы, n – ші ретті анықтауышты бір ғана (n–1) -ші ретті анықтауышқа түрендіруге

болады. Тәсіл, осы түрлендіруді қатарынан бірнеше рет қолдана отырып, берілген анықтауышты есептеуді бір ғана екінші ретті анықтауышты есептеуге әкелуге негізделген.

Бұл айтылғанды анықтауышты есептеу арқылы мысалмен түсіндірейік.

1.37-мысал: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешімі: Анықтауыштың 9 – қасиеті бойынша оның кез келген жолының (бағанының) элементтерін, оларды алдын ала бір санға көбейтіп алып, басқа бір жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қосқаннан анықтауыш өзгермейді. Олай болса, анытуыштың бірінші бағанының 2 - ші және 4 – ші элементтерін нөлге айналдыру мақсатында, бірінші жолдың элементтерін (-2) – ге көбетіп алып екінші жолдың сәйкес элементтеріне, (-1) – ге көбейтіп алып төртінші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ анықтауыш өзгермейді:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4+(-2)\cdot 2 & -1+(-2)\cdot 3 & -1+(-2)\cdot(-1) & 4+(-2)\cdot 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2+(-1)\cdot 2 & 2+(-1)\cdot 3 & 2+(-1)\cdot(-1) & 1+(-1)\cdot 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Соңғы анықтауышты 1 – бағаны бойынша жіктейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} =$$

$$= 2\cdot A_{11} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Нәтижесінде 4 – ші ретті анықтауышты есептеуді жалғыз 3 – ші ретті анықтауышты есептеуге әкелдік:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теңдіктің оң жағындағы 3 – ші ретті анықтауыштың үшінші бағанының 3 – ші элементін нөлге айналдыру мақсатында, екінші жолдың элементтерін үшінші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1+5 & 3+2 & -1+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Соңғы анықтауышты 3 – бағаны бойынша жіктейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33}) = 2A_{23} = 2 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Нәтижесінде 4 – ші ретті анықтауышты есептеуді жалғыз 2 – ші ретті анықтауышты есептеуге әкелдік:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теңдіктің оң жағындағы 2 – ші ретті анықтауышты 1 – қасиетте берілген

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

формуласы бойынша есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-7 \cdot 5 - 1 \cdot 4) = 2(-39) = -78.$$

1.4 Кері матрица

1.20-анықтама. A квадраттық матрицасы *қайтымды* немесе *ерекше емес* матрица деп аталады, егер $\det A \neq 0$, *қайтымсыз* немесе *ерекше матрица* деп аталады, егер $\det A = 0$ болса:

A - *қайтымды* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$;

A - *қайтымсыз* $\Leftrightarrow \det A = 0$.

1.38-мысал:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 8 = 0 \Rightarrow A$ - қайтымсыз (ерекше) матрица;

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 3 \Rightarrow B$ - қайтымды (ерекше емес) матрица.

1.21-анықтама. B квадрат матрицасы A квадрат матрицасына *кері матрица* деп аталады, егер $BA = E$ болса (мұндағы E – бірлік матрица).

Әдетте A матрицасынына кері матрица (B матрицасы) A^{-1} түрінде белгіленеді:

$$A^{-1}A = E. \tag{1.4}$$

Ескерту. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, яғни $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

1.1.-теорема. Егер A - қайтымды матрица болса, онда оның жалғыз кері матрицасы болады да, ол

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

теңдігімен анықталады, мұндағы A_{ij} - $|A|$ анықтауышының a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы, $i, j = \overline{1,n}$.

Ескерту. Қайтымсыз матрицаның кері матрицасы болмайды.

1.22-анықтама. A матрицасының элементтерін олардың алгебралық толықтауыштарымен ауыстырғанда пайда болған матрицаны A матрицасының көмекші матрицасы деп атаймыз да A^{v} түрінде белгілейміз.

Кері матрицаны көмекші матрица арқылы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{v})^{T}$$

түрінде жазуға болады.

1.39-мысал: $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасын табыңыз.

Шешімі: A^{-1} кері матрицасын

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

теңдігі бойынша табамыз. A матрицаның анықтауышын есептесек

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 15 = 25 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$, яғни A^{-1} кері матрицасы бар.

Матрица элементтерінің алгебралық толықтауыштарын

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

формуласы бойынша есептейміз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 4 = 4; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} 3 = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} 10 = 10.$$

Кері матрица: $A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$.

Дұрыстығын тексерейік:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 40-15 & -30+30 \\ 20-20 & -15+40 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$A \cdot A^{-1} = E$ теңдігі орынды, олай болса A^{-1} шынында да A матрицасының кері матрицасы болады.

1.5 Тарихи мағлұматтар. Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары

Ең алғаш ежелгі Қытай елінде матрица «сиқырлы квадрат» деп аталды.

Кейіннен араб математиктері оларға амалдар енгізді.

XIX ғасырда Уильям Гамильтон, Вейерштрасс, Жордан, Фробениус және Артур Кэли матрицалар теориясына өз үлестерін қосты.

«Матрица» терминін Джеймс Сильвестр 1850 жылы енгізді.

Матрица - цифрлық фотоаппараттардың, барлық заманауи видео және телекамера, фотокамера, мобильдік телефон мен видеобайқау жүйесінің негізгі элементі.

Анықтауыштар сызықты теңдеулер жүйесін шешуде және зерттеуде кең қолданылады. 1751 жылы Габриэль Крамер сызықтық теңдеулер жүйесін шешудің «Крамер ережесін» жариялады.

Анықтауыштар аналитикалық геометрия, векторлық алгебра және интегралдардық есептеулерде кеңінен қолданылады.

Матрица мен анықтауыштар дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеуде және шешуде қолданылады.

Матрица мен анықтауыштар теориясы экономикада, биологияда, химияда және маркетингте де өз қолданысын тапты. Сондай-ақ, матрица 3D көріністер, графика және т.б. кеңінен қолданылады.

1.40-мысал: Кәсіпорын екі түрлі шикізатты пайдаланып, үш түрлі өнім шығарсын. Әр өнім бірлігіне жұмсалатын шикізаттың нормасы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ матрицасы арқылы, шикізаттың әр түрінің бірлік бағасы $P=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$ матрицасы арқылы, ал өнімді шығару жоспары $B=(100\ 200\ 300)$ матрицасы арқылы берілсін. Жоспарлы өнімді шығаруға кететін шикізаттың шығыны мен шикізаттың жалпы құнын есептеу керек.

Шешімі: Жоспарлы өнімді шығаруға кететін шикізаттың шығыны:

$$S=B\cdot A=(100\quad 200\quad 300)\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}=(100\cdot 1+200\cdot 4+300\cdot 5\quad 100\cdot 3+200\cdot 2+300\cdot 1)=$$

$$=(2400\quad 1000).$$

Шикізаттың жалпы құны:

$$Q=S\cdot P=(2400\quad 1000)\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=\left(2400\cdot 2+1000\cdot 4\right)=8800.$$

1.41-мысал: Кестеде 1 және 2 нан зауытынан күн сайын M_1, M_2 және M_3 дүкендеріне жөнелтілетін өнімдердің саны көрсетілген және әр зауыттан дүкендерге өнімді жеткізуге кеткен шығындары берілген, яғни M_1 дүкеніне 50 мың теңге, M_2 дүкеніне 70 мың тенге, ал M_3 дүкеніне 130 мың тенге. Әр зауыттың күнделікті тасымалдауға кеткен шығынын есептеу керек.

Нан зауыты	*Дүкендер*		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Шешімі: Кестедегі берілген шарттарды A матрицасы деп, B матрицасы арқылы дүкендерге өнімдерді жеткізуге кеткен шығындарды белгілейік, яғни

$$A=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix},\quad B=(50\ \ 70\ \ 130).$$

Сонда тасымалдауға кеткен шығын матрицасы мына түрде болады:

$$AB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}20 & 35 & 10\\ 15 & 27 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 70\\ 130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot 50+35\cdot 70+10\cdot 130\\ 15\cdot 50+27\cdot 70+\ 8\cdot 130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4750\\ 3680\end{pmatrix}.$$

Сонымен, бірінші зауыт күн сайын тасымалдауға 4750 мың теңге, екінші зауыт 3680 мың теңге жұмсайды екен.

1.6 Теориялық сұрақтар

1. Матрица ұғымы, белгілеулері.
2. Жол-матрица немесе баған-матрица ұғымдары, мысалдары.
3. Нөлдік матрица ұғымы, белгіленуі.
4. Тең матрицалар ұғымы, мысал.
5. Матрицаны санға көбейту, мысал.
6. Матрицалардың қосу, мысал.
7. Матрицаларды қосу және санға көбейту амалдарының қасиеттері.
8. Матрицалардың айырмасы ұғымы, мысалдары.
9. Матрицалардың көбейтіндісі, мысал.
10. Ауыстырымды матрицалар ұғымы, мысал.
11. Транспонирленген матрица ұғымы, мысал.
12. Транспонирлеу амалының қасиеттері.
13. Квадрат (текше, шаршы) матрица ұғымы, мысал.
14. Бас және қосалқы диагональ элементтері, мысалдар.
15. Диагональдық және бірлік матрица ұғымдары, мысалдары.
16. Үшбұрышты, жоғарғы үшбұрышты және төменгі үшбұрышты матрицалар ұғымдары, мысалдары.
17. Матрицаның анықтауышы (детерминанты) ұғымы, реті.
18. a_{ij} элементінің миноры ұғымы, мысал.
19. a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы, мысал.
20. Екінші ретті анықтауыштың есептелінуі.
21. Үшінші ретті анықтауыштың есептеліну әдістері (үшбұрыштар және Саррюс әдісі)
22. Анықтауыштың қасиеттері.
23. Анықтауыштың жолы немесе бағаны бойынша жіктелінуі, мысал.
24. Қайтымды емес немесе ерекше матрица ұғымы, мысал.

25. Қайтымды немесе ерекше емес матрица ұғымы, мысал.
26. Кері матрица ұғымы және оны құру жолы.
27. Матрицалар мен анықтауыштардың қолданбалары.

2 СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

2.1 Матрицаның рангісі

Матрицаның қандай да бір жолдары мен бағандарын сызу (алып тастау) арқылы құрылған анықтауыш осы *матрицаның ішкі анықтауышы* деп аталады.

Ескерту. Квадраттық матрицаның өз анықтауышы да оның ішкі анықтауышы болып саналады.

2.1-анықтама. *Матрицаның рангісі* деп осы матрицаның нөлден айрықша ішкі анықтауыштарының реттерінің ең үлкенін айтамыз. Матрицаның рангісі

$$r,\quad r(A),\quad r_A,\quad rang\,A$$

түрлерінде белгіленеді.

2.1-теорема. *Матрицаның рангісі өзгермейді*, егер:

1) матрицаны транспонирлесек;
2) барлық элементтері нөлге тең жолды немесе бағанды сызсақ (алып тастасақ);
3) матрицаның екі жолының немесе екі бағанының орындарын ауыстырсақ;
4) матрица жолының немесе бағанының әрбір элементін нөлден өзгеше санға көбейтсек;
5) бір жолдың (бағанның) элементтерін бір санға көбейтіп алып басқа жолдың (бағанның) сәйкес элементтеріне қоссақ.

1) - 5) түрлендірулері матрицаға қолданылатын *қарапайым түрлендірулер* деп аталынады.

Егер A және B матрицаларының бірін екіншісінен оған қарапайым түрлендірулер қолдану арқылы алуға болса, онда A, B матрицалары *эквивалентті матрицалар* деп аталады. A, B матрицаларының эквиваленттілігі $A \sim \mathrm{B}$ түрінде белгіленеді.

Анықтауыштардың қасиеттері мен рангтің анықтамасынан эквивалентті матрицалардың рангтерінің тең болатыны шығады:

$$A \sim \mathrm{B} \Rightarrow r(A) = r(B).$$

Матрицаның рангін анықтау кезінде қарапайым түрлендірулерді қолдану арқылы берілген матрицаға қарағанда рангісін есептеу

қолайлырақ эквивалентті матрицаға көшу рангтің осы қасиетімен негізделген.

2.1-мысал: $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі:

A матрицасының 2-ші жолы мен 2, 3, 4-ші бағандарының барлық элементтері нөлге тең болғандықтан 2.1-теоремасының 2-ші қарапайым түрлендіруі бойынша

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix}.$$

Олай болса, эквивалентті матрицалардың рангтері тең болатындықтан $r(A)=r\left(\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow r\left(\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix}\right)=2.$$

Сонымен, $r(A)=r\left(\begin{pmatrix}1&5\\2&11\end{pmatrix}\right)=2.$

2.2-мысал: $B=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі: 2.1-теоремасында келтірілген 5), 4), 6), 2) қарапайым түрлендірулерін біртіндеп қолдана отырып

$$B=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}$$

эквиваленттіліктерін аламыз. Олай болса

$$r(B)=r\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow r\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\right)=2\Rightarrow r(B)=r\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\right)=2.$$

2.3-мысал: $C=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі: 2.1-теоремасының 5), 2) қарапайым түрлендірулерін біртіндеп қолдана отырып

$$C=\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2&0\\0&2&1&0\\0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

эквиваленттіліктерін аламыз. Онда алдыңғы мысалдағыдай:

$$\begin{vmatrix}4&3&2\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=4\cdot2\cdot3=24\neq0\Rightarrow \mathrm{r(\,C)}=3.$$

2.4-мысал: $D=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табыңыз.

Шешімі:

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&4&0&0\\0&1&0&2&0\\2&0&4&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&2\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&0&1\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}=4\neq0\Rightarrow \mathrm{r(\,D)}=2\,.$$

2.2 Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелерінің негізгі анықтамалары

2.2-анықтама. n *белгісізді сызықтық теңдеу* деп белгісіздерге қатысты бірінші дәрежелі, яғни

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$$

түріндегі теңдеуді айтамыз, мұндағы $a_1,a_2,\ldots,a_n$ тұрақтылары – теңдеудің коэффициенттері, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – теңдеудің белгісіздері, b тұрақтысы – теңдеудің бос мүшесі.

2.3-анықтама. *n белгісізді m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі* деп

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

түріндегі жүйені айтамыз, мұндағы a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ - жүйенің белгілі коэффициенттері, ал b_i, $i = \overline{1,m}$ - белгілі бос мүшелер, x_j, $j = \overline{1,n}$ - белгісіздер.

2.4-анықтама. Егер $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандарын сәйкес $x_1, x_2, ..., x_n$ белгісіздерінің орнына қойғанда жүйенің әрбір теңдеуі дұрыс сандық теңдікке айналса, онда $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ реттелген сандар тобы (2.1) *жүйесінің шешімі* деп аталады. Жүйенің шешімін $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ түрінде де жазылады.

2.5-анықтама. Жүйенің тым болмағанда бір шешімі бар болса, онда *жүйе үйлесімді* деп, ал кері жағдайда *жүйе үйлесімсіз* деп аталады.

2.6-анықтама. Үйлесімді (2.1) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар болса, онда *жүйе анықталған*, кері жағдайда, яғни шешімдер саны бірден артық болса, *жүйе анықталмаған* деп аталады.

2.7-анықтама. Шешімдерінің жиындары бірдей жүйелер *эквивалентті жүйелер* деп аталады.

2.8-анықтама. Егер (2.1) жүйесінің барлық бос мүшелері нөлге тең болса $(b_i = 0, \quad i = \overline{1,m})$, онда ол *біртектес/ біртекті теңдеулер жүйесі* деп аталады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі әруақытта үйлесімді, себебі оның $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ тривиалды шешімі бар.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

жүйесінің коэффициенттерінен олардың орналасу ретін сақтап құрылған матрицаны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ матрицасы - (2.1) *жүйесінің матрицасы,*

ал коэффициенттері мен бос мүшелерінен тұратын

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m_2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ матрицасы - (2.1) *жүйесінің кеңейтілген матрицасы* деп аталады.

Жүйенің үйлесімділігі оның матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангілерімен тікелей байланысты.

2.2-теорема (Кронекер-Капелли теоремасы). *(2.1) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін* $r(A) = r(\overline{A})$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті:

(2.1) жүйесі үйлесімді $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})$.

2.9-анықтама. *Жүйенің рангісі* деп оның матрицасының рангісін айтамыз. $r(A)$ - (2.1) жүйесінің рангісі.

2.3-теорема. *Үйлесімді жүйенің шешімінің жалғыз болуы үшін* оның рангісінің белгісіздер санына тең болуы қажетті және жеткілікті:

$r(A) = r(\overline{A}) = n \Leftrightarrow$ (2.1) жүйесінің жалғыз шешімі бар.

2.4-теорема. *Үйлесімді жүйенің шешімдерінің жиыны шексіз жиын болуы үшін* оның рангісінің белгісіздер санынан кем болуы қажетті және жеткілікті:

$r(A)=r(\overline{A})<n \Leftrightarrow (2.1)$ жүйесінің шешімдер жиыны - шексіз жиын.

2.5-мысал: $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7 \end{cases}$ жүйесін үйлесімділікке зерттеңіз.

Шешімі: Жүйенің белгісіздерінің саны $n=3$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ - берілген жүйенің матрицасы;

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$ - берілген жүйенің кеңейтілген матрицасы.

A және $\overline{A}$ матрицаларының рангілерін анықтайық:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-16\neq 0 \Rightarrow r(A)=3.$$

$|A|$ анықтауышы кеңейтілген матрицаның 3-ші ретті ішкі анықтауышы және $|A|\neq 0$, олай болса $r(\overline{A})\geq 3$. Сонымен қатар $r(\overline{A})>3$ болуы мүмкін емес, себебі $\overline{A}$ кеңейтілген матрицасы үш жолдан ғана тұратындықтан оның ішкі анықтауыштарының реті 3-тен артпайды. Олай болса $r(\overline{A})=3$.

Сонымен $n=3, r(A)=3$ және $r(\overline{A})=3$, яғни

$r(A)=r(\overline{A})=n \Rightarrow$|теорема 3 бойынша|$\Rightarrow$ жүйе үйлесімді және анықталған (жалғыз шешімі бар).

2.3 Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері

Теңдеулер жүйесін шешу жолы белгісіздер санының теңдеулер санына тең, теңдеулер санынан артық, теңдеулер санынан кем жағдайларына байланысты болады. Осы жағдайлардың әрқайсысына жеке – жеке тоқталамыз**.**

а) $n=m$ **белгісіздер саны мен теңдеулер саны тең жағдай**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.3)$$

n белгісізді n сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Матрицалық әдіс

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

жүйесі жүйенің $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасы, белгісіздердің

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ матрицасы және бос мүшелердің $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицасы

арқылы

$$AX = B \quad (2.4)$$

матрицалық түрде жазылады.

Мақсатымыз белгісіз X матрицасын табу. $\det A \neq 0$ жағдайында A^{-1} кері матрицасы бар болады. (2.4) теңдеуінің екі жағын да A^{-1} кері матрицасына сол жақтан көбейтсек

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

теңдігін аламыз. Бұдан, $A^{-1}A = E$ және $EX = X$ екенін ескерсек, (2.4) теңдеуінің шешімі

$$X = A^{-1}B \quad (2.5)$$

екендігі шығады.

(2.5) теңдігін

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

түрінде жазып алып, оның оң жағындағы көбейтіндіні есептесек

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз. Бұдан

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$$

шешімі екендігі шығады.

Ескерту.

Матрицалық әдіс жүйенің матрицасы қайтымды, яғни $\det A \neq 0$ жағдайында ғана қолданылады.

Ал $\det A = 0$ жағдайында A матрицасы қайтымсыз, яғни A^{-1} кері матрицасы жоқ болатындықтан, матрицалық әдіс қолданылмайды.

2.6-мысал: Жоғарғыдағы 2.5-мысалындағы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін

матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешімі: Жүйені

$$AX = B$$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ - жүйенің матрицасы;

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрицасы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрицасы.

X матрицасын табу керек. Жүйе матрицасының анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

яғни жүйенің матрицасы қайтымды.

Олай болса біз (2.6) формуласын қолдана аламыз. Бұл формула бойынша

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Формуладағы алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

$\det A$ және алгебралық толықтауыштардың мәндерін қойсақ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -45+32+77 \\ -9+0-7 \\ -42+32+42 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз. Бұдан

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

шешімі екендігі шығады.

Крамер ережесі

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ жүйесінің коэффициенттерінен, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

анықтауышы *жүйенің анықтауышы* деп аталады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда жүйенің шешімі

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.7}$$

формуласымен анықталады, мұндағы Δ_i - Δ анықтауышының x_i белгісіздерінің коэффициенттерінен тұратын бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болатын анықтауыш.

2.7-мысал: Жоғарғыдағы 2.5-мысалдағы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесін қолданып шешіңіз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$ онда (2.7) формуласы бойынша жүйенің шешімі: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$

формуласымен анықталады, мұндағы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - Δ анықтауышындағы сәйкесінше бірінші, екінші, үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -7 & -1 & -3\end{vmatrix}=64,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 3 & -7 & -3\end{vmatrix}=-16,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -7\end{vmatrix}=32.$$

Бұдан

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{64}{-16}=-4,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{-16}=1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{32}{-16}=-2.$$

Ескерту.

- Егер $\Delta=0$ және $\Delta_1=\Delta_2=...=\Delta_n=0$ болса, онда *(2.3) жүйесінің шексіз көп шешімі болады*. Оларды табу жолы келесі бөлімде қарастырылады.
- Егер $\Delta=0$ және қандай да бір i үшін $\Delta_i\neq 0$ болса, онда *(2.3) жүйесінің шешімі болмайды (жүйе үйлесімсіз болады)*.

Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі)

Кері матрица әдісі мен Крамер әдісін тек квадрат жүйелерді (яғни белгісіздер саны теңдеулер санына тең) шешу үшін қолдануға болады, және бұл әдістер жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы нөлден өзгеше болған жағдайда ғана қолданылады. Ал Гаусс әдісінің ерекшелігі – оны кез келген сызықтық теңдеулер жүйесіне (соның ішінде анықтауышы нөлге тең немесе тікбұрышты матрицалы жүйелерге де) қолдануға болады.

Бұл әдіс жүйенің бір теңдеуін оған басқа бір теңдеуді бір санға көбейтіп алып қосқанда шыққан теңдеумен ауыстырғаннан жүйенің шешімі өзгермейді деген тұжырымға негізделген.

Аталған түрлендіруді тізбектеп қолдана отырып (2.3) жүйесінің теңдеулерінде белгісіздерді жою арқылы жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad a_{n-1n-1}^{(n-2)}x_{n-1}+a_{n-1n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-2)}\\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n=b_n^{(n-1)}\end{cases}$$

түріндегі *үшбұрышты анықталған жүйеге* немесе *белгісіздер саны теңдеулер санынан артық болатын жүйеге* немесе *үйлесімсіз жүйеге* әкелінеді.

Бірінші жағдайда соңғы теңдеуден x_n *белгісізін* тауып алып төменнен санағанда екінші теңдеуге қою арқылы x_{n-1} *белгісізін* табамыз, сонан соң x_{n-1}, x_n мәндерін келесі теңдеуге қойып x_{n-2} *мәнін* табамыз. Осы үрдісті соңғы теңдеуге (төменнен санағанда) жеткенше жалғастырып жүйенің шешімін табамыз.

2.8-мысал: Жоғарғыдағы 2.5-мысалдағы $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешімі: Екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жою үшін:

a) бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз;

b) бірінші теңдеуді (–3)-ке көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 0 - 6x_2 - x_3 = -4 \\ 0 - 16x_2 + 0 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -6x_2 - x_3 = -4 \\ -16x_2 = -16 \end{cases}$$

жүйесінің үшінші теңдеуінен x_2 белгісізін тауып, оны екінші теңдеудегі орнына қойсақ x_3 белгісізі, ал табылған x_2, x_3 белгісіздерін бірінші теңдікке қойсақ x_1 белгісізі табылады:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 + x_3 + 3 \\ x_3 = 4 - 6x_2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_3 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Матрицалық және Крамер әдістерін тек жолдарының саны бағандарының санына тең және де анықтауышы нөлден өзгеше жүйелерді шешу үшін ғана қолдана аламыз.

Гаусс әдісінің ерекшелігі – оны кез келген жүйеге қолдануға болатындығында.

ә) $n > m$ белгісіздер саны теңдеулер санынан үлкен болған жағдай

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \; n > m \qquad (2.8)$$

Егер жүйенің қандай да бір m белгісіздерінің коэффициентерінен құрылған анықтауыш нөлден өзгеше болса, онда осы m белгісіздер *жүйенің базистік белгісіздері* деп аталады.

(2.8) жүйесінің қандай да бір m базистік белгісіздері бар болсын. Біз оларды жүйенің теңдеулерінің сол жағында белгісіздер ретінде қалдырып, ал қалған $n-m$ белгісіздерді тұрақты деп ұйғарып теңдеулердің оң жақтарына шығарамыз.

Нәтижесінде m белгісізді m теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің анықтауышы нөлден өзгеше болғандықтан (себебі ол базистік белгісіздердің коэффициенттерінен тұрады) оның жалғыз шешімі болады. Ол шешім бос мүшелер мен тұрақтылар деп ұйғарылған базистік емес белгісіздердің мәндерінен тәуелді болып шығады. Бұл шешім *жүйенің жалпы шешімі* деп аталады. Жалпы шешімнен базистік емес белгісіздерге белгілі мәндер бергенде пайда болатын шешім *жүйенің дербес шешімі* деп аталады. Базистік емес белгісіздерге кез келген мәндер беруге болғандықтан жүйенің шексіз көп дербес шешімдері болады.

Базистік емес белгісіздердің барлығын нөлге тең деп алғанда пайда болған дербес шешім берілген базистік белгісіздерге (базиске) сәйкес *базистік шешім* деп аталады.

Әрбір базиске бір базистік шешім сәйкес келетіндіктен, барлық базистік шешімдер саны барлық базистер санынан артпайды. Ал барлық базистер саны $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ теру санынан артпайды.

2.9-мысал:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 6x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 10 \end{cases}$$

$k = 2, n = 5 \Rightarrow n > k$

x_1, x_2 - базистік белгісіздер бола ала ма? x_1, x_2 белгісіздерінің коэффициенттерінен құрылған анықтауыш

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Олай болса x_1, x_2 базистік белгісіздер бола алады.

x_1, x_3 - базистік белгісіздер бола ма?

x_1, x_3 белгісіздерінің коэффициенттерінен құрылған анықтауыш

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Олай болса x_1, x_3 базистік белгісіздер бола алмайды.

Сол сияқты: x_1, x_4 - базистік; x_1, x_5 - базистік; x_2, x_3 - базистік; x_2, x_5 - базистік; x_3, x_4 - базистік; x_3, x_5 - базистік; x_4, x_5 - базистік болатынын, ал x_2, x_4 - базистік болмайтынын көрсетуге болады.

Мысалымызда x_1, x_2 белгісіздерін базистік деп алайық (олардың базистік бола алатынын жоғарыда көрсетіп кеткенбіз). Онда x_3, x_4, x_5 базистік емес белгісіздер болады. Оларды тұрақтылар деп ұйғарамыз:

$$x_3 = c_3,\ x_4 = c_4,\ x_5 = c_5,$$

мұндағы c_3, c_4, c_5 - еркін тұрақтылар (кез келген сандар). Еркін тұрақтыларды теңдеулердің оң жақтарына шығарамыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 + 4c_3 - c_4 - 6c_5 \\ x_1 + x_2 = 10 + 2c_3 - c_4 + 2c_5. \end{cases}$$

Алынған жүйені Гаусс, матрицалық немесе Крамер әдістерінің бірімен шешеміз:

$$x_1 = -3 + 2c_3 - 8c_5, \quad x_2 = 13 - c_4 + 10c_5$$

Сонымен жүйенің жалпы шешімі:
$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2c_3 - 8c_5 \\ x_2 = 13 - c_4 + 10c_5 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = c_5 \end{cases}$$

немесе

$(-3+2c_3-8c_5;\ 13-c_4+10c_5;\ c_3;\ c_4;\ c_5)$, мұндағы c_3, c_4, c_5 - кез келген сандар (еркін тұрақтылар).

c_3, c_4, c_5 еркін тұрақтыларына мәндер беру арқылы жүйенің дербес шешімдерін аламыз.

Мысалы $c_3=1,\ c_4=0,\ c_5=2$ деп алсақ, $(-17;\ 33;\ 1;\ 0;\ 2)$ дербес шешімін, ал $c_3=0,\ c_4=0,\ c_5=0$ деп алсақ, $(-3;\ 13;\ 0;\ 0;\ 0)$ - x_1, x_2 базисіне сәйкес базистік шешімін аламыз.

б) $n<m$ белгісіздер саны теңдеулер санынан аз жағдай

Бұл жағдайда белгісіздерді біртіндеп жою әдісін қолдансақ берілген жүйе а), ә) жағдайындағы жүйелердің біріне немесе үйлесімсіз жүйеге түрленеді.

2.4 n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі берілген. $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ жүйенің шешімі болады, яғни жүйе үйлесімді. Біз, қандай жағдайда шешімнің жалғыз немесе одан көп болатынын қарастырамыз.

Егер

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

болса, онда бұл жағдайда жүйенің жалғыз шешімі болатындықтан (Крамер ережесін қараңыз), *жүйенің $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ жалғыз шешімі бар болады.*

Егер

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

болса, онда $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0$ болғандықтан *жүйенің шексіз көп шешімі бар болады.*

2.10-мысал: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ біртектес теңдеулер жүйесін шешіңіз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

онда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ - жүйенің жалғыз шешімі болады.

2.5 Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданылуы

2.11-мысал: Шаруа қожалығының басшысы былтырғы жылы тұқым шаруашылығына, мал шаруашылығына және көкөніс шаруашылығына барлығы 10 млн теңге салып, 780 мың теңге пайда тапты. Ағымдағы жылы ол тұқым шаруашылығына 2 есе, мал шаруашылығына 3 есе, ал көкөніс шаруашылығына былтырғы деңгейде ақша салуды жоспарлаған. Осының бәріне шаруа қожалығының басшысы 22 млн теңге бөлуді жоспарлады. Егер де ағымдағы жылы тұқым шаруашылығынан 10%, мал шаруашылығынан 8% және көкөніс шаруашылығынан 6% пайда аламын деп ұйғарса, онда шаруа қожалығының басшысы барлығы қанша табыс тапқан болар еді?

Шешімі: Белгілеу енгізейік: x_1 - тұқым шаруашылығына, x_2 - мал шаруашылығына және x_3 - көкөніс шаруашылығына былтыр салынған ақшалар болсын. Есептің шарты бойынша:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 39 \end{cases}$$

Жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

онда (2.7) формуласы бойынша жүйенің шешімі

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

формуласымен анықталады, мұндағы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & 1 \\ 39 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 5 & 39 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 5 & 4 & 39 \end{vmatrix} = -9.$$

Бұдан

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-3} = 5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Сонымен

- ағымдағы жылы тұқым шаруашылығына салынған ақша: $2 \cdot x_1 = 2 \cdot 2 = 4$ млн.т.,
- мал шаруашылығына: $3 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15$ млн т.,
- көкөніс шаруашылығына: $x_3 = 3$ млн т.

Ал ағымдағы жылы күтілетін жалпы пайда:

$$4 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}06 = 1{,}78 \text{ млн т.}$$

2.12-мысал: Зауытта үш түрлі шикізатты пайдаланып, үш түрлі бұйым шығарады. *А* бұйымынан - 360 дана, *Б* бұйымынан - 300 дана және *В* бұйымынан - 675 дана. Бұйымның түрі және оған кететін әр шикізат мөлшері кестеде көрсетілген:

Бұйымның түрі	Әр бұйымға жұмсалатын шикізаттар мөлшері, салмақ бірлігі / өнім		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Әр бұйым жасауға кететін әр шикізат қорын табу керек.

Шешімі: x, y, z арқылы әр бұйымды жасауға кететін шикізат қорының шамасын белгілейік. Шикізат қоры тұтас жұмсалады деп есептесек, баланстық (теңгерулік) қатынас былай жазылады:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$

Алынған сызықтық теңдеулер жүйесі A, $Б$ және B бұйымдарын жасауға кететін әр шикізат қорының математикалық үлгісін көрсетеді. Бұл жүйені шешу үшін Гаусс әдісін қолданайық. Жүйенің кеңейтілген матрицасын жазып, оны қарапайым түрлендірулер арқылы үшбұрышты түрге келтірейік.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Бастапқы жүйе

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300 \\ 2y + 9z = 570 \\ -67z = -4020. \end{cases}$$

жүйесіне эквивалентті. Соңғы теңдеуден z=60 болатынын, z -тің табылған мәнін екінші теңдеуге қойсақ y=15 болатынын және z пен y – тің мәндерін бірінші теңдеуге қойсақ x=90 болатынын аламыз.

Сонымен, жүйенің шешімі үш санның (90, 15, 60) реттелінген тобы болды, яғни A бұйымын жасауға кететін шикізат қоры 90, B бұйымын жасауға кететін шикізат қоры 15, С бұйымын жасауға кететін шикізат қоры 60 болады.

2.13-мысал: Үш қорытпаның жалпы салмағы 150 кг. Бірінші қорытпаның құрамында 60% мыс, екіншісінде - 30%, үшіншісінде-10%. Екінші және үшінші қорытпадағы мыс екеуін қосқанда, бірінші қорытпадағы мыстан 28,4 кг аз, ал үшінші қорытпадағы мыс екіншіге қарағанда 6,2 кг аз. Әр қорытпаның салмағын табыңыз.

Шешімі: x, y, z арқылы, сәйкесінше, бірінші, екінші және үшінші қорытпаның салмақтарын белгілесек келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ 0,6x - 0,3y - 0,1z = 28,4 \\ 0,3y - 0,1z = 6,2 \end{cases}$$

Екінші, үшінші теңдеулерді 10-ға көбейтсек эквивалентті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 6x-3y-z=284 \\ 3y-z=62 \end{cases}.$$

Жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырайықта, Гаусс әдісін қолданайық:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 6 & -3 & -1 & 284 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -9 & -7 & -616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \\ 0 & 0 & 10 & 430 \end{array}\right]$$

Бұдан

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 3y-z=62 \\ 10z=430 \end{cases}$$

Жүйенің шешімі: x=72, y=35, z=43, яғни, бірінші қортпаның салмағы - 72 кг., екінші қортпаның салмағы - 35 кг., үшінші қортпаның салмағы - 43 кг. болатынын аламыз.

2.6 Теориялық сұрақтар

1. Матрицаның ішкі анықтауышы ұғымы, мысал.
2. Матрицаның рангісіұғымы, мысал.
3. Матрицаның рангісінің өзгертпейтін қарапайым түрлендірулер.
4. Эквивалентті матрицалар, мысал.
5. Жүйенің шешімі ұғымы, мысал.
6. Үйлесімді, үйлесімсіз жүйелер ұғымы, мысал.
7. Анықталған, анықталмаған жүйелер ұғымы, мысал.
8. Кронекер-Капелли теоремасы.
9. Эквивалентті жүйелер ұғымы, мысал.
10. Біртектес теңдеулер жүйесі ұғымы.
11. Жүйенің жалғыз шешімінің бар болу шарты.
12. Жүйенің шексіз шешімдер жиыны бар болу шарты.
13. Белгісіздер саны мен теңдеулер саны тең жағдай.
14. Матрицалық әдіс.
15. Крамер ережесі.
16. Жордан-Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі).
17. Белгісіздер саны теңдеулер санынан үлкен болған жағдай.
18. Жүйенің жалпы және дербес шешімдері ұғымдары.
19. Базистік шешім ұғымы.

20. Белгісіздер саны теңдеулер санынан кіші жағдай.
21. n белгісізді n біртектес теңдеулер жүйесі ұғымы.
22. Біртектес теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімінің бар болу шарты.
23. Біртектес теңдеулер жүйесінің шексіз шешімдер жиыны бар болу шарты.
24. Сызықтық теңдеулер жүйесінің қолданбаларына өз мысалыңызды келтіріңіз.

3 ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

3.1 Геометриялық және координаталық векторлар

Тек сандық мәнімен анықталатын шама *скалярлық шама* деп аталады (ұзындық, аудан, көлем, температура, жұмыс, масса).

Кейбір шамалар өзінің сандық мәндерімен қатар бағытымен бірге анықталады (күш, жылдамдық, үдеу). Бұл шамалар *векторлық шамалар* деп аталады. Геометриялық тұрғыдан векторлық шама ұзындығы шаманың сандық мәніне тең, бағыты шаманың бағытымен бағыттас кесіндімен бейнеленеді.

3.1-анықтама. *Вектор* (*геометриялық вектор*) деп бағытталған кесіндіні айтамыз.

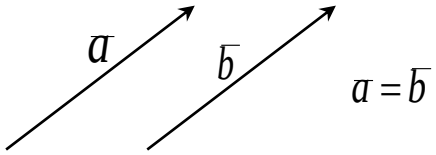
Вектор $\overline{a}$ түрінде белгіленеді (3.1 а-сурет). Басы A нүктесі, ұшы B нүктесі болатын вектор $\overline{AB}$ түрінде белгіленеді (3.1 б-сурет).



3.1-сурет

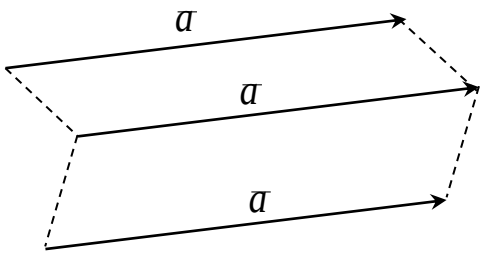
Ескерту. Анықтамадан

а) бірдей ұзындықты бағыттас векторлардың *тең векторлар* болатыны шығады (3.2-сурет);



3.2-сурет

b) *параллель көшіру векторды өзгертпейтіндігі* шығады, себебі параллель көшіргенде ұзындық та, бағыт та сақталады, яғни вектор да сақталады (3.3-сурет).

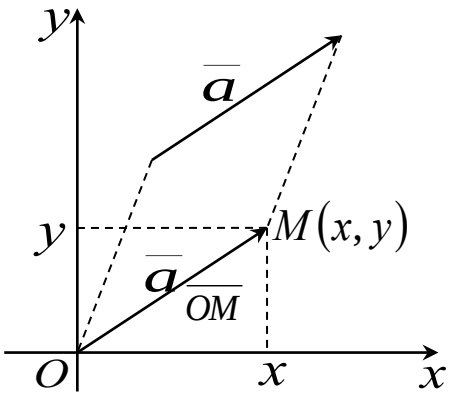


3.3-сурет

Сонымен бірдей ұзындықты және бірдей бағытталған барлық кесінділер бір векторды анықтайды екен де, векторды беру үшін осы

бағытталған кесінділердің қалауымызша алынған біреуін көрсету жеткілікті болады екен. Егер мұндай вектор ретінде басы координаталар жүйесінің бас нүктесінде орналасқан $\overline{OM}$ түріндегі векторды алсақ, онда бұл векторды, оның ұзындығы мен бағытын көрсетпей-ақ, тек M ұшының координаталары, яғни реттелініп алынған сандар арқылы беруге мүмкіндік аламыз. Векторды осылай анықтауды Oxy жазықтығының векторы арқылы көрсетейік.

Параллель көшіру векторды өзгертпейтін болғандықтан, кез келген $\bar{a}$ векторын өзінің басы $O(0,0)$ бас нүктесі болатын параллель көшірмесі $\overline{OM}$ векторымен беруге болады (3.4-сурет). Ал $\overline{OM}$ векторы, басы белгілі нүкте болғандықтан, өзінің ұшы болатын M нүктесінің координаталарымен, яғни сандардың (x, y) реттелінген жұбымен беріледі.



3.4-сурет

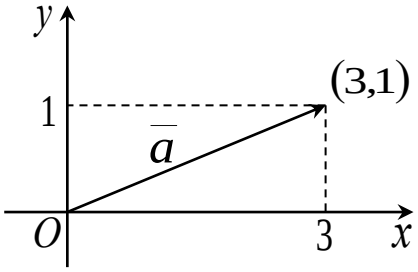
Вектордың бұлай берілуі оның координаталық түрде берілуі делінеді.

$\bar{a} = (x, y)$ немесе $\bar{a}(x, y)$ - $\bar{a}$ *векторының координаталық түрде жазылуы,* (x, y) - $\bar{a}$ *векторының координаталары*.

Координаталық түрде жазылған векторды *координаталардағы вектор* деп те атай береміз.

3.1-мысал: Oxy жазықтығының $\bar{a}(3,1)$ векторын тұрғызыңыз..

Шешімі: $\bar{a}(3,1)$- басы O(0,0) нүктесі, ұшы (3,1) нүктесі болатын Oxy жазықтығының векторы (3.5- сурет):



3.5-сурет

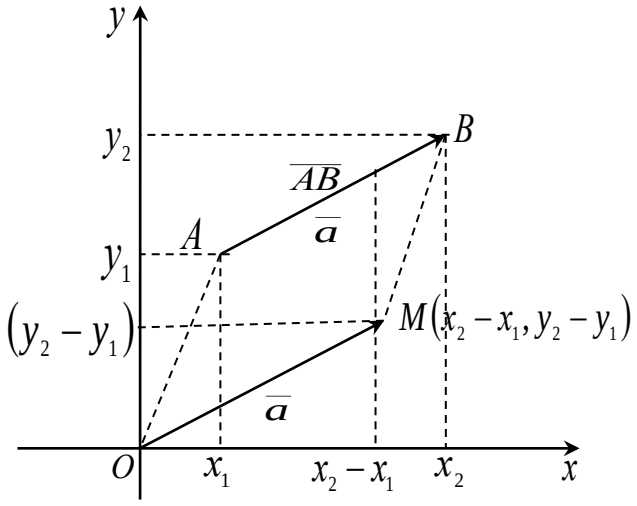
Ескерту. $Oxyz$ кеңістігінің координаталардағы векторы $\bar{a} = (x, y, z)$ немесе $\bar{a}(x, y, z)$ түрінде жазылады.

3.1-тұжырым. Векторлар тең, егер олардың аттас координаталары тең болса:

$$\bar{a}(a_x, a_y, a_z) = \bar{b}(b_x, b_y, b_z) \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y, a_z = b_z\,. \qquad (3.1)$$

Басы $A(x_1, y_1)$ нүктесінде, ұшы $B(x_2, y_2)$ нүктесінде орналасқан $\overline{AB}$ векторының координаталық түрі (3.6-сурет):

$$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



3.6 - сурет

Егер $\overline{AB} \in Oxyz \Rightarrow \overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

3.2-мысал: $A = (3; -1; 2)$, $B = (4; 0; -5)$ нүктелері берілген. $\overline{AB}, \overline{BA}$ векторларының координаталарын табыңыз.

Шешімі:

$$\overline{AB} = (4 - 3; 0 - (-1); -5 - 2) = (1; 1; -7);$$

$$\overline{BA} = (3 - 4; -1 - 0; 2 - (-5)) = (-1; -1; 7).$$

3.2-анықтама. *Нөлдік вектор* деп нүктені айтамыз. Нөлдік вектор $\overline{O}$ түрінде белгіленеді.

- Нөлдік вектордың ұзындығы нөлге тең;
- $\overline{O}$ векторында бағыт болмайды;
- $\overline{O} + \bar{a} = \bar{a}.$

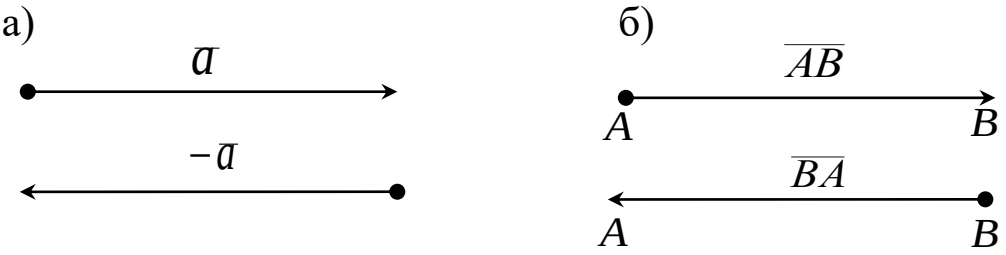
Егер

$$\overline{O} \in Oxy \Rightarrow \overline{O} = \overline{O}(0,0);$$

$$\overline{O} \in Oxyz \Rightarrow \overline{O} = \overline{O}(0,0,0).$$

3.3-анықтама. Ұзындықтары бірдей, бағыттары қарама-қарсы векторларды *қарама-қарсы векторлар* деп атаймыз. $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы вектор $-\bar{a}$ түрінде белгіленеді (3.7 а, б-сурет).

Анықтамадан $-\overline{AB} = \overline{BA}$ болатыны шыгады.



Сурет 3.7

$-\overline{AB}=\overline{BA}$, $\overline{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$,

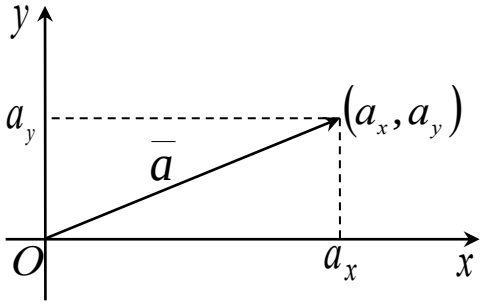
$-\overline{AB}=\overline{BA}(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)=\overline{BA}(-(x_2-x_1), -(y_2-y_1), -(z_2-z_1))$.

қарама-қарсы векторлардың сәйкес координаталары қарама-қарсы сандар болады.

3.3-мысал: $\bar{a}=(-2;3;5)\Rightarrow -\bar{a}=(2;-3;-5)$.

3.4-анықтама. $\bar{a}$ *векторының ұзындығы (модулі)* деп оның кесіндісінің ұзындығын айтамыз.

$\bar{a}$ векторының ұзындығы $|\bar{a}|$ түрінде белгіленеді (3.8-сурет).



3.8-сурет

$|\bar{a}(a_x, a_y)|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, $\bar{a}\in Oxy$;

$|\bar{a}(a_x, a_y, a_z)|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, $\bar{a}\in Oxyz$;

$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$;

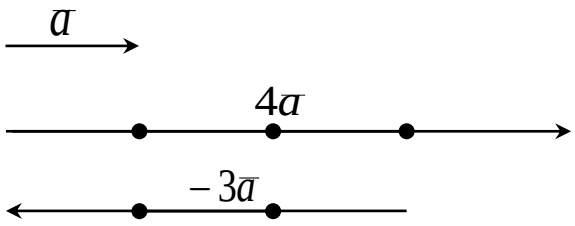
$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$.

Векторларға қолданылатын амалдар:

1) Векторды санға көбейту.

α санымен $\bar{a}$ векторының көбейтіндісі деп ұзындығы $|\alpha|\cdot|\bar{a}|$ санына тең болатын және $\alpha > 0$ болғанда $\bar{a}$ векторымен бағыттас, ал $\alpha < 0$ болғанда $\bar{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталатын векторды айтамыз. α санымен $\bar{a}$ векторының көбейтіндісі $\alpha \cdot \bar{a}$ түрінде белгіленеді.

3.4-мысал: Берілген $\bar{a}$ векторына сәйкес $4\bar{a}$ және $-3\bar{a}$ векторларын тұрғызыңыз (3.9-сурет).



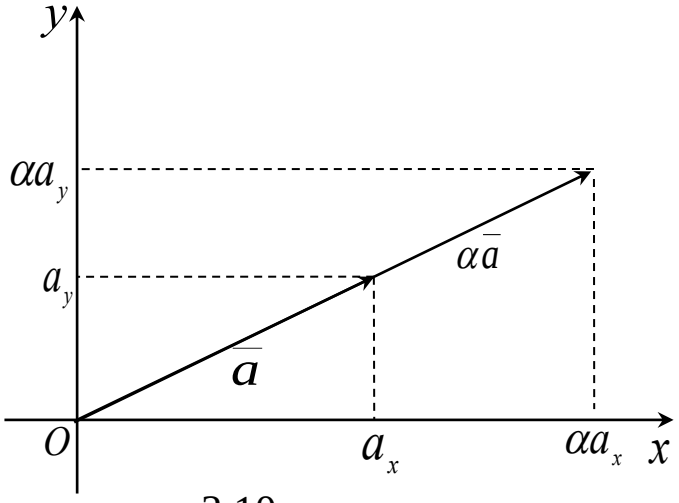
3.9-сурет

Координаталық түрде:

a) $\bar{a}(a_x, a_y)$ үшін $\alpha\bar{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y)$;

b) $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ үшін $\alpha\bar{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

Бұл теңдіктер пропорционал кесінділер қасиетінен шығады (3.10-сурет).



3.10-сурет

3.5-мысал: $\bar{a} = (3;-5;8)$ векторы берілген. $5\bar{a}, -1\cdot\bar{a}$ векторларын табыңыз.

Шешімі:

$$5\bar{a} = (5\cdot 3, 5\cdot(-5), 5\cdot 8) = (15, -25, 40);$$

$$-1\cdot\bar{a} = (-1\cdot 3, -1\cdot(-5), -1\cdot 8) = (-3, 5, -8).$$

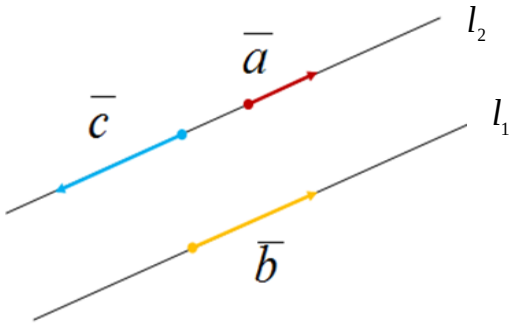
Соңғы мысалдан

$-1\cdot\bar{a}=-\bar{a}$

теңдігі орынды болатынын көреміз.

3.5-анықтама. Бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жататын векторлар *коллинеар векторлар* деп аталады (3.11-сурет).

Белгіленуі: $\bar{a}\,|\,|\bar{b}$.



3.11-сурет

Кез келген екі вектор коллинеар болады: $\bar{c}\,|\,|\bar{a}\,|\,|\bar{b}$.

Векторды нөлден өзгеше санға көбейту оның бағытын сақтайтын немесе қарама-қарсы бағытқа өзгеретін болғандықтан *коллинеарлықтың келесі белгісін* (қажетті және жеткілікті шартын) аламыз:

1. $\bar{a}\,|\,|\bar{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\neq 0:\bar{a}=\lambda\bar{b};$

2. $\bar{a}(a_x,a_y,a_z)\,|\,|\,\bar{b}(b_x,b_y,b_z)\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}\quad(a_x=\lambda b_x,\ a_y=\lambda b_y,\ a_z=\lambda b_z).$

3.6-мысал: $\bar{a}=(2,5,-3),\ \bar{b}=(4;5;-6),\ \bar{c}=(6;15;-9)$ векторлары берілген. $\bar{a},\bar{b}$ және $\bar{a},\bar{c}$ векторларының қайсысы коллинеар?

Шешімі:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{a_y}{b_y}=\frac{5}{5}=1\quad\Rightarrow\frac{a_x}{b_x}\neq\frac{a_y}{b_y}\Rightarrow\bar{a}\not|\,|\bar{b};$$

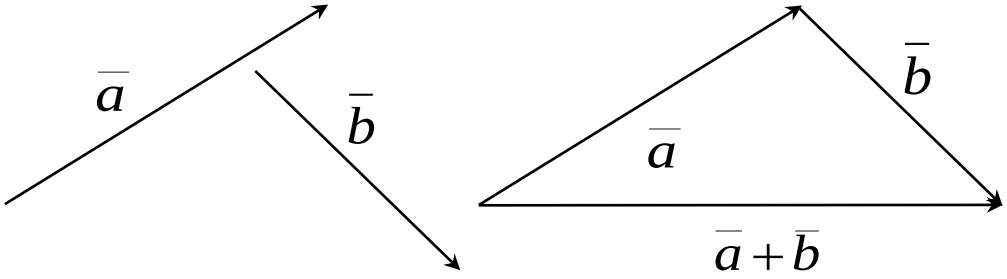
$$\frac{a_x}{c_x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad \frac{a_y}{c_y}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\quad \frac{a_z}{c_z}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\frac{a_x}{c_x}=\frac{a_y}{c_y}=\frac{a_z}{c_z}\Rightarrow\bar{a}\,|\,|\,\bar{c}.$$

2) Векторлардың қосындысы мен айырмасы.

а) үшбұрыштар ережесі

$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының қосындысы деп $\bar{b}$ векторының басын $\bar{a}$ векторының ұшына орналастырып алып, басын $\bar{a}$ векторының, ал ұшын $\bar{b}$ векторының ұшына орналастыра құрылған векторды айтамыз (3.12-сурет).

Қосындының белгіленуі: $\bar{a}+\bar{b}$.

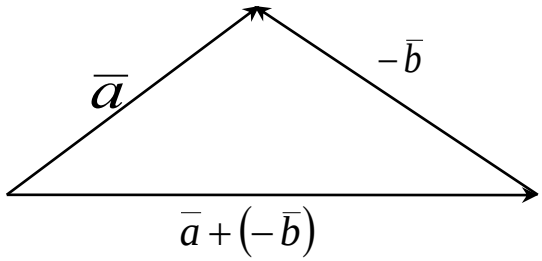


3.12-сурет

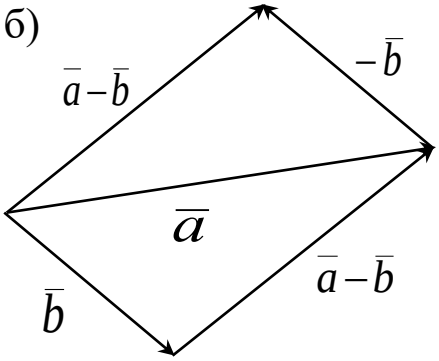
$\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының айырмасы деп $\bar{a}$ векторы мен $(-\bar{b})$ векторының қосындысын айтамыз (3.13 а, б-сурет).

Айырманың белгіленуі: $\bar{a}-\bar{b}$.

а)

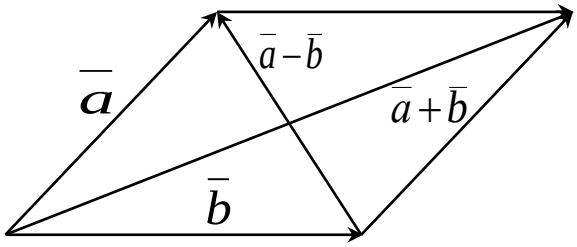


б)



3.13-сурет

б) параллелограмм ережесі (3.14-сурет):



3.14-сурет

Ескерту. $\bar{a}+\bar{O}=\bar{a}$.

Координаталық түрде берілген $\bar{a}=(a_x,a_y), \bar{b}=(b_x,b_y)$ үшін

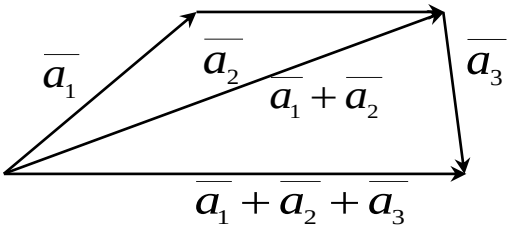
$$\bar{a}+\bar{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y\right) \qquad (3.2)$$

3.7-мысал: $\bar{a}=(3;-5;8)$, $\bar{b}=(-1;1;-4)$ векторлары берілген. $|\bar{a}+\bar{b}|$, $|\bar{a}-\bar{b}|$ ұзындықтарын табыңыз.

Шешімі:

$$\bar{a}+\bar{b}=(3-1;-5+1;8-4)=(2;-4;4),$$
$$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6;$$
$$\bar{a}-\bar{b}=(3+1;-5-1;8+4)=(4;-6;12),$$
$$|\bar{a}-\bar{b}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+12^2}=\sqrt{16+36+144}=\sqrt{196}=14.$$

$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$ *векторларының қосындысы* деп $(\bar{a}_1+\bar{a}_2)+\bar{a}_3$ векторын айтамыз және $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$ түрінде белгілейміз (3.15-сурет).

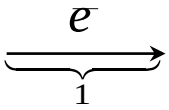


3.15-сурет

$\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ *векторларының қосындысы* деп $(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_{n-1})+\bar{a}_n$ векторын айтамыз және $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n$ түрінде белгілейміз.

3.6-анықтама. *Бірлік вектор* деп ұзындығы бірге тең векторды айтамыз (3.16-сурет):

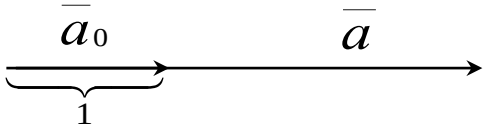
$|\bar{e}|=1 \Leftrightarrow \bar{e}$ - бірлік вектор.



3.16-сурет

Бағыты $\bar{a}$ векторының бағытымен бағыттас бірлік вектор $\bar{a}$ *векторының орты* (*бірлік векторы*) деп аталады (3.17-сурет):

$|\bar{a}_0|=1$



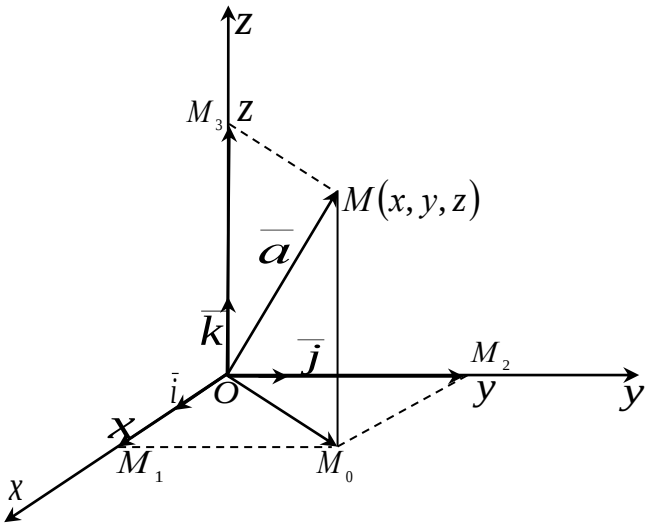
3.17-сурет

3.8-мысал: $\bar{i}=(1,0,0),\ \bar{j}=(0,1,0),\ \bar{k}=(0,0,1)$ сәйкес OX, OY, OZ өстерінің орттары.

a векторы өзінің a_0 бірлік векторлары арқылы

$|a|=|a|\cdot a_0$ түрінде жазылады.

Бұл теңдікті пайдаланып $\bar{a}(x,y,z)$ векторының $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ орттарына жіктелуін аламыз (3.18-сурет):



3.18-сурет

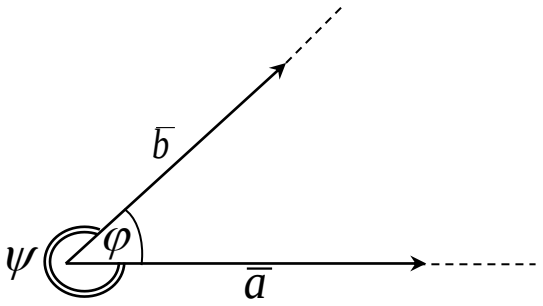
$$\bar{a}=\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{OM_3}=\left(\overline{OM_1}+\overline{OM_2}\right)+\overline{OM_3}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

$$\overline{OM}(x,y,z)=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

3.7-анықтама. *$a,\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш* деп бір нүктеден a және $\bar{b}$ векторларына бағыттас шыққан екі сәуле шектейтін бұрыштардың кішісін айтамыз (3.19-сурет).

Белгіленуі: $\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)$ - $a,\bar{b}$ векторларының арасындағы бұрыш

$$\varphi<\psi\Rightarrow\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\varphi$$



3.19-сурет

Анықтамадан $0\le\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)\le\pi$ болатыны шығады. Егер $\left(\hat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\pi}{2}$ болса, онда $a,\bar{b}$ векторлары *ортогональ* деп аталады. *Белгіленуі:* $\bar{a}\perp\bar{b}$.

$\bar{a}$ векторының координата өстерімен жасайтын бұрыштары α, β, γ болса, яғни

$$\alpha = \left(\bar{a}, \hat{OX}\right), \quad \beta = \left(\bar{a}, \hat{OY}\right), \quad \gamma = \left(\bar{a}, \hat{OZ}\right),$$

онда $\bar{a}$ *векторының бағыттаушы косинустары:*

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

3.9-мысал: OX, OY, OZ өстерінің

$\bar{i} = (1,0,0), \bar{j} = (0,1,0), \bar{k} = (0,0,1)$

орттары (бірлік векторлары) өзара ортогональ болады (3.18-сурет): $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$.

3.2 Векторлардың скалярлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

3.8-анықтама. $\bar{a}$ *және* $\bar{b}$ нөлдік емес *векторларының скалярлық көбейтіндісі* деп

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) \tag{3.3}$$

санын айтамыз, *белгіленуі:* $\bar{a} \cdot \bar{b}$ немесе $(\bar{a}, \bar{b})$.

Ескерту. Векторлардың біреуі нөлдік вектор болса скаляр көбейтінді нөлге тең деп аламыз:

$\bar{O} \cdot \bar{b} = 0$.

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;
3. $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda\bar{b})$, мұндағы λ кез келген сан;
4. $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$;

Салдар: $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$.

5. $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$;

Салдар: $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$.

$\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ және $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ координаталық векторлары үшін:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \cdot (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$;

b) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$

$\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ координаталық түрдегі векторы үшін

$$\bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

3.10-мысал: $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$ және $\bar{b} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$ векторлары берілген. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$\bar{a} = (3;4;7), \bar{b} = (2;-5;2)$$

болғандықтан

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}.$$

3.11-мысал: $\bar{a} = (4;-2;-4)$ және $\bar{b} = (6;-3;2)$ векторлары берілген. $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$ неге тең?

Шешімі:

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = 2(4;-2;-4) - 3(6;-3;2) = (8;-4;-8) - (18;-9;6) = (-10;5;-14),$$

$$\bar{a} + 2\bar{b} = (4;-2;-4) + 2(6;-3;2) = (4;-2;-4) + (12;-6;4) = (16;-8;0),$$

$$(2\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b}) = (-10;5;-14) \cdot (16;-8;0) = -160 - 40 - 0 = -200.$$

Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасынан

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |a||b|\cos\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) \Rightarrow \cos\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \qquad (3.4)$$

теңдігі шығады.

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ координаттық векторлары үшін

$$\cos\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3.5)$$

теңдігін аламыз.

3.12-мысал: $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ және $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$ векторларының арасындағы φ бұрышын табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$\bar{a} = (1;2;3), \bar{b} = (6;4;-2)$$

болғандықтан

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{6+8-6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14\cdot 4}} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7};$$

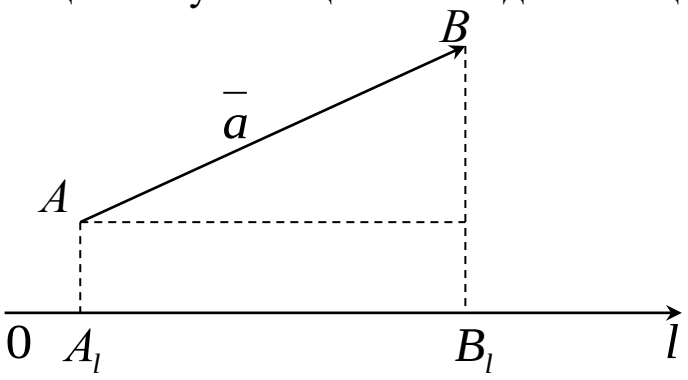
$$\varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

3.9-анықтама. $\bar{a}$ *векторының өске проекциясы* деп AB кесіндінің ұзындығын атайды және ол вектор мен өс арасындағы бұрыш сүйір болса оң «+» таңбамен, ал - доғал болса теріс «-» таңбамен алынады (3.20-сурет).

Вектордың өске проекциясының негізгі қасиеттері:

a) Өске перпендикуляр вектордың осы өске проекциясы нөлге тең:
$np_l\bar{a} = 0, \quad \bar{a} \perp l$.

b) Вектордың өске проекциясы вектордың модулі мен вектор мен өстің арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең:
$np_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi.$

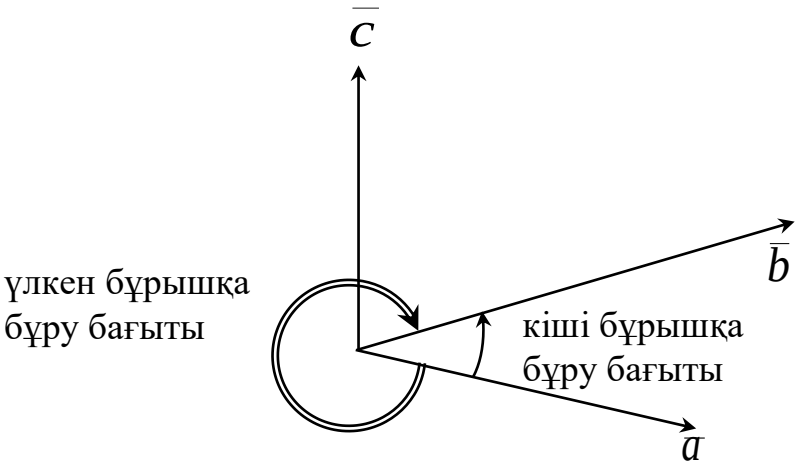


$$np_l AB = |B_l - A_l|$$

3.20-сурет

3.3 Векторлардың векторлық көбейтіндісі және оның қасиеттері

Егер $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының бастарын бір нүктеге келтіріп алып $\bar{c}$ векторының ұшына орналасқан бақылаушыға $\bar{a}$ векторын $\bar{b}$ векторымен беттестіру үшін кіші бұрышқа бұру сағат тілінің айналу бағытына қарсы бағытта жасалса, онда реттелініп алынған үш $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *векторлары оң үштік* құрайды дейміз (3.21-сурет).



3.21-сурет

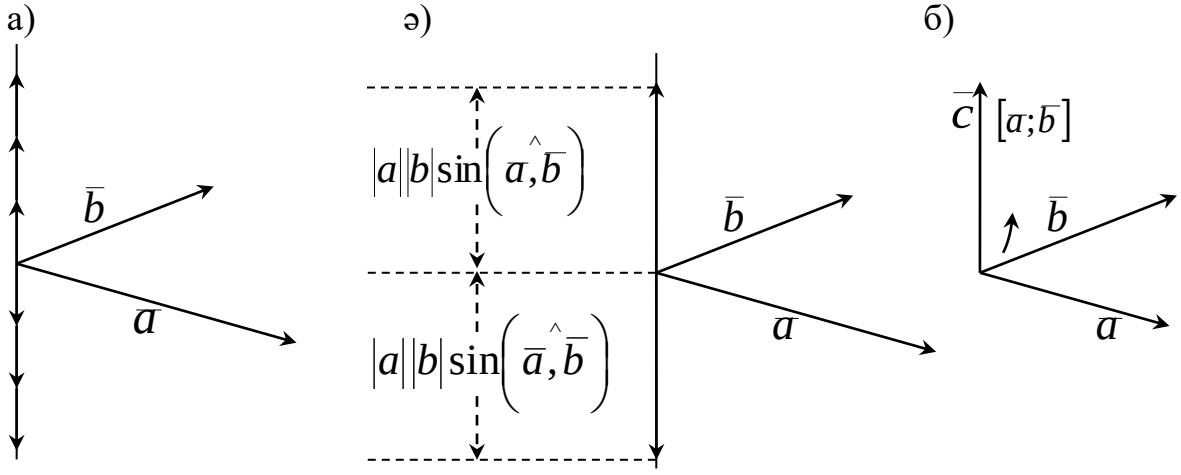
3.10-анықтама. *$\bar{a}$ векторы мен $\bar{b}$ векторының векторлық көбейтіндісі* деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\bar{c}$ векторын айтамыз (3.22 а, ә, б-сурет):

1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $|c| = |a||b|\sin\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$; (3.6)

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтіндінің белгіленуі: $\bar{a} \times \bar{b}$ немесе $[\bar{a}; \bar{b}]$.



3.22-сурет

Ескерту. Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$

теңдіктері шығады.

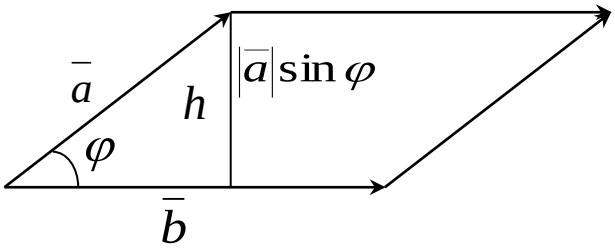
Ескерту. Екі вектордың бірі нөлдік вектор болса, онда олардың векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болады деп есептейміз:

$\bar{O}\times\bar{a}=\bar{O}$.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\bar{a}\,||\,\bar{b} \Leftrightarrow a\times b=\bar{0}$ - a, b векторларының коллинеарлық белгісі;

   Салдар: $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0} \Rightarrow \bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}$.
2. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$;
3. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$;
4. $m(\bar{a}\times\bar{b})=(m\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(m\bar{b})$;
5. $a\times b$ векторлық көбейтіндісінің модулі $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданын береді (3.23-сурет).



3.23-сурет

$$\bar{a}\times\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\hat{a,b}\right),$$

$$S=|\bar{b}|\cdot h=|\bar{b}|\cdot|\bar{a}|\sin\varphi=|a\times b|. \qquad (3.7)$$

Векторлық көбейтіндінің координаталық түрі.

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})$$

және

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0,$$

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{i}\times\bar{k}=\bar{j},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$$

теңдіктері мен векторлық көбейтіндінің 2, 3 қасиеттерінен $a=(a_x,a_y,a_z), b=(b_x,b_y,b_z)$ координаттық векторлары үшін

$$a\times b=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (3.8)$$

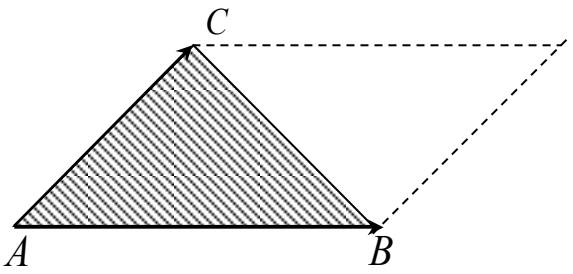
теңдігі орынды болатыны шығады.

Бұл теңдік пен векторлық көбейтіндінің 5 қасиетінен $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған *параллелограмның ауданын табудың*

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (3.9)$$

формуласы шығады.

3.13-мысал:
$A(1;\ 1;1)$, $B(2;\ 3;4)$, $C(4;3;2)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының ауданын есептеңіз.



Шешімі: ABC үшбұрышының ауданы $\overline{AB}, \overline{AC}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданынның жартысына тең (3.24-сурет):

3.24-сурет

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|. \qquad (3.10)$$

$$\overline{AB} = (2-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (4-1)\bar{k} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k},$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = -4\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{96}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 24}}{2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

3.4 Векторлардың аралас көбейтіндісі және оның қасиеттері

3.11-анықтама. $\bar{a}, \bar{b}$ *және* $\bar{c}$ *векторларының аралас көбейтіндісі* деп $\bar{a} \times \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін айтамыз да

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

түрінде белгілейміз.

Анықтамадан $\bar{a}(a_x, a_y, a_z), \bar{b}(b_x, b_y, b_z), \bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ координаттық векторларының аралас көбейтіндісі

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (3.11)$$

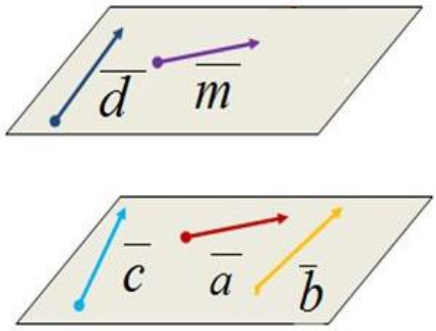
формуласы бойынша табылатыны шығады.

3.14-мысал: $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k},\ \ \bar{b}=\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ және $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=24+1-1+3+4+2=33.$$

3.12-анықтама. Егер үш вектор бір жазықтықта не параллель жазықтықтарда орналасқан болса, онда олар *компланар векторлар* деп аталады (3.25-сурет).



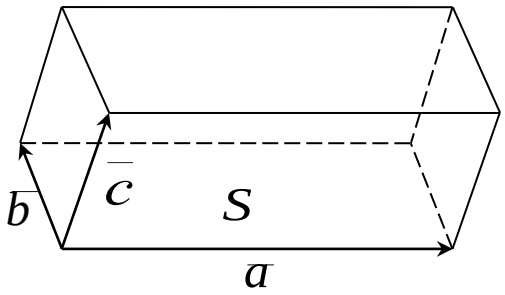
3.25-сурет

$\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{m}$ - векторларының кез келген үшеуі компланар болады.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$;
2. $(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, мұндағы λ тұрақты сан;
3. $(\bar{a_1}+\bar{a_2},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a_1},\bar{b},\bar{c})+(\bar{a_2},\bar{b},\bar{c})$;
4. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланар $\Leftrightarrow(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$;

5. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторларға тұрғызылған *параллелепипедтің көлемін* береді (3.26-сурет).



3.26 - сурет

$$\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right| = \left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot cos\left((\bar{a}\times\bar{b}),\hat{\bar{c}}\right) = S\cdot h$$

$$V_{параллелепипед} = \left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right| \qquad (3.12)$$

Пирамида көлемі:

$$V_{пирамида} = \frac{V_{параллелепипед}}{6} = \frac{\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right|}{6} \qquad (3.13)$$

3.5 Векторлардың қолданбалары

Векторлар ғылым мен техниканың көптеген салаларында маңызды рөл атқарып, есептердің алуан түрлерін шығаруда үлкен қолданысқа ие болып отыр.

Векторлар теориялық физикада, математикалық физикада, теориялық механикада, аэродинамикада, гидродинамикада, өрістер теориясында, электротехникада тағы басқа ғылыми салаларында қолданылады.

Олардың негізгілері:

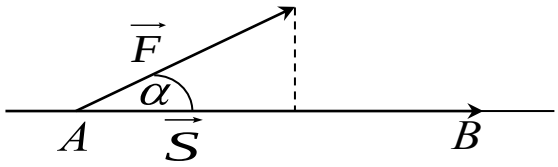
1. векторлар табиғат құбылыстарын зерттеуге қолданылады. Физиканың бірталай заңдары «вектор» тілінде өрнектеледі. Векторларды қолдану математиканы физикамен байланыстыруға, математиканы физикалық мазмұнды есептермен байытуға мүмкіндік берді;
2. векторлық аппаратты геометриялық есептерге қолданғанда қазіргі заманға сай әдістеме, оның идеяларын зерттеу әдістері туралы түсінік беруге мүмкіндік туады;
3. компьютерлік техникада, сызықтық бағдарламалау есептерінде, халық экономикасына байланысты есептерді шешуге қолданылады;
4. векторлық әдісті пайдалану физика, информатика, астрономия және есептеуіш техника сияқты математикамен сабақтас

бағыттарды жеңіл меңгеруге игі әсер етеді;

5. астрономия және басқа да карталарды кескіндеуге үлесі көп;
6. үнемі болмаса да векторлық әдіспен теңдеулердің, теңдеулер жүйесінің, теңсіздіктің кейбір түрлерін векторлық әдіспен шешуге болады.

Тұрақты күш жұмысы

Материалдық нүкте $\overrightarrow{AB}=\vec{S}$ ығысуымен φ бұрышын жасайтын $\vec{F}$ тұрақты күшінің әсерімен A нүктесінен B нүктесіне түзу сызықты қозғалсын (3.27-сурет).



3.27-сурет

Физикадан $\vec{S}$ ығысуындағы $\vec{F}$ күшінің жұмысы

$A=F\cdot S\cdot\cos\varphi$, яғни $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Демек, оның қолдану нүктелерінің түзу сызықты ығысуындағы тұрақты күштің жұмысы ығысу векторын күш векторына скалярлық көбейткенге тең болады.

3.15-мысал: Материалдық нүкте $A=(2;4;6)$ нүктесінен $B=(4;2;7)$ нүктесіне түзу сызықты қозғалдағы $\vec{F}$ күшінің жұмысын есептеңіз.

Шешімі: $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2;-2;1)$.

$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=3\cdot 2+2\cdot(-2)+4\cdot 1=6$ (жұмыс бірлігі).

$\vec{F}$ және $\vec{S}$ арасындағы бұрыш $\cos\varphi=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|}$, яғни

$$\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{29}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Нүктеге қатысты күш сәтін анықтау

3.16-мысал: A нүктесіне $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ күші түсірілсін және O кеңістіктегі кез келген нүкте болсын (3.28-сурет).

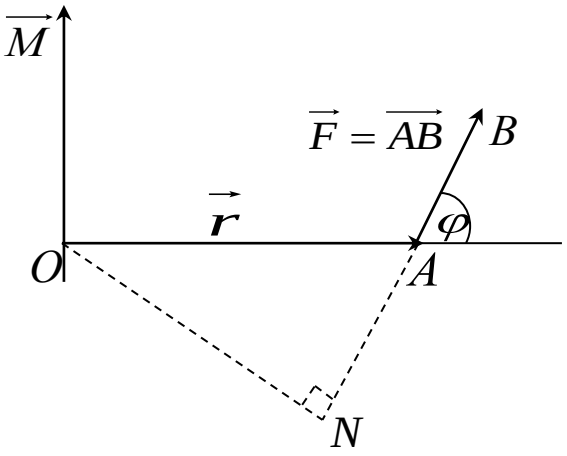
Шешімі: O нүктесіне қатысты $\vec{F}$ күшінің моменті (сәті) O нүктесі арқылы өтетін $\vec{M}$ векторы және:

1) O, A, B нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр;
2) күштің иыққа көбейтіндісінің сандық мәніне тең

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot ON = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \sin\left(\vec{F}, \overrightarrow{OA}\right);$$

3) $\overrightarrow{OA}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторларымен оң үштік құрайды.

Демек, $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.



3.28 - сурет

Вектордың физикада қолданылуы

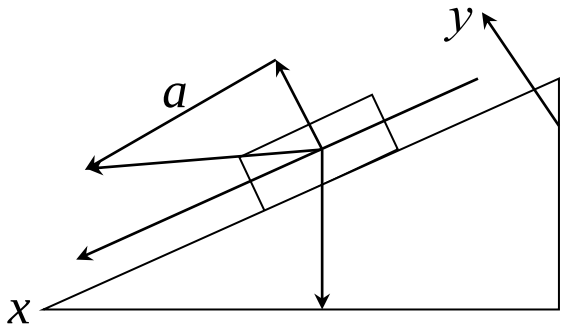
Вектор физикада вектордың көмегімен әртүрлі бағытталған шамалар, мысалы: күш, үдеу, жылдамдық, т.б. шамаларды өрнектеуге болады.

3.17-мысал: Көлбеулік бұрышы α болатын көлбеу жазықтықпен массасы m білеуше қозғалып келеді дейік. Білеушенің жазықтықпен үйкеліс коэффициенті ν-ге тең. m – масса, ν – үйкеліс коэффициенті берілген. a – білеушесінің үдеуін табу керек.

Шешімі: Білеушеге үш күш әсер етеді:

1. ауырлық күші $F_a = mg$;
2. тіректің реакция күші (байланыс күші) – N;
3. үйкеліс күші – $F_{\text{үй}}$.

Бұл күштердің бағыттары төменде көрсетілген (3.29-сурет).



3.29-сурет

Осы күштер бірігіп, білеушеге оның бойымен төмен бағытталған *a* үдеуін береді. *x* пен *y* координаталар өстерін сәйкес түрде көлбеу жазықтыққа параллель және оған перпендикуляр бағыттаймыз.

Ньютонның екінші заңын векторлық әдіспен былай жазамыз:

$$ma = mg + N + F_{\text{үй}}.$$

Ал бұл теңдеуді скаляр түрінде жазу үшін, векторлардың *x* пен *y* өстеріндегі проекцияларын табайық.

x өсіндегі проекциядан бастайық.

1) *a* үдеу векторының *x* өсіндегі проекциясы оң (a_x) және *a* векторының модуліне тең (*a* векторы *x* өсіне параллель) $a_x=a$.
2) F_a – ауырлық күшін құраушыларға жіктейміз. Тіктөртбұрыш шығады. Олардың қабырғалары F_a -ның құраушылары.

   F_a проекциясы *x* өсіндегі ΔABD – дан

   $$AB = F_a \sin\alpha$$

   $$\frac{AB}{AD} F_a = \sin\alpha$$

   $$AB = F_a \sin\alpha = mg \sin\alpha$$

   оң *x* өсімен бағыттас.
3) Үйкеліс күші векторлық проекциясы теріс және $-F_{\text{үй}}$ -ке тең.
4) Тіректің реакция күшінің (байланыс күшінің) векторының проекциясы нөлге тең. Өйткені ол вектор *x* өсіне перпендикуляр $N_x = 0$.

Ньютонның екінші заңы *x* өсіндегі векторлардың модульдері арқылы өрнектелген, сондықтан проекциялар үшін теңдеуінің түрі мынадай:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{үй}}. \qquad (3.14)$$

Енді y өсіндегі проекцияларды табамыз:

1) Үдеу векторының *y* өсіндегі проекциясы нөлге тең. (*a* векторы *y* өсіне перпендикуляр) $a_x = 0$.
2) ΔACL - дан F_a күшінің проекциясы мынаған тең болатынын көруге болады: $\frac{AC}{AD} = \cos\alpha$. Осыдан шығатыны:

$AC = AD\cos\alpha \Rightarrow AC = F_a\cos\alpha = mg\cos\alpha$ теріс.

3) Тіректің реакциясы күші векторының проекциясы оң және оның модуліне тең:
$N_y = N$;
4) Үйкеліс күшінің векторының проекциясы нөлге тең $F_{үй}$=0.

Бұл жағдайда Ньютонның екінші заңының теңдеуі мына түрде жазылады:
$-mg\cos\alpha = -N$, яғни $N = mg\cos\alpha$.

Үйкеліс күші $F_{үй}$= νN екенін білеміз. $F_{үй} = \nu mg\cos\alpha$ екінші формулаға қоямыз:

$$ma = mg\sin\alpha - \nu mg\cos\alpha \Rightarrow ma = m(g\sin\alpha - \nu g\cos\alpha) \Rightarrow a = g\sin\alpha - \nu g\cos\alpha .$$

Осы формуладан еркін түсу үдеуінен кем екенін көріп отырмыз. Егер үйкеліс болса ($\nu = 0$), онда көлбеу жазықтық бойымен сырғанап келе жатқан дененің үдеуі модулі жағынан яғни мұнда да, ол g-ден кем.

Векторлар көлбеу жазықтыққа кең түрде пайдаланылады, себебі олар төмен түскенде не жоғары көтерілгенде үдеуі кемітуге мүмкіндік жасайды.

Геометрияда вектор әдісімен теоремаларды дәлелдеу

Вектор геометрияда көптеп қолданылады. Вектор ұғымының геометрияда қолданылуы кейбір күрделі геометриялық ұғымдарды ықшамды айтуға, геометриялық есептерді шығарудың ерекше бір әдісін табуға мүмкіндік берді. Векторлық әдістің геометрияда қолданылуын екі топқа бөлуге болады:

1) векторлық амалдарды оқып-үйрену барысында геометриялық фигуралардың және оның қасиеттерін колдана отырып шығарылатын есептер.
2) геометрияда вектор әдісімен теоремаларды дәлелдеу.

Вектордың экономикалық есептерді шешуде қолданылуы

3.18-мысал: Кәсіпорын төрт түрлі өнім шығарсын. Негізгі өндірістік-экономикалық көрсеткіштері келесі кестеде берілген.

Өнімнің түрі	Шығару жоспары	Шикізат шығыны кг/өнім	Уақыт нормасы сағ/өнім	Өнімнің бағасы /ақша бір.
1	30	6	9	45
2	40	3	4	20
3	20	8	12	60
4	50	2	3	15

Күнделікті мына көрсеткіштерді анықтау керек: S - шикізат шығынын, T - жұмыс уақытының шығынын және P - өндірілген өнімнің жалпы құнын.

Шешімі: Берілген кестені пайдаланып өндірістік циклды анықтайтын төрт вектор енгізейік:

$q = (30,40,20,50)$ - өнімді өндірудің вектор-жоспары;

$s = (6,3,8,2)$ - шикізат шығынының векторы;

$t = (9,4,12,3)$ - жұмыс уақыты шығынының векторы;

$p = (45,20,60,15)$ - баға векторы.

Сонда ізделінді экономикалық көрсеткіштер q -вектор-жоспардың қалған үш вектормен скалярлық көбейтіндісі арқылы анықталады:

$S = s \cdot q = 180 + 120 + 160 + 100 = 560$ кг;

$T = t \cdot q = 270 + 160 + 240 + 150 = 820$ сағ.;

$P = p \cdot q = 1350 + 800 + 1200 + 750 = 4100$ ақша бірл.

3.6 Теориялық сұрақтар

1. Скалярлық шама және мысалдары.
2. Векторлық шамалар дегеніміз не?
3. Вектор (геометриялық вектор) ұғымы, белгіленулері.
4. Тең векторлар ұғымы.
5. Нөлдік вектор ұғымы, белгіленуі.
6. Қарама-қарсы векторлар, белгіленуі.
7. Вектордың ұзындығы (модулі).
8. Векторды санға көбейту, қасиеттері.
9. Коллинеар векторлар ұғымы.
10. Векторлардың қосындысы мен айырмасы (үшбұрыштар, параллело-грамм ережесі).
11. $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ векторларының қосындысын табу.

12. Бірлік вектор ұғымы, белгіленуі.
13. $\bar{a}$ векторының орты (бірлік векторы).
14. $\bar{a}(x, y, z)$ векторының $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ орттарына жіктелуі.
15. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табу.
16. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының ортогональдығы.
17. $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустары.
18. $\bar{a}$ векторы мен $\bar{b}$ векторының скалярлық көбейтіндісін есептеу формулалары.
19. Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері.
20. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының арасындағы бұрышты табу формулалары.
21. Вектордың өске түсірілген проекциясы, қасиеттері.
22. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының оң үштігі.
23. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін есептеу формулалары
24. Векторлық көбейтіндінің қасиеттері.
25. $\bar{a}, \bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограмның ауданы.
26. $\bar{a}, \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі.
27. Аралас көбейтіндінің қасиеттері.
28. Компланар векторлар ұғымы.
29. Параллелепипедтің көлемін есептеу.
30. Пирамиданың көлемін есептеу.
31. Векторлардың қолданыстарын атаңыз, мысалдар.

4 ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ

4.1 Оху жазықтығындағы сызықтың теңдеуі

$F(x,\ y)=0$ теңдеуі L *сызығының теңдеуі* деп аталады, егер

$$F(x_0,\ y_0)=0 \Leftrightarrow M(x_0,\ y_0)\in L$$

болса, мұндағы x және y айнымалылары сызықтың нүктелерінің *ағымдық координаталары*.

4.1-мысал: $M_1(3;1)$ және $M_2(2;3)$ нүктелерінің қайсысы $2x-3y-3=0$ теңдеуімен берілген сызықтың бойында жатады?

Шешімі:

Егер $F(x,\ y)=0$ - L сызығының теңдеуі болса, онда анықтама бойынша $M(x_0,\ y_0)\in L \Leftrightarrow F(x_0,\ y_0)=0.$

Біздің мысалда $F(x,\ y)=2x-3y-3=0.$

$M_1(3,\ 1)\in L$ екенін тексерсек:

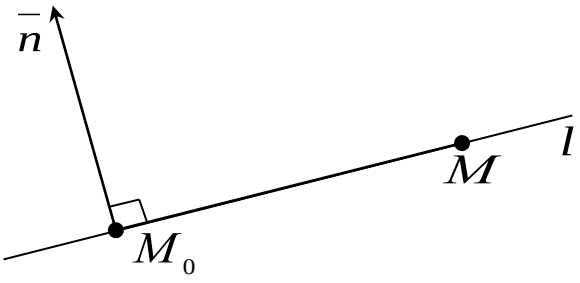
$$x_0=3,\ y_0=1:\quad F(x_0,\ y_0)=2\cdot 3-3\cdot 1-3=6-6=0\Rightarrow F(x_0,\ y_0)=0\Rightarrow M_1(3,\ 1)\in L.$$

$M_2(2,\ 3)\in L$ екенін тексерсек:

$$x_0=2,\ y_0=3:\quad F(x_0,\ y_0)=2\cdot 2-3\cdot 3-3=4-12=-8\Rightarrow F(x_0,\ y_0)\neq 0\Rightarrow M_2(2,\ 3)\notin L.$$

4.2 Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

1) Жазықтықта берілген $M_o(x_o,y_o)$ нүктесінен $\bar{n}(A,B)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі.



4.1-сурет

l қарастырылып отырған түзу болсын да, $M(x,y)$ - түзудің $M_o(x_o,y_o)$ нүктесінен өзгеше кез келген нүктесі болсын (4.1-сурет).

Онда

$$\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0)\cdot\bar{n}(A,B)=0\Leftrightarrow$$

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0. \qquad (4.1)$$

(4.1) теңдеуі - $M_o(x_o, y_o)$ *нүктесі арқылы* $\bar{n}(A, B)$ *векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі*. $\bar{n}$ векторы *түзудің нормальдық векторы* деп аталады.

4.2-мысал: $M(5;0)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(1,0)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_o = 5, y_o = 0$ және $A = 1, B = 0$ болғандықтан (4.1) теңдеуінен түзудің

$$1(x-5)+0(y-0)=0 \Rightarrow x-5=0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

2) Берілген $M_o(x_o, y_o)$ ***нүктесінен*** $\bar{a}(a_x, a_y)$ ***векторына параллель жүргізілген түзудің теңдеуі.***

$$M_o(x_o, y_o) \neq M(x, y)$$

және

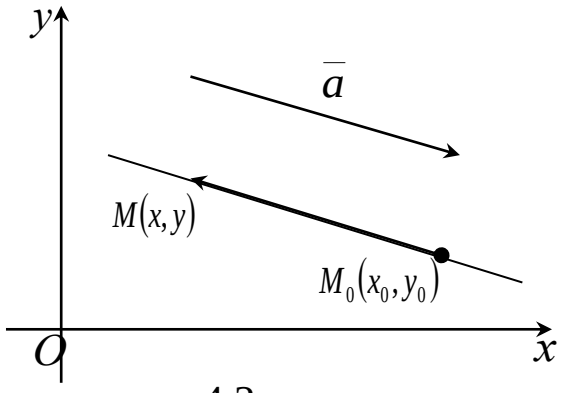
$x - x_0 = \lambda a_x$ және $y - y_0 = \lambda a_y \Leftrightarrow$:

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y},\ a_x \neq 0, a_y \neq 0. \qquad (4.2)$$

Егер $a_x = 0$ болса, онда $x = x_0$;

Егер $a_y = 0$ болса, онда $y = y_0$.

$\bar{a}$ векторы түзудің *бағыттаушы векторы* деп аталады (4.2-сурет).



4.2-сурет

4.3-мысал: $M(7;2)$ нүктесінен $\vec{a} = \{1; 5\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_o = 7, y_o = 2$ және $a_x = 1, a_y = 5$ болғандықтан (4.2) теңдеуінен түзудің

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{5} \Rightarrow 5(x-7) = y-2 \Rightarrow 5x - y - 33 = 0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

4.4-мысал: $M(7;2)$ нүктесінен $\vec{a} = \{0;-2\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $x_0 = 7, y_0 = 2, a_x = 0, a_y = -2$ болғандықтан, есеп

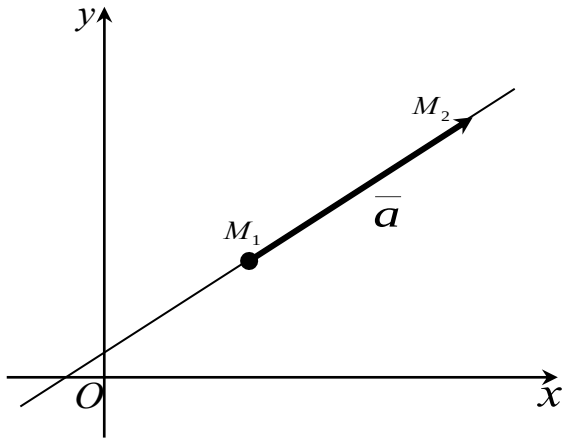
$a_x = 0$

жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі

$x = x_0$, яғни $x = 7$

түрінде жазылады.

3) Берілген $M_1(x_1, y_1)$ ***және*** $M_2(x_2, y_2)$ ***нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі.***



4.3-сурет

Бұл арада 2) жағдайындағы $M_o(x_o, y_o)$ нүктесі ретінде $M_1(x_1, y_1)$ нүктесін, ал $\overline{a}$ векторы ретінде $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ векторын алсақ, $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$ теңдеуінен *екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін* аламыз (4.3-сурет):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},\ x_2 \neq x_1 \text{ және } y_2 \neq y_1; \qquad (4.3)$$

Егер $x_1 = x_2$ болса, онда $x = x_1$;

Егер $y_1 = y_2$ болса, онда $y = y_1$.

4.5-мысал: $M_1(1; 2)$ және $M_2(-1; 0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің (4.3) теңдеуіне $x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = -1, y_2 = 0$ мәндерін қою арқылы

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 1}{-1 - 1} \Rightarrow y - 2 = x - 1 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

теңдеуін аламыз.

4.6-мысал: $M_1(2; -1)$ және $M_2(5; -1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

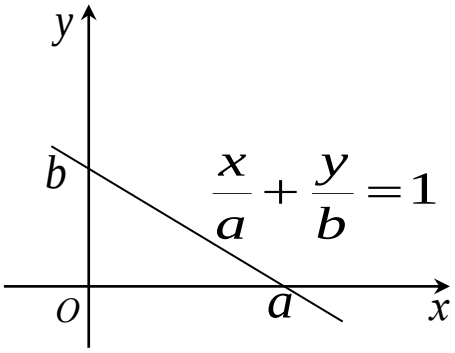
Шешімі: есептің шарты бойынша $x_1 = 2, y_1 = -1, x_2 = 5, y_2 = -1$ болғандықтан, есеп $y_1 = y_2$ жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі

$y = y_1$, яғни $y = -1$

түрінде жазылады.

4) Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі.

Егер түзу координаталар өстерімен $M_1(a;0)$ және $M_2(0;b)$ нүктелерінде қиылысса, онда $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ теңдеуінен *түзудің «кесіндідегі» теңдеуі* деп аталатын



4.4-сурет

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.4)$$

теңдеуін аламыз (4.4-сурет).

4.7-мысал: Координатлар өстерін $M_1(5;0)$ және $M_2(0;3)$ нүктелерінде қиятын түзудің кесіндідегі теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: (4.4) теңдеуіне $a = 5, b = 3$ мәндерін қою арқылы түзудің кесіндідегі

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

теңдеуін аламыз.

5) Берілген нүктеден берілген бұрышпен өтетін түзудің теңдеуі.

l түзуі $M_1(x_1, y_1)$ нүктесінен Ox өсімен φ бұрышын жасай өтсін.

$$\Delta M_1 M_0 M_2 \Rightarrow tg\varphi = \frac{|M_0 M_2|}{|M_1 M_0|} \Rightarrow tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(4.3) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = tg\varphi(x - x_1) \Leftrightarrow .$$

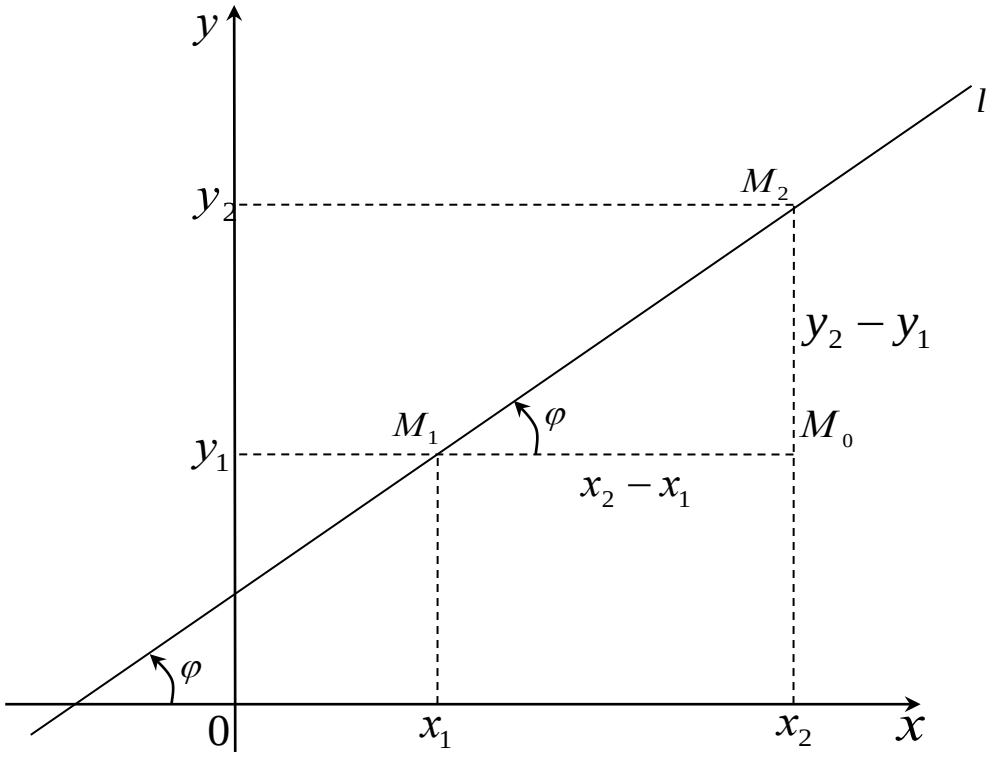
$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4.5)$$

(4.5) - $M_1(x_1, y_1)$ *нүктесінен* Ox *өсімен* φ *бұрышын жасай өтетін түзудің теңдеуі* (4.5-сурет).

$k = tg\varphi$ саны түзудің *бұрыштық коэффициенті* деп аталады. (4.5) теңдеуінде $-kx_1 + y_1 = b$ белгілеуін енгізу арқылы

$$y = kx + b \qquad (4.6)$$

түріндегі *түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін* аламыз.



4.5-сурет

4.8-мысал: $M_1(-1;2)$ нүктесінен Ox өсімен $\frac{\pi}{3}$ бұрышын жасай өтетін теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $x_1 = -1,\ y_1 = 2$ және $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Түзудің бұрышты коэффициентін табамыз:

$$k = tg\varphi = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ .$$

(4.6) теңдеуіне $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ k = \sqrt{3}$ мәндерін қою арқылы түзудің

$$y - 2 = \sqrt{3}(x+1),$$

$$\sqrt{3}x - y + 2 + \sqrt{3} = 0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

6) Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі.

Жоғарыда келтірілген түзудің теңдеулерінің әрқайсысын

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.7)$$

теңдеуінен түрлендіріп алуға, керісінше, олардың әрқайсысын (4.7) түріне келтіруге болады. Сондықтан (4.7) теңдеуі *түзудің жалпы теңдеуі* деп аталады.

(4.7) теңдеуімен берілген l түзуі үшін:

$\bar{n}(A,B)$ - *нормальдық вектор*, яғни $\bar{n}(A,B)\perp l$;

$\bar{a}(B,-A)$ - *бағыттаушы вектор*, яғни $\bar{a}(B,-A)//l$ болады.

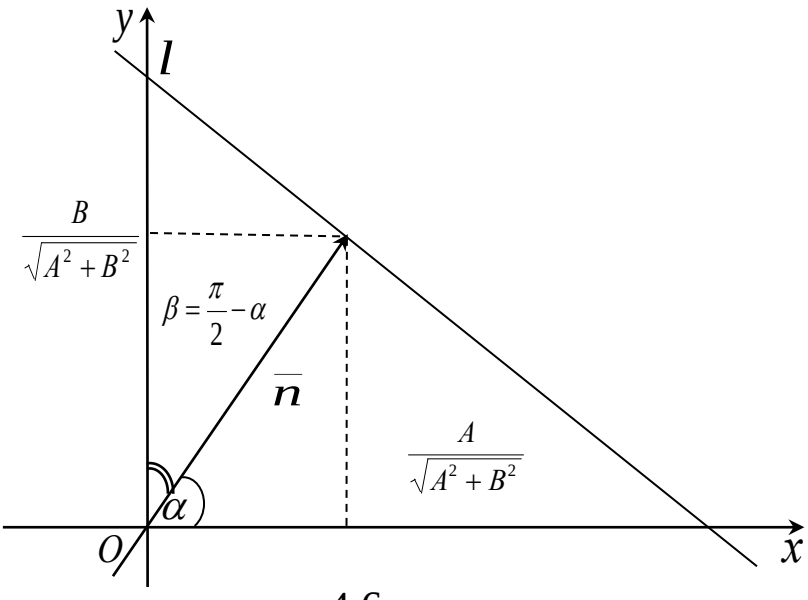
Түзудің жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары:

1. Егер $C=0$ болса, онда l түзуі координаталардың бас нүктесі арқылы өтеді;
2. Егер $A=0$ болса, онда $l||OX$;
3. Егер $B=0$ болса, онда $l||OY$;
4. $x=0$, $y=0$ - сәйкесінше OY, OX өстерінің теңдеулері.

4.9-мысал: $5x-2y+11=0$ жалпы теңдеуімен берілген түзудің нормальдық және бағыттаушы векторларын табыңыз.

Шешімі: берілген теңдеуде $A=5, B=-2$ болғандықтан, $\bar{n}(5,-2)$- түзудің нормальдық, ал $\bar{a}(-2,-5)$ - бағыттаушы векторы болады.

7) Түзудің нормальдық теңдеуі.



4.6-сурет

Түзудің $Ax+By+C=0$ жалпы теңдеуінің екі жағын да

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

санына көбейткенде пайда болатын теңдеуі *түзудің нормальдық теңдеуі* деп аталады (бұл теңдеудің

$$\bar{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

нормальдық векторының ұзындығы 1-ге тең). μ *саны нормальдық көбейткіш* деп аталады (4.6-сурет).

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (4.8)$$

теңдеуі *түзудің нормальдық теңдеуі* деп аталады (бұл теңдеудің

$\overline{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ нормальдық векторының ұзындығы 1-ге тең). μ *саны нормальдық көбейткіш* деп аталады (4.6-сурет).

Егер α - түзуінің $\overline{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ нормалдық векторының Ox өсімен жасайтын бұрышы болса, онда (4.8) теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \qquad (4.9)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ p = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}{|\overline{n}|} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{|\overline{n}|} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4.10-мысал: $12x-5y-65=0$ түзуінің жалпы теңдеуі берілген.

a) түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген;
b) түзудің кесіндідегі;
c) түзудің нормальдық

теңдеулерін құрыңыз.

Шешімі:

a) түзудің берілген жалпы теңдеуін y айнымалысына қатысты шешсек түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін аламыз:

$5y = 12x - 65 \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - 13$, мұндағы $\frac{12}{5} = k, -13 = b$;

b) түзудің берілген жалпы теңдеуіндегі бос мүшені теңдеудің оң жағына шығарып алып теңдеудің екі жағын да 65 санына бөлсек түзудің кесіндідегі теңдеуін ала

$$12x-5y=65 \Leftrightarrow \frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=\frac{65}{65} \Leftrightarrow \frac{12}{65}x-\frac{1}{13}y=1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{65}{12}}+\frac{y}{-13}=1,$$

мұндағы $a=\frac{65}{12}, b=-13$.

c) Түзудің берілген жалпы теңдеуінің екі жағын да

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$$

нормальдық көбейткішіне көбейтсек

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$$

түріндегі түзудің нормальдық теңдеуін аламыз, мұндағы

$$\frac{12}{13} = \cos\alpha, \quad -\frac{5}{13} = \cos\beta, \quad 5 = p.$$

4.3 Түзулердің қиылысу нүктесін табу

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ теңдеулерімен сәйкесінше берілген l_1 және l_2 түзулерінің қиылысу нүктесін анықтау есебін қарастырамыз.

Егер $M_0(x_0; y_0)$ *нүктесі* l_1, l_2 *түзулерінің қиылысу нүктесі* болса, онда ол l_1 түзуіне де және l_2 түзуіне де тиісті болады да, сызықтың теңдеуінің анықтамасы бойынша екі теңдеудің де шешімі, яғни осы екі теңдеуден тұратын

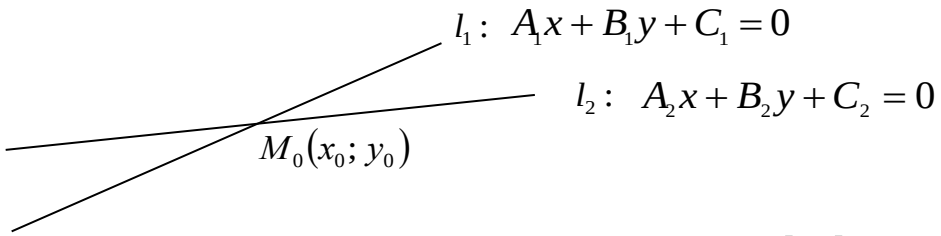
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

жүесінің шешімі болады.

Сонымен *түзулердің қиылысу нүктесін табу* дегеніміз осы түзулердің теңдеуінен құрылған жүйенің шешімін табу деген сөз болады.

Үш жағдай болуы мүмкін:

1. (4.10) *жүйесінің жалғыз шешімі* $(x_0; y_0)$ *бар* $\Rightarrow M_0(x_0; y_0)$ - l_1, l_2 түзулерінің жалғыз қиылысу нүктесі;



2. (4.10) *жүйесінің шексіз көп шешімі бар* $\Rightarrow l_1, l_2$ түзулері беттесіп жатыр;

$$\begin{aligned} l_1: &\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: &\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

3. (4.10) *жүйесінің шешімі жоқ* $\Rightarrow l_1 \,//\, l_2$;

$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

4.11-мысал: $3x - 4y - 29 = 0$ және $3x + 2y - 5 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесін табыңыз.

Шешімі: түзулердің теңдеулерінен тұратын

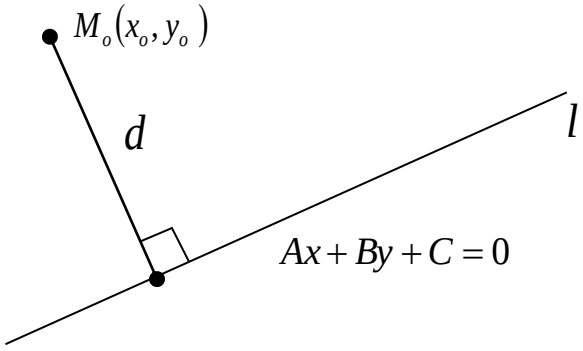
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

жүйесін құрамыз

$$\begin{cases} 3x - 4y - 29 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Жүйені шешіп $\begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = -4 \end{cases}$, түзулердің $M\left(\frac{13}{3}; -4\right)$ қиылысу нүктесін жазамыз.

4.4 Берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтық



4.7-сурет

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп осы нүктеден түзуге түсірілген перпенди-кулярдың ұзындығын айтамыз (4.7-сурет).

$M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ теңдеуімен берілген түзуге дейінгі қашықтық

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (4.11)$$

санына тең болады.

Ескерту. $d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ теңдігін $Ax + By + C = 0$ түзу теңдеуіне қолдансақ, түзу $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ нормальдық теңдеуімен берілсе, онда қашықтық

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p|$$

теңдігімен анықталады.

Ескерту. Түзу $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ нормальдық теңдеуімен берілсе, онда қашықтық

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p|$$

теңдігімен анықталады.

4.12-мысал: $M_1(6;-1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі d қашықтығын табыңыз.

Шешімі:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

формуласы бойынша $M_1(6;-1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі ара қашықтық

$$d = \frac{|3\cdot 6 - 4\cdot(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{25}} = 5.$$

4.5 Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

l_1, l_2 түзулері, сәйкесінше,

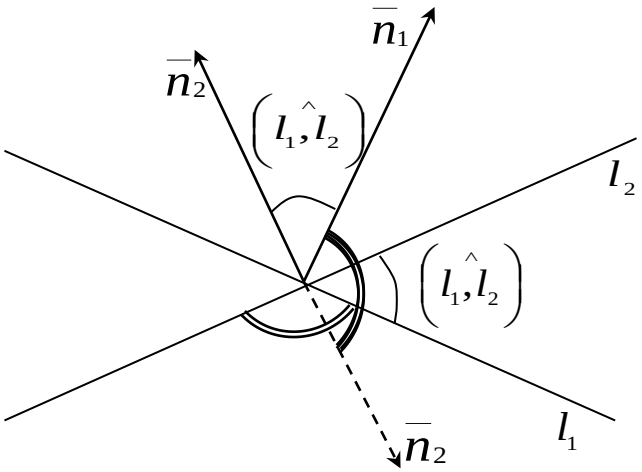
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

теңдеулерімен берілсін.

$\bar{n}_1(A_1, B_1)$, $\bar{n}_2(A_2, B_2)$ олардың нормальдық векторлары болғандықтан

$$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right)$$

деп алуға болады (4.8-сурет).



4.8-сурет

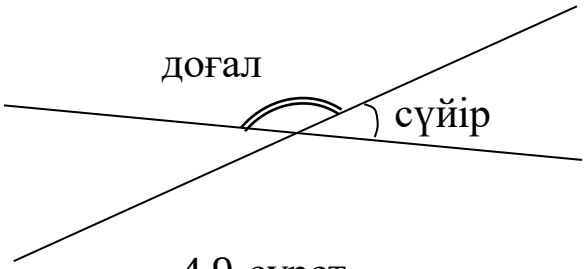
Онда

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \cos\left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right) = \frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (4.12)$$

немесе

$$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (4.13)$$

Ескерту. Қилысқан түзулердің екі түрлі бұрышты – доғал және сүйір бұрышты шектеулері мүмкін (4.9-сурет).



4.9-сурет

Егер $\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ саны – теріс (косинус теріс) болса, онда $\left(\hat{l_1,l_2}\right)=\arccos\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ формуласы бойынша *доғал бұрышты*, ал оң сан болса *сүйір бұрышты* аламыз.

Егер түзулер $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ *жалпы теңдеулерімен берілсе*, онда

а) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ - түзулердің параллельдік шарты;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ - түзулердің перпендикулярлық шарты.

Егер түзулер $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ *бұрыштық коэффициентті теңдеулерімен*, онда

а) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ - түзулердің параллельдік шарты;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$ - түзулердің перпендикулярлық шарты.

4.13-мысал:

l_1: $2x+3y-2=0$;

l_2: $x-3y+1=0$;

l_3: $5x-2y+3=0$;

l_4: $3x+y-7=0$

түзулерінің ішінен өзара перпендикуляр түзулерді көрсетіңіз.

*Шешімі: Т*үзулердің перпендикулярлығын олардың жалпы теңдеулерінің коэффициенттері арқылы берілген

$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$

немесе олардың бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген $k_1\cdot k_2=-1$ перпендикулярлық шарттарының бірін қолданып тексеруге болады.

*Т*үзулердің перпендикулярлығын олардың жалпы теңдеулерін қолданып тексеру:

$l_1:\ \ 2x+3y-2=0 \Rightarrow A_1=2,\ B_1=3;$

$l_2:\ \ x-3y+1=0 \Rightarrow A_2=1,\ B_2=-3;$

$l_3:\ \ 5x-2y+3=0 \Rightarrow A_3=5,\ B_3=-2;$

$l_4:\ \ 3x+y-7=0 \Rightarrow A_4=3,\ B_4=1$

$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$ коэффициенттерінің ішінен перпендикулярлық шартты тек A_2, B_2, A_4, B_4 коэфициенттерінде ғана қанағаттандырады:

$A_2 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4 = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0.$

Олай болса l_1, l_2, l_3, l_4 түзулерінің ішінде тек $l_2 \perp l_4$.

*Т*үзулердің перпендикулярлығын олардың бұрыштық коэффициенттерін қолданып тексеру.

Берілген түзулердің жалпы теңдеулерін бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеулерге түрлендіріп алып бұрыштық коэффициенттерін анықтаймыз:

$l_1:\ \ y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \Rightarrow k_1=-\frac{2}{3};$

$l_2:\ \ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k_2=\frac{1}{3};$

$l_3:\ \ y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow k_3=\frac{5}{2};$

$l_4:\ \ y=-3x+7 \Rightarrow k_4=-3.$

k_1, k_2, k_3 және k_4 бұрыштық коэффициенттерінің ішінде тек k_1, k_4 коэффициенттері ғана

$$k_2 \cdot k_4 = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

перпендикулярлық шартын қанағаттандырады. Олай болса l_1, l_2, l_3, l_4 түзулерінің ішінде тек $l_2 \perp l_4$.

4.14-мысал: $M_0(2;1)$ нүктесі арқылы өтетін

a) $2x-3y+4=0$ түзуіне параллель;

b) $2x-3y+4=0$ түзуіне перпендикуляр

түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: $M_o(x_o, y_o)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

түрінде жазылады.

Есептің шарты бойынша $x_o = 2, y_o = 1$. Онда берілген түзудің теңдеуі

$$y - 1 = k(x - 2)$$

түрінде жазылады.

Енді a) және b) шарттарын қанағаттандыратын k бұрыштық коэффициентінің мәнін анықтау керек.

Түзудің $2x - 3y + 4 = 0$ теңдеуінен k_1 бұрыштық коэффициентін табамыз:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3}.$$

a) Түзулердің параллельдік шарты бойынша $y - 1 = k(x - 2)$ және $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ түзулері тек $k = k_1 = \frac{2}{3}$ болғанда ғана параллель болады. k бұрыштық коэффициентінің табылған $k = \frac{2}{3}$ мәнін $y - 1 = k(x - 2)$ теңдеуіне қойсақ $2x - 3y + 4 = 0$ түзуіне параллель түзудің теңдеуін аламыз:

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 3y - 1 = 0.$$

b) Түзулердің перпендикулярлық шарты бойынша $k_1 \cdot k = -1$.

Бұл теңдіктен $k = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$ болатыны шығады.

Бұрыштық коэффициентінің табылған $k = -\frac{3}{2}$ мәнін $y - 1 = k(x - 2)$ теңдеуіне қойсақ $2x - 3y + 4 = 0$ түзуіне перпендикуляр түзудің теңдеуін аламыз:

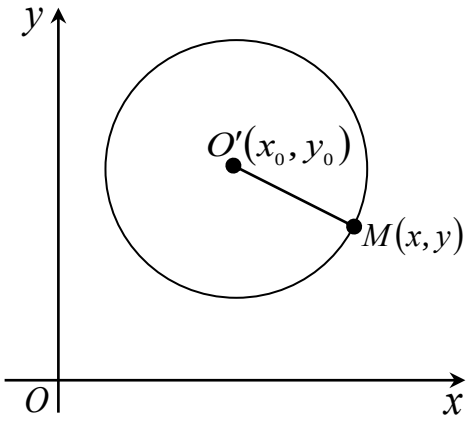
$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 2 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0.$$

4.6 Екінші ретті қисықтар

Екінші ретті қисық деп теңдеуі төменгі дәрежелі теңдеулерге жіктелмейтін екінші дәрежелі теңдеу болатын қисықты айтамыз.

Шеңбер, эллипс, гипербола және *парабола* жазықтықтағы екінші ретті қисықтар болады.

Шеңбер және оның теңдеуі. *Шеңбер* деп жазықтықтың берілген нүктеден берілген қашықтықта орналасқан нүктелерінің жиынын айтамыз. Берілген нүкте – *шеңбердің центрі*, берілген қашықтық - *шеңбердің радиусы* деп аталады.



4.10-сурет

Егер $O'(x_0, y_0)$ нүктесі - шеңбердің центрі, ал R - шеңбердің радиусы болса, онда анықтама бойынша $|O'M| = R$ теңдігі орынды болады. Бұл теңдікте координаталарға көшсек

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \qquad (4.14)$$

түріндегі *шеңбердің* қарапайым *теңдеуін* аламыз (4.10-сурет).

Егер центрі $O(0,0)$ координаталардың бас нүктесінде жатса, онда *шеңбер теңдеуі*

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad (4.15)$$

түрінде жазылады.

4.15-мысал: Центрі $O'(8,-2)$, радиусы $R = 7$ шеңберінің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ теңдеуіне $x_0 = 8$, $y_0 = -2$, $R = 7$ мәндерін қойсақ шеңбердің

$(x-8)^2 + (y-(-2))^2 = 7^2$ немесе $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 49$

түріндегі шеңбердің теңдеуін аламыз.

4.16-мысал: $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 61 = 0$ теңдеуінің шеңбердің теңдеуі болатынын көрсетіп және оның центрі мен радиусын табу керек.

Шешімі: теңдеудің сол жағындағы өрнектен x немесе y айнымалыларына қарағанда толық квадраттарын бөліп аламыз:

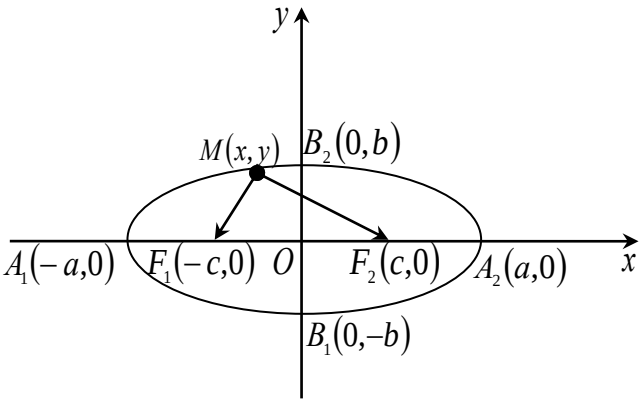
$(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2) - 61 - 4^2 - 2^2 = 0$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9^2$

Берілген теңдеу центрі $B(-4,2)$, радиусы $R = 9$ болатын шеңбердің теңдеуі.

Эллипс және оның теңдеуі. *Эллипс* деп жазықтықтың берілген екі нүктесіне дейінгі қашықтықтарының қосындысы тұрақты және осы

екі нүктелердің ара қашықтығынан артық болатын жазықтықтың нүктелерінің жиынын айтамыз.



4.10-сурет

Берілген екі нүкте *эллипстің фокустары* деп аталады. $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ нүктелері эллипстің фокустары, ал $M(x,y)$ ағымдық нүктесінен фокустарға дейінгі қашықтықтардың қосындысы $2a$ болса, онда эллипстің анықтамасы бойынша

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

теңдігі орынды болады (4.10-сурет). Бұл теңдікті нүктелердің координаталары арқылы жазып алып, $b^2 = a^2 - c^2$ ауыстыруын енгізсек

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.16)$$

түріндегі *эллипстің қарапайым теңдеуін* аламыз.

- a және b эллипстің сәйкесінше *үлкен* және *кіші жарты өстері*;
- $A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,-b), B_2(0,b)$ - *эллипс төбелері*;
- $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - *эллипс эксцентриситеті*;
- $|F_1F_2| = 2c$ - *фокальдық қашықтық.*

Егер $a = b$ болса, онда

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (4.17)$$

шеңбер теңдеуін аламыз.

4.17-мысал: $M(8,0)$ нүктесінен өтетін фокальдық қашықтығы 14-ке тең эллипстің теңдеуін жазу керек.

Шешімі: $M(8,0)$ нүктесі эллипске тиісті болғандықтан ол $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдеуінің шешімі болады, яғни

$$\frac{8^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

теңдігі орындалады. Бұдан $a^2 = 64$ болатынын аламыз. b^2 санын $b^2 = a^2 - c^2$ теңдігін пайдаланып табамыз. Есептің шарты бойынша фокальдық қашықтық $2c = 14$, яғни $c^2 = 49$. Онда $b^2 = 64 - 49 = 15$.

$a^2 = 64, b^2 = 15$ мәндерін $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдеуіне қойсақ эллипстің

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{15} = 1$$

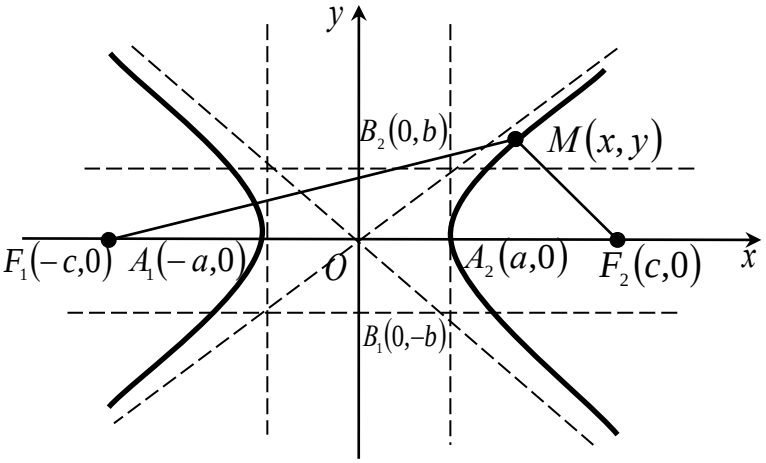
түріндегі теңдеуін аламыз.

Гипербола және оның теңдеуі. *Гипербола* деп жазықтықтың берілген екі нүктесіне дейінгі қашықтарының айырмасының модулі тұрақты және осы екі нүктелердің ара қашықтығынан кем болатын жазықтықтың нүктелерінің жиынын айтамыз. Берілген екі нүкте *гиперболаның фокустары* деп аталады.

$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ нүктелері гиперболаның фокустары, ал $M(x,y)$ ағымдық нүктесінен фокустарға дейінгі қашықтықтардың айырмасының модулі $2a$ болса, онда гиперболаның анықтамасы бойынша

$$\left|F_1M\right| - \left|F_2M\right| = 2a$$

теңдігі орынды болады (4.11-сурет).



4.11-сурет

Бұл теңдікті нүктелердің координаталары арқылы жазып алып, $b^2 = c^2 - a^2$ ауыстыруын енгізсек,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.18)$$

түріндегі *гиперболаның қарапайым теңдеуін* аламыз.

- a және b гиперболаның сәйкесінше *нақты* және *жорамал жарты өстері;*
- $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ - *гипербола төбелері*;
- $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - *гипербола эксцентриситеті*.

4.18-мысал: $12x^2 - 5y^2 = 120$ теңдеуі гипербола теңдеуі болатынын көрсетіп және оның фокустарын табыңыз.

Шешімі: берілген теңдеудің екі жағын да 120 санына бөлсек гиперболаның

$$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{24}=1$$

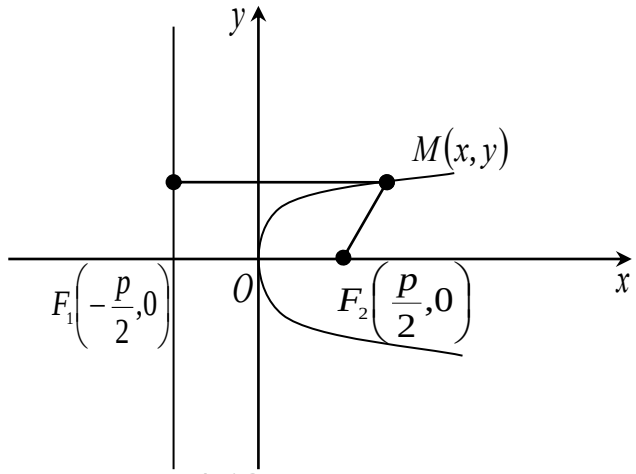
түріндегі мәндеріне сәйкес теңдеуін аламыз.

$b^2=c^2-a^2$ теңдігіне $a^2=10, b^2=24$ мәндеріне сәйкес $c^2=34$, яғни $c=\sqrt{34}$ мәнін аламыз. Олай болса гиперболаның фокустары

$F_1(-c,0)=F_1\left(-\sqrt{34},0\right)$ және $F_2(c,0)=F_2\left(\sqrt{34},0\right)$

нүктелері болады.

Парабола және оның теңдеуі. *Парабола* деп жазықтықтың берілген түзуі мен берілген нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелерінің жиынын айтамыз.



4.12-сурет

Берілген түзу – *параболаның директрисасы*, берілген нүкте *параболаның фокусы* деп аталады (4.12-сурет).

Директрисасы $x=-\frac{p}{2}$ түзуі, фокусы $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ нүктесі болатын *параболаның қарапайым теңдеуі*

$$y^2=2px \tag{4.20}$$

түрінде жазылады.

$O(0,0)$ нүктесі $y^2=2px$ *параболасының төбесі* деп аталады.

$y^2=2px$ *теңдеуімен берілген параболаның қасиеттері:*

1) парабола $O(0,0)$ бас нүктесінен өтеді;
2) парабола Ox өсіне симметриялы, себебі теңдеуде y айнымалысы жұп дәрежелі;
3) $p>0$ болса параболаның тармақтары оңға қарай бағытталған ($y^2\geq 0$ және $p>0\Rightarrow x\geq 0$);
4) $p<0$ болса параболаның тармақтары солға қарай бағытталған ($y^2\geq 0$ және $p<0\Rightarrow x\leq 0$).

Егер параболаның фокусы ретінде $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ нүктесін, ал директрисасы ретінде $y=-\frac{p}{2}$ түзуін алсақ, онда *параболаның қарапайым теңдеуі*

$$x^2=2py$$

түрінде жазылады.

4.19-мысал: $y^2 = 3x$ параболасының фокусы мен директрисасын табу керек.

Шешімі: параболаның $y^2 = 2px$ теңдеуімен есептің шартынан $2p = 3$ теңдігін аламыз. Бұл теңдіктен $p = \frac{3}{2}$ болатындығы шығады. $p = \frac{3}{2}$ мәнін қою арқылы $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ фокусы мен $x = -\frac{p}{2}$ директрисасын табамыз:

$F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ - фокус, $x = -\frac{3}{4}$ - директриса.

4.7 Теориялық сұрақтар

1. L сызығының теңдеуі.
2. Ағымдық координаталар ұғымы.
3. Жазықтықта берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $\bar{n}(A, B)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі.
4. Түзудің нормальдық векторы.
5. Берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $\bar{a}(a_x, a_y)$ векторына параллель жүргізілген түзудің теңдеуі.
6. Түзудің бағыттаушы векторы.
7. Берілген $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі.
8. Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі:
9. Берілген нүктеден берілген бұрышпен өтетін түзудің теңдеуі.
10. Түзудің бұрыштық коэффициенті.
11. Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуі.
12. Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі.
13. Түзудің нормальдық теңдеуі.
14. Түзулердің қиылысу нүктесін табу.
15. Түзулер жүйесінің шешіміне қатысты үш жағдай.
16. $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ теңдеуімен берілген түзуге дейінгі қашықтық.
17. $M_o(x_o, y_o)$ нүктесінен $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ түзуіне дейінгі қашықтық.
18. Түзулер арасындағы бұрыш.

19. Түзулердің параллельдік шарттары.
20. Түзулердің перпендикулярлық шарттары.
21. Шеңбер анықтамасы, теңдеуі.
22. Эллипс анықтамасы, теңдеуі.
23. Гипербола анықтамасы, теңдеуі.
24. Парабола анықтамасы, теңдеуі.

5 КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ОБЪЕКТІЛЕРІ

5.1 Жазықтық теңдеулері

Егер

$$F(x_0,\ y_0, z_0)=0 \Leftrightarrow P(x_0,\ y_0, z_0)\in P$$

болса, онда $F(x,\ y,\ z)=0$ теңдеуі P *жазықтығының теңдеуі* деп аталады, мұндағы x, y және z айнымалылары *жазықтық* нүктелерінің *ағымдық координаталары*.

1) Жазықтықтың жалпы теңдеуі

Oxy жазықтығында сызықтық (бір дәрежелі) теңдеу *түзудің* теңдеуі болса, $Oxyz$ кеңістігінде сызықтық теңдеу *жазықтықтың* теңдеуін береді.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5.1)$$

теңдеуі *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.

$\bar{n}(A,B,C)$ векторы (5.1) теңдеуімен берілген P жазықтығының *нормальдық* ($\bar{n}\perp P$) *векторы* болады.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінің дербес жағдайлары:

1. егер $D=0$ болса, онда жазықтық координатаның бас нүктесі арқылы өтеді;
2. егер $A=0$ болса, онда $P\,||\,OX$;
3. егер $A=0,\ B=0$ болса, онда $P\,||\,OXY$;
4. $x=0,\ y=0,\ z=0$ - сәйкесінше Oyz, Oxz, Oxy координат жазықтықтарының теңдеулері.

5.1-мысал: Координаталардың бас нүктесінен өтетін жазықтық теңдеуін құрыңыз.

Шешімі: Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

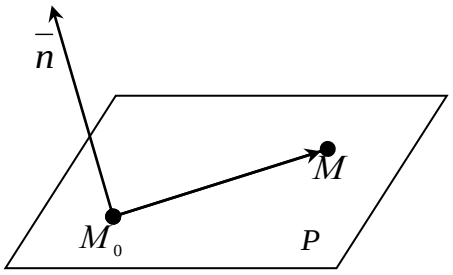
Егер жазықтық координаталардың бас нүктесінен өтсе, онда бұл теңдеуді $O(0,0,0)$ нүктесінің координаталары қанағаттандыруы керек. $x=0,\ y=0,\ z=0$ координаталарын $Ax+By+Cz+D=0$ теңдеуіне қойсақ $D=0$.

Сәйкесінше, координаталардың бас нүктесінен өтетін жазықтық теңдеуі

$$Ax + By + Cz = 0$$

түрінде беріледі.

2) $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ***нүктесі арқылы*** $\bar{n}(A, B, C)$ ***векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі***



P - қарастырылып отырған жазықтық, ал $M(x, y, z)$ оның $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен өзгеше кез келген нүктесі болсын (5.1-сурет).

5.1-сурет

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overline{M_o M}(x - x_o, y - y_o, z - z_o) \perp \bar{n}(A, B, C) \Leftrightarrow$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (5.2)$$

(5.2) теңдеуі $M_o(x_o, y_o, z_o)$ *нүктесінен* $\bar{n}(A, B, C)$ *векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі.*

5.2-мысал: $M_0(2; 1; -1)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(1; -2; 3)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = -1, A = 1, B = -2, C = 3$.

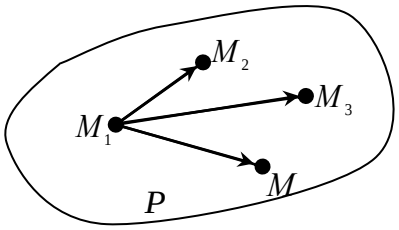
Осы мәндерді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

теңдеуіне қоя отырып ізделінді теңдеуді аламыз:

$$1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z - (-1)) = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

3) $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ ***үш нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі***



P - қарастырылып отырған жазықтық, ал $M(x, y, z)$ оның $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелерінен өзгеше кез келген нүктесі болсын (5.2-сурет).

5.2-сурет

$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow$ $\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1 M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\overline{M_1 M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ компланар $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.3)$$

(5.3) теңдеуі $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.*

5.3-мысал: $M_1(1,-2,0)$, $M_2(3,-4,1)$, $M_3(5,-3,6)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ z_1 = 0$

$x_2 = 3,\ y_2 = -4,\ z_2 = 1$

және

$x_3 = 5,\ y_3 = -3,\ z_3 = 6$.

Осы мәндерді (5.3) түріндегі теңдеуіне қоя отырып

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-0 \\ 3-1 & -4-(-2) & 1-0 \\ 5-1 & -3-(-2) & 6-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-11(x-1)-8(y+2)+6z=0$.

Сонымен

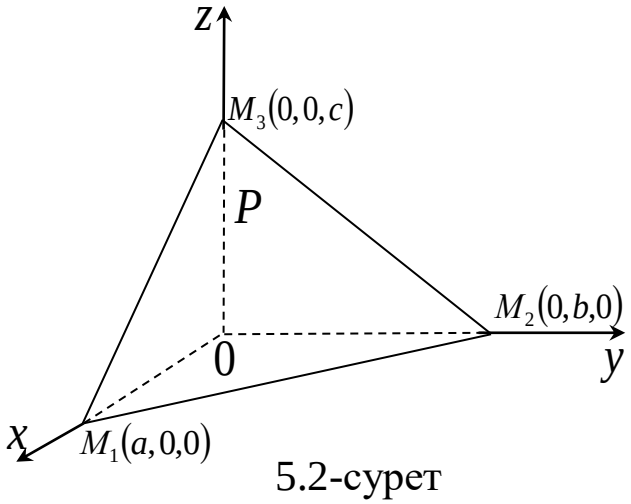
$-11x-8y+6z-5=0$ немесе $11x+8y-6z+5=0$

жазықтығының ізделінді теңдеуін аламыз.

4) Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5.4)$$

түріндегі теңдеу *жазықтықтың кесінділік теңдеуі* деп аталады. Бұл жазықтық $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ нүктелерінен өтеді, яғни Ox, Oy, Oz өстерінен сәйкесінше a, b, c «кесінділерін» қияды (5.2-сурет).



5.2-сурет

5) Берілген нүктеден берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық

$M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жалпы теңдеуімен берілген жазықтыққа дейінгі d қашықтығы

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5.5)$$

формуласы бойынша табылады.

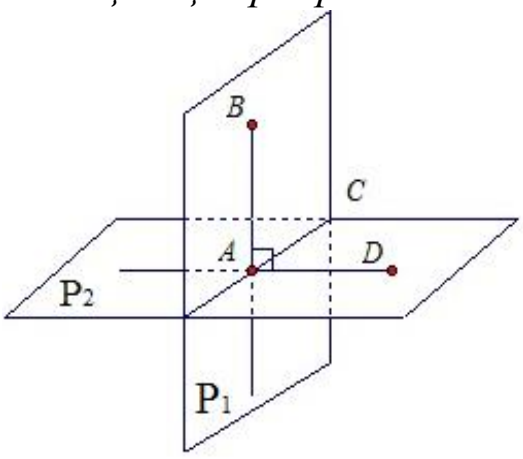
5.4-мысал: $5x - 2y - 3z - 1 = 0$ жазықтығы мен $M_0(2; -1; 4)$ нүктесінің арақашықтығын табыңыз.

Шешімі: жазықтық пен нүктенің арақашықтығын (5.5) формуласы бойынша табамыз:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|5 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 - 1|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{38}.$$

6) Екі жазықтық арасындағы бұрыш

Жазықтықтар арасындағы бұрыш деп жазықтықтардың қиылысу сызығына жүргізілген перпендикулярлар арасындағы бұрышты айтады.



Жазықтықтар арасындағы бұрыш осы жазықтықтар түзетін *сүйір бұрыш* деп алынады. Егер жазықтықтар арасындағы бұрыш 90° болса, онда мұндай жазықтықтар *перпендикуляр* болады (5.3-сурет).

5.3-сурет

P_1, P_2 жазықтықтары, сәйкесінше,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$$

теңдеулерімен берілсін.

$\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1) \perp P_1$, $\bar{n}_2(A_2, B_2, C_2) \perp P_2$ болғандықтан $\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right)$ деп алуға болады. Олай болса

$$\cos\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \cos\left(\hat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}\right) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Сонымен

$$\cos\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

немесе

$$\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

7) Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

$\cos\left(\hat{P_1, P_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ теңдігінен жазықтықтардың келесі параллельдік және перпендикулярлық шарттары шығады:

а) $P_1 \| P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - *жазықтықтардың параллельдік шарты*;

б) $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ - *жазықтықтардың перпендикулярлық шарты*.

5.5-мысал: m-нің қандай мәнінде $3x - 5y + mz - 3 = 0$ және $x + 3y + 2z + 5 = 0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады?

Шешімі: жазықтықтардың $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ перпендикулярлық шартына есептің шартынан шығатын

$A_1 = 3,\ B_1 = -5,\ C_1 = m,\ A_2 = 1,\ B_2 = 3, C_2 = 2$

мәндерін қоя отырып m-нің мәнін тауып аламыз:

$3 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 + 2 \cdot m = 0 \Leftrightarrow 3 - 15 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = 12 \Leftrightarrow m = 6.$

5.2 Кеңістіктегі түзудің теңдеуі

1) Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі:

Кеңістіктіктің l түзуі параллель емес және беттеспейтін екі P_1, P_2 жазықтықтарының қиылысу сызығы ретінде қарастырылады. Ал қиылысу түзуінің нүктелері екі жазықтыққа да тиісті болғандықтан, олар екі жазықтықтың да теңдеулерінің шешімдері, яғни осы теңдеулерден құрылған

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.6)$$

жүйесінің шешімдері ретінде анықталады.

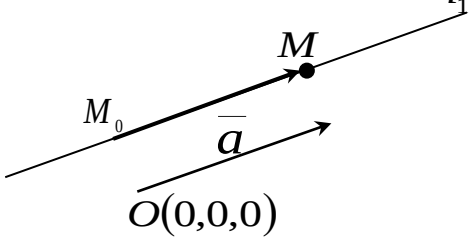
(5.6) жүйесі *түзудің кеңістіктегі жалпы теңдеуі* деп аталады, мұндағы теңдеулер - сәйкесінше P_1, P_2 жазықтықтарының теңдеулері.

$\bar{n}_1(A_1, B_1, C_1) \perp P_1, \bar{n}_2(A_2, B_2, C_2) \perp P_2$ болғандықтан $\bar{n}_1 \perp l$ және $\bar{n}_2 \perp l$. Бұдан

$$\bar{a} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \tag{5.7}$$

векторының l түзуіне параллель болатыны (*l түзуінің бағыттаушы векторы* болатыны) шығады.

2) Берілген $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен берілген $\bar{a}(p; m; n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуі



5.4-сурет

$M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы $\bar{a}(p; m; n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуін жазу керек болсын (5.4-сурет).

$$M(x, y, z) \in l_1 \Leftrightarrow \overline{M_0M} \,||\, \bar{a} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \,||\, t \cdot \bar{a},$$

мұндағы t - қандай да бір сан - параметр

$$\Leftrightarrow \overline{M_0M}(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = (t\bar{a})(tp; tm; tn) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_o = pt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases} \tag{5.8}$$

(5.8) теңдеуі *түзудің параметрлік теңдеуі* деп аталады.

(5.8) жүйесінен, $p \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ болғанда, *түзудің канондық теңдеуі* деп аталатын

$$\frac{x - x_o}{p} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n} \tag{5.9}$$

теңдеуін аламыз.

Егер p, m, n сандарының ($\bar{a}(p; m; n)$ векторының координаталарының) біреуі нөлге тең, мысал үшін $p = 0, m \neq 0, n \neq 0$ болса, онда $\begin{cases} x - x_o = pt \\ y - y_o = mt \\ z - z_o = nt \end{cases}$ жүйесінен түзудің

$$\begin{cases} x = x_o \\ \dfrac{y - y_o}{m} = \dfrac{z - z_o}{n} \end{cases}$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

Егер де p, m, n сандарының екеуі нөлге тең, мысал үшін $p = 0, m = 0, n \neq 0$ болса, онда түзудің теңдеуі

$$\begin{cases} x = x_o \\ y = y_o \end{cases}$$

түрінде жазылады. $\bar{a}(p; m; n)$ *векторы* (5.9) *түзуінің бағыттаушы* ((5.9) түзуіне //) *векторы* болады.

5.3 Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

1) Түзулер арасындағы бұрыш

l_1, l_2 түзулері сәйкесінше

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

теңдеулерімен берілсін.

$$\bar{a}_1(p_1; m_1; n_1) \| l_1, \quad \bar{a}_2(p_2, m_2, n_2) \| l_2$$

болғандықтан $\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \left(\hat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}\right)$ деп алуға болады. Олай болса

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \cos\left(\hat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}\right) = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{\left|\bar{a}_1\right| \cdot \left|\bar{a}_2\right|} = \frac{p_1 p_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{p_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Сонымен

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \frac{p_1 p_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{p_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

немесе l_1, l_2 *түзулері арасындағы бұрыш*

$$\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \arccos\frac{p_1 p_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{p_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

2) Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

а) $l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - l_1, l_2 *параллельдік шарты;*

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ - l_1, l_2 *перпендикулярлық шарты.*

5.6-мысал: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ және $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ түзулерінің арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша $p_1 = 1, m_1 = -4, n_1 = 1$ және $p_2 = 2, m_2 = -2, n_2 = -1$. Бұдан түзулер арасындағы бұрышты табу формуласы бойынша

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{1\cdot 2 - 4\cdot(-2) + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(\hat{l_1, l_2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\hat{l_1, l_2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

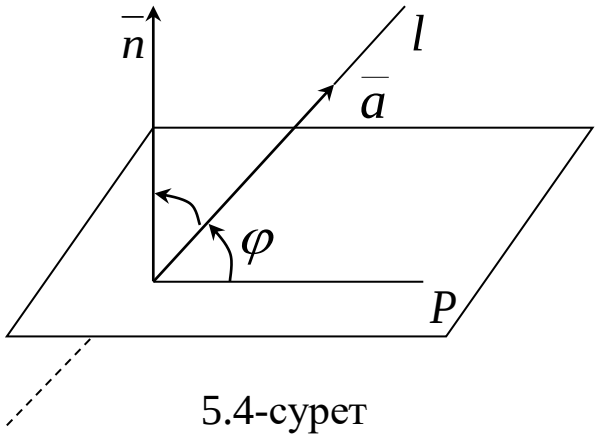
5.4 Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

$$\frac{x - x_o}{p} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}$$

теңдеуімен берілген l түзуімен

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

теңдеуімен берілген P жазықтығының арасындағы бұрышты анықтау керек (5.4-сурет).



5.4-сурет

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш деп түзу мен оның жазықтыққа түсірілген проекциясының арасындағы бұрышты айтамыз (сызбада φ бұрышы).

$$\bar{n}(A, B, C) \perp P, \quad \bar{a}(p, m, n) \| l \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\hat{\bar{n}, \bar{a}}\right) \Rightarrow \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\hat{\bar{n}, \bar{a}}\right)\right) \Rightarrow \sin\varphi = \cos\left(\hat{\bar{n}, \bar{a}}\right) \Rightarrow$$

$$\sin\varphi = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{Ap + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{p^2 + m^2 + n^2}}.$$

Салдар: $l \parallel P \Leftrightarrow Ap + Bm + Cn = 0$ - түзу мен жазықтықтың параллельдік шарты.

5.7-мысал: $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ түзуі мен $3x + y + 4 = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешімі: есептің шарты бойынша түзудің бағыттаушы векторы

$$\bar{a}(p,m,n) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - \bar{j},$$

ал нормаль векторы

$$\bar{n}(A,B,C) = (3,1,0).$$

Бұдан түзуі мен жазықтығының арасындағы бұрыш

$$\sin\varphi = \frac{Ap + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{p^2 + m^2 + n^2}} = \frac{3\cdot(-3) + 1(-1) + 0\cdot 0}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -1,$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

5.5 Аналитикалық геометрия объектілерінің қолданбалары

Ғарыштық жылдамдықтар - жасанды денелердің (жерден) бастапқы ұшу жылдамдығы: біріншісі - 7,9 км/сек., екіншісі - 11,2 км/сек., үшіншісі - 16,7 км/сек. Жердің тартылыс күшін теңестіріп, ракетаның жер орбитасын айналып жүруі үшін оған жер бетінде бастапқы жылдамдық беру керек. Ол - 7,9 км/сек. (шеңбер жылдамдығы). Ракетаның ұшу биіктігі артқан сайын айналудың бастапқы жылдамдығы кемиді (200 километр ұшу биіктігінде - 7,9 км/сек-ке дейін, 1000 км биікте - 7,3 км/сек-ке дейін). Өйткені жердің тартылыс күші азаяды. Жер бетіндегі бастапқы жылдамдықты 7,9-дан 11,2 км/сек-ке дейін арттырса, ракета эллипс тәрізді орбитада ұшады, оның бір бүйірі жердің орталығында болады. Жылдамдық шеңбер жылдамдығынан артқан сайын, эллипс соғұрлым созылыңқы болады. Жер бетіндегі жылдамдық 11,2 км/секундке жеткенде, ракета жердің тартылыс күшін жеңіп, жасанды планетаға айналады, яғни парабола бойынша ұшады. Жер бетіндегі бастапқы жылдамдығы 16,7 км/сек

жетсе, ракета Жердің де Күннің де тарту күшін жеңіп, күн жүйесінің шеңберінен шығады, яғни гипербола бойынша ұшады.

Бұл қисықтар қазіргі кезде көптеген салада қолданылады. Мысалы: шеңбер эвольвентасы механика саласында көп қолданыс тауып отыр. Электротехника, акустика, механикада есептеулер жүргізгенде кездеседі. Сондықтан, сабақтан тыс уақыттарда оларды оқып, қасиеттерін зерттеу оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттырады, оларды өзіндік шығармашылыққа баулиды.

Аналитикалық геометрияның экономикалық есептерді шешуде қолданылуы.

а) Амортизацияның сызықтық моделі

Өзіміз білетіндей, кәсіпорын сатып алған жабдықтың амортизациясын есептеудің әртүрлі үлгілері бар. Ең қарапайым моделі сызықтық модель**.**

Бұл модель бойынша өнеркәсіп сатып алынған жабдықтың бағасын өнеркәсіп шығындарының ішіне бірдей үлеспен енгізіп жібереді.

Сонда, егер

P - сатып алынған жабдықтың бастапқы бағасы болса;

S - оның қалдық бағасы;

T - ұсталған уақыты белгілі болса,

онда жыл сайынғы амортизация

$$a = \frac{P - S}{T}$$

шамасымен есептелінеді, ал t жыл пайдаланылған жабдықтың бағасын мына сызықтық теңдеуден табуға болады:

$V(t) = P - at$.

5.8-мысал: Жабдық 80 мың теңгеге сатып алынған. Қызмет ету уақыты - 10 жыл. Ал, норма бойынша оның қалдық бағасы 8 мың теңге.

Жабдықтың

1) t жылдан кейінгі;
2) 5 жылдан кейінгі бағасын анықтаңыздар.

Шешімі: Шарт бойынша $P = 80$ мың теңге, $S = 8$ мың теңге, $T = 10$ жыл.

Демек, амортизация $a = \frac{80-8}{10} = 7{,}2$ мың теңге.

Сонда

1) $V(t) = 80 - 7{,}2t$ мың теңге;

2) $V(5) = 80 - 7{,}2 \cdot 5 = 44$ мың теңге.

ә) Шығынның сызықтық моделі. Залалсыздану нүктесі.

Кәсіпорында кез-келген өнім өндіруге кететін шығындардың жиынтығын $K(x)$ сызықтық функциясы арқылы өрнектеуге болады:

$$K(x) = b + ax,$$

мұндағы x - өндірілген өнімнің санын, b - параметрі тұрақты шығындарды (жабдықтың амортизациясы, үй-жай жалдау, қарыздарды пайызбен төлеу,..т.с.с), ал, ax - "айнымалы шығындар", яғни өндірілген өнімнің бағасын, шикізат бағасын, жұмыс күшін, т.с.с. білдіреді. a-пропорционалдық коэффициенті өнім бірлігін өндіруге қажетті шығындарды білдіреді.

Өндірілген өнімнің бірлік бағасы p болсын, сонда жиынтық табыс $R(x)$ және пайда $P(x)$ сәйкес келесі формулалармен өрнектеледі:

$$R(x) = px,$$

$$P(x) = R(x) - K(x).$$

Өндірілетін өнімнің көлемі аз болса, онда түсетін пайда теріс, яғни кәсіпорын шығынды болады. x - өндірілген өнім көлемі артқан сайын, түсетін пайда да арта береді де бір $x = x_0$ нүктесінде нөлге айналады. $P(x_0) = 0$ болатын нүктені *залалсыздану нүктесі* деп атайды.

5.9-мысал: Фирманың тұрақты шығыны айына 100 мың теңгені құрайды. Өнім бірлігін өндіруге кететін шығын 80 теңге, ал оны сатудан түсетін түсім-120 теңге. Фирманың табыс функциясын табыңыз, оның графигін салыңыз және залалсыздандыру нүктесін табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша a=80 теңге, b=100 мың теңге, p=120 теңге. Жоғарыдағы формулаларды пайдаланып $R(x)$ және $K(x)$ табылады:

$$R(x) = 120x,$$

$$K(x) = 100\,000 + 80x.$$

Сонда табыс функциясы:

$$P(x) = 120x - 80x - 100\,000 = 40x - 100\,000.$$

$P(x_0) = 0$ шартынан $x = x_0 = 2500$ өнім бірлігіне тең залалсыздандыру нүктесін табамыз.

5.6 Теориялық сұрақтар

1. Жазықтық теңдеуі.
2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі.
3. Жазықтықтың нормаль векторы ұғымы.
4. $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы $\bar{n}(A, B, C)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі.
5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.
6. Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуі.
7. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа дейінгі қашықтық.
8. Екі жазықтық арасындағы бұрыш.
9. Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
10. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі.
11. Берілген $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесінен берілген $\bar{a}(p; m; n)$ векторына параллель өтетін түзудің теңдеуі.
12. Түзудің параметрлік теңдеуі.
13. Түзудің канондық теңдеуі, бағыттаушы векторы.
14. Канондық теңдеуімен берілген түзулер арасындағы бұрыш.
15. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
16. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш.
17. Түзу мен жазықтықтың параллельдік шарты.
18. Аналитикалық геометрия объектілерінің қолданбалары.

6 МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

6.1 Сандар жиыны

Элементтері сандар болатын жиын *сандық жиын* деп аталады.

$N = \{1;2;3;...;n;...\}$ - *натурал сандар жиыны* - реттік нөмір немесе қандай да бір объектілердің саны ретінде қабылдауға болатын сандар жиыны;

$Z_0 = \{0;1;2;3;...;n;...\}$ - *теріс емес бүтін сандар жиыны* – натурал сандар мен 0 санынан тұратын жиын;

$Z = \{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;...;\pm n;...\}$ - *бүтін сандар жиыны* – 0 санынан, натурал сандардан және оларға қарама-қарсы сандардан тұратын жиын;

$Q = \left\{\frac{m}{n}; m \in Z, n \in N\right\}$ - *рационал сандар жиыны* - жай бөлшек түрінде жазылатын сандар жиыны.

Ескерту.

1) кез келген бүтін санды жай бөлшек түрінде жазуға болатындықтан (мысалы: $5 = \frac{10}{2}$), *бүтін сандар да рационал сандар болады:*
$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q;$

2) кез келген $\frac{m}{n}$ жай бөлшегі периодты ондық бөлшек түрінде жазылатындықтан рационал сандар жиынын *периодты ондық бөлшек түрінде жазылатын сандар жиыны* деп те қарастыруға болады
(мысалы: $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6);\quad 5 = 5,000... = 5(0)$).

I - *иррационал сандар жиыны* - жай бөлшек немесе периодты ондық бөлшек түрінде жазылмайтын сандар жиыны (Мысалы**:** $\sqrt{2}; \pi$).

Рационал сандар жиыны мен иррационал сандар жиыны *нақты сандар жиынын* құрайды. Нақты сандар жиыны R әрпімен белгіленеді.

Демек, $R = Q \cup I$.

Төменгі сандар жиыны *аралықтар* деп аталады:

1. $[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ - *сегмент немесе кесінді (тұйық аралық)*;

$[a;b]$ - тұйықталған



2. $(a;b) = \{x : a < x < b\}$ - *интервал тұйықталмаған (ашық) аралық*;

$(a;b)$ - тұйықталмаған



3. $(a;b] = \{x : a < x \le b\}$, $[a;b) = \{x : a \le x < b\}$ - *жартылай сегменттер немесе жартылай интервалдар;*

$(a;b]$ - сол жағынан тұйықталмаған, оң жағынан тұйықталған



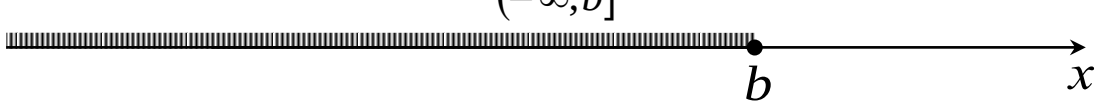
$[a;b)$ - сол жағынан тұйықталған, оң жағынан тұйықталмаған

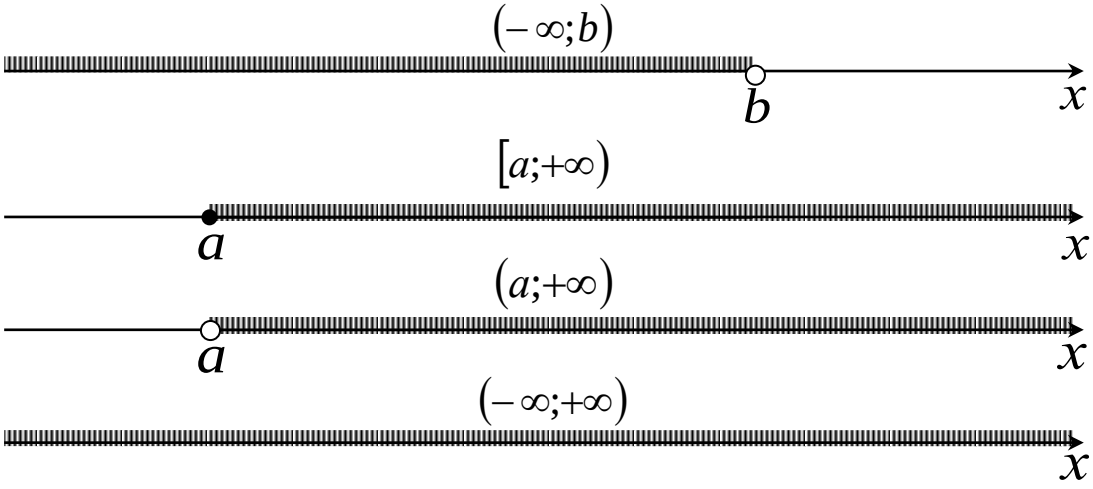


4. $(-\infty;b] = \{x : x \le b\}$, $(-\infty;b) = \{x : x < b\}$,
$[a;+\infty) = \{x : x \ge a\}$, $(a;+\infty) = \{x : x > a\}$,
$(-\infty;+\infty) = R$ - шексіз аралықтар.

Ескерту. $x \in R$ жазбасының орнына $-\infty < x < +\infty$ түріндегі жазбаны қолдана береміз.

$(-\infty;b]$

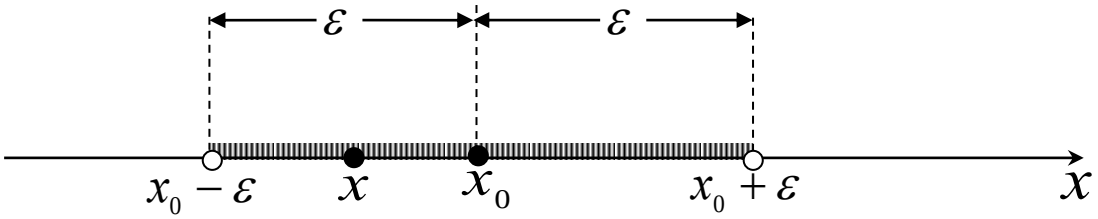




6.1-анықтама. *x_0 нүктесінің (санының) ε - аймағы (төңірегі)* деп

$(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$, *($\varepsilon>0$)*

интервалын айтамыз.



$x\in(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)\Leftrightarrow$ | интервалдың анықтамасы бойынша |

$\Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon.$

Сонымен *x нүктесі x_0 нүктесінің ε аймағына тиісті* дегеніміз

$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ және $|x-x_0|<\varepsilon$

теңсіздіктері орынды болады деген сөз.

x_0 нүктесінің ε аймағын $U_\varepsilon(x_0)$ түрінде белгілейміз:

$$U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon).$$

6.2-анықтама. $(x_0-\varepsilon;\ x_0)\cup(x_0;\ x_0+\varepsilon)$ жиынын x_0 нүктесінің ε ойық аймағы деп атаймыз да $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$ түрінде белгілейміз:

$$\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon;\ x_0)\cup(x_0;\ x_0+\varepsilon).$$

$$\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)=U_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}.$$



6.3-анықтама. Егер $x \le M\ (x \ge m)$ теңсіздігі D жиынына тиісті кез келген x саны үшін орындалатындай $M\ (m)$ саны бар болса, онда D сандар жиыны *жоғарыдан (төменнен) шектелген* деп аталады.

6.4-анықтама. Егер D сандар жиыны жоғарыдан да төменнен де шектелген болса ($m \le x \le M$ теңсіздіктері D жиынына тиісті кез келген x саны үшін орынды болатын m, M сандары табылса), онда D сандар жиыны *шектелген* деп аталады.

6.1-мысал:

1. $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ аралықтары *шектелген жиындар,* себебі бұл аралықтардағы кез келген x саны үшін $a \le x \le b$ $(m = a, M = b)$ теңсіздіктері орынды;
2. $[a;+\infty), (a;+\infty)$ - *төменнен шектелген*, себебі $x \in [a;+\infty)$ немесе $x \in (a;+\infty) \Rightarrow x \ge a\ (m = a)$;
3. $(-\infty;b], (-\infty;b)$ - *жоғарыдан шектелген*, себебі $x \in (-\infty;b]$ немесе $x \in (-\infty;b) \Rightarrow x \le b\ (M = b)$;
4. $(-\infty;+\infty)$ - *жоғарыдан да, төменнен де шектелмеген жиын*.

6.2 Функция, оның берілу тәсілдері

6.5-анықтама. D сандар жиынының әрбір x саны үшін қандай да бір f заңы (ережесі) бойынша бір y саны сәйкестілікке қойылса, онда D жиынында анықталған f *функциясы* берілген дейміз. Әдетте функция

$$y = f(x),\ \ x \in D, \tag{6.1}$$

түрінде жазылады. Мұндағы D - *функцияның анықталу облысы*, x - *тәуелсіз айнымалы немесе аргумент*, y және $f(x)$ - f *функциясының* x *нүктесіндегі мәні*, $E = \{f(x) : x \in D\}$ - *функцияның мәндерінің жиыны (өзгеру облысы)* деп аталады.

Біз f функциясы дегеннің орнына $y = f(x)$ немесе $f(x)$ *функциясы* деп те айтатын боламыз.

Ескерту. Функция тек $y = f(x)$ сәйкестілік заңдылығымен ғана берілуі мүмкін (D жиыны көрсетілмеген). Мұндай жағдайда D анықталу облысы ретінде $f(x)$ мағыналы болатын барлық сандар жиыны алынады:

$$D = \{ x : f(x) - \text{мағыналы} \}.$$

6.2-мысал: $y = \dfrac{\log_2(x+5)}{x^2 - 1}$ функциясының анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

$$D = \{ x : \frac{\log_2(x+5)}{x^2-1} - \text{мағыналы} \} = \{ x : \begin{cases} x+5 > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \} = \{ x : \begin{cases} x > -5 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \} =$$

$$= (-5; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Сонымен $D = (-5; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

6.3-мысал: $y = 4 + 5\sin x$ функциясының мәндерінің жиынын табыңыз.

Шешімі: $D = \{ x : 4 + 5\sin x - \text{мағыналы} \} = \{ x : x - \text{кез келген сан} \} = (-\infty, +\infty)$.

Синус функциясы модулі бойынша бірден артпайтын мәндер қабылдайтындықтан

$$|\sin x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -5 \le 5\sin x \le 5 \Leftrightarrow 4 - 5 \le 4 + 5\sin x \le 4 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le y \le 9.$$

Сонымен $E = [-1; 9]$.

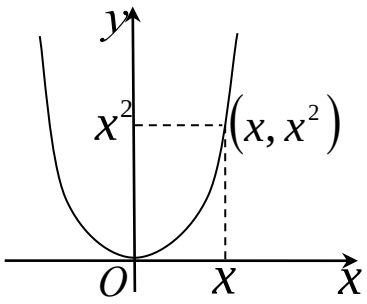
6.6-анықтама. $y = f(x)$, $x \in D$ *функциясының графигі* деп

$$G = \{ (x, f(x)) : x \in D \}$$

реттелген қос сандар жиынын айтамыз.

Геометриялық тұрғыдан $(x, f(x))$ - OXY жазықтығының абциссасы x, ординатасы $f(x)$ нүктесі болады, яғни G - OXY *жазықтығындағы нүктелердің геометриялық орны* болады.

6.4-мысал: $y = x^2, x \in R$ функциясының графигі $G = \{ (x, x^2) : x \in R \}$ жиыны OXY жазықтығында параболаны құрайды (6.1-сурет):



6.1-сурет

Ескерту. Кез келген функцияның графигі OXY жазықтығында сызық құрайды деп айтуға болмайды.

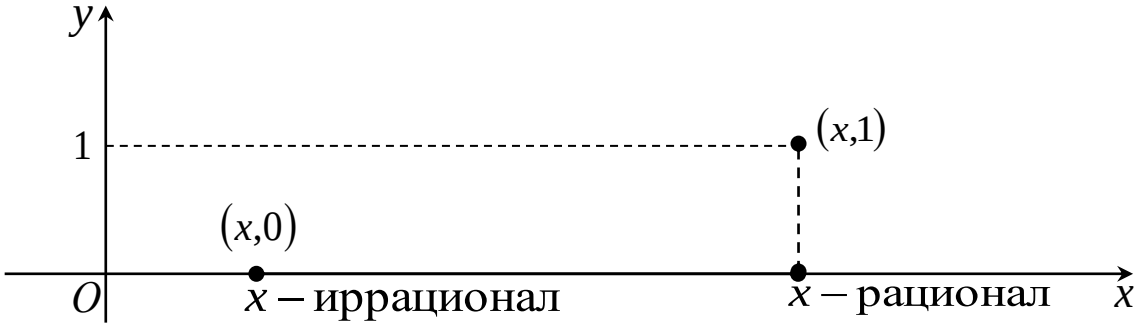
6.5-мысал:

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ егер } x-\text{рационал},\\ 0, \text{ егер } x-\text{иррационал}\end{cases}$$

Дирихле функциясының графигі (6.2-сурет)

$$G=\{(x,D(x)):x\in R\}=\{(x,1):x\in Q\}\cup\{(x,0):x\in R\,|\,Q\}$$

ешқандай сызықты құрамайды (G жиынын жазықтықта көрсету мүмкін емес).



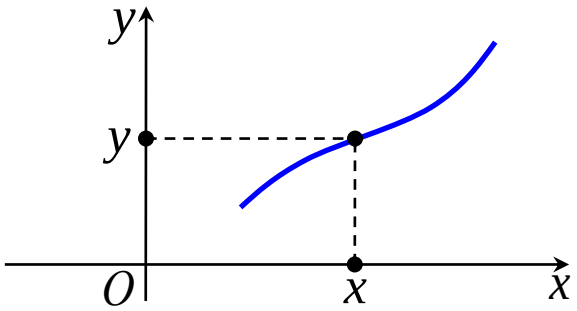
6.2-сурет

***Функцияның берілу тәсілдері*:**

1) *аналитикалық тәсіл* - y, x айнымалыларының тәуелділігі формуламен беріледі (сипатталады): $y=x^2$;
2) *кестелік тәсіл* – аргументтің бірнеше мәні мен функцияның оларға сәйкес мәндері беріледі:

x	0	0,1	0,2	0,3
y	0	1	2	3

3) *графиктік тәсіл* – тәуелділік график (сызба) арқылы беріледі (6.3-сурет):



6.3-сурет

4) *сөзбен* - y, x айнымалыларының тәуелділігі сөзбен сипатталады (Мысалы: Дирихле функциясы).

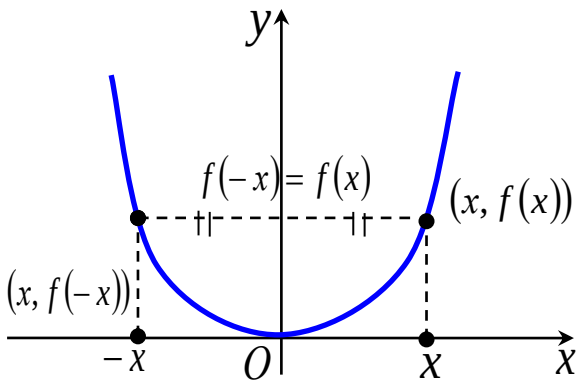
6.7-анықтама. Егер $\forall x \in D$:

$$f(-x) = f(x) \quad [f(-x) = -f(x)]$$

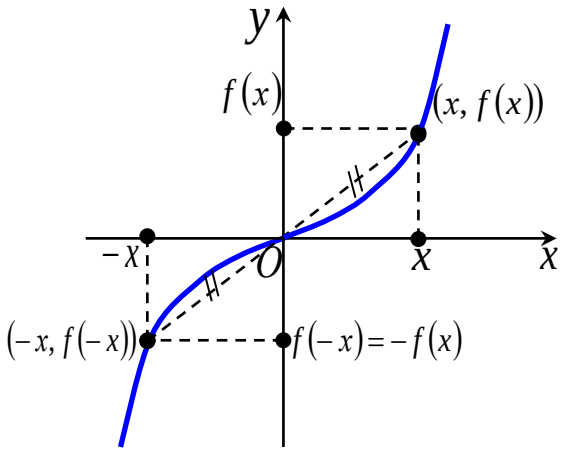
теңдігі орындалса, онда $y = f(x), x \in D$ функциясы *жұп функция (тақ функция)* деп аталады.

Анықтамадан жұп және тақ функцияның анықталу облысы бас нүктеге симметриялы болатыны шығады ($x \in D$ және $-x \in D$);

- *жұп функцияның графигі* Oy өсіне қарағанда симметриялы (6.4-сурет):



6.4-сурет



6.5-сурет

- *тақ функцияның графигі* координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы (6.5-сурет):

6.6-мысал: $y=\ln|x|,\quad y=\ln x,\quad y=x^3,\quad y=x-9$ функцияларының жұп/тақтылығын анықтаңыз.

Шешімі:

1) $y=\ln|x|$ функциясының анықталу облысы $D=\{x:|x|>0\}=\{x:x\neq 0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы және $f(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x)\Rightarrow y=\ln|x|$ - жұп;
2) $y=\ln x$ функциясының анықталу облысы $D=\{x:x>0\}=(0;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы емес $\Rightarrow y=\ln x$ - жұп та, тақ та емес;
3) $y=x^3$ функциясының анықталу облысы $D=(-\infty;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы және $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)\Rightarrow y=x^3$ - тақ функция;
4) $y=x-9$ функциясының анықталу облысы $D=(-\infty;+\infty)$ - бас нүктеге симметриялы, бірақ $f(-x)=-x-9,\ -f(x)=-(x-9)$ болғандықтан, $f(-x)=f(x)$ және $f(-x)=-f(x)$ теңдіктерінің бірі де орындалмайды $\Rightarrow y=x-9$ жұп та, тақ та емес функция.

6.8-анықтама. Егер $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$ теңдігі D анықталу облысына тиісті кез келген x үшін орынды болатын қандай да бір $T\neq 0$ саны табылса, онда $y=f(x)$ функциясы *периодты* деп аталады.

Анықтамадан, егер f функциясы периодты болса, онда кез келген бүтін n үшін $x+nT\in D$ болып $f(x)=f(x+nT)$ теңдігі орынды болатыны шығады:

$$f(x)=f(x+T)=f\big((x+T)+T\big)=f(x+2T)=\ldots=f(x+nT).$$

Соңғы теңдіктен:

1) функцияның периодты болуы үшін, оның анықталу облысының шектеусіз (кез келген бүтін n үшін $x+nT\in D$ болуы үшін D екі жақтан да шектелмеген) болуы қажет;
2) $f(x)=f(x+T)$ қандай да бір T саны үшін орындалса, онда бұл теңдік шексіз көп сандар үшін (кез келген nT үшін, $n\in Z$) орындалатыны шығады.

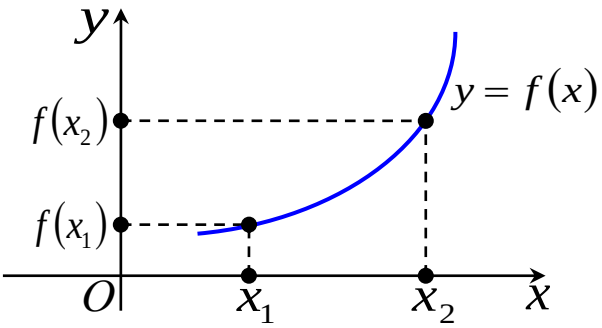
T-ның осындай оң мәндерінің ең кішісі $f(x)$ *функциясының периоды* деп, ал $f(x)$ *функциясы* T *- периодты* деп аталады.

6.7-мысал: $f(x)=\sin x$ функциясы үшін $f(x)=f(x+T)$ теңдігі, яғни

$\sin x = \sin(x+T)$ теңдігі T-ның $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$ мәндері үшін орынды, оның ішіндегі оң мәндері $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$. Ал олардың ішіндегі ең кішісі 2π. Олай болса $f(x) = \sin x$ функциясы 2π - периодты функция.

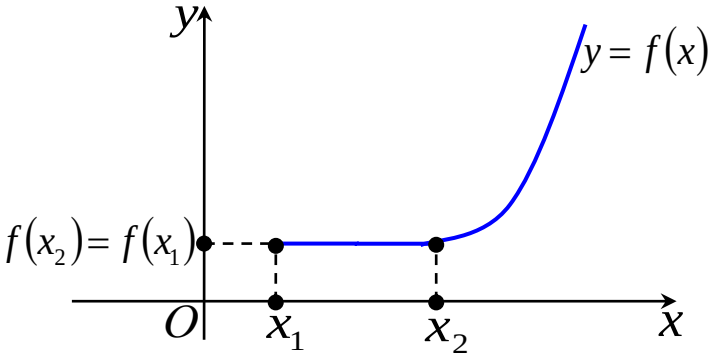
6.9-анықтама. $y = f(x), x \in D$ функциясы D жиынында берілсін.

- Егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ болса, онда функция *өспелі* деп аталады (6.7-сурет);



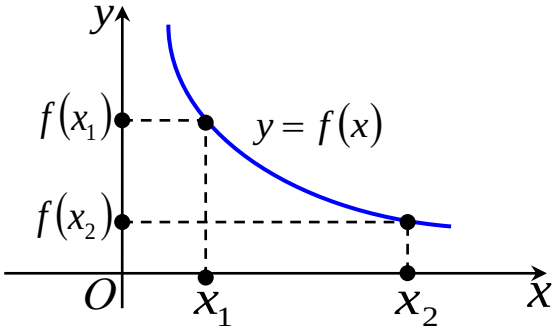
6.7-сурет

- Егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ болса, онда функция *кемімейтін* деп аталады (6.8-сурет);



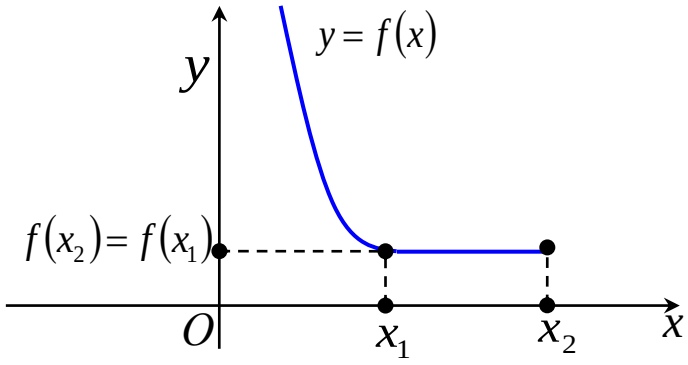
6.8-сурет

- Егер $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ болса, онда функция *кемімелі* деп аталады (6.9-сурет);



6.9-сурет

- Егер $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ болса, онда функция *өспейтін* деп аталады (6.10-сурет);



6.10-сурет

Бұл функциялар жалпы *бірсарынды (монотонды)* деп аталады.

$y = f(x), x \in D$ функциясы $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ шартын қанағаттандырсын, яғни f өзара бірмәнді сәйкестік болсын. Онда $\forall y \in E \quad f(x) = y$ болатындай, бір ғана $x \in D$ сәйкестікке қоюға болады.

Нәтижесінде біз E жиынында анықталған мәндерінің жиыны D болатын функция аламыз. Бұл функция $y = f(x), x \in D$ функциясына *кері функция* деп аталады да $x = f^{-1}(y), y \in E$ түрінде белгіленеді. Әдеттегіше, аргументті x, функцияның мәнін y әрпімен белгілесек, кері функция

$$y = f^{-1}(x), x \in E$$

түрінде жазылады.

6.8-мысал:

a) $y = 7x, x \in (-\infty;+\infty)$ функциясының кері функциясы $x = \frac{1}{7}y, y \in (-\infty;+\infty)$. Әдеттегіше, аргументті x, функцияның мәнін y әрпімен белгілесек, кері функция $y = \frac{1}{x}x, x \in (-\infty;+\infty)$ түрінде жазылады;

b) $y = x^2, x \in (-\infty;+\infty)$ функциясының кері функциясы жоқ, себебі y функциясының нөлден өзгеше әрбір мәніне x аргументінің екі мәні сәйкес келеді $\left(y = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ немесе $x = \frac{1}{3}\right)$, яғни $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ шарты орындалмайды.

Егер де функцияның анықталу облысы $[0;+\infty)$ немесе $(-\infty;0]$ аралығы болса, яғни $y=x^2, x\in[0;+\infty)$ немесе $y=x^2, x\in(-\infty;0]$ функциясы берілсе, онда бұл функциялар үшін $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ шарты орындалады да олардың кері функциялары сәйкесінше $y=\sqrt{x},\ x\in[0;+\infty)$ немесе $y=-\sqrt{x},\ x\in[0;+\infty)$ түрінде жазылады.

6.10-анықтама. $y=f(u), u\in E,\ \ u=\varphi(x), x\in D$ және $x\in D\Rightarrow\varphi(x)\in E$ болсын. Онда $y=f[\varphi(x)], x\in D$ функциясын φ және f функцияларының *суперпозициясы* немесе *күрделі функция* деп атаймыз.

6.9-мысал: $y=cos\sqrt{x}$ функциясы

$y=cosu,\ \ u\in(-\infty;+\infty)$ және $u=\sqrt{x},\ \ x\in[0;+\infty)$

функцияларының суперпозициясы, яғни $y=cos\sqrt{x}$ функциясы $[0;+\infty)$ аралығында анықталған күрделі функция.

6.10-анықтама. y айнымалысының x айнымалысынан тәуелділігі $F(x,y)=0$ теңдеуімен берілсе (яғни y айнымалысы x айнымалысы арқылы өрнектелмеген болса), онда $y=f(x)$ *функциясы айқын емес түрде берілген* дейміз.

6.10-мысал: $2x+y-6=0$ теңдеуімен $y=-2x+6$ функциясы айқын емес түрде берілген.

6.11-анықтама. y,x айнымалыларының тәуелділігі үшінші бір t айнымалысы арқылы

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ t\in(\alpha;\beta) \end{cases} \qquad (6.2)$$

жүйесі түрінде берілсе, онда (6.2) жүйесін x *айнымалысына тәуелді* y *функциясының немесе* y *айнымалысына тәуелді* x *функциясының параметрлік түрде берілуі*, ал t айнымалысын *параметр* деп атаймыз.

6.11-мысал:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ t \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

Бұл жүйе $y = x^2, x \in (-\infty; +\infty)$ функциясының параметрлік түрде берілуі.

Негізгі элементар функциялар:

$y = x^{\alpha}$ - дәрежелік функция, $\alpha \in R$;

$y = a^x$ - көрсеткіштік функция $a > 0$;

$y = \log_a x$ $(y = \lg x, y = \ln x)$ - логарифмдік функция $a > 0$;

$y = \cos x, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = ctgx, y = \cos ecx, y = \sec x$ - тригонометриялық функциялар;

$y = \arccos x, y = \arcsin x, y = arctgx, y = arcctgx, y = \arccos ecx,$ $y = arc\sec x$ - кері тригонометриялық функциялар.

6.12-мысал: Негізгі элементар функциялардың әрқайсысының анықталу және мәндер облыстарын көрсетіп, графиктерін тұрғызыңыз.

6.3 Функцияның қолданбалары

Көптеген тәуелділіктер $y = f(x)$ бір айнымалының функциясы түрінде берілуі мүмкін. Экономикалық мәселелерді шешкенде функциялық тәуелділіктің бар болуы, математикалық талдау әдістерін қолдануға мүмкіндік береді.

Мысал ретінде келесі функцияларды келтіруге болады:

1) *Тауардың бағасына байланысты сұраныс функциясы.* x - тауардың бағасы, y - тауарға сұраныс болса, онда сұраныс функциясы $y = f(x)$ түрінде жазылады. Мысалы, $y = \dfrac{200}{x+2}$, $y = e^{-3x}$.

2) *Тауардың сұранысына байланысты бағаның функциясы.*
Егер x - тауарға сұраныс, y - тауардың бағасы болса, онда бағаның функциясы $y = f(x)$ түрінде беріледі. *Мысалы,* $y = 5x^{-0,3}$.

3) Сатылған тауар санының тауар бағасына көбейтіндісі-жалпы түскен табысты береді және ол да сұраныс функциясы болып табылады. *Мысалы*, егер x - сұраныс, $\frac{100}{x+1}$ - баға болса, онда $y=\frac{100x}{x+1}$ - табыс функциясы болады.
4) Жалпы өндіріс шығындары F және орташа өндірістік шығындар (өзіндік құны) f - x - өндіріс көлемінің функциясы болып табылады, яғни: $F=F(x)$, $f(x)=\frac{F(x)}{x}$. *Мысалы*, $F(x)=4x+200$, $f(x)=4+\frac{200}{x}$.
5) Банкке салынған ақша көлемі - y функциясы, x - уақыттан тәуелді болады. Көпшілік жағдайда банкке салынған салымның "күрделі пайыздарын" есептеуге қажеттілігі туындайды.

6.4 Теориялық сұрақтар

1. Сандық жиын ұғымы, түрлері.
2. Аралықтар ұғымы, түрлері.
3. Нүктенің аймағы ұғымы, белгіленуі.
4. Нүктенің ойық аймағы ұғымы, белгіленуі.
5. Жоғарыдан (төменнен) шектелген немесе шектелген жиын ұғымы, мысалы.
6. Функция ұғымы.
7. Функцияның графигі ұғымы, мысалы.
8. Функцияның берілу тәсілдері.
9. Жұп, тақ функциялар, мысалы.
10. Периодты функциялар, мысалы.
11. Бірсарынды/ монотонды функциялар.
12. Кері функция ұғымы, мысалы.
13. Күрделі функция ұғымы, мысалы.
14. Айқындалмаған функция ұғымы, мысалы.
15. Параметрлік түрде берілген функция ұғымы, мысалы.
16. Негізгі қарапайым/ элементар функциялар.
17. Функцияның қолданбалары.

7 ШЕКТЕР

7.1 Сандық тізбек және оның шектері

N - натурал сандар жиынында анықталған $y = f(n), n \in N$ функциясы берілсін.

Егер біз f функциясының аргументтің әртүрлі мәндерінде қабылдайтын мәндерін, олардың бір-біріне тең немесе тең еместігіне қарамай, әртүрлі объектілер деп қарастырсақ

$$f(1), f(2),..., f(n),...$$

сандар жиынтығын аламыз. Бұл сандар жиынтығы *сандық тізбек* деп аталады. $x_n = f(n), (n = 1,2,...)$ белгілеуін енгізсек сандық тізбек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (7.1)$$

түрінде жазылады.

$x_n = f(n), (n = 1,2,...)$ *тізбектің жалпы мүшесі* деп аталады. Жалпы мүшесі берілсе, тізбектің кез келген мүшесін, яғни тізбектің өзін анықтай аламыз.

Сонымен *сан тізбегі берілген* дегеніміз $x_n = f(n), n \in N$ натурал аргументті функциясы, яғни тізбектің жалпы мүшесі берілген деген сөз. Сондықтан біз сандық тізбегі берілген дегеннің орнына қысқаша x_n тізбегі берілген деп айта береміз.

7.1-мысал:

a) $x_n = \frac{1}{n}, n \in N$ – тізбектің жалпы мүшесі. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ – сан тізбегі;

b) $x_n = n^2 + 1, n \in N$ – тізбектің жалпы мүшесі. $2,5,10,\ldots,n^2+1,\ldots$ – сан тізбегі.

7.1-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $n_0(\varepsilon)$ натурал саны (яғни нөмірі) табылып $n > n_0(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (7.2)$$

теңсіздігі орындалса, онда a *санын* x_n *тізбегінің шегі* деп атаймыз.

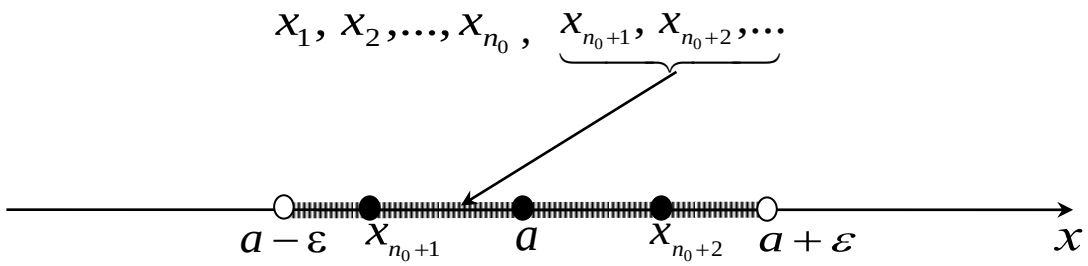
Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $x_n \to a$ (a саны x_n тізбегінің шегі немесе

немесе x_n *тізбегі* a *санына ұмтылады (жинақталады)).*

$|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігін төмендегіше жазуға болады:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon).$$

$$\left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)\right).$$



7.1-сурет

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ интервалын a *санының* ε *- аймағы* деп атағанбыз.

Бұдан, x_n *тізбегі* a *санына жинақталады* дегеніміз a санының кез келген аймағының сыртында тізбектің санаулы ғана мүшесі жатады (қалған шектеусіз көп мүшесі ішінде) деген сөз (7.1-сурет).

7.2-мысал: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+7}{n} = 2$ болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі: Қандай да бір ε оң саны берілсін. Біздің мысалда

$$x_n = \frac{2n+7}{n},\ a = 2.$$

$|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық (теңсіздік қандай n нөмірі үшін орындалады екен?).

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+7}{n} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{7}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{7}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left[\frac{7}{\varepsilon}\right],$$

мұндағы $[x]$ - x санының бүтін бөлігі (x санынан артпайтын ең үлкен бүтін сан). Сонымен $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$. Олай болса, егер біз $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$ деп алсақ, онда

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

қатынасын аламыз. Бұдан шектің анықтамасы бойынша

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+7}{n} = 2$

болатыны шығады.

7.1-теорема. Жинақты тізбектің жалғыз шегі бар.

7.2-анықтама. Егер $|x_n| \le M$ теңсіздігі кез келген n нөмірі үшін орындалатындай M саны бар болса, онда x_n тізбегі *шектелген тізбек* деп аталады.

7.2-теорема. Жинақты тізбек - шектелген тізбек.

7.3-анықтама. Егер кез келген $M > 0$ саны үшін $n_0 = n_0(\varepsilon)$ нөмірі табылып $n > n_0(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірлері үшін $|x_n| > M$ теңсіздігі орындалса, онда x_n *тізбегінің шегі шексіздікке тең (*x_n *тізбегі* ∞*-ке ұмтылады)* деп айтамыз да, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ түрінде белгілейміз.

Егер де $x_n > M$ $(x_n < -M)$ теңдігі орындалса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ дейміз.

x_n тізбегінің қандай да бір мүшелерінен құрылған $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ *тізбегі* x_n *тізбегінің ішкі тізбегі* деп аталады.

7.3-мысал:

$x_n = \dfrac{1}{n}, n \in N$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ - *сан тізбегі,*

$x_{n_k} = \dfrac{1}{2k}, k \in N$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \ldots$ - *ішкі тізбегі.*

7.3-теорема. Егер x_n тізбегі a санына жинақталатын болса, онда оның кез келген x_{n_k} ішкі тізбегі де осы a санына жинақталады.

Тізбектің шегі үшін арифметикалық амалдарға байланысты келесі қасиеттері орынды болды.

Сан тізбегі шегінің қасиеттері:

A, B, C – тұрақты сандар.

1. Егер $\forall n, x_n = C$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ және $x_n \le y_n$ болса, онда $A \le B$.
3. Егер $x_n \le z_n \le y_n$ және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.
4. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot A,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}, \text{ егер } B \neq 0.$$

7.2 Функцияның шегі

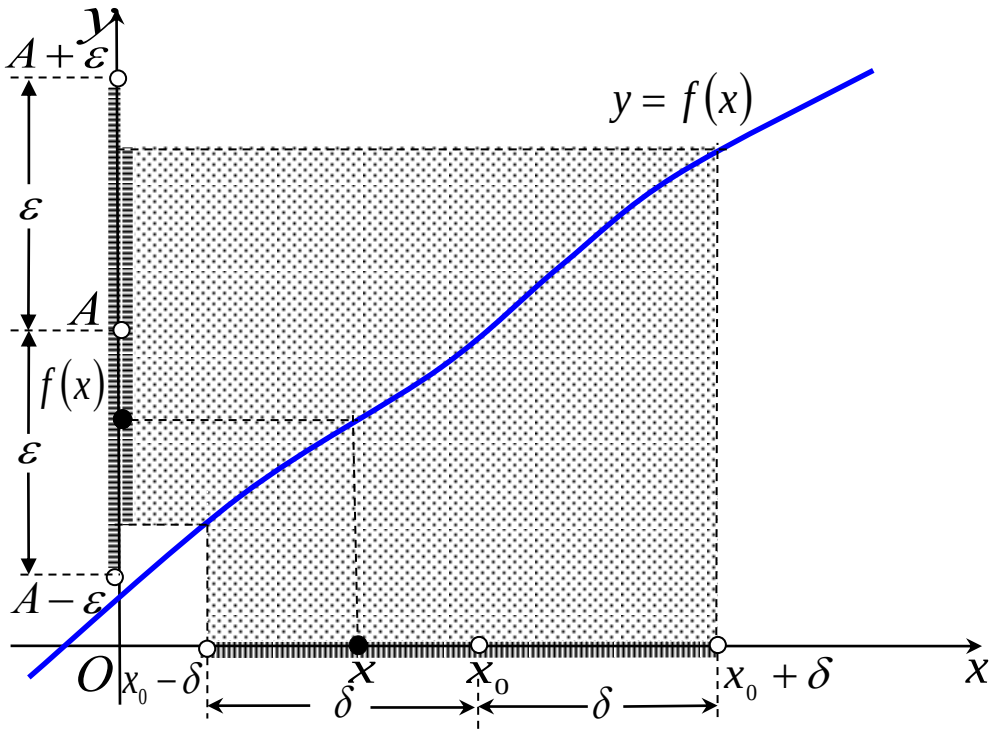
7.4-анықтама. ***(тізбектер тілінде немесе Гейне бойынша).*** Егер x_0 санына жинақталатын кез келген x_n тізбегі үшін $(x_n \in D(f))$ $f(x_n)$ тізбегі A санына жинақталса (яғни $x_n \in D(f)$ және $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A$ болса), онда A *саны* $y = f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

7.5-анықтама. ***(ε, δ тілінде немесе Коши бойынша).*** Егер келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $0 < |x - x_0| < \delta$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық $x \in D$ үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орынды болса, онда A *саны* $y = f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Егер $\forall \varepsilon > 0$: $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $x \in D$ $0 < |x - x_0| < \delta$ және $|f(x) - A| < \varepsilon$ болса, онда A саны $y = f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі шегі* деп аталады (7.2-сурет). Белгілеуі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.



7.2-сурет

$$\forall(A-\varepsilon;A+\varepsilon)\,\exists(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta):$$
$$f:(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)\to(A-\varepsilon;A+\varepsilon)$$

немесе

$$\forall(A-\varepsilon;A+\varepsilon)\,\exists(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta):$$
$$x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)\Rightarrow f(x)\in(A-\varepsilon;A+\varepsilon).$$

Ескерту. 1-ші анықтама мен 2-ші анықтама эквивалентті, яғни олардың біреуі бойынша функцияның шегі A саны болса, екіншісі бойынша да A саны болады.

7.4-мысал: $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі: Біздің мысалда $f(x)=3x+2,\ A=8,\ x_0=2$. Қандай да бір $\varepsilon>0$ саны берілсін. $|f(x)-A|<\varepsilon$, яғни $|(3x+2)-8|<\varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық.

$$|(3x+2)-8|<\varepsilon\Leftrightarrow|3x-6|<\varepsilon\Leftrightarrow 3|x-2|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Сонымен $|(3x+2)-8|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Бұдан $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$ деп алсақ,

$$0<|x-2|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|(3x+2)-8|<\varepsilon$$

қатынасы шығады. Онда анықтама бойынша, $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ екені шығады.

7.1-тұжырым. Егер $f(x)$ – элементар функция және x_0 нүктесінде анықталған болса, онда функцияның x_0 нүктесіндегі шегі оның осы нүктедегі мәніне тең болады:

$$f(x) \text{ – элементар функция, } x_0\in D(f)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

7.5-мысал: $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ шегін табыңыз.

Шешімі: Біздің мысалда $f(x)=3x+2,\ x_0=2.$

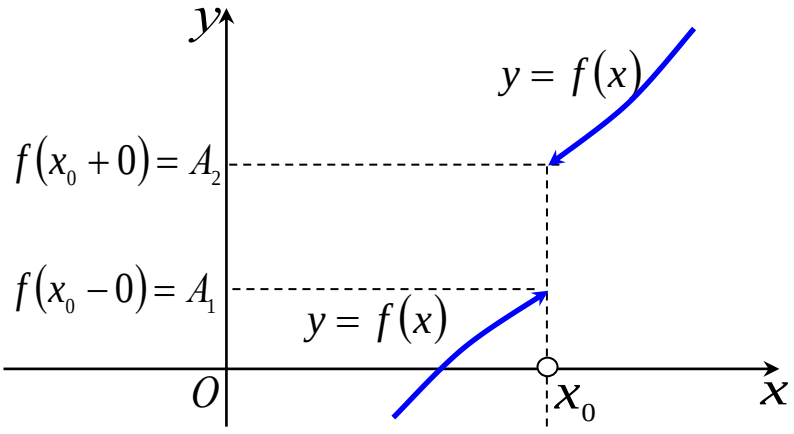
$f(x)=3x+2$ функциясы элементар және $x_0=2\in D(f)=(-\infty;+\infty)$.

Онда 7.1-тұжырымы бойынша

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(x)=3\cdot 2+2=8.$$

Егер де $0<x_0-x<\delta\ (0<x-x_0<\delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$ болса, онда A санын $f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі сол (оң) жақты шегі* деп аталып $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x))$ түрінде немесе қысқаша $f(x_0-0)=A_1, (f(x_0+0)=A_2)$ түрінде белгіленеді (7.3-сурет).

Оң және сол жақты шектер *бір жақты шектер* деп аталады.



7.3-сурет

7.2-тұжырым. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A.$

1. Егер $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$: $|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ болса, онда A *санын* $f(x)$ *функциясының* x *шексіздікке ұмтылғандағы шегі* деп айтамыз. Белгіленуі: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

   Егер де $x > M$ $(x < -M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, онда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$ дейміз.

7.6-мысал: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ болатынын дәлелдеңіз.

Дәлелдеуі: Біздің мысалда $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $A = 1$.

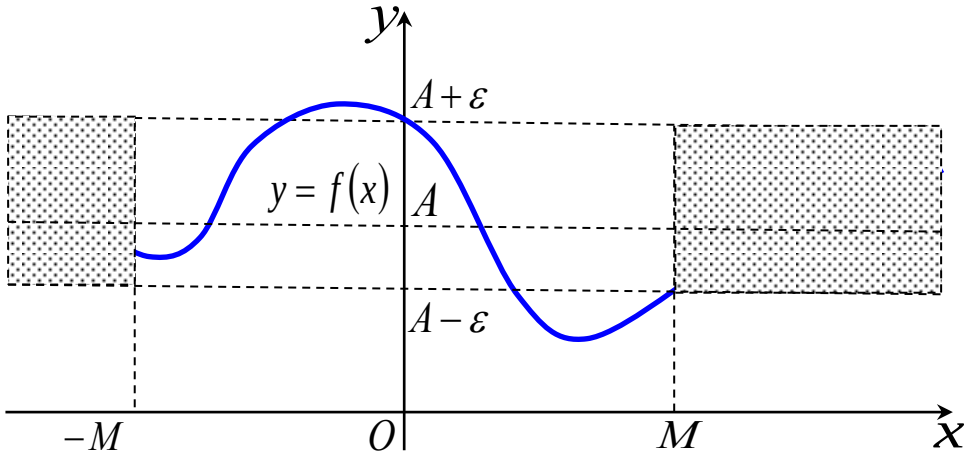
$\varepsilon > 0$ саны берілсін. $|f(x) - A| < \varepsilon$, яғни $\left|\dfrac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$ теңсіздігін қарастырайық:

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+1-x}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Сонымен $\left|\dfrac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Бұдан $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ деп алсақ,

$$|x| > M \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

қатынасы шығады. Онда анықтама бойынша, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ екені шығады.



7.4-сурет

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ дейміз, егер $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$: $x \in D$ және $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

Егер де $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$ болса, онда
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right)$ дейміз (7.4-сурет).

3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ дейміз, егер $\forall M > 0$ $\exists N > 0 : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M$.

Ескерту. $f(x)$ функциясының шегін Гейне анықтамасы бойынша $f(x_n)$ сандық тізбегінің шегі деп қарастыруға болатындықтан, тізбектің шегінің қасиеттері функцияның шегіне де орынды болады.

Функция шектерінің қасиеттері:
A, B, C – тұрақты сандар.

1. Тұрақтының шегі осы тұрақтының өзіне тең.

2. $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$ және a нүктесінің қандай да бір ойық аймағында:

а) $f_1(x) \le \varphi(x)$ болса, онда $A \le B$ болады;

б) $f_1(x) \le \psi(x) \le f_2(x)$ болса, онда $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$ болады.

3. Егер $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ шектері ақырлы болса, онда:

а) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

г) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$, егер $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \ne 0$.

7.7-мысал: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2.$$

7.8-мысал: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

7.9-мысал: $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x^2-20x+100)}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x^2-10x}=\frac{300}{0}=\infty.$$

7.10-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

7.11-мысал: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{7x-8}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

а) Бөлшекті белгісіздің ең үлкен дәрежесіне бөле отырып шекті есептеу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{7x-8}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x}}{7-\dfrac{8}{x}}=\frac{4}{7}.$$

ә) *Көпмүшеліктердің қатынасы ретінде қарастырып белгісіздердің дәрежелерін салыстырып шекті есептеу:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_ox^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_ox^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_o}{b_o}, & n=m,\\ 0, & n<m,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{7x-8}=\left|\begin{matrix}n=1\\ m=1\\ n=m\end{matrix}\right|=\frac{4}{7}.$$

7.12-мысал: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{array}{l} n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \\ 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120 \\ 5!=4!\cdot 5=120 \\ 5!=3!\cdot 4\cdot 5=120 \\ (n+1)!=n!(n+1) \end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)-n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

7.13-мысал: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ шегін табыңыз.

Шешімі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)-(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2+1)}{(n+1)!(n+2-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1.$$

7.3 Функция және оның шегінің қолданбалары

Көптеген тәуелділіктер $y=f(x)$ бір айнымалының функциясы түрінде берілуі мүмкін. Экономикалық мәселелерді шешкенде функциялық тәуелділіктің бар болуы, математикалық талдау әдістерін қолдануға мүмкіндік береді. Мысал ретінде келесі функцияларды келтіруге болады:

1. Тауардың бағасына байланысты сұраныс функциясы. x арқылы тауардың бағасын, y арқылы тауарға сұранысты белгілейік. Сонда сұраныс функциясын аналитикалық түрде $y=f(x)$ деп жазуға болады. Мысалы, $y=\dfrac{200}{x+2}$, $y=e^{-3x}$.
2. Тауардың сұранысына байланысты бағаның функциясы. Егер x - тауарға сұраныс, y - тауардың бағасы болса, онда $y=f(x)$ функциясы түрінде болады. Мысалы, $y=5x^{-0,3}$.

3. Сатылған тауар санының тауар бағасына көбейтіндісі-жалпы түскен табысты береді және ол да сұраныс функциясы болып табылады. Мысалы, егер x - сұраныс, $\frac{100}{x+1}$ - баға болса, онда $y=\frac{100x}{x+1}$ - табыс функциясы болады.
4. Жалпы өндіріс шығындары F және орташа өндірістік шығындар (өзіндік құны) f - x - өндіріс көлемінің функциясы болып табылады, яғни: $F=F(x)$, $f(x)=\frac{F(x)}{x}$. Мысалы, $F(x)=4x+200$, $f(x)=4+\frac{200}{x}$.
5. Банкке салынған ақша көлемі - y функциясы, x - уақыттан тәуелді болады. Мысалы, $y=100(1{,}03)^x$.
   Көпшілік жағдайда банкке салынған салымның "күрделі пайыздарын" есептеуге тура келеді.

7.14-мысал: Айталық жыл басында банкке салынған ақша бірлігі A_0 болсын. Әрбір жыл сайын банк $p\%$ төлеп отырсын. Сонда t жылдан кейінгі оның көлемін табайық.

Шешімі: Бірінші жылы өсімше

$$A_1=A_0+\frac{A_0p}{100}=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

бірлік болады. Ал екінші жылы тағыда $p\%$ -ке өсіргенде ол:

$$A_2=A_1+\frac{A_1p}{100}=A_1\left(1+\frac{p}{100}\right)=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

бірлік болады.

Осылай берсек, онда t жылдан кейін ақша көлемі:

$$A_t=A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \qquad (7.3)$$

арқылы өрнектеледі.

Егер өсім пайызын жылына бір рет емес, n рет жүргізсек, онда (7.3) формуласынан

$$A_t=A_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \qquad (7.4)$$

формуласын аламыз. Бұдан, өсім пайызын жүргізу санын шектеусіз өсірсек, яғни $n \to \infty$ жағдайын қарастырсақ, онда салымның t жылдағы ақша көлемі:

$$A_t = \lim_{n\to\infty}\left(A_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right) = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100n}\cdot nt} = A_0 e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{pnt}{100n}} = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$$A_t = A_0 e^{\frac{pt}{100}} \qquad (7.5)$$

формуласымен анықталады.

(7.4) формуласын *күрделі пайыздар формуласы* деп атайды.

(7.5) формуласын *пайыздарды үзіліссіз есептеу формуласы* дейді.

(7.5) және (7.4) формулаларын $n = 1$ (әр жыл сайын), $n = 2$ (әрбір жарты жыл сайын), $n = 4$ (үш ай сайын), $n = 12$ (ай сайын), $n = 365$ (әрбір күн сайын) болғандағы өзгерістерін $t = 20$ жыл, $p = 5\%$, $A_0 = 1$ (ақша бірлік) бойынша салыстырғанда мына төмендегі кестені алуға болады:

	Күрделі пайыздар формуласы					Үзіліссіз есептеу формуласы
	n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Салым	2,635	2,685	2,701	2,712	2,718	2,7182
Ақша бірлігі	5	1	5	6	1	

Сонымен, әр жыл сайын $p = 5\%$ өскенде (7.4), (7.5) формулаларының мәндерінің бір-бірінен айырмашылығы азғантай, яғни 2,5 төңірегінде болатынын кестеден байқауға болады.

7.15-мысал: Тәжірибе жүзінде x -тауардың бағасы мен y -тауарға сұраныс арасындағы тәуелділік $y = \frac{200}{x+2}$ функциясымен анықталған. Тауар бағасы $x \to \infty$ өскен уақытта, тауарға сұраныс қандай болатынын анықтау керек.

Шешімі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{200}{x+2}=\frac{200}{\infty}=0.$$

Сонымен, баға өскен сайын, сұраныс нөлге жақындайды екен.

7.16-мысал: Инфляция деңгейі жылына 20% болсын. Сонда үйде сақталынған жинақ ақшаның нақты құны төмендейді. Бір айда ол қаншаға азаяды?

Шешімі: Пайыздарды үзіліссіз есептеу формуласын пайдалансақ:

$$A\left(\frac{1}{12}\right)=A_{0-}e^{\frac{-20\cdot\frac{1}{12}}{100}}=A_0e^{\frac{-1}{60}}\approx 0{,}98\cdot A_0,$$

мұндағы A_0 - үйде сақталған ақша көлемі.

Сонымен, инфляция ай сайын үйде сақталынған ақша құнын жуық шамамен 2% азайтады екен.

7.4 Теориялық сұрақтар

1. Сандық тізбек ұғымы, мысалы.
2. Сандық тізбектің шегі ұғымы, мысалы.
3. Жинақты тізбек туралы теоремалар.
4. Тізбектің ішкі тізбегі ұғымы, мысалы.
5. Сан тізбегі шегінің қасиеттері.
6. Функция шегінің тізбектер тілінде немесе Гейне бойынша анықтамасы.
7. Функция шегінің ε,δ тілінде немесе Коши бойынша анықтамасы.
8. Бір жақты шектер ұғымы.
9. Функция шектерінің қасиеттері.
10. Функция шегінің қолданбалары.

8 КОМПЛЕКС САНДАР

8.1 Комплекс сандар ұғымының енгізілуі

Комплекс сандар ұғымын бастамас бұрын, оның математикадағы енгізілу тарихына тоқтала кеткенді жөн көрдік.

Элементтері сандар болатын жиын *сандық жиын* деп аталған, олардың түрлерін және амалдарын қайталасақ.

Алғашқы енгізілгені

$N = \{1;2;3;...;n;...\}$

натурал сандар жиыны - қандай да бір объектінің нөмірі немесе объектілердің саны ретінде қабылдауға болатын сандар жиыны.

N жиынында $x+n=n$ түріндегі теңдеудің шешімі бола бермейді, мысалы, N жиынында $x+5=5$ теңдеуінің шешімі жоқ. Сондықтан N натурал сандар жиынын 0 санымен толықтыру қажеттілігінен

$Z_0 = \{0;1;2;3;...;n;...\}$

теріс емес бүтін сандар жиыны ұғымы енгізілді.

Z_0 жиынында $x+n=0, n \in N$ теңдеуінің шешімі жоқ. Сондықтан Z_0 жиынын натурал сандарға қарама-қарсы сандармен толықтыру қажеттілігінен

$Z = \{0;\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm n;...\}$

бүтін сандар жиыны ұғымы енгізілді.

Z жиында $nx=m$ түріндегі теңдеудің шешімі болмауы мүмкін, мысалы, $3x=2$ теңдеуінің Z жиынында шешімі жоқ. Сондықтан Z жиынын

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z, n \in N \right\}$$

рационал сандардың жиынына (жай бөлшек түрінде жазылатын сандарға) дейін толықтыру қажет. Кез келген бүтін сан жай бөлшек түрінде жазылатындықтан (мысалы, $3 = \frac{6}{2}$, бүтін саны да рационал санға жатады: $Z \subset Q$).

Кез келген жай бөлшекті периодты ондық бөлшекке айналдыруға болатындықтан рационал сандар жиынын периодты ондық бөлшектер жиыны ретінде қарастыруға болады:

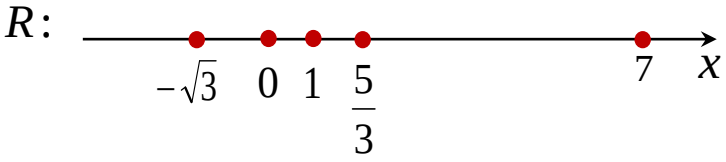
Q - периодты ондық бөлшектер жиыны.

Q жиынында, мысалы, $x^2 = 2$ теңдеуінің шешімі жоқ, себебі квадраты екіге тең рационал сан, яғни периодты ондық бөлшек жоқ.

Сондықтан I *иррационал сандар жиынын* (периодсыз шексіз ондық бөлшек түріндегі сандарды) енгізу қажет.

$R = Q \cup I$ *– нақты сандар жиыны.*

$x^2 = -3$ теңдеуінің R жиынында шешімі жоқ (квадраты теріс болатын нақты сан жоқ). Нақты сандар жиынын кеңейту қажет. R нақты сандар жиынының геометриялық кескіні сан өсі, яғни бас нүктесі, оң бағыты және бірлік (эталондық) кесіндісі берілген түзу (8.1-сурет):



8.1-сурет

R *нақты сандар жиынын кеңейту* - Ox өсінің нүктелерінің жиынын Oxy жазықтығының нүктелерінің жиынына, яғни нақты сандардың реттелінген жұптарының

$$R^2 = \{(x, y): x, y \in R, (x, y) \neq (y, x)\}$$

жиынына дейін кеңейту.

8.2 Комплекс сан және оның жиыны

Нақты сандар жиыны – қосу, көбейту амалдары мен реттілік қатынастары («≤», «≥») енгізілген жиын. R^2 жиынына қосу, көбейту амалдары мен «≤», «≥» қатынастарын енгізу:

1) Қосу амалы

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad (8.1)$$

2) Көбейту амалы

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (8.2)$$

3) Реттілік қатынастары

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

«$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$», «$(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$» қатынастарын енгізу мүмкін емес. R^2 жиыны – нақты сандар жиыны емес, яғни (x, y) – нақты саннан

өзгеше сан. (x, y) жұбы - екі нақты саннан тұратын комплекс, бұдан (x, y) жұбы – *сандар комплексі.*

8.1-анықтама. Қосу және көбейту амалы енгізілген R^2 жиынын - *комплекс сандар жиыны* деп атап C әрпімен белгілейміз:

$$C = \{(x, y): x, y \in R, (x, y) \neq (y, x)\}.$$

Комплекс сандар жиынының элементі (x, y) – комплекс сан.

Комплекс сан деп нақты сандардың реттелінген (x, y) жұбы аталады.

Әдетте, комплекс сан z әрпімен белгіленеді: $z = (x, y)$.

8.1-мысал: $(x, y) = (-7, 11) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 11. \end{cases}$

8.2-мысал: $(-5, 9) \neq (9, -5)$.

Комплекс сандардың айырмасы мен қатынасы

Алдымен «Қосынды» мен «Көбейтінді» анықтамалары енгізіледе (олар дәрісте енгізіліп қойылған), сонан соң осы ұғымдар арқылы «айырма» мен «қатынас» анықтамалары енгізіледі:

- жиынның a, b *элементтерінің айырмасы* деп $b + c = a$ теңдігін қанағаттандыратын c элементін айтамыз да, $a - b$ түрінде белгілейміз;
- жиынның a, b *элементтерінің қатынасы* деп $b \cdot c = a$ теңдігін қанағаттандыратын c элементін айтамыз да, $\frac{a}{b}$ түрінде белгілейміз.

1) Айырма

Айырманың анықтамасы бойынша $z_1 = z(x_1, y_1), z_2 = z(x_2, y_2)$ *комплекс сандарының айырмасы* деп $z + z_2 = z_1$ теңдігін қанағаттандыратын $z = (x, y)$ комплекс саны аталады да $z_1 - z_2$ түрінде белгіленеді:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \qquad (8.3)$$

Бұл теңдіктің қалай алынатынын көрсетсек:

$$z+z_2 = z_1 \Leftrightarrow (x,y)+(x_2,y_2) = (x_1,y_1) \Leftrightarrow (x+x_2, y+y_2) = (x_1,y_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+x_2 = x_1,\ y+y_2 = y_1 \Leftrightarrow x = x_1 - x_2,\ y = y_1 - y_2 \Rightarrow$$

$$z = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

2) Қатынас

Қатынастың анықтамасы бойынша $z_1 = z(x_1, y_1),\ z_2 = z(x_2, y_2)$ комплекс сандарының қатынасы деп $z \cdot z_2 = z_1$ теңдігін қанағаттандыратын $z = (x, y)$ комплекс саны аталады да $\frac{z_1}{z_2}$ түрінде белгіленеді:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right),\ x_2^2 + y_2^2 \neq 0\,. \qquad (8.4)$$

8.1-өзіндік жұмыс

Тәжірибелік сабаққа бұл формуланы жоғарыдағыдай негіздеп келу керек.

8.3-мысал: $z_1 = (2, -5), z_2 = (3, 8)$ сандары берілген. $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ сандарын табыңыз.

Шешімі:

$$(8.1) \Rightarrow z_1 + z_2 = (2, -5) + (3, 8) = (2+3, -5+8) = (5, 3);$$

$$(8.3) \Rightarrow z_1 - z_2 = (2, -5) - (3, 8) = (2-3, -5-8) = (-1, -13);$$

$$(8.2) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (2, -5) \cdot (3, 8) = (2 \cdot 3 - (-5) \cdot 8,\ 2 \cdot 8 + 3(-5)) = (46, 1);$$

$$(8.4) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2, -5)}{(3, 8)} = \left(\frac{2 \cdot 3 + (-5) \cdot 8}{3^2 + 8^2}, \frac{3(-5) - 2 \cdot 8}{3^2 + 8^2} \right) = \left(-\frac{34}{73}, -\frac{31}{73} \right).$$

Егер C комплекс сандар жиынының $\{(a,0) | a \in R\}$ ішкі жиынына «$(x_1,0) < (x_2,0) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ болса» реттілік қатынасын енгізсек, онда R нақты сандар жиынын $\{(a,0) | a \in R\}$ жиынына бейнелейтін $a \mapsto (a,\ 0)$ бейнелеуі арифметикалық амалдар мен реттілік қатынасты сақтайтын, яғни

$$(x_1 \mapsto (x_1, 0),\quad x_2 \mapsto (x_2, 0) \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 \mapsto (x_1, 0) + (x_2, 0),$$

$$x_1 \cdot x_2 \mapsto (x_1, 0) \cdot (x_2, 0),$$

$(x_1,0)<(x_2,0)\Leftrightarrow x_1<x_2$

шарттарын қанағаттандыратын биекция (өзара бірмәнді сәйкестік) болғандықтан, $\{(a,0)|a\in R\}$ жиынын нақты сандар жиыны ретінде қарастыруға, яғни

$\{(a,0)|a\in R\}=R$ және $(a,\,0)=a$

деп ұйғаруға болады. Онда, $\{(a,0)|a\in R\}$ жиыны комплекс сандар жиынының ішкі жиыны болғандықтан, R нақты сандар жиынын C комплекс сандар жиынының ішкі жиыны ретінде қарастыруға болады: $R\subset C$.

8.3 Комплекс санның алгебралық пішіні (түрі)

$(0,1)$ санын i әрпімен белгілейміз: $(0,1)=i$.

$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$

теңдігі мен $(a,\,0)=a$ теңдігінен, кез келген $z=(x,\,y)$ комплекс санының

$z=x+iy$

түріндегі жалғыз $i=(0,1)$ комплекс саны арқылы өрнектелуін аламыз.

Тек арифметикалық амалдар арқылы құрылған өрнек *алгебралық өрнек* деп аталатындықтан, комплекс санның $z=x+iy$ түрінде жазылуы *комплекс санның алгебралық пішіні* деп аталады.

Комплекс санның алгебралық пішіні комплекс сандарға жүргізілетін амалдарды жүргізу, оларды өзімізге белгілі біртаңбалы нақты сандардың қосындыларының және көбейтінділерінің кестелері мен жалғыз ғана $i\cdot i$ комплекстік көбейтіндісін қолдану арқылы жүргізуге мүмкіндік береді.

8.4-мысал:

$(12,13)(25,8)=(12+13i)(25+8i)=12\cdot 25+(12\cdot 8+13\cdot 25)i+13\cdot 8(i\cdot i),$

мұндағы $12\cdot 25, 12\cdot 8+13\cdot 25, 13\cdot 8$ – өзімізге белгілі нақты сандардың қосындылары мен көбейтінділері, $i\cdot i$ – жалғыз комплекстік көбейтінді:

$i\cdot i=(0,1)(0,1)=(-1,\,0)=-1.$

x нақты саны $z=x+iy$ *комплекс санының нақты бөлігі* деп

аталып $x = \mathrm{Re}\, z$ немесе $x = \Re(z)$ түрінде белгіленеді (француздың «reelle-нақты» деген сөзінен алынған), y нақты саны $z = x + iy$ *комплекс санының жорамал бөлігі* деп аталып $y = \mathrm{Im}\, z$ немесе $y = \Im(z)$ түрінде белгіленеді (француздың «imaginaire - жорамал» деген сөзінен алынған).

Алғаш рет математика тарихына «*комплекс сан*» атауын 1777-1855 жылдары өмір сүрген неміс математигі, астроном, физигі **Карл Фридрих Гаусс**,





ал i *белгісін (жорамал бірлікті)* 1707-1783 жылдарда ғұмыр кешкен швейцар философы, математигі, әрі механик және физигі **Леонард Эйлер** енгізген.

8.5-мысал:

$z_1 = -6, \quad z_2 = 5, \quad z_3 = -8i, \quad z_4 = i, \quad z_5 = -7 + 2i, \quad z_6 = 3 - i$ комплекс сандары берілсін. Әрбір санның нақты және жорамал бөліктерін көрсетіңіз де оларды $z = x + iy$ алгебралық түрінде жазыңыз.

Шешімі:

$\operatorname{Re} z_1 = -6,$ $\operatorname{Im} z_1 = 0,$ $z_1 = -6 + i \cdot 0,$

$\operatorname{Re} z_2 = 5,$ $\operatorname{Im} z_2 = 0,$ $z_2 = 5 + i \cdot 0,$

$\operatorname{Re} z_3 = 0,$ $\operatorname{Im} z_3 = -8,$ $z_3 = 0 + i \cdot (-8),$

$\operatorname{Re} z_4 = 0,$ $\operatorname{Im} z_4 = 1,$ $z_4 = 0 + i \cdot 1,$

$\operatorname{Re} z_5 = -7,$ $\operatorname{Im} z_5 = 2,$ $z_5 = -7 + i \cdot 2,$

$\operatorname{Re} z_6 = 3,$ $\operatorname{Im} z_6 = -1,$ $z_6 = 3 + i \cdot (-1).$

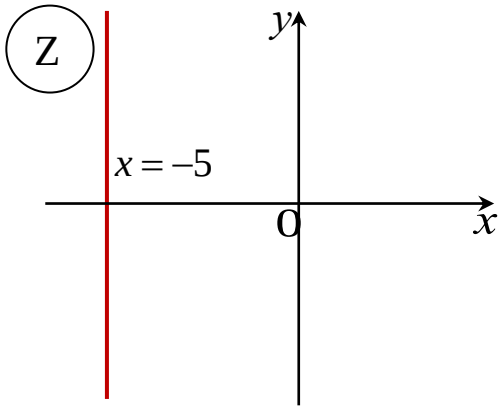
8.6-мысал:

1) $\operatorname{Re} z = -5,$
2) $2 \le \operatorname{Im} z \le 4,$
3) $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = 3,$
4) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 9$

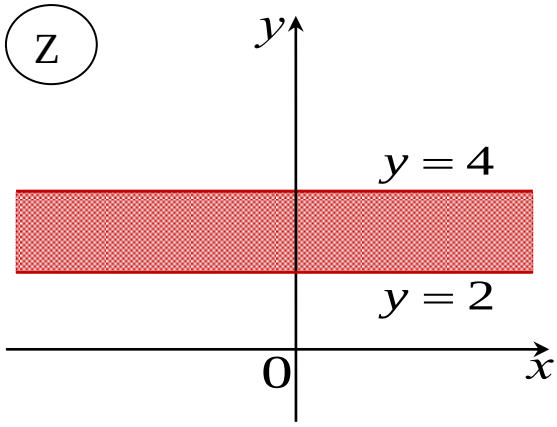
шарттарымен анықталатын комплекс айнымалыны кескіндейтін нүктелер жиынын анықтау керек.

Шешімі:

1) $\operatorname{Re} z = -5 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x + iy) = -5 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow$ $\operatorname{Re} z = -5$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $x = -5$ түзуін береді (8.2-сурет).



8.2-сурет

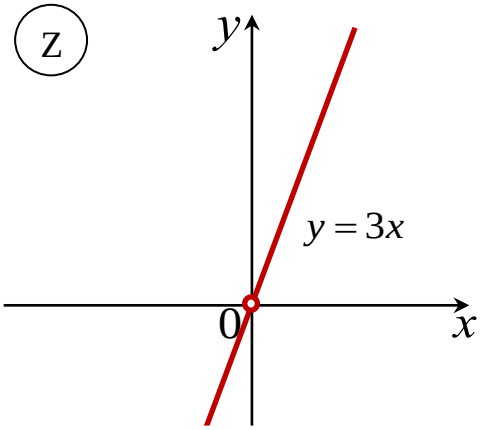


8.3 - сурет

2) $2 \le \operatorname{Im} z \le 4 \Leftrightarrow 2 \le \operatorname{Im}(x + iy) \le 4 \Leftrightarrow 2 \le y \le 4 \Rightarrow$ $2 \le \operatorname{Im} z \le 4$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $y = 2,$ $y = 4$ түзулері мен осы түзулердің арасында жатқан нүктелерінің жиынын береді (8.3-сурет).

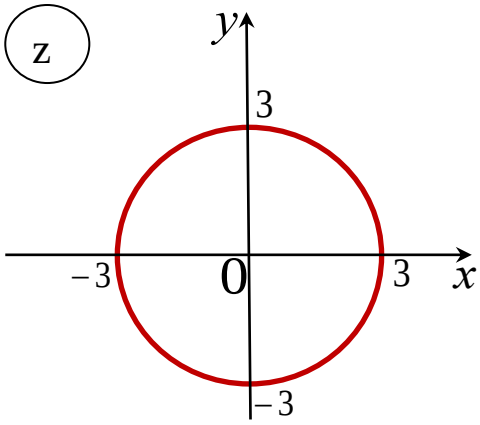
3) $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}=3 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x}=3 \Leftrightarrow y=3x,\ x\neq 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}=3$ шартын қанағаттандыратын комплекс сандар жиыны жазықтықтың $y=3x$ түзуінің $O(0,0)$ нүктесінен өзге нүктелерінің жиынын береді (8.4-сурет).



8.4 - сурет

4) $(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2=3^2$ - центрі $O(0,0)$ нүктесі, радиусы 3 – ке тең шеңбер (8.5-сурет).



8.5 - сурет

8.7-мысал: 8.3-мысалдағы $z_1=(2,-5),\ z_2=(3,8)$ сандарының қосындысын, айырмасын, көбейтіндісін және қатынасын олардың $z=x+iy$ түріндегі жазылуын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$$z_1+z_2=(2+i(-5))+(3+i8)=(2+3)+i(-5+8)=5+3i,$$

$$z_1-z_2=(2+i(-5))-(3+i8)=(2-3)+i(-5-8)=-1-13i,$$

$$z_1\cdot z_2=(2+i(-5))\cdot(3+i8)=2\cdot 3+2\cdot i8+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)8=$$

$$=6+16i-15i+40=46+i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i(-5)}{3+i8}=\frac{(2+i(-5))(3-i8)}{(3+i8)(3-i8)}=$$

$$=\frac{2\cdot 3+2\cdot(-i8)+i(-5)\cdot 3+i^2(-5)(-8)}{3^2+8^2}=$$

$$=\frac{6-16i-15i+40i^2}{73}=\frac{-34-31i}{73}=-\frac{34}{73}-\frac{31i}{73}.$$

8.8-мысал: $(2+i)x+(7-4i)y=15+5i$ теңдеуінің шешімін табыңыз.

Шешімі: Теңдеудің сол жағын алгебралық түрде жазып аламыз:

$$(2x+7y)+i(x-4y)=15+5i.$$

Бұдан екі комплекс санның теңдігінің белгісіне сүйеніп

$$\begin{cases} 2x+7y=15, \\ x-4y=5 \end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Жүйенің шешімі

$$\begin{cases} x=\dfrac{19}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Олай болса берілген теңдеудің шешімі $z=\dfrac{19}{3}+\dfrac{1}{3}i$ саны болады.

i санына қатысты оның дәрежелерін қарастырсақ:

i	$i^5=i^4\cdot i=i$
$i^2=-1$	$i^6=(i^2)^3=-1$
$i^3=i^2\cdot i=-i$	$i^7=i^6\cdot i=-i$
$i^4=(i^2)^2=1$	$i^8=(i^2)^4=1$

$(i;-1;-i;1)$ сандары циклдік түрде қайталанып тұрады. $i^2=-1$ теңдігін ескере отырып кез келген натурал k үшін келесі дәрежелерді анықтауға болады:

$$i^{4k}=(i^2)^{2k}=(-1)^{2k}=1;$$

$$i^{4k+1}=i^{4k}i=1\cdot i=i;$$

$$i^{4k+2}=i^{4k}i^2=1\cdot(-1)=-1;$$

$$i^{4k+3}=i^{4k}i^2i=1\cdot(-1)\cdot i=-i;$$

$$i^{4k+n}=i^n.$$

8.9-мысал: i^{2022} дәрежесін есептеп көрсетіңіз.

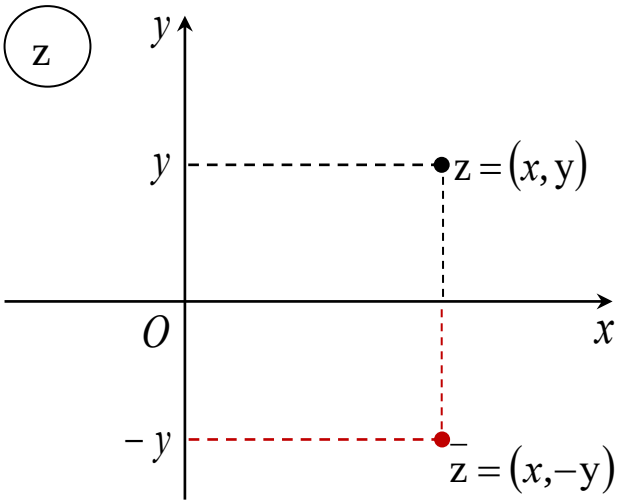
Шешімі: $i^{4k+n}=i^n$ дәрежелерді анықтау формуласын қолдансақ:

$$i^{2022}=i^{4\cdot505+2}=i^2=-1.$$

8.4 Түйіндес комплекс сан

8.2-анықтама. $\bar{z} = x - iy$ комплекс саны $z = x + iy$ комплекс санына *түйіндес сан* деп аталады.

$z = (x, y)$ *және* $\bar{z} = (x, -y)$ *түйіндес сандары* Ox *өсіне қатысты симметриялы* орналасады (8.6-сурет).



8.4 - сурет

8.10-мысал: Берілген комплекс сандардың түйіндес сандарын табу керек.

Шешімі:

$z_1 = 2 + i;$ $\quad \bar{z}_1 = 2 - i;$

$z_2 = 8i;$ $\quad \bar{z}_2 = -8i;$

$z_3 = -5i - 7;$ $\quad \bar{z}_3 = 5i - 7;$

$z_4 = 10;$ $\quad \bar{z}_4 = 10.$

8.1-тұжырым. $z, w \in C$ болсын. Түйіндестік келесі қасиеттерге ие:

1. $\Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2};\ \Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i};$
2. $\overline{(\bar{z})} = z;$
3. $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z;\ z \in iR \Leftrightarrow \bar{z} = -z;$
4. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w};$
5. $\Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w);\quad \Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w);$
6. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w};$
7. $z\bar{z} = |z|^2;$

8. $z \neq 0 \Rightarrow \dfrac{w}{z} = \dfrac{w\bar{z}}{|z|^2}$;

9. $z \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{w}{z}\right)} = \dfrac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

8.11-мысал: Түйіндестіктің 1, 2, 6, 7 қасиеттерін дәлелдеу керек.

1-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ және $\operatorname{Re} z = x$ болсын. $z + \bar{z}$ қосындысын табу.

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Енді айырмасын табайық:

$$z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i \operatorname{Im} z,$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

2-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy$, $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ болсын.

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{(\overline{x + iy})} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

6-қасиетін дәлелдеу:

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$, $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$

болсын.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Демек,

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - (-y_1)(-y_2)) + (x_1(-y_2) + x_2(-y_1))i =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

7-қасиетін дәлелдеу: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ болсын.

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

8.2-өзіндік жұмыс

Түйіндестіктің 3-5 және 8, 9 қасиеттерін өздік жұмыс түрінде дәлелдеу керек.

8.5 Комплекс санның модулі

8.3-анықтама. $z=(x,y)=x+iy$ санының *модулі* деп

$$\rho=r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (8.5)$$

санын айтамыз.

Комплекс санның модулінің өзімізге бұрыннан танымал нақты санның модулі ұғымымен байланысын қарастырамыз. Кез келген *нақты санның модулі*

$$|a|=\begin{cases} a, a\geq 0,\\ -a, a<0. \end{cases}$$

Кез келген $a\in R$ нақты санын

$$z=a+0\cdot i$$

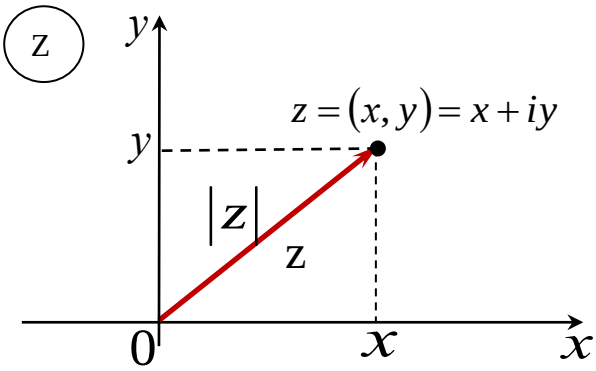
комплекс саны түрінде жаза аламыз, ал оның модулі

$$|z|=\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{a^2}\Rightarrow$$

квадрат түбірдің анықтамасы бойынша

$$|z|=|a|.$$

Модуль ұғымының геометриялық кескінделуіне (интерпретациясына) тоқталсақ, z комплекс санының модулі $\boldsymbol{z}$ векторының ұзындығын береді (8.7-сурет).



8.7-сурет

8.12-мысал:

$$z_1=3+4i,$$

$$z_2=-\frac{11}{i},$$

$$z_3=i(i-3),$$

$$z_4=\frac{i-2}{i}$$

комплекс сандарының модулін есептеңіз.

Шешімі:

1) $z_1=3+4i$ комплекс санының модулі

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5;$

2) $z_2 = -\dfrac{11}{i}$ комплекс санына түрлендіру енгізсек

$z_2 = -\dfrac{11}{i} = -\dfrac{11i}{i^2} = -\dfrac{11i}{-1} = 11i,$ онда оның модулі $|z_2| = \sqrt{0^2 + 11^2} = 11;$

3) $z_3 = i(i-3)$ комплекс санын алгебралық түрде жазып аламыз

$z_3 = i(i-3) = i^2 - 3i = -1 - 3i$, онда оның модулі $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10};$

4) $z_4 = \dfrac{i-2}{i}$ комплекс санын алгебралық түрде жазып аламыз

$z_4 = \dfrac{i-2}{i} = 1 - \dfrac{2}{i} = 1 - \dfrac{2i}{i^2} = 1 + 2i$, онда оның модулі $|z_4| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

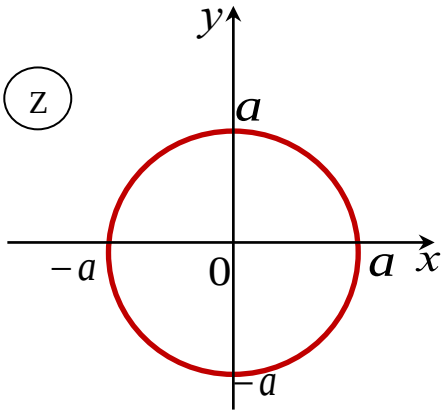
1.2-тұжырым. $z, w \in C$ болсын. Модуль келесі қасиеттерге ие:

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$

Модуль теріс сан болмайды, яғни $|z| \geq 0$.

$|z| = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$

$|z| = a$ центрі $O(0,0)$ нүктесі, радиусы a болатын шеңбердің теңдеуі (8.8-сурет).



8.8-сурет

2) $z = x + yi$, $-z = -x - yi$ және $\bar{z} = x - yi$ сандары үшін

$|z| = |-z| = |\bar{z}|;$

3) $\Re(z) \leq |z|$ және $\Im(z) \leq |z|;$

4) $|z| = \sqrt{z\bar{z}};$

$$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z\bar{z} = |z|^2,$$

бұдан z санына кері сан

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

саны болатыны шығады.

Сондай-ақ, $|z|<0$ болуы мүмкін емес екенін және $z=0+0i$ комплекс саны үшін $|z|=0$ ескеру қажет.

5) $|zw|=|z||w|$;

6) $|z^n|=|z|^n$;

7) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$, егер $w\neq 0$ болса;

8) $|z+w|\leq|z|+|w|$ - C жиынындағы үшбұрыш теңсіздігі;

9) $||z|-|w||\leq|z-w|$;

10) Кез келген $z_1, z_2, \ldots, z_n$ комплекс сандары үшін нақты сандар жағдайындай келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|;$$

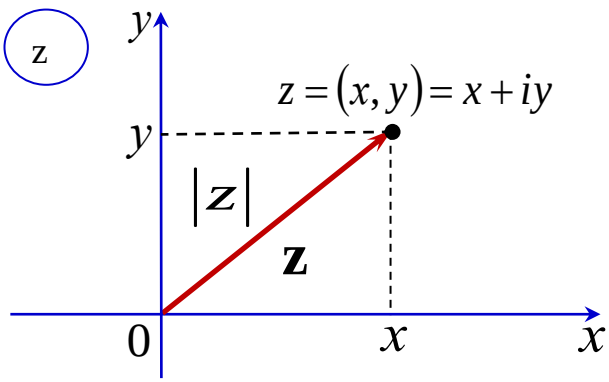
Бұл теңсіздік *жалпыланған үшбұрыш теңсіздігі* деп аталады.

11) $|z+w|=|z|+|w|\Leftrightarrow z=\lambda w$ немесе $w=\lambda z$ теңдігі орындалатындай $\lambda\in R$ саны бар болса;

12) $|z_1-z_2|$ - берілген z_1 және z_2 сандарының ара қашықтығы.

8.6 Комплекс санның геометриялық кескіні

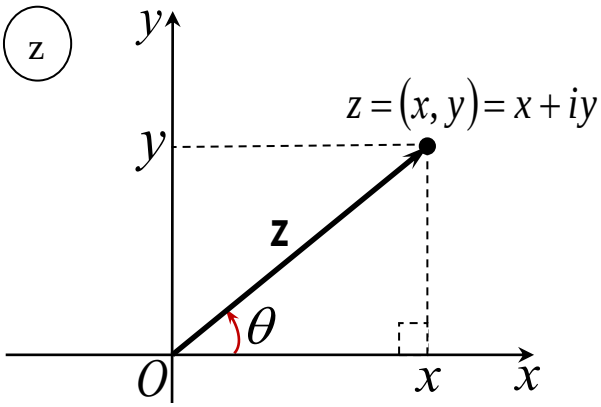
Кез келген $z=(x,y)=x+iy$ санын xOy жазықтығының (x,y) нүктесі немесе $\mathbf{z}=(x,y)$ векторы ретінде қарастыруға болады, мұндағы xOy жазықтығы *комплекс жазықтық* (z *жазықтығы* немесе *комплекс сандар жазықтығы*), Ox өсі *нақты өс*, Oy өсі *жорамал өс* деп аталады (8.9-сурет).



8.9-сурет

8.7 Комплекс санның аргументі

8.4-анықтама. z *санының аргументі* деп *Ox* өсін z санын кескіндейтін **z** векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрышты айтамыз. z санының аргументін $Arg\, z$ түрінде белгілейміз (8.10-сурет).

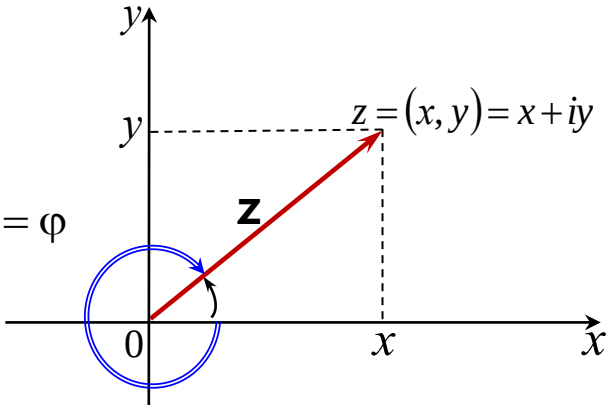


8.10-сурет

Ескерту. Сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бұру *бағыты оң*, ал бағыттас бағыты *теріс бағыт* деп есептелінеді (8.11-сурет).

Оң бағытқа сәйкес бұрыш оң таңбалы, теріс бағытқа сәйкес бұрыш теріс таңбалы болады.

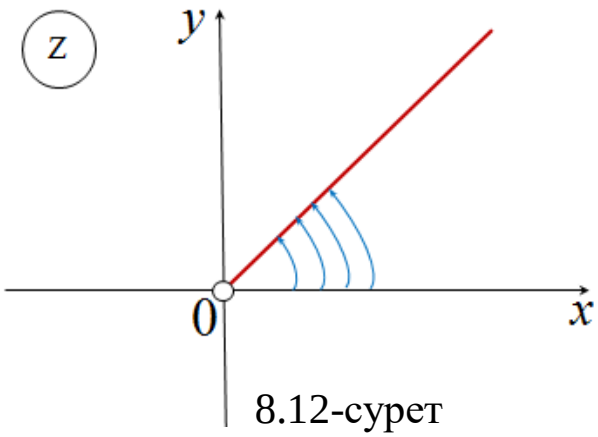
$Argz = wArgz = \varphi$
$\varphi > 0,\ w < 0$



8.11-сурет

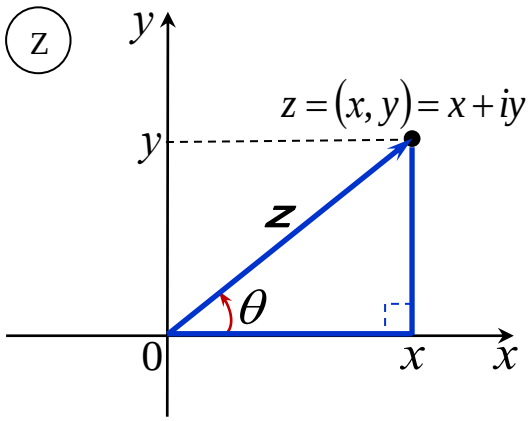
Анықтамадан:

1) $(0,0)$ нөлдік векторында бағыт болмағандықтан $z = (0,0) = 0$ санының аргументі болмайтыны шығады (8.12-сурет);



8.12-сурет

2) φ бұрышы - z санының аргументі кез келген бүтін k үшін $\varphi + 2k\pi$ бұрышы - z санының аргументі.



8.13-сурет

$z = x + iy$ санының аргументінің бас мәні $\theta = arg\, z$ үшін келесі тұжырымдар орынды болады (8.13-сурет):

$tg\theta = \dfrac{y}{x}$ егер $x \neq 0$ болса;

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ егер $x = 0,\ y > 0$ болса;

$\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ егер $x = 0,\ y < 0$ болса.

Бұл тұжырымдардан *аргументтің бас мәнін табудың* келесі формуласын аламыз:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{егер } x > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{егер } x < 0,\ y \geq 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{егер } x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (8.6)$$

8.13-мысал: $z = -3 + 3i$ комплекс сандарының аргументін (8.6) формуласын қолданып анықтаңыз.

Шешімі: $x = -3 < 0,\ y = 3 > 0$ бұл (8.6) формуласының $x < 0,\ y \geq 0$ жағдайына сәйкес келеді.

$$(8.6) \Rightarrow \arg z = arctg\,\frac{y}{x} + \pi = arctg\,\frac{3}{-3} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Аргументтің бас мәніне байланысты тұжырымдар:

1) $\arg z = \arg \bar{z} \Leftrightarrow \arg z = 0, \pi$;

2) $\arg z = -\arg \bar{z} \Leftrightarrow \arg z \neq 0, \pi$;

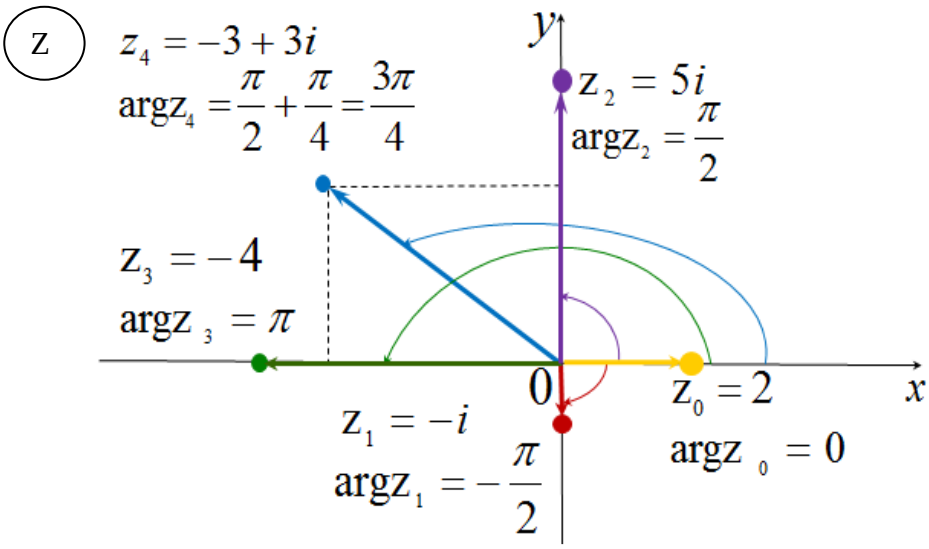
3) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ және $|z_1| = |z_2|$.

8.14-мысал:

1) $z_0 = 2,$
2) $z_1 = -i,$
3) $z_2 = 5i,$
4) $z_3 = -4,$
5) $z_4 = -3 + 3i$

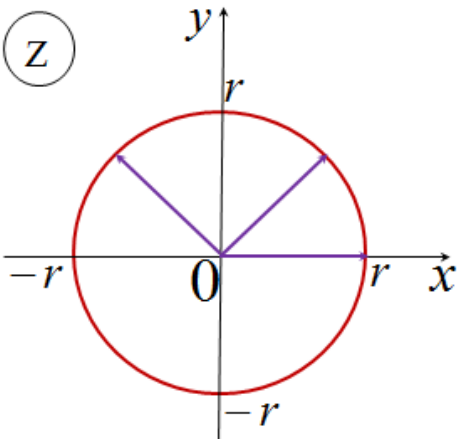
комплекс сандарының аргументін оның геометриялық кескінделуін қолданып анықтаңыз.

Шешімі: Аталынған (8.6) формуласымен аргументті табуға болады, бірақ комплекс сандарды геометриялық кескіндеу бұл формула-ны жаттауды қажет етпейді (8.14-сурет).

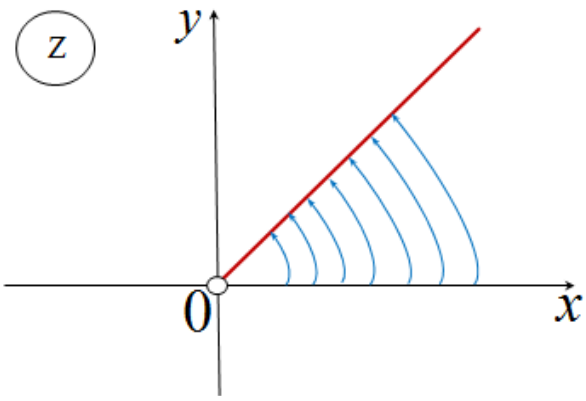


8.14-сурет

Модульдері тең нүктелердің жиыны *шеңберді* анықтайды (8.15-сурет).



8.15-сурет

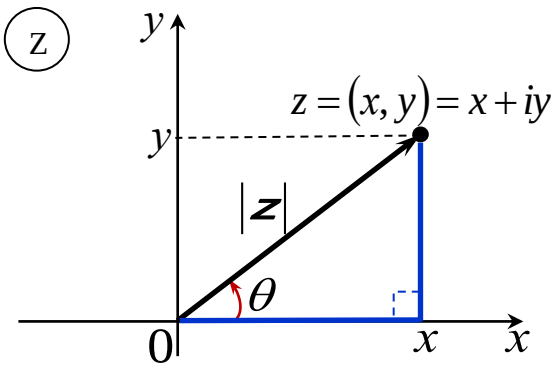


8.16-сурет

Аргументтері тең (мысалы α санына тең), яғни $\arg z = \alpha$ теңдігін қанағаттандыратын ($\arg z = \alpha$ теңдеуінің шешімі болатын) комплекс сандардың жиыны Ox өсімен α бұрышын жасайтын $O(0,0)$ нүктесі аласталған сәулені анықтайды (8.16–сурет).

$\arg z = \alpha$ – осы сәуленің теңдеуі.

8.8 Комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндері



8.17-сурет

$$\arg z = \theta \Rightarrow x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta \quad (8.7)$$

теңдіктерін аламыз. z саны

$$z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \Rightarrow$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (8.8)$$

(8.8) - $z = x + iy$ санының тригонометриялық пішіні (8.17-сурет).

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

пішінінде θ бас аргумент болғандықтан, бұл пішін z *санының стандартты тригонометриялық пішіні* деп аталады.

$$z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta),$$

$$\beta = \theta + 2\pi k,\ k \neq 0,\ k \in Z$$

z *санының стандартты емес тригонометриялық пішіні.*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

сандарының тек $\rho_1 = \rho_2$ және $\theta_1 = \theta_2$ болғанда ғана тең болатыны шығады:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2. \end{cases}$$

8.15-мысал: $z = 2 + 2i$ комплекс санының тригонометриялық пішінін жазыңыз:

Шешімі:

1-әдіс:

Z санының модулі: $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$

аргументі: $\theta = \arg z = arctg\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$ комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

формуласы бойынша:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2-әдіс: Сондай-ақ тригонометриялық пішінге келтірудің екінші әдісі тіптен жеңіл екенін көруге болады. Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз:

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

онда Z комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Комплекс көрсеткішті $e^{i\theta}, \theta \in R$ ұғымы *Эйлер формуласы* деп аталатын

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (8.9)$$

теңдігімен енгізіледі.

Бұл теңдіктен, косинус жұп және синус тақ болғандықтан,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (8.10)$$

теңдігі шығады.
(8.9), (8.10) теңдіктерді мүшелеп қосу және азайту арқылы синус пен косинустың келесі өрнектелулерін аламыз:

$$(8.9)+(8.10)\Rightarrow \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$(8.9)-(8.10)\Rightarrow \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ және $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ теңдіктерінен z комплекс санының келесі өрнектелінуі шығады:

$$z=|z|e^{i\theta}. \qquad (8.11)$$

(8.11) - z *комплекс санының көрсеткіштік пішіні*.

8.9 Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару

z комплекс санын бүтін оң дәрежеге, яғни z^n $(n=2,3,...)$ санын табу есебін қарастырамыз.

8.16-мысал: Есептеңіз:
1) $(5-i)^2$;
2) $(3+i)^3$.
Шешімі:
1) $(5-i)^2=5^2-2\cdot 5i+i^2=25-10i-1=24-10i$;
2) $(3+i)^3=3^3+3\cdot 3^2 i+3\cdot 3i^2+i^3=27+27i+9i^2+i^2\cdot i=27+27i-9-i=18+26i$.

Бұл мысалдар, z санының $z=x+iy$ алгебралық түрін қолдану z^n дәрежесін табу ұзақ есептеулерді қажет ететінін көрсетеді.

z^n дәрежесін табуда z санының көрсеткіштік немесе тригонометриялық пішінін қолдану әлдеқайда тиімді болады.

Комплекс санды бүтін оң дәрежеге дәрежелеу

$z\in C, n=2,3,...$ болсын. z^n есептелуін көрсетеміз:

$$z=|z|e^{i\theta}\Rightarrow z^n=|z|^n e^{in\theta}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\Rightarrow z^n=|z|^n e^{in\theta}=|z|^n(\cos n\theta+\sin n\theta)\Rightarrow$$

$z^n = |z|^n (\cos n\theta + \sin n\theta)$ теңдігін - *Де Муавр формуласын* аламыз.

8.17-мысал: Есептеңіз: $(1+i)^{13}$.

Шешімі:

Бірінші әдіс: z санының $z = x + iy$ алгебралық түрін қолдану

$$(1+i)^{13} = (1+i)^{12}(1+i) = \left((1+i)^2\right)^6 (1+i) = \left(1+2i+i^2\right)^6 (1+i) = (2i)^6 (1+i) =$$
$$= 64i^6 (1+i) = -64(1+i) = -64 - 64i.$$

Екінші әдіс: z санының тригонометриялық пішінін қолдану

$$(1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{13} = 2^6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 64\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4} - 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{4} - 4\pi\right)\right) = 64\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 64\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -64 - 64i;$$

Үшінші әдіс: z санының көрсеткіштік пішінін қолдану

$$(1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{13} = 64\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{4}} = 64\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{4} + i\sin\frac{13\pi}{4}\right) = -64 - 64i.$$

z *комплекс санының* n *дәрежелі түбірі* деп

$w^n = z, (n=2,3,4,...)$

теңдігін қанағаттандыратын w комплекс санын айтамыз.

z санының n дәрежелі түбірі $\sqrt[n]{z}$ түрінде белгіленеді, яғни

$w = \sqrt[n]{z}$.

Енді $w = \sqrt[n]{z}$ түбірінің барлық мәндерін табсақ.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\sqrt[n]{z} = w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

болсын деп ұйғаралық. Онда $w^n = z$ болғандықтан

$$|w|^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

теңдігі орындалады. Бұл теңдіктен

$|w|^n = |z|$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

немесе

$|w| = \sqrt[n]{|z|}$ және $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

болатыны шығады, мұндағы $\sqrt[n]{|z|}$ - $|z|$ *нақты санының n дәрежелі арифметикалық түбірі.*

Косинус пен синустың 2π - периодты екенін ескерсек

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\ldots,(n\text{-}1) \qquad (8.12)$$

формуласы шығады. Есептеулерде $\varphi = \arg z$ деп алған жөн.

8.15-мысал: $z^2 - 4iz + 12 = 0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$(z\text{-}2i)^2 + 4 + 12 = 0,$

$(z\text{-}2i)^2 = -16,$

$z\text{-}2i = \sqrt{-16},$

$$z\text{-}2i = \sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right), k = 0,1.$$

$z\text{-}2i = 4i$ немесе $z\text{-}2i = -4i$

$z_1 = 6i, \quad z_2 = -2i.$

8.10 Теориялық сұрақтар

1. Комплекс сандар ұғымының қажеттілігін атаңыз.
2. R нақты сандар жиынын кеңейту.
3. Комплекс сан ұғымы.
4. Комплекс сандар жиыны ұғымы, белгіленуі.
5. Комплекс сандарының теңдігі ұғымы, мысал.
6. Комплекс сандар жиынындағы реттілік.
7. Комплекс сандарының қосындысы және белгіленуін көрсетіңіз.
8. Комплекс сандарының көбейтіндісі және белгіленуін көрсетіңіз.
9. Комплекс сандарының айырмасы және белгіленуін көрсетіңіз.
10. Комплекс сандарының қатынасы және белгіленуін көрсетіңіз.
11. Комплекс сандар жиынының ішкі жиыны.
12. Комплекс сандары қосу және көбейту амалдары қандай аксиомаларды қанағаттандыратынын атаңыз.
13. Қосудың коммутативтілігі.

14. Қосудың терімділігі.
15. Нөлдік элементтің бар болуы.
16. Қарама-қарсы санның бар болуы.
17. Көбейтудің коммутативтілігі.
18. Көбейтудің терімділігі.
19. Бірлік элементтің бар болуы.
20. Кері санның бар болуы.
21. Көбейтудің қосуға қатысты үлестірімділігі.
22. Комплекс санның алгебралық пішіні.
23. Комплекс санының нақты бөлігі, белгіленуі.
24. Комплекс санының жорамал бөлігі, белгіленуі.
25. Кез келген натурал k үшін i санына қатысты оның дәрежелерін айқындау, мысал.
26. Өзара түйіндес комплекс сандар ұғымы.
27. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерін атаңыз.
28. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерінің дәлелдеулері.
29. Комплекс санның модулі ұғымы, есептелуі.
30. Комплекс санның модулінің геометриялық кескінделуі.
31. Нақты санның модулі ұғымымен байланысы.
32. Модульдің қасиеттері, дәлелдеулері.
33. Модулі бірге тең комплекс сандардың жиынына қатысты тұжырымдар.
34. Комплекс санының аргументі ұғымы және белгіленуі.
35. Нөлдік комплекс санның аргументі.
36. Оң немесе теріс бағытты бұрыш ұғымы.
37. Аргументтің бас мәні ұғымы, белгіленуі.
38. Аргументтің бас мәнін табудың әдістері.
39. Аргументтің кез келген мәнінің оның бас мәнімен байланысы.
40. Түйіндес комплекс сандардың аргументтеріне қатысты тұжырымдар.
41. Комплекс санының тригонометриялық пішіні.
42. Тригонометриялық пішінінің стандартты және стандартты емес жазылымы.
43. Эйлер формуласы.
44. Де Муавр формуласы.
45. Комплекс санының көрсеткіштік пішіні.
46. Комплекс сандарды дәрежелеу, белгілеу;
47. Тригонометриялық түрдегі де Муавр формуласын көрсету, дәлелдеуі;

48. Көрсеткіштік түрдегі де Муавр формуласын көрсету, дәлелдеуі;
49. Комплекс сандардың түбірлерін табу.
50. Комплекс санның алгебралық пішіні.
51. Комплекс санының нақты бөлігі, белгіленуі.
52. Комплекс санының жорамал бөлігі, белгіленуі.
53. Кез келген натурал k үшін i санына қатысты оның дәрежелерін айқындау, мысал.
54. Өзара түйіндес комплекс сандар ұғымы, геометриялық кескіні.
55. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерін атаңыз.
56. Түйіндес комплекс сандардың қасиеттерінің дәлелдеулері.
57. Комплекс санның модулі ұғымы, есептелуі.
58. Комплекс санның модулінің геометриялық кескінделуі.
59. Нақты санның модулі ұғымымен байланысы.
60. Модульдің қасиеттері, дәлелдеулері.
61. Комплекс санның геометриялық кескіні.
62. Комплекс санының аргументі ұғымы және белгіленуі.
63. Нөлдік комплекс санның аргументі.
64. Оң немесе теріс бағытты бұрыш ұғымы.
65. Аргументтің бас мәні ұғымы, белгіленуі.
66. Аргументтің бас мәнін табудың әдістері.
67. Аргументтің кез келген мәнінің оның бас мәнімен байланысы.
68. Түйіндес комплекс сандардың аргументтеріне қатысты тұжырымдар.
69. Комплекс санның стандартты тригонометриялық пішіні.
70. Комплекс санның стандартты емес тригонометриялық пішіні.
71. Эйлер формуласы.
72. Комплекс санның көрсеткіштік пішіні.
73. Комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығару.
74. Де Муавр формуласы.
75. Комплекс санның n дәрежелі түбірі.

9 ШЕКСІЗ АЗ ЖӘНЕ ШЕКСІЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР. ФУНКЦИЯНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

9.1 Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар (ШАШ және ШҮШ)

9.1-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ [$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$] болса, онда $f(x)$ функциясы x айнымалысы a санына ұмтылғанда *шексіз аз шама (ШАШ) (шексіз үлкен шама (ШҮШ)*) деп аталады. Жазылуы: $x\to a \Rightarrow f(x)$ - *ШАШ (ШҮШ).*

9.1-мысал: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$ және $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty$ екені көрсетілген болса, онда $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ функциясы $x\to 1$ жағдайында *ШАШ,* ал $g(x)=\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ функциясы $x\to 10$ жағдайында *ШҮШ* болады.

Қасиеттері:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow (x\to a \Rightarrow f(x)-A=\alpha(x)$ - ШАШ);
2. $ШАШ\cdot ШАШ=ШАШ$;
3. $ШАШ\cdot ШЕКТЕЛГЕН\ \ ШАМА=ШАШ$;
4. $\dfrac{1}{ШАШ}=ШҮШ$;
5. $\dfrac{1}{ШҮШ}=ШАШ$.

9.2 Негізгі анықталмағандықтар

Шектерді есептеу барысында

$$\frac{ШАШ}{ШАШ};\ \frac{ШҮШ}{ШҮШ};\ ШАШ\cdot ШҮШ;\ ШҮШ-ШҮШ;\ ШАШ^{ШҮШ};$$

$$ШҮШ^{ШАШ};\ (1+ШАШ)^{ШҮШ}$$

түрлеріндегі шектері анықталмаған өрнектер жиі кездеседі. Бұл өрнектер *анықталмағандықтар* деп аталады да, шартты түрде төмендегіше белгіленеді:

- $\frac{ШАШ}{ШАШ}$ - $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық;
- $\frac{ШҮШ}{ШҮШ}$ - $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШАШ \cdot ШҮШ$ - $0 \cdot \infty$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШҮШ - ШҮШ$ - $\infty - \infty$ түріндегі анықталмағандық;
- $ШАШ^{ШҮШ}$ - 0^{∞} түріндегі анықталмағандық;
- $ШҮШ^{ШАШ}$ - ∞^{0} түріндегі анықталмағандық.

Егер $x \to a \Rightarrow u(x) \to 1, v(x) \to \infty$ болса, онда $u(x)^{v(x)}$ өрнегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты береді.

9.3 Тамаша шектер

$\frac{0}{0}$ және $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуда қолданылатын бірнеше белгілі шектерді келтіреміз.

Егер $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (мұнда $a = \infty$ жағдайы да мүмкін) болса, онда:

1. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ - *бірінші тамаша шек;*
2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
5. $\lim\limits_{x \to a} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1;$
6. $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \ln a;$
7. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = 1;$
8. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\log_a[1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = \log_a e;$
9. $\lim\limits_{x \to a} \frac{[1 + \alpha(x)]^{\mu} - 1}{\alpha(x)} = \mu;$

10. $\lim\limits_{x\to a}\left[1+\alpha(x)\right]^{1/\alpha(x)}=e$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right]^{\alpha(x)}=e$) - *екінші тамаша шек.*

1 – 9 шектері $\dfrac{0}{0}$ түріндегі, 10 шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты ашуда қолданылады.
2 – 4 шектері бірінші тамаша шектің, 5 – 9 шектері екінші тамаша шектің салдары болады.

9.2-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$ шегін табыңыз.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x=0$ және $\lim\limits_{x\to 0}tg2x=0$ болғандықтан, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg2x}$ шегі $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді. Бұл анықталмағандықты берілген шекті 1 және 2 түріндегі белгілі шектерге түрлендіру арқылы ашамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{2x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}}=$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{2}.$$

9.3-мысал: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$ шегін табыңыз.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0$ болғандықтан, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$ шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты береді. Берілген шекті, $\alpha(x)=\dfrac{3}{x}$ ауыстыруы арқылы, $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0$ болатынын ескере отырып, 10 түріндегі шекке түрлендіреміз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}.$$

9.4 Шексіз аз (үлкен) шамаларды салыстыру

$x\to a\Rightarrow\alpha(x),\beta(x)-$ *ШАШ* және $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ болсын.

Егер

1) $C\neq 0$ - сан болса, онда α және β - *бірдей ретті шексіз аз шамалар* деп аталады. Бірдей реттілік $\alpha=O(\beta)$ түрінде белгіленеді;

9.4-мысал: $\alpha=4x^2$ және $\beta=15x^2$ функциялары x нөлге ұмтылғанда ШАШ болады. Олардың реттерін салыстырыңыз.

Шешімі: α және β шамаларының қатынасының x нөлге ұмтылғандағы шегін табамыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{15x^2}=\dfrac{4}{15}\neq 0$. Бұл теңсіздіктен x нөлге ұмтылғанда α мен β - бірдей ретті ШАШ, яғни $\alpha=O(\beta)$ болатыны шығады.

2) $C=1$ болса, онда α және β - *эквивалентті шексіз аз шамалар* деп аталады;

Эквиваленттілік $\alpha\sim\beta$ түрінде белгіленеді.

$x\to 0$ жағдайында:

1. $\sin x\sim x$;

2. $tgx\sim x$;

3. $\arcsin x\sim x$;

4. $arctgx\sim x$;

5. $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;

6. $a^x-1\sim x\cdot\ln a$;

7. $e^x-1\sim x$;

8. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$;

9. $\ln(1+x)\sim x$;

10. $(1+x)^k\sim k\cdot x, k>0$.

Ескерту. Шекті есептеу кезінде шексіз аз шаманы оған эквивалентті шамамен ауыстыруғаннан шектің мәні өзгермейді.

3) $C=0$ болса, $\alpha(x)$ *шексіз аз шамасы* $\beta(x)$ *шексіз аз шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама* болады дейміз де, оны $\alpha=0(\beta)$ түрінде жазамыз;

9.5-мысал: $\alpha=2x^4$ және $\beta=7x$ функциялары x нөлге ұмтылғанда ШАШ болады. Олардың реттерін салыстырыңыз.

Шешімі: α және β шамаларының қатынасының x нөлге ұмтылғандағы шегін табамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{7}=0.$$

Бұл теңдіктен x нөлге ұмтылғанда α шектеусіз аз шамасының реті β шектеусіз аз шамасының ретінен жоғары, яғни $\alpha=0(\beta)$ болатыны шығады.

4) $C=\infty$ болса, $\beta(x)$ шексіз аз шамасы $\alpha(x)$ шексіз аз шамасына қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама болады дейміз де $\beta=o(\alpha)$ түрінде жазамыз.

Шексіз үлкен шамалар осыған ұқсас салыстырылады.

9.5 Функцияның үзіліссіздігі

9.2-анықтама. $f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* деп аталады, егер

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0)$$

теңдігі орындалса.

Анықтамадан, егер функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда:

1) ол x_0 нүктесінің қандай да бір аймағында анықталған;
2) оның x_0 нүктесінде ақырлы шегі бар (шегі санға тең);
3) оның x_0 нүктесіндегі шегі осы нүктедегі мәніне тең болатыны шығады.

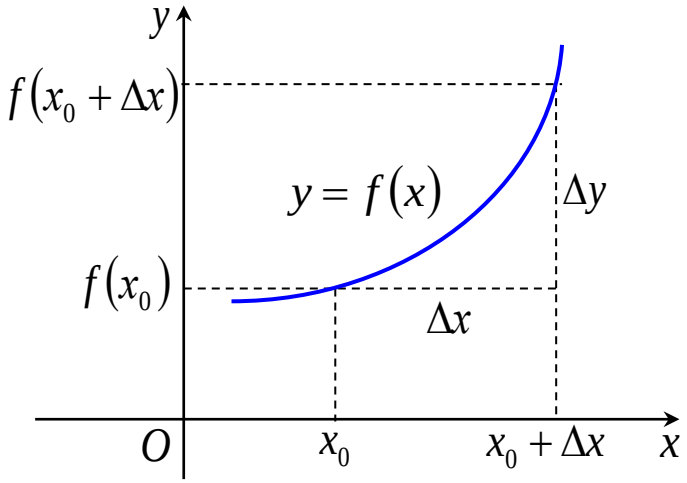
Егер аталған үш шарттың тым болмағанда біреуі орындалмаса, онда $y=f(x)$ функциясы x_0 *нүктесінде үзілісті функция* болады да x_0 *нүктесі* $f(x)$ *функциясының үзіліс нүктесі* деп аталады.

Үзіліссіздіктің өсімшелер тіліндегі анықтамасы:

x аргументінің мәніне Δx өсімшесін берсек $y = f(x)$ функциясы

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

өсімшесін алады (9.1-сурет).



9.1-сурет

9.3-анықтама. $y = f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* дейміз, егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ болса, яғни аргументтің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе.

9.2, 9.3 - анықтамалары эквивалентті, яғни олардың біреуі бойынша үзіліссіз функция екіншісі бойынша да үзіліссіз болады.

9.4-анықтама. Егер $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $\left(f(x_0 + 0) = f(x_0)\right)$ болса, онда $y = f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде сол жақты (оң жақты) үзіліссіз* дейміз, мұндағы $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ $\left(f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$.

9.6-мысал: $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x \to a$ біржақты шектерін табу керек.

Шешімі: Егер $x \to a - 0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{-0} = -\infty$.

Сонымен

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Егер $x \to a+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{+0} = +\infty.$

Сонымен

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

9.7-мысал: $f(x) = \dfrac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$ функциясының $x \to 3$ біржақты шектерін табу керек.

Шешімі: Егер $x \to 3-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty.$

Сонымен

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}} = \left| 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right| = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

Сол сияқты, $x \to 3+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty.$

Сонымен

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}} = \left| 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{+\infty} = \infty \right| = 0.$$

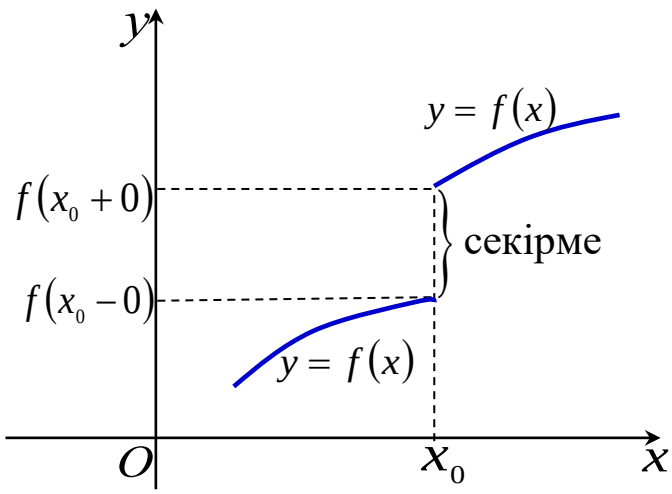
Нүктеде үзіліссіз функцияның қасиеттері:

1) Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ теңдіктері орындалады, яғни ол x_0 нүктесінде сол жақты да, оң жақты да үзіліссіз болады;
2) Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде:
   $f(x) \pm \varphi(x)$;
   $f(x) \cdot \varphi(x)$;
   $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциялары да үзіліссіз, егер $\varphi(x_0) \neq 0$ болса.

9.6 Функцияның үзіліс нүктелері

Үзіліс нүктесі осы нүктедегі оң және сол жақты шектерге қарап екі текке бөлінеді.

9.5-анықтама. x_0 үзіліс нүктесі *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады, егер $f(x_0-0)$ және $f(x_0+0)$ бір жақты шектері санға тең болса $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ айырмасы $f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі секірмесі* деп аталады (9.2-сурет).



9.2-сурет

9.8-мысал: $x=4$ нүктесінде $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешімі:

- Егер $x\to 4-0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to -\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4-0} y=-\dfrac{\pi}{2}$.
- Егер $x\to 4+0$ болса, онда $\dfrac{1}{x-4}\to +\infty$ және $\lim\limits_{x\to 4+0} y=\dfrac{\pi}{2}$.

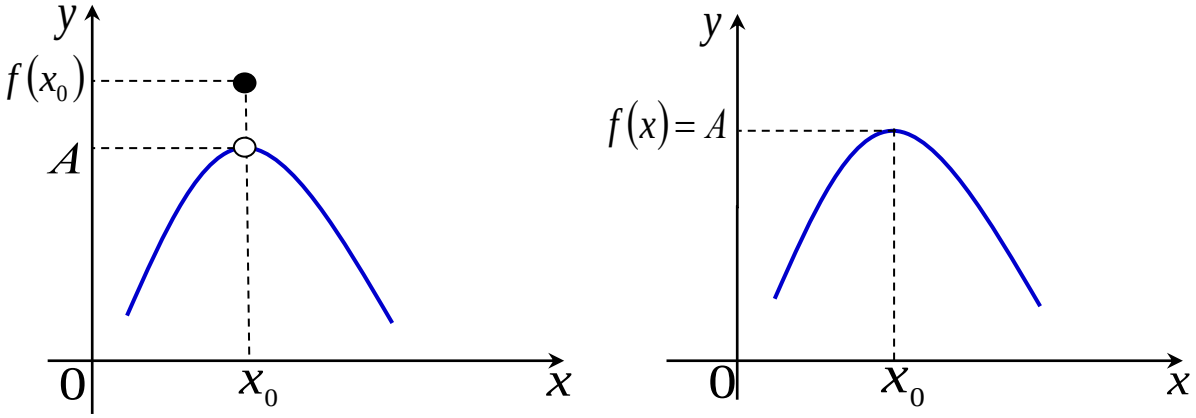
Сонымен, $x\to 4$ берілген функцияның сол жақ және оң жақ ақырлы шектері бар, бірақ олар әртүрлі.

Ендеше, $x=4$ - бірінші текті үзіліс (секіріс) нүктесі. $x=4$ нүктесінде секірмесі $\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ -ге тең.

9.6-анықтама. Егер бірінші текті x_0 үзіліс нүктесінде $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ болса, онда x_0 *түзетілетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

Анықтамадан $y=f(x)$ функциясының x_0 түзетілетін үзіліс нүктесіндегі шегі бір A санына $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0+0)=A)$ тең

болатыны шығады. Егер біз $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі мәні A санына тең, яғни $f(x_0)=A$ деген шарт қойсақ, онда функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болады (9.3-сурет).



9.3-сурет

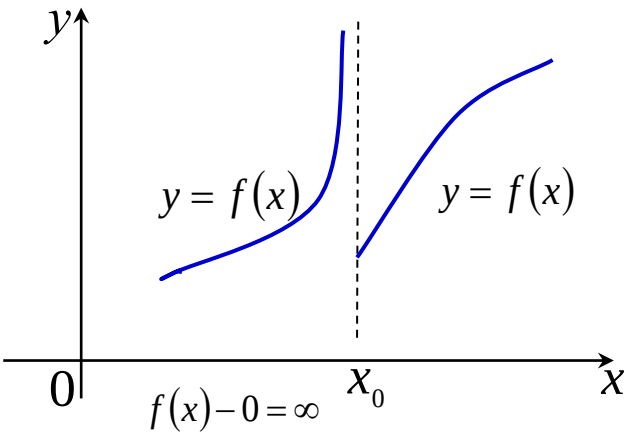
9.9-мысал: $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешімі: $x=5$ нүктесінде функция анықталмайды, себебі x-тің орнына 5 қойсақ, $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Басқа нүктелерде $x-5\neq 0$ болғандықтан бөлшекті $(x-5)$-ке қысқартамыз. Сондықтан, $y=x+5$ болады. Бұдан $\lim\limits_{x\to 5-0} y=\lim\limits_{x\to 5+0} y=10.$

Сонымен, $x=5$ болғанда функция түзетілетін үзілісті болады. Егер $x=5$ болғанда $y=10$ деп ұйғарсақ функция үзіліссіз болады.

Сонда $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясы барлық x нүктесінде үзіліссіз. Мұндай функция графигі $y=x+5$ түзуі болады.

9.7-анықтама. Егер функцияның x_0 үзіліс нүктесіндегі оң не сол жақты шегі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда x_0 *нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады (9.4-сурет).



9.4-сурет

9.10-мысал: $y=\dfrac{x}{x-4}$ функциясының $x=4$ нүктесінде үзілісті болуын көрсету керек.

Шешімі: $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty,$ яғни берілген функцияның $x\to 4$ не сол жақ, не оң жақ ақырлы шегі жоқ. Ендеше, $x=4$ - екінші текті үзіліс нүктесі болады.

9.7 Аралықта үзіліссіз функциялар

9.8-анықтама. *Функция* (a,b) *интервалында үзіліссіз* деп аталады, егер ол осы интервалдың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса.

9.9-анықтама. Егер функция (a,b) интервалында үзіліссіз және a нүктесінде оң жағынан, b нүктесінде сол жағынан үзіліссіз болса, яғни $f(a+0)=f(a),\ f(b-0)=f(b)$ теңдіктері орындалса, онда $f(x)$ *функциясы* $[a;b]$ *кесіндісінде үзіліссіз* деп аталады.

Тұжырым. Қарапайым функция өзінің анықталу облысында үзіліссіз болады.

Ескерту. Қарапайым функцияларға негізгі қарапайым функциялар мен олардың ақырлы санды комбинациясы ретінде бір ғана түрде жазылған функциялар жатады.

9.11-мысал:

$y=x^2+e^x$ - қарапайым функция;

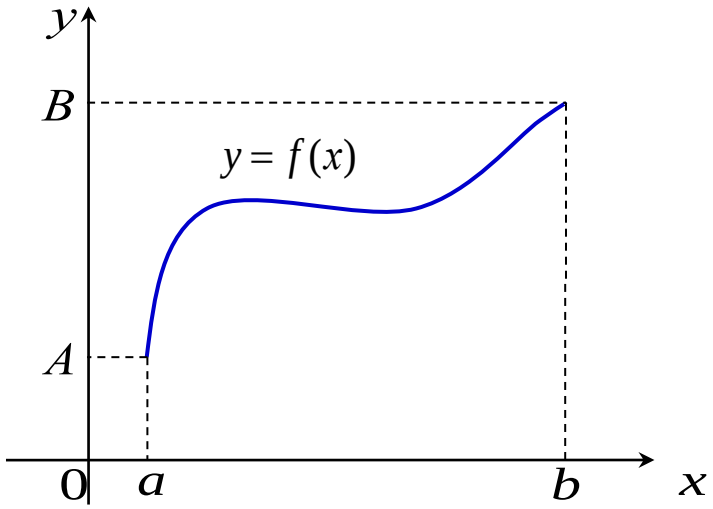
$$y=\begin{cases} x^2+e^x, \text{ егер } x\le 0 \\ \sin x, \quad \text{егер } x>0 \end{cases}$$ - қарапайым функция емес.

D жиынында үзіліссіз функциялардың класын $C(D)$ түрінде белгілейміз.

Теоремалар (Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттері)

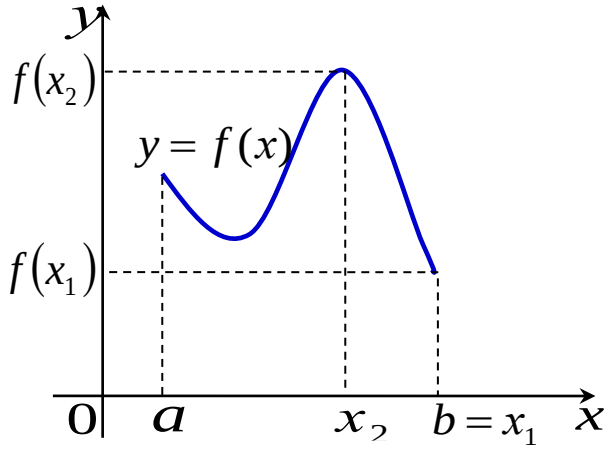
1. $f(x)\in C[a;b]\Rightarrow f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде шектелген (9.5-сурет).

$f(x)\in C[a;b]\Rightarrow \exists A,B\in R: A\le f(x)\le B,\ \forall x\in[a;b];$



9.5-сурет

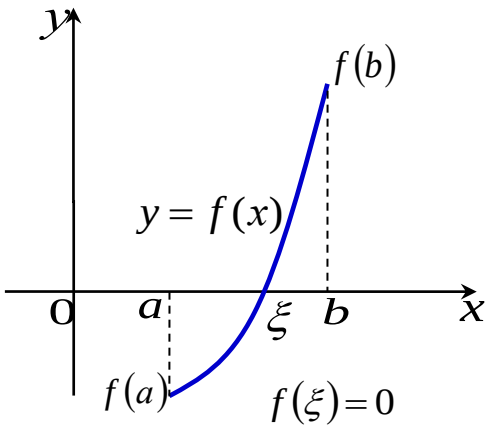
2. $f(x)\in C[a;b]\Rightarrow f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен мәні мен ең кіші мәнін қабылдайды (9.6-сурет):
$\exists x_1,x_2\in[a;b]:\ \ f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\ \ \forall x\in[a;b];$



9.6-сурет

$$f(x_1)=\min_{[a,b]} f(x),\quad f(x_2)=\max_{[a,b]} f(x)$$

3. $f(x)\in C[a;b]$ және оның кесіндінің ұштарындағы мәндерінің таңбалары әртүрлі $(f(a)f(b)<0)$ болса, онда $[a;b]$ *кесіндісінде* $f(\xi)=0$ теңдігі *орындалатын тым болмағанда бір* ξ *нүктесі бар болады (Больцано-Коши теоремасы)* (9.7-сурет).



9.7-сурет

9.8 Теориялық сұрақтар

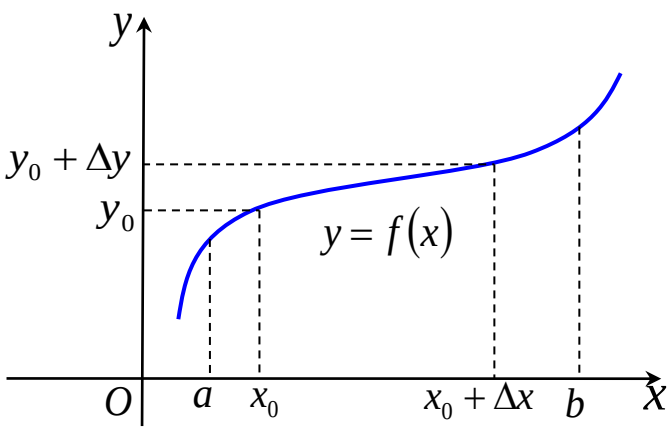
1. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар (ШАШ және ШҮШ) ұғымдары, мысалдар.
2. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалардың қасиеттері.
3. Негізгі анықталмағандықтар түрлері.
4. Бірінші тамаша шек және салдарлары.
5. Екінші тамаша шек және салдарлары.
6. Шексіз аз (үлкен) шамаларды салыстыру.
7. Эквиваленттілік және оның қолданысы.
8. Функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы.
9. Үзіліссіздіктің өсімшелер тіліндегі анықтамасы.
10. Нүктеде үзіліссіз функцияның қасиеттері.
11. Функцияның үзіліс нүктесі ұғымы.
12. Бірінші текті үзіліс нүктесінің түрлері.
13. Екінші текті үзіліс нүктесі.
14. Аралықта үзіліссіз функциялар.
15. Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қасиеттерінің теоремалары.

10 БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ

10.1 Туынды ұғымы, оның механикалық және геометриялық мағынасы

$y=f(x)$ функциясы (a,b) интервалында анықталған және $x_0 \in (a,b)$ болсын. x_0 аргументіне $x_0+\Delta x \in (a;b)$ болатындай $\Delta x \neq 0$ өсімшесін берейік. Онда

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$



10.1-сурет

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі аргументтің Δx өсімшесіне сәйкес өсімшесі болады (10.1-сурет).

10.1-анықтама. $y=f(x)$ *функциясының* x_0 *нүктесіндегі туындысы* деп функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шектеулі (ақырлы) шегі айтылады.

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын $f'(x_0), y'(x_0)$ немесе $\dfrac{dy}{dx}$ түрінде белгіленеді:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (10.1)$$

$$(\Delta x \to 0 \Leftrightarrow x - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

x нүктесінде туындысы бар функцияны x *нүктесінде дифференциалданатын функция* дейміз.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$$

$y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

10.1-тұжырым. Егер $y=f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз. Кері тұжырым орынды емес, яғни кез келген үзіліссіз функция дифференциалдана бермейді.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ сан $\Rightarrow$ бөлшектің бөлімі $x-x_0$ нөлге ұмтылғандықтан, бөлшек санға ұмтылуы үшін оның алымы да нөлге ұмтылуы керек, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ болуы керек $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Rightarrow f(x)$ – функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ сан

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

10.1-мысал: $y=|x|$ функциясы кез келген нүктеде үзіліссіз, бірақ бұл функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы жоқ (дифференциалданбайды).

Дәлелдеуі: $y=|x|$ функциясының үзіліссіздігін қарастырайық.

$y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында анықталған. $y=-x$ және $y=x$ функциялары кез келген нүктеде үзіліссіз, олай болса $y=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$ функциясы тек $y=-x$ түрінен $y=x$ түріне өтетін $x=0$ нүктесінде ғана үзілісті болуы мүмкін. Функцияны $x=0$ нүктесінде үзіліссіздікке тексереміз. Функцияның $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектерін табайық:

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0;$$
$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

Функцияның $x=0$ нүктесіндегі біржақты шектердің екеуі де нөлге тең, олай болса функцияның $x=0$ нүктесіндегі шегі де нөлге тең болады:

$$\lim_{x\to 0} y = 0.$$

Функцияның $x=0$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y(0)=0.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to 0} y = y(0)$, яғни $y=|x|$ функциясы $x=0$ нүктесінде үзіліссіз.

Функцияның $x=0$ нүктесінде дифференциалданбайтындығын көрсету үшін функцияның $x=0$ нүктесіндегі туындысын қарастырайық. Туындының анықтамасы бойынша:

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h}.$$

Сол және оң жақты шектерді есептейік:

Егер $x\to 0-0$, яғни x нөлге сол жақтан ұмтылса, онда $y(x)=-x$ болады да

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0-0} (-1) = -1$$

болады.

Егер $x\to 0+0$, яғни x нөлге оң жақтан ұмтылса, онда $y(x)=x$ болады да

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0=0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+0} 1 = 1$$

болады.

$x=0$ нүктесіндегі $\lim\limits_{h\to 0-0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h}$ және $\lim\limits_{h\to 0+0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h}$ біржақты шектері тең емес, олай болса $x=0$ нүктесінде $\lim\limits_{h\to 0} \frac{y(0+h)-y(0)}{h}$ шегі, яғни функцияның $x=0$ нүктесінде туындысы $y'(0)$ жоқ.

Туындының механикалық мағынасы

$S=f(t)$ функциясының M материалдық нүктесінің түзу бойымен қозғалысының заңдылығын сипаттайтын функция болсын, яғни $S=f(t)$ функциясының t нүктесіндегі мәні M нүктесінің t уақытында жүріп өткен жолы болсын. Онда функцияның $\Delta S = f(t+\Delta t)-f(t)$ өсімшесі M нүктесінің $[t, t+\Delta t]$ уақыт аралығында жүріп өткен жолын береді де, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ қатынасы M нүктесінің осы уақыт

аралығындағы орташа жылдамдығын береді.

Олай болса, лездік жылдамдықтың анықтамасы бойынша, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ шегі M нүктесінің t сәтіндегі лездік жылдамдығын береді:

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=V(t)$ - M нүктесінің t сәтіндегі лездік жылдамдығы.

Екінші жағынан

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t).$$

Бұл екі теңдіктен

$$S'(t)=V(t)$$

теңдігін, яғни t нүктесіндегі туындының қозғалыстың t сәтіндегі лездік жылдамдығы болатынын аламыз.

10.2-мысал: $S=\dfrac{gt^2}{2}$ формуласымен қозғалатын материалдық нүктенің $t=2$ сек. сәтіндегі лездік жылдамдығын табу керек.

Шешімі:

$$V(t)=S'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt.$$

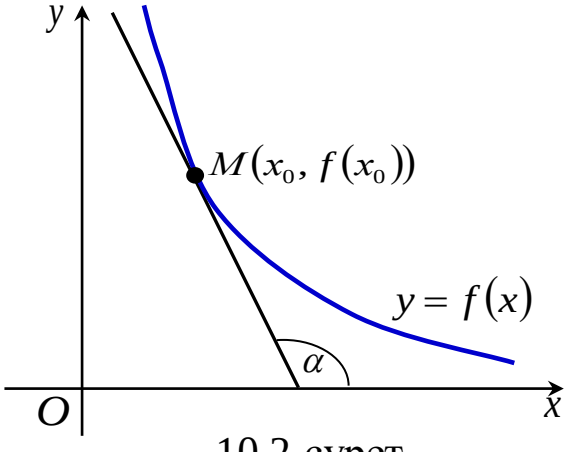
Сонымен, $t=2$ сек. сәтіндегі лездік жылдамдығы

$$V(2)=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6\ м/сек.$$

Туындының геометриялық мағынасы

$y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы $f(x)$ функциясының графигіне $M_0(x_0,f(x_0))$ нүктесінде (x_0 нүктесінде) жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін, яғни жанама мен Ox өсінің арасындағы бұрыштың тангенсін береді:

$$f'(x_0)=tg\alpha.$$



10.2-сурет

$y=f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген *жанаманың теңдеуі*

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (10.2)$$

түрінде жазылады.

Жанасу нүктесінен жанамаға перпендикуляр өтетін түзу *нормаль* деп аталады.

$y = f(x)$ функциясының графигіне x_0 *нүктесінде жүргізілген нормальдың теңдеуі*

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad (10.3)$$

түрінде жазылады (10.2-сурет).

10.3-мысал: $y = x^2 + 6x + 8$ функциясының графигіне $x_0 = -1$ нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдың теңдеулерін жазу керек.

Шешімі: $x_0 = -1 \mapsto f(x) = x^2 + 6x + 8 \Rightarrow$

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 8 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 3 \Rightarrow$$

функциясының графигіне жанама мен нормаль $M(-1;3)$ нүктесінде жүргізілген:

$$f'(x_0) = f'(-1) = \left(x^2 + 6x + 8\right)'\Big|_{x=-1} = (2x + 6)\Big|_{x=-1} = 4$$

$$x_0 = -1,\ f(x_0) = 3,\ f'(x_0) = 4 \mapsto y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 4(x + 1) \Rightarrow$$

$y = 4x + 7$ - *жанаманың теңдеуі;*

$$x_0 = -1,\ f(x_0) = 3,\ f'(x_0) = 4 \mapsto y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 1) \Rightarrow$$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ - *нормальдың теңдеуі.*

10.2 Дифференциалдау ережелері

10.1-теорема. c тұрақтысы мен $u(x), v(x)$ дифференциалданатын функциялар үшін келесі теңдіктер орындалады:

1. $(c)' = 0;$
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$
3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$
4. $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x);$

5. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0;$

6. $\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c};$

7. $\left(\frac{c}{u(x)}\right)' = c\cdot\left(u^{-1}(x)\right)' = -\frac{c}{u^2(x)}u'(x).$

5) Күрделі функцияның туындысы

Егер $y = F(u)$ функциясының u нүктесінде және $u = u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесіндегі туындысы

$$[F(u(x))]' = F'(u)\cdot u'(x) \qquad (10.4)$$

формуласымен анықталады (*күрделі функцияны дифференциалдау ережесі*).

Негізгі қарапайым функциялардың туындыларының кестесі

10.1-кесте

1	$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$	$\left[\left(u(x)\right)^n\right]' = n\cdot\left(u(x)\right)^{n-1}\cdot u'(x)$
2	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$
3	$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m}{x^{m+1}}$	$\left(\frac{1}{\left(u(x)\right)^m}\right)' = -\frac{m}{\left(u(x)\right)^{m+1}}\cdot u'(x)$
4	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot \ln a$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$
6	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
7	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
8	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x)\cdot u'(x)$

9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
10	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
11	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
14	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\,u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
15	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\,u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
16	$(shx)' = chx$	$(shu)' = chu \cdot u'(x)$
17	$(chx)' = shx$	$(chu)' = shu \cdot u'(x)$
18	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'(x)$
19	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'(x)$

10.4-мысал: $\left(2x^3 - 5x^2 + 7x + 4\right)' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7.$

10.5-мысал:

$$\left(x^3 arctgx\right)' = (x^3)' \cdot arctgx + x^3 \cdot (arctgx)' = 3x^2 \cdot arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= 3x^2 \cdot arctgx + \frac{x^3}{1+x^2}.$$

10.6-мысал: $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)' = \dfrac{(\arcsin x)'\cdot x - \arcsin x\cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x - \arcsin x}{x^2} =$

$= \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

10.7-мысал: $\left(\sin\,(2x+3)\right)' = \cos\,(2x+3)\cdot(2x+3)' = 2\cdot\cos\,(2x+3).$

10.8-мысал: $\left(tg^6 x\right)' = 6tg^5 x\cdot(tgx)' = 6tg^5 x\cdot\sec^2 x.$

6) Кері функцияның туындысы

Егер $y=f(x)$ функциясы (a,b) аралығында дифференциалданатын функция және $f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$ болса, онда оның $x=\varphi(y)$ кері функциясы да осы аралықта дифференциалданатын функция және кері функцияның туындысы

$$x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (10.5)$$

болады.

10.9-мысал: $y=\ln x$ функциясының туындысын оның кері функциясының туындысын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$y=\ln x \Rightarrow x=e^y;$

$$(10.5)\Rightarrow f'(y)=\frac{1}{x'_y}\Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{\left(e^y\right)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

10.10-мысал: $y=\arcsin x$ функциясының туындысын оның кері функциясының туындысын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

$y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y,$

$$(10.5)\Rightarrow y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Косинусты синус арқылы өрнектейміз:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)};$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arcsin x) \ge 0 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}.$$

Онда

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7) Айқындалмаған функцияның туындысы

x айнымалысынан тәуелді y функциясы $F(x,y)=0$ *айқындалмаған түрінде берілген*. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Ол үшін $F(x,y)=0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз да, нәтижесінде алған теңдеуден y' туындысын $y' = \varphi(x,y)$ түрінде өрнектеп аламыз.

10.11-мысал: $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$ теңдеуінен y'_x туындысын табу керек.
Шешімі: Теңдеудің екі жағын да x бойынша дифференциалдап, нәтижесінде алған теңдеуден y' туындысын табамыз:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - \left(x^2 e^y \cdot y' + 2xe^y\right) = 0 \Rightarrow 3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2xe^y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{1}{y} - x^2 e^y\right) = 2xe^y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{2xe^y - 3x^2}{\dfrac{1-x^2 e^y y}{y}} \Rightarrow y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)\cdot y}{1-x^2 y e^y}.$$

10.12-мысал: $y^2 + 2x^2 y = 0$ айқындалмаған функцияның $M(1,-2)$ нүктесіндегі y'_x туындысын табыңыз.
Шешімі: $y^2 + 2x^2 y = 0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$2yy' + 4xy + 2x^2 y' = 0 \Rightarrow (2y + 2x^2)y' = -4xy \Rightarrow y' = \frac{-4xy}{2y + 2x^2}$$

$$\Rightarrow y'|_M = \frac{-4xy}{2y+2x^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}} = \frac{-4\cdot 1\cdot(-2)}{2\cdot(-2)+2\cdot 1^2} = -2.$$

8) Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

x айнымалысынан тәуелді y функциясы

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1$$

параметрлік түрінде берілсін.

Егер $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және $\varphi'(t) \neq 0$ болса, онда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{10.6}$$

теңдігі орынды болады.

10.13-мысал: $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$ функциясы берілген. y'_x туындысын табыңыз.

Шешімі: $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және

$$\varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y' = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2.$$

10.14-мысал: $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = \sin t \end{cases}$ функциясы берілген. y'_x туындысының $t = 0$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі: $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және

$$\varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow y'|_{t=0} = \frac{(\sin t)'}{(2t+3)'}\Big|_{t=0} = \frac{\cos t}{2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

9) Логарифмдік дифференциалдау

Логарифмдік дифференциалдау деп функцияның туындысын функцияны логарифмдеу мен дифференциалдау амалдарын біртіндеп қолдану арқылы табу әдісін айтамыз.

Бұл әдіс кейбір функциялардың туындысын табуды жеңілдетеді. Мысалға, $y = u(x)^{v(x)}$ көрсеткіштік - дәрежелік функциясын қарастырайық:

a) $y = u(x)^{v(x)}$ теңдігін логарифмдейміз:

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x)\ln u(x);$$

b) соңғы теңдікті y – тің x - тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x);$$

c) y' – ті өрнектеп аламыз:

$$y' = y\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)\right) \Rightarrow$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)\right) \Rightarrow$$

$$y' = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'. \qquad (10.7)$$

10.15-мысал: $y = \left(x^2+1\right)^x$ функциясы берілген. y' туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $y = \left(x^2+1\right)^x$ теңдігін логарифмдейміз:

$$\ln y = \ln\left(x^2+1\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(x^2+1\right);$$

b) соңғы теңдікті y – тің x - тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{y}y' = 1\cdot\ln(x^2+1) + x\frac{1}{x^2+1}2x;$$

c) y' – ті өрнектеп аламыз:

$$y' = y\left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right);$$

$$y' = (x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

Салдар. $y=u^v$ көрсеткіштік-дәрежелік функциясының туындысы оның көрсеткіштік функция ретінде алынған туындысы мен дәрежелік функция ретінде алынған туындысының қосындысына тең.

Енді $y=\left(x^2+1\right)^x$ функциясының туындысын *салдарды* қолданып табайық.

a) туындыны көрсеткіштік функция ретінде аламыз:
$\left((x^2+1)^x\right)'=(x^2+1)^x\ln\left(x^2+1\right)$;

b) туындыны дәрежелік функция ретінде аламыз:
$\left((x^2+1)^x\right)'=x(x^2+1)^{x-1}2x=2x^2(x^2+1)^{x-1}$;

c) салдар бойынша y' - осы екі туындының қосындысы болады:
$$y'=(x^2+1)^x\ln\left(x^2+1\right)+2x^2(x^2+1)^{x-1}=(x^2+1)^x\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

10.3 Жоғарғы ретті туындылар

$y=f(x)$ функциясының бірінші ретті туындысы $y'=f'(x)$ дифференциалданатын функция болса, онда оның (бірінші ретті туындының) туындысы $y=f(x)$ *функциясының екінші ретті туындысы* деп аталады да y'', $y^{(2)}$ немесе $\frac{d^2y}{dx^2}$ түрінде белгіленеді:

$$y''=\left(y'\right)'.$$

$y=f(x)$ функциясының n - *ретті туындысы* деп оның $(n-1)$-ретті туындысының туындысын айтамыз да $y^{(n)}$ немесе $\frac{d^ny}{dx^n}$ түрінде белгілейміз:

$$y^{(n)}=\left[y^{(n-1)}(x)\right]'. \qquad (10.8)$$

10.16-мысал: $y=\sin\left(x^2+3\right)$ функциясының y'' екінші ретті туындысын табыңыз.

Шешімі:

$$y' = \left(\sin\left(x^2+3\right)\right)' = \cos\left(x^2+3\right)\left(x^2+3\right)' = \cos\left(x^2+3\right)(2x+0) = 2x\cos\left(x^2+3\right)$$
$$y'' = \left(2x\cdot\cos\left(x^2+3\right)\right)' = 2\cdot\cos\left(x^2+3\right)+2x\cdot 2x\cdot\left(-\sin\left(x^2+3\right)\right)=$$
$$= 2\cdot\cos\left(x^2+3\right)-4x^2\cdot\sin\left(x^2+3\right).$$

10.17-мысал: $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$ функциясының y''' үшінші ретті туындысын табыңыз.

Шешімі:

$$y' = 4\cdot 3x^2 + 3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3};$$

$$y'' = \left(12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3}\right)' = 12\cdot 2x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + 4\cdot(-3)x^{-4} = 24x - \frac{3}{4\sqrt{x^3}} - \frac{12}{x^4};$$

$$y''' = \left(24x - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} - 12x^{-4}\right)' = 24 - \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} - 12\cdot(-4)x^{-5} = 24 - \frac{9}{8\sqrt{x^5}} + \frac{48}{x^5}.$$

10.4 Лопиталь ережесі

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ шегін қарастырайық.

10.1-теорема (Лопиталь ережесі).

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$ яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ шегі $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтардың біріне әкелсе және $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

болады.

10.18-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ шегін Лопиталь ережесін қолданып табыңыз.

Шешімі: Шекке көшу $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді. Онда бұл шекке Лопиталь ережесін қолдануға болады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Мұнда Лопиталь ережесі қатарынын үш рет қолданылды.

$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\infty^0,1^\infty$ *түріндегі анықталмағандықтарға Лопиталь ережесін қолдану*

1) $0\cdot\infty$ немесе $\infty-\infty$ анықталмағандықтарын, оларды алдын ала $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына түрлендіріп алып Лопиталь ережесін қолданып ашуға болады.

10.19-мысал:

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

10.20-мысал:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

2) $0^0,\infty^0,1^\infty$ анықталмағандықтарын берілген функцияны логарифмдеу мен тепе-тең түрлендірулер арқылы Лопиталь ережесін қолдануға болатын анықталмағандыққа келтіруге болады.

10.21-мысал:

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = |0^0| = \left|\begin{array}{c} y=(\sin x)^x \\ \ln y = \ln(\sin x)^x \\ \ln y = x\ln(\sin x) \\ \ln y = \dfrac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\cos x}{\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x + x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{x\to 0} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = 1.$$

10.5 Теориялық сұрақтар

1. Функцияның туындысының анықтамасы.
2. Функцияның туындысының механикалық мағынасы.
3. Функцияның туындысының геометриялық мағынасы.
4. Дифференциалдаудың негізгі ережелері.
5. Күрделі функцияның туындысы.
6. Негізгі қарапайым функциялардың туындыларының кестесі.
7. Кері функцияның туындысы.
8. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы.
9. Айқындалмаған функцияның туындысы.
10. Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы.
11. Логарифмдік дифференциалдау.
12. Функциясының екінші ретті туындысы.
13. Функциясының n - ретті туындысы.
14. Лопиталь ережесі.
15. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0, \infty^0, 1^\infty$ түріндегі анықталмағандықтарға Лопиталь ережесін қолдану.

11 БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

11.1 Функцияның дифференциалы

11.1-анықтама. $y = f(x)$ *дифференциалданатын функциясының* x *нүктесіндегі дифференциалы* деп оның осы нүктедегі туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісін айтамыз да $\mathrm{d}y$ немесе $\mathrm{d}f(x)$ түрінде белгілейміз:

$$dy = y'\Delta x;\ df(x) = f'(x)\Delta x. \qquad (11.1)$$

11.1-мысал:

$$y = x^3 \Rightarrow dy = y'\Delta x = 3x^2\Delta x,$$

$$y = \sin x \Rightarrow d(\sin x) = (\sin x)'\Delta x = \cos x \cdot \Delta x.$$

(11.1) теңдігінен

$$dx = (x)'\Delta x = \Delta x, \qquad (11.2)$$

яғни аргументтің дифференциалы өзінің өсімшесіне тең екендігі шығады.

$$(11.1),\ (11.2) \Rightarrow dy = y'dx \Rightarrow \qquad (11.3)$$

функцияның дифференциалы оның туындысы мен аргументтің дифференциалының көбейтіндісіне тең.

$(11.1) \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$ - *функцияның туындысы функция дифференциалының аргумент дифференциалына қатынасына тең*.

Функцияның дифференциалы мен өсімшесінің арасындағы байланысты қарастырайық.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ теңдігінен (туындының анықтамасынан) шексіз аз шаманың қасиеті бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x) \qquad (11.4)$$

шамасының $\Delta x \to 0$ жағдайында шексіз аз шама болатыны шығады. Соңғы теңдіктен Δy функция өсімшесін өрнектейміз:

$$(11.4) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Бұл теңдіктен функцияның дифференциалы $f'(x)\Delta x$ дегеніміздің Δy өсімшесінің Δx аргумент өсімшесіне қарағандағы сызықтық бөлігі екендігі шығады.

Дифференциалдау ережелері:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(c \cdot v) = cdv$;
3. $d(u \cdot v) = udv + vdu$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

11.2-мысал: $dy = d(arctgx) = (arctgx)' \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}$.

11.3-мысал: $dy = d\left(e^{x^2}\right) = (e^{x^2})' \cdot dx = e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx$.

11.2 Күрделі функцияның дифференциалы

$y = f(u(x))$ күрделі функциясы берілсін. $f(u)$ функциясы u айнымалысы бойынша, $u(x)$ функциясы x айнымалысы бойынша дифференциалданатын функциялар болсын. Онда дифференциалдың анықтамасы бойынша

$$df(u(x)) = (f(u(x)))' dx = f'_u(u) \cdot u'_x(x)dx$$

теңдігін аламыз. Бұдан $u'_x(x)dx = du(x)$ болатынын ескерсек

$$df(u) = f'(u) \cdot du$$

теңдігіне келеміз. Бұл теңдік дифференциалдың сыртқы пішінінің / формасының инварианттылығын көрсетеді

$$(df(x) = f'(x) \cdot dx,\ df(u(x)) = f'(u) \cdot du).$$

11.3 Функцияның жоғарғы ретті дифференциалы

$df = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ - $y = f(x)$ *функциясының бірінші ретті дифференциалы;*

Екінші ретті дифференциал деп бірінші ретті дифференциалдың дифференциалын айтамыз да d^2y түрінде белгілейміз:

$$d^2 f(x) = d\big(df(x)\big) = d\big(f'(x)\cdot\Delta x\big) = \big(f'(x)\big)'\cdot\Delta x\cdot\Delta x = f''(x)\cdot(\Delta x)^2 =$$
$$= f''(x)\cdot(dx)^2 = f''(x)\cdot dx^2,$$

мұндағы dx^2 дегеніміз $(dx)^2$ жазылымының қысқаша түрі.

11.2-анықтама. $y = f(x)$ функциясының n*-ші ретті дифференциалы* деп $(n-1)$-ші ретті дифференциалдың дифференциалын айтамыз да $d^n y$ түрінде белгілейміз:

$$d^n y = d\big(d^{n-1} f\big) \Rightarrow d^n y = f^{(n)}(x)dx^n,$$

мұндағы $dx^n = (dx)^n$, $n = 2,3,\ldots$.

11.4-мысал: $y = (2x-3)^3$ функциясының бірінші, екінші және үшінші ретті дифференциалдарын табу керек.

Шешімі:

$$dy = 3(2x-3)^2\cdot 2\,dx = 6(2x-3)^2 dx;$$
$$d^2 y = 12(2x-3)\cdot 2dx^2 = 24(2x-3)\cdot dx^2;$$
$$d^3 y = 24\cdot 2\cdot dx^3 = 48\,dx^3.$$

11.4 Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow$$
$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x = 0$ болғандықтан

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (11.5)$$

жуықтауының $\alpha(\Delta x)\Delta x$ қатесін Δx шамасын жеткілікті азайту арқылы жуықтаудың $|\alpha(\Delta x)\Delta x|$ абсолюттік қатесін қалауымызша азайтуға, яғни жуықтау дәлдігін қалауымызша жоғары етуге болады.

11.5-мысал: $\arcsin 0{,}51$ жуық мәнін есептеу керек.

Шешімі: (11.5) жуықтауында $f(x) = \arcsin x$ деп алсақ, онда

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\cdot\Delta x$$

жуықтауын аламыз. Бұл жуықтауда $x = 0{,}5$ және $\Delta x = 0{,}01$ деп алсақ

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513$$

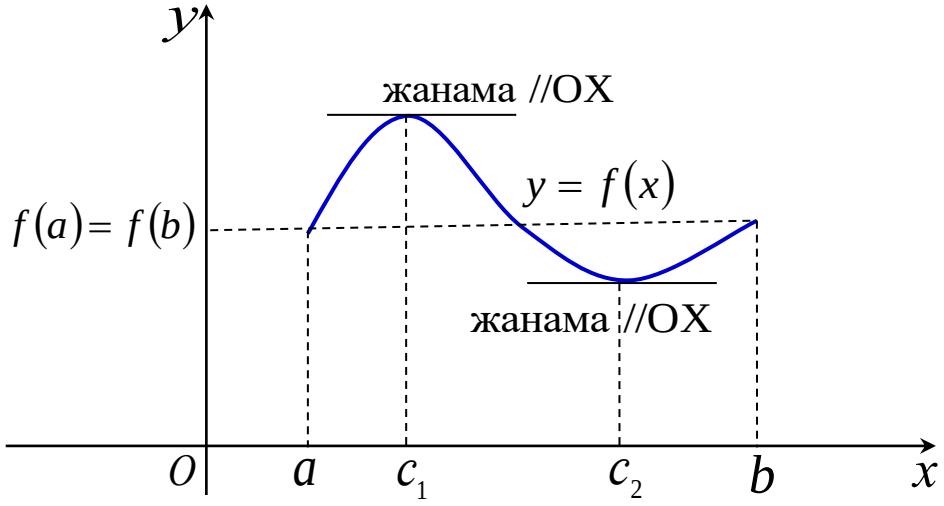
жуықтауын аламыз.

11.5 Дифференциалданатын функция туралы теоремалар

Ролль теоремасы. Егер $f(x)$ функциясы:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын;
3) $f(a)=f(b)$, яғни кесіндінің ұштарында бірдей мән қабылдайтын болса, онда $(a;b)$ интервалында $f'(c)=0$ болатын тым болмаса бір c нүктесі табылады.

$\exists c\in(a,b)\colon f'(c)=0 \Leftrightarrow \exists c\in(a,b)\colon$ $(c, f(c))$ нүктесіндегі жанама //OX (11.1-сурет).



11.1-сурет

Лагранж теоремасы. $f(x)$ функциясы:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса, онда $(a;b)$ интервалында

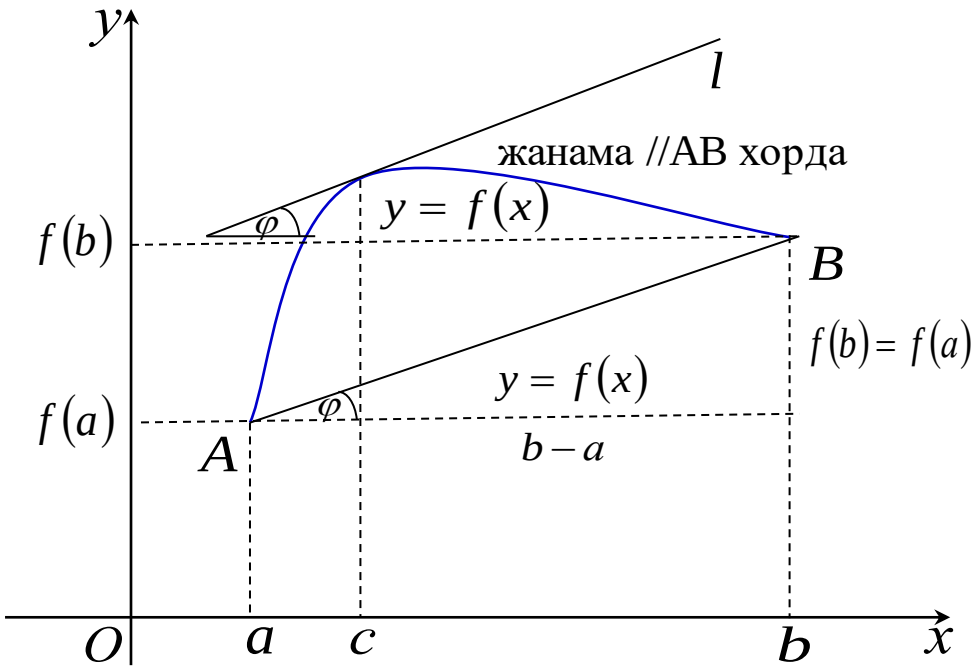
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

теңдігі орындалатындай тым болмаса бір c нүктесі табылады. c нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tg\varphi$ - AB хордасының бұрыштық коэффициенті

$\exists c\in(a;b)\colon f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow\exists c\in(a;b)\colon$

$(c,f(c))$ нүктесінде жүргізілген жанама l // AB хорда (11.2-сурет).



11.2-сурет

Коши теоремасы. Егер $f(x)$, $g(x)$ функциялары:

1) $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(a;b)$ интервалында дифференциалданады;
3) $(a;b)$ интервалында $g'(x)\neq 0$ шарттарын қанағаттандырса, онда $(a;b)$ интервалында

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

теңдігі орындалатындай тым болмаса бір c нүктесі табылады.

Лагранж теоремасы Коши теоремасының $g(x)=x$ жағдайына сәйкес келетін дербес жағдайы болады.

Туынды (дифференциал) ұғымы *функцияның өсу, кему интервалдарын, экстремумдерін, графигінің ойыс және дөңес аралықтарын анықтауда* қолданылады.

11.6 Функцияны зерттеу

Функцияны зерттеудің жалпы жоспары:

1. Анықталу облысын табу.
2. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу.
3. $f(x)$ функциясының графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу (егер мүмкін болса).
4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу.
6. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
7. Функция графигінің көлбеу асимптотасын табу.
8. Функцияның графигін салу.

Зерттеуді мысалмен қарастырайық.

11.6-мысал: $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$ функциясын зерттеп, графигін салайық.

1. Анықталу облысын табу

- Функция $y = f(x)$ түрінде берілсе (анықталу облысы көрсетілмеген), онда анықталу облысы ретінде
  $D = \{ x : f(x) - \text{мағыналы} \}$ – жиынын аламыз.
  $E = \{ f(x) : x \in D \}$ - *өзгеру облысы* (*мәндер жиыны*).

1. *y функциясының анықталу облысы:*

$D = \{ x : \dfrac{x^2 - 5}{x - 3} - \text{мағыналы} \} = \{ x : x - 3 \neq 0 \} = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$

($x = 3$ нүктесінен өзгеше барлық нақты сандар жиыны).

2. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ *функциясы* x_0 *нүктесінде үзіліссіз* деп, ал x_0 *нүктесі функцияның үзілліссіздік нүктесі* деп аталады.
- Егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болса, *онда* x_0 *нүктесі функцияның үзіліс нүктесі* деп аталады.

Біздің функция қарапайым/ элементар функция болғандықтан, ол өзінің анықталу облысында, яғни $(-\infty;3)$ және $(3;+\infty)$ интервалдарында үзіліссіз болады.

2. $x=3\notin D\Rightarrow\exists\ f(3)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)\Rightarrow x=3$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-5}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-5}{x-3}=+\infty\Rightarrow$$

$x=3$ нүктесі - *II текті үзіліс нүктесі* және $x=3$ түзуі $x\to 3-0$ және $x\to 3+0$ жағдайларында функцияның графигінің *вертикаль асимптотасы* болады.

Функцияның анықталу облысының шеттеріндегі ($-\infty$ және $+\infty$) функцияның шегін табамыз:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=+\infty\Rightarrow$$

горизонталь асимптотасы жоқ.

3. $f(x)$ функциясының графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу

Функцияның OY өсімен қиылысу нүктесін табу үшін $x=0$, ал OX өсімен қиылысу нүктесін табу үшін $y=0$ деп аламыз.

3. Сәйкесінше, $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ функциясында:

$x=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{3}$, яғни $A\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$ - графиктің OY өсімен қиылысу нүктесі;

$y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$, яғни $B(-\sqrt{5};0);\ C(\sqrt{5};0)$ - графиктің OX өсімен қиылысу нүктелері.

4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу

- Егер $\forall x \in D\ f(-x) = f(x)\ \left[f(-x) = -f(x)\right]$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x),\ \ x \in D$ функциясы *жұп функция [тақ функция]* деп аталады.
  Жұп немесе тақ функциясының анықталу облысы D бас нүктеге симметриялы болады.
- Егер $\exists T \in R : \forall x \in D,\ \ f(x) = f(x+T)$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы *периодты* деп аталады. Периодты функцияның анықталу облысы D - шектеусіз болады.

4. *Жұп та, тақ та емес*, себебі анықталу облысы $D = (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$ бас нүктеге симметриялы емес. Функцияның графигі OY өсіне де, O(0;0) координаталардың бас нүктесіне де қарағанда симметриялы емес.

$$\forall x\ \ f(x+T) = \frac{(x+T)^2 - 5}{(x+T) - 3} \equiv \frac{x^2 - 5}{x - 3} = f(x) \Leftrightarrow T = 0$$

$\Rightarrow$ *функция периодты емес.*

5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу

- Егер $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын және $\forall\ x \in (a;b)\ \ f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) болса, онда $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *өспелі* (*кемімелі*) болады.
- X жиынында $y = f(x)$ функциясы $x_0 \in X$ нүктесінің аймағында анықталған және бұл нүктеде үзіліссіз болсын. Осы аймақтың x_0 нүктесінен өзгеше барлық x нүктелері үшін
  $$f(x) < f(x_0)\ \ \left(f(x) > f(x_0)\right)$$
  теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимум* (*минимум*) *нүктесі* деп аталады.
  Максимум және *минимум* нүктелері функцияның *экстремумдық нүктелері* деп аталады.
- Функцияның $f'(x) = 0$ немесе үзіліс нүктелері болатын нүктелер *кризистік (стационар) нүктелер* деп аталады. Функция экстремумын тек кризистік нүктелерінде ғана қабылдай алады.

5. Функцияның бірінші ретті туындысын табамыз:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-5}{x-3}\right)'=\frac{(x^2-5)'(x-3)-(x-3)'(x^2-5)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

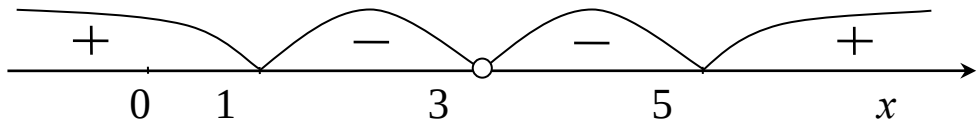
Кризистік нүктелерін ($f'(x)=0$ және $f'(x)$ болмайтын нүктелерді) табамыз:

$f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1,\ x=5$ және $x=1,\ x=5$ - кризистік нүктелер.

$f'(x)$ жоқ $\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$. $x=3\notin D\Rightarrow x=3$ кризистік нүкте емес.

Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$ таңбалары:



$f(x)$ функциясы $(-\infty;1)$ интервалында өспелі, $(1;3)$ интервалында кемімелі $\Rightarrow x=1$ - функцияның максимум нүктесі.

$f(x)$ функциясы $(3;5)$ интервалдарында кемімелі, $(5;+\infty)$ интервалында өспелі $\Rightarrow x=5$ - функцияның минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін табайық:

$f(1)=\frac{1-5}{1-3}=2,\quad D(1;2)$ - функция графигінің максимумге сәйкес нүктесі,

$f(5)=\frac{5^2-5}{5-3}=10,\quad E(5;10)$ - функция графигінің минимумге сәйкес нүктесі.

6. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу

Егер қисықтың барлық нүктелері оның жанамаларының төменгі (жоғарғы) жағында орналасса, онда $y=f(x)$ қисығы *дөңес (ойыс)* деп аталады.

- Егер $y=f(x)$ қисығы x_0 нүктесінен өткенде ойыстығын дөңестікке немесе керісінше, дөңестігін ойыстыққа ауыстыратын болса, онда x_0 нүктесі $y=f(x)$ қисығының *иілу нүктесі* деп аталады.
- Егер (a,b) аралығында $f''(x)<0$ $[f''(x)>0]$ болса, онда $y=f(x)$ қисығы (a,b) аралығында *дөңес* (*ойыс*) болады.
- Егер $x_0 \in D$, $f''(x_0)=0$ немесе $f''(x_0)$ жоқ болса және x_0 нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі - *иілу нүктесі* болады.

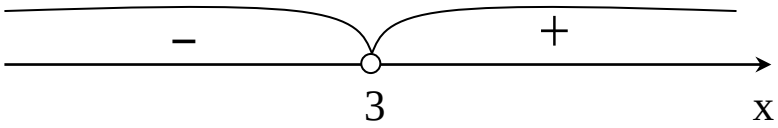
6. Функцияның екінші ретті туындысын табайық

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}.$$

Екінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$f''(x)$ - таңбалары:



$(-\infty;3)$ интервалында $f''(x)<0 \Rightarrow (-\infty;3)$ интервалында график *дөңес*.

$(3;+\infty)$ интервалында $f''(x)>0 \Rightarrow (3;+\infty)$ интервалында график *ойыс*.

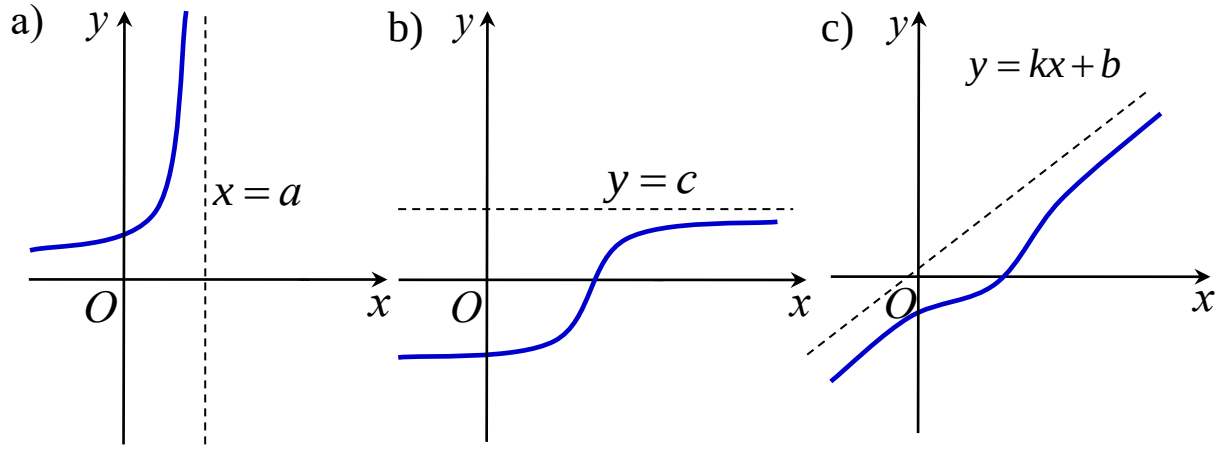
$x=3$ нүктесінде функция анықталмаған, онда ол *иілу нүктесі болмайды*.

7. Функция графигінің асимптоталарын табу

Егер қисықтың M ағымдық нүктесі бас нүктеден шектеусіз алыстағанда M нүктесінен түзуге дейінгі арақашықтық нөлге ұмтылатын болса, онда түзу *қисықтың асимптотасы* деп аталады.

Асимтоталар, олардың OX өсіне қарай орналасуына байланысты *вертикаль, горизонталь* және *көлбеу асимтота* болып үш түрге

бөлінеді: a) $x=a$ түзуі – вертикаль түзу, b) $y=c$ түзуі – горизонталь түзу, c) $y=kx+b$ түзуі – көлбеу түзу (11.2-сурет).



11.2-сурет

a) Егер $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ немесе $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ болса, онда $x=a$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне (функцияға) *вертикаль асимптота* болады.

b) Егер $x=a$ нүктесі функцияның үзіліссіздік нүктесі болса, онда $x=a$ түзуі функцияның вертикаль асимптотасы болмайды.

c) Егер $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ немесе $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ және c – сан болса, онда $y=c$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне *горизонталь асимптота* болады.

Егер

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b,$$

k, b – сандар және $k\neq 0$ болса, онда $y=kx+b$ түзуі $f(x)$ функциясының графигіне *көлбеу асимптота* болады.

7. $x=3$ түзуі *вертикаль* асимптота болатыны және *горизонталь асимптотасының жоқ* екені 2 – пунктте көрсетілген болатын. Енді көлбеу асимптотасын қарастырамыз. Көлбеу асимптотаның теңдеуін $y=kx+b$ түрінде іздейміз:

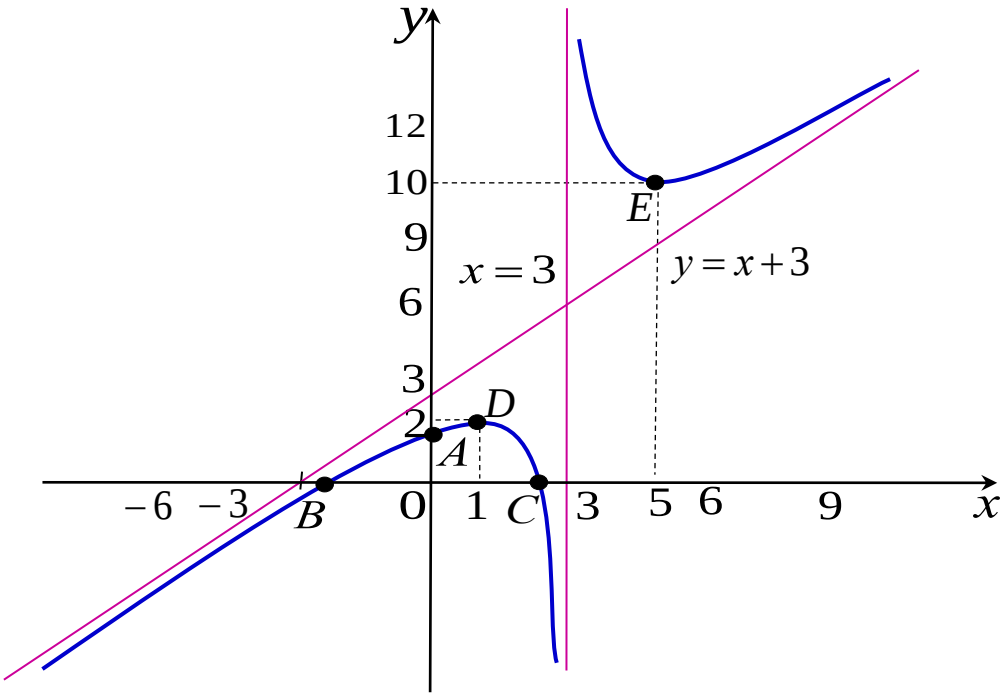
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{(x-3)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{x^2-3x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{x-3}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5-x^2+3x}{x-3}=3.$$

Демек, $y = x + 3$ *– көлбеу асимптота.*

8. Функцияның графигін салу

Жоғарғыдағы функция зерттеулері бойынша функцияның графигін тұрғызу керек (11.3-сурет).



11.3-сурет

11.7 Туындының экономикада қолданылуы

Еңбек өнімділігі туралы есеп. $u = u(t)$ функциясы t уақыт мөлшеріндегі өндірілген өнімнің көлемі болсын. t_0 сәтіндегі еңбек өнімділігін табу керек. t_0 уақытынан $t_0 + \Delta t$ уақытына дейін өндірілген өнімнің саны $u_0 = u(t_0)$ мәнінен $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ мәніне дейін өседі.

Олай болса

$$z_{орт} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Δt уақыт аралығындағы орташа еңбек өнімділігі болады. Онда

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

t_0 сәтіндегі еңбек өнімділігін береді.

Сонымен, еңбек өнімділігінің уақыттан тәуелділігінің өндірілген өнім мөлшерінің *уақыт бойынша туындынысы ретінде*, яғни *шектік шама ретінде* берілетінін көрдік.

Экономиканың табыс, өнім, пайдалылық және басқа көрсеткіштерін де шектік шама ретінде сипаттауға болады.

11.8 Теориялық сұрақтар

1. Функциясының дифференциалы және белгіленуі.
2. Функцияның дифференциалы мен өсімшесінің арасын-дағы байланыс.
3. Дифференциалдау ережелері.
4. Күрделі функцияның дифференциалы және белгіленуі.
5. Екінші ретті дифференциал және оның есептелуі.
6. n -ші ретті дифференциал және оның есептелуі.
7. Дифференциалдың жуықтап есептеуде қолданылуы.
8. Ролль теоремасы.
9. Лагранж теоремасы.
10. Коши теоремасы.
11. Анықталу облысын табу.
12. Үзіліс нүктелерін, горизонталь және вертикаль асимтоталарын табу.
13. Функция графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу (егер мүмкін болса).
14. Функцияны жұптыққа, тақтыққа және периодтылыққа зерттеу.
15. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу.
16. Функцияның графигінің ойыстық және дөңестік аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
17. Функция графигінің көлбеу асимптотасын табу.
18. Функцияның графигін салу.
19. Туындының қолданбаларына мысалдар келтіріңіз.

12 АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

12.1 Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл ұғымы

Дифференциалдау амалы: функция берілген, туындысын табу керек.
Интегралдау амалы: функцияның туындысы берілген, функцияның өзін табу керек (функцияның туынды тапқанға дейінгі түрін – алғашқы түрін табу керек)**.**
Интегралдау – дифференциалдауға кері амал.

12.1-анықтама. Егер жиында $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x)$ функциясы берілген жиында $f(x)$ *функциясының алғашқы функциясы* деп аталады.

Анықтамалардан келесі *тұжырымдар* шығады:

1. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $(F'(x) = f(x))$ және C – тұрақты сан

$\Rightarrow (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C$ – $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы.

***Қорытынды*:** егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда кез келген C тұрақтысы үшін $F(x) + C$ функциясы да алғашқы функция болады.

2. $F(x)$ және $Q(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциялары болсын $F'(x) = f(x)$ және

$Q'(x) = f(x)) \Rightarrow (Q(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow Q(x) - F(x) = C$ - тұрақты сан $\Rightarrow Q(x) = F(x) + C$.

***Қорытынды*:** Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда оның кез келген алғашқы функциясы $F(x) + C$ түрінде жазылады.

1, 2 тұжырымдарынан, егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының

алғашқы функциясы болса, онда $F(x)+C$ оның барлық алғашқы функцияларының жалпы түрі болатыны шығады.

12.2-анықтама. $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының $F(x)+C$ жалпы түрін $f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп атаймыз да $\int f(x)dx$ түрінде белгілейміз.

$\int f(x)dx = F(x)+C$, мұндағы $F(x)$: $F'(x) = f(x)$.

12.1-мысал: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$,

$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x, \quad F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x), \quad F(x)+C = \sin x + C.$

$f(x)$ функциясы *интеграл астындағы функция*;

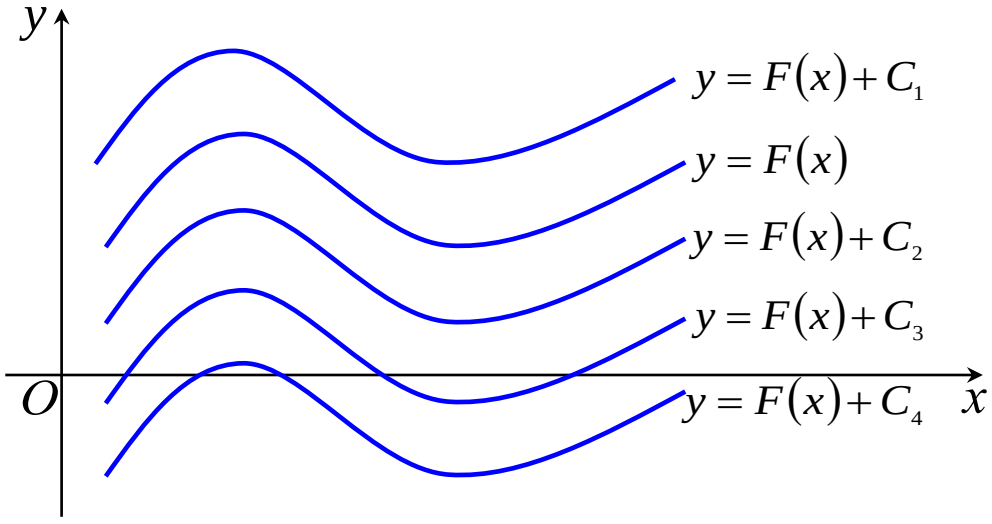
$f(x)dx$ - *интеграл астындағы өрнек*;

x - *интегралдау айнымалысы* (dx бойынша анықталады);

$\int$ - *анықталмаған интеграл белгісі* деп аталады.

Функцияның анықталмаған интегралын табу амалы осы функцияны *интегралдау* деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, анықталмаған интеграл $y = F(x)+C$ *қисықтарының жиынтығы* (әрбір С-ның сандық мәніне анықталған қисықтар жиынтығы сәйкес келеді) (12.1-сурет). Әрбір алғашқы функцияның (қисықтың) графигі *интегралдық қисық* деп аталады.



12.1-сурет

12.2 Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең, ал анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

2. Функцияның дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен кез келген тұрақты санның қосындысына тең:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, $a \neq 0$ - тұрақты сан.

4. Қосындының анықталмаған интегралы қосылғыштардың интегралдарының қосындысына тең:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

5. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда кез келген үзіліссіз туындысы бар $u = \varphi(x)$ функциясы үшін $\int f(u)\,du = F(u) + C$ болады. Соңғы қасиет анықталмаған интегралдың интегралдау айнымалысына қарағанда инвариантылығын көрсетеді.

12.3 Негізгі интегралдар кестесі

Дифференциалдық есептеулердің негізгі формулаларынан шығатын интегралдар кестесін қарастырамыз:

1.	$\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + c\right)$
2.	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$
3.	$\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + c$
4.	$\int e^{u} du = e^{u} + c$
5.	$\int \sin u\,du = -\cos u + c$

6.	$\int \cos u\,du = \sin u + c$
7.	$\int tg\,u\,du = -\ln\left\|\cos u\right\| + c$
8.	$\int ctg\,u\,du = \ln\left\|\sin u\right\| + c$
9.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\,u + c$
10.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\,u + c$
11.	$\int sh\,u du = ch\,u + c$
12.	$\int ch\,u du = sh\,u + c$
13.	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\,u + c$
14.	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\,u + c$
15.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|tg\,\frac{u}{2}\right\| + c$
16.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + c$
17.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\| + c$
18.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$
19.	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{u}{a} + c$
20.	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + c$
21.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + c$
22.	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + c$

23.	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$

12.4 Интегралдаудың негізгі әдістері

1) Қарапайым әдістерді қолданып интегралдау (Интегралды тікелей есептеу)

Қарапайым әдістер деп интеграл астындағы өрнектерге (функцияларға) тепе-тең түрлендірулер жасау арқылы немесе анықталған интегралдың қасиеттерін қолдану арқылы кестелік интегралға келтіру әдістерін айтамыз.

12.2-мысал:

1) Интегралдың 3, 4 - қасиеттерін пайдаланып берілген интегралды табуды 4 және 5 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int\left(7\sin x + 5e^x\right)dx = 7\int \sin x\,dx + 5\int e^x dx = -7\cos x + 5e^x + C;$$

2) Интегралдың 3, 4 - қасиеттерін пайдаланып берілген интегралды табуды 2, 18 және 19 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int\left[\frac{3}{16+x^2} - \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{16}{x}\right]dx = 3\int\frac{dx}{16+x^2} - 5\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} + 16\int\frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{1}{4}arctg\,\frac{x}{4} - 5\arcsin\,\frac{x}{3} + 16\ln\left\lvert x\right\rvert + C;$$

3) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 түріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx + \int\frac{5x\,dx}{\sqrt{x}} - \int\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \int x^2 x^{-\frac{1}{2}}dx + 5\int x x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x}(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1) + C;$$

4) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 және 2 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{(x-2)(x^3+7)}{x^4}dx = \int \frac{x^4 - 2x^3 + 7x - 14}{x^4}dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3} - \frac{14}{x^4}\right)dx =$$

$$= \int dx - 2\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-3}dx - 14\int x^{-4}dx = x - 2\ln|x| - \frac{7}{2x^2} + \frac{14}{3x^3} + C;$$

5) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 1 және 19 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2dx}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C;$$

6) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 3 және 10 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int a^x\left(1 + \frac{a^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx = \int a^x dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{a^x}{\ln a} - ctgx + C$$

7) Тепе-тең түрлендірулерді қолданып, берілген интегралды табуды 9 және 10 түрлеріндегі кестелік интегралдарды табуға әкелеміз:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Интегралды оның сыртқы түрінің *инварианттылығын*, яғни

$$\int f(u)du = F(u) + C \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

қолданып табу.

12.3-мысал:

a) $$\int \sin x d(\sin x) = \left| \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

b) $$\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} \underbrace{d(-x^2)}_{-2x dx} = \left| \int e^u du = e^u + C \right| = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C;$$

c) $$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{\overbrace{d(\cos x)}^{-\sin x dx}}{\cos x} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| = -\ln|\cos x| + C;$$

d) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{\overbrace{d\left(x^3\right)}^{3x^2 dx}}{\sqrt{1-(x^3)^2}} =$$

$$= \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \right| = \frac{1}{3} \arcsin x^3 + C;$$

e) $$\int \frac{dx}{(2+3x)^5} = \frac{1}{3} \int (2+3x)^{-5} \underbrace{d(2+3x)}_{3dx} = \left| \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(2+3x)^{-4}}{(-4)} + C = -\frac{1}{12(2+3x)^4} + C;$$

f) $$\int \frac{dx}{3-8x} = -\frac{1}{8} \int \frac{\overbrace{d(3-8x)}^{-8dx}}{3-8x} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| = -\frac{1}{8} \ln|3-8x| + C.$$

2) Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни, кестелік немесе кестелік интегралға келтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x)dx$ интегралын табу қажет болсын. $x=\varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Rightarrow$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (12.1)$$

теңдігін аламыз. Бұл формула *анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы* деп аталады. Оң жақтағы интегралды тапқаннан кейін t айнымалысынан қайта x айнымалысына көшеміз.

12.4-мысал: Айнымалыны ауыстыру формуласы көмегімен интегралды есептеу:

1. $$\int \sin x d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = \sin x \end{array} \right| \overset{(1)}{=} \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

2. $$\int e^{-x^2} x dx = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = -x^2 \\ dt = -2xdx \\ -\frac{dt}{2} = xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t dt \overset{(4)}{=} -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$$

3. $$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} \overset{(2)}{=} -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

4. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ \frac{dt}{3} = x^2 dx \end{array} \right| \overset{(18)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin t + C = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{(2+3x)^5} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ t = 2+3x \\ dt = 3dx \\ \frac{dt}{3} = dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int t^{-5} dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\frac{t^{-4}}{(-4)} + C =$$

$$= -\frac{1}{12t^4} + C = -\frac{1}{12(2+3x)^4} + C;$$

6. $\int \frac{dx}{3-8x} = \left| \begin{array}{l} \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\ t = 3-8x \\ dt = -8dx \\ -\frac{dt}{8} = dx \end{array} \right| -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{8}\ln t = -\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C.$

3) Бөліктеп интегралдау әдісі

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv) = udv + vdu$. Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

немесе

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (12.2)$$

теңдігін аламыз.

Бұл формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданғанда интеграл астындағы өрнекті *udv* көбейтіндісі ретінде қарастырамыз да u функциясын $\int vdu$ интегралы $\int udv$ интегралына қарағанда интегралдауға қолайлы болатындай етіп таңдап аламыз.

Кейбір бөліктеп интегралданатын интегралдар:

1) $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$ түріндегі интегралдарда,
мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, $u = P(x)$ деп, ал dv ретінде интеграл астындағы қалған көбейткіштерді алу керек.

2) $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx, \int P(x)arctgxdx,$ $\int P(x)arcctgxd$ түріндегі интегралдарда $P(x)\,dx = dv$ деп, ал u ретінде интеграл астындағы қалған көбейткішті алу керек.

3) $\int e^{ax}\sin bxdx, \int e^{ax}\cos bxdx$ түріндегі интегралдар бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолдану арқылы интегралдау есебін осы интегралға қатысты сызықтық теңдеуді шешу есебіне келтіру арқылы табылады. Бұл арада бірінші ретте u функциясы ретінде көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынса, екінші ретте де көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынуы керек.

12.5-мысал: Бөліктеп интегралдау формуласы көмегімен интегралды есептеу:

1. $$\int (2x+1)e^{3x}dx = \left|\begin{array}{l}\int udv = uv - \int vdu \\ u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right| = (2x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,2dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C;$$

2. $$\int x\cos 3x dx = \left|\begin{array}{l}\int udv = uv - \int vdu \\ u = x,\ du = dx, \\ dv = \cos 3x dx,\ v = \frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right| = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C;$$

3. $$\int \arccos x dx = \left|\begin{array}{l}\int udv = uv - \int vdu \\ u = \arccos x \Rightarrow du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x\end{array}\right| = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{d(1-x^2)}_{-2xdx} = x\arccos x - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$$

4. $$\int x\ln^2 x dx = \left|\begin{array}{l}\int udv = uv - \int vdu \\ u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2\end{array}\right| = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x dx = \left|\begin{array}{l}u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C;$$

5. $$\int e^{2x}\sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\right) + C.$$

Нәтижесінде $\int e^{2x}\sin 3x dx$ белгісізіне қатысты келесі сызықтық теңдеуді алдық. Бұдан сызықтық теңдеуді шешу есебіне келеміз:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx + C$$

Теңдеуді шеше отырып $\int e^{2x}\sin 3x dx$ белгісізін табамыз:

$$\int e^{2x}\sin 3x dx + \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C \Rightarrow$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x + C\right) \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{13}e^{2x}\left(-3\cos 3x + 2\sin 3x + C\right).$$

12.5 Теориялық сұрақтар

1. Дифференциалдау және интегралдау амалдары.
2. Алғашқы функция ұғымы.
3. Анықталмаған интегралдың анықтамасы.
4. Анықталмаған интегралдың геометриялық мағынасы.
5. Анықталмаған интегралдың қасиеттерін атаңыз.
6. Негізгі интегралдар кестесі және оның қолданбалары.
7. Интегралды тікелей есептеу.
8. Инварианттылық формуласы көмегімен интегралды есептеу.
9. Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру.
10. Анықталмаған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі.

13 РАЦИОНАЛ, ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ

13.1 Рационал өрнектердің интегралдануы

Рационал функциялар *бүтін-рационал* және *бөлшек-рационал* болып екі түрге бөлінеді.

Бүтін-рационал функция деп көпмүшелікті айтамыз.

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

n дәрежелі көпмүшелік - бүтін-рационал функция, $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ - тұрақты коэффициенттер.

Бөлшек-рационал функция деп көпмүшеліктердің қатынасы түрінде берілген функцияны айтамыз.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}$$

бөлшек-рационал функция.

Егер $(n<m)(n\geq m)$, яғни алымының дәрежесі бөлімінің дәрежесінен кіші (кіші емес) болса, онда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшегі *дұрыс (бұрыс) бөлшек* деп аталады.

Бұрыс бөлшекті, оның алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы, көпмүшелікке немесе көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына түрлендіруге болады. Сондықтан біз тек дұрыс бөлшектің интегралын қарастырамыз.

Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдары

Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдарына

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k},\quad \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k},\quad \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx,\quad M\neq 0,\ k=1,2,...,$$

интегралдары жатады.

Енді осы интегралдарды қарастырайық.

1. $\int\frac{dx}{(x-a)^k},\quad k=1,2,...$

1.1 $k=1$ жағдайы

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C. \qquad (13.1)$$

13.1-мысал: $\int \frac{dx}{x-5}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{\overbrace{d(x-5)}^{dx}}{x-5} = \ln|x-5| + C.$

1.2 $k = 2,3,\ldots$ $(k \geq 2)$ жағдайы

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c. \quad (13.2)$$

13.2-мысал: $\int \frac{dx}{(x+4)^6}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{(x+4)^6} = \int (x+4)^{-6} dx = \int (x+4)^{-6} \overbrace{d(x+4)}^{dx} = \frac{(x+4)^{-6+1}}{-6+1} + C = -\frac{1}{5(7x+4)^5} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad D = p^2 - 4q < 0$

2.1 $k = 1$ жағдайы

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ интегралын, x^2+px+q үшмүшелігінде толық квадратты бөліп шығару арқылы

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C, \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$$

интегралдарының біріне келтіруге болады.

x^2+px+q үшмүшелігінде толық квадратты бөліп шығарамыз:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4},$$

мұндағы $D = p^2 - 4q$ - квадрат үшмүшеліктің дискриминанты.

а) $D > 0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2} \quad (13.3)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ түріндегі интеграл: $u = x+\frac{p}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{D}}{2}.$

13.3-мысал: $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-1^2}=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{(x+2)-1}{(x+2)+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C.$$

b) $D=0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \qquad (13.4)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C$ түріндегі интеграл: $u=x+\frac{p}{2}$.

13.4-мысал: $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}=\int \frac{dx}{(x+2)^2}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2}=-\frac{1}{x+2}+C.$

c) $D<0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{D}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2} \qquad (13.5)$$

бұл $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ түріндегі интеграл: $u=x+\frac{p}{2}, \quad a=\frac{\sqrt{-D}}{2}$.

13.5-мысал: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13}=\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+9}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}+C.$$

2.2 $k=2,3,\ldots$ жағдайы

a) $D>0$ жағдайы.

$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ интегралы

$$\int \frac{dx}{\left(u^2-a^2\right)^k} = \frac{1}{2a^2(k-1)} \cdot \frac{u}{\left(u^2-a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-1}{2a^2(k-1)} \int \frac{dx}{\left(u^2-a^2\right)^{k-1}} \qquad (13.6)$$

рекуренттік формуласы мен (13.3) интегралы арқылы табылады:

$$u = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{D}}{2}.$$

13.6-мысал: $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+3\right)^2}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+3\right)^2} = \int \frac{dx}{\left((x+2)^2-1\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 1^2(2-1)} \cdot \frac{x+2}{\left((x+2)^2-1\right)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 1^2(2-1)} \int \frac{dx}{\left((x+2)^2-1\right)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{\left(x^2+4x+3\right)} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{3}{4} \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$$

b) $D=0$ жағдайы.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^{2k}} = \frac{-2k}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^{2k+1}} + C \qquad (13.7)$$

13.7-мысал: $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)^3}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)^3} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^{2\cdot 3}} = \int (x+2)^{-6} d(x+2) = -\frac{5}{(x+2)^5} + C.$$

c) $D<0$ жағдайы.

$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ интегралы

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2a^2(k-1)} \frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}$$

рекуренттік формуласы мен (13.5) интегралы арқылы табылады:

$$u = x + \frac{p}{2}; \; a = \frac{\sqrt{-D}}{2}.$$

13.8-мысал: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+13\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x^2+4x+4\right)+9\right)^2} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+2\right)^2+3^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3^2(2-1)} \cdot \frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+3^2} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 3^2(2-1)} \int \frac{d\left(x+2\right)}{\left(\left(x+2\right)^2+3^2\right)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+3^2} + \frac{1}{18} \int \frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+3^2} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C.$$

3. $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k} dx, \quad k=1,2,3,\ldots \; M \neq 0.$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k} dx = \int \frac{\frac{M}{2}\left(x^2+px+q\right)' + \left(N-\frac{pM}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k} dx =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k} + \left(N-\frac{pM}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

Соңғы екі интеграл жоғарыда қарастырылған сәйкесінше 1.1 және 2 түріндегі интегралдар болады.

13.9-мысал: $\int \frac{x+2}{x^2+4x+13} dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+4x+13\right)' + \left(2-\frac{4\cdot 1}{2}\right)}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\left(2x+4\right)}{x^2+4x+13} dx =$$

$$= \int \frac{\left(x+2\right)}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{x+2}{\left(x+2\right)^2+3^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\left(x+2\right)^2+3^2\right)}{\left(x+2\right)^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\left(x+2\right)^2+3^2\right| + C.$$

Дұрыс рационал бөлшектің интегралы

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дұрыс бөлшегінің интегралын, $Q_m(x)$ көпмүшелігін $(x-a)$ (a - көпмүшеліктің түбірі) түріндегі екімүшеліктер мен x^2+px+q түріндегі дискриминанты теріс квадрат үшмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелуін пайдалана отырып,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, \quad M \neq 0, k=1,2,...,$$

түрлеріндегі қарапайым интегралдарының қосындысына түрлендіру арқылы интегралдауға болады. Мысалмен қарастырамыз.

13.10-мысал: $\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1}$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1} = \int \frac{x}{x^2(x-1)+(x-1)}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow (x^2+1)(x-1) \neq 0$$

$$x = (Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

$$x = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)$$

$$0x^2+1x+0 = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)$$

$$x^2: \quad 0 = A+C$$

$$x: \quad 1 = -A+B$$

$$x^0: \quad 0 = -B+C$$

Бірінші теңдіктің өзін жазып, соңғы екі теңдікті қосамыз:

$$0 = A+C$$

$$1 = -A+C$$

Теңдіктерді қосамыз: $2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

$C = \frac{1}{2}$ мәнін теңдеулерге қоя отырып $A = -\frac{1}{2}$, ал $B = \frac{1}{2}$ болатынын аламыз.

$$\int \frac{xdx}{x^3-x^2+x-1}=\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}\right)dx=$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx+\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}arctg\ x+\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|+C.$$

13.2 Тригонометриялық өрнектердің интегралдануы

1. $\int \sin\ px\cos qxdx;\quad \int \cos\ px\cos qxdx;\quad \int \sin\ px\sin\ qxdx$ интегралдары $p\neq q$ жағдайында

$$\sin\ px\cos qx=\frac{1}{2}\left[\sin(\ p-q)x+\sin(\ p+q)x\right]$$

$$\cos px\cos qx=\frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x+\cos(p+q)x\right]$$

$$\sin\ px\sin\ qx=\frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x-\cos(p+q)x\right]$$

түрлендірулерін қолдану арқылы табылады.

13.11-мысал: $\int \sin 3x\sin 5xdx$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \sin 3x\sin 5xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\int \cos 2xdx-\frac{1}{2}\int \cos 8xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin\ 2x-\frac{1}{16}\sin\ 8x+C.$$

2. $\int \sin^m px\cos^n\ pxdx$ түріндегі интегралдарды:

m - тақ болса,

$$\sin^2\ px=1-\cos^2\ px,\quad \cos px=z,\quad \sin\ pxdx=-\frac{1}{p}dz$$

ауыстыруларын;

n - тақ болса,

$$\cos^2 px = 1 - \sin^2 px, \quad \sin px = z, \quad \cos px dx = \frac{1}{p} dz$$

ауыстыруларын;

m де, n де жұп болса,

$$\sin px \cos px = \frac{1}{2} \sin 2px,$$

$$\cos^2 px = \frac{1 + \cos 2px}{2},$$

$$\sin^2 px = \frac{1 - \cos 2px}{2}$$

дәреже төмендету формулаларын қолдану арқылы табуға болады.

13.12-мысал: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $m = 2, n = 2.$ m де, n де жұп жағдайы.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{4} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 2x)}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x\right) + C.$$

$R(u, v)$ түрінде u, v айнымалыларына қарағанда рационал, яғни u мен v айнымалыларына тек арифметикалық амалдарды қолдану арқылы алынған өрнекті белгілейміз.

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегралы $t = tg \frac{x}{2}$ универсал ауыстыруын енгізу арқылы t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады:

$$t = tg \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \Rightarrow$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2} = \int R_1(t) dt,$$

мұндағы $R_1(t)$ - t айнымалысы бойынша рационал функция.

13.13-мысал: $\int \frac{dx}{\sin x}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Кейбір дербес жағдайлар.

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын, егер:

a) Егер $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын $\sin x = t$ ауыстыруын енгізу арқылы t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

13.14-мысал: $\int \cos^3 x dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R(\sin x, \cos x) = \cos^3 x$

$$R(\sin x, -\cos x) = (-\cos x)^3 = -\cos^3 x = R(\sin x, \cos x)$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

b) $R(-\sin x, \cos t) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда $\cos x = t$ ауыстыруын енгізу арқылы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

c) Егер $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ болса, онда $tgx = t$, ауыстыруын енгізу арқылы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралын t айнымалысына қарағанда рационал функцияның интегралына түрлендіруге болады.

13.15-мысал: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\sin x}{(-\cos x)^3} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} = R(\sin x, \cos x)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x \cos^2 x}dx = \int tgx \frac{1}{\cos^2 x}dx = \left| tgx = t,\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \right| =$$

$$= \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{tg^2 x}{2} + C.$$

13.3 Иррационал өрнектердің интегралдануы

Иррационал өрнектердің интегралдарын табудың негізгі жолы оларды айнымалыны ауыстыру арқылы рационал өрнектің интегралына түрлендіру болып табылады. Біз кейбір иррационал өрнектердің интегралдар мен оларға сәйкес ауыстыруларды келтіреміз.

а) Бөлшек-сызықтық иррационалдықты интегралдау.

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

13.16-мысал: $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2},\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = \sqrt[4]{x},\ m=4,\ \frac{ax+b}{cx+d} = x.$$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt, \\ x^{\frac{1}{2}} = \left(t^4\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 \\ x^{\frac{1}{4}} = \left(t^4\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = t \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3 dt =$$

$$= 4\int \frac{(1+t)t^3}{t^2(t^2+1)}dt = 4\int \frac{(t+t^2)}{t^2+1}dt = 4\int \frac{(t^2+1)+(t-1)}{t^2+1}dt$$

$$= 4\int \left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 4t+2\ln(t^2+1)-4arctgt+C = \left|t=\sqrt[4]{x}\right|$$

$$= 4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4arctg\sqrt[4]{x}+C.$$

b) Эйлер ауыстырулары

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Ауыстырулар:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, егер $a>0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm c$, егер $c>0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_0)t$, егер $D=b^2-4ac>0$ болса, мұндағы x_0 саны ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігінің түбірі.

c) $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $x-x_0=\frac{1}{t}$

$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $x=a\sin t$ немесе $x=a\cos t$;

$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$, $x=atgt$ немесе $x=actgt$.

13.17-мысал: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ интегралын табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{Ax+B}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = \frac{1x+0}{(x-0)\sqrt{x^2-2x-1}}, x_0=0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = \left|\begin{array}{l} x-0=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-2\frac{1}{t}-1}=\sqrt{\frac{1-2t-t^2}{t^2}}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t} \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-(t+1)^2+2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(t+1)^2}} =$$

$$= -\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C = -arc\sin\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C = arc\sin\frac{x+1}{\sqrt{2x}}+C.$$

13.18-мысал: $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$ интегралын табыңыз.

Шешімі: $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)=\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}$.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\left|x=2\sin t,\ dx=2\cos tdt\right|=\int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos tdt=$$

$$=\int \frac{\sqrt{\left(2^2\left(1-\sin^2 t\right)\right)^3}}{32\sin^6 t}\cos tdt=\frac{8}{32}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int ctg^4 tdctgt=-\frac{1}{20}ctg^5 t+C=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\sin t\\ cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\frac{x^2}{4}\\ cost=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\end{array}\right|=$$

$$=C-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

13.4 Теориялық сұрақтар

1. Бүтін-рационал функция ұғымы.
2. Бөлшек-рационал функция ұғымы.
3. Дұрыс (бұрыс) бөлшектер ұғымы.
4. Рационал бөлшектердің қарапайым интегралдары.
5. Дұрыс рационал бөлшектің интегралы.
6. Тригонометриялық өрнектердің түрлері және интегралын есептеудегі ауыстыруларды атаңыз.
7. Иррационал өрнектердің түрлері және интегралын есептеудегі ауыстыруларды атаңыз.

14 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ, ҚАСИЕТТЕРІ, ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ НЕГІЗГІ ӘДІСТЕРІ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

14.1 Анықталған интегралдың анықтамасы

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған және шектелген болсын.

$[a,b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ бөлік кесінділеріне бөлеміз. $[x_{i-1}, x_i]$ бөлік кесіндісінің ұзындығы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ санына тең болады, $i = 1, 2, 3, \ldots, n.$

Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөлік кесіндісінен бір ξ_i нүктесін аламыз: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}.$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

қосындысы $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі *интегралдық қосындысы* деп аталады.

$T = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ сандар жиынын $[a,b]$ *кесіндісінің бөліктеуі*, $Q = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ сандар жиынтығын осы *бөліктеуге сәйкес таңдама*, ал $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ санын осы *бөліктеудің диаметрі* деп атаймыз.

14.1-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) > 0$ табылып $\lambda < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір T бөліктеуі үшін $|S_n - J| < \varepsilon$ теңсіздігі T бөліктеуіне сәйкес кез келген Q таңдамасы үшін орынды болса, онда J *саны* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *интегралдық қосындысының* λ *нөлге ұмтылғандағы шегі* деп аталады.

Интегралдық қосындысының шегі бар функция *интегралданатын функция* деп, ал интегралдық қосындының шегі, яғни $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = J$ саны $f(x)$ *функциясының* $[a,b]$ *кесіндісіндегі анықталған интегралы* деп аталады.

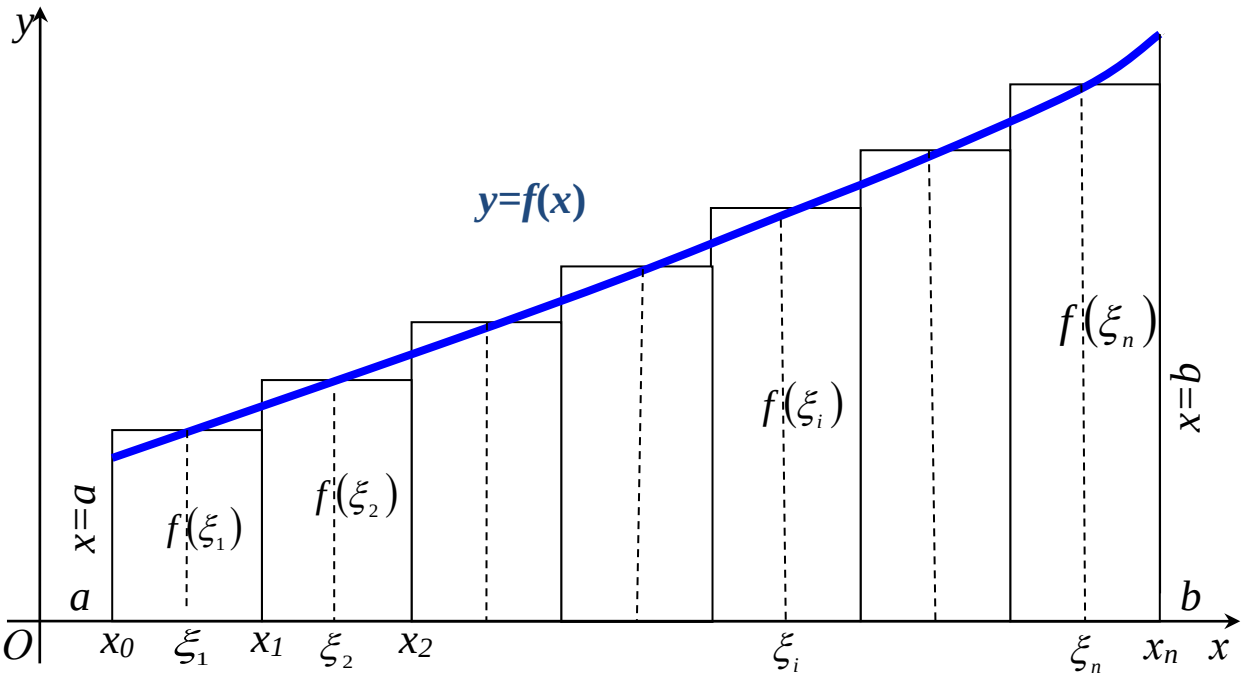
$f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ түрінде белгіленеді:

$$\int_a^b f(x)dx = J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Ескерту. Үзіліссіз функция интегралданатын функция болады.

Оң мәнді $f(x)$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ бөліктеуі мен оған сәйкес $Q = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ таңдамасы бойынша құрылған $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысын *геометриялық тұрғыдан* қарастырайық:

$f(\xi_i)\Delta x_i \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ көбейтіндісі, геометриялық тұрғыдан табаны $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісі, биіктігі функцияның ξ_i нүктесіндегі $f(\xi_i)$ мәніне тең болатын тік төртбұрыштың ауданын беретіндіктен, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысы төменнен OX өсімен, екі бүйірінен $x = a,\ x = b$ түзулерімен, жоғарыдан сынық сызықпен шектелген баспалдақты фигураның ауданын береді (14.1-сурет).



14.1-сурет

Енді геометриялық тұрғыдан $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысының T бөліктеуінің $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ диаметрі нөлге ұмтылғандағы шегін қарастырайық.

$\lambda \to 0 \Rightarrow \Delta x_i \to 0 \quad (i = \overline{1,n}) \Rightarrow$ сынық сызық $y = f(x)$ қисығымен беттесуге ұмтылады $\Rightarrow$ баспалдақты фигураның ауданы қисық сызықты трапецияның ауданына ұмтылады, яғни

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S .$$

Екінші жағынан, анықталмаған интегралдың анықтамасы бойынша,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Соңғы екі теңдіктен

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (14.1)$$

теңдігін, яғни оң $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралының төменнен OX өсімен, жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен,бүйірлерінен $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген *қисық сызықты трапецияның ауданын* беретінін аламыз.

14.2 Анықталған интегралдың қасиеттері

Ары қарай, біз тек интегралданатын функцияларды ғана қарастырамыз.

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1. $\int_a^b C dx = C(b-a)$, С - тұрақты.
2. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
3. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $m \le f(x) \le M$ теңсіздіктері орындалса, онда $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ теңсіздіктері орынды болады.
4. *Орта мән туралы теорема.*
   Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,b]$ кесіндісінде $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай с нүктесі табылады. $f(c)$ функцияның $[a,b]$ аралығындағы *орта мәні* деп аталады.

5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

6. Егер $a < c < b$ болса, онда
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx$ интегралы деп $-\int_a^b f(x)dx$ санын айтамыз:
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

8. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

14.3 Ньютон – Лейбниц формуласы

14.1-теорема (Ньютон - Лейбниц)
Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
болса, онда
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (14.2)$$
теңдігі орынды болады. (14.2) *Ньютон - Лейбниц формуласы* деп аталады.

14.1-мысал:
$$\int_2^4 (x^3 + x)dx = \int_2^4 x^3dx + \int_2^4 xdx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) + \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = 64 - 4 + 8 - 2 = 66.$$

14.2-мысал:
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

14.3-мысал:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

14.4-мысал:

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^{-2}\underbrace{d\left(x^2+1\right)}_{2xdx} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{0^2+1}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

14.4 Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі

14.2-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ аралығында бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ теңдіктері орынды болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (14.3)$$

теңдігі орынды болады. (14.3) *анықталған интегралда айнымалыны алмастыру формуласы* деп аталады.

14.5-мысал:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \\ x_1 = 1 \Rightarrow 1 = e^t \Rightarrow t_1 = 0 \\ x_2 = e \Rightarrow e = e^t \Rightarrow t_2 = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{\ln^2 e^t}{e^t}e^t dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ескерту. $x = \varphi(t)$ ауыстыруының орнына $t = \omega(x)$ ауыстыруын енгізуге болады.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \ln 1 = 0 \\ x_2 = e \Rightarrow t_2 = \ln e = 1 \end{array}\right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

14.6-мысал:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{1+x}=t\\ 1+x=t^2\\ x=t^2-1\\ dx=2tdt\\ x_1=3\Rightarrow t_1=\sqrt{1+3}=2\\ x_2=8\Rightarrow t_2=\sqrt{1+8}=3\end{array}\right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 2\left.\frac{t^3}{3}\right|_2^3 - 2t\Big|_2^3 = \left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{2\cdot 2^3}{3}\right) - 2(3-2) = \frac{32}{3}.$$

14.7-мысал:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \left|\begin{array}{l}x=r\sin t\\ dx=r\cos t dt\\ x_1=0\Rightarrow t_1=\left|\begin{array}{l}0=r\sin t\\ 0=\sin t\end{array}\right|=0\\ x_2=r\Rightarrow t_2=\left|\begin{array}{l}r=r\sin t\\ 1=\sin t\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}\end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t dt =$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left|\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}\right| = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{r^2}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{r^2\pi}{4} - 0\right) + \frac{r^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{r^2\pi}{4}.$$

14.5 Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау

14.3-теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болса, онда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (14.4)$$

теңдігі орынды болады.

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай жазамыз: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

(14.4) *анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы* деп

аталады.

14.8-мысал:

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx=\left|\begin{array}{l}\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu\\ u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right|=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1=$$

$$=\left(-1e^{-1}+0\right)-\left(e^{-1}-e^{0}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}.$$

14.9-мысал:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctgxdx=\left|\begin{array}{l}\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu\\ u=arctgx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=xdx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}x\Big|_0^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}=\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}arctg\sqrt{3}-0\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-0\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(arctg\sqrt{3}-arctg0\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}.$$

14.6 Меншіксіз интегралдар

Анықталған интеграл ұғымы сегментте (яғни шектелген тұйық аралықта) анықталған және шектелген функцияға тән ұғым.

Біздің ендігі мақсатымыз интеграл ұғымын шектеусіз аралықта берілген немесе шектеулі аралықта берілген, бірақ бұл аралықта шектелмеген функция үшін енгізу.

1. Шексіз шекті интегралдар

$f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ аралығында анықталған және осы аралықтың кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын функция болсын.

14.2-анықтама. $f(x)$ функциясының $[a,+\infty)$ аралығындағы *меншіксіз интегралы* деп $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ шегін айтамыз да $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ түрінде белгілейміз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (14.5)$$

(14.5) теңдігіндегі шек сан болса, онда *меншіксіз интеграл жинақты*, кері жағдайда, яғни шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

Осылайша, меншіксіз интеграл $(-\infty,b]$ аралығында анықталған және кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын $f(x)$ функциясы үшін

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (14.6)$$

теңдігімен анықталады да, шек сан болса *жинақты*, шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

$(-\infty,+\infty)$ аралығында анықталған және кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \qquad (14.7)$$

(с – кез келген сан) теңдігімен екі меншіксіз интегралдың қосындысы ретінде анықталады.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы тек теңдіктің оң жағындағы *меншіксіз интегралдардың екеуі де жинақты*, яғни соңғы теңдіктің оң жағындағы екі шек те ақырлы болғанда (сан болғанда) ғана *жинақты* болады.

14.10-мысал: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{2}e^{-x^2}2xdx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2}(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}} - 1) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-b^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақты және $\frac{1}{2}$ санына тең.

14.11-мысал: $\int_0^{+\infty} xe^{x^2}dx$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\int_0^{+\infty} xe^{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{2}e^{x^2}2xdx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{x^2}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{b^2} - e^0\right) = \frac{1}{2}(\lim_{b\to+\infty} e^{b^2} - 1) = +\infty.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақсыз.

14.12-мысал: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$ функциясы, $x^2+4x+5\neq 0$ болғандықтан (себебі $D = 16-4\cdot 5 = -4 < 0$), $(-\infty, +\infty)$ аралығында үзіліссіз. Олай болса ол кез келген $[a,b]$ кесіндісінде интегралданады.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+4x+5} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} arctg(x+2)\Big|_a^0 + + \lim_{b\to+\infty} arctg(x+2)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} arctg2 - \lim_{a\to-\infty} arctg(a+2) + \lim_{b\to+\infty} arctg(b+2) - \lim_{b\to+\infty} arctg2 =$$

$$= arctg2 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - arctg2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақты және π санына тең.

2. Шектелмеген функцияның интегралдары

$f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында анықталған, осы аралықтың кез келген $[c,b]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын және оның $x=a$ нүктесіндегі оң жақты шегі шексіздікке тең немесе жоқ функция болсын.

14.3-анықтама. $f(x)$ функциясының $(a,b]$ аралығындағы меншіксіз интегралы деп $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, (\varepsilon>0,\ a+\varepsilon<b)$ шегін айтамыз да $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ түрінде белгілейміз:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ (\varepsilon>0) \qquad (14.8)$$

(14.8) теңдігінің оң жағындағы шек сан болса, онда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

14.13-мысал: $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ меншіксіз интегралын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ функциясы кез келген $[1+\varepsilon;e]$ сегментінде үзіліссіз, яғни интегралданады және оның $x=1$ нүктесіндегі оң жақты шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right]=\frac{3}{2}.$$

Демек, $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ меншіксіз интегралы жинақты және $\dfrac{3}{2}$ санына тең.

Сол сияқты, $[a;b)$ аралығында анықталған, осы аралықтың кез келген $[a,c]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын және $x=b$ нүктесіндегі сол жақты шегі шексіздікке тең немесе жоқ $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ (\varepsilon>0) \qquad (14.9)$$

теңдігімен анықталады.

(14.9) теңдігінің оң жағындағы шек сан болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал шек шексіздікке тең немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

14.14-мысал: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ функциясы кез келген $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ сегментінде үзіліссіз, яғни интегралданады және оның $x=\frac{\pi}{2}$ нүктесіндегі сол жақты шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\infty.$$

Демек, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ меншіксіз интегралы жинақсыз.

$[a,c)\cup(c,b]$ жиынында анықталған, осы жиынның кез келген $[d,e]$ ішкі кесіндісінде интегралданатын $x=c$ нүктесіндегі біржақты шектерінің тым болмаса біреуі шексіздікке тең немесе жоқ $f(x)$ функциясы үшін меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx, \ (\varepsilon>0) \qquad (14.10)$$

теңдігімен анықталады.

Егер (14.10) теңдігінің оң жағындағы екі шек те сан болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралы *жинақты*, ал егер олардың тым болмаса біреуі шексіздік немесе жоқ болса *жинақсыз* деп аталады.

14.15-мысал: $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ меншіксіз интегралын есептеп, жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Интеграл астындағы функция $[0;1)\cup(1;2]$ жиынында үзіліссіз, яғни осы жиынның кез келген $[d;e]$ сегментінде интегралданады және оның $x=1$ нүктесіндегі шегі шексіздікке тең. Олай болса берілген интеграл меншіксіз және

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4x+3} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2-4x+3},\ \varepsilon>0$$

теңдігімен анықталады. Теңдіктің оң жағындағы шектерді қарастырамыз

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}-\ln 3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon} = \infty$$

Демек, $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ меншіксіз интегралы жинақсыз.

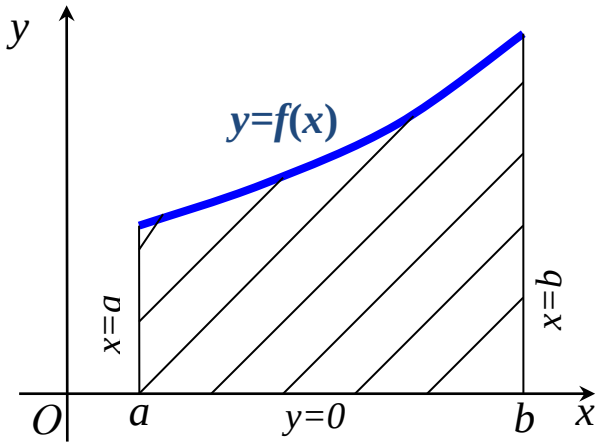
14.7 Теориялық сұрақтар

1. Интегралдық қосындысы ұғымы.
2. Анықталған интегралдың анықтамасы.
3. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы.
4. Анықталған интегралдың қасиеттерін атаңыз.
5. Ньютон – Лейбниц формуласы.
6. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру әдісі.
7. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау.
8. Шексіз шекті интегралдар.
9. Шектелмеген функцияның интегралдары.

15 АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНБАЛАРЫ

15.1 Жазық фигураның ауданын есептеу

1) Жоғарыдан теріс емес үзіліссіз $y = f(x)$ функциясының графигімен, төменнен OX өсімен ($y = 0$ түзуімен), сол жағынан $x = a$ және оң жағынан $x = b$ түзулерімен шектелген *қисық сызықты трапецияның ауданын табу керек* (15.1-сурет).



15.1-сурет

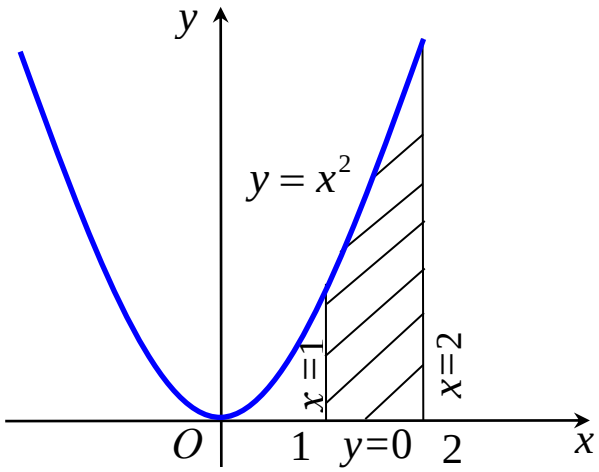
Анықталған интегралдың геометриялық мағынасын қарастырғанда берілген функцияның берілген аралық бойынша интегралы осы ауданды беретіні көрсетілген болатын:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (15.1)$$

15.1-мысал: $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешімі:

$y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ сызықтарын тұрғызамыз (15.2-сурет).



15.2-сурет

Фигура жоғарыдан $y = x^2$, төменнен OX өсімен ($y = 0$ түзуімен), сол жағынан $x = 1$ және оң жағынан $x = 2$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапеция, яғни

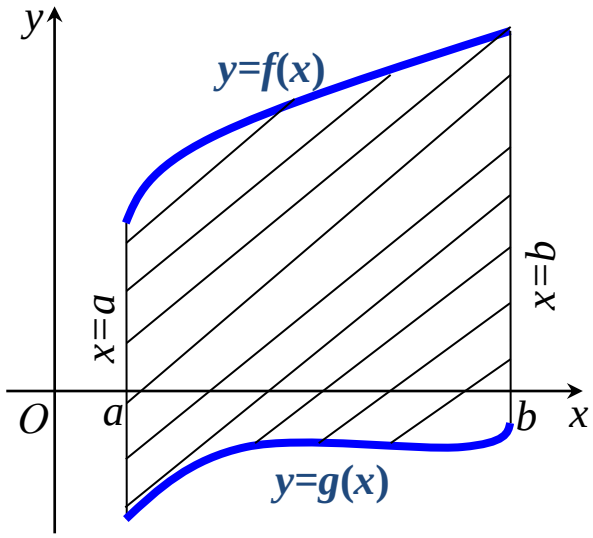
$f(x) = x^2, a = 1, b = 2$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

15.1-салдар. $y=f(x), y=g(x)$ үзіліссіз функцияларының графиктерімен, $x=a$ және $x=b$ $(a<b)$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \qquad (15.2)$$

формуласымен табылады (15.3-сурет).



15.3-сурет

15.2-мысал: $y=x$ және $y=2-x^2$ функцияларының графиктерімен және $x=0, x=2$ түзулерімен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

Шешімі:

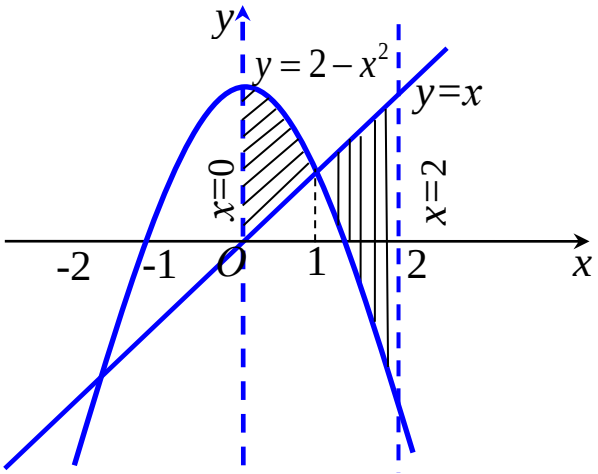
$y=x, y=2-x^2, x=0, x=2$ с ызықтарын тұрғызамыз (15.4-сурет).

Есептің шарты бойынша

$a=0, b=2,$

$f(x)=x,$

$g(x)=2-x^2$:



15.4-сурет

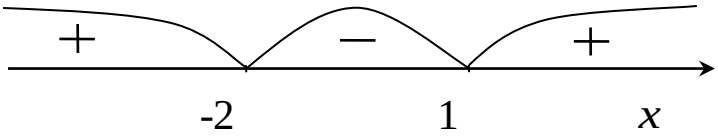
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_0^2 |x-(2-x^2)|dx=\int_0^2 |x^2+x-2|dx \Rightarrow$$

$$S=\int_0^2 |x^2+x-2|dx$$

$|x^2+x-2|$ модулінің мәнін анықтау үшін x^2+x-2 үшмүшелігінің таңбасы тұрақты болатын аралықтарды анықтаймыз:

$x^2+x-2=0$

$x_1=-2, x_2=1$



$$x\in[0,1]\Rightarrow x^2+x-2\le 0\Rightarrow \left|x^2+x-2\right|=-\left(x^2+x-2\right)=-x^2-x+2,$$
$$x\in[1,2]\Rightarrow x^2+x-2\ge 0\Rightarrow \left|x^2+x-2\right|=x^2+x-2.$$

$$S=\int_0^2\left|x^2+x-2\right|dx=\int_0^1\left|x^2+x-2\right|dx+\int_1^2\left|x^2+x-2\right|dx=$$
$$=\int_0^1\left(-x^2-x+2\right)dx+\int_1^2\left(x^2+x-2\right)dx=$$
$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^2=3.$$

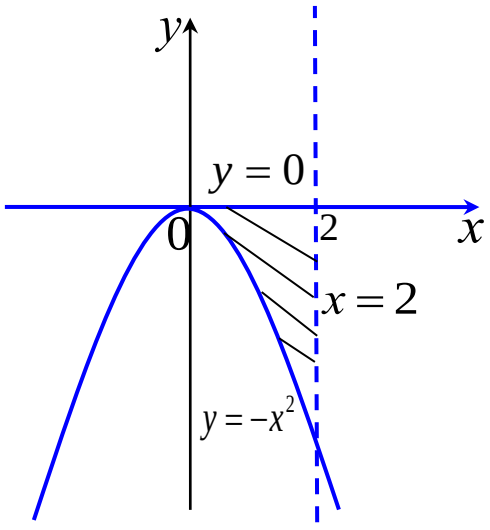
15.3-мысал: $y=-x^2$ және $y=0,\ x=2$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $f(x)=-x^2,\ g(x)=0.$

$y=-x^2$ және $y=0,\ x=2$ функцияларының графиктерін тұрғызамыз (15.5-сурет).

$y=-x^2$ және $y=0$ сызықтарының қиылысу нүктесінің абциссасын табамыз:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow -x^2=0\Rightarrow x=0.$$



15.5-сурет

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_0^2 |-x^2-0|dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

2) Егер 1) бөліміндегі қисық сызықты трапецияны шектейтін $y=f(x)$ қисығы $[\alpha,\beta]$ сегментінде теріс емес $y(t)$ функциясы мен бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $x(\alpha)=a, x(\beta)=b$ теңдіктерін қанағаттандыратын $x(t)$ функциялары арқылы

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ \alpha\le t\le\beta \end{cases} \qquad (15.3)$$

параметрлік түрінде берілсе, онда бұл қисық сызықты трапецияның ауданы

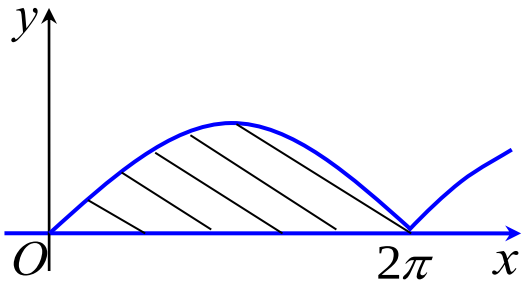
$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \qquad (15.4)$$

формуласымен есептелінеді.

15.4-мысал: OX өсімен

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

циклоидасының бір тармағымен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.



15.6-сурет

Шешімі: Циклоиданың графигін тұрғызамыз (15.6-сурет).

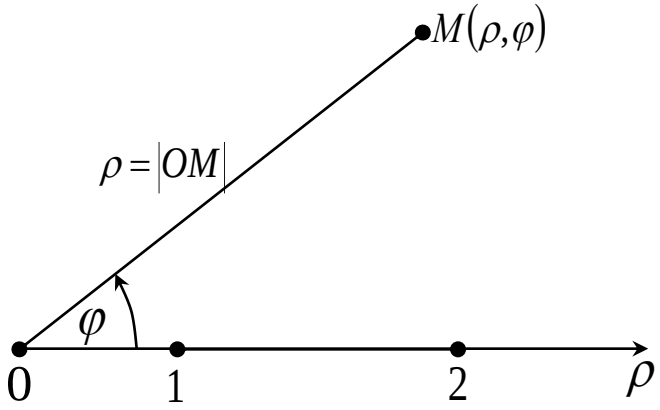
$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt=\int_0^{2\pi}2(1-\cos t)(2(t-\sin t))'dt=\int_0^{2\pi}2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=4\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)$$

$$=(4t-8\sin t+2t+\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=8\pi+4\pi=12\pi.$$

3) *Полярлық координаталар жүйесінде берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданы.*

Полярлық координаталар жүйесінде жазықтықтың кез келген M нүктесі осы нүктеден берілген $O\rho$ жарты сандық өсінің O бас нүктесіне дейінгі $\rho = |OM|$ қашықтығы мен O бас нүктесінен M нүктесі арқылы өтетін сәуленің $O\rho$ жарты өсімен жасайтын $\varphi = \left(\widehat{O\rho, OM}\right)$ бұрышы арқылы беріледі (15.7-сурет).



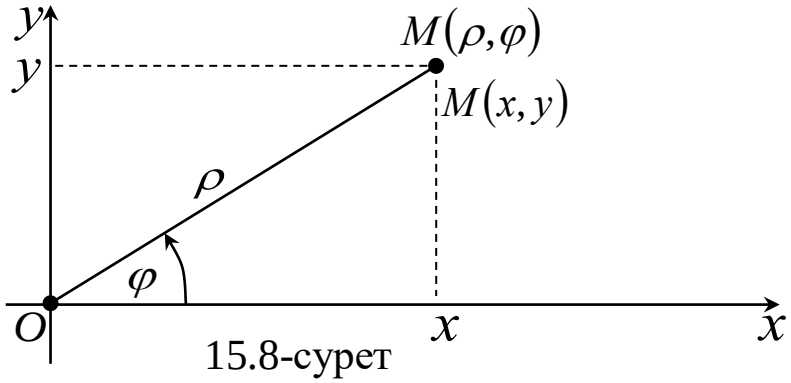
15.7-сурет

$M(\rho, \varphi)$: $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (немесе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$);

- *бұрышын анықтаудың оң бағыты* ретінде сағат тілінің айналу бағытына қарама – қарсы бағытты аламыз.
- жарты сан өсі – *полярлық өс*, O нүктесі – *полюс* деп аталады.

Егер $O\rho$ полярлық өсін XOY декарттық координаталар жүйесінің OX жарты өсімен беттестіре орналастырсақ полярлық координаталар мен декарттық координаталар арасындағы келесі байланысты аламыз (полярлық координаталардан декарттық координаталарға көшу формуласын) аламыз (15.8-сурет):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



15.8-сурет

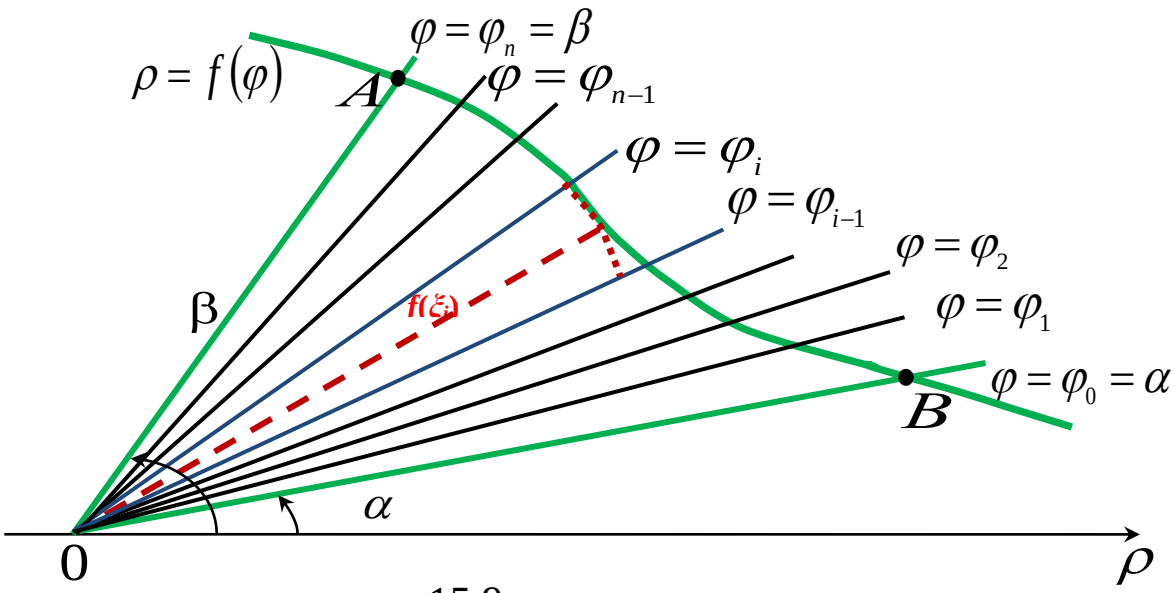
$[\alpha, \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз $\rho = f(\varphi)$ функциясының графигімен және $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ сәулелерімен шектелген *OAB қисық сызықты үшбұрышының* S *ауданын* табайық (15.9-сурет).

$[\alpha, \beta]$ кесіндісін (бұрыш аралығын)

$\varphi = \varphi_0 = \alpha, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \ldots, \varphi = \varphi_{n-1}, \varphi = \varphi_n = \beta$

сәулелерімен n бөлікке бөлеміз.

$[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ аралығынан бір ξ_i нүктесін алып $\varphi = \varphi_{i-1}, \varphi = \varphi_i$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ сәулелерімен шектелген әрбір бөлік қисық сызықты үшбұрыштың ауданын радиусы $f(\xi_i)$, бұрышы



15.9-сурет

$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ болатын дөңгелек сектордың ауданымен ауыстырсақ S ауданының

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$

жуықтауын аламыз.

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$ қосындысы $\rho = \frac{1}{2} f^2(\varphi)$ функциясының $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ бөліктеуі мен оған сәйкес $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ таңдамасы бойынша құрылған $[\alpha, \beta]$ кесіндісіндегі интегралдық қосындысы болғандықтан, оның $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta\varphi_i$ диаметрі нөлге ұмтылғандағы шегі $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi)d\varphi$ интегралын береді:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\Delta\varphi\,. \qquad (15.5)$$

Сонымен қатар, λ нөлге ұмтылғанда $\Delta\varphi_i$ де нөлге ұмтылып, дөңгелек сектор сәйкес қисық сызықты бөлік үшбұрышпен беттесуге ұмтылады да,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$

қосындысының шегі берілген қисық сызықты үшбұрыштың S ауданына ұмтылады:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = S. \qquad (15.6)$$

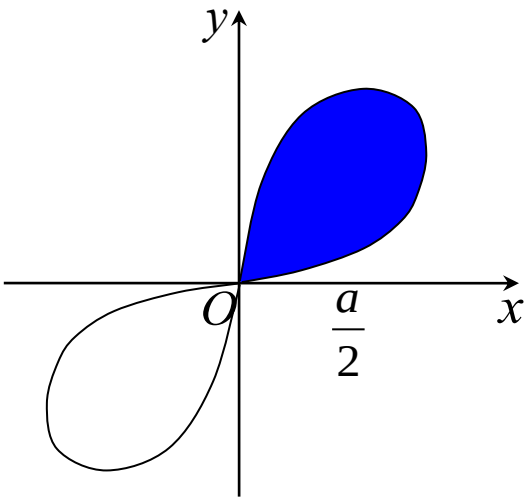
(15.5), (15.6) теңдіктерінен

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)d\varphi \qquad (15.7)$$

қисық сызықты үшбұрыштың ауданын табу формуласын аламыз.

15.5-мысал: $\rho = a\sin 2\varphi,\ a>0$ (екі жапырақты) функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі: $\rho = a\sin 2\varphi,\ a>0$ функциясының графигін тұрғызамыз (15.10-сурет). Фигураның S ауданы $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ секторындағы фигураның S_1 ауданын 2 еселегенге тең болады: $S=2S_1$.



15.10-сурет

$$S=2S_1=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin 2\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos 4\varphi)}{2}d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi d(4\varphi)\right)=\frac{a^2}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

15.2 Қисықтың доғасының ұзындығын табу

Бізге $x \in [a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының графигінің $\overset{\smile}{AB}$ доғасының L ұзындығын табу керек (15.11-сурет).

Алдымен доғаның ұзындығы ұғымын берейік. $\overset{\smile}{AB}$ доғасын, доғаның

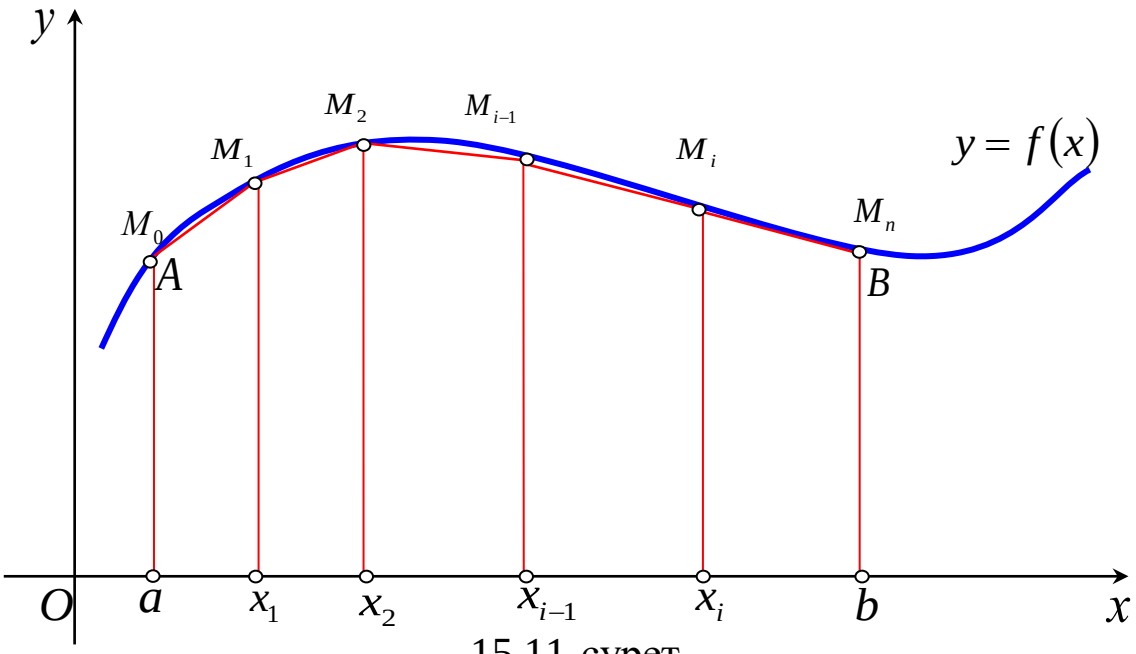
$$A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n) = B$$

нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз де, $M_0M_1M_2\ldots M_n$ сынық сызығын тұрғызамыз.

$\Delta(M_{i-1}, M_i)$ сынық сызықтың $M_{i-1}M_i$ кесіндісінің ұзындығы $(i = 1,2,\ldots,n)$, ал γ сынық сызықтың кесінділерінің ұзындықтарының ең үлкені болсын:

$$\Delta(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2};$$

$$\gamma = \max_{i=\overline{1,n}} \{\Delta(M_{i-1}, M_i)\}.$$



15.11-сурет

Сынық сызықтың ұзындығы

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

қосындысына тең болады.

Анықтама 1: $\overset{\smile}{AB}$ *доғасының ұзындығы* деп $\lim\limits_{\gamma \to 0} L_n$ шегін айтамыз:

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}\ .$$

Ұзындығы бар (көрсетілген шек бар) *қисық түзетілетін қисық* деп аталады.

Соңғы теңдіктен, Лагранж теоремасы бойынша $[x_{i-1}, x_i]$ аралығында $y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ теңдігі орынды болатын бір ξ_i нүктесі табылатындықтан,

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Бұдан, $\gamma \to 0 \Leftrightarrow \lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i \to 0$ және $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$ қосындысының $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі интегралдық қосындысы екенін ескерсек,

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

теңдігі шығады. Сонымен, $\overset{\cup}{AB}$ *доғасының ұзындығы:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx\ . \qquad (15.8)$$

15.6-мысал: $y = \frac{3}{4}x - 1$ қисығының $A(0;-1), B(4;2)$ нүктелерімен шектелген доғаның ұзындығын табыңыз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша $f(x) = \frac{3}{4}x - 1,\ a = 0,\ b = 4.$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{16+9}{16}}dx = \frac{5}{4}\int_0^4 dx = \frac{5}{4}x\Big|_0^4 = 5.$$

Салдар 2. $\overset{\cup}{AB}$ доғасы $x(t), y(t)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

параметрлік түрде берілсе, онда $\overset{\smile}{AB}$ доғасы түзетілетін болады да оның ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (15.8)$$

формуласымен табылады.

15.7-мысал: $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі: доғаның ұзындығы:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

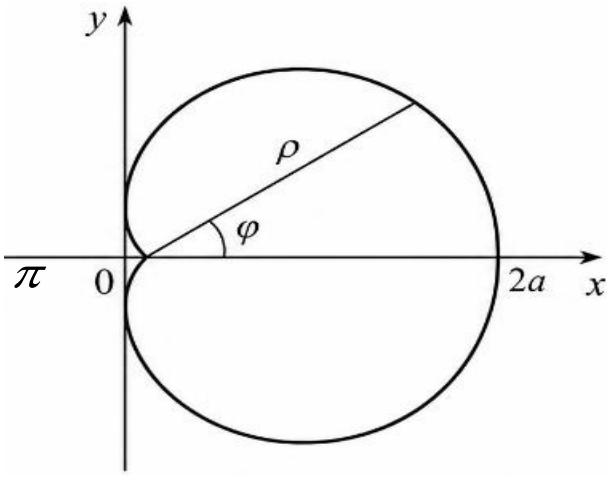
Салдар 3. Егер $\overset{\smile}{AB}$ доғасы полярлық координаталарда үзіліссіз дифференциалданатын $\rho=f(\varphi),\ \varphi\in[\alpha,\beta]$ функциясы арқылы берілсе, онда ол түзетілетін қисық болады да, оның ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (15.9)$$

формуласымен табылады.

15.8-мысал: $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі: Косинус функциясы периодты $\Rightarrow -\pi<\varphi\le\pi$ (15.10-сурет). Доғаның ұзындығының ρ функциясының жұптығын ескере отырып есептейміз:



15.10-сурет

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=$$

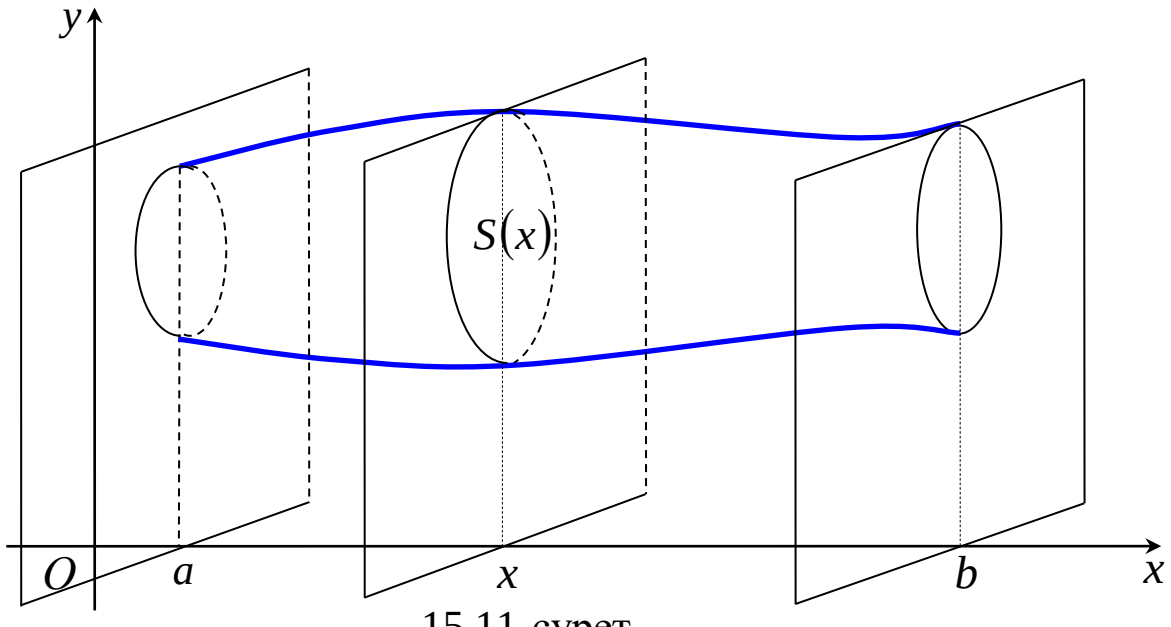
$$=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}d\varphi=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=2\cdot4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=8a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=8a.$$

15.3 Дененің көлемін есептеу

а) *Көлденең қимасының ауданы берілген дененің көлемін есептеу*
Бізге екі бүйірінен $x=a$ және $x=b$ жазықтықтарымен шектелген және OX өсіне x нүктесі арқылы перпендикуляр өтетін жазықтықпен қиылған қимасының ауданы тек x айнымалысынан тәуелді $S(x)$ функциясы ретінде берілген дененің V көлемін табу керек (15.11-сурет).



15.11-сурет

Егер берілген денені $x=x_0=a,\ x=x_1, x=x_2,\ldots,x=x_n=b$ жазықтықтарымен $(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ n бөлікке бөліп дененің

$x = x_{i-1}$ және $x = x_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ жазықтықтарымен шектелген әрбір бөлігінің көлемін табан ауданы $S(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, биіктігі $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ болатын цилиндрдің $S(\xi_i)\Delta x_i$ көлемімен жуықтасақ, онда берілген дененің көлемінің

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i \qquad (15.10)$$

жуықтауын аламыз.

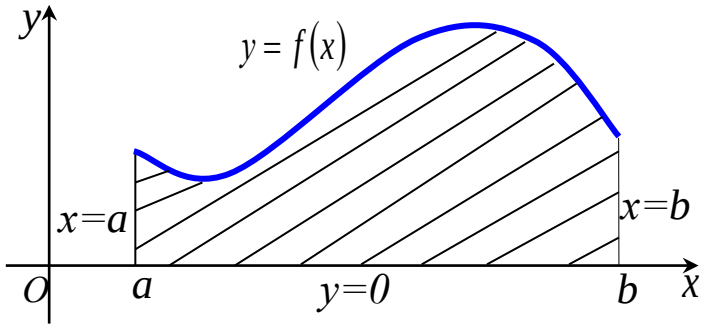
Бұл жуықтаудың $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ шамасын нөлге ұмтылдырғандағы шегі, біріншіден, *дененің* V *көлеміне*, екіншіден, $\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$ қосындысы $S(x)$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі интегралдық қосындысы болғандықтан, $\int_a^b S(x)dx$ интегралына тең болады:

$$\lim_{\lambda \to 0} V_n = V \text{ және } \lim_{\lambda \to 0} V_n = \int_a^b S(x)dx \Rightarrow$$

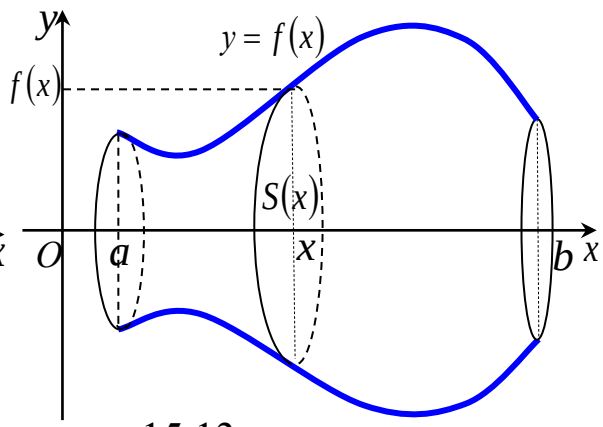
$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (15.11)$$

ә) *Айналу денесінің көлемін есептеу*

1) $y = f(x)$ үзіліссіз функциясының графигімен, OX өсімен ($y = 0$ түзуімен) және $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ түзулерімен шектелген жазық фигураны (15.12-сурет) OX өсінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің V көлемін табу керек (15.13-сурет).



15.12-сурет



15.13-сурет

Айналу денесінің x нүктесіндегі көлденең қимасы радиусы $f(x)$(немесе - $f(x)$) санына тең болатын дөңгелек болатындықтан, қиманың ауданы

$$S(x)=\pi R^2=\pi f^2(x)$$

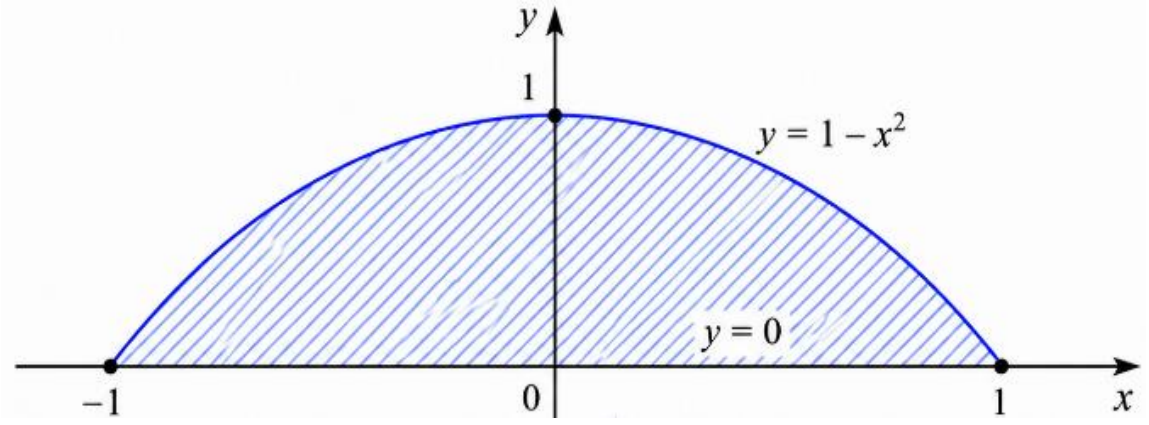
болады.

Олай болса, (15.11) формуласы бойынша OX өсін айналу денесінің көлемі

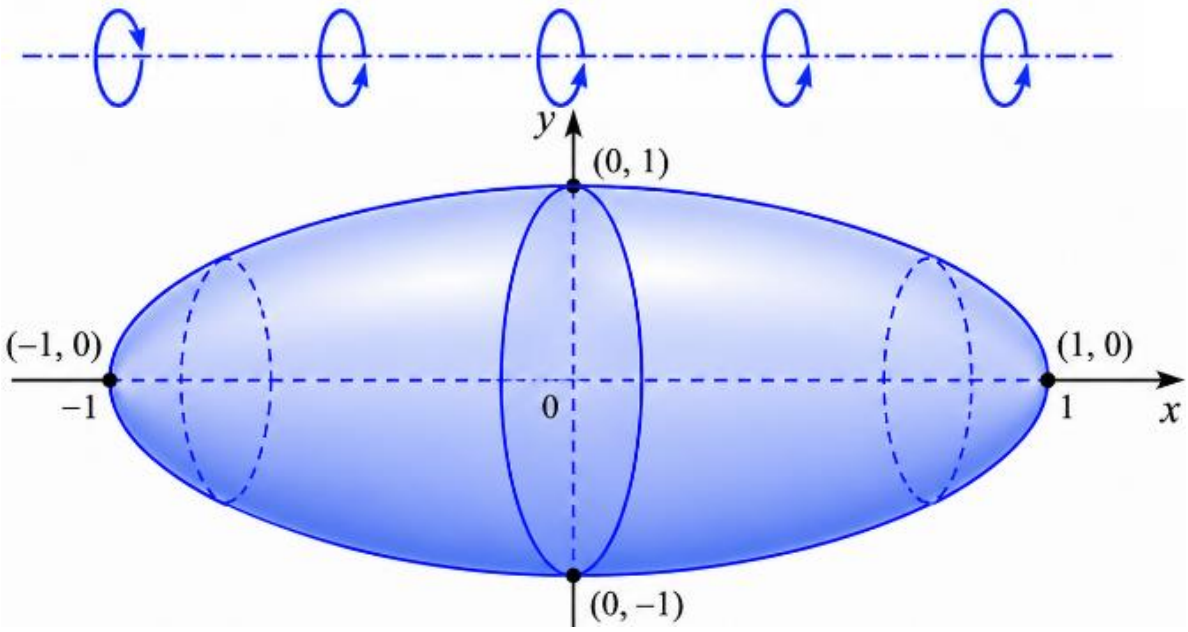
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (15.12)$$

формуласымен табылады.

15.9-мысал: $y=1-x^2$ және $y=0$ сызықтарымен шектелген фигураны (15.14 – сурет) OX өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің (15.15 – сурет) көлемін табыңыз.



15.14 – сурет



15.15 – сурет

Шешімі: (15.12) формуласын қолданамыз. Біздің мысалда $f(x)=1-x^2$, ал a,b ізделінді белгісіздер.

a,b сандары $y=1-x^2$ қисығы мен $y=0$ түзуінің (Ox өсінің) қиылысу нүктелерінің абсциссалары болғандықтан, олар $1-x^2=0$ теңдеуінің шешімдері болады. Демек $a=x_1=-1, b=x_2=1$.

(15.12) формуласы бойынша

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\pi\left(1-(-1)-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi.$$

кубтық бірлік болады.

Егер дене $x=\varphi(y)$ үзіліссіз функциясының графигімен, OY өсімен және $y=c,\ y=d$ түзулерімен шектелген жазық фигураны (15.16 - сурет) OY *өсінен* айналдыру арқылы алынса (15.17 - сурет), онда айналу денесінің көлемі

$$V=\pi\int_{c}^{d}\varphi^2(y)dy \qquad (15.13)$$

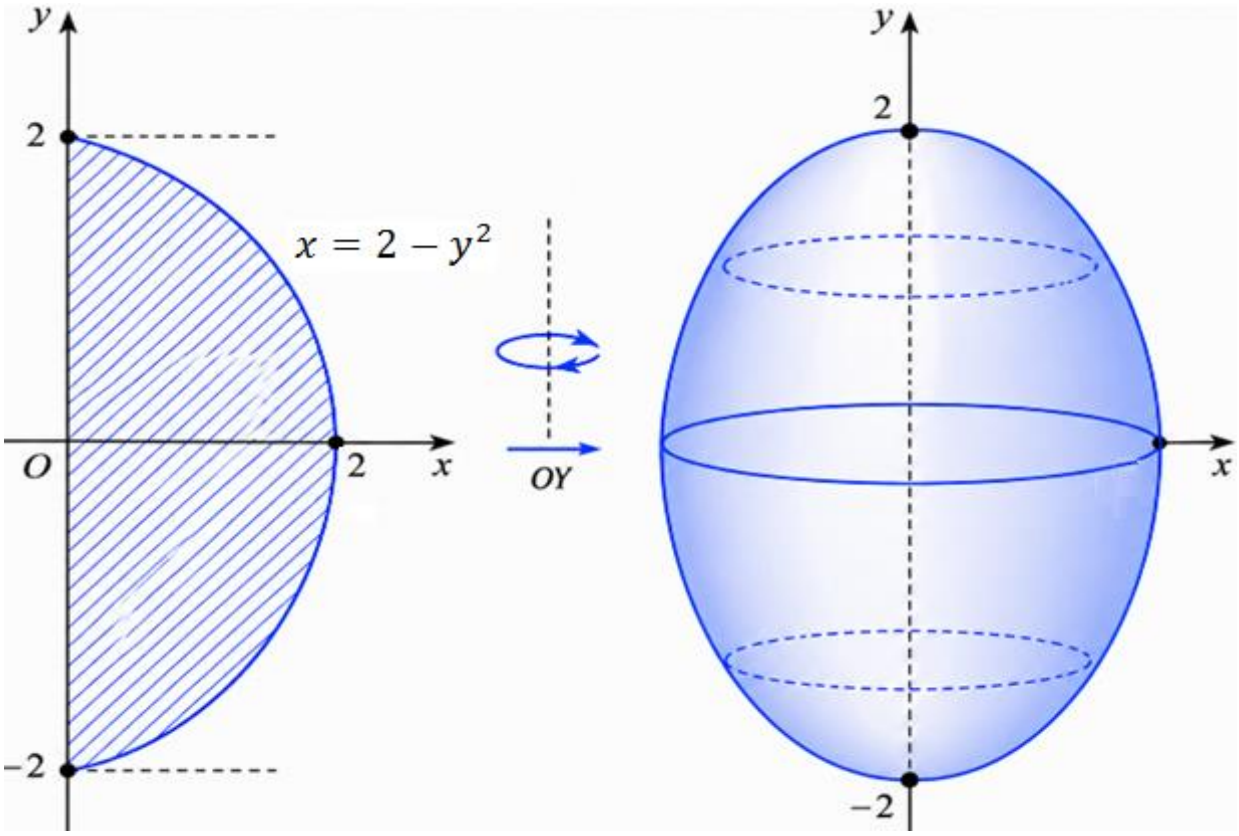
формуласымен табылады.

15.10-мысал: $x=2-y^2$ және $x=0$ сызықтарымен шектелген фигураны OY өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің (15.18-сурет) көлемін табыңыз.

Шешімі: $x=\sqrt{y+2}, x=0, y=2$ сызықтарын тұрғызамыз (15.18-сурет). Есептің шарты бойынша $\varphi(y)=\sqrt{y+2}$, ал c,d ізделіну қажет.

$0=\sqrt{y+2}\Rightarrow 0=y+2, y=-2$

$c=-2, d=2.$



15.18-сурет

Шешімі: (15.13) формуласын қолданамыз.
Есептің шарты бойынша $\varphi(y) = 2 - y^2$ ал c, d ізделінді белгісіздер. c, d сандары $x = 2 - y^2$ параболасымен $x = 0$ түзуінің (Oy өсінің) қиылысу нүктелерінің ординаталары болғандықтан, олар $2 - y^2 = 0$ теңдеуінің шешімдері болады. Демек $c = y = -2,\ d = y_2 = 2.$

(15.13) формуласы бойынша

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (2 - y^2)^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (4 - 4y^2 + y^4) dy = \frac{112}{15}\pi$$

куб бірлік болады.

15.4 Интегралдың экономикада қолданылуы

1) Өндіріс өнімділігі

$z = f(t)$ функциясы өндіріс өнімділігінің уақытқа байланысты өзгеруін сипаттасын. $[0;T]$ уақыт аралығында өндірілген өнім мөлшерін анықтайық. Өнім мөлшерін u әрпімен белгілейік.
$[0;T]$ уақыт аралығын

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$$

нүктелерімен

$$[t_0; t_1], [t_1; t_2], ..., [t_{n-1}; t_n]$$

бөлік кесінділерге (бөлік уақыт аралықтарына) бөлеміз.

$[t_{i-1}; t_i]$ бөлік кесіндісінің ұзындығын табамыз: $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,...,n.$

Әрбір $[t_{i-1}; t_i]$ бөлік кесіндісінен бір ξ_i нүктесін аламыз: $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Δu_i - $[t_{i-1}; t_i]$ уақыт аралығында өндірілген өнім болсын.

Онда $[0; T]$ *аралығында өндірілген өнім*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i$$

қосындысына тең болады.

Егер өндірістің $f(t)$ өнімділігі $[t_{i-1}; t_i]$ уақыт аралығында тұрақты және шамамен оның $f(\xi_i)$ мәніне тең деп ұйғарсақ, онда осы уақыт аралығындағы Δu_i өндіріс өнімі шамамен

$$f(\xi_i)\Delta t_i$$

көбейтіндісіне тең болады:

$$\Delta u_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Нәтижесінде $u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i$ өнімінің

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

жуықтауын аламыз.

Егер $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i$ нөлге ұмтылса әрбір бөлік кесіндінің ұзындығы нөлге ұмтылады да, бұл жуықтаудың қатесі

$$u - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

нөлге ұмтылады, яғни

$$u = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (15.14)$$

болады.

Екінші жағынан, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$ қосындысы $f(t)$ функциясының $[0;T]$ аралығындығы интегралдық қосындысы болатындықтан,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)dt \qquad (15.15)$$

болады. (15.14), (15.15) теңдіктерінен

$$u = \int_0^T f(t)dt \qquad (15.16)$$

теңдігін аламыз.

Сонымен, егер $f(t)$ – t уақыттағы еңбек өнімділігі болса, онда $\int_0^T f(t)dt$ интегралы $[0;T]$ *уақыт аралығындағы өндірілген өнімнің көлемін* көрсетеді.

2) Орташа уақытты есептеу

Өндірісті игеру дәрежесіне байланысты өнімді өндіруге кететін t уақытының өзгеруін сипаттайтын функция $t=t(x)$ белгілі болсын, мұндағы x – партиядағы өнімнің реттік нөмірі. Онда x_1 *– ден* x_2 *- шіге дейінгі өнімдерді игеру кезеңінде бір өнімді жасауға жұмсалған орташа уақыт* орта мән туралы теорема (анықталған интегралдың 4 - қасиеті) бойынша есептеледі:

$$t_{op.} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \qquad (15.17)$$

Өнімді өндіруге кететін уақыттың өзгеру функциясы $t=t(x)$ көбінесе келесідей болады: $t = ax^{-b}$, мұндағы a – бірінші өнімге кететін уақыт, b – өндіріс үрдісінің/ процесінің көрсеткіші.

15.11-мысал: Егер уақыт шығындарының өзгеру функциясы $t(x)=600x^{-\frac{1}{2}}$ (сағ) болса, 100-шіден 225-шіге дейінгі өнімдерді игеру кезеңінде бір өнімді 0-ден өгеруге жұмсалған орташа уақыт қандай болады?

Шешімі:

$$t_{ор.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

формуласын қоданамыз. Есептің шарты бойынша

$$x_1 = 100,\ x_2 = 225,\ t(x) = 600x^{-\frac{1}{2}},$$

$$t_{ор.} = \frac{1}{225-100} \int_{100}^{225} 600x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{600}{125} 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{225} = 48 \text{ (сағ.)}.$$

15.5 Теориялық сұрақтар

1. Қисық сызықты трапеция дегеніміз не? Оның ауданы қандай формуламен есептеледі?
2. Егер фигура жоғарыдан $y=f(x)$, төменнен $y=g(x)$ функцияларымен шектелсе, оның ауданы қалай табылады?
3. Ауданды есептеу кезінде интеграл астындағы функцияның модулі неліктен қолданылады?
4. Екі қисықтың қиылысу нүктелерін табу неліктен маңызды?
5. $y=x^2$ және $y=0$, $x=1$, $x=2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын есептеу формуласын жазыңыз.
6. Қисық параметрлік түрде $x=x(t)$, $y=y(t)$ берілсе, оның астындағы аудан қалай есептеледі?
7. Параметрлік түрде берілген қисық үшін $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$ формуласы қай шарттарда орынды?
8. Циклоиданың бір тармағымен және OX өсімен шектелген фигураның ауданын есептеу формуласын жазыңыз.
9. Полярлық координаталар жүйесінде берілген қисықтың ауданы қандай формуламен есептеледі?
10. Полярлық координаталардан декарттық координаталарға көшу формулаларын жазыңыз.
11. $\rho=f(\varphi)$ қисығымен және $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ сәулелерімен шектелген фигураның ауданын қорытып шығарыңыз.
12. Қисықтың доғасының ұзындығы ұғымына анықтама беріңіз.
13. Доғаның ұзындығының анықталған интеграл арқылы өрнектелуін қорытып шығарыңыз.

14. $y=f(x)$ функциясының графигінің доғасының ұзындығы қандай формуламен есептеледі?
15. Параметрлік түрде берілген қисықтың доғасының ұзындығы қандай формуламен есептеледі?
16. Полярлық координаталарда берілген қисықтың доғасының ұзындығы қандай формуламен есептеледі?
17. $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$ формуласындағы интеграл астындағы өрнектің геометриялық мағынасы неде?
18. Көлденең қимасының ауданы $S(x)$ белгілі дененің көлемі қандай формуламен есептеледі?
19. $V=\int_a^b S(x)dx$ формуласын қорытып шығарыңыз.
20. Қисық сызықты трапецияны OX өсінен айналдырғанда пайда болатын дененің көлемі қандай формуламен есептеледі?
21. OY өсінен айналу денесінің көлемі қандай формуламен есептеледі?
22. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ формуласындағы интеграл астындағы $f^2(x)$ неліктен пайда болады?
23. $y=1-x^2$ параболасы мен OX өсімен шектелген фигураны айналдырғанда пайда болатын дененің көлемі қалай есептеледі?
24. Өндіріс өнімділігінің функциясы $z=f(t)$ берілсе, $[0;T]$ уақыт аралығындағы өндірілген өнім көлемі қалай табылады?
25. $u=\int_0^T f(t)dt$ формуласының экономикалық мағынасы неде?
26. Орташа уақытты есептеу формуласын жазып, түсіндіріңіз.
27. $t=ax^{-b}$ түріндегі уақыт шығындары функциясындағы a және b параметрлерінің экономикалық мағынасы неде?
28. Анықталған интегралдың геометриялық қолданбаларын атаңыз.
29. Анықталған интегралдың физикалық қолданбаларын атаңыз.
30. Анықталған интегралдың экономикада қолданылуына мысалдар келтіріңіз.
31. Параметрлік және полярлық координаталардағы формулалар декарттық координаталардағы формулалардан қалай ерекшеленеді?

16 БІЛІМ АЛУШЫЛАРДЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСТАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ОРЫНДАУ ҮЛГІЛЕРІ

ТАПСЫРМА №1

1.1 «Сызықтық алгебра элементтері» тақырыбына арналған типтік есептер

1. Үшінші ретті анықтауыш берілген.

а) a_{i2}, a_{3j} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын табу;

ә) анықтауышты i - ші жол элементтеріне жіктеу;

б) анықтауышты j - ші баған элементтеріне жіктеу;

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептеу керек.

1	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**2**	$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$
3	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$	**4**	$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$
5	$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$	**6**	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$
7	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=1$	**8**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=2$
9	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$	**10**	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$
11	$\begin{vmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$	**12**	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$

13	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$	**14**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$
15	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$	**16**	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$
17	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**18**	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$
19	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**20**	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=1$
21	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=2$	**22**	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$
23	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**24**	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$
25	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$	**26**	$\begin{vmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$
27	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$	**28**	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$
29	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & 5 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=1$	**30**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=2$
31	$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$	**32**	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$
33	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$	**34**	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$

35	$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$	**36**	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$
37	$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**38**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$
39	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$	**40**	$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$

2. Берілген төртінші ретті анықтауышты анықтауыштың ретін төмендету тәсілімен (кез келген жолда немесе бағанда нөлдер алу әдісімен) есептеңіз.

1	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	**3**	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	**4**	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	**7**	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	**10**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	**11**	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	**12**	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$	**14**	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	**15**	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**16**	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	**18**	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	**19**	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	**20**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

21	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	**22**	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	**23**	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	**24**	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**26**	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	**27**	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$	**28**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$
29	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**30**	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	**31**	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	**32**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$
33	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	**34**	$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	**35**	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	**36**	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
37	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	**38**	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	**39**	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	**40**	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3. A және B матрицалары берілген.

Табу керек: ***а)*** $A \cdot B$; ***ә)*** $B \cdot A$; ***б)*** A^{-1}; ***в)*** $A \cdot A^{-1}$.

1	$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	**2**	$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	**4**	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	**6**	$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	**8**	$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9	$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$	**10**	$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&7&1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$	**12**	$A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\1&6&0\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}-3&4&-3\\1&2&3\\5&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2&0\\5&4&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**14**	$A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&3&2\\3&7&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-3&1&7\\1&3&2\end{pmatrix}$	**16**	$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-2&4\\3&-5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&5&1\\5&3&-1\\1&2&3\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&6&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}$	**18**	$A=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\4&-9&3\\2&-7&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&-4\\5&-6&4\\7&-4&1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}-3&4&2\\1&-5&3\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&4\\1&3&2\\-4&1&2\end{pmatrix}$	**20**	$A=\begin{pmatrix}4&1&-4\\2&-4&6\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&5&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}6&2&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&4&3\\1&6&0\end{pmatrix}$	**22**	$A=\begin{pmatrix}4&-2&5\\3&0&6\\3&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-5&-1\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}5&-8&-4\\1&0&-5\\4&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&5&5\\1&2&1\\0&-1&-3\end{pmatrix}$	**24**	$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-4&1\\4&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-4\\2&5&-3\\4&-3&2\end{pmatrix}$	**26**	$A=\begin{pmatrix}-2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}8&5&-1\\3&5&3\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-7&-6\\1&-8&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$	**28**	$A=\begin{pmatrix}4&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&3\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}-3&4&0\\4&5&1\\-2&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\0&2&6\\2&-1&1\end{pmatrix}$	**30**	$A=\begin{pmatrix}3&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&4\\3&0&1\\4&0&-4\end{pmatrix}$
31	$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&-7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}$	**32**	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&5&2\\1&9&2\\5&5&2\end{pmatrix}$

33	$A=\begin{pmatrix}3&1&-4\\2&-4&6\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&6&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**34**	$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}$
35	$A=\begin{pmatrix}3&-7&2\\1&-8&3\\4&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&7&-3\\2&4&1\\2&1&-5\end{pmatrix}$	**36**	$A=\begin{pmatrix}5&4&2\\-1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$
37	$A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\5&5&2\end{pmatrix}$	**38**	$A=\begin{pmatrix}-4&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\-1&7&2\end{pmatrix}$
39	$A=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\5&-5&-1\\10&3&25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$	**40**	$A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\-1&9&2\end{pmatrix}$

4. Матрицаның рангісін табыңыз.

1	$\begin{pmatrix}-1&2&3&-4\\-2&4&-2&5\\4&-5&-4&3\end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix}1&-2&-3&7\\5&2&3&4\\-1&3&0&2\end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix}3&-2&1&3\\4&-5&0&2\\1&3&-1&2\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\2&1&2&2\\2&2&0&1\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}3&-2&1&-4\\2&-3&-2&1\\4&-1&4&9\end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\2&-2&18&-6\\-1&-5&1&3\end{pmatrix}$	**7**	$\begin{pmatrix}2&1&3&5\\3&2&5&8\\4&6&7&5\end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix}-1&0&2&3\\-2&1&3&-4\\5&-2&-8&5\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}3&2&1&4\\1&3&1&5\\4&7&5&12\end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix}5&-2&7&0\\5&-3&2&1\\1&-1&-3&4\end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix}-1&4&-6&1\\8&-2&-7&-2\\-7&4&2&0\end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix}4&-2&-3&7\\6&2&3&1\\-1&3&0&2\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}2&1&3&1\\3&2&1&2\\1&2&3&-4\end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix}2&1&3&5\\3&-1&2&3\\-1&1&2&1\end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix}3&4&2&8\\2&-4&-3&-1\\1&5&1&0\end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix}-1&3&-6&1\\8&-2&-5&-2\\-7&4&2&0\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}8&7&4&5\\3&2&1&4\\2&3&2&-3\end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix}2&1&-1&-2\\5&3&0&15\\-1&0&3&-5\end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix}1&-3&4&5\\1&2&-1&5\\2&-2&5&7\end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix}1&5&3&4\\2&-1&0&1\\2&0&1&3\end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix}1&4&-3&6\\2&5&1&-2\\1&7&-10&20\end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}$	**23**	$\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\2&1&3&1\\-1&-5&6&-7\end{pmatrix}$	**24**	$\begin{pmatrix}2&1&5&1\\3&2&1&2\\1&2&3&-4\end{pmatrix}$

25	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$	**26**	$\begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	**27**	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 4 & -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	**28**	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	**30**	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**31**	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**32**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$	**34**	$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	**35**	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	**36**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	**38**	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	**39**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	**40**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ -1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Берілген теңдеулер жүйесін ***а)*** Крамер әдісімен; ***ә)*** Матрицалық әдіспен; ***б)*** Гаусс әдісімен шешіңіз.

1	$\begin{cases} x+4y-z=22 \\ 4x-y+5z=39 \\ 3y-7z=12 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} 2x+3y+4z=45 \\ 7x-5y=10 \\ 4x+11z=75 \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} 5x+2y-4z=12 \\ x+3z=19 \\ 2x-3y+z=-5 \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} 3x+2y+2z=9 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+5y+z=4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-y-z=3 \\ 3x+4y-2z=15 \\ 3x+2y+4z=17 \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} 3x+4y-2z=22 \\ 2x-y-z=5 \\ 3x-2y+4z=28 \end{cases}$	**7**	$\begin{cases} x+4y-z=22 \\ 4x-y+5z=29 \\ 3y-7z=12 \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} 5x+8y+z=36 \\ 2x-3y+2z=10 \\ x+2y+3z=22 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ x+y+2z=-6 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x-4y-2z=-2 \\ 3x+y+z=21 \\ 3x-5y-6z=1 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 8x+3y-6z=20 \\ -4x-y+3z=-10 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x+2y+4z=20 \\ 5x+y+2z=37 \\ 3x-y+z=17 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=16 \\ 4x+y+4z=14 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 3x-2y-5z=-24 \\ 2x+3y-4z=6 \\ x-2y+3z=12 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 4x-3y+2z=-10 \\ 2x+5y-3z=17 \\ 5x+6y-2z=22 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 2x+3y+4z=45 \\ 7x-5y=10 \\ 4x+11z=35 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x+y-z=7 \\ 8x+3y-6z=35 \\ 4x+y-3z=15 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 3x+y+z=15 \\ x-4y-2z=-24 \\ -3x+5y+6z=44 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 4x-3y+2z=6 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 5x+6y-2z=8 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 3x-y-z=7 \\ x+2y-4z=-8 \\ 5x+y+2z=17 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 3x+4y-2z=22 \\ 2x-y-z=5 \\ 3x-2y+4z=18 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 7x+4y+z=49 \\ 3x+2y+3z=29 \\ 2x-3y+z=12 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+3y-4z=5 \\ 3x-2y-5z=-12 \end{cases}$

25	$\begin{cases}7x+4y+z=39\\3x+2y+3z=29\\2x-3y+z=12\end{cases}$	**26**	$\begin{cases}3x-2y-5z=-12\\2x+3y-4z=6\\x-2y+3z=12\end{cases}$	**27**	$\begin{cases}-3x+5y+z=9\\3x+y+z=3\\x-4y-2z=-15\end{cases}$	**28**	$\begin{cases}2x-y+2z=-3\\x+y+2z=6\\4x+y+4z=9\end{cases}$
29	$\begin{cases}-3x+5y+z=9\\3x+y+z=15\\x-4y-2z=-15\end{cases}$	**30**	$\begin{cases}x-2y+3z=13\\2x+3y-4z=-7\\3x-2y-5z=-13\end{cases}$	**31**	$\begin{cases}4x-3y+2z=12\\2x-5y-3z=-24\\5x+6y-2z=36\end{cases}$	**32**	$\begin{cases}5x+2y-4z=12\\x+3z=9\\2x-3y+z=-5\end{cases}$
33	$\begin{cases}7x-5y=4\\4x+11z=30\\2x+3y+4z=18\end{cases}$	**34**	$\begin{cases}x+2y+z=15\\3x-5y+3z=-10\\2x+7y-z=42\end{cases}$	**35**	$\begin{cases}3x-y-z=7\\x+2y-4z=-8\\5x+y+2z=47\end{cases}$	**36**	$\begin{cases}3x+2y+z=10\\2x+3y+z=11\\2x+y+3z=13\end{cases}$
37	$\begin{cases}3x+4y+2z=25\\2x-4y-3z=-1\\x+5y+z=16\end{cases}$	**38**	$\begin{cases}2x-y+2z=-3\\x+y+2z=6\\4x+y+4z=9\end{cases}$	**39**	$\begin{cases}x+y-z=5\\4x-3y+z=9\\3x+y-z=13\end{cases}$	**40**	$\begin{cases}7x-5y=-3\\4x+11z=70\\2x+3y+4z=32\end{cases}$

6. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табыңыз:

1	$\begin{cases}5x+4y-6z=0\\2x+2y-z=0\\3x+2y-5z=0\end{cases}$	**2**	$\begin{cases}x+5y+z=0\\2x-3y-7z=0\\3x+2y-6z=0\end{cases}$	**3**	$\begin{cases}5x+y-2z=0\\3x+2y-3z=0\\2x-y+z=0\end{cases}$	**4**	$\begin{cases}x-2y+z=0\\4x+3y-7z=0\\5x+y-z=0\end{cases}$
5	$\begin{cases}7x-6y-z=0\\4x-3y-5z=0\\3x-3y+4z=0\end{cases}$	**6**	$\begin{cases}x+7y-3z=0\\3x-5y+z=0\\5x+9y-5z=0\end{cases}$	**7**	$\begin{cases}4x-3y+2z=0\\2x+5y+3z=0\\6x+2y+5z=0\end{cases}$	**8**	$\begin{cases}2x-y+2z=0\\3x+2y-3z=0\\5x+y-z=0\end{cases}$
9	$\begin{cases}5x+2y-2z=0\\2x-3y+2z=0\\3x+5y-4z=0\end{cases}$	**10**	$\begin{cases}x+3y-2z=0\\2x-2y+3z=0\\5x+7y-3z=0\end{cases}$	**11**	$\begin{cases}x+7y-3z=0\\3x-5y+z=0\\5x+9y-5z=0\end{cases}$	**12**	$\begin{cases}x-5y+3z=0\\4x+3y-2z=0\\6x-7y+4z=0\end{cases}$
13	$\begin{cases}6x+5y+z=0\\2x+y-z=0\\4x+4y+3z=0\end{cases}$	**14**	$\begin{cases}6x+y+2z=0\\2x+y-z=0\\4x+4y+3z=0\end{cases}$	**15**	$\begin{cases}x-8y+7z=0\\4x-3y+3z=0\\3x+5y-4z=0\end{cases}$	**16**	$\begin{cases}x-3y-4z=0\\5x-8y-2z=0\\2x+y+10z=0\end{cases}$
17	$\begin{cases}4x+3y+4z=0\\2x+2y+z=0\\3x+2y-z=0\end{cases}$	**18**	$\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+3y+5z=0\\4x+y+6z=0\end{cases}$	**19**	$\begin{cases}7x+3y-2z=0\\2x+4y-3z=0\\3x-5y+4z=0\end{cases}$	**20**	$\begin{cases}4x-y+5z=0\\2x-3y+z=0\\2x+2y+3z=0\end{cases}$
21	$\begin{cases}2x-y+2z=0\\4x+y+5z=0\\2x+2y+3z=0\end{cases}$	**22**	$\begin{cases}x+5y+z=0\\2x-3y-7z=0\\3x+2y-6z=0\end{cases}$	**23**	$\begin{cases}x-3y+5z=0\\x+2y-3z=0\\2x-y+2z=0\end{cases}$	**24**	$\begin{cases}x+y+z=0\\2x-3y+4z=0\\4x-11y+10z=0\end{cases}$
25	$\begin{cases}5x+2y-2z=0\\2x-3y+z=0\\3x+5y-4z=0\end{cases}$	**26**	$\begin{cases}4x+y+4z=0\\3x-2y-z=0\\7x-y+3z=0\end{cases}$	**27**	$\begin{cases}x+3y+2z=0\\2x-y+3z=0\\3x-5y+4z=0\end{cases}$	**28**	$\begin{cases}x-3y+5z=0\\x+2y-3z=0\\2x-y+2z=0\end{cases}$

29	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 3x-2y+5z=0 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-7y+8z=0 \end{cases}$	**31**	$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 4x+3y-z=0 \\ 5x+y-6z=0 \end{cases}$	**32**	$\begin{cases} 4x+3y+4z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$
33	$\begin{cases} 4x-y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$	**34**	$\begin{cases} 5x-3y+4z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases}$	**35**	$\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 2x-4y+z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \end{cases}$	**36**	$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y-4z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$
37	$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 4x-7y+z=0 \end{cases}$	**38**	$\begin{cases} x+5y-4z=0 \\ 2x-4y+3z=0 \\ 4x+6y-5z=0 \end{cases}$	**39**	$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ 5x+y-4z=0 \end{cases}$	**40**	$\begin{cases} 7x+3y-z=0 \\ 2x+4y-3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \end{cases}$

1.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ анықтауышы берілген.

а) $i=1, j=2$ болғандағы a_{i2}, a_{3j} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын табу;

ә) анықтауышты i - ші жол элементтеріне жіктеу;

б) анықтауышты j - ші баған элементтеріне жіктеу;

в) анықтауышты үшбұрыш және Саррюс ережесі бойынша есептеу керек.

Шешімі:

а) a_{12} және a_{32} элементтерінің M_{12} және M_{32} минорларын есептейміз:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4, \quad M_{32}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=8$$

Енді осы элементтердің алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}(-4)=4;$$

$$A_{32}=(-1)^{1+2}M_{32}=(-1)^{3+2}8=-8.$$

ә) анықтауышты бірінші жол элементтерінің жіктелуі бойынша есептейміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot 3-4\cdot(-4)-2\cdot 18=-5;$$

б) анықтауышты екінші баған элементтерінің жіктелуі бойынша есептейміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot(-4)+(-3)\cdot(-1)-3\cdot 8=-5;$$

в) анықтауышты үшбұрыш және Саррюс ережесі бойынша есептейміз.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(-3)\cdot(-1)+4\cdot 0\cdot 2+(-2)\cdot 4\cdot 3-(-2)\cdot(-3)\cdot 2-5\cdot 0\cdot 3-4\cdot 4\cdot(-1)=15-24-12+16=-5$$

және

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & 4\\ 4 & -3\\ 2 & 3\end{matrix}=5\cdot(-3)\cdot(-1)+4\cdot 0\cdot 2+(-2)\cdot 4\cdot 3-(-2)\cdot(-3)\cdot 2-5\cdot 0\cdot 3-4\cdot 4\cdot(-1)=15-24-12+16=-5.$$

2. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ берілген төртінші ретті анықтауышты анықтауыштың ретін төмендету тәсілімен (кез келген жолда немесе бағанда нөлдер алу әдісімен) есептеңіз.

Шешімі: Келесі түрлендірулерді жасаймыз:

1 - ші жол элементтерін 2 - ге көбейтіп, 2 - ші жолдың сәйкес элементтеріне;

1 - ші жол элементтерін (-3) - ке көбейтіп, 3 - ші жолдың сәйкес элементтеріне;

1 - ші жол элементтерін (-4) - ке көбейтіп, 4 - ші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 2 & 11\\ 0 & -2 & -10 & -10\\ 0 & -5 & -14 & -17\end{vmatrix}$$

анықтауышын аламыз. Бұл анықтауышты 1 - ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = 1\cdot A_{11} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -2 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 5 & 5 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}$$

2 - ші жол элементтерін 5 - ке көбейтіп, 3 - ші жолдың сәйкес элементтеріне;

2 - ші жол элементтерін (-5) - ке көбейтіп, 1 - ші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -23 & -14 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 11 & 8 \end{vmatrix}$$

анықтауышын аламыз.

Бұл анықтауышты 1 - ші баған элементтеріне жіктеп есептейміз:

$$\Delta = -2\cdot 1\cdot A_{21} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -23 & -14 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-23\cdot 8 + 14\cdot 11) = 2\cdot(-184+154) = -60.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

Табу керек: ***а)*** $A\cdot B$; ***ә)*** $B\cdot A$; ***б)*** A^{-1}; ***в)*** $A\cdot A^{-1}$.

Шешімі:

а) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-5)+(-1)\cdot 2 & 2\cdot(-2)+1\cdot 4+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-1)(-5)+1\cdot 2 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+0\cdot(-5)+1\cdot 2 & 1\cdot(-2)+0\cdot 4+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

ә) $B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)2+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)(-1)+(-2)\cdot 0 & 2(-1)+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 1 \\ 3\cdot 2+(-5)2+4\cdot 1 & 3\cdot 1+(-5)\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot(-1)+(-5)\cdot 1+4\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

б) A матрицасына A^{-1} кері матрицасын

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

формуласымен анықтаймыз. A^{-1} - тек қана $\Delta(A)\neq 0$ болған жағдайда ғана табылады.

$\Delta(A)$ анықтауышын есептейміз:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2+1+0-1-2-0=-4\neq 0,$$

яғни кері матрицасы бар болады.

Енді барлық алгебралық толықтауыштарды есептейміз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1; \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-1=0;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(2-1)=-1; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(0-1)=1; \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2-2=-4.$$

A^{-1} кері матрицасын жоғарыда көрсетілген формула бойынша табайық:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -4\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

в) $$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -4\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\cdot 2+(-1)\cdot 2+0\cdot 1 & -1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0 & -1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0\cdot 1\\ -1\cdot 2+3\cdot 2+(-4)\cdot 1 & -1\cdot 1+3\cdot(-1)+(-4)\cdot 0 & -1\cdot(-1)+3\cdot 1+(-4)\cdot 1\\ 1\cdot 2+1\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)+(-4)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1+(-4)\cdot 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & 5 & -8 & -5\\ 1 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табу керек.

Шешімі: 1 - ші жол элементтерін (-2) - ге, (-1) - ге көбейтіп, сәйкес 2 - ші жолдың, 3 - ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 1 -

ші бағанның элементтерін (-3) - ке, 1 - ге, 2 - ге көбейтіп, сәйкес екінші, үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз:

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & 5 & -8 & -5\\ 1 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Енді 2 - ші жол элементтерін 3 - ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 2 - ші бағанның элементтерін (-6)-ға, 1 - ге көбейтіп, сәйкес үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 3 - ші бағанның элементтерінің барлығы 0 - ге тең болғандықтан, оны алып тастаймыз:

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=3.$$

матрица рангісі 3 - ке тең, себебі

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

5. $\begin{cases}x+2y-3z=-20\\ -4x+5y+6z=11\\ 7x+8y+9z=28\end{cases}$ теңдеулер жүйесін

а) Крамер әдісімен; ***ә)*** Матрицалық әдіспен; ***б)*** Гаусс әдісімен шешіңіз

Шешімі:

а) *Крамер әдісі*

Бұл әдіс бойынша төрт анықтауышты есептейміз. Жүйенің анықтауышы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot 5\cdot 9+2\cdot 6\cdot 7+(-3)\cdot(-4)\cdot 8-(-3)\cdot 5\cdot 7-2\cdot(-4)\cdot 9-1\cdot 8\cdot 6=$$

$$=45+84+96+105+72-48=402-48=354,$$

Δ анықтауышының бірінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-20 & 2 & -3\\ 11 & 5 & 6\\ 28 & 8 & 9\end{vmatrix}=(-20)\cdot 5\cdot 9+2\cdot 6\cdot 28+11\cdot 8\cdot(-3)-(-3)\cdot 5\cdot 28-2\cdot 11\cdot 9-(-20)\cdot 6\cdot 8=$$

$$=-900+336-264+420-198+960=1716-1362=354,$$

Δ анықтауышының екінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -20 & -3 \\ -4 & 11 & 6 \\ 7 & 28 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 11\cdot 9 + (-20)\cdot 6\cdot 7 + (-3)\cdot(-4)\cdot 28 - (-3)\cdot 11\cdot 7 - (-20)\cdot(-4)\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 28 =$$

$$= 99 - 840 + 336 + 231 - 720 - 168 = 666 - 1728 = -1062,$$

Δ анықтауышының үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -20 \\ -4 & 5 & 11 \\ 7 & 8 & 28 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 28 + 2\cdot 11\cdot 7 + (-20)\cdot(-4)\cdot 8 - (-20)\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot(-4)\cdot 28 - 1\cdot 11\cdot 8 =$$

$$= 140 + 154 + 640 + 700 + 224 - 88 = 1858 - 88 = 1770,$$

Сонымен,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{354}{354} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1062}{354} = -3; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1770}{354} = 5.$$

Жауабы: $x = 1,\ y = -3,\ z = 5.$

ә) *Матрицалық әдіс.*

$AX = B$ теңдеудің шешімі $X = A^{-1}\cdot B$, мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -20 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ және } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 354 \neq 0.$$

A матрицасының алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(18 + 24) = -42;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(-36 - 42) = 78; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 21 = 30;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 35 = -67; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}-3 & -42 & 27\\ 78 & 30 & 6\\ -67 & 6 & 13\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}-3 & -42 & 27\\ 78 & 30 & 6\\ -67 & 6 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-20\\ 11\\ 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot(-20)+(-42)\cdot 11+27\cdot 28\\ 78\cdot(-20)+30\cdot 11+6\cdot 28\\ -67\cdot(-20)+6\cdot 11+13\cdot 28\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}60-462+756\\ -1560+330+168\\ 1340+66+364\end{pmatrix}=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}354\\ -1062\\ 1770\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 5\end{pmatrix}.$$

Жауабы: $x=1,\ y=-3,\ z=5.$

б) *Гаусс әдісі.*

Жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырамыз:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -20\\ -4 & 5 & 6 & 11\\ 7 & 8 & 9 & 28\end{array}\right).$$

Бірінші жолдың элементтерін 4 - ке көбейтіп, екінші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ және бірінші жолдың элементтерін (-7) - ге көбейтіп үшінші жолға қоссақ төмендегі матрицаны аламыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -20\\ 0 & 13 & -6 & -69\\ 0 & -6 & 30 & 168\end{array}\right),$$

екінші жолдың элементтерін 6 - ға, ал үшінші жолдың элементтерін 13 - ке көбейтіп қоссақ онда

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -20\\ 0 & 13 & -6 & -69\\ 0 & 0 & 354 & 1770\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & -20\\ 0 & 13 & -6 & -69\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right),$$

Енді үшінші жолды 6 - ға көбейтіп екінші жолға, және үшінші жолды 3 - ке көбейтіп бірінші жолға қоссақ онда

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -5\\ 0 & 13 & 0 & -39\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)$$

түріндегі матрицаны аламыз. Екінші жолды 13 - ке қысқартамыз

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Екінші жолды (-2)-ге көбейтіп бірінші жолға қоссақ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

матрицасын аламыз. Олай болса жүйенің шешімі $x=1,\ y=-3,\ z=5$.

6. $\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ 4x+5y-6z=0 \\ 2x+11y-2z=0 \end{cases}$ біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табыңыз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышын есептесек

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix}=10-36+88-20+24-66=0,$$

онда жүйенің шексіз көп шешімдері болады. $r(A)=2,\ n=3$ болғандықтан, кез келген екі теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ 4x+5y-6z=0. \end{cases}$$

Жүйесінің шешімін табу үшін z белгісізін белгілі деп есептеп, x, y белгісіздерін табамыз. Ол үшін жүйені

$$\begin{cases} -x+3y=-2z \\ 4x+5y=6z \end{cases}$$

түрінде жазып,

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, y=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

Крамер формуласы көмегімен

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-5-12=-17,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ 6z & 5 \end{vmatrix}=-10z-18z=-28z,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & -2z \\ 4 & 6z \end{vmatrix}=-6z+8z=2z.$$

анықтауыштарын есептейміз.
Бұдан

$$x=\frac{28}{17}z,\quad y=-\frac{2}{17}z$$

Егер $z=17\cdot t$ деп алсақ, мұнда $t-$ кез келген тұрақты сан, онда берілген жүйенің шешімі

$$x=28\cdot t,\quad y=-2\cdot t,\quad z=17\cdot t$$

болады.

ТАПСЫРМА №2

2.1 «Вектолрлық алгебра элементтері мен жазықтықтағы аналитикалық геометрия» тақырыбына арналған типтік есептер

1. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, $M_4(x_4;y_4;z_4)$ нүктелерінің координаталары берілген.

а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ - векторларының ұзындықтарын;

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын;

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторының арасындағы бұрышты;

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

ғ) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын;

д) $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

е) $M_1M_2M_3M_4$ - тетраэдрінің көлемін табыңыз.

1	$M_1(5;2;4)$, $M_2(-3;5;7)$, $M_3(1;-5;8)$, $M_4(9;-3;5)$
2	$M_1(3;4;2)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(4;-3;6)$, $M_4(6;-5;3)$
3	$M_1(7;-1;-2)$, $M_2(1;7;8)$, $M_3(3;7;9)$, $M_4(-3;-5;2)$
4	$M_1(5;2;7)$, $M_2(7;-6;-9)$, $M_3(-7;-6;3)$, $M_4(1;-5;2)$
5	$M_1(-5;-3;-4)$, $M_2(1;4;6)$, $M_3(3;2;-2)$, $M_4(8;-2;4)$
6	$M_1(-5;4;-3)$, $M_2(7;3;-1)$, $M_3(6;-2;0)$, $M_4(3;2;-7)$
7	$M_1(-4;6;3)$, $M_2(3;-5;1)$, $M_3(2;6;-4)$, $M_4(2;4;-5)$
8	$M_1(7;5;8)$, $M_2(-4;-5;3)$, $M_3(2;-3;5)$, $M_4(5;1;-4)$
9	$M_1(-2;-5;-1)$, $M_2(-6;-7;9)$, $M_3(4;-5;1)$, $M_4(2;1;4)$
10	$M_1(1;3;1)$, $M_2(-1;4;6)$, $M_3(-2;-3;4)$, $M_4(3;4;-4)$

11	$M_1(3;-5;-2),\ M_2(-4;2;3),\ M_3(1;5;7),\ M_4(-2;-4;5)$
12	$M_1(7;4;9),\ M_2(1;-2;-3),\ M_3(-5;-3;0),\ M_4(1;-3;4)$
13	$M_1(-4;-7;-3),\ M_2(-4;-5;7),\ M_3(2;-3;3),\ M_4(3;2;1)$
14	$M_1(-4;-5;-3),\ M_2(3;1;2),\ M_3(5;7;-6),\ M_4(6;-1;5)$
15	$M_1(3;-2;6),\ M_2(-6;-2;3),\ M_3(1;1;-4),\ M_4(4;6;-7)$
16	$M_1(-6;4;5),\ M_2(5;-7;3),\ M_3(4;2;-8),\ M_4(2;8;-3)$
17	$M_1(5;3;6),\ M_2(-3;-4;4),\ M_3(5;-6;8),\ M_4(4;0;-3)$
18	$M_1(5;-4;4),\ M_2(-4;-6;5),\ M_3(3;2;-7),\ M_4(6;2;-9)$
19	$M_1(-7;-6;-5),\ M_2(5;1;-3),\ M_3(8;-4;0),\ M_4(3;4;-7)$
20	$M_1(2;4;1),\ M_2(-3;-2;4),\ M_3(3;5;-2),\ M_4(4;2;-3)$
21	$M_1(3;4;5),\ M_2(1;2;1),\ M_3(-2;-3;6),\ M_4(3;-6;-3)$
22	$M_1(-7;-5;6),\ M_2(-2;5;-3),\ M_3(3;-2;4),\ M_4(1;2;2)$
23	$M_1(-6;-3;-5),\ M_2(5;1;7),\ M_3(3;5;-1),\ M_4(4;-2;9)$
24	$M_1(7;4;2),\ M_2(-5;3;-9),\ M_3(1;-5;3),\ M_4(7;-9;1)$
25	$M_1(-8;2;7),\ M_2(3;-5;9),\ M_3(2;4;-6),\ M_4(4;6;-5)$
26	$M_1(4;3;1),\ M_2(2;7;5),\ M_3(-4;-2;4),\ M_4(2;-3;-5)$
27	$M_1(6;5;3),\ M_2(-6;2;8),\ M_3(-3;-2;6),\ M_4(7;8;-2)$
28	$M_1(2;2;3),\ M_2(-5;-4;2),\ M_3(3;7;-4),\ M_4(6;4;-7)$
29	$M_1(-4;5;-3),\ M_2(2;5;7),\ M_3(6;2;-1),\ M_4(6;-4;1)$
30	$M_1(3;3;1),\ M_2(2;6;5),\ M_3(-4;-2;4),\ M_4(2;-3;-5)$
31	$M_1(-5;-7;4),\ M_2(-4;1;-1),\ M_3(5;-4;2),\ M_4(3;4;4)$
32	$M_1(-9;-7;4),\ M_2(-4;3;-1),\ M_3(5;-4;2),\ M_4(3;4;4)$
33	$M_1(3;5;3),\ M_2(-3;2;8),\ M_3(-3;-2;6),\ M_4(7;8;-2)$
34	$M_1(5;4;2),\ M_2(-5;3;-9),\ M_3(1;-5;3),\ M_4(6;-9;1)$
35	$M_1(-2;2;7),\ M_2(3;-5;9),\ M_3(2;4;-6),\ M_4(2;6;-5)$
36	$M_1(4;2;3),\ M_2(-5;-4;2),\ M_3(5;7;-4),\ M_4(6;4;-7)$
37	$M_1(-4;2;-3),\ M_2(2;5;7),\ M_3(6;3;-1),\ M_4(6;-4;1)$
38	$M_1(6;2;7),\ M_2(7;-6;-8),\ M_3(-7;-6;3),\ M_4(1;-2;2)$
39	$M_1(-3;-5;-1),\ M_2(-6;-7;9),\ M_3(5;-5;1),\ M_4(2;1;4)$
40	$M_1(-2;-3;-5),\ M_2(5;1;4),\ M_3(3;5;-1),\ M_4(3;-2;9)$

2. $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ үш векторы базис құрайтындығын көрсетіп, $\bar{d}$ векторын осы базистегі координаттарын табыңыз.

1	$\vec{a}=\{5;4;1\},\ \vec{b}=\{-3;5;2\},\ \vec{c}=\{2;-1;3\},\ \vec{d}=\{7;23;4\}$

2	$\vec{a}=\{2;-1;4\},\ \vec{b}=\{-3;0;-2\},\ \vec{c}=\{4;5;-3\},\ \vec{d}=\{0;11;-14\}$
3	$\vec{a}=\{-1;1;2\},\ \vec{b}=\{2;-3;-5\},\ \vec{c}=\{-6;3;-1\},\ \vec{d}=\{28;-19;-7\}$
4	$\vec{a}=\{1;3;4\},\ \vec{b}=\{-2;5;0\},\ c=\{3;-2;-4\},\ \vec{d}=\{13;-5;-4\}$
5	$\vec{a}=\{1;-1;1\},\ \vec{b}=\{-5;-3;1\},\ \vec{c}=\{2;-1;0\},\ \vec{d}=\{-15;-10;5\}$
6	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-7;-2;-4\},\ \vec{c}=\{-4;0;3\},\ \vec{d}=\{16;6;15\}$
7	$\vec{a}=\{-3;0;1\},\ \vec{b}=\{2;7;-3\},\ \vec{c}=\{-4;3;5\},\ \vec{d}=\{-16;33;13\}$
8	$\vec{a}=\{5;1;2\},\ \vec{b}=\{-2;1;-3\},\ c=\{4;-3;5\},\ \vec{d}=\{15;-15;24\}$
9	$\vec{a}=\{0;2;-3\},\ \vec{b}=\{4;-3;-2\},\ \vec{c}=\{-5;-4;0\},\ \vec{d}=\{-19;-5;-4\}$
10	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;3;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-3\},\ \vec{d}=\{-3;2;-3\}$
11	$\vec{a}=\{5;3;1\},\ \vec{b}=\{-1;2;-3\},\ \vec{c}=\{3;-4;2\},\ \vec{d}=\{-9;34;-20\}$
12	$\vec{a}=\{3;1;-3\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{1;-2;5\},\ \vec{d}=\{1;12;-20\}$
13	$\vec{a}=\{6;1;-3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{-1;-3;4\},\ \vec{d}=\{15;6;-17\}$
14	$\vec{a}=\{4;2;3\},\ \vec{b}=\{-3;1;-8\},\ \vec{c}=\{2;-4;5\},\ \vec{d}=\{-12;14;-31\}$
15	$\vec{a}=\{-2;1;3\},\ \vec{b}=\{3;-6;2\},\ \vec{c}=\{-5;-3;-1\},\ \vec{d}=\{31;-6;22\}$
16	$\vec{a}=\{1;3;6\},\ \vec{b}=\{-3;4;-5\},\ \vec{c}=\{1;-7;2\},\ \vec{d}=\{-2;17;5\}$
17	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{5;1;-2\},\ \vec{c}=\{-3;4;5\},\ \vec{d}=\{26;11;1\}$
18	$\vec{a}=\{3;5;4\},\ \vec{b}=\{-2;7;-5\},\ \vec{c}=\{6;-2;1\},\ \vec{d}=\{6;-9;22\}$
19	$\vec{a}=\{5;3;2\},\ \vec{b}=\{2;-5;1\},\ \vec{c}=\{-7;4;-3\},\ \vec{d}=\{36;1;15\}$
20	$\vec{a}=\{11;1;2\},\ \vec{b}=\{-3;3;4\},\ \vec{c}=\{-4;-2;7\},\ \vec{d}=\{-5;11;-15\}$
21	$\vec{a}=\{9;5;3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{4;-7;4\},\ \vec{d}=\{-10;-13;8\}$
22	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{3;-5;6\},\ \vec{c}=\{-4;3;-4\},\ \vec{d}=\{-1;18;-16\}$
23	$\vec{a}=\{1;2;3\},\ \vec{b}=\{-5;3;-1\},\ \vec{c}=\{-6;4;5\},\ \vec{d}=\{-4;11;20\}$
24	$\vec{a}=\{-2;5;1\},\ \vec{b}=\{3;2;-7\},\ \vec{c}=\{4;-3;2\},\ \vec{d}=\{-4;22;-13\}$
25	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-4;3;-1\},\ \vec{c}=\{2;3;4\},\ \vec{d}=\{14;14;20\}$
26	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-1\},\ \vec{d}=\{-5;11;2\}$
27	$\vec{a}=\{4;5;1\},\ \vec{b}=\{1;3;1\},\ \vec{c}=\{-3;-6;7\},\ \vec{d}=\{19;33;0\}$
28	$\vec{a}=\{1;-3;1\},\ \vec{b}=\{-2;-4;3\},\ \vec{c}=\{0;-2;3\},\ \vec{d}=\{-8;-10;13\}$
29	$\vec{a}=\{5;7;-2\},\ \vec{b}=\{-3;1;3\},\ \vec{c}=\{1;-4;6\},\ \vec{d}=\{14;9;-1\}$
30	$\vec{a}=\{-1;4;3\},\ \vec{b}=\{3;2;-4\},\ \vec{c}=\{-2;-7;1\},\ \vec{d}=\{6;20;-3\}$
31	$\vec{a}=\{9;5;3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{4;-7;4\},\ \vec{d}=\{-10;-12;8\}$
32	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{3;-5;6\},\ \vec{c}=\{-4;3;-4\},\ \vec{d}=\{-1;17;-16\}$

33	$\vec{a}=\{1;2;3\},\ \vec{b}=\{-5;3;-1\},\ \vec{c}=\{-6;4;5\},\ \vec{d}=\{-4;11;19\}$
34	$\vec{a}=\{-2;5;1\},\ \vec{b}=\{3;2;-7\},\ \vec{c}=\{4;-3;2\},\ \vec{d}=\{-4;21;-13\}$
35	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-4;3;-1\},\ \vec{c}=\{2;3;4\},\ \vec{d}=\{14;14;20\}$
36	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-1\},\ \vec{d}=\{-5;10;2\}$
37	$\vec{a}=\{4;5;1\},\ \vec{b}=\{1;3;1\},\ \vec{c}=\{-3;-6;7\},\ \vec{d}=\{19;5;0\}$
38	$\vec{a}=\{1;-3;1\},\ \vec{b}=\{-2;-4;3\},\ \vec{c}=\{0;-2;3\},\ \vec{d}=\{-8;-10;14\}$
39	$\vec{a}=\{5;7;-2\},\ \vec{b}=\{-3;1;3\},\ \vec{c}=\{1;-4;6\},\ \vec{d}=\{10;9;-1\}$
40	$\vec{a}=\{-1;4;3\},\ \vec{b}=\{3;2;-4\},\ \vec{c}=\{-2;-7;1\},\ \vec{d}=\{6;15;-3\}$

3. $M_1M_2M_3$ үшбұрышының $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ M_3(x_3;y_3)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) M_1M_2 қабырғасының теңдеуін;

ә) M_1M_2 және M_1M_3 қабырғаларының арасындағы бұрышын;

б) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына параллель болатын түзудің теңдеуін;

в) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына перпендикуляр болатын түзудің (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің) теңдеуін;

г) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің ұзындығын (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына дейінгі ара қашықтықтын);

ғ) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың теңдеуін;

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығын;

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрыштың ауданын табыңыз.

1	$M_1(2;5),\ M_2(-3;1),\ M_3(0;4)$	**2**	$M_1(0;2),\ M_2(-6;-4),\ M_3(3;2)$
3	$M_1(4;-4),\ M_2(5;2),\ M_3(-1;8)$	**4**	$M_1(2;6),\ M_2(-3;1),\ M_3(0;4)$
5	$M_1(6;-9),\ M_2(10;-1),\ M_3(-4;1)$	**6**	$M_1(-2;4),\ M_2(3;1),\ M_3(10;7)$
7	$M_1(-7;2),\ M_2(-7;-4),\ M_3(5;5)$	**8**	$M_1(1;-2),\ M_2(7;1),\ M_3(3;7)$
9	$M_1(4;1),\ M_2(-3;-1),\ M_3(7;-3)$	**10**	$M_1(4;-4),\ M_2(8;2),\ M_3(3;8)$
11	$M_1(-1;-4),\ M_2(9;6),\ M_3(-5;4)$	**12**	$M_1(-5;2),\ M_2(0;-4),\ M_3(5;7)$
13	$M_1(7;-2),\ M_2(-3;-8),\ M_3(4;6)$	**14**	$M_1(7;0),\ M_2(1;4),\ M_3(-8;-4)$
15	$M_1(-5;1),\ M_2(8;-2),\ M_3(1;4)$	**16**	$M_1(-3;-2),\ M_2(14;4),\ M_3(6;8)$

17	$M_1(1;0),\ M_2(-1;4),\ M_3(9;5)$	**18**	$M_1(-2;-3),\ M_2(1;6),\ M_3(6;1)$
19	$M_1(4;-4),\ M_2(6;2),\ M_3(-1;8)$	**20**	$M_1(-3;-3),\ M_2(5;-7),\ M_3(7;7)$
21	$M_1(-4;2),\ M_2(6;-4),\ M_3(4;10)$	**22**	$M_1(1;-3),\ M_2(0;7),\ M_3(-2;4)$
23	$M_1(1;7),\ M_2(-3;-1),\ M_3(11;-3)$	**24**	$M_1(-4;2),\ M_2(7;-6),\ M_3(2;6)$
25	$M_1(-4;2),\ M_2(-6;6),\ M_3(6;2)$	**26**	$M_1(10;-2),\ M_2(4;-5),\ M_3(-3;1)$
27	$M_1(-2;-6),\ M_2(-3;5),\ M_3(4;0)$	**28**	$M_1(0;2),\ M_2(-7;-4),\ M_3(3;2)$
29	$M_1(3;--1),\ M_2(11;3),\ M_3(-6;2)$	**30**	$M_1(1;-6),\ M_2(3;4),\ M_3(-3;3)$
31	$M_1(-3;-1),\ M_2(-4;-5),\ M_3(8;1)$	**32**	$M_1(-3;8),\ M_2(-6;2),\ M_3(0;-5)$
33	$M_1(6;-8),\ M_2(10;-1),\ M_3(-4;1)$	**34**	$M_1(-4;2),\ M_2(6;-4),\ M_3(4;9)$
35	$M_1(-8;2),\ M_2(-8;-4),\ M_3(5;5)$	**36**	$M_1(11;-2),\ M_2(4;-5),\ M_3(-3;1)$
37	$M_1(-2;-5),\ M_2(-3;5),\ M_3(4;0)$	**38**	$M_1(4;-3),\ M_2(7;3),\ M_3(1;10)$
39	$M_1(1;-3),\ M_2(0;8),\ M_3(-2;4)$	**40**	$M_1(-4;2),\ M_2(8;-6),\ M_3(2;6)$

4. Екінші ретті қисықтарының сызбасын көрсетіңіз.

№	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
1	$a=3,\ b=2,\ R=6$	$a=8,\ b=5$	$a=6,\ b=2$	$p=-5$
2	$a=-2,\ b=-4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=8,\ b=6$	$p=-7$
3	$a=3,\ b=2,\ R=3$	$a=3,\ b=5$	$a=5,\ b=7$	$p=-2$
4	$a=-5,\ b=1,\ R=1$	$a=3,\ b=4$	$a=9,\ b=3$	$p=7$
5	$a=6,\ b=-5,\ R=4$	$a=2,\ b=6$	$a=3,\ b=2$	$p=-8$
6	$a=-4,\ b=-2,\ R=7$	$a=6,\ b=8$	$a=7,\ b=5$	$p=4{,}5$
7	$a=-4,\ b=-2,\ R=7$	$a=6,\ b=8$	$a=7,\ b=5$	$p=3{,}5$
8	$a=5,\ b=-1,\ R=2$	$a=8,\ b=3$	$a=7,\ b=3$	$p=-4$
9	$a=-5,\ b=-6,\ R=4$	$a=5,\ b=2$	$a=6,\ b=8$	$p=4$
10	$a=1,\ b=-5,\ R=1$	$a=6,\ b=4$	$a=5,\ b=2$	$p=0{,}5$
11	$a=6,\ b=-5,\ R=4$	$a=2,\ b=6$	$a=3,\ b=2$	$p=-7$
12	$a=-5,\ b=1,\ R=1$	$a=3,\ b=4$	$a=9,\ b=3$	$p=3$
13	$a=3,\ b=-1,\ R=5$	$a=8,\ b=4$	$a=3,\ b=6$	$p=-4$
14	$a=2,\ b=3,\ R=6$	$a=3,\ b=7$	$a=2,\ b=5$	$p=5{,}5$
15	$a=4,\ b=-2,\ R=7$	$a=7,\ b=6$	$a=5,\ b=3$	$p=3$
16	$a=-4,\ b=4,\ R=3$	$a=6,\ b=3$	$a=4,\ b=6$	$p=-1$
17	$a=5,\ b=-3,\ R=2$	$a=2,\ b=7$	$a=4,\ b=5$	$p=5$
18	$a=-1,\ b=-1,\ R=4$	$a=5,\ b=6$	$a=3,\ b=4$	$p=-5{,}5$

19	$a=3,\ b=-4,\ R=5$	$a=5,\ b=4$	$a=8,\ b=5$	$p=8$
20	$a=-4,\ b=3,\ R=5$	$a=4,\ b=5$	$a=5,\ b=8$	$p=6$
21	$a=-3,\ b=-3,\ R=2$	$a=7,\ b=5$	$a=6,\ b=3$	$p=1{,}5$
22	$a=1,\ b=-1,\ R=1$	$a=4,\ b=2$	$a=6,\ b=5$	$p=-4{,}5$
23	$a=-2,\ b=1,\ R=6$	$a=3,\ b=2$	$a=4,\ b=2$	$p=1$
24	$a=-2,\ b=4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=6,\ b=4$	$p=5{,}5$
25	$a=4,\ b=-4,\ R=2$	$a=8,\ b=6$	$a=8,\ b=4$	$p=-3$
26	$a=-1,\ b=1,\ R=1$	$a=2,\ b=4$	$a=2,\ b=3$	$p=2$
27	$a=1,\ b=-2,\ R=6$	$a=2,\ b=3$	$a=3,\ b=5$	$p=-0{,}5$
28	$a=4,\ b=-4,\ R=2$	$a=8,\ b=6$	$a=8,\ b=4$	$p=-2$
29	$a=-1,\ b=5,\ R=2$	$a=6,\ b=7$	$a=2,\ b=4$	$p=-2{,}5$
30	$a=-1,\ b=5,\ R=2$	$a=6,\ b=7$	$a=2,\ b=4$	$p=-1{,}5$
31	$a=3,\ b=-1,\ R=5$	$a=8,\ b=4$	$a=3,\ b=6$	$p=-6$
32	$a=2,\ b=3,\ R=6$	$a=3,\ b=7$	$a=2,\ b=5$	$p=6{,}5$
33	$a=0,\ b=-1,\ R=2$	$a=4,\ b=6$	$a=5,\ b=6$	$p=7{,}5$
34	$a=2,\ b=3,\ R=3$	$a=5,\ b=3$	$a=7,\ b=5$	$p=2$
35	$a=-3,\ b=5,\ R=2$	$a=7,\ b=2$	$a=5,\ b=4$	$p=3{,}5$
36	$a=-1,\ b=2,\ R=4$	$a=6,\ b=5$	$a=4,\ b=3$	$p=2{,}5$
37	$a=1,\ b=-2,\ R=6$	$a=2,\ b=3$	$a=3,\ b=5$	$p=-1{,}5$
38	$a=-2,\ b=4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=6,\ b=4$	$p=4{,}5$
39	$a=3,\ b=3,\ R=2$	$a=5,\ b=7$	$a=9,\ b=6$	$p=-3{,}5$
40	$a=1,\ b=-1,\ R=2$	$a=4,\ b=7$	$a=5,\ b=7$	$p=8{,}5$

2.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $M_1(-1;0;1)$, $M_2(0;4;4)$, $M_3(7;6;5)$, $M_4(3;-3;4)$ нүктелерінің координаталары берілген.

а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ векторларының ұзындықтарын;

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын;

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторының арасындағы бұрышты;

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

ғ) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын;

д) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

е) $M_1M_2M_3M_4$ пирамидасының көлемін табыңыз.

Шешімі:

а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ - векторларының ұзындықтарын табамыз.

$$\bar{a}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}=\{0-(-1);4-0;4-1\}=\{1,4,3\};$$

$$\bar{b}=\overline{M_1M_3}=\{7-(-1);\quad 6-0;\quad 5-1\}=\{8,6,4\};$$

$$\bar{c}=\overline{M_1M_4}=\{3-(-1);(-3)-0;4-1\}=\{4;-3;3\};$$

$$|\bar{a}|=\sqrt{1^2+4^2+3^2}=\sqrt{26};$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{8^2+6^2+4^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29};$$

$$|\bar{c}|=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{41}.$$

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын табамыз:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{4}{\sqrt{26}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{3}{\sqrt{26}},$$

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының $\bar{a}\cdot\bar{b}$ скалярлық көбейтіндісін табамыз.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot 8+4\cdot 6+3\cdot 4=8+24+12=44.$$

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы α бұрышын анықтаймыз.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{44}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{29}}=\frac{22}{\sqrt{754}},\qquad \alpha=\arccos\frac{22}{\sqrt{754}}.$$

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының $\bar{a}\times\bar{b}$ векторлық көбейтіндісі:

$$\bar{c}=[\bar{a}\times\bar{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_в\end{vmatrix}\right\}=\left\{\begin{vmatrix}4 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 8 & 6\end{vmatrix}\right\}=\{-2;20;-26\}.$$

г) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+20^2+(-26)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1080}=3\sqrt{30}\,.$$

д) $\bar{a}=\{1,4,3\};\ \bar{b}=\{8,6,4\};\ \bar{c}=\{4;-3;3\}$ болса, $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 8 & 6 & 4\\ 4 & -3 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 6\cdot 3+4\cdot 4\cdot 4+3\cdot 8\cdot(-3)-3\cdot 6\cdot 4-4\cdot 8\cdot 3-1\cdot 4\cdot(-3)=$$

$$=18+64-72-72-96+12=-146.$$

е) $M_1M_2M_3M_4$ - пирамидасының көлемін табамыз. Ол үшін үш вектордың аралас көбейтіндіні пайдаланамыз, яғни

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|-146\right| = \frac{73}{3}.$$

2. $\bar{a}=\{2;4;-6\}$, $\bar{b}=\{1;3;5\}$, $\bar{c}=\{0;-3;7\}$ векторларының базис құрайтындығын көрсету керек және осы базисте $\bar{d}=\{3;2;52\}$ векторын жіктеп, координаталарын табу керек.

Шешімі: Егер үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең болмаса, яғни $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\neq 0$, олар базис құрайды.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 62 \neq 0,$$

сондықтан үш $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары базис құрады.

Осы базисте $\bar{d}$ векторы $\bar{d}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}$ түрінде жіктеледі. Бұл векторлық түрдегі өрнекті матрицалық түрде жазсақ:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 52 \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ онда } \begin{cases} 2\alpha+\beta = 3 \\ 4\alpha+3\beta-3\gamma = 2 \\ -6\alpha+5\beta+7\gamma = 52 \end{cases}.$$

Осы жүйенің шешімі $\alpha=-1$, $\beta=5$, $\gamma=3$. Сондықтан $\bar{d}$ векторының $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базисіндегі координаталары $\{-1;5;3\}$, яғни $\bar{d}=-\bar{a}+5\bar{b}+3\bar{c}$.

3. $M_1M_2M_3$ үшбұрышының $M_1(-3;2)$, $M_2(3;6)$, $M_3(5;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) M_1M_2 қабырғасының теңдеуін;

ә) M_1M_2 және M_1M_3 қабырғаларының арасындағы бұрышын;

б) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына параллель болатын түзудің теңдеуін;

в) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына перпендикуляр болатын түзудің (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің) теңдеуін;

г) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің ұзындығын (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына дейінгі ара қашықтықтың);

ғ) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың теңдеуін;

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығын;

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын табыңыз.

Шешімі:

а) Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінің формуласын пайдаланамыз.

$$\frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{6-2} \Rightarrow 2(x+3)=3(y-2) \Rightarrow 2x+6=3y-6$$

Бұдан M_1M_2 түзуінің жалпы теңдеуі: $2x-3y+12=0.$

M_1M_2 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=\frac{2}{3}x+4$, мұндағы $k_{12}=\frac{2}{3}.$

ә) M_1M_2 түзуінің теңдеуі белгілі. Енді M_1M_3 қабырғаларының теңдеуін табамыз.

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-2}{-4-2} \Rightarrow -3(x+3)=4(y-2) \Rightarrow -3x-9=4y-8 \Rightarrow 3x+4y+1=0$$

M_1M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$, мұндағы $k_{13}=-\frac{3}{4}.$

Енді $\angle M_2M_1M_3=\alpha$ бұрышын табу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$tg\alpha=\frac{k_{12}-k_{13}}{1+k_{12}\cdot k_{13}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{17}{6}, \quad \alpha=arctg\frac{17}{6}.$$

б) Алдымен M_2M_3 қабырғасының теңдеуін табамыз.

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-6}{-4-6} \Rightarrow -5(x-3)=y-6 \Rightarrow 5x+y-21=0.$$

M_2M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=-5x+21$, мұндағы $k_{23}=-5.$ Олай болса, M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге параллель болатын түзудің теңдеуі

$$y-y_1=-5(x-x_1) \Rightarrow y-2=-5(x+3) \Rightarrow y=-5x-13$$

болады.

в) M_2M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті $k_{23}=-5$ болса, онда M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге перпендикуляр болатын түзудің бұрыштық коэффициенті $k_1=-\dfrac{1}{k_{23}}=\dfrac{1}{5}$, онда оның теңдеуі:

$$y-y_1=\frac{1}{5}(x-x_1) \qquad y-2=\frac{1}{5}(x+3) \qquad y=\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}.$$

г) M_2M_3 түзуінің жалпы теңдеуі $5x+y-21=0$. Бұдан нүктеден түзуге дейінгі қашықтығының формуласын қолдансақ:

$$d=h_1=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{5\cdot(-3)+1\cdot 2-21}{\sqrt{25+1}}\right|=\left|\frac{-15+2-21}{\sqrt{26}}\right|=\frac{17\sqrt{26}}{13}.$$

ғ) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына жүргізілген медианаңың теңдеуін жазамыз. Ол үшін алдымен M_2M_3 қабырғасының ортасының (E нүктесінің) координатасын табамыз

$$x_E=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{3+5}{2}=4; \qquad y_E=\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{6-4}{2}=1, \qquad E=(4;1).$$

Енді медиана M_1E теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзудің формуласын пайдаланып жазамыз:

$$\frac{x-x_1}{x_E-x_1}=\frac{y-y_1}{y_E-y_1}, \qquad \frac{x+3}{4+3}=\frac{y-2}{1-2}, \quad -x-3=7y-14, \qquad x+7y-11=0.$$

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығы:

$$|M_1E|=\sqrt{(x_E-x_1)^2+(y_E-y_1)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2};$$

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы:

$$\pm S=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}3+3 & 6-2\\ 5+3 & -4-2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}6 & 4\\ 8 & -6\end{vmatrix}=-34$$

$$S=34.$$

4. Төмендегі екінші ретті қисықтардың сызбасын көрсетіңіз.

$$(x-7)^2+(y+8)^2=81, \qquad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1, \qquad \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1, \qquad y^2=10x.$$

Шешімі: $(x-7)^2+(y+8)^2=81$ центрі $C(7;-8)$ нүктесінде жататын, радиусы $R=9$ –ға тең шеңбердің теңдеуі (суретін салу керек).

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ эллипстің теңдеуі болады. Оның жарты өстері $a=10, b=8$ - ге тең болады. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6,$ олай болса, эллипстің фокустары $F_1(6;0), F_2(-6;0),$ ал эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}6-$ке тең болады (суретін салу керек).

$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ гиперболаның теңдеуі болады. Оның нақты жарты өсі $a=12$ - ге, жорамал жарты өсі $b=5$ - ке тең болады. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{144+25}=13,$ олай болса, гиперболаның фокустары $F_1(13;0), F_2(-13;0),$ ал эксцентриситеті $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}-$ге тең болады (суретін салу керек).

$y^2=10x$ параболаның теңдеуі болады. Параболаның симметрия өсі $0x,$ ал фокусы $F(2{,}5;0)$, директрисасының теңдеуі $y=2{,}5$ болады (суретін салу керек).

ТАПСЫРМА №3

3.1 «Кеңістіктегі аналитикалық геометрия және математикалық талдауға кіріспе» тақырыбына арналған типтік есептер

1. $M_1M_2M_3M_4$ үшбұрышты пирамиданың $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3), M_4(x_4;y_4;z_4)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) $M_1M_2M_3$ жазықтығының теңдеуін;

ә) M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына параллель жазықтығының теңдеуін;

б) $M_1M_2M_3$ және $M_1M_2M_4$ жазықтықтардың арасындағы бұрышын;

в) M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына дейінгі ара қашықтығын;

г) M_1M_2 қабырғасының (түзуінің) теңдеуін;

ғ) M_3 нүктесі арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін;

д) M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін;

е) M_1M_2 қабырғасының ортасы арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне перпендикуляр жазықтығының теңдеуін;

ё) M_1M_2 және M_1M_4 түзулерінің арасындағы бұрышын;

ж) M_1M_4 түзуі мен $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын;

з) $M_1M_2M_3$ үшбұрыштың ауданын;

к) $M_1M_2M_3M_4$ үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңыз.

1	$M_1(2;-2;7),\ M_2(4;3;10),\ M_3(2;3;5),\ M_4(5;3;7)$
2	$M_1(4;2;9),\ M_2(1;2;0),\ M_3(3;5;8),\ M_4(2;-3;5)$
3	$M_1(2;3;-5),\ M_2(-5;3;-7),\ M_3(1;2;7),\ M_4(4;2;0)$
4	$M_1(5;3;8),\ M_2(-2;3;5),\ M_3(4;2;10),\ M_4(1;2;8)$
5	$M_1(4;3;5),\ M_2(1;9;7),\ M_3(0;2;0),\ M_4(5;3;10)$
6	$M_1(1;-2;7),\ M_2(4;2;10),\ M_3(2;3;5),\ M_4(5;3;7)$
7	$M_1(4;2;10),\ M_2(1;2;0),\ M_3(3;5;7),\ M_4(2;-3;5)$
8	$M_1(2;3;5),\ M_2(5;3;-7),\ M_3(1;2;7),\ M_4(4;2;0)$
9	$M_1(5;3;7),\ M_2(-2;3;5),\ M_3(4;2;10),\ M_4(1;2;7)$
10	$M_1(4;3;5),\ M_2(1;9;7),\ M_3(0;2;0),\ M_4(5;3;10)$
11	$M_1(4;2;5),\ M_2(0;7;1),\ M_3(0;2;7),\ M_4(1;5;0)$
12	$M_1(4;4;10),\ M_2(7;10;2),\ M_3(2;8;4),\ M_4(9;6;9)$
13	$M_1(4;6;5),\ M_2(6;9;4),\ M_3(2;10;10),\ M_4(7;5;9)$
14	$M_1(3;5;4),\ M_2(8;7;4),\ M_3(5;10;4),\ M_4(4;7;8)$
15	$M_1(10;9;6),\ M_2(2;8;2),\ M_3(9;8;9),\ M_4(7;10;3)$
16	$M_1(3;1;4),\ M_2(-1;6;1),\ M_3(-1;1;6),\ M_4(0;4;-1)$
17	$M_1(3;-1;2),\ M_2(-1;0;1),\ M_3(1;7;3),\ M_4(8;5;8)$
18	$M_1(3;5;4),\ M_2(5;8;3),\ M_3(1;2;-2),\ M_4(-1;0;2)$
19	$M_1(2;4;3),\ M_2(1;1;5),\ M_3(4;9;3),\ M_4(3;6;7)$
20	$M_1(9;5;5),\ M_2(-3;7;1),\ M_3(5;7;8),\ M_4(6;9;2)$
21	$M_1(0;7;1),\ M_2(2;-1;5),\ M_3(1;6;3),\ M_4(3;-9;8)$
22	$M_1(5;5;4),\ M_2(1;-1;4),\ M_3(3;5;1),\ M_4(5;8;-1)$
23	$M_1(6;1;1),\ M_2(4;6;6),\ M_3(4;2;0),\ M_4(1;2;6)$
24	$M_1(7;5;3),\ M_2(9;4;4),\ M_3(4;5;7),\ M_4(7;9;6)$
25	$M_1(6;8;2),\ M_2(5;4;7),\ M_3(2;4;7),\ M_4(7;3;7)$
26	$M_1(3;2;5),\ M_2(4;0;6),\ M_3(2;6;5),\ M_4(6;4;-1)$
27	$M_1(2;1;6),\ M_2(1;4;9),\ M_3(2;-5;8),\ M_4(5;4;2)$
28	$M_1(2;1;7),\ M_2(3;3;6),\ M_3(2;-3;9),\ M_4(1;2;5)$
29	$M_1(2;-1;7),\ M_2(6;3;1),\ M_3(3;2;8),\ M_4(2;-3;7)$

30	$M_1(0;4;5),\ M_2(3;-2;1),\ M_3(4;5;6),\ M_4(3;3;2)$
31	$M_1(1;8;2),\ M_2(5;2;6),\ M_3(5;7;4),\ M_4(4;10;9)$
32	$M_1(6;6;5),\ M_2(4;9;5),\ M_3(4;6;11),\ M_4(6;9;3)$
33	$M_1(7;2;2),\ M_2(-5;7;-7),\ M_3(5;-3;1),\ M_4(2;3;7)$
34	$M_1(8;-6;4),\ M_2(10;5;-5),\ M_3(5;6;-8),\ M_4(8;10;7)$
35	$M_1(1;-1;3),\ M_2(6;5;8),\ M_3(3;5;8),\ M_4(8;4;1)$
36	$M_1(3;2;5),\ M_2(4;0;6),\ M_3(2;6;5),\ M_4(6;4;-1)$
37	$M_1(2;1;7),\ M_2(1;4;9),\ M_3(2;-5;9),\ M_4(5;4;2)$
38	$M_1(-2;1;7),\ M_2(3;3;6),\ M_3(-2;-3;9),\ M_4(1;2;5)$
39	$M_1(2;-1;6),\ M_2(6;3;1),\ M_3(3;2;8),\ M_4(2;-3;6)$
40	$M_1(0;4;6),\ M_2(3;-2;1),\ M_3(4;5;6),\ M_4(3;2;2)$

2. Төмендегі екінші ретті беттерді сызыңыз.

1	***а)*** $4x^2+y^2-16z^2-16=0$	***ә)*** $4x^2-9y^2=121$
2	***а)*** $36x^2+4y^2-9z^2+16=0$	***ә)*** $9y^2+4z^2=144$
3	***а)*** $2x^2+3y^2-12z=0$	***ә)*** $x^2-18z=0$
4	***а)*** $4x^2-y^2-25z=0$	***ә)*** $16x^2-z^2=49$
5	***а)*** $4x^2+y^2=25z^2$	***ә)*** $4x^2+25y^2=121$
6	***а)*** $4x^2+y^2-16z^2+16=0$	***ә)*** $4x^2+9y^2=144$
7	***а)*** $6x^2+5y^2-60z=0$	***ә)*** $z^2-16x=0$
8	***а)*** $2x^2-3y^2-12z=0$	***ә)*** $y^2-9z^2=144$
9	***а)*** $9x^2+16y^2=9z^2$	***ә)*** $16x^2+z^2=64$
10	***а)*** $9x^2+16y^2+9z^2-144=0$	***ә)*** $y^2-14z=0$
11	***а)*** $4x^2+y^2+16z^2-16=0$	***ә)*** $x^2-4y=0$
12	***а)*** $36x^2+4y^2-9z^2-36=0$	***ә)*** $9y^2-4z^2=144$
13	***а)*** $9x^2+36y^2-16z^2+144=0$	***ә)*** $9x^2+4y^2=36$
14	***а)*** $4x^2+5y^2-40z=0$	***ә)*** $x^2-8z=0$
15	***а)*** $3x^2-4y^2-24z=0$	***ә)*** $4x^2-25y^2=100$
16	***а)*** $3x^2+5y^2-30z=0$	***ә)*** $z^2-6y=0$
17	***а)*** $6x^2-5y^2-60z=0$	***ә)*** $9x^2-16y^2=144$
18	***а)*** $9x^2+4y^2=4z^2$	***ә)*** $y^2+9z^2=144$
19	***а)*** $9x^2+4y^2+4z^2-36=0$	***ә)*** $y^2-12x=0$

20	***a)*** $9x^2+16y^2-9z^2-144=0$	***ə)*** $16x^2-25z^2=400$
21	***a)*** $3x^2-5y^2-30z=0$	***ə)*** $25x^2-9z^2=225$
22	***a)*** $9x^2+36y^2=16z^2$	***ə)*** $9x^2+16y^2=144$
23	***a)*** $9x^2+36y^2+16z^2-144=0$	***ə)*** $z^2-2x=0$
24	***a)*** $9x^2+4y^2-4z^2-36=0$	***ə)*** $16y^2-9z^2=144$
25	***a)*** $9x^2+16y^2-9z^2+144=0$	***ə)*** $16x^2+25z^2=400$
26	***a)*** $4x^2+y^2-16z^2-16=0$	***ə)*** $4x^2-9y^2=144$
27	***a)*** $36x^2+4y^2-9z^2+36=0$	***ə)*** $9y^2+4z^2=144$
28	***a)*** $2x^2+3y^2-12z=0$	***ə)*** $x^2-18z=0$
29	***a)*** $4x^2-y^2-16z=0$	***ə)*** $16x^2-z^2=64$
30	***a)*** $4x^2+y^2=16z^2$	***ə)*** $4x^2+25y^2=100$
31	***a)*** $4x^2+y^2-16z^2+25=0$	***ə)*** $4x^2+9y^2=121$
32	***a)*** $6x^2+5y^2-60z=0$	***ə)*** $z^2-16x=0$
33	***a)*** $2x^2-3y^2-12z=0$	***ə)*** $y^2-9z^2=144$
34	***a)*** $9x^2+16y^2=9z^2$	***ə)*** $16x^2+z^2=64$
35	***a)*** $9x^2+16y^2+9z^2-144=0$	***ə)*** $y^2-14z=0$
36	***a)*** $36x^2+4y^2=9z^2$	***ə)*** $25x^2+9z^2=225$
37	***a)*** $36x^2+4y^2+9z^2-36=0$	***ə)*** $y^2-10x=0$
38	***a)*** $9x^2+36y^2-16z^2-144=0$	***ə)*** $9x^2-4y^2=36$
39	***a)*** $9x^2+4y^2-4z^2+36=0$	***ə)*** $16y^2+9z^2=144$
40	***a)*** $3x^2+4y^2-24z=0$	***ə)*** $y^2-4z=0$

3. Функцияның шектерін табыңыз.

1	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$
2	***a)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-15}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-1}$
3	***a)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$
4	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x-16}{x^3-8}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$

5	***a)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-11x+8}$
6	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$
7	***a)*** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{5x^2+3x-26}$
8	***a)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{5x^2+4x-12}$
9	***a)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x+2\right)^2}$
10	***a)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$
11	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$
12	***a)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^3+x-2}$
13	***a)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+7x+5}$
14	***a)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$
15	***a)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^3-4x}$
16	***a)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$
17	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^4-1}$
18	***a)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$
19	***a)*** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^3-3x^2+5}$

20	***a)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-4x-32}{x^2-x-12}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$
21	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$
22	***a)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{8x^3-1}{x^2-0.25}$
23	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$
24	***a)*** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$
25	***a)*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-4x}{3x^2+x-10}$
26	***a)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x-27}{x^2-6x-27}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3-x^2-x+1}$
27	***a)*** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$
28	***a)*** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$
29	***a)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$
30	***a)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$
31	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$
32	***a)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{8x^3-1}{x^2-0.25}$
33	***a)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$
34	***a)*** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$
35	***a)*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-4x}{3x^2+x-10}$

36	***а)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x-27}{x^2-6x-27}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3-x^2-x+1}$
37	***а)*** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$
38	***а)*** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$
39	***а)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$
40	***а)*** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$

4. Функцияның шектерін табыңыз.

1	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	**2**	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$
3	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$	**4**	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	**6**	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$
7	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	**8**	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$
9	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$	**10**	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{x+7}}{x^2+8x+15}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	**12**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$	**14**	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$
15	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	**16**	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$
17	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	**18**	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

19	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	**20**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	**22**	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$
23	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	**24**	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+22}-5}{\sqrt{7-x}-2}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	**26**	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
27	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$	**28**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$
29	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$	**30**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
31	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	**32**	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$
33	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	**34**	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+22}-5}{\sqrt{7-x}-2}$
35	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	**36**	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
37	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$	**38**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$
39	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$	**40**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

5. Функцияның шектерін табыңыз.

1	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x-5}{7x^3-2x^2+1}$;	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^3-5x^2+12}$;
2	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x-5}{2x^3-4x^2+5x}$;	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$;
3	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;	***ә)*** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$;

4	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$;
5	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$;
6	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$;
7	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$;
8	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$;
9	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$;
10	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+10}{7x^3+2x+1}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^2+2}$;
11	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$;
12	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$;
13	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;
14	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$;
15	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$;
16	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$;
17	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$;
18	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$;
19	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$;

20	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7};$
21	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-5}{5x^3+x+2};$
22	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+4x^2+2x^4};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-4x^3}{x+4x^2+2x^4};$
23	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{6x^3-4x+3};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-2}{6x^3+5x+3};$
24	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{1-2x+3x^4};$
25	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{-3x^2+4x+1};$
26	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-7}{3x^4+3x^3+5};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+15x-2}{4x^3-12x-11};$
27	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-3x^5}{x^5+6x+8};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^3-3x}{2x^2+2x+11};$
28	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-5}{4x^3+2x^2+1};$
29	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2-3}{2x^2+5x+7};$
30	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2-3}{2x^2+5x+7};$
31	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-5}{5x^3+x+2};$
32	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+4x^2+2x^4};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-4x^3}{x+4x^2+2x^4};$
33	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{6x^3-4x+3};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-2}{6x^3+5x+3};$
34	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{1-2x+3x^4};$
35	***a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4};$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{-3x^2+4x+1};$

36	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-7}{3x^4+3x^3+5};$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+15x-2}{4x^3-12x-11};$
37	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-3x^5}{x^5+6x+8};$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^3-3x}{2x^2+2x+11};$
38	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3};$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-5}{4x^3+2x^2+1};$
39	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2};$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2-3}{2x^2+5x+7};$
40	***а)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5};$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2-3}{2x^2+5x+7};$

3.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $M_1M_2M_3M_4$ үшбұрышты пирамиданың $M_1(3;-2;2)$, $M_2(5;-8;-3)$, $M_3(-1;4;5)$, $M_4(4;3;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) $M_1M_2M_3$ жазықтығының теңдеуін;

ә) M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына параллель жазықтықтың теңдеуін;

б) $M_1M_2M_3$ және $M_1M_2M_4$ жазықтықтарының арасындағы бұрышын;

в) M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына дейінгі ара қашықтығын;

г) M_1M_2 қабырғасының (түзуінің) теңдеуін;

ғ) M_3 нүктесі арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін;

д) M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін;

е) M_1M_2 қабырғасының ортасы арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін;

ё) M_1M_2 және M_1M_4 түзулерінің арасындағы бұрышын;

ж) M_1M_4 түзуі мен $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын;

з) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын;

к) $M_1M_2M_3M_4$ үшбұрышты пирамиданың көлемін табыңыз.

Шешімі:

а) $M_1M_2M_3$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу үшін

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

формуласын пайдаланамыз:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 5-3 & -8+2 & -3-2 \\ -1-3 & 4+2 & 5-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-18(x-3)+20(y+2)+12(z-2)-24(z-2)-6(y+2)+30(x-3)=0$$

$$12(x-3)+14(y+2)-12(z-2)=0 \Rightarrow 6x+7y-6z+8=0\,.$$

ә) $M_1M_2M_3$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_1=\{6;7;-6\}$ болады. M_4 нүктесі арқылы өтетін жазықтық $M_1M_2M_3$ жазықтығына параллель болғандықтан бұл вектор ізделінді жазықтық үшін де нормаль вектор болады. Сондықтан

$6(x-x_4)+7(y-y_4)-6(z-z_4)=0,$

$6(x-4)+7(y-3)-6(z+4)=0$

$6x+7y-6z-69=0$ – ізделінді жазықтықтың теңдеуі.

б) $M_1M_2M_3$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_1=\{6;7;-6\}$ болады. Енді $M_1M_2M_4$ жазықтығының нормаль векторын табайық.

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;\,z_2-z_1\}=\{5-3;-8+2;-3-2\}=\{2;-6;-5\}$$

$$\overline{M_1M_4}=\{x_4-x_1;y_4-y_1;\,z_4-z_1\}=\{4-3;3+2;-4-2\}=\{1;5;-6\}$$

$$\vec{n}_2=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_4}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}=(36+25)\vec{i}+(-5+12)\vec{j}+(10+6)\vec{k}=\{61;7;16\}.$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш олардың $n_1=\{6;7;-6\}$ және $n_2=\{61;\,7;\,16\}$ нормальдарының арасындағы бұрыш. Олай болса

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{6\cdot61+7\cdot7+(-6)\cdot16}{\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{61^2+7^2+16^2}}=\frac{319}{11\cdot\sqrt{4026}};$$

$$\alpha=\arccos\frac{319}{11\cdot\sqrt{4026}}.$$

в) M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына дейінгі ара қашықтықтық

$$d=\frac{|Ax_4+By_4+Cz_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

формуласын пайдалансақ, онда

$$d = \left| \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 - 9 \cdot (-4) + 8}{\sqrt{36 + 49 + 36}} \right| = \frac{77}{11} = 7.$$

г) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Осыдан

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y+2}{-8+2} = \frac{z-2}{-1-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{-3}$$

M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a}_{12} = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -3\}$.

ғ) Ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторын $\vec{a}_1 = \{2; -6; -5\}$ алуға болады.

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{-5}$$ – ізделінді түзудің теңдеуі.

д) Ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде $M_1M_2M_3$ жазықтығының $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторын алуға болады.

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+4}{-6}$$ – ізделінді түзудің теңдеуі.

е) M_1M_2 қабырғасының ортасы E нүктесінің координатасын табайық.

$$x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,$$

$$y_E = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5,$$

$$z_E = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5.$$

$E(4; -5; -0{,}5)$.

Ізделінді жазықтықтың нормаль векторы ретінде M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторын $\vec{a}_1 = \{2; -6; -5\}$ алуға болады:

$2(x-4) - 6(y+5) - 5(z+0{,}5) = 0 \Rightarrow 2x - 6y - 5z - 40{,}5 = 0$

$4x - 12y - 10z - 81 = 0$ – ізделінді жазықтық теңдеуі.

ё) Екі түзудің арасындағы бұрыш олардың $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ және $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$ бағыттаушы векторларының арасындағы бұрыш. Олай болса

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{2 \cdot 1 + (-6) \cdot 5 + (-5) \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{-58}{\sqrt{4030}};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-58}{\sqrt{4030}}\right).$$

ж) M_1M_4 түзуі мен $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын табу үшін $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1, 5, -6\}$ бағыттаушы вектор мен $n_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторлар арасындағы (түзу мен жазықтықтың арасындағы) φ бұрышын анықтаймыз.

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{a}_4}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{a}_4|} = \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 5 + (-6) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{78}{11 \cdot \sqrt{62}};$$

$$\alpha = \arcsin\frac{78}{11 \cdot \sqrt{62}}.$$

з) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$, $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_2} = \{-4; 6; 3\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмның ауданының жартысына тең, сондықтан бұл векторлардың векторлық көбейтіндісін табамыз.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k} - 24\vec{k} - 6\vec{j} + 30\vec{i} = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k},$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 14^2 + (-12)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{484} = 11.$$

к) Үшбұрышты пирамиданың көлемі $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$, $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_2} = \{-4; 6; 3\}$, $\vec{a}_3 = \overline{M_1M_3} = \{1; 5; -6\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелепипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең, сондықтан бұл векторлардың аралас көбейтіндісін табамыз.

$$\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -72 - 18 + 100 + 30 + 144 - 30 = 274 - 120 = 154.$$

Осыдан $V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}_1\, \vec{a}_2\vec{a}_3| = \frac{1}{6} \cdot 154 = \frac{77}{3}.$

2. Төмендегі екінші ретті беттерді сызыңыз.

а1) $36x^2 + 225y^2 + 100z^2 - 900 = 0$

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$36x^2+225y^2+100z^2=900 \;\Rightarrow\; \frac{36x^2}{900}+\frac{225y^2}{900}+\frac{100z^2}{900}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1 \qquad (a=5,\, b=2,\, c=3)$$

бұл эллипсоид теңдеуі (суретін салу керек).

а2) $36x^2+16y^2-9z^2-576=0$

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$36x^2+16y^2-9z^2=576 \;\Rightarrow\; \frac{36x^2}{576}+\frac{16y^2}{576}-\frac{9z^2}{576}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{64}=1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}-\frac{z^2}{8^2}=1 \qquad (a=4,\, b=6,\, c=8)$$

Бұл бір қуысты гиперболоид теңдеуі (суретін салу керек).

а3) $9x^2+16y^2-36z^2+144=0$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$9x^2+16y^2-36z^2=-144 \;\Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}-\frac{36z^2}{144}=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{2^2}=-1, \quad (a=4,\, b=3,\, c=2).$$

Бұл екі қуысты гиперболоид теңдеуі (суретін салу керек).

а4) $4x^2+7y^2-112z=0$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$4x^2+7y^2=112z \;\Rightarrow\; \frac{4x^2}{56}+\frac{7y^2}{56}=2z \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{8}=2z, \quad (p=14,\, q=8).$$

Бұл эллипстік параболоид теңдеуі (суретін салу керек).

а5) $6x^2-7y^2-84z=0$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$6x^2+7y^2=84z \;\Rightarrow\; \frac{6x^2}{42}+\frac{7y^2}{42}=2z \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=2z, \quad (p=7,\, q=6).$$

Бұл гиперболалық параболоид теңдеуі (суретін салу керек).

а6) $36x^2+225y^2=25z^2$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$6^2x^2+15^2y^2=5^2z^2 \Rightarrow \quad 6^2x^2+15^2y^2=5^2z^2$$

6, 15, 5 – сандарының ең кіші ортақ бөлгіші 30, олай болса

$$\frac{6^2x^2}{30^2}+\frac{15^2y^2}{30^2}=\frac{5^2z^2}{30^2} \Rightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=\frac{z^2}{6^2}$$

Бұл конустың теңдеуі (суретін салу керек).

ә1) $4x^2+9y^2=324$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$\frac{4x^2}{324}+\frac{9y^2}{324}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{6^2}=1.$$

Бұл *Oz* өсіне параллель болатын эллипстік цилиндрдің теңдеуі (суретін салу керек).

ә2) $16y^2-9z^2=1296$.

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік

$$\frac{16y^2}{1296}-\frac{9z^2}{1296}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{81}-\frac{z^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9^2}-\frac{z^2}{12^2}=1.$$

Бұл *Ox* өсіне параллель болатын гиперболалық цилиндрдің теңдеуі (суретін салу керек).

ә3) $x^2-24z=0$

Шешімі: Теңдеуді канондық түрге келтірейік.

$$x^2=2\cdot 12z$$

Бұл *Oy* өсіне параллель болатын параболалық цилиндр теңдеуі (суретін салу керек).

3. Функцияның шектерін табыңыз:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\left|\dfrac{2\cdot 5^2-11\cdot 5+5}{3\cdot 5^2-14\cdot 5-5}=\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-5)(x-1/2)}{3(x-5)(x+1/3)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{9}{16}.$

ә) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{7x^2-27x-220}=\left|\dfrac{-64+64}{112+108-220}=\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x^2-4x+16)}{(x+4)(7x-55)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-4x+16}{7x-55}=-\dfrac{48}{83}.$

4. Функцияның шектерін табыңыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(5-x)-(5+x)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2} = \frac{2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.$$

5. Функцияның шектерін табыңыз:

а) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-11x+5}{x^2}}{\frac{3x^2-14x-5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{11}{x}+\frac{5}{x^2}}{3-\frac{14}{x}-\frac{5}{x^2}} = \left|\frac{2-0+0}{3-0-0}\right| = \frac{2}{3}.$$

ә) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-x+9}{x^2-4x-5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^4-x+9}{x^4}}{\frac{x^2-4x-5}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^3}+\frac{9}{x^4}}{\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^4}} = \left|\frac{2-0+0}{0-0-0}\right| = \infty.$$

б) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-7x+5}{5x^3-3x+8} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-7x+5}{x^3}}{\frac{5x^3-3x+8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}} = \left|\frac{0-0+0}{5-0+0}\right| = 0.$$

ТАПСЫРМА №4

4.1 «Функцияның шегі және туындысы» тақырыбына арналған типтік есептер

1. Функцияның шектерін табыңыз.

1	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{tg3x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 8x}{3x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$
2	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x-\sin x}{5tgx}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-3x}$
3	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{arctg3x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{-4x}$
4	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg3x}{2\sin x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x-1}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$
5	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg5x}{3x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 4x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

6	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$
7	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{7x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$
8	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$
9	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 5x}{x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$
10	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{6x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{2x+1}$
11	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg4x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$
12	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin\,2x}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+2}$
13	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$
14	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\,4x}{x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{2x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$
15	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 3x}{xtgx}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$
16	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\,4x}{tg5x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{5x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$
17	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{tg5x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2xtg3x}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$
18	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 7x}{xtg6x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 8x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$
19	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{\sin\,8x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{3x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$
20	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 2x}{\arcsin\,3x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{4x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$

21	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 3x}{x\sin 9x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$
22	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$
23	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\sin 3x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 2x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
24	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^2 2x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
25	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg8x}{x^2-3x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$
26	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{2x^2-x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$
27	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{x^2-2x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-1}{4x^3-x}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{2x+1}$
28	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 2x-\cos 7x}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$
29	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 2x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$
30	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$
31	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 3x}{x\sin 9x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$
32	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$
33	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\sin 3x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 2x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
34	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^2 2x}{x^2}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
35	***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg8x}{x^2-3x}$	***ə)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$	***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$

36	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{2x^2-x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$
37	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{x^2-2x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-1}{4x^3-x}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{2x+1}$
38	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 2x-\cos 7x}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$
39	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 2x}{x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$
40	***а)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$	***ә)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$	***б)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$

2. Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін тауып, осы нүктелердегі сол және оң жақты шектерін есептеңіз.

1	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$	***ә)*** $g(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ 2x^2, & -1\le x<1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$
2	***а)*** $f(x)=\dfrac{5-x}{x-7}$	***ә)*** $g(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<2\\ -x+4, & x\ge 2\end{cases}$
3	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-3}{4-x}$	***ә)*** $g(x)=5^{\frac{1}{x+1}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<-1\\ x+4, & -1\le x<1\\ 3-x, & x\ge 1\end{cases}$
4	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-7}{x+1}$	***ә)*** $g(x)=7^{\frac{1}{x-4}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ -x^2, & 0\le x<2\\ x-3, & x\ge 1\end{cases}$
5	***а)*** $f(x)=\dfrac{3-x}{x-5}$	***ә)*** $g(x)=7^{\frac{2}{x-5}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1\\ x^2, & -1\le x<0\\ 3+x, & x\ge 0\end{cases}$

6	***а)*** $f(x)=\dfrac{5-x}{4-x}$	***э)*** $g(x)=8^{\frac{1}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<2\\ x+3, & x\ge 2\end{cases}$
7	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$	***э)*** $g(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ x+1, & 1\le x<3\\ 2+x, & x\ge 3\end{cases}$
8	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+5}{x-6}$	***э)*** $g(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-3, & x<0\\ x+1, & 0\le x<4\\ 3+x, & x\ge 4\end{cases}$
9	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+7}{8-x}$	***э)*** $g(x)=8^{\frac{1}{2-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<-1\\ x+1, & -1\le x<2\\ x-2, & x\ge 2\end{cases}$
10	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+3}{9-x}$	***э)*** $g(x)=6^{\frac{1}{x-2}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 2x^2, & 0\le x<1\\ 2+x, & x\ge 1\end{cases}$
11	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+6}{x-4}$	***э)*** $g(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\le x<2\\ x^2, & x\ge 2\end{cases}$
12	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+7}{5-x}$	***э)*** $g(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<1\\ 3-x, & x\ge 1\end{cases}$
13	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-4}{9-x}$	***э)*** $g(x)=12^{\frac{1}{x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2, & 0\le x<2\\ 2x, & x\ge 2\end{cases}$
14	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-2}{8-x}$	***э)*** $g(x)=7^{\frac{1}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x^2-1, & 0\le x<1\\ -x, & x\ge 1\end{cases}$
15	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+7}{5-x}$	***э)*** $g(x)=3^{\frac{1}{4-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<2\\ x+1, & x\ge 2\end{cases}$

16	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+3}{4-x}$	***э)*** $g(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 2\\ x^2-2, & x>2\end{cases}$
17	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+9}{x+5}$	***э)*** $g(x)=8^{\frac{1}{5-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le \pi\\ 3, & x>2\end{cases}$
18	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$	***э)*** $g(x)=18^{\frac{1}{x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1\\ x+1, & 1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$
19	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+4}{x+5}$	***э)*** $g(x)=6^{\frac{1}{7-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-5, & x\le 0\\ x+3, & 0<x\le 2\\ x^2+1, & x>2\end{cases}$
20	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+9}{1-x}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{2}{5-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}2-x, & x\le -2\\ x^2, & -2<x\le 1\\ -2, & x>1\end{cases}$
21	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$	***э)*** $g(x)=7^{\frac{1}{6-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\le -1\\ x, & -1<x\le 2\\ x^2-2, & x>2\end{cases}$
22	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+1}{3-x}$	***э)*** $g(x)=4^{\frac{3}{x-4}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1\\ x, & 1<x\le 3\\ 6-x, & x>3\end{cases}$
23	***а)*** $f(x)=\dfrac{3+x}{x-3}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{2}{x-8}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ -2x, & 1<x\le 2\\ x^2+2, & x>2\end{cases}$
24	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+7}{4-x}$	***э)*** $g(x)=2^{\frac{4}{2+x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x-1, & -1<x\le 3\\ 5-x, & x>3\end{cases}$
25	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+1}{9-x}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{7}{2-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le 0\\ x+3, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$

26	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+9}{x-9}$	***э)*** $g(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\le -2\\ x, & -2<x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$
27	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+5}{3-x}$	***э)*** $g(x)=6^{\frac{1}{x+5}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le -1\\ x+1, & -1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$
28	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-7}{x+7}$	***э)*** $g(x)=6^{\frac{9}{4-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ \cos x, & 0<x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$
29	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+3}{8-x}$	***э)*** $g(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x\le -1\\ 1-x, & -1<x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$
30	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-6}{x+8}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{2}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}$
31	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$	***э)*** $g(x)=7^{\frac{1}{6-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\le -1\\ x, & -1<x\le 2\\ x^2-2, & x>2\end{cases}$
32	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+1}{3-x}$	***э)*** $g(x)=4^{\frac{3}{x-4}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1\\ x, & 1<x\le 3\\ 6-x, & x>3\end{cases}$
33	***а)*** $f(x)=\dfrac{3+x}{x-3}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{2}{x-8}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ -2x, & 1<x\le 2\\ x^2+2, & x>2\end{cases}$
34	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+8}{4-x}$	***э)*** $g(x)=2^{\frac{4}{3+x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x-1, & -1<x\le 3\\ 6-x, & x>3\end{cases}$
35	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+1}{8-x}$	***э)*** $g(x)=5^{\frac{5}{2-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le 0\\ x+3, & 0<x\le 2\\ x-3, & x>2\end{cases}$

36	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+9}{x-9}$	***ә)*** $g(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\le -2\\ x, & -2<x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$
37	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+5}{3-x}$	***ә)*** $g(x)=6^{\frac{1}{x+5}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le -1\\ x+1, & -1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$
38	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-8}{x+7}$	***ә)*** $g(x)=6^{\frac{9}{5-x}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-2, & x\le 0\\ \cos x, & 0<x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$
39	***а)*** $f(x)=\dfrac{x+5}{8-x}$	***ә)*** $g(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}3, & x\le -1\\ 1-x, & -1<x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$
40	***а)*** $f(x)=\dfrac{x-7}{x+8}$	***ә)*** $g(x)=5^{\frac{5}{x-3}}$	***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}$

3. Функцияның туындысын табыңыз.

1	$y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$	**2**	$y=\dfrac{2}{7}x^2-\dfrac{4}{5}x\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{x}$
3	$y=3x^4+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$	**4**	$y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$
5	$y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^2+\dfrac{4}{x}$	**6**	$y=4x^3-\dfrac{8}{x}+2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$
7	$y=3x^5-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x^3}$	**8**	$y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^7}-4x^6+\dfrac{2}{x^5}$
9	$y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}$	**10**	$y=4\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}+2x^2+\dfrac{7}{x}$
11	$y=8x^2+\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}$	**12**	$y=3x\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{4}{x}$
13	$y=3x^2+\dfrac{5}{x^2}-4\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{5}{x}$	**14**	$y=5x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{6}{x^4}$

15	$y = 5x^3 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^6} - \sqrt[3]{x^5}$	**16**	$y = 5x^2 - \sqrt[4]{x^5} - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^3}$
17	$y = 8x^2 + \frac{5}{x} - \sqrt[7]{x^2} - \frac{5}{x^4}$	**18**	$y = \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^2} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$
19	$y = \frac{7}{x} - \sqrt[4]{x^5} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^7}$	**20**	$y = \sqrt[5]{x^2} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^5}$
21	$y = 5x^2 - 4x\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}$	**22**	$y = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x}$
23	$y = \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4x^6$	**24**	$y = 5x^3 + \frac{5}{x} + 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{6}{x^2}$
25	$y = \sqrt{3x^2} - \frac{4}{x^3} + \sqrt[4]{x^5} + \frac{9}{x^4}$	**26**	$y = \sqrt{3}x^2 - \frac{5}{x^2} + \sqrt[5]{x^4} + \frac{6}{x}$
27	$y = 8x + \frac{2}{x\sqrt{x}} - x\sqrt{x^3} + \frac{8}{x^7}$	**28**	$y = 3x^2 - \frac{5}{\sqrt{x}} + 5\sqrt{x^2} - \frac{4}{x^3}$
29	$y = \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x} - 6x\sqrt{x} + x^9$	**30**	$y = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} - x\sqrt[3]{x} + x^{10}$
31	$y = 6x^2 - 2x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$	**32**	$y = 5\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$
33	$y = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + 5x^6$	**34**	$y = 3x^3 + \frac{2}{x} + 4\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^2}$
35	$y = \sqrt{3x^2} - \frac{3}{x^3} + \sqrt[4]{x^5} + \frac{2}{x^4}$	**36**	$y = \sqrt{3}x^2 - \frac{2}{x^2} + \sqrt[5]{x^4} + \frac{7}{x}$
37	$y = 4x + \frac{1}{x\sqrt{x}} - x\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^7}$	**38**	$y = 5x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x^2} - \frac{7}{x^3}$
39	$y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 2x\sqrt{x} + x^9$	**40**	$y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - x\sqrt[3]{x} + 2x^{10}$

4. Функцияның туындысын табыңыз.

1	***а)*** $y = \cos(3x^2 - 2x + 1);$	***ә)*** $y = \sqrt{arctg3x^2 + 5}.$
2	***а)*** $y = tg(8x^2 + 4x - 5);$	***ә)*** $y = (e^{5x} + 3)^2.$
3	***а)*** $y = e^{7x - x^2}$;	***ә)*** $y = \frac{1}{tg^2 2x}.$

4	***а)*** $y=\sqrt[3]{x^5+10x^2}$;	***ə)*** $y=2tg^3(x^2-1)$.
5	***а)*** $y=\left(4x-2x^3\right)^4$;	***ə)*** $y=\dfrac{1}{3\cos^2 x}$.
6	***а)*** $y=arctg(x^2+3x)$;	***ə)*** $y=ctg^2(\sqrt{x})$.
7	***а)*** $y=tg(4x^2+x+5)$;	***ə)*** $y=(e^{\sin x}+2)^4$.
8	***а)*** $y=\sin(3x^2-2x+1)$;	***ə)*** $y=\sqrt[3]{(\arccos 4x+5)^2}$.
9	***а)*** $y=e^{2x-x^3}$;	***ə)*** $y=\sqrt[5]{(\cos 7x-4)^2}$.
10	***а)*** $y=\arcsin\left(\sqrt{2x-x^2}\right)$;	***ə)*** $y=\left(7x+3x^3\right)^{14}$.
11	***а)*** $y=4ctg^3\left(x^2+1\right)$;	***ə)*** $y=\sqrt[3]{x^8+5x^3}$.
12	***а)*** $y=arcctg\left(x^4+x\right)$;	***ə)*** $y=\dfrac{1}{3}tg^3x+\lg\sin x$.
13	***а)*** $y=tg\left(3x^2+2x-7\right)$;	***ə)*** $y=(6^{\cos x}+3)^2$.
14	***а)*** $y=\cos\left(7x^2-6x+6\right)$;	***ə)*** $y=\sqrt[5]{(arctg7x-4)^3}$.
15	***а)*** $y=4^{7x-x^2}$;	***ə)*** $y=\dfrac{1}{tg^2 4x}$.
16	***а)*** $y=(8x+3x^2)^{18}$;	***ə)*** $y=\sqrt{\sin\left(x^2+5\right)}$.
17	***а)*** $y=\sqrt[5]{x^5+10x^2}$;	***ə)*** $y=4tg^3\left(x^2+1\right)$.
18	***а)*** $y=arctg(x^4+7x)$;	***ə)*** $y=\dfrac{1}{2}\sin^2(\ln x+2)$.
19	***а)*** $y=\sin(4x^4+x+5)$;	***ə)*** $y=\sqrt[4]{(\ln x-4)^5}$.
20	***а)*** $y=ctg(3x^2-2x+1)$;	***ə)*** $y=\sqrt[7]{\left(e^{3x}-4\right)^9}$.
21	***а)*** $y=\sqrt[5]{x^6-5x^3+6}$;	***ə)*** $y=5tg^6\left(1-x^2\right)$.
22	***а)*** $y=arctg\left(x^4-x\right)$;	***ə)*** $y=\dfrac{1}{4}tg^4x+\lg\sin x$.
23	***а)*** $y=ctg\left(5x^2+2x-7\right)$;	***ə)*** $y=(5^{\sin x}+3)^4$.
24	***а)*** $y=\cos\left(7x^2+3x-6\right)$;	***ə)*** $y=\sqrt[5]{(arcctg7x+4)^4}$.

25	***а)*** $y = 5^{7\sqrt{x}-x^2}$;	***ә)*** $y = \dfrac{1}{ctg^2 5x}$.
26	***а)*** $y = (8x - 3x^2)^7$;	***ә)*** $y = \sqrt{tg\left(5x^2 + 2\right)}$.
27	***а)*** $y = \sqrt[6]{x^5 - 10x^2}$;	***ә)*** $y = 4ctg^3\left(x^2 - 1\right)$.
28	***а)*** $y = arctg(x^4 - 11x)$;	***ә)*** $y = \dfrac{1}{2}\sin^2(\sqrt[3]{x} + 2)$.
29	***а)*** $y = \sin(3x^4 + \sqrt{x} + 5)$;	***ә)*** $y = \sqrt[6]{(\ln x + 4)^7}$.
30	***а)*** $y = ctg(x^3 + 5x + 4)$;	***ә)*** $y = \sqrt[6]{\left(e^{5x} + 4\right)^7}$.
31	***а)*** $y = \sqrt[3]{x^6 - 5x^3 + 2}$;	***ә)*** $y = 2tg^4\left(1 - x^2\right)$.
32	***а)*** $y = arctg\left(x^3 - 2x\right)$;	***ә)*** $y = \dfrac{1}{5}tg^3 x + \lg\sin x$.
33	***а)*** $y = ctg\left(3x^2 + 4x - 5\right)$;	***ә)*** $y = (4^{\sin x} + 8)^4$.
34	***а)*** $y = \cos\left(3x^2 + 2x - 7\right)$;	***ә)*** $y = \sqrt[5]{(arcctg5x + 2)^3}$.
35	***а)*** $y = 6^{\sqrt{x}-x^2}$;	***ә)*** $y = \dfrac{1}{ctg^2 3x}$.
36	***а)*** $y = (4x - 3x^2)^5$;	***ә)*** $y = \sqrt{tg\left(4x^2 + 3\right)}$.
37	***а)*** $y = \sqrt[3]{x^5 - 2x^2}$;	***ә)*** $y = 3ctg^3\left(x^2 - 7\right)$.
38	***а)*** $y = arctg(x^4 - 8x)$;	***ә)*** $y = \dfrac{1}{4}\sin^2(\sqrt[4]{x} + 5)$.
39	***а)*** $y = \sin(2x^4 + \sqrt{x} + 4)$;	***ә)*** $y = \sqrt[5]{(\ln x + 7)^7}$.
40	***а)*** $y = ctg(x^3 + 3x + 2)$;	***ә)*** $y = \sqrt[5]{\left(e^{5x} + 3\right)^7}$.

5. Функцияның туындысын табыңыз.

1	$y = tg2x \cdot \arcsin x^3$	**2**	$y = \cos 3x \cdot arctg5x^2$
3	$y = \sin^3 5x \cdot arctg^2 x$	**4**	$y = 4^{tg^3 x} \cdot \arccos\dfrac{3}{x}$

5	$y = 5^{\cos^2 x} \cdot \arcsin \frac{x}{2}$	**6**	$y = e^{\sqrt{x^2+3x}} \cdot \sin^4 3x$
7	$y = \sqrt{arctgx^2} \cdot \cos^7 2x$	**8**	$y = \cos^7 2x \cdot arctg3x^3$
9	$y = ctg^3 5x \cdot \arcsin \sqrt{x}$	**10**	$y = cos^2 4x \cdot arctg\sqrt{x}$
11	$y = 7^{\sin^3 x} \cdot \arcsin \frac{x}{4}$	**12**	$y = 4^{ctg^2 x} \cdot \arccos \frac{2}{x^2}$
13	$y = e^{\sqrt{x^3+2x}} \cdot \cos^5 7x$	**14**	$y = \sqrt{arc\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 5x$
15	$y = 3^{tg^3 3x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$	**16**	$y = \cos^5 3x \cdot arctg5x^2$
17	$y = tg^4 2x \cdot \arcsin x^3$	**18**	$y = \sin^3 5x \cdot arctg^2 x$
19	$y = 5^{\cos^2 x} \cdot \arcsin \frac{x}{2}$	**20**	$y = 4^{tg^3 x} \cdot \arccos \frac{3}{x}$
21	$y = e^{\sqrt{x^2+3x}} \cdot \sin^4 3x$	**22**	$y = \sqrt{arctgx^2} \cdot \cos^7 2x$
23	$y = \sin^8 6x \cdot arctg2x^2$	**24**	$y = cos^5 4x \cdot arctg\sqrt{x}$
25	$y = 7^{tg^3 x} \cdot \arcsin \frac{4}{x}$	**26**	$y = tg^8 8x \cdot \arcsin \sqrt{x+1}$
27	$y = 9^{tg^2 x} \cdot \arccos \frac{2}{x^2}$	**28**	$y = \sqrt{arc\cos \frac{x}{2}} \cdot tg^2 5x$
29	$y = e^{\sqrt{x^4+5x}} \cdot \cos^3 6x$	**30**	$y = 5^{\arcsin x^2} \cdot \arccos \sqrt{x}$
31	$y = e^{\sqrt{x^2+4x}} \cdot \sin^4 5x$	**32**	$y = \sqrt{arctgx^2} \cdot \cos^2 5x$
33	$y = \sin^2 6x \cdot arctg3x^2$	**34**	$y = cos^3 2x \cdot arctg\sqrt{x}$
35	$y = 5^{tg^3 x} \cdot \arcsin \frac{3}{x}$	**36**	$y = tg^4 4x \cdot \arcsin \sqrt{x+2}$
37	$y = 4^{tg^2 x} \cdot \arccos \frac{3}{x^2}$	**38**	$y = \sqrt{arc\cos \frac{x}{3}} \cdot tg^2 3x$
39	$y = e^{\sqrt{x^4+3x}} \cdot \cos^2 4x$	**40**	$y = 3^{\arcsin x^2} \cdot \arccos \sqrt{2x}$

6. Функцияның туындысын табыңыз.

1	***а)*** $y=\dfrac{4x^2}{cos^2 x};$	***э)*** $x^2+y^3-xy=0$	***б)*** $\begin{cases} x=\ln ctgt \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$
2	***а)*** $y=\dfrac{\arccos x}{2x^5};$	***э)*** $x\,e^y-y+1=0$	***б)*** $\begin{cases} x=arctge^{\frac{t}{2}} \\ y=\sqrt{e^t+1} \end{cases}$
3	***а)*** $y=\dfrac{4x^3}{\arcsin x};$	***э)*** $x-\ln(x+y)-2y=0$	***б)*** $\begin{cases} x=1+\cos^2 t \\ y=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \end{cases}$
4	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{3x^4};$	***э)*** $xy=\ln(1+y)$	***б)*** $\begin{cases} x=(t+1)^{-1} \\ y=t(t+1)^{-2} \end{cases}$
5	***а)*** $y=\dfrac{5x^3}{arctgx};$	***э)*** $x\sin y+x^2+y=0$	***б)*** $\begin{cases} x=\ln(1-t^2) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
6	***а)*** $y=\dfrac{3x^2}{\arccos x};$	***э)*** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$	***б)*** $\begin{cases} x=(t+1)\sin t \\ y=t^3 \end{cases}$
7	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{9x^5};$	***э)*** $x^2+\ln\dfrac{x}{y}=y$	***б)*** $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$
8	***а)*** $y=\dfrac{arcctgx}{3x^4};$	***э)*** $x^2y^2+3x=y$	***б)*** $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=\dfrac{(t+1)}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$
9	***а)*** $y=\dfrac{x^3}{tg^2 2x};$	***э)*** $\sin y+x^2y=1$	***б)*** $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
10	***а)*** $y=\dfrac{4x^7}{arctgx};$	***э)*** $\dfrac{y}{x}=\ln xy$	***б)*** $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$
11	***а)*** $y=\dfrac{\arccos x}{5x^4};$	***э)*** $\sin^2(x+y)-x=2$	***б)*** $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$

12	***а)*** $y=\dfrac{6x^4}{\arcsin x};$	***э)*** $ctg^2(x+y)-x^2=1$	***б)*** $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$
13	***а)*** $y=\dfrac{\arccos x}{x};$	***э)*** $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=4$	***б)*** $\begin{cases} x=\sqrt[3]{(t+1)^2} \\ y=\sqrt{t+1} \end{cases}$
14	***а)*** $y=\dfrac{2x^2}{\cos^3 x}.$	***э)*** $\dfrac{x+y}{x-y}=y^2$	***б)*** $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$
15	***а)*** $y=\dfrac{x^5}{\arcsin x};$	***э)*** $e^x\sin y+e^y cosx=0$	***д)*** $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln t \end{cases}$
16	***а)*** $y=\dfrac{3x^8}{arcctgx};$	***э)*** $arctgx+arctgy=x$	***б)*** $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t} \\ y=t^2\ln t \end{cases}$
17	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{7x^4};$	***э)*** $x^2e^y-x+y=1$	***б)*** $\begin{cases} x=arctge^t \\ y=\sqrt{e^{2t}+1} \end{cases}$
18	***а)*** $y=\dfrac{8x^4}{\arccos x};$	***э)*** $x^3+y^4+xy=0$	***б)*** $\begin{cases} x=\ln tgt \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$
19	***а)*** $y=\dfrac{\arccos x}{9x^2};$	***э)*** $x^2-\ln(x+y)=y$	***б)*** $\begin{cases} x=1+\sin^2 t \\ y=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases}$
20	***а)*** $y=\dfrac{4x^2+3}{\cos^3 x}$	***э)*** $\sin^2 y+x^2y=0$	***б)*** $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=arctg^2 t \end{cases}$
21	***а)*** $y=\dfrac{\arccos 2x}{3x^7};$	***э)*** $y+\arcsin y=x^2$	***б)*** $\begin{cases} x=t/t^3+1 \\ y=t/t^2+1 \end{cases}$
22	***а)*** $y=\dfrac{7x^4}{\arccos x};$	***э)*** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$	***б)*** $\begin{cases} x=(t+1)^2 \\ y=t\cos t \end{cases}$
23	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{x+1};$	***э)*** $x\ln y+y\ln x=1$	***б)*** $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$
24	***а)*** $y=\dfrac{2x^2}{\sin^3 x}.$	***э)*** $xy^2+x^2y=4$	***б)*** $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=(t+1)\sqrt{t^2-1} \end{cases}$

25	***а)*** $y=\dfrac{x^7}{\arcsin x};$	***д)*** $\cos xy+xy=1$	***б)*** $\begin{cases} x=\arccos 2t \\ y=\sqrt{1-4t^2} \end{cases}$
26	***а)*** $y=\dfrac{3x^7+1}{arcctgx};$	***д)*** $x^4y+xy^2=x+1$	***б)*** $\begin{cases} x=arctg\ t/2 \\ y=\ln\left(4+t^2\right) \end{cases}$
27	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{7x^4+8};$	***д)*** $\sin\dfrac{y}{x}-x=y$	***б)*** $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
28	***а)*** $y=\dfrac{8x^4+6x^2+3}{\arccos x};$	***д)*** $tg^2xy-x^2y^2=1$	***б)*** $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$
29	***а)*** $y=\dfrac{\arccos 3x}{1-9x^2};$	***д)*** $y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=1$	***б)*** $\begin{cases} x=t+\ln t \\ y=\ln^2 t \end{cases}$
30	***а)*** $y=\dfrac{x^2-3}{\cos^3 2x};$	***д)*** $\dfrac{x+y}{x}=y^2+x$	***б)*** $\begin{cases} x=t-\sin 2t \\ y=1-\cos 2t \end{cases}$
31	***а)*** $y=\dfrac{\arccos 2x}{4x^4};$	***д)*** $y+\arcsin y=x^2$	***б)*** $\begin{cases} x=t/t^3+5 \\ y=t/t^2+5 \end{cases}$
32	***а)*** $y=\dfrac{4x^4}{\arccos x};$	***д)*** $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{15}=1$	***б)*** $\begin{cases} x=(t+1)^3 \\ y=t\cos t \end{cases}$
33	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{x+3};$	***д)*** $x\ln y+y\ln x=10$	***б)*** $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$
34	***а)*** $y=\dfrac{3x^2}{\sin^4 x}.$	***д)*** $xy^2+x^2y=4$	***б)*** $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=(t+1)\sqrt{t^2-1} \end{cases}$
35	***а)*** $y=\dfrac{x^4}{\arcsin x};$	***д)*** $\cos xy+xy=11$	***б)*** $\begin{cases} x=\arccos 3t \\ y=\sqrt{1-3t^2} \end{cases}$
36	***а)*** $y=\dfrac{4x^7+3}{arcctgx};$	***д)*** $x^3y+xy^2=x+1$	***б)*** $\begin{cases} x=arctg\ t/3 \\ y=\ln\left(5+t^2\right) \end{cases}$
37	***а)*** $y=\dfrac{\arcsin x}{3x^4+5};$	***д)*** $\sin\dfrac{y}{x}-x=y$	***б)*** $\begin{cases} x=2t\sin t+\cos t \\ y=\sin t-2t\cos t \end{cases}$
38	***а)*** $y=\dfrac{3x^4+5x^2+7}{\arccos x};$	***д)*** $tg^2xy-x^3y^2=11$	***б)*** $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

39	***а)*** $y=\dfrac{\arccos 2x}{1-8x^2};$	***ә)*** $y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=10$	***б)*** $\begin{cases} x=t+\ln t \\ y=\ln^3 t \end{cases}$
40	***а)*** $y=\dfrac{x^2-4}{\cos^3 3x};$	***ә)*** $\dfrac{x+y}{x}=y^3+x$	***б)*** $\begin{cases} x=t-\sin 3t \\ y=1-\cos 3t \end{cases}$

4.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. Функцияның шектерін табыңыз:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 9x}{tg5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{7x-9x}{2}\cos\dfrac{7x+9x}{2}}{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 8x\cos 5x}{\sin 5x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cdot}{x}\cdot\frac{5x}{5\sin 5x}\cdot\cos 8x\cos 5x\right)=-2\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

ә) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{5x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{5x}{2}\cdot\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{4}{25}\cdot\dfrac{5x}{2}\cdot\dfrac{5x}{2}}=\frac{25}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{2x+1}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4-7}{5x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{5x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{5x+4}\right)^{\frac{5x+4}{-7}}\right]^{\frac{-7(2x+1)}{5x+4}}=$$

$$=\left|1^{\infty}\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{5x+4}}=e^{\frac{-14}{5}}.$$

2. Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін тауып, осы нүктелердегі сол және оң жақты шектерін есептеңіз.

а) $f(x)=\dfrac{x+9}{x-3},$ ***ә)*** $g(x)=9^{\frac{4}{x+6}},$ ***б)*** $\varphi(x)=\begin{cases} x-1, & x<-1 \\ x^2+2x-1, & -1\le x<2 \\ 3-x, & x\ge 2 \end{cases}.$

Шешімі:

а) $f(x)=\dfrac{x+9}{x-3}$ функциясының $x=3$ нүктесі оның анықталу облысына тиісті емес, сондықтан ол үзіліс нүктесі болады.

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{x+9}{x-3}=\left|\frac{12}{-0}\right|=-\infty,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{x+9}{x+3}=\left|\frac{12}{+0}\right|=+\infty$$

болғандықтан, $x=3$ нүктесі $f(x)$ функциясының 2 - текті үзілісті нүктесі болады.

ә) $g(x)=9^{\frac{4}{x+6}}$ функциясының $x=-6$ нүктесі оның анықталу облысына тиісті емес, сондықтан ол үзіліс нүктесі болады.

$$f(-6-0)=\lim_{x\to -6-0} f(x)=\lim_{x\to -6-0} 9^{\frac{4}{x+6}}=\left|9^{\frac{4}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}\right|=0,$$

$$f(-6+0)=\lim_{x\to -6+0} f(x)=\lim_{x\to -6+0} 9^{\frac{4}{x+6}}=\left|9^{\frac{4}{+0}}=9^{+\infty}\right|=+\infty.$$

болғандықтан, $x=-6$ нүктесі $g(x)$ функциясының 2 - текті үзіліс нүктесі болады.

б) $\varphi(x)=\begin{cases} x-1, & x<-1 \\ x^2+2x-1, & -1\le x<2 \\ 3-x, & x\ge 2 \end{cases}$ функциясының үзіліс нүктелері $x=-1,\ x=2$ нүктелері болуы мүмкін, тексерейік:

1) $x=-1.$

$$f(-1)=(-1)^2+2(-1)-1=-2,$$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x-1)=-1-1=-2,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+2x-1)=1-2-1=-2.$$

Осыдан, $f(a)=f(a-0)=f(a+0)$ теңдіктері орындалады, олай болса, $x=-1$ нүктесінде $\varphi(x)$ функциясы үзіліссіз болады.

2) $x=2.$

$$f(2)=3-2=1,$$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^2+2x-1)=4+4-1=7,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(3-x)=3-2=1.$$

Осыдан, $f(a-0)\neq f(a+0)$ теңдігі орындалмайды, олай болса, $x=-1$ нүктесі $\varphi(x)$ функциясының 1 - текті үзіліс нүктесі болады.

3. $y = 4x^3 + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі: $y' = 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-2)x^{-3} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + 2(-1)x^{-2} = 12x^2 - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^2}.$

4. Функциялардың туындысын табыңыз.

а) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

Шешімі: $y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

ə) $y = \frac{1}{2} \cdot tg^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}.$

Шешімі:

$$y' = tg\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}} \cdot \left(-\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tg\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tg^3\sqrt{x}.$$

5.1 $y = \sqrt{arcrc\frac{x}{3}} \cdot \sin^2 5x$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

Көбейтіндінің туындысының формуласын $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ қолданып:

$$y' = \left(\sqrt{arctg\frac{x}{3}}\right)' \cdot \sin^2 x + \sqrt{arcrc\frac{x}{3}} \cdot (\sin^2 x)' = \frac{1}{\sqrt{arctg\frac{x}{3}}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin^2 x +$$

$$+ \sqrt{arctg\frac{x}{3}} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3 \cdot \sin^2 x + \sin 2x \cdot arctg\frac{x}{3} \cdot (9+x^2)}{(9+x^2) \cdot \sqrt{arctg\frac{x}{3}}}.$$

5.2 Функциялардың туындысын табыңыз.

а) $y = \frac{\arcsin x}{2x^5}$.

Шешімі: Бөліндінің туындысының формуласын $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ қолданып:

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot \left(2x^5\right) - \arcsin x \left(2x^5\right)'}{(2x^5)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2x^5 - \arcsin x \cdot 10x^4}{4x^{10}} = \frac{x - 5\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^6\sqrt{1-x^2}}.$$

ə) $y = \dfrac{5^{x^2-2x}}{\sqrt{\cos\dfrac{x}{3}}}$.

$$y' = \frac{(5^{x^2-2x})' \cdot \sqrt{\cos\frac{x}{3}} - 5^{x^2-2x} \cdot \left(\sqrt{\cos\frac{x}{3}}\right)'}{\cos\frac{x}{3}} = \frac{5^{x^2-2x} \cdot \ln 5 \cdot (2x-2) \cdot \sqrt{\cos\frac{x}{3}} - 5^{x^2-2x} \cdot \frac{(-\sin\frac{x}{3}) \cdot \frac{1}{3}}{2\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}}{\cos\frac{x}{3}} =$$

$$\frac{5^{x^2-2x}\left(12 \cdot (x-1) \cdot \ln 5 \cdot \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3}\right)}{6 \cdot \cos\frac{x}{3} \cdot \sqrt{\cos\frac{x}{3}}}.$$

6. Функциялардың туындысын табыңыз.

а) $y = \ln \dfrac{\left(5x^2+7\right)^3 \cdot \sqrt[5]{4+3x}}{(4x+7)^8}$.

Шешімі: Логарифмнің қасиеттерін қолдансақ, онда

$$y = \ln \frac{\left(5x^2+7\right)^3 \cdot \sqrt[5]{4+3x}}{(4x+7)^8} = 3\ln\left(5x^2+7\right) + \frac{1}{5}\ln(4+3x) - 8\ln(4x+7),$$

$$y' = \frac{30x}{5x^2+7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4+3x} - \frac{32}{4x+7} = \frac{-540x^3 + 4255x^2 + 4074x - 4333}{5(5x^2+7)(3x+4)(4x+7)}.$$

ə) $y = \cos(x+y)$.

Шешімі: Айқындалмаған функцияны дифференциалдау ережесі бойынша табамыз:

$$y' = -\sin(x+y)(x+y)',$$

$$y' = -\sin(x+y)(1+y'),$$

$$y' = -\sin(x+y) - y'\sin(x+y),$$

$$y'(1+\sin(x+y)) = -\sin(x+y),$$

$$y' = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

б) $\begin{cases} x = t^2 - \sin t^2 \\ y = 1 - \cos t^2 \end{cases}$ параметрлік түрде берілген функцияны дифференциалдау ережесі бойынша табамыз.

Шешімі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \sin t^2}{2t - 2t\cos t^2} = \frac{\sin t^2}{1 + \cos t^2}.$$

ТАПСЫРМА №5

5.1 «Функцияны зерттеу және Лопиталь ережесі» тақырыбына арналған типтік есептер

1. $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ аралығында ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

1	$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$, $[1;4]$	**2**	$y = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $[-2;0]$
3	$y = 2 - x - \frac{4}{x^2}$, .$[1;4]$	**4**	$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $[0;3]$
5	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}$, $[0;6]$	**6**	$y = x - \frac{8}{x^4}$, $[-3;-1]$
7	$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $[-3;3]$	**8**	$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}$, $[3;7]$
9	$y = \sin 2x - 2x$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$	**10**	$y = x\sqrt{3} + 2\sin^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
11	$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, $[-1;5]$	**12**	$y = 8\ln x - x^2$, $[1;e]$
13	$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 1$, $[-1;2]$	**14**	$y = 5\sqrt[5]{(3x+2)^4} + 12x$, $[-2;10]$
15	$y = x\sqrt{6 - x^2}$, $[-1;\sqrt{6}]$	**16**	$y = x + \frac{27}{x^3}$, $[1;4]$

17	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)},\ [3;3]$	**18**	$y=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\ ,\ [-4;-1]$
19	$y=x+\cos^2 x\ ,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	**20**	$y=(x-2{,}25)\cdot e^{x^2}\ ,\ [2;4]$
21	$y=2x^2-\ln x\ ,\ [1;e]$	**22**	$y=x^5-x^3-3x+1\ ,\ [-2;1]$
23	$y=3\sqrt[3]{(7x-1)^2}+7x,\ \left[-\frac{26}{7};0\right]$	**24**	$y=x^4-2x^3+2x^2\ ,\ [0;3]$
25	$y=x+\frac{8}{x^4}\ ,\ [1;3]$	**26**	$y=x-\frac{4}{x^4}\ ,\ [-3;-2]$
27	$y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}\ ,\ [1;4]$	**28**	$y=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\ ,\ [3;8]$
29	$y=(2-x)\cdot e^{-x}\ ,\ [0;4]$	**30**	$y=x\sqrt{3}+3\sin^2 x\ ,\ \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$
31	$y=x^2\,e^{-\frac{2}{3}x^3}\ ,\ [-1;1]$	**32**	$y=7\ln x-x^2\ ,\ [2;e]$
33	$y=\frac{\ln x}{x}\ ,\ \left[\frac{1}{e};e^2\right]$	**34**	$y=\sqrt[5]{(3x+2)^4}+10x\ ,\ [-1;10]$
35	$y=3x^4-24x^2+1\ ,\ [-3;1]$	**36**	$y=x+\frac{5}{x^3}\ ,\ [2;4]$
37	$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x\ ,\ [-0{,}5\pi;\pi]$	**38**	$y=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}\ ,\ [-4;-2]$
39	$y=\frac{x^2-3}{x^3}\ ,\ [-4;-1]$	**40**	$y=(x-2)\cdot e^{x^2}\ ,\ [2;5]$

2. $y=f(x)$ функциясын зерттеп, графигін тұрғызыңыз.

1	$y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$	**2**	$y=\frac{x^3+5}{x^2}$	**3**	$y=\frac{(x-3)^3}{(x-1)^2}$	**4**	$y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$

5	$y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$	**6**	$y=\frac{4x}{(1-x)^2}$	**7**	$y=\frac{1+2x^3}{x^2}$	**8**	$y=\frac{5}{x^2+2x-3}$
9	$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	**10**	$y=\frac{x^2-9x}{x+3}$	**11**	$y=\frac{3x^4+1}{x^3}$	**12**	$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$
13	$y=\frac{1+2x^3}{x^2}$	**14**	$y=\frac{4x}{(1+x)^2}$	**15**	$y=\frac{x^3-32}{x^2}$	**16**	$y=\frac{4x}{(1-x)^2}$
17	$y=\frac{4x^2}{3+x^2}$	**18**	$y=\frac{8x}{4+x^2}$	**19**	$y=\frac{5}{x^2+2x-3}$	**20**	$y=\frac{x^3+4}{x^2}$
21	$y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	**22**	$y=\frac{4x}{2+x^2}$	**23**	$y=\frac{8x}{4+x^2}$	**24**	$y=\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$
25	$y=\frac{12x}{x^2+9}$	**26**	$y=\frac{x^2-x-6}{x-1}$	**27**	$y=\frac{12x}{x^2+9}$	**28**	$y=\frac{x^2-4x}{x+2}$
29	$y=\frac{2}{2x+x^2}$	**30**	$y=\frac{4}{3+2x-x^2}$	**31**	$y=\frac{2}{2x+x^2}$	**32**	$y=\frac{x^2-6x+5}{x-3}$
33	$y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$	**34**	$y=\frac{x-1}{(x+1)^2}$	**35**	$y=\frac{4x^2}{3+x^2}$	**36**	$y=\frac{4}{x^2+2x-3}$
37	$y=\frac{4-x^3}{x^2}$	**38**	$y=\frac{12-3x^2}{12+x^2}$	**39**	$y=\frac{12-3x^2}{12+x^2}$	**40**	$y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$

3. Лопиталь ережесін қолданып шекті есептеңіз.

1	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\log_5 x}$	**2**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-tgx}{x-\sin x}$	**3**	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$	**4**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x+1}$	**6**	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\log_6 x}$	**7**	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$	**8**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-6x}-1-2x}{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$	**10**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-1}{\sin 4x}$	**11**	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x+4}{\sqrt[3]{x-6}+2}$	**12**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$
13	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{5-2x}-1}$	**14**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$	**15**	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$	**16**	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{arctg(x+3)}{x^3+3x^2}$
17	$\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(3x+5)}{\sqrt[4]{2x+3}}$	**18**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-1}{\sin 3x}$	**19**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}$	**20**	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{arctg(x+2)}{x+2}$
21	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$	**22**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin 2x-12}{x^3}$	**23**	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{arctg(x+3)}{x^3+3x^2}$	**24**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$

25	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$	**26**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{x^2}$	**27**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-x}{x-\sin 2x}$	**28**	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(3x+10)}{\sqrt[4]{2x+6}}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tg2x}{x-\sin 2x}$	**30**	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	**31**	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\sqrt{5+2x}-1}$	**32**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x-4x}{x^3}$
33	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{3x}$	**34**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(0{,}5\pi x)}{2x-2}$	**35**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$	**36**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$
37	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{5+2x}-1}$	**38**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(0{,}5\pi x)}{x-1}$	**39**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg2x-6x}{x^3}$	**40**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{\frac{x}{2}}-2-x}{x^2}$

5.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $[-3;2]$ аралығындағы $y=x^4-2x^2+3$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешімі: $[-3;2]$ аралығында жататын кризистік нүктелерін табайық.

$$y'=4x^3-4x \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow 4x(x^2-1)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 1.$$

Барлық кризистік нүктелері берілген аралықта жатқандықтан, осы және аралықтың шеткі нүктелеріндегі функцияның мәнін анықтайық:

$$y(0)=3,\quad y(-1)=2,\quad y(1)=2,\quad y(-3)=66,\quad y(2)=11.$$

Осы мәндердің арасынан ең кішісін және ең үлкенін таңдап аламыз. Осыдан функцияның ең үлкен мәні 66 - ға, ал ең кіші мәні 2 - ге тең болады.

2. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ функциясын зерттеп, графигін тұрғызыңыз.

Шешімі:

1) функцияның анықталу облысын анықтаймыз:
$D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) функцияның үзіліс нүктелерін анықтау: рационал бөлшек өзінің анықталу облысында үзіліссіз. Үзіліс нүктесі x=0, өйткені функцияның мәні анықталмаған. Біржақты шектерді табамыз

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{3x-2}{x^3}=\left(\frac{-2}{-0}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{3x-2}{x^3}=\left(\frac{-2}{+0}\right)=-\infty.$$

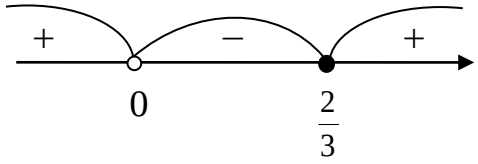
x=0 – екінші ретті үзіліс нүктесі. x=0– вертикаль асимптота.

3) функцияның координат өстерімен қиылысу нүктелерін, таңба

тұрақтылық аралығын табамыз.

$x\neq 0$, егер $y=0$ болса, онда $\frac{3x-2}{x^3}=0$. Осыдан $x=\frac{2}{3}$.

График Oy өсімен қиылыспайды, ал Ox өсін $\left(\frac{2}{3},0\right)$ нүктесінде қиып өтеді. Функцияның таңба тұрақтылық интервалы



4) функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтаймыз

$$f(-x)=-\frac{3x+2}{(-x)^3}=\frac{3x+2}{x^3}\neq f(x)\neq -f(x).$$

Сондықтан берілген функция жалпы түрдегі функция. Функция периодты емес.

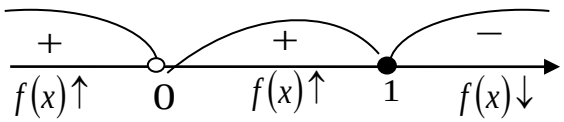
5) функцияның экстремумдарын тауып, өспелі және кемімелі болатын аралықтарын табамыз.

$$y'=\left(\frac{3x-2}{x^3}\right)'=\frac{3x^3-3x^2(3x-2)}{x^6}=\frac{3x^3-9x^3-6x^2}{x^6}=-\frac{6(x-1)}{x^4},$$

$$y'=0, \qquad x-1=0, \qquad x=1.$$

Егер $x=1$ - стационарлық нүкте болса, онда $(-\infty,0),(0,1)$ интервалында функция өспелі, $(1,+\infty)$ интервалында кемімелі.

$x=1$ максимум нүктесі: $y_{max}=1$.

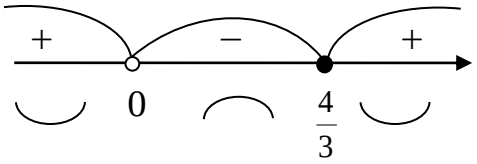


6) функцияның ойыс, дөңес болатын аралықтарын, иілу нүктелерін табамыз.

$$y''=-\frac{6(x-1)}{x^4}=-6\cdot\frac{x^4-4x^3(x-1)}{x^8}=-6\cdot\frac{x^4-4x^4+4x^3}{x^8}=\frac{6(3x-4)}{x^5}$$

$$y''=0, \qquad 3x-4=0 \qquad x=\frac{4}{3}$$

Егер $x=\frac{4}{3}$ болса, онда $\left(\frac{4}{3},\frac{27}{32}\right)$ - иілу нүктесі. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ интервалдарында график ойыс, ал $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ интервалында график дөңес болады.



7) функцияның асимптоталарын табамыз.

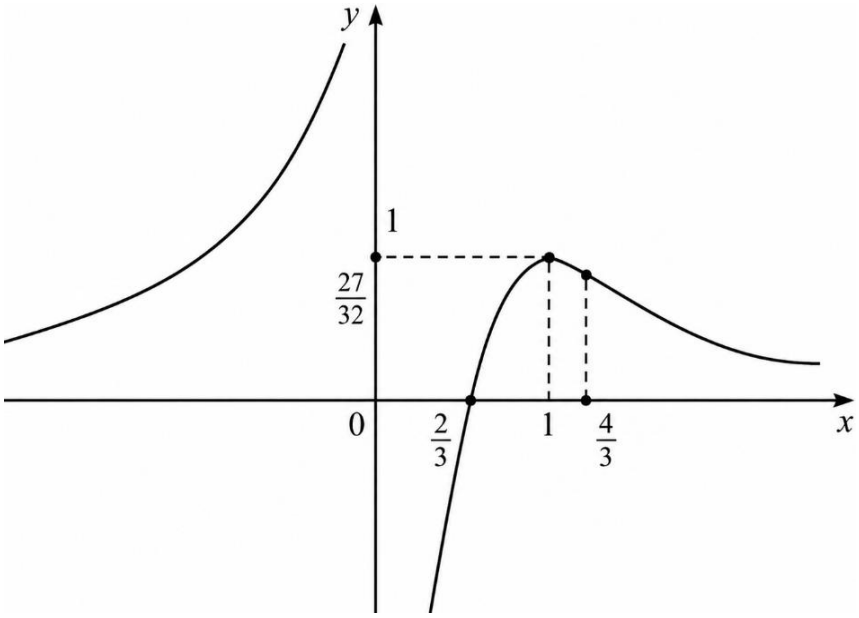
а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2}{x^3}=\infty$ болғандықтан $x=0$ түзуі – тік асимптота.

ә) Көлбеу асимптотаны табу үшін

$$\mathrm{k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x^3x}=0,\ \mathrm{b}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{x^3}-0\cdot x\right)=0$$

мәндерін есептейміз. Демек, y=0 - горизонталь асимптота.

8) алынған мәліметтер бойынша функция графигін тұрғызамыз.



3. Лопиталь ережесін қолданып шекті есептеңіз:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Шешімі: Лопиталь ережесі $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Сондықтан:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1/(1+x)}=\dfrac{1+1}{1}=2;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{2\cos x/\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2\cos x-2x\sin x}=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}.$

ТАПСЫРМА №6

6.1 «Анықталмаған интеграл» тақырыбына арналған типтік есептер

1. Анықталмаған интегралдарды табыңыз:

1	***а)*** $\int\left(\dfrac{1-5x^3}{x^4}+\dfrac{1}{x-5}\right)dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$
2	***а)*** $\int\dfrac{\sqrt{x}-3x\cdot\sqrt[3]{x}+x^5}{x^2}dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{4}{5+x^2}+\dfrac{7}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$
3	***а)*** $\int x\cdot\sqrt[3]{a\cdot x}dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{6}{5-x^2}+\dfrac{9}{\sqrt{10-x^2}}\right)dx$
4	***а)*** $\int\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{4}{1-7x^2}+\dfrac{6}{\sqrt{10+x^2}}\right)dx$
5	***а)*** $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{x+2}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{1}{3+7x^2}+\dfrac{5}{\sqrt{x+9}}\right)dx$
6	***а)*** $\int(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})^3dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{1}{3-2x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{5-2x^2}}\right)dx$
7	***а)*** $\int(5x^3-\dfrac{\sin 5}{\sqrt[3]{x^5}})dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x+7}}+\dfrac{2}{\sqrt{5+4x^2}}\right)dx$
8	***а)*** $\int\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}+\dfrac{a}{x^2}-x\right)dx$	***ә)*** $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-4x}}+\dfrac{6}{\sqrt{5-2x^2}}\right)dx$

9	***a)*** $\int \frac{(\sqrt{x^3}-2x^2+3x^4)}{x}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{8}{5-3x^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right)dx$
10	***a)*** $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{7}{5x^2-3}-\frac{2}{\sqrt{3x^2+5}}\right)dx$
11	***a)*** $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3 dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{5}{2+3x^2}-\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$
12	***a)*** $\int(x\sin a-\frac{4\sqrt{x}}{x^2})dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{7}{\sqrt[4]{(x-2)^5}}+\frac{6}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$
13	***a)*** $\int\frac{(\sqrt{x^5}+2x^3-x^5)}{x}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{3}{x^2-5}-\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$
14	***a)*** $\int\frac{x^3-3\sqrt{x^5}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{8}{5+4x^2}+\frac{5}{\sqrt{3x^2-4}}\right)dx$
15	***a)*** $\int x^2\cdot\sqrt[4]{b\cdot x}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{4}{4x^2+1}-\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$
16	***a)*** $\int\frac{x^4-2x-\sqrt{x}}{x^2}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{3}{4-x^2}-\frac{4}{16+x^2}\right)dx$
17	***a)*** $\int\frac{\left(\sqrt{b\cdot x}-\frac{x}{b}\right)^2}{x}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{7}{9-x^2}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+8}}\right)dx$
18	***a)*** $\int\frac{(x-1)^3}{x\cdot\sqrt{x}}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{1}{25+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$
19	***a)*** $\int\frac{(2x+a)^3}{x^2}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{8}{16-27x^2}-\frac{5}{\sqrt{1+5x^2}}\right)dx$
20	***a)*** $\int\frac{(x-a)^2}{\sqrt{x}}dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{5}{63+4x^2}-\frac{6}{\sqrt{1+2x^2}}\right)dx$
21	***a)*** $\int(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3 dx$	***ə)*** $\int\left(\frac{6}{2-3x^2}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$

22	***a)*** $\int (x^2 + \frac{4\sqrt{x}}{x^2})dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{7}{\sqrt[4]{(x+2)^5}} + \frac{6}{\sqrt{16+x^2}} \right) dx$
23	***a)*** $\int \frac{(\sqrt{x^3} - 3x^3 + x^5)}{x^2} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{3}{x^2+5} + \frac{2}{x^2-3} \right) dx$
24	***a)*** $\int \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{8}{5-4x^2} + \frac{6}{\sqrt{3x^2+4}} \right) dx$
25	***a)*** $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{b \cdot x} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{4}{4x^2-1} + \frac{5}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx$
26	***a)*** $\int \frac{x^4 + 2x + \sqrt{x}}{x^3} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{3}{4+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx$
27	***a)*** $\int \frac{(\sqrt{x^3} + x)^2}{x} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{7}{9+x^2} + \frac{4}{25-x^2} \right) dx$
28	***a)*** $\int \frac{(x+1)^3}{x^2\sqrt{x}} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{3}{25-4x^2} + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx$
29	***a)*** $\int \frac{(3x-a)^3}{x^2} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{4}{16+27x^2} - \frac{4}{\sqrt{1-5x^2}} \right) dx$
30	***a)*** $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{5}{63-4x^2} - \frac{4}{\sqrt[5]{(x+4)^8}} \right) dx$
31	***a)*** $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3 dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{6}{2-5x^2} + \frac{5}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx$
32	***a)*** $\int (x^2 + \frac{3\sqrt{x}}{x^3}) dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{9}{\sqrt[4]{(x+2)^5}} + \frac{8}{\sqrt{25+x^2}} \right) dx$
33	***a)*** $\int \frac{(\sqrt{x^3} - 8x^3 + x^4)}{x^2} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{12}{x^2+6} + \frac{2}{x^2-9} \right) dx$
34	***a)*** $\int \frac{x^2 - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{3}{5-3x^2} + \frac{5}{\sqrt{3x^2+6}} \right) dx$
35	***a)*** $\int x^5 \cdot \sqrt[5]{b \cdot x} dx$	***ə)*** $\int \left(\frac{3}{6x^2-1} + \frac{7}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx$

36	***а)*** $\int \frac{x^3+8x+\sqrt{x}}{x^3}dx$	***ә)*** $\int\left(\frac{2}{9+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$
37	***а)*** $\int \frac{(\sqrt{x^4}+x)^2}{x}dx$	***ә)*** $\int\left(\frac{7}{16+x^2}+\frac{2}{16-x^2}\right)dx$
38	***а)*** $\int \frac{(x+1)^3}{x\ \sqrt{x}}dx$	***ә)*** $\int\left(\frac{7}{16-4x^2}+\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\right)dx$
39	***а)*** $\int \frac{(5x-a)^3}{x^3}dx$	***ә)*** $\int\left(\frac{2}{4+27x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-5x^2}}\right)dx$
40	***а)*** $\int (2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$	***ә)*** $\int\left(\frac{3}{63-4x^2}-\frac{2}{\sqrt[5]{(x+2)^3}}\right)dx$

2. Анықталмаған интегралдарды табыңыз

1	$\int(5\cdot\cos x-\frac{7}{\sin^2 x})dx$	**2**	$\int \sin 2x\cdot\cos^3 2xdx$
3	$\int(3\cdot\sin x+\frac{2}{\cos^2 x})dx$	**4**	$\int \frac{2+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$
5	$\int \frac{\sin^2 x-\frac{5}{\sin x}}{\sin x}dx$	**6**	$\int(\cos x-\sin x)^2 dx$
7	$\int \frac{5\cdot\sin 2x-5\cdot tgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	**8**	$\int(6\cos 4x+4\sin 6x)dx$
9	$\int \frac{\cos 2x-5\cdot\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	**10**	$\int(4\sin x+\frac{5}{\cos^2 x})dx$
11	$\int \frac{1+5\cdot\cos^3 x}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$	**12**	$\int(2tg3x-\frac{4}{\cos^2 x})dx$
13	$\int \frac{1-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	**14**	$\int \frac{2+tg^2 3x}{\sin^2 3x}dx$
15	$\int \frac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	**16**	$\int(\frac{\sin x}{4}+\frac{5}{\cos^2 x})dx$

17	$\int(5\cdot\sin x-\frac{4}{\cos^2 x})dx$	**18**	$\int\frac{tg2x}{\sin x\cdot\cos x}dx$
19	$\int(2tg3x-\frac{4}{\sin^2 2x})dx$	**20**	$\int\frac{ctgx}{\sin 2x}dx$
21	$\int\frac{5+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$	**22**	$\int\sin 4x\cdot\cos^3 4xdx$
23	$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$	**24**	$\int\frac{7+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$
25	$\int(\cos x+\sin x)^2 dx$	**26**	$\int(\cos x-\sin x)^2 dx$
27	$\int(3\cdot\cos x-4\cdot\sin x)dx$	**28**	$\int(6\cos 3x+4\sin 9x)dx$
29	$\int(5\cdot\sin x-\frac{4}{\cos^2 x})dx$	**30**	$\int(\sin 2x+\frac{7}{\cos^2 x})dx$
31	$\int\frac{4-5\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$	**32**	$\int(5tg2x-\frac{3}{\cos^2 x})dx$
33	$\int\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	**34**	$\int\frac{2+tg^2 4x}{\sin^2 4x}dx$
35	$\int(\frac{\sin x}{2}+\frac{7}{\cos^2 x})dx$	**36**	$\int(\frac{\sin x}{8}+\frac{3}{\cos^2 x})dx$
37	$\int\frac{ctgx}{\sin x\cdot\cos x}dx$	**38**	$\int\frac{2tg2x}{\sin x\cdot\cos x}dx$
39	$\int\frac{tgx}{\sin 2x}dx$	**40**	$\int\frac{tgx}{\cos 2x}dx$

3. Анықталмаған интегралды табыңыз:

1	$\int e^{\frac{x^2}{2}}xdx$	**2**	$\int\frac{\ln^7 xdx}{x}$	**3**	$\int\frac{dx}{x\cdot\ln^{10} x}$	**4**	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+10}}$
5	$\int\frac{xdx}{\sqrt{29+x^2}}$	**6**	$\int x\sqrt[3]{x^2+3}dx$	**7**	$\int\frac{xdx}{\sqrt{12-x^2}}$	**8**	$\int\frac{e^x dx}{e^x+7}$

9	$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{5x}+15}$	**10**	$\int \frac{e^{x}dx}{e^{x}+5}$	**11**	$\int \frac{e^{x}dx}{e^{2x}+10}$	**12**	$\int \frac{\ln^{7} x dx}{x}$
13	$\int e^{x^2}\cdot x\,dx$	**14**	$\int e^{-x^3}x^2 dx$	**15**	$\int \frac{e^{x}dx}{e^{x}+8}$	**16**	$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{3x}+5}$
17	$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^{9} x}$	**18**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-11}}$	**19**	$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+9}}$	**20**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{19-x^2}}$
21	$\int \frac{xdx}{\sqrt{25+x^2}}$	**22**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{20-x^2}}$	**23**	$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{8x}-14}$	**24**	$\int \frac{dx}{x\cdot \ln x}$
25	$\int \frac{\ln^{2} x dx}{x}$	**26**	$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^{3} x}$	**27**	$\int \frac{e^{x}dx}{e^{2x}-5}$	**28**	$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$
29	$\int x\cos 5x^2 dx$	**30**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$	**31**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{30+x^2}}$	**32**	$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^{12} x}$
33	$\int e^{x^2+3}\cdot xdx$	**34**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{22+x^2}}$	**35**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{23+x^2}}$	**36**	$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+11}}$
37	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$	**38**	$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{4x}-10}$	**39**	$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^{5} x}$	**40**	$\int \frac{xdx}{\sqrt{36+x^2}}$

4. Анықталмаған интегралды табыңыз:

1	$\int tg^{2} 2x dx$	**2**	$\int \cos^{4}\frac{x}{2}dx$	**3**	$\int \cos^{7} x dx$	**4**	$\int \frac{\cos x}{\sin^{6} x}dx$
5	$\int \sin^{4} 2x dx$	**6**	$\int \sin^{4} x dx$	**7**	$\int \cos^{3} x dx$	**8**	$\int \frac{\cos x}{\sin^{5} x}dx$
9	$\int \cos^{5} 2x dx$	**10**	$\int \sin^{3} x dx$	**11**	$\int \cos^{6} x dx$	**12**	$\int \frac{2\sin 2x}{\cos^{3} x}dx$
13	$\int \frac{\cos^{2} x}{\sin^{4} x}dx$	**14**	$\int \frac{\cos^{2} x}{\sin^{4} x}dx$	**15**	$\int \frac{\cos x}{\sin^{4} x}dx$	**16**	$\int \sin x\cos^{4} x dx$
17	$\int \frac{4\cos 2x}{\cos^{2} x}dx$	**18**	$\int \frac{dx}{\sin^{4} 5x}$	**19**	$\int \frac{2\cos 2x}{\sin^{2} x}dx$	**20**	$\int \sin^{4} x\cdot\cos^{3} x dx$
21	$\int \sin^{8}\frac{x}{2}dx$	**22**	$\int \sin^{6} 2x dx$	**23**	$\int \frac{dx}{\sin^{4} x}$	**24**	$\int \sin^{2} x\cos^{3} x dx$
25	$\int \frac{\cos x}{\sin^{4} x}dx$	**26**	$\int \frac{\sin 2x}{\cos^{3} x}dx$	**27**	$\int \cos^{8}\frac{x}{2}dx$	**28**	$\int \sin^{3} x\cos^{2} x dx$

29	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$	**30**	$\int \frac{dx}{\sin^4 3x}$	**31**	$\int \sin^4 3x dx$	**32**	$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$
33	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x}dx$	**34**	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$	**35**	$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$	**36**	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
37	$\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$	**38**	$\int \sin^6 x dx$	**39**	$\int \sin^4 x dx$	**40**	$\int \frac{2\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$

5. Анықталмаған интегралды табу керек:

1	$\int \frac{\ln x}{x^2}dx$	**2**	$\int \sqrt{x} \cdot \ln 4x dx$	**3**	$\int x \cdot \sin\frac{x}{2}dx$	**4**	$\int \frac{x}{2^x}dx$
5	$\int x \cdot \cos 3x dx$	**6**	$\int \sqrt{x} \cdot \ln 8x dx$	**7**	$\int x^2 e^{3x}dx$	**8**	$\int x \cdot \cos\frac{x}{5}dx$
9	$\int x \cdot sin10x dx$	**10**	$\int \frac{x}{8^x}dx$	**11**	$\int x \cdot arctgx dx$	**12**	$\int x \cdot arcctgx dx$
13	$\int x^2 e^{5x}dx$	**14**	$\int x \cdot \sin 5x dx$	**15**	$\int x \cdot \cos 3x dx$	**16**	$\int (x-12) \cdot \cos x dx$
17	$\int x \cdot 5^x dx$	**18**	$\int \frac{x}{6^x}dx$	**19**	$\int x \cdot \cos\frac{x}{3}dx$	**20**	$\int x \cdot sin5x dx$
21	$\int x\cos 9x dx$	**22**	$\int x \cdot \sin\frac{x}{6}dx$	**23**	$\int (x-1) \cdot e^{-x}dx$	**24**	$\int 2x \cdot arcctgx dx$
25	$\int x \cdot sin12x dx$	**26**	$\int x \cdot \cos\frac{x}{8}dx$	**27**	$\int x \cdot e^{-3x}dx$	**28**	$\int (x+1) \cdot \cos x dx$
29	$\int x \cdot e^{2x}dx$	**30**	$\int x \cdot \sin\frac{x}{5}dx$	**31**	$\int x\cos 8x dx$	**32**	$\int x \cdot \arcsin x dx$
33	$\int x \cdot \ln x dx$	**34**	$\int x \cdot e^{4x}dx$	**35**	$\int \sqrt{x} \cdot \ln 6x dx$	**36**	$\int (x-2) \cdot \cos x dx$
37	$\int \frac{\ln x}{x^5}dx$	**38**	$\int x \cdot 3^x dx$	**39**	$\int (2x+5) \cdot e^{\frac{x}{3}}dx$	**40**	$\int 2x \cdot \arcsin x dx$

6. Анықталмаған интегралды табу керек:

1	$\int \frac{dx}{x^2+8x+5}$	**2**	$\int \frac{dx}{x^2-x+1}$	**3**	$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$	**4**	$\int \frac{xdx}{x^2-4x+8}$

5	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$	**6**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$	**7**	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2-6x+10}$	**8**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$	**10**	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$	**11**	$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$	**12**	$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-10x+26}$
13	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+10}$	**14**	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x+4}$	**15**	$\int \frac{(x-10)dx}{x^2+12x+35}$	**16**	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}$
17	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2+5x+4}$	**18**	$\int \frac{dx}{x^2+x+2}$	**19**	$\int \frac{xdx}{x^2+4x+5}$	**20**	$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+6x+10}$
21	$\int \frac{x}{x^2-6x-16}dx$	**22**	$\int \frac{x}{x^2+4x+20}dx$	**23**	$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$	**24**	$\int \frac{(x+6)dx}{x^2+12x+148}$
25	$\int \frac{xdx}{x^2-4x+8}$	**26**	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2-6x+10}$	**27**	$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+10x+26}$	**28**	$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-10x+23}$
29	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+10}$	**30**	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}$	**31**	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x+4}$	**32**	$\int \frac{x}{x^2-6x-12}dx$
33	$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+4}$	**34**	$\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+5}$	**35**	$\int \frac{(x-10)dx}{x^2+12x+25}$	**36**	$\int \frac{x}{x^2+4x+20}dx$
37	$\int \frac{(x+6)dx}{x^2-12x+35}$	**38**	$\int \frac{x}{x^2+6x-1}dx$	**39**	$\int \frac{(x+6)dx}{x^2+12x+14}$	**40**	$\int \frac{xdx}{x^2-4x+4}$

6.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. Анықталмаған интегралды табыңыз:

а) $$\int \frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\left(\frac{x^2}{5\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \frac{1}{5}\int\left(x^{2-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int x^{\frac{4}{3}}dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{35}\cdot x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}\cdot x^{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{35}\sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

ә) $$\int\left(\frac{5}{49+4x^2} - \frac{3}{x^2-25} - \frac{4}{\sqrt[8]{(x-4)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1-25x^2}}\right)dx =$$

$$= 5\int\frac{dx}{(2x)^2+7^2} - 3\int\frac{dx}{x^2-25} - 4\int(x-4)^{3/8}dx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-(5x)^2}} =$$

$$= \frac{5}{2\cdot 7} arctg\frac{2x}{7} - \frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| - 4\cdot\frac{(x-4)^{11/8}}{11/8} + \frac{2}{5}\arcsin(5x) + C =$$

$$= \frac{5}{14} arctg\frac{2x}{7} - \frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| - \frac{32(x-4)^{11/8}}{11} + \frac{2}{5}\arcsin(5x) + C.$$

2. Анықталмаған интегралды табыңыз:

а) $\int (ctg\frac{x}{5} + tg5x)dx = 5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right| - \frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$.

ә) $\int 2^{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x+5}d(3x+5) = \frac{2^{3x+5}}{3\ln 2} + C.$

3. Анықталмаған интегралды табыңыз:

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(5+2x^3\right)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(5+2x^3\right)}{\left(5+2x^3\right)^2} = -\frac{1}{6\left(5+2x^3\right)} + C.$$

4. Анықталмаған интегралды табыңыз:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \left|\sin x = t, \cos x dx = dt\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C$$

5. Анықталмаған интегралды табыңыз:

$$\int x\ln x dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\left(2\ln x - 1\right) + C.$$

6. Анықталмаған интегралды табыңыз:

а) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-x-1} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

ə) $\int \frac{2x^2-7x-33}{(x-3)(x^2+9)}dx = \int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+D}{x^2+9}\right)dx$

Ортақ бөлімге келтіре отырып, алымдарын теңестіреміз:

$2x^2-7x-33 = A(x^2+9)+(Bx+D)(x-3$

$x=3$ $\quad 18-21-33 = A(9+9)$

$18A = -36 \qquad A = -2,$

$x=0$ $\quad -33 = 9A-3D$

$3D = 9A+33 = -18+33 = 15 \qquad D = 5,$

$x=-3$ $\quad 18+21-33 = 18A+18B-6D$

$18B = 6-18A+6D = 6+36+30 = 72$

$18B = 72 \qquad B = 4.$

Сонымен,

$$\int \frac{2x^2-7x-33}{(x-3)(x^2+9)}dx = -2\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{4x+5}{x^2+9}dx = -2\ln\left|x-3\right|+\int\frac{4xdx}{x^2+9}+\int\frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= -2\ln\left|x-3\right|+2\ln\left|x^2+9\right|+\frac{5}{3}arctg\frac{x}{3}+C = 2\ln\left|\frac{x^2+9}{x-3}\right|+\frac{5}{3}arctg\frac{x}{3}+C$$

ТАПСЫРМА №7

7.1 «Анықталған интеграл және қолданбалары» тақырыбына арналған типтік есептер

1. Анықталған интегралды есептеңіз:

1	***а)*** $\int_{-1}^{2}(x^4-3x^2)dx$	***ə)*** $\int_0^{\pi} x\sin x dx$	***б)*** $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
2	***а)*** $\int_0^1 \sqrt{5x+4}dx$	***ə)*** $\int_0^{\pi} x\cos x dx$	***б)*** $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx$

3	***а)*** $\int_3^{10} \sqrt[3]{x-2}\,dx$	***ə)*** $\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx$	***б)*** $\int_1^3 \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$
4	***а)*** $\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{4}\,dx$	***ə)*** $\int_0^1 x \cdot \cos \frac{\pi x}{4}\,dx$	***б)*** $\int_1^2 \frac{2+3x}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$
5	***а)*** $\int_{-1}^{-0,5} \frac{x^2-1}{x^4}\,dx$	***ə)*** $\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin \frac{\pi x}{3}\,dx$	***б)*** $\int_1^3 \frac{8x+7}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$
6	***а)*** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$	***ə)*** $\int_0^{\frac{1}{3}} x \cdot \cos \pi x\,dx$	***б)*** $\int_1^2 \frac{4x-7}{\sqrt{x^2+24}}\,dx$
7	***а)*** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^2 2t\,dt$	***ə)*** $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}\,dx$	***б)*** $\int_0^3 \frac{x+4}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$
8	***а)*** $\int_{3.5}^{14} \sqrt[3]{2x+1}\,dx$	***ə)*** $\int_0^1 arctgx\,dx$	***б)*** $\int_1^3 \frac{2x+8}{\sqrt{10-x^2}}\,dx$
9	***а)*** $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	***ə)*** $\int_e^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln x\,dx$	***б)*** $\int_3^7 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
10	***а)*** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$	***ə)*** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$	***б)*** $\int_3^7 \frac{x-2}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$
11	***а)*** $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 2x}$	***ə)*** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$	***б)*** $\int_3^7 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6}}\,dx$
12	***а)*** $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx$	***ə)*** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin 2x\,dx$	***б)*** $\int_0^2 \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2}}\,dx$

13	***а)*** $\int_{0,5}^{1} e^{-2x+1}dx$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\cdot\cos 2x dx$	***б)*** $\int_{1}^{4} \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+8}}dx$
14	***а)*** $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}dx$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{3}dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx$
15	***а)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x dx$	***ə)*** $\int_{-1}^{0} x\cdot e^{-x}dx$	***б)*** $\int_{0}^{1} \frac{4-3x}{\sqrt{3x^2+7}}dx$
16	***а)*** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$	***б)*** $\int_{-2}^{2} \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+11}}dx$
17	***а)*** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$	***ə)*** $\int_{-21}^{0} x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$	***б)*** $\int_{0}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+12}}dx$
18	***а)*** $\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2}$	***ə)*** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$	***б)*** $\int_{0}^{4} \frac{3x-7}{\sqrt{9+x^2}}dx$
19	***а)*** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 t dt$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi/4} x\cos 2x dx$	***б)*** $\int_{2}^{3} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+14}}dx$
20	***а)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})}$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{2}dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{7x-2}{\sqrt{2x^2+3}}dx$
21	***а)*** $\int_{-1}^{-0,5} \frac{x^2-1}{x^4}dx$	***ə)*** $\int_{0}^{1} x\cdot\cos(\frac{\pi}{3}x)dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{2-x}{\sqrt{x^2+10}}dx$
22	***а)*** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	***ə)*** $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$	***б)*** $\int_{1}^{3} \frac{8x-9}{\sqrt{9+x^2}}dx$

23	***а)*** $\int_{-0.5\pi}^{0} \sin^2 t\,dt$	***ə)*** $\int_{0}^{0,5} x\cos(\pi x)\,dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{5x+6}{\sqrt{x^2-18}}\,dx$
24	***а)*** $\int_{2,5}^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}.$	***ə)*** $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$	***б)*** $\int_{0}^{3} \frac{2-x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$
25	***а)*** $\int_{7}^{26} \sqrt[3]{x+1}dx$	***ə)*** $\int_{-e}^{-1} x\cdot\ln x dx$	***б)*** $\int_{0}^{4} \frac{2x-8}{\sqrt{10+x^2}}\,dx$
26	***а)*** $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x+5}$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$	***б)*** $\int_{4}^{6} \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-11}}\,dx$
27	***а)*** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$	***ə)*** $\int_{-3}^{0} x\cdot e^{\frac{x}{3}}dx$	***б)*** $\int_{4}^{6} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-12}}\,dx$
28	***а)*** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^2}$	***ə)*** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$	***б)*** $\int_{0}^{1} \frac{3x+7}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
29	***а)*** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 2t\,dt$	***ə)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 4x dx$	***б)*** $\int_{4}^{8} \frac{4+x}{\sqrt{x^2-14}}\,dx$
30	***а)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$	***ə)*** $\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{4}dx$	***б)*** $\int_{2}^{3} \frac{7x+2}{\sqrt{2x^2-3}}\,dx$
31	***а)*** $\int_{-1}^{-0,5} \frac{x^2-1}{x^4}\,dx$	***ə)*** $\int_{0}^{1} x\cdot\cos(\frac{\pi}{3}x)dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{2-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$
32	***а)*** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	***ə)*** $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$	***б)*** $\int_{1}^{3} \frac{8x-14}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

33	***а)*** $\int_{-0.5\pi}^{0} \sin^2 t dt$	***ә)*** $\int_{0}^{0,5} x\cos(\pi x)dx$	***б)*** $\int_{1}^{2} \frac{5x+6}{\sqrt{x^2-16}}dx$
34	***а)*** $\int_{2,5}^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}$	***ә)*** $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}dx$	***б)*** $\int_{0}^{3} \frac{2-x}{\sqrt{x^2+25}}dx$
35	***а)*** $\int_{7}^{26} \sqrt[3]{x+1}dx$	***ә)*** $\int_{-e}^{-1} x\cdot\ln x dx$	***б)*** $\int_{0}^{4} \frac{2x-8}{\sqrt{10+x^2}}dx$
36	***а)*** $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x+5}$	***ә)*** $\int_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$	***б)*** $\int_{4}^{6} \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-11}}dx$
37	***а)*** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$	***ә)*** $\int_{-3}^{0} x\cdot e^{\frac{x}{3}}dx$	***б)*** $\int_{4}^{6} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-12}}dx$
38	***а)*** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^2}$	***ә)*** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$	***б)*** $\int_{0}^{1} \frac{3x+7}{\sqrt{9-x^2}}dx$
39	***а)*** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 2t dt$	***ә)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 4x dx$	***б)*** $\int_{4}^{8} \frac{3+x}{\sqrt{x^2-112}}dx$
40	***а)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$	***ә)*** $\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{2}dx$	***б)*** $\int_{2}^{3} \frac{5x+2}{\sqrt{2x^2-6}}dx$

2. Көрсетілген айнымалыны ауыстыруды қолданып, интегралды есептеңіз:

1	$\int_{0}^{2} x^3\cdot e^{x^2}dx,\ \ / x^2=t /$	**2**	$\int_{0}^{0.5} x^3\cdot e^{-x^4}dx,\ \ / x^4=t /$
3	$\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\cdot 2^{-x^2}dx,\ \ / x^2=t /$	**4**	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4-3\cos x},\ / tg\frac{x}{2}=t /$

5	$\int_{1}^{\ln^2 2} e^{2\sqrt{x}}dx,\ /\sqrt{x}=t/$	**6**	$\int_{0}^{1} x^3\cdot e^{4x^2}dx,\ /x^2=t/$
7	$\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+4},\ /x^2=t/$	**8**	$\int_{0}^{1} x\cdot e^{3\sqrt{x}}dx,\ /\sqrt{x}=t/$
9	$\int_{2}^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}},\ /2x-1=t^2/$	**10**	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)},\ /\ln x=t/$
11	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x},/tg\frac{x}{2}=t/$	**12**	$\int_{1}^{6} \frac{dx}{x+\sqrt{3x-2}},\ \left\|3x-2=t^2\right\|$
13	$\int_{4}^{9} e^{\sqrt{x}}dx,\quad /x=t^2/$	**14**	$\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}dx,\quad /x=2\sin t/$
15	$\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx,/x=\frac{1}{\cos t}/$	**16**	$\int_{\ln 1}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}\ /e^x=t/$
17	$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5+4x^2}},\ /5+4x^2=t^2/$	**18**	$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x},\ /\ln x=t/$
19	$\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}dx,/x=4\sin t/$	**20**	$\int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,\ /\sqrt{x}=t/$
21	$\int_{1}^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}}dx,\ /\sqrt{x}=t/$	**22**	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos x},\ /tg\frac{x}{2}=t/$
23	$\int_{0}^{4} x\cdot e^{-\sqrt{x}}dx,\ /\sqrt{x}=t/$	**24**	$\int_{0}^{1} x^3\cdot e^{x^2}dx,\ /x^2=t/$
25	$\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+25},\ /x^2=t/$	**26**	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-2\cos x},/tg\frac{x}{2}=t/$
27	$\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}},\ /5-4x^2=t^2/$	**28**	$\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\ln^5 x},\ /\ln x=t/$

29	$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx, / x = 3\sin t /$	**30**	$\int_0^1 \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \ / \sqrt{x} = t /$
31	$\int_1^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}}\,dx, \ / \sqrt{x} = t /$	**32**	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+3\cos x}, \ / tg\frac{x}{2} = t /$
33	$\int_0^4 x \cdot e^{-\sqrt{x}}\,dx, \ / \sqrt{x} = t /$	**34**	$\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2}\,dx, \ / x^2 = t /$
35	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+25}, \ / x^2 = t /$	**36**	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-2\cos x}, / tg\frac{x}{2} = t /$
37	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}, \ / 5-4x^2 = t^2 /$	**38**	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}, \ / \ln x = t /$
39	$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx, / x = 3\sin t /$	**40**	$\int_0^1 \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \ / \sqrt{x} = t /$

3. Төмендегі сызықтармен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

1	$y = x^2, \ y = 4$	**2**	$y = \sqrt{x}, \ y = 1, y = 0, \ x = 2$
3	$y = tgx, \quad y = 1/\sqrt{3}, \ x = 0$	**4**	$y = \sin^2 x, \quad y = \sin x, \ 0 \le x \le \pi$
5	$y = \frac{11}{2+x^2}, \quad y = 1$	**6**	$y = \frac{1}{x}, \quad y = 1, \ y = 0, \ x = 2$
7	$y = x^2, \quad y = x$	**8**	$y = arctgx \quad y = \pi/3 \quad x = 0$
9	$y = \frac{3}{x}, \quad x + y = 4$	**10**	$y = e^{-x}, \quad y = 1, \ x = \ln 3$
11	$y = tg2x, \ y = -1, \ x = 0$	**12**	$y = \cos x, \quad y = 0, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$
13	$y = \frac{5}{1+x^2}, \quad y = 1$	**14**	$y = \sin^2 x, \quad y = 0, \ 0 \le x \le \pi/2$
15	$y = x^2, \quad y = -x^2, \ x = 1$	**16**	$y = tgx, \quad y = 1, \ x = 0$

17	$y = tgx,\quad y = -\sqrt{3},\quad x = 0$	**18**	$y = \sin^2 x,\quad y = 0,\quad 0 \le x \le \pi$
19	$y = x^2,\quad y = x^4$	**20**	$y = \cos^2 x,\ y = \cos x,\ \lvert x\rvert \le \pi/2$
21	$y = tg2x,\quad y = 1,\quad x = 0$	**22**	$y = arctgx,\quad y = \pi/4,\quad x = 0$
23	$y = x^2 - 4,\quad y = x + 2$	**24**	$y = tgx,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
25	$y = ctg3x,\quad y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{6}$	**26**	$y = tg2x,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
27	$y = x^2,\quad y = \sqrt{x}$	**28**	$y = tgx,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
29	$y = ctg2x,\quad y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{4}$	**30**	$y = \cos^2 x,\ y = 0,\quad 0 \le x \le \pi/2$
31	$y = tg2x,\quad y = 1,\quad x = 0$	**32**	$y = arctgx,\quad y = \pi/4,\quad x = 0$
33	$y = x^2 - 4,\quad y = x + 2$	**34**	$y = tgx,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
35	$y = ctg3x,\quad y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{6}$	**36**	$y = tg2x,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
37	$y = x^2,\quad y = \sqrt{x}$	**38**	$y = tgx,\quad y = \sqrt{3},\quad x = 0$
39	$y = ctg2x,\quad y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{4}$	**40**	$y = tgx,\quad y = -\sqrt{3},\quad x = 0$

4. Меншіксіз интегралды есептеңіз:

1	$\int_{-1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+8x+25}$	**2**	$\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{4x^2+3}dx$	**3**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\cdot(x+1)}$	**4**	$\int_{-1}^{+\infty} \dfrac{xdx}{x^2+16}$
5	$\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{3x^2+1}dx$	**6**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{4x+7}$	**7**	$\int_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-4x+13}$	**8**	$\int_{0}^{+\infty} \dfrac{xdx}{x^2+4x+20}$
9	$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$	**10**	$\int_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-4x+13}$	**11**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+50}$	**12**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+9}$
13	$\int_{6}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+2x+50}dx$	**14**	$\int_{1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+8x+12}dx.$	**15**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+8}$	**16**	$\int_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x+8)}$

17	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+9}$	**18**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$	**19**	$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x+25}$	**20**	$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$
21	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$	**22**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+1)}$	**23**	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+1}$	**24**	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{3x^2+1}dx$
25	$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+20}$	**26**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x+5}$	**27**	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}.$	**28**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+5)}$
29	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{3x^2+5}dx$	**30**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$	**31**	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+2x+2}dx$	**32**	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+25}$
33	$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x+25}$	**34**	$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2-8x+15}dx$	**35**	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	**36**	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+2x+2}dx$
37	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+9}$	**38**	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$	**39**	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+25}$	**40**	$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2-8x+15}dx$

7.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. Анықталған интегралдарды есептеңіз.

Шешімі:

а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$

ә) $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} x = u;\ dx = du \\ \sin x dx = dv; \\ -\cos x = v \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$

б) $\int_{6}^{8} \frac{x+7}{\sqrt{100-x^2}}dx = \int_{6}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{100-x^2}} + 7\int_{6}^{8} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = -\sqrt{100-x^2}\Big|_6^8 + \frac{7}{10}\arcsin\frac{x}{10}\Big|_6^8 =$

$= -\sqrt{100-64} + \sqrt{100-36} + \frac{7}{10}\left(\arcsin\frac{8}{10} - \arcsin\frac{6}{10}\right) = 2 + \frac{7}{10}(\arcsin 0.8 - \arcsin 0.6).$

2. Көрсетілген айнымалыны ауыстыруды қолданып, интегралды есептеңіз.

Шешімі:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = \sin x & dx = \cos x dx \\ x = 0 & t = 0 \\ x = 1 & t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

3. $y = x^5;\ y = 32$ сызықтарымен және ординат өсімен шектелген фигура ауданын табыңыз.

Шешімі: Берілген сызықтардың қиылысу нүктесін табамыз.

$$y = x^5;\ y = 32 \Rightarrow x = 2.$$

Берілген фигура сол жағынан ордината өсімен шектелгендіктен, төменгі шек $x = 0$ болады. Сонымен формула бойынша

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^2 (32 - x^5)dx = (32x - \frac{x^6}{6})\Big|_0^2 = 64 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}.$$

4. Меншіксіз интегралды есептеңіз:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(arctg(b+1) - arctg1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл жинақты.

17 ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЫҒАРУ ҮЛГІЛЕРІ

1 Тест «Екінші ретті анықтауыштың есептеу әдістерін қолданып теңдеуді (теңсіздікті) шешу»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Екінші ретті анықтауыштың есептеу әдістерін қолданып теңдеуді (теңсіздікті) шешуге» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

1.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

1.1-мысал: $\begin{vmatrix} 3x & -2 \\ 5x+3 & 6 \end{vmatrix} < -8$ теңсіздігін шешіңіз.

Шешімі:

a) Теңсіздікті шешу үшін екінші ретті анықтауышты есептеу формуласын қолданамыз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

b) $3x \cdot 6 - (-2)(5x+3) < -8$

$18x + 10x + 6 < -8$

$28x < -14$

$x < -\frac{14}{28}$

$x < -\frac{1}{2}$

c) Жауабы: $x < -\frac{1}{2}$.

1.2-мысал: $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} < -2$ теңсіздігін шешіңіз.

a) Теңсіздікті шешу үшін екінші ретті анықтауышты есептеудің (1.1) формуласын қолданамыз.

b) $2x - 4(x+5) < -2$

$2x - 4x - 20 < -2$

$-2x < 18$

$x > -9$

c) Жауабы: $x > -9$.

Ескерту.

1. Егер теңсіздіктің екі бөлігін де бірдей оң санға көбейтсек (бөлсек), онда онымен мәндес теңсіздік шығады.
2. Егер теңсіздіктің екі бөлігін де бірдей теріс санға көбейтсек (бөлсек) және берілген теңсіздіктің таңбасын қарама-қарсыға өзгертсек, онда онымен мәндес теңсіздік шығады.

1.3-мысал: $\begin{vmatrix} x^2-5 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$ теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

a) Теңдеуді шешу үшін екінші ретті анықтауышты есептеудің (1.1) формуласын қолданамыз.

b) $1\cdot\left(x^2-5\right)-2\cdot x=-6$

$x^2-5-2x=-6$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

c) Жауабы: $x_1=1$ және $x_2=1$.

Ескерту.

1. Екінші ретті анықтауышты есептеу нәтижесінде мектеп бағдарламасынан танымал $ax^2+bx+c=0$ түріндегі квадрат теңдеуге келтірілетін есептерді білу маңызды:

Квадрат теңдеу	Дискриминант	Квадрат теңдеудің түбірлері
$ax^2+bx+c=0$ $D=b^2-4ac$	$D>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ Әртүрлі нақты екі түбірлер
	$D=0$	$x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$ Бірдей нақты екі түбірлер
	$D<0$	Шешімі жоқ

2. Виет теоремасы көмегімен де шығаруға да болады.

Егер $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің x_1 және x_2 сандары түбірі болса, онда

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

болады.

1.2 Тест тапсырмалары

1. $\begin{vmatrix} x+2 & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ теңдеуін шешіңіз.

A) 10
B) 8
C) -8
D) -1
E) -10

2. $\begin{vmatrix} 3x & x+4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} < -15$ теңсіздігін шешіңіз.

A) $x < 5$
B) $x > 9$
C) $x > 1$
D) $x > 11$
E) $x < -2$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ x+2 & x-3 \end{vmatrix} = -2$ теңдеуін шешіңіз.

A) 4
B) -4
C) 6
D) -6
E) -3

4. $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 4x-1 & 5 \end{vmatrix} < 10$ теңсіздігін шешіңіз.

A) $x>3$
B) $x<-7$
C) $x<9$
D) $x<1$
E) $x<4$

5. $\begin{vmatrix} 7 & 6x+5 \\ 2 & 3x \end{vmatrix}=17$ теңдеуін шешіңіз.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

6. $\begin{vmatrix} x+1 & 5 \\ 2x & 7 \end{vmatrix}>4$ теңсіздігін шешіңіз.

A) $x>-5$
B) $x<-2$
C) $x>-3$
D) $x<7$
E) $x<1$

7. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x-1 & 3 \end{vmatrix}=1$ теңдеуін шешіңіз.

A) 3
B) -1
C) -3
D) 1
E) 7

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x-5 & 2x+3 \end{vmatrix}>14$ теңсіздігін шешіңіз.

A) $x>-2$
B) $x<1$
C) $x<9$
D) $x>-7$
E) $x>4$

9. $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ 2x+1 & 4 \end{vmatrix} = -11$ теңдеуін шешіңіз.

A) -8
B) -2
C) 8
D) 2
E) -3

10. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2x+5 & 3 \end{vmatrix} < -5$ теңсіздігін шешіңіз.

A) $x < -3$
B) $x > 3$
C) $x < 1$
D) $x < 3$
E) $x > -3$

2 Тест «Үшінші ретті анықтауышты есептеу әдістері»

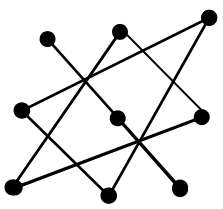
Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Үшінші ретті анықтауышты есептеу әдістеріне» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

2.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

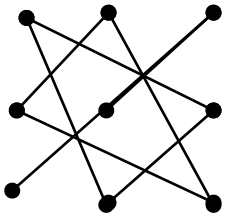
2.1-мысал: Есептеңіз: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

Шешімі: Үшінші ретті анықтауышты есептеу әдістерін қарастырамыз.

а) *Үшбұрыштар әдісі:*



- өз таңбасымен алынатын көбейтінділер;



- кері таңбамен алынатын көбейтінділер;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

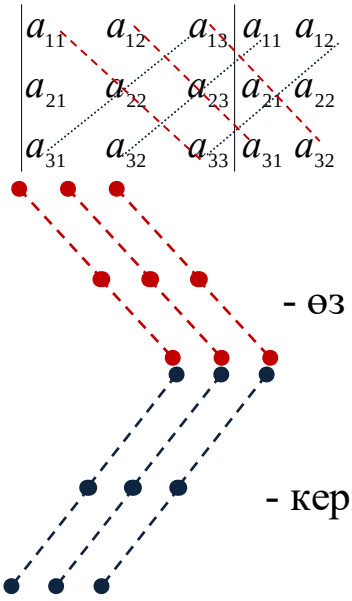
b) Үшбұрыштар әдісімен анықтауышты есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-3)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 5 - (-2)\cdot 2\cdot 6 - 4\cdot(-3)\cdot 1 =$$

$$= 0 + 40 + 18 - 0 + 24 + 12 = 94.$$

c) Жауабы: 94.

a) *Саррюс әдісі:*



- өз таңбасымен алынатын көбейтінділер;

- кері таңбамен алынатын көбейтінділер;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

b) Саррюс әдісімен анықтауышты есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 3\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot(-3) - 2\cdot(-2)\cdot 6 =$$

$$= 0 + 40 + 18 - 0 + 12 + 24 = 94.$$

c) Жауабы: 94.

a) *Анықтауыштың жол (баған) элементтеріне жіктелініп есептелінуі:*

Анықтауыш кез келген жолының немесе кез келген бағанының элементтерінің өздерінің алгебралық толықтауыштарымен көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n}$$

немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Бірінші теңдік *анықтауыштың і жолының элементтеріне жіктелінуі*, ал екінші теңдік *анықтауыштың j бағанның элементеріне жіктелінуі* деп аталады.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші жол элементтеріне жіктеп есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12+9) + 0(6-15) - 4(-3-10) = 42 + 0 + 52 = 94.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ анықтауышынбірінші баған элементтеріне жіктеп есептеу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(0+12) + 2(12+9) + 5(8-0) = 12 + 42 + 40 = 94.$$

c) Жауабы: 94.

Ескерту. Үшбұрышты матрицаның анықтауышы (үшбұрышты анықтауыш) бас диагональ элементтерінің көбейтіндісіне тең:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & -13 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{94}{4} \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot\frac{94}{4} = 94.$$

2.2-мысал:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot(-4) + 1\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 6\cdot(-5) - 1\cdot(-1)\cdot(-5) - 1\cdot(-3)\cdot(-4) - \ldots$$

анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

a) Үшбұрыштар немесе Саррюс әдісі бойынша есептеу формуласын жазамыз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot(-4) + 1\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 6\cdot(-5) - 1\cdot(-1)\cdot(-5) - 1\cdot(-3)\cdot(-4) - 2\cdot 6\cdot 0.$

c) Жауабы: $2\cdot 6\cdot 0$.

2.3-мысал: $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \ldots$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

a) *Анықтауыштың үшінші жол элементтеріне жіктелініп есептеліну формуласы:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

b) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}.$

c) Жауабы: $(-4) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$.

2.2 Тест тапсырмалары

1. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) \cdot (-4) - \ldots$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

A) $0 \cdot 0 \cdot 2$
B) $0 \cdot 1 \cdot 2$
C) $0 \cdot 1 \cdot 1$
D) $0 \cdot 3 \cdot 1$
E) $(-3) \cdot 2 \cdot 4$

3. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

A) 30
B) 12
C) 22

D) 32
E) 5

4. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \ldots$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

A) $-4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$
B) $4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$
C) $4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$
D) $4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
E) $-4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

A) -5
B) 20
C) -15
D) -20
E) 10

6. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 \cdot 2 - \ldots$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

A) $2 \cdot 0 \cdot 3$
B) $5 \cdot 0 \cdot 1$
C) $4 \cdot 2 \cdot 3$
D) $2 \cdot 0 \cdot (-1)$
E) $7 \cdot 1 \cdot (-2)$

7. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

A) 21
B) -13
C) -64
D) 60
E) -11

8. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + ... + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосынды жазылмаған?

A) $3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
B) $5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$
C) $1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
D) $-5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$
E) $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

9. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

A) 16
B) 25
C) 5
D) -20
E) 10

10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + ...)$ анықтауышының жіктелуінде қайсы қосындысы жазылмаған?

A) $1\cdot(-3)\cdot 3$

B) $2\cdot 4\cdot 3$

C) $2\cdot(-2)\cdot 2$

D) $1\cdot 2\cdot 3$

E) $2\cdot(-2)\cdot 4$

3 Тест «Матрицаларды санға көбейту, қосу (азайту), матрицаларды көбейту. кері матрица»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Матрицаларды санға көбейту, қосу (азайту), матрицаларды көбейту амалдарына», «Кері матрицаны табуға» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

3.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

3.1-мысал: Егер $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ болса, онда $C=A\cdot B$ матрицасының c_{31} элементін табыңыз.

Шешімі:

a) *A және B матрицаларының көбейтіндісін* табу формуласы:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix};$$

b) Бізге C матрицасының тек бір c_{31} элементін табу керек болғандықтан A матрицасының үшінші жолы элементтерін ғана алып оны B матрицасының бірінші бағанының сәйкес элементтеріне көбейтсек жеткілікті:

$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=-1\cdot 3+0\cdot 2+8\cdot 7=-3+0+56=53;$$

c) Жауабы: $c_{31}=53$.

Ескерту. Екі матрицаны бір-біріне тек сол жақтағы матрицаның бағандар саны оң жақтағы матрицаның жолдар санына тең болғанда ғана көбейтуге болады:

$A(m\times n)B(s\times p)$ - *мағыналы* $\Leftrightarrow n=s$.

3.2-мысал: A және B матрицалары берілген. $C = A \cdot B$ көбейтіндісінде көрсетілмеген элементті табыңыз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -11 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & 40 & \dots \end{pmatrix}.$$

Шешімі:

a) *A және B матрицаларының көбейтіндісін* табу формуласы:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix};$$

b) Бізге C матрицасының тек бір c_{33} элементін табу керек болғандықтан A матрицасының үшінші жолы элементтерін ғана алып оны B матрицасының үшінші бағанының сәйкес элементтеріне көбейтсек жеткілікті:

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -8 + 9 + 1 = 2;$$

c) Жауабы: $c_{33} = 2$.

3.3-мысал: $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын табыңыз.

Шешімі:

a) *A матрицасының кері матрицасын* табу формуласы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

мұндағы *A матрицасының анықтауышы*:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыш-тары: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;

b) A матрицаның анықтауышын есептесек

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 15 = 25 \neq 0;$$

A матрицасы элементтерінің алгебралық толықтауыштары:

$A_{11} = (-1)^{1+1} 4 = 4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} 3 = -3;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} 10 = 10;$

Демек, A матрицасының кері матрицасы: $A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix};$

c) Жауабы: $A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$

Ескерту. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ теңдігін қолданып жауаптың дұрыстығын тексерейік:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 40-15 & -30+30 \\ 20-20 & -15+40 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$A \cdot A^{-1} = E$ теңдігі орынды, олай болса A^{-1} шынында да A матрицасының кері матрицасы болады.

3.4-мысал: $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $4A - 2B$ матрицасын табыңыз.

Шешімі:

a) Матрицаның санға көбейтілуі деп матрицаның әрбір элементін осы санға көбейткенде пайда болған матрицаны айтамыз:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix};$$

b) Бірдей өлшемді *матрицалардың қосындысы (айырмасы)* деп олардың сәйкес элементтерінің қосындыларынан (айырмаларынан) тұратын матрицаны айтамыз.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix};$$

$$4A - 2B = 4\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 12 \\ 20 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 8 \\ 10 & 10 \end{pmatrix};$$

c) Жауабы: $4A-2B=\begin{pmatrix}44 & 8\\ 10 & 10\end{pmatrix}$.

3.5-мысал: $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & -6 & 1\end{pmatrix}$ берілген. $C=A+B^T$ матрицасының бірінші жолының элементтерін жазыңыз.

Шешімі:

a) $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}$ матрицасының жолдарын сәйкес бағандарымен алмастыруды B матрицасын *транспонирлеу* дейміз де, пайда болған матрицаны *транспонирленген матрица* деп аталып,

$$B^T=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21}\\ b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\end{pmatrix}$$

түрінде белгіленеді.

Бірдей өлшемді *матрицалардыңқосындысы(айырмасы)* деп олардың сәйкес элементтерінің қосындыларынан (айырмаларынан) тұратын матрицаны айтамыз:

$$A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22}\\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32}\end{pmatrix};$$

b) $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & -6 & 1\end{pmatrix}$ матрицасының $B^T=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & -6\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ транспонирленген матрицасын табамыз. Ізделінді

$$C=A+B^T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & -6\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 7+0\\ -2+1 & 3+(-6)\\ 5+(-2) & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -1 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

c) *Жауабы*: Бірінші жолының элементтері: $5;\ 7$.

3.6-мысал: $B=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 21 & -3\end{pmatrix}$ және $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $B\cdot E$ матрицасын табыңыз.

Шешімі:

a) Бас диагональ элементтерінің барлығы бірге тең диагоналдық матрица *бірлік матрица* деп аталады. Бірлік матрица

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

түрінде белгіленеді.

Кез келген матрицаны бірлік матрицаға немесе бірлік матрицаны кез келген матрицаға көбейтсек матрицаның өзі шығады:

$$B\cdot E=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}\cdot 1+b_{12}\cdot 0 & b_{11}\cdot 0+b_{12}\cdot 1 \\ b_{21}\cdot 1+b_{22}\cdot 0 & b_{21}\cdot 0+b_{22}\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$E\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot b_{11}+0\cdot b_{21} & 1\cdot b_{12}+0\cdot b_{22} \\ 0\cdot b_{11}+1\cdot b_{21} & 0\cdot b_{12}+1\cdot b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

яғни $B\cdot E=E\cdot B=B$.

b) Осы тепе-теңдікті ескерсек, $B\cdot E=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}$.

c) Жауабы: $B\cdot E=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2 Тест тапсырмалары

1. Егер $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ болса, онда $C=A\cdot B$ матрицасының c_{12} элементін табыңыз.

A) 6
B) -6
C) 10
D) -10
E) -1

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын табыңыз.

A) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. A және B матрицалары берілген, C матрицасын табыңыз, мұндағы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, C = 2A – B.

A) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ берілген. $C = A + B^T$ матрицасының екінші жолының элементтерін жазыңыз

A) 0; 0

B) 0; 1

C) 2; 2

D) 1; 1

E) 3; 2

5. $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ матрицалары берілген, $B\cdot E$ матрицасы неге тең?

A) $\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}$

6. A және B матрицалары берілген. $C=A\cdot B$ көбейтіндісінде көрсетілмеген элементті табыңыз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -2 & 5 & 3\\ 6 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4 & 25 & 13\\ 10 & 19 & 1\\ 0 & 31 & \ldots\end{pmatrix}.$$

A) $c_{33}=5$

B) $c_{33}=8$

C) $c_{33}=-5$

D) $c_{33}=10$

E) $c_{33}=8$

7. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын табыңыз.

A) $-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

B) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

D) $-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

E) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

8. A және B матрицалары берілген, C матрицасын табыңыз, мұндағы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C=2A-B.$

A) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -12 & -1 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ берілген. $C=A+B^T$ матрицасының бірінші жолының элементтерін жазыңыз:

A) 0; 0

B) 0; 1

C) 2; 2

D) 5; 5

E) 3; 2

10. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген, $B\cdot E$ матрицасы неге тең?

A) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

4 Тест «Сызықтық алгебра элементтерің теориялық сұрақтары»

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 1» пәнінің «Матрицалар, олардың түрлері, амалдар қолдану», «Екінші, үшінші және n-ретті анықтауыштар, қасиеттері және есептеу әдістері», «Матрицаның рангісі. Сызықтық біртекті және біртексіз алгебралық теңдеулер жүйесі, шешу әдістері» тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

1. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ көбейтіндісінен шығатын матрицаның жазылуын көрсетіңіз.

A) $\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} a_1b_1 + & a_1b_2 + & a_1b_3 \\ a_2b_1 + & a_2b_2 + & a_2b_3 \\ a_3b_3 + & a_3b_3 + & a_3b_3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} a_1b_1 + & a_2b_1 + & a_3b_1 \\ a_1b_2 + & a_2b_2 + & a_3b_2 \\ a_1b_3 + & a_2b_3 + & a_3b_3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 \end{pmatrix}$

2. Кез келген ретті анықтауыштың екі жолының немесе екі бағанасының орындарын ауыстырса, анықтауыштың ...
A) таңбасы өзгермейді
B) реті өзгереді
C) таңбасы ғана өзгереді
D) мәні өзгермейді
E) реті өзгермейді

3. Бірдей бағаналары немесе жолдары бар анықтауыштың мәні келесі санға тең болады:
A) 0
B) 1
C) 5
D) 6
E) 4

4. Егер анықтауыштың белгілі бір бағанасының (жолының) элементтеріне басқа бағанасының (жолының) элементтерін бір санға көбейтіп қосса, онда анықтауыштың ...
A) реті өзгереді
B) мәні өзгереді
C) таңбасы өзгереді
D) мәні өзгермейді
E) реті өзгермейді

5. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда оның анықтауышы … болуы мүмкін.
A) функция немесе сан
B) тек функция
C) тек нөлден айрықша сан
D) тек сан
E) тек нөл саны

6. $m \times n$ өлшемді матрица деп $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ түріндегі m жол мен n бағаннан тұратын тіктөртбұрышты кестені

айтамыз, мұндағы a_{ij} - ... деп аталады.

A) матрицаның элементі
B) матрицаның анықтауышы
C) матрицаның миноры
D) матрицаның рангісі
E) матрицаның алгебралық толықтауышы

7. Элементтерінің барлығы нөлге тең матрица ... деп аталады.

A) нөлдік матрица
B) қарама-қарсы матрица
C) ауыстырымды матрица
D) үшбұрышты матрица
E) эквивалентті матрица

8. Бірдей өлшемді матрицалардың қосындысы деп олардың … матрицаны айтамыз**.**

A) сәйкес элементтерінің орындарын ауыстыруынан тұратын
B) сәйкес элементтерінің қосындыларынан тұратын
C) сәйкес элементтерінің айырмаларынан тұратын
D) сәйкес элементтерінің көбейтіндісінен тұратын
E) сәйкес элементтерінің қатынасынан тұратын

9. Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттерінің қайсысы дұрыс берілмеген?

A) $A+O=O+A=A$
B) $A+B=B+A$
C) $(A+B)+C=A+(B+C)$
D) $A-A=E$
E) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

10. Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттерінің қайсысы дұрыс көрсетілмеген?

A) $A+O=O+A=O$
B) $A+B=B+A$
C) $(A+B)+C=A+(B+C)$
D) $A-A=O$
E) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

11. $-A$ матрицасы A матрицасына … деп аталады.

A) қарама-қарсы матрица
B) нөлдік матрица
C) ауыстырымды матрица
D) үшбұрышты матрица
E) эквивалентті матрица

12. n ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің миноры деп

A) диагональдық элементтерінің көбейтіндісіне тең санды айтады
B) i-ші жолын және j-ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті матрицаны айтамыз
C) n ретті анықтауыштың i-ші жолын және j-ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз
D) n ретті анықтауыштың i-ші жолын және j-ші бағанасын сызғаннан пайда болған $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз
E) n ретті анықтауыштың i-ші бағанасын және j-ші жолын сызғаннан пайда болған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтамыз

13. A квадраттық матрица айрықша (ерекше) деп аталады, егер

A) $A \cdot A^{-1} = E$
B) $|A| \neq 0$
C) $|A| = 0$
D) $A \cdot A^{-1} \neq E$
E) $|A| = 1$

14. A – сызықты теңдеулер жүйесінің айнымалыларының алдындағы коэффициенттерінен құралған матрица, ал B – жүйенің кеңейтілген матрицасы болсын. Сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шартты көрсетіңіз.

A) $\text{rang}A > \text{rang}B$
B) $\text{rang}A < \text{rang}B$
C) $\text{rang}A = \text{rang}B$
D) $\text{rang}A \neq \text{rang}B$

E) $\text{rang}A - \text{rang}B = -1$

15. Бас диагональ элементтерінен басқа элементтері нөлге тең квадраттық матрица … деп аталады.
A) диагональдық матрица
B) қарама-қарсы матрица
C) нөлдік матрица
D) ауыстырымды матрица
E) эквивалентті матрица

16. Сызықты теңдеулер жүйесі анықталған деп аталады, егер оның
A) шексіз көп шешімі болса
B) жалғыз шешімі болса
C) анықтауышы нөлге тең болса
D) не шексіз көп шешімі бар, не шешімі жоқ болса
E) шешімі жоқ болса

17. A матрицасына A^{-1} кері матрица деп аталады, егер төмендегі теңдік орындалса (E – бірлік матрица):
A) $AE = A^{-1}$
B) $A^{-1}A = A^{-1}$
C) $A^{-1}E = A$
D) $A^{-1}A = E, \det A \neq 0$
E) $A^{-1}A = A$

18. Бірлік матрица дегеніміз не?
A) Барлық элементтері 1–ге тең тіктөртбұрыштық матрица
B) Барлық элементтері 1–ге тең квадраттық матрица
C) Анықтауышы 1–ге тең квадраттық матрица
D) Бас диагональ бойындағы элементтері 1–ге тең, ал қалған элементтері 0–ге тең квадраттық матрица
E) Көмекші диагональ бойындағы элементтері 1–ге тең, ал қалған элементтері 0–ге тең квадраттық матрица

19. Алгебралық толықтауыш үшін дұрыс теңдікті көрсетіңіз.
A) $A_{ij} = -M_{ij}$
B) $A_{ij} = M_{ij}$

C) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

D) $A_{ij} = (-1)^{i} M_{ij}$

E) $A_{ij} = (-1)^{j} M_{ij}$

20. Егер анықтауыштың жол (бағана) элементтерінің барлығы нөлге тең болса, онда анықтауыш

A) > 0
B) < 0
C) $= 0$
D) < 1
E) > 1

21. A матрицасының элементтерін олардың алгебралық толықтауыштарымен ауыстырғанда пайда болған матрицаны A матрицасының …деп атаймыз.

A) көмекші матрицасы
B) диагональдық матрицасы
C) бірлік матрицасы
D) үшбұрышты матрицасы
E) ауыстырымды матрицасы

22. Үш айнымалысы бар үш сызықты теңдеулер жүйесі не шексіз көп шешімі бар, не шешімі жоқ болады, егер оның матрицасының анықтауышы

A) нөлге тең болса
B) нөлге тең емес болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

23. Үш айнымалысы бар үш сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі болмайды, егер оның матрицасының анықтауышы

A) нөлге тең емес болса
B) нөлге тең болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

24. Егер A және B матрицаларының бірін екіншісінен оған қарапайым түрендірулер қолдану арқылы алуға болса, онда A, B матрицалары … деп аталады.
A) нөлдік матрицалар
B) ауыстырымды матрицалар
C) жоғары үшбұрышты матрицалар
D) төменгі үшбұрышты матрицалар
E) эквивалентті матрицалар

25. Қай жағдайда A және B матрицаларының көбейтіндісі бар болады?
A) $A(3\times1)\cdot B(1\times2)$
B) $A(3\times1)\cdot B(2\times3)$
C) $A(3\times1)\cdot B(3\times2)$
D) $A(2\times3)\cdot B(2\times3)$
E) $A(1\times3)\cdot B(1\times2)$

26. Матрицаны тасымалдау дегеніміз не?
A) Матрица жолын бағанаға алмастыру
B) Кері матрицаны анықтау
C) Көмекші матрицаны анықтау
D) Матрица анықтауышын есептеу
E) Кеңейтілген матрицаның рангісін есептеу

27. Егер қандай да бір жолдың (бағанасының) барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыштың мәні
A) бірге тең
B) бірден үлкен санға тең
C) нөлге тең
D) алтыға тең
E) $k\ (k\neq0)$ санына көбейтіледі

28. Егер анықтауыштың жолдарын (бағаналарын) сәйкес бағаналарымен (жолдарымен) алмастырсақ, анықтауыштың мәні
A) өзгермейді
B) таңбасын өзгертеді
C) нөлге тең

D) бірге тең
E) $k\ (k \neq 0)$санына санына кемиді

29. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ түріндегі матрица ... деп аталады.

A) диагональдық матрица
B) бірлік матрица
C) жоғары үшбұрышты матрица
D) төменгі үшбұрышты матрица
E) ауыстырымды матрица

30. Егер $A \cdot B$ және $B \cdot A$ көбейтінділері табылып, әрі $A \cdot B = B \cdot A$ болса, онда A және B матрицалары ... деп аталады.
A) нөлдік матрицалар
B) ауыстырымды матрицалар
C) жоғары үшбұрышты матрицалар
D) төменгі үшбұрышты матрицалар
E) бірлік матрицалар

31. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық матрицасының $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері ... деп аталады.
A) бас диагональ элементтері
B) қосалқы диагональ элементтері
C) жол элементтері
D) бағана элементтері
E) бос мүшелері

32. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық (текше) матрицасы ... деп аталады.

A) бірлік матрица
B) жоғарғы үшбұрышты матрица
C) нөлдік матрица
D) ауыстырымды матрица
E) төменгі үшбұрышты матрица

33. $C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық (текше) матрицасы ... деп аталады.

A) жоғарғы үшбұрышты матрица
B) бірлік матрица
C) төменгі үшбұрышты матрица
D) ауыстырымды матрица
E) нөлдік матрица

34. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасының A^{-1} кері матрицасы қай формуламен есептеледі?

A) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

B) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot E$

C) $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

D) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

E) $A^{-1} = E \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

35. Матрицасының рангісі деп нөлден айрықша осы матрицаның ... айтамыз.

A) ең үлкен ретін
B) ең үлкен элементін
C) ең кіші элементін
D) анықтауышының ең үлкен ретін
E) минорының ең үлкен ретін

36. Егер бірдей өлшемді екі матрицаның сәйкес элементтері тең болса, онда матрицалар .... деп аталады.

A) диагональдық матрицалар
B) квадраттық матрицалар
C) үшбұрышты матрицалар
D) тең матрицалар
E) тасымалданған матрицалар

37. Матрицаны рангісі оны тасымалдағаннан өзгере ме?

A) өзгермейді
B) нөлге тең болады
C) екі еселенеді
D) екіге кемиді
E) өзгереді

38. $A = (a_{11})$ бірінші ретті матрицасының анықтауышы деп ... санын айтамыз.

A) a_{12}

B) a_{13}

C) a_{11}

D) a_{21}

E) a_{22}

39. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ түріндегі n белгісізді m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің матрицасы - ....

A) бірлік матрица
B) белгісіздердің алдындағы коэффициенттер мен бос мүшеден құрылған матрица
C) белгісіздердің алдындағы коэффициенттерден құрылған матрица
D) бос мүшелер матрицасы
E) диагоналдық матрица

40. Матрицаның рангісі оның барлық элементтері нөлге тең жолды немесе бағанды сызсақ (алып тастасақ) өзгере ме?

A) өзгермейді
B) нөлге тең болады
C) екі еселенеді
D) екіге кемиді
E) өзгереді

41. Тек бір бағанадан тұратын $B(n,1) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицасын ... деп атаймыз.

A) баған-матрица
B) жол-матрица
C) квадраттық матрица
D) диагональдық матрица

E) тасымалданған матрица

42. $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ берілген $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

жүйесінің ... деп атаймыз.

A) кеңейтілген матрицасы
B) жүйенің матрицасы
C) тасымалданған матрицасы
D) белгісіздер матрицасы
E) бос мүшелер матрицасы

43. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының анықтауышы неге тең?

A) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
B) $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}$
C) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
D) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
E) $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$

44. A квадраттық матрицасы қайтымды немесе ерекше емес матрица деп аталады, егер ....

A) $A\cdot A^{-1}=E$
B) $\det A\neq 0$
C) $\det A=0$
D) $A\cdot A^{-1}\neq E$
E) $\det A=1$

45. Тек бір жолдан тұратын $A(1,m)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$ матрицасын ... деп атаймыз:

A) баған-матрица
B) жол-матрица
C) квадраттық матрица

D) диагональдық матрица
E) тасымалданған матрица

46. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ квадраттық матрицасының $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ бірдей индексті элементтері ... деп аталады.
A) бас диагональ элементтері
B) қосалқы диагональ элементтері
C) жол элементтері
D) бағана элементтері
E) бос мүшелері

47. Сызықты теңдеулер жүйесі біртекті деп аталады, егер
A) жүйенің бос мүшесінің біреуі нөлге тең болмаса
B) жүйенің бос мүшесінің біреуі нөлге тең болса
C) жүйенің бос мүшесінің барлығы нөлге тең болса
D) жүйенің босмүшесініңбарлығыбіргетеңболса
E) жүйенің тек бір ғана бос мүшесі бірге тең болса

48. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ екінші ретті анықтауышының есептеу формуласын көрсетіңіз.
A) $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
B) $a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}$
C) $a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}$
D) $a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22}$
E) $a_{22}a_{21}-a_{11}a_{12}$

49. Дұрыс теңдікті таңдаңыз.
A) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$

C) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$

D) $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$

50. Егер матрицаның жол және бағана сандары өзара тең болса, онда матрица .... деп аталады.

A) диагональдық матрица
B) квадраттық матрица
C) үшбұрышты матрица
D) бірлік матрица
E) тасымалданған матрица

5 Тест «Біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістеріне» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

5.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

n белгісізді n біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістерін қарастырайық.

5.1-мысал: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

Шешімі:

а) Матрицалық әдіс.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5.1)$$

n белгісізді n біртексіз сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі берілсін.

Жүйені

$$AX = B \quad (5.2)$$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - жүйенің матрицасы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - бос мүшелер матрицасы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - белгісіздер матрицасы.

(5.2) теңдеуінің шешімі

$$X = A^{-1}B \quad (5.3)$$

екендігі шығады. (5.3) теңдігін

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

түрінде жазып алып, оның оң жағындағы көбейтіндіні есептесек

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз.

Ескерту. Матрицалық әдіс жүйенің матрицасы қайтымды, яғни $\det A \neq 0$ жағдайында ғана қолданылады.

b) Жүйені

$AX = B$

матрицалық түрінде жазып аламыз, мұндағы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}$$ - жүйенің матрицасы;

$$B=\begin{pmatrix}-7\\ -1\\ -5\end{pmatrix}$$ - бос мүшелер матрицасы;

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$ - белгісіздер матрицасы.

X матрицасын (5.4) формуласын қолданып табамыз. Жүйе матрицасының анықтауышы

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

яғни жүйенің матрицасы қайтымды. Формуладағы алгебралық толықтауыштарды $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ формуласымен табамыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -4 & 0\end{vmatrix}=8,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -4 & 0\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8.\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=5,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=11,$$

$\det A$ және алгебралық толықтауыштардың мәндерін X матрицасына қойсақ:

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -4 & -10\\ 2 & -1 & -3\\ -8 & 5 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\ -1\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8(-7)+(-4)(-1)+(-10)(-5)\\ 2(-7)+(-1)(-1)+(-3)(-5)\\ (-8)(-7)+5(-1)+11(-5)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

немесе

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

түріндегі теңдікті аламыз.

c) Жауабы: $(-1, 1, -2)$.

Ескерту. Матрицалық әдіс бұл тараудың есептерін шығаруда есептеу жолы ұзақ болғандықтан тиімсіз екенін ескерген жөн. Сондықтан, аталған әдістердің уақыт үнемдеу мақсатында ең тиімдісін таңдаған дұрыс.

5.2-мысал: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесімен шешу керек.

Шешімі:

а) Крамер ережесі.

(5.1) жүйесінің коэффициенттерінен, олардың орналасу ретін сақтай отыра құрылған

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A$$

анықтауышы (5.1) жүйесінің *анықтауышы* деп аталады.

Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (5.1) жүйесінің шешімі

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{5.5}$$

формуласымен анықталады, мұндағы Δ_i - Δ анықтауышындағы i - ші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыш.

b) Жүйенің шешімін Крамер ережесімен табайық. Жүйенің анықтауышы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

онда (5.5) формуласы бойынша жүйенің шешімі

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - Δ анықтауышындағы сәйкесінше бірінші, екінші, үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-7 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ -5 & -4 & 0\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -7 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 0\end{vmatrix}=2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & -7\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -4 & -5\end{vmatrix}=-4.$$

Бұдан

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-2.$$

c) Жауабы: $(-4;1;-2)$.

5.3-мысал: $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7\end{cases}$ жүйесін Жордан-Гаусс әдісімен шешу керек.

Шешімі:

a) *Жордан-Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі).*

Матрицалық және Крамер әдістерін тек жолдарының саны бағандарының санына тең және де анықтауышы нөлден өзгеше жүйелерді шешу үшін ғана қолдана аламыз. Гаусс әдісінің ерекшелігі – оны кез келген жүйеге қолдануға болады.

Бұл әдіс жүйенің бір теңдеуін оған басқа бір теңдеуді бір санға көбейтіп алып қосқанда шыққан теңдеумен ауыстырғаннан жүйенің шешімі өзгермейді деген тұжырымға негізделген.

Аталған түрлендіруді тізбектеп қолдана отырып (5.1) жүйесінің теңдеулерінде белгісіздерді жою арқылы жүйе

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3=b_2^{(1)}\\ a_{33}^{(2)}x_3=b_3^{(2)}\end{cases}\qquad (5.6)$$

түріндегі үшбұрышты анықталған жүйеге немесе белгісіздер саны теңдеулер санынан артық болатын жүйеге, немесе үйлесімсіз жүйеге әкелінеді.

Бірінші жағдайда соңғы теңдеуден x_3 белгісізін тауып алып төменнен санағанда екінші теңдеуге қою арқылы x_2 белгісізін табамыз, сонан соң x_2, x_3 мәндерін бірінші теңдеуге қойып x_1 мәнін табамыз.

b) Жүйенің шешімін Жордан-Гаусс әдісімен табайық.

Бірінші және екінші теңдеулердің орнын ауыстырамыз

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз. Енді, бірінші теңдеуді (–1)-ге көбейтіп, оны үшінші жолға қосамыз. Сонымен, екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Екінші жолды $\left(-\frac{2}{11}\right)$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз. Сөйтіп, үшінші теңдеудегі x_2 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \frac{2}{11}x_3 = -\frac{4}{11} \end{cases}$$

Енді төменнен жоғары қарай біртіндеп белгісіздерді табалық: үшінші теңдеуді шешіп $x_3 = -2$, табылған $x_3 = -2$ мәнін екінші теңдеуге қойып, шешсек $x_2 = 1$. Табылған $x_3 = -2$, $x_2 = 1$ мәндерін бірінші теңдеуге қойсақ, $x_1 = -1$ болады.

c) Жауабы: $(-1, 1, -2)$.

5.2 Тест тапсырмалары

1. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 2z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$ жүйесін шешіп, z белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 1
B) 0
C) 2
D) -1
E) 3

2. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z=3 \\ 5y+z=11 \end{cases}$ жүйесін шешіп, y белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 1
B) -1
C) 3
D) -2
E) 2

3. $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ 17y-z=-19 \\ y=-1 \end{cases}$ жүйесін шешіп, x белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 3
B) 0
C) 2
D) -1
E) 4

4. $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ 2y-3z=-9 \\ y+5z=2 \end{cases}$ жүйесін шешіп, z белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 4
B) 1
C) 2
D) -1
E) 3

5. $\begin{cases} 3x+4y+3z=5 \\ 19y+6z=20 \\ 17y+3z=25 \end{cases}$ жүйесін шешіп, y белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 1
B) 0
C) 2
D) -2
E) -3

6. $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ y-8z=-5 \\ 4y+3z=15 \end{cases}$ жүйесін шешіп, x белгісізінің мәнін табыңыз.

A) -2
B) 1
C) -1
D) 0
E) 4

7. $\begin{cases} 2x-3y+z=-2 \\ y-4z=13 \\ y+2z=-5 \end{cases}$ жүйесін шешіп, z белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 1
B) -3
C) 2
D) -1
E) 3

8. $\begin{cases} 2x+y+3z=-3 \\ y-4z=6 \\ 9y+17z=1 \end{cases}$ жүйесін шешіп, y белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 6
B) 0
C) 2
D) -2
E) -1

9. $\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ 3y+2z=5 \\ 7y+10z=1 \end{cases}$ жүйесін шешіп, x белгісізінің мәнін табыңыз.

A) -1
B) -2
C) 2
D) 1
E) 0

10. $\begin{cases} 2x+5y+2z=7 \\ 3y+4z=1 \\ 11y+7z=19 \end{cases}$ жүйесін шешіп, z белгісізінің мәнін табыңыз.

A) 1
B) 0
C) 2
D) -1
E) -2

6 Тест «Векторлар, оларға қолданылатын қосу (азайту) амалдары»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Векторлар, оларға қолданылатын қосу (азайту) амалдарына» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

6.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

6.1-мысал: A(0;5;–2), B(–3;1;–3), C(7;2;0), D(3;–2;–1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AD} \pm \overrightarrow{BC}$ координаталарын табыңыз.
Шешімі:

a) Басы $A(x_1; y_1)$ нүктесінде, ұшы $B(x_2; y_2)$ нүктесінде орналасқан $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталық түрі:
$\overrightarrow{AB} \in OXY \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$;
$\overrightarrow{AB} \in OXYZ \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.
Координаталық түрде берілген $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ үшін
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$
болады.

b) $\overrightarrow{AD} = (3-0; -2-5; -1-(-2)) = (3; -7; 1)$;
$\overrightarrow{BC} = (7-(-3); 2-1; 0-(-3)) = (10; 1; 3)$;
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (3; -7; 1) + (10; 1; 3) = (3+10; -7+1; 1+3) = (13; -6; 4)$;
$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = (3; -7; 1) - (10; 1; 3) = (3-10; -7-1; 1-3) = (-7; -8; -2)$.

c) Жауабы:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (13; -6; 4);$

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = (-7; -8; -2).$

6.2 Тест тапсырмалары

1. A(0;1;−2), B(1;1;−3), C(1;2;0), D(3;2;−1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ координаталарын табыңыз.

A) (−1;0;1)
B) (−1;0;0)
C) (2;0;1)
D) (0;0;1)
E) (1;0;2)

2. A(4;1;0), C(2;1;0), D(2;1;4) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ координаталарын табыңыз.

A) $(2; 0; 4)$
B) (−2;1;1)
C) (−2;0;8)
D) (1;2;−4)
E) (0;2;8)

3. A(2;1;0), B(0;1;3), C(1;3;0), D(0;1;5) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ координаталарын табыңыз.

A) (1;0;1)
B) (−1;2;−2)
C) (1;1;−4)
D) (2;1;3)
E) (1;4;−2)

4. A(1;−1;0), B(1;1;3), C(4;0;1), D(0;1;2) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ координаталарын табыңыз.

A) (1;0;1)
B) (1;2;−2)
C) (1;1;−4)
D) (−4;3;4)

E) (1;4;−2)

5. A(0;−1;2), B(2;1;2), C(2;1;0), D(0;2;1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ координаталарын табыңыз.

A) (1;3;−3)
B) (0;2;2)
C) (1;−2;1)
D) (0;2;−3)
E) (4;1;−1)

6. A(2;−1;0), B(1;2;1), C(0;3;−2) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ координаталарын табыңыз.

A) (2;2;−3)
B) (2;4;−3)
C) (−3;7;−1)
D) (−2;2;0)
E) (1;2;3)

7. A(5;1;2), B(0;1;−2), C(1;2;1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ координаталарын табыңыз.

A) (4;2;−3)
B) (−1;−1;−3)
C) (1;2;−1)
D) (−4;2;3)
E) (4;3;−2)

8. A(1;2;1), B(3;4;2), C(−1;5;0) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ координаталарын табыңыз.

A) (−2;2;−3)
B) (2;2;3)
C) (0;5;0)
D) (−2;2;1)
E) (2;2;−1)

9. A(1;−1;1), B(2;4;2), C(1;3;0) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ координаталарын табыңыз.

A) (2;1;1)

B) (−2;1;−1)

C) (−1;−1;1)

D) (0;2;−1)

E) (1;1;2)

10. A(2;−1;0), B(1;3;1), C(0;4;5) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ координаталарын табыңыз.

A) (−2;5;5)

B) (−2;1;3)

C) (2;−5;2)

D) (−2;2;1)

E) (1;−5;5)

7 Тест «Векторлардың скалярлық, векторлық, аралас көбейтіндісі»

Бұл тараудағы есептер «Математика», «Математика 1» пәндерінің«Векторлардың скалярлық, векторлық, аралас көбейтіндісіне» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

7.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

7.1-мысал: A(3;−1;0), B(5;3;4), C(0;−2;6) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

а) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ нөлдік емес *векторларының скалярлық көбейтіндісі* деп

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right) \qquad (7.1)$$

санын айтамыз, белгіленуі: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ немесе $(\vec{a},\vec{b})$.

$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ және $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ координаталық векторлары үшін скалярлық көбейтінді:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (7.2)$$

b) $\overrightarrow{AB}=(5-3;3-(-1);4-0)=(2;4;4);$

$\overrightarrow{AC}=(0-3;-2-(-1);6-0)=(-3;-1;6);$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2;4;4)\cdot(-3;-1;6)=2\cdot(-3)+4\cdot(-1)+4\cdot6=14.$

c) Жауабы: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=14.$

7.2-мысал: $\vec{a}=(1;5;0),\ \vec{b}=(3;-1;7)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

a) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ *векторларының векторлық көбейтіндісі* деп келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын айтамыз:

$\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;

$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - оң үштік құрайды.

$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ және $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ координаталық векторлары үшін векторлық көбейтінді:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k} \qquad (7.3)$$

b) (7.3) формуласы бойынша

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&0\\3&-1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&0\\-1&7\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\3&7\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&5\\3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(35-0)\vec{i}-(7-0)\vec{j}+(-1-15)\vec{k}=35\vec{i}-7\vec{j}-16\vec{k}.$$

c) Жауабы: $\vec{a}\times\vec{b}=(35;-7;-16).$

7.3-мысал: $\vec{a}=(2;3;0),\ \vec{b}=(5;-1;0),\ \vec{c}=(7;2;0)$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңыз.

Шешімі:

a) $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ *векторларының аралас көбейтіндісі* деп $\vec{a} \times \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін айтамыз да

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

түрінде белгілейміз. Анықтамадан $\vec{a}(a_x; a_y; a_z), \vec{b}(b_x; b_y; b_z), \vec{c}(c_x; c_y; c_z)$ *координаттық векторларының аралас көбейтіндісі*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

формуласы бойынша табылатыны шығады.

b) Демек, $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

c) Жауабы: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$

7.4-мысал: Төбелері A(1;2;–2), B(2;2;1), C(1;3;–3), D(1;3;0) нүктелері болатын параллелепипедтің көлемін табыңыз.

Шешімі:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторларға тұрғызылған параллелепипедтің көлемін береді:

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\right|.$$

b) $\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-2; 1-(-2)) = (1; 0; 3);$

$\overrightarrow{AC} = (1-1; 3-2; -3-(-2)) = (0; 1; -1);$

$\overrightarrow{AD} = (1-1; 3-2; 0-(-2)) = (0; 1; 2);$

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = |2+0+0-0-0+1| = |3| = 3.$$

c) Жауабы: $V = 3.$

7.2 Тест тапсырмалары

1. A(2;–1;0), B(1;3;1), C(0;4;5) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

A) 27

B) 21
C) 25
D) 18
E) 16

2. Төбелері A(1;1;1), B(2;4;0), C(3;0;3), D(2;−1;5) нүктелері болатын параллелепипедтің көлемін табыңыз.

A) 23
B) $\frac{5}{2}$
C) 15
D) 25
E) 3

3. $\vec{a}=(0;2;1)$, $\vec{b}=(4;-1;3)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

A) $(7;-1;-9)$
B) $(3;1;3)$
C) $(7;4;-8)$
D) $(5;7;3)$
E) $(5;1;3)$

4. A(1;2;1), B(3;2;−4), C(−1;5;2) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

A) 7
B) -9
C) 5
D) -8
E) 10

5. Төбелері A(1;2;−2), B(3;2;1), C(1;3;−3), D(1;4;0) нүктелері болатын параллелепипедтің көлемін табыңыз.

A) 1
B) 3
C) 8
D) 2
E) 5

6. $\vec{a}=(-1;2;3)$, $\vec{b}=(2;0;-1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

A) $(-2;-1;5)$
B) $(-2;-8;5)$
C) $(2;1;5)$
D) $(-2;-1;3)$
E) $(-2;5;-4)$

7. A(2;−1;1), B(0;4;3), C(−2;5;0) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

A) 7
B) -19
C) 5
D) -28
E) 36

8. Төбелері A(1;2;2), B(2;3;0), C(1;3;4), D(1;1;3) нүктелері болатын параллелепипедтің көлемін табыңыз.

A) 5
B) -1
C) 1
D) $\frac{1}{2}$
E) 3

9. $\vec{a}=(5;0;1)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

A) $(-22;6;10)$
B) $(-2;9;10)$
C) $(-2;6;10)$
D) $(2;4;9)$
E) $(2;-4;2)$

10. A(0;1;−2), B(4;−5;1), C(1;2;1) нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BC}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

A) 17
B) -50
C) -54
D) -28
E) 15

8 Тест «Жазықтықтағы түзу теңдеулері, нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық, түзулердің қиылысу нүктесі»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Жазықтықтағы түзу теңдеулеріне, нүктеден түзуге дейінгі арақашықтықты және түзулердің қиылысу нүктесін табуға» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

8.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

8.1-мысал: $M(5;0)$ нүктесі арқылы $\vec{n}(1;0)$ векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

a) l қарастырылып отырған түзу болсын да, $M(x;y)$ - түзудің $M_o(x_o;y_o)$ нүктесінен өзгеше кез келген нүктесі болсын. Онда

$$M(x;y)\in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)\perp \vec{n}(A;B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)\cdot \vec{n}(A;B)=0\Leftrightarrow$$

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0. \qquad (8.1)$$

(8.1) теңдеуі - $M_o(x_o;y_o)$ *нүктесі арқылы* $\vec{n}(A;B)$ *векторына перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі*. $\vec{n}$ векторы *түзудің нормальдық векторы* деп аталады.

b) есептің шарты бойынша $x_o=5,\ y_o=0$ және $A=1,\ B=0$ болғандықтан (8.1) теңдеуінен түзудің

$$1(x-5)+0(y-0)=0\Rightarrow x-5=0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

c) Жауабы: $x-5=0.$

8.2-мысал: $M(7;2)$ нүктесінен $\vec{a}=\{1;5\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

a) $M_o(x_o; y_o) \neq M(x; y)$ және

$M(x; y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0) = \lambda\vec{a}(a_x; a_y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0) = (\lambda\vec{a})(\lambda a_x; \lambda a_y) \Leftrightarrow$

$x - x_0 = \lambda a_x$ және $y - y_0 = \lambda a_y \Leftrightarrow$:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y},\ \text{егер}\ a_x \neq 0,\ a_y \neq 0\ \text{болса;} \qquad (8.2)$$

(8.2) теңдеуі - $M_o(x_o; y_o)$ *нүктесі арқылы* $\vec{a}(a_x; a_y)$ *векторына параллель өтетін түзудің теңдеуі*. $\vec{a}$ векторы түзудің *бағыттаушы векторы* деп аталады.

b) есептің шарты бойынша $x_o = 7, y_o = 2$ және $a_x = 1, a_y = 5$ болғандықтан (8.2) теңдеуінен түзудің

$$\frac{x - 7}{1} = \frac{y - 2}{5} \Rightarrow 5(x - 7) = y - 2 \Rightarrow 5x - y - 33 = 0$$

түріндегі теңдеуін аламыз.

c) Жауабы: $5x - y - 33 = 0.$

8.3-мысал: $M(7; 2)$ нүктесінен $\vec{a} = \{0; -2\}$ векторына параллель өтетін түзу теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

a) (8.2) теңдеуінде

егер $a_x = 0$ болса, онда $x = x_0$;

егер $a_y = 0$ болса, онда $y = y_0$.

b) есептің шарты бойынша $x_0 = 7,\ y_0 = 2,\ a_x = 0,\ a_y = -2$ болғандықтан, есеп $a_x = 0$ жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі $x = x_0$, яғни $x = 7$

түрінде жазылады.

c) Жауабы: $x = 7$.

8.4-мысал: $M_1(1; 2)$ және $M_2(-1; 0)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

Шешімі:

a) Бұл арада 2) жағдайындағы $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі ретінде $M_1(x_1; y_1)$ нүктесін, ал $\vec{a}$ векторы ретінде $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ векторын алсақ (8.1) теңдеуінен түзудің келесі теңдеулерін аламыз:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, егер $x_2 \neq x_1$ және $y_2 \neq y_1$; (8.3)

b) $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің (8.3) теңдеуіне $x_1=1, y_1=2, x_2=-1, y_2=0$ мәндерін қою арқылы

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-2}{0-2}=\frac{x-1}{-1-1} \Rightarrow y-2=x-1 \Rightarrow x-y+1=0$$

теңдеуін аламыз.

c) Жауабы: $x-y+1=0$.

8.5-мысал: $M_1(2;-1)$ және $M_2(5;-1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

Шешімі:

a) (8.3) теңдеуінде

егер $x_1=x_2$ болса, онда $x=x_1$;

егер $y_1=y_2$ болса, онда $y=y_1$.

b) есептің шарты бойынша $x_1=2, y_1=-1, x_2=5, y_2=-1$ болғандықтан, есеп $y_1=y_2$ жағдайына жатады да, түзудің теңдеуі $y=y_1$, яғни $y=-1$ түрінде жазылады.

c) Жауабы: $y=-1$.

8.6-мысал: $3x-4y-29=0$ және $3x+2y-5=0$ түзулерінің қиылысу нүктесін табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $M_0(x_0; y_0)$ нүктесі l_1, l_2 түзулерінің қиылысу нүктесі болса, онда ол l_1 түзуіне де және l_2 түзуіне де тиісті болады да, сызықтың теңдеуінің анықтамасы бойынша екі теңдеудің де шешімі, яғни осы екі теңдеуден тұратын

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \quad (8.4)$$

жүйесінің шешімі болады.

Сонымен түзулердің қиылысу нүктесін табу дегеніміз осы түзулердің теңдеуінен құрылған жүйенің шешімін табу деген сөз болады.

Демек, түзулердің теңдеулерінен тұратын (8.4) жүйесін құрамыз, яғни $A_1x+B_1y+C_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулерімен

сәйкесінше берілген l_1 және l_2 түзулерінің қиылысу нүктесін анықтау есебін қарастырамыз.

Үш жағдай болуы мүмкін:

(8.4) *жүйесінің жалғыз шешімі* $(x_0; y_0)$ *бар* $\Rightarrow M_0(x_0; y_0)$ - l_1, l_2 түзулерінің жалғыз қиылысу нүктесі;

(8.4) *жүйесінің шексіз көп шешімі бар* $\Rightarrow l_1, l_2$ түзулері беттесіп жатыр;

(8.4) *жүйесінің шешімі жоқ* $\Rightarrow l_1 \,//\, l_2$;

b) Есеп шартындағы түзулердің теңдеулерінен тұратын (8.4) жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} 3x-4y-29=0 \\ 3x+2y-5=0. \end{cases}$$

Жүйені шешіп алып $\begin{cases} x=\dfrac{13}{3} \\ y=-4 \end{cases}$, түзулердің қиылысу нүктесін жазамыз: $M\left(\frac{13}{3}; -4\right)$.

c) Жауабы: $M\left(\frac{13}{3}; -4\right)$.

8.7-мысал: $5x+2y-8=0$ түзуінің OY өсімен қилысқандағы ординатасын табыңыз.

Шешімі:

a) Түзудің $Ax+By+C=0$ жалпы теңдеуінің дербес жағдайларының бірі:

$x=0$, $y=0$ - сәйкесінше OY, OX өстерінің теңдеулері.

b) түзулердің теңдеулерінен тұратын (8.4) жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases} 5x+2y-8=0 \\ x=0. \end{cases}$$

Жүйені шешіп алып $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$, түзулердің қиылысу нүктесін жазамыз: $M(0; 4)$.

c) Жауабы: $y=4$.

8.8-мысал: $M_0(6; -1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі d арақашықтығын табыңыз.

Шешімі:

a) $M_o(x_o;y_o)$ нүктесінен $Ax+By+C=0$ теңдеуімен берілген түзуге дейінгі қашықтық

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8.5)$$

санына тең болады.

b) (8.5) формуласы бойынша $M_0(6;-1)$ нүктесінен $3x-4y+3=0$ түзуіне дейінгі арақашықтық

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 6-4\cdot(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|25|}{\sqrt{25}}=5.$$

c) Жауабы: $d=5.$

8.2 Тест тапсырмалары

1. A(0;1) және B(1;0) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $x+y+2=0$

B) $x-y-1=0$

C) $x+y-1=0$

D) $x+y+1=0$

E) $x-1=0$

2. $\vec{a}=\{-1;3\}$векторына параллель M(2;0) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $-x+3y+8=0$

B) $3x+y-6=0$

C) $3x+3y-6=0$

D) $2x-3z+8=0$

E) $y-3=0$

3. $\vec{a}=\{1;0\}$ векторына перпендикуляр $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $y-2=0$

B) $x-2=0$

C) $x-9=0$

D) $x-1=0$

E) $2x-y-2=0$

4. $2x-3y-12=0$ түзуінің OX өсімен қилысқандағы абциссасын табыңыз.

A) 6
B) -4
C) -6
D) $-0,25$
E) 9

5. M(6;1) нүктесінен $3x-4y-4=0$ түзуіне дейінгі арақашықтықты табыңыз.

A) $d=1$
B) $d=2$
C) $d=3$
D) $d=4$
E) $d=5$

6. A(–1;3) және B(2;5) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $2x+3y-11=0$
B) $x-5y+6=0$
C) $x-5y-6=0$
D) $x-y=0$
E) $2x-3y+11=0$

7. $\bar{a}=\{1;0\}$ векторына параллель M(1;2) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $y-5=0$
B) $x-1=0$
C) $y-2=0$
D) $x-5=0$
E) $x-y-1=0$

8. $\bar{a}=\{1;0\}$ векторына перпендикуляр M(2;0) нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңыз.

A) $y+8=0$

B) $x-7=0$
C) $x-1=0$
D) $x-2=0$
E) $y-11=0$

9. $2x+5y+20=0$ түзуінің OY өсімен қилысқандағы ординатасын табыңыз.
A) $y=-10$
B) $y=-13$
C) $y=-0{,}1$
D) $y=-4$
E) $y=-0{,}25$

10. $O(0;0)$ бас нүктесінен $3x-4y+5=0$ түзуіне дейінгі арақашықтықты табыңыз.
A) $d=1$
B) $d=2$
C) $d=3$
D) $d=4$
E) $d=5$

9 Тест «Векторлық алгебра және аналитикалық геометрия элементтерің теориялық сұрақтары»

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 1» пәнінің «Векторлық алгебра және аналитикалық геометрия элементтері» тараулары тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

1. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ және $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ түзулерінің параллельдік шартын көрсетіңіз.
A) $l_1l_2+m_1m_2=0$
B) $l_1m_1+l_2m_2=0$
C) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

D) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

E) $l_1 l_2 = n_1 n_2$

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемін есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$

B) $V = \left|\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

C) $V = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)\right|$

D) $V = \frac{1}{3}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$

E) $V = \frac{3}{4}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$

3. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары ортогональ болады, егер олардың скалярлық көбейтіндісі ....

A) нөлге тең болса
B) нөлге тең емес болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

4. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады, егер олардың векторлық көбейтіндісі ....

A) нөлге тең болса
B) нөлге тең емес болса
C) бірге тең болса
D) бірден үлкен болса
E) бірден кіші болса

5. $\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$ және $\frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}$ түзулерінің перпендикулярлық шартын көрсетіңіз.

A) $l_1 l_2 = m_1 m_2$

B) $l_1 m_1 + l_2 m_2 = 0$

C) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$

D) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

E) $l_1 l_2 = n_1 n_2$

6. Берілген $M_o(x_o; y_o)$ нүктесінен $\vec{a}(a_x; a_y)$ векторына параллель жүргізілген түзудің теңдеуі

A) $Ax + By + C = 0$

B) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

C) $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$

D) $y = kx + b$

E) $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$

7. $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторларының перпендикуляр болу шартын көрсетіңіз.

A) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$

B) $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

C) $x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 = 0$

D) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_1 z_2 = 0$

E) $x_1 y_1 - x_2 y_2 - z_1 z_2 = 0$

8. $Ax + By + C = 0$ түзуінің бұрыштық коэффициентін анықтаңыз.

A) $\frac{C}{B}$

B) $\frac{A}{B}$

C) $\frac{B}{A}$

D) $-\frac{A}{B}$

E) $-\frac{B}{A}$

9. $M_0(x_0;y_0;z_0)$ нүктесінен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығына дейінгі арақашықтықты есептейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $Ax_0+By_0+Cz_0+D$

B) $\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|$

C) $\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$

D) $\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

E) $\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

10. $x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының параллельдік шартын көрсетіңіз.

A) $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

B) $A+B+C=l+m+n$

C) $Al+Bm+Cn=0$

D) $Al+Bm+Cn=1$

E) $A(x_0+lt)=B(y_0+mt)=C(z_0+nt)$

11. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтықтарының параллельдік шартын көрсетіңіз.

A) $A_1A_2+B_1B_2=0$

B) $A_1+B_1=\frac{A_1B_1}{2}$

C) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

D) $A_1=\frac{1}{A_2}$

E) $\frac{A_1+A_2}{B_1+B_2}=2$

12. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтықтарының жазықтықтарының перпендикулярлық шартын көрсетіңіз.

A) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

B) $A_2=\frac{1}{A_1}$

C) $2A_1A_2+3B_1B_2=0$

D) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

E) $\frac{A_1+A_2}{B_1+B_2}=2$

13. Түзудің бұрыштық коэффициентімен берілген теңдеуін көрсетіңіз.

A) $Ax+By+C=0$

B) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

C) $A(x-x_o)+B(y-y_o)=0$

D) $y=kx+b$

E) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

14. $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ және $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ векторларының коллинеарлық шартын көрсетіңіз.

A) $x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2$

B) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}=0$

C) $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$

D) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

E) $x_1\cdot y_1\cdot z_1+x_2\cdot y_2\cdot z_2=0$

15. $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының компланарлық шартын көрсетіңіз.

A) $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=0$

B) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$
C) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=1$
D) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$
E) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=0$

16. $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ векторының бағыттаушы косинустарын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$

B) $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$

C) $\cos\alpha=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$

D) $\cos\alpha=\frac{a_z}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_z}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$

E) $\cos\alpha=\frac{1}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{1}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{1}{|\vec{a}|}$

17. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларынан құралған үшбұрыштың ауданын өрнектейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $S=\vec{a}\cdot\vec{b}$
B) $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{b}|$
C) $S=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{b}|$
D) $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$
E) $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

18. $\vec{a},\vec{b}$ векторлары және $\varphi=\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ берілген. Олардың скалярлық көбейтіндісі деп

A) $\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторын айтады
B) $c=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot cos\varphi$ санын айтады

C) $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$ векторын айтады

D) $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$ санын айтады

E) $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ санын айтады

19. $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторлары берілген. Олардың векторлық көбейтіндісі деп

A) $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$ векторын айтады

B) $\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ векторын айтады

C) $c = \vec{a} \times \vec{b}$ санын айтады

D) $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ санын айтады

E) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ санын айтады

20. $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторлары берілген. Олардың скалярлық көбейтіндісі келесі формуламен есептеледі:

A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2$

C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$

D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2}$

E) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2$

21. $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуі $A = 0$ болғанда қандай жазықтықты анықтайды?

A) *OX* өсіне параллель жазықтықты

B) *OY* өсіне параллель жазықтықты

C) *OZ* өсіне параллель жазықтықты

D) *YOZ* жазықтығына параллель жазықтықты

E) *OZ* өсіне перпендикуляр жазықтықты

22. $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуі $A = 0$ және $B = 0$ болғанда қандай жазықтықты анықтайды?

A) *XOY* жазықтығына параллель жазықтық

B) *YOZ* жазықтығына параллель жазықтық
C) *XOZ* жазықтығына параллель жазықтық
D) *OX* өсіне перпендикуляр жазықтық
E) *OY* өсіне перпендикуляр жазықтық

23. Нөлден өзгеше үш вектор компланар болғанда олардың ....
A) аралас көбейтіндісі бірге тең
B) аралас көбейтіндісі төртке тең
C) аралас көбейтіндісі нөлге тең
D) аралас көбейтіндісі екіге тең
E) аралас көбейтіндісі үшке тең

24. Өзара перпендикуляр емес $y = \kappa_1 x + b_1$, $y = \kappa_2 x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрышты қай формула бойынша анықтаймыз?

A) $tg\varphi = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}$

B) $tg\varphi = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 \kappa_1}$

C) $tg\varphi = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_2 \kappa_1}$

D) $tg\varphi = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 - \kappa_2 \kappa_1}$

E) $tg\varphi = \dfrac{\kappa_2 \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}$

25. $y = \kappa_1 x + b_1$, $y = \kappa_2 x + b_2$ түзулерінің параллельдік шартын көрсетіңіз.

A) $\kappa_1 \kappa_2 = -1$

B) $\kappa_1 = -\kappa_2$

C) $\kappa_1 = \kappa_2$

D) $\kappa_1 = \dfrac{1}{\kappa_2}$

E) $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$

26. $A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$ нүктелері берілген. $\overline{AB}$ векторының ұзындығын (модулын) есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

B) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

C) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x_2 \cdot x_1^{\,2} + y_2 \cdot y_1^{\,2}}$

D) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2}$

E) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(y_2 - x_1)^2 + (y_2 - x_1)^2}$

27. Егер векторлар коллинеар, ұзындықтары тең және бірдей бағытталған болса, онда олар ... векторлар деп аталады.

A) компланар
B) бірлік
C) нөлдік
D) тең
E) коллинеар

28. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторының l өсіне түсірілген проекциясын көрсетіңіз.

A) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|tg\varphi$

B) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\sin\varphi$

C) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$

D) $np_l\vec{a} = \cos\varphi$

E) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|$

29. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы неге тең?

A) $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

B) $\cos\varphi = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

C) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

D) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

E) $\cos\varphi = \dfrac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

30. Қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан құралған параллелограммның ауданын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $S = 2|\vec{a}\times\vec{b}|$

B) $S = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

C) $S = \vec{a}\times\vec{b}$

D) $S = |\vec{a}\times\vec{b}|$

E) $S = \vec{a}\cdot\vec{b}$

31. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

A) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

B) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$

C) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

D) $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

E) $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 - B_1^2 - C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 - B_2^2 - C_2^2}}$

32. Жазықтықтың нормаль теңдеуін көрсетіңіз.

A) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

B) $x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma - p = 0$

C) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

D) $Ax + By + Cz + D = 0$

E) $\frac{x - x_o}{l} = \frac{y - y_o}{m} = \frac{z - z_o}{n}$

33. Бір түзудің бойында немесе параллель түзулердің бойында жататын векторлар ... деп аталады.

A) компланар
B) тең
C) коллинеар
D) бірлік
E) нөлдік

34. Егер $\bar{a}, \vec{b}, \bar{c}$ векторлары бір жазықтықта жатса не параллель жазықтықтарда орналасқан болса, онда олар ... векторлар деп аталады.

A) бірлік
B) тең
C) коллинеар
D) компланар
E) нөлдік

35. $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторына түсірілген проекциясын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$

B) $np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

C) $np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

D) $np_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$

E) $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

36. Өзінің сандық мәндерімен қатар бағытымен бірге анықталатын векторлық шаманы табыңыз.
A) ұзындық
B) аудан
C) көлем
D) күш
E) жұмыс

37. Параллель көшіруде вектор сақталады. Себебі ....
A) ұзындық та, бағыт та сақталады
B) тек ұзындық сақталады
C) тек бағыт сақталады
D) ұзындық та, бағыт та сақталмайды
E) тек бұрыш сақталады

38. Қандай векторлар қарама-қарсы векторлар деп аталады?
A) ұзындықтары бірдей, бағыттары қарама-қарсы векторлар
B) ұзындықтары бірдей векторлар
C) бағыттары қарама-қарсы векторлар
D) бағыттары бірдей векторлар
E) ұзындықтары әртүрлі векторлар

39. $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ векторының ұзындығының (модулінің) есептелу формуласы:
A) $|\vec{a}(a_x; a_y; a_z)| = \sqrt{a_x + a_y + a_z}$
B) $|\vec{a}(a_x; a_y; a_z)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
C) $|\vec{a}(a_x; a_y; a_z)| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}$
D) $|\vec{a}(a_x; a_y; a_z)| = \sqrt{a_x + (a_y - a_z)}$
E) $|\vec{a}(a_x; a_y; a_z)| = \sqrt{a_x \cdot a_y \cdot a_z}$

40. $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуі $C = 0$ болғанда қандай жазықтықты анықтайды?

A) *OY* өсіне параллель жазықтықты
B) *OX* өсіне параллель жазықтықты
C) *YOZ* жазықтығына параллель жазықтықты
D) *OZ* өсіне параллель жазықтықты
E) *OZ* өсіне перпендикуляр жазықтықты

41. Бағыты $\vec{a}$ векторының бағытымен бағыттас бірлік вектор $\vec{a}$ векторының ... деп аталады?
A) орты (бірлік векторы)
B) нөлдік векторы
C) қарама-қарсы векторы
D) бағыттас векторы
E) тең векторы

42. $\vec{a}(x; y; z)$ векторының $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ орттарына жіктелуін көрсетіңіз.
A) $\vec{a}(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
B) $\vec{a}(x; y; z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
C) $\vec{a}(x; y; z) = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$
D) $\vec{a}(x; y; z) = x\vec{i} \cdot y\vec{j} \cdot z\vec{k}$
E) $\vec{a}(x; y; z) = \sqrt{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$

43. $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін көрсетіңіз.
A) $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$
B) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
C) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
D) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

E) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

44. Жазықтықтың кесіндідегі теңдеуін көрсетіңіз.

A) $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

B) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

C) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

D) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

E) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

45. $M_o(x_o; y_o; z_o)$ нүктесі арқылы $\vec{n}(A; B; C)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі

A) $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

B) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

C) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

D) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

E) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

46. $\frac{x-x_o}{l}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңыз.

A) $tg\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A+B+C}\cdot\sqrt{l+m+n}}$

B) $\cos\varphi=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$

C) $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

D) $tg\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

E) $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

47. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ векторларының координаталарын көрсетіңіз?

A) $\vec{i}=\{1;0;0\},\ \vec{j}=\{0;1;0\},\vec{k}=\{0;0;1\}$

B) $\vec{i}=\{0;0;1\},\ \vec{j}=\{1;0;0\},\vec{k}=\{0;0;1\}$

C) $\vec{i}=\{1;0;0\},\ \vec{j}=\{0;0;1\},\vec{k}=\{1;0;0\}$

D) $\vec{i}=\{0;1;0\},\ \vec{j}=\{1;0;0\},\vec{k}=\{0;0;1\}$

E) $\vec{i}=\{0;1;0\},\ \vec{j}=\{0;0;1\},\vec{k}=\{0;1;0\}$

48. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ теңдеуімен берілген сызық ненің теңдеуін білдіреді?

A) эллипс
B) гипербола
C) парабола
D) түзу
E) шеңбер

49. Жазықтықта $M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін көрсетіңіз

A) $Ax+By+C=0$

B) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

C) $A(x-x_o)+B(y-y_o)=0$

D) $y-y_0=k(x-x_0)$

E) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$

50. $Ax+By+Cz+D=0$ теңдеуі $B=0$ болғанда қандай жазықтықты анықтайды?

A) OY өсіне параллель жазықтықты

B) OX өсіне параллель жазықтықты

C) OZ өсіне параллель жазықтықты

D) YOZ жазықтығына параллель жазықтықты

E) OZ өсіне перпендикуляр жазықтықты

10 Тест «Жазықтықтағы және кеңістіктегі аналитикалық геометрия»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Жазықтықтағы және кеңістіктегі аналитикалық геометрия» тақырыбына арналған, яғни жазықтықтағы түзудің теңдеулерін, жазықтық теңдеулерін және кеңістіктегі түзулер теңдеулерін қарастырамыз. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

10.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

10.1-мысал: $\vec{n}=\{1;4;3\}$ векторына перпендикуляр $M_0(1;-2;5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

а) $M_o(x_o;y_o;z_o)$ нүктесі арқылы $\vec{n}(A;B;C)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуін қарастырайық.

P - қарастырылып отырған жазықтық, ал $M(x;y;z)$ оның $M_o(x_o;y_o;z_o)$ нүктесінен өзгеше кезкелген нүктесі болсын.

$$M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM}(x-x_o;y-y_o;z-z_o)\perp\vec{n}(A;B;C)\Leftrightarrow$$

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0. \qquad (10.1)$$

(10.1) теңдеуі $M_o(x_o; y_o; z_o)$ нүктесінен $\vec{n}(A; B; C)$ векторына перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі.

b) $\vec{n} = \{1; 4; 3\}$ векторына перпендикуляр M (1;–2; 5) нүктесі арқылы өтетін (5.10) түріндегі түзу теңдеуі:

$$1(x-1)+4(y+2)+3(z-5)=0$$
$$x-1+4y+8+3z-15=0$$
$$x+4y+3z-8=0.$$

c) Жауабы: $x+4y+3z-8=0.$

10.2-мысал: $2x+3y-z+5=0$ жазықтығына параллель $M_0(1;-2;5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

Шешімі:

a) $M_o(x_o; y_o; z_o)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ пен $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ жазықтықтықтарының параллелдік белгісі

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (10.2)$$

b) $M_0(1;-2;5)$ нүктесінің координаталарын (10.1) теңдеуіне қойсақ

$$A(x-1)+B(y+2)+C(z-5)=0.$$

Есептің шартында берілген $2x+3y-z+5=0$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}=\{2;3;-1\}$. Жазықтықтар параллель болғандықтан (10.2) шарты бойынша:

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}.$$

Бұдан

$$2(x-1)+3(y+2)-(z-5)=0$$
$$2x+3y-z+9=0$$

теңдеуін аламыз.

c) Жауабы: $2x+3y-z+9=0.$

10.3-мысал: $2x+3y-z+5=0$ жазықтығының нормаль векторын табыңыз.

Шешімі:

a) $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}=\{A; B; C\}$.

b) $2x+3y-z+5=0$ жазықтығы үшін оның нормаль векторы $\vec{n}=\{2;3;-1\}$.

c) Жауабы: $\vec{n}=\{2;3;-1\}$.

10.4-мысал: $\frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-3}$ түзуінің бағыттаушы векторының координаталарын табыңыз.

Шешімі:

a) Түзудің бойында жататын немесе оған параллель кез келген вектор түзудің *бағыттаушы векторы* де аталады, белгіленуі: $\vec{a}(m;n;l)$.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, бағыттаушы векторы $\vec{a}(m;n;l)$ болатын *түзудің канондық теңдеуі*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l} \qquad (10.3)$$

түрінде жазылады.

b) Берілген $\frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-3}$ түзуі $M_0(4;3;-3)$ нүктесі арқылы өтетін бағыттаушы векторы $\vec{a}(-7;2;-3)$ болатын түзу теңдеуі.

c) Жауабы: $\vec{a}(-7;2;-3)$.

10.2 Тест тапсырмалары

1. $\vec{n}=\{1;4;3\}$ векторына перпендикуляр $M(-2;3;1)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

A) $x+4y+3z-13=0$

B) $x-3y+4z-5=0$

C) $x-3y+7=0$

D) $3x+y-7z+2=0$

E) $3x+2y-z+4=0$

2. $5x-3y+2z-3=0$ жазықтығына параллель $M(-1;-2;-3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

A) $3y-z=0$

B) $5x-2z+11=0$

C) $x-y+z=0$

D) $5x-3y+2z+5=0$

E) $5x-3y+2z=0$

3. $2x-y+z-1=0$ жазықтығының нормаль векторының координаталарын табыңыз.

A) $(2;\ 1;\ 1)$

B) $(2;-1;\ 1)$

C) $(1;-1;\ 1)$

D) $(1;-2;1)$

E) $(0;\ 0;\ 1)$

4. $\frac{x-4}{7}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z-3}{4}$ түзуінің бағыттаушы векторының координаталарын табыңыз.

A) $(4;\ 8;\ 3)$

B) $(4;-8;-3)$

C) $(4;\ 7;-2)$

D) $(7;-2;\ 4)$

E) $(7;-4;-2)$

5. $\frac{x-3}{8}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+6}{3}$ түзуінің бойында жатқан нүктенің координаталарын табыңыз.

A) $(-8;\ 2;-3)$

B) $(-4;\ 2;-1)$

C) $(-3;\ 4;-6)$

D) $(-8;\ 2;-1)$

E) $(3;-4;-6)$

6. $\vec{n}=\{4;\ 7;\ 5\}$ векторына перпендикуляр $M(1;\ 1;\ 1)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

A) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}$

B) $4x+7y+5z-16=0$

C) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z}{-2}$

D) $x+3y-7z+8=0$

E) $2x-3y+4z-4=0$

7. $5x-3y+2z-3=0$ жазықтығына параллель $M_0(-1;\ 2;\ 2)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазыңыз.

A) $3y-z=0$

B) $5x-2z+11=0$

C) $x-y+z=0$

D) $5x-3y+2z+5=0$

E) $5x-3y+2z+7=0$

8. $4x-2y+z+8=0$ жазықтығының нормаль векторының координаталарын анықтаңыз.

A) $(4;\ 2;\ 1)$

B) $(-4;-2;\ 1)$

C) $(4;-2;\ 1)$

D) $(4;-2;-1)$

E) $(0;\ 2;-1)$

9. $\frac{x-6}{-5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-4}$ түзуінің бағыттаушы векторының координаталарын табыңыз.

A) $(5;-6;-4)$

B) $(-5;\ 2;-4)$

C) $(6;\ -2;\ 4)$

D) $(-5;-4;-7)$

E) $(-5;-6;\ 4)$

10. $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+6}{5}$ түзуінің бойында жатқан нүктенің координаталарын табыңыз.

A) $(-4;\ 3;\ 5)$

B) $(-4;\ 2;-1)$

C) $(-5;\ 2;-6)$

D) $(-5;\ 2;\ -1)$

E) $(4;-2;\ 6)$

11 Тест «Математикалық талдау тарауларының теориялық сұрақтары»

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 1» пәнінің «Математикалық талдауға кіріспе. Функция, оның берілу тәсілдері», «Сандық тізбек және функцияның шектері. Функцияның үзіліссіздігі және үзіліс нүктелері», «Бір айнымалы функцияны диференциалдау және интегралдау» тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

1. Барлық жинақты тізбек....
A) шектелген
B) шексіз аз
C) шексіз үлкен
D) өспелі
E) кемімелі

2. Егер $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ болса, онда функция ….
A) өседі
B) кемиді
C) шектелген
D) шектелмеген
E) кемімейді

3. Егер $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ болса, онда функция ….
A) өседі
B) кемиді
C) шектелген
D) шектелмеген
E) кемімейді

4. $f(x)$ функциясы a нүктесінің қандайда бір аймағында анықталған болсын. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $0 < |x - a| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\delta > 0$ табылса, онда ....

A) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

B) $\lim\limits_{x\to A} f(x) = a$

C) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

D) $\lim\limits_{x\to A} f(x) = 0$

E) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$

5. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол осы нүктеде ….

A) үзіліссіз
B) өспелі
C) кемімелі
D) үзілісті
E) нөлге тең

6. $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде екі рет дифференциалданатын және $f'(x_0) = 0$ болсын. Онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде локальді максимумы болады, егер ....

A) $f''(x_0) < 0$

B) $f''(x_0) > 0$

C) $f''(x_0) = 0$

D) $f''(x_0) \le 1$

E) $f''(x_0) \ge 1$

7. $y_1 = f(x)$ және $y_2 = g(x)$ функциялары $x \to a$ эквивалентті болады, егер ....

A) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

B) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

C) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$

D) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$

E) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

8. Бірінші тамаша шекті көрсетіңіз.

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$

C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=-1$

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx}{x}=1$

E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=0$

9. Екінші тамаша шекті көрсетіңіз.

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=1$

C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-1$

D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-e$

E) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

10. Егер $y=f(x)$ функциясы қандай да бір x_0 нүктесінде үзілісті болса, онда x_0 нүктесі ... деп аталады.

A) функцияның үзіліс нүктесі
B) экстремум нүктесі
C) минимум нүктесі
D) максимум нүктесі
E) жинақтылық нүктесі

11. $y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы $f'(x)$ деп белгіленіп, қай формуламен көрсетіледі?

A) $\lim\limits_{\Delta x\to 1}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}$

C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$

D) $\lim\limits_{\Delta x\to \infty}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

E) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

12. Егер $y=f(x)$ функциясының $y=kx+b$ көлбеу асимптотасы болса, онда k келесі формуламен есептеледі:

A) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ немесе $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

B) $k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

C) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

D) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

E) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{f(x)}$

13. $f(x)$ функциясы үшін интегралдық қосындының дұрыс жазылуын көрсетіңіз.

A) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$

B) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$

C) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$

D) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i$

E) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)+\Delta x_i$

14. $y = f(x)$ теңдеуімен берілген қисықтың $a \le x \le b$ аралығындағы доғасының ұзындығын есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\int_a^b \sqrt{1 + f^2(x)}dx$

B) $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}dx$

C) $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$

D) $\int_a^b \sqrt{1 - f'^2(x)}dx$

E) $\int_a^b (1 + f'^2(x))dx$

15. $y = f(x)$ қисығы, OX өсімен және $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген фигураны OX өсінен айналдырғанда пайда болған фигураның көлемі неге тең?

A) $\int_a^b y^2(x)dx$

B) $\pi\int_a^b y'^2(x)dx$

C) $\int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}dx$

D) $2\pi\int_a^b xy(x)dx$

E) $\pi\int_a^b y^2(x)dx$

16. Анықталмаған интегралдарда бөліктеп интегралдау формуласының дұрыс жазылуын көрсетіңіз.

A) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B) $\int uvdx = uv - \int vdx$

C) $\int udv = uv - \int vdu$

D) $\int uvdx = uv - \int vdu$

E) $\int udv = uv + \int vdu$

17. Анықталған интегралдарда бөліктеп интегралдау формуласының дұрыс жазылуын көрсетіңіз.

A) $\int_a^b udv = auv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B) $\int uvdx = uv - \int vdx$

C) $\int udv = uv - \int vdu$

D) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

E) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$

18. Функцияның берілу тәсілдерінің дұрыс емесін көрсетіңіз.

A) аналитикалық тәсіл
B) кестелік тәсіл
C) графиктік тәсіл
D) сөзбен берілуі
E) диаграммалық тәсіл

19. $\rho = \rho(\varphi)$ теңдеуімен берілген қисықтың $\alpha \le \varphi \le \beta$ аралығына сәйкес доғасының ұзындығын есептеңіз.

A) $\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) - \rho'^2(\varphi)}d\varphi$

B) $\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$

C) $\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$

D) $\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + 1}d\varphi$

E) $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^2(\rho) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$

20. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ болса, онда ….

A) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A + B$

B) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \dfrac{A}{B}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C + A, \quad C$ -тұрақты

D) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A + B$

E) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}, \; B \neq 0$

21. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде ... функция деп аталады.

A) үзілісті
B) үзіліссіз
C) өспелі
D) кемімелі
E) өспейтін

22. Анықталмаған интеграл үшін төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс емес?

A) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

B) $\int dF(x) = F(x) + c$

C) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

D) $\int [Af(x)]dx = A\int f(x)dx$

E) $\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

23. Егер $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда Ньютон-Лейбниц формуласының дұрыс жазылуын көрсетіңіз.

A) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$

B) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

C) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

D) $\int_a^b f(x)dx = b - a$

E) $\int_a^b f(x)dx = F(bx) - F(ax)$

24. Интегралдаудың негізгі әдістерінің бірі -
A) айнымалыны ауыстыруды енгізу әдісі
B) Остроградский әдісі
C) Эйлер ауыстырулары
D) бөлшек-сызықтық иррационалдықты интегралдау әдісі
E) дифференциалдық биномды интегралдау

25. Анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру әдісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $\int f(x)dx = \left|x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

B) $\int f(x)dx = \left|x = \varphi(t),\ dx = dt\right| = \int f(\varphi(t))dt$

C) $\int f(x)dx = \left|x = t, dx = tdt\right| = \int f(t)dt$

D) $\int udv = uv - \int vdu$

E) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a,b)$

26. Егер $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ болса, онда функция ... деп аталады.
A) кемімейтін
B) кемиді
C) шектелген
D) шектелмеген
E) өспейтін

27. Егер $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ болса, онда функция ... деп аталады.
A) кемімейтін
B) кемиді
C) шектелген

D) шектелмеген
E) өседі

28. Бірінші тамаша шектің салдарын көрсетіңіз.

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$

C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=-1$

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=0$

29. Екінші тамаша шектің салдарын көрсетіңіз.

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-1$

D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=-e$

E) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

30. a санын $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп атаймыз, егер кез келген $\varepsilon>0$ үшін $n_0(\varepsilon)>0$ натурал саны (яғни нөмірі) табылып $n>n_0(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін келесі теңсіздік орындалса:

A) $|x_n-a|<\varepsilon$

B) $|x_n|>\varepsilon$

C) $|x_n-x|>\varepsilon$

D) $|x_n-x|\le\varepsilon$

E) $|x_n-x|\ge a$

31. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болсын. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіне жүргізілген жанама теңдеуін көрсетіңіз.

A) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

B) $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

C) $y - y_0 = \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

D) $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$

E) $y - y_0 = -\dfrac{1}{f(x_0)} \cdot (x - x_0)$

32. Егер $y = f(x)$ функциясының $y = kx + b$ көлбеу асимптотасы болса, онда b келесі теңдікпен анықталады:

A) $b = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

B) $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$

C) $b = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

D) $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - k]$

E) $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x]$

33. Егер кез келген $x \in (a,b)$ үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы ... деп аталады.

A) туындысы
B) кері функциясы
C) алғашқы функциясы
D) дифференциалы
E) интегралдау айнымалысы

34. Егер анықталған интегралда $a = b$ болса, онда ….

A) $\int\limits_a^a f(x)dx = 2a$

B) $\int_a^a f(x)dx = \frac{a}{2}$

C) $\int_a^a f(x)dx = 1$

D) $\int_a^a f(x)dx = 0$

E) $\int_a^a f(x)dx = -1$

35. Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда анықталған интегралда:

A) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

B) $\int_a^b f(x)dx = \frac{\int_a^c f(x)dx}{\int_c^b f(x)dx}$

C) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \cdot \int_c^b f(x)dx$

D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

E) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

36. Егер $y = f(x)$ функциясы қандай да бір x нүктесінде ... болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз болады.

A) туындысы нөлге тең болса
B) дифференциалданса
C) туындысы жоқ болса
D) өспелі функция болса
E) үзілісті функция болса

37. Екі функцияның бөліндісінің $\left(\frac{u}{v}\right)'$ туындысын табу формуласын көрсетіңіз

A) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' - v'}{v^2}$

B) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$

C) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v}$

E) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$

38. $y = f(x)$ функциясының дифференциалын табу формуласын көрсетіңіз.

A) $dy = f'(x)$

B) $dy = f(x)dx$

C) $dy = C$

D) $dy = 2f(x)dx$

E) $dy = f'(x)dx$

39. Егер (a,b) интервалында $f'(x) > 0$ болса, онда осы аралықта $y = f(x)$ ... функция.

A) кемімелі

B) өспелі

C) кемімейтін

D) өспейтін

E) тұрақты

40. Егер (a,b) интервалында $f'(x) < 0$ болса, онда осы аралықта $y = f(x)$ ... функция.

A) кемімелі

B) өспелі

C) кемімейтін

D) өспейтін

E) тұрақты

41. Егер (a,b) интервалында $f''(x)>0$ болса, онда $f(x)$ функциясының графигінің осы аралыққа сәйкес доғасы ... болады.
A) дөңес
B) ойыс
C) өспелі
D) кемімелі
E) таңбасын өзгертеді

42. Егер $f(x)$ функциясының $f''(x)$ екінші ретті туындысы x_0 нүктесі арқылы өткенде ..., онда x_0 нүктесін иілу нүктесі деп атайды.
A) таңбасын өзгертсе
B) таңбасын міндетті түрде «-»-тен «+»-ке өзгертсе
C) таңбасын міндетті түрде « + » -тен « - »-ке өзгертсе
D) таңбасын өзгертпесе
E) таңбасы тұрақты болса

43. Егер (a,b) интервалында $f''(x)<0$ болса, онда $f(x)$ функциясының графигінің осы аралыққа сәйкес доғасы ... болады.
A) дөңес
B) ойыс
C) өспелі
D) кемімелі
E) таңбасын өзгертеді

44. Егер қисық $x=x(t),\ y=y(t),\ 0\le t\le T$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда $\int_0^T \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ интегралымен нені табуға болады?
A) айналу денесінің ауданын
B) қисықтың доғасының ұзындығын
C) айналу денесінің көлемін
D) айналу бетінің ауданын
E) қисық сызықты трапецияның ауданын

45. $y=f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген нормальдің теңдеуін көрсетіңіз.
A) $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

B) $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

C) $y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

D) $y - y_0 = -\frac{1}{f(x_0)} \cdot (x - x_0)$

E) $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$

46. Туындының механикалық мағынасын көрсету керек. $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі $f'(x)$ туындысы $f(x)$ функциясының өзгеруінің x нүктесіндегі ... береді.

A) жылдамдығын
B) үдеуін
C) уақытын
D) арақашықтығын
E) күшін

47. Туындының геометриялық мағынасын көрсету керек. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы $f(x)$ функциясының графигіне x_0 нүктесінде жүргізілген ... береді.

A) жанаманың ұзындығын
B) жанаманың бұрыштық коэффициентін
C) жанаманың абцисса өсімшесінің нүктесін
D) жанаманың ордината өсімшесінің нүктесін
E) жанама теңдеуін

48. Егер $y = f(x)$ функциясының $x = \varphi(y)$ кері функциясы $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданатын және $\varphi'(y_0) \neq 0$ болса, онда кері функцияның туындысын табуда келесі теңдік орынды:

A) $f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$

B) $f'(x_0) = \frac{1}{1 - \varphi'(y_0)}$

C) $f'(x_0) = \frac{1}{1 + \varphi'(y_0)}$

D) $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)-1}$

E) $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)+1}$

49. x айнымалысынан тәуелді y функциясы $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $t_0\le t\le t_1$ параметрлік түрінде берілсін және $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және $\varphi'(t)\neq 0$ болса, онда параметрлік түрде берілген функцияның туындысын табуда келесі теңдік орынды:

A) $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

B) $y'_x=\dfrac{x'_t}{y'_t}=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$

C) $y'_x=\dfrac{y'_t}{2x'_t}=\dfrac{\psi'(t)}{2\varphi'(t)}$

D) $y'_x=\dfrac{2x'_t}{y'_t}=\dfrac{2\varphi'(t)}{\psi'(t)}$

E) $y'_x=\dfrac{2y'_t}{x'_t}=\dfrac{2\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

50. Егер $y=f(u)$ және $u=\varphi(x)$ функциялары дифференциалданатын функциялар болса, онда $y=F(x)=f(\varphi(x))$ күрделі функциясы да дифференциалданатын функция болып, күрделі функцияның туындысын табуда келесі теңдік орынды:

A) $F'(x)=f'(u)u'(x)$ немесе $y'_x=y'_u u'_x$

B) $F'(x)=f'(u)-u'(x)$ немесе $y'_x=y'_u-u'_x$

C) $F'(x)=f'(u)+u'(x)$ немесе $y'_x=y'_u+u'_x$

D) $F'(x)=\dfrac{f'(u)}{u'(x)}$ немесе $y'_x=\dfrac{y'_u}{u'_x}$

E) $F'(x)=\dfrac{u'(x)}{f'(u)}$ немесе $y'_x=\dfrac{u'_x}{y'_u}$

12 Тест «Сандық тізбек және функция шектері $(x \to \infty)$»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Сандық тізбек және функция шектерін табуға» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

12.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Сандық тізбек және функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.

Бөлшектің алымы мен бөліміндегі көпмүшеліктердің ең үлкен дәрежесіне бөлу әдісі.

12.1-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2n-8}{1-4n^2}$

Шешімі:

a) $\dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығын ашу үшін, бөлшектің алымын да, бөлімін де n^2 дәрежесіне бөлеміз.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n-8}{1-4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-4} = \frac{5+\frac{2}{\infty}-\frac{8}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-4} = -\frac{5}{4}.$$

c) Жауабы: $-\dfrac{5}{4}$.

Бөлшектің алымы мен бөліміндегі көпмүшеліктердің дәрежесін салыстыру әдісі.

12.2-мысал: Шекті табыңыз:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-x+9}{x^2-4x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-7x+5}{5x^3-3x+8}$

Шешімі:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, & \text{егер} \quad n<m,\\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{егер} \quad n=m,\\ \infty, & \text{егер} \quad n>m.\end{cases}$$

b) 1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=2\\ m=2\\ n=m\end{matrix}\right|=-\frac{5}{4};$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x+9}{x^2-4x-5}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=4\\ m=2\\ n>m\end{matrix}\right|=\infty;$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+5}{5x^3-3x+8}=\frac{\infty}{\infty}=\left|\begin{matrix}n=2\\ m=3\\ n<m\end{matrix}\right|=0.$$

c) Жауабы: $-\frac{5}{4};\ \infty;\ 0.$

Лопиталь ережесі бойынша шекті табу әдісі.

12.3-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n-8}{1-4n^2}$.

Шешімі:

a) ***Теорема (Лопиталь ережесі).*** Егер $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ (яғни $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатынасының шегі $x=x_0$ нүктесінде $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына әкелсе) және $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

болады.

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-8}{1-4x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+2}{-8x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}.$$

c) Жауабы: $-\frac{5}{4}.$

12.2 Тест тапсырмалары

1. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+2n-3}{1-3n^2}$.

A) 0
B) 1
C) $-\dfrac{3}{8}$
D) $-\dfrac{8}{3}$
E) ∞

2. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^5-2n+7}{2n^4-n^3+2}$.

A) 0
B) 1
C) $\dfrac{3}{2}$
D) $\dfrac{2}{3}$
E) ∞

3. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-n-5}{3+n^2+n^5}$.

A) 0
B) $\dfrac{7}{3}$
C) 7
D) $-\dfrac{5}{3}$
E) ∞

4. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-5x^3}{3x^3+x^2-2}$.

A) 0

B) $\frac{1}{3}$

C) $-\frac{5}{3}$

D) ∞

E) $\mathbf{1}$

5. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^7-2x^2+3}{x^4+3x+2}$.

A) 0

B) 3

C) $\frac{3}{2}$

D) $-\frac{2}{3}$

E) ∞

6. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{x^5-2x+3}$.

A) $\mathbf{1}$

B) $-\frac{3}{2}$

C) $\mathbf{0}$

D) $\frac{1}{3}$

E) ∞

7. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3-n^2+3n}{4-2n^3}$.

A) 0

B) ∞

C) $\frac{7}{4}$

D) $-3{,}5$

E) $-1{,}5$

8. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^5-3n+1}{2n^2+n+5}$.

A) 0
B) ∞
C) $\dfrac{5}{2}$
D) $\dfrac{1}{5}$
E) -3

9. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^5-n-7}{3+n^3+n^6}$.

A) 0
B) $\dfrac{7}{3}$
C) 7
D) $-\dfrac{5}{3}$
E) ∞

10. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-4x^2}{8x^2+x+4}$.

A) $-0{,}2$
B) $0{,}4$
C) $-0{,}5$
D) $-0{,}8$
E) ∞

13 Тест «Функцияның шегі $(x\to a)$»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Функцияның шегі $(x\to a)$» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасының тек бір жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

13.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.
Қарапайым түрлендірулер енгізіп шекті есептеу әдісі.

13.1-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$.

Шешімі:

a) $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, мұндағы x_1, x_2 квадрат үшмүшеліктің түбірлері немесе $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ көбейткіштеріне жіктеп, бөлшекті ортақ көбейткішке қысқарту қажет.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{-2+2}{-2+3}=\dfrac{0}{1}=0.$

c) Жауабы. 0.

Лопиталь ережесі бойынша шекті табу әдісі.

13.2-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

Шешімі:

a) ***Теорема (Лопиталь ережесі).*** Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (яғни $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ қатынасының шегі $x=x_0$ нүктесінде $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарына әкелсе) және

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

болады.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+4}{2x+5}=\frac{0}{1}=0.$$

c) Жауабы: 0.

13.2 Тест тапсырмалары

1. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

A) 2
B) $0{,}5$
C) $0{,}25$
D) 1
E) 0

2. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

A) 0
B) $\mathbf{1}$
C) $0{,}5$
D) -1
E) ∞

3. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$.

A) $0{,}8$
B) 1
C) ∞
D) $\dfrac{8}{9}$
E) 0

4. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

A) -3
B) $-\dfrac{1}{5}$
C) $-\dfrac{1}{13}$
D) 6
E) 2

5. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$.

A) $0{,}8$

B) $\dfrac{2}{3}$

C) 1

D) 0

E) $\dfrac{4}{5}$

6. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$.

A) $-\dfrac{1}{3}$

B) 1

C) 2

D) $-0{,}5$

E) $\dfrac{2}{3}$

7. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}$.

A) $0{,}8$

B) $0{,}4$

C) $0{,}6$

D) $0{,}5$

E) $0{,}9$

8. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5}$.

A) 0

B) $\dfrac{1}{3}$

C) 6

D) -9
E) -3

9. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$.

A) $\dfrac{1}{3}$
B) 0
C) ∞
D) $-\dfrac{1}{2}$
E) $\dfrac{1}{4}$

10. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$.

A) $\dfrac{1}{3}$
B) -1
C) 1
D) $\dfrac{1}{5}$
E) 0

14 Тест «Комплекс сандарының теориялық сұрақтары»

Бұл тараудағы теориялық сұрақтар «Математика 1» пәнінің «Комплекс сандар» тарауының тақырыптарын қамтиды. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған теориялық сұрақтар берілген.

1. Қандай амалдар енгізілген $R^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in R^2\}$, $x_1,x_2,y_1,y_2\in R$ жиынын комплекс сандар жиыны деп атап, C әрпімен белгілейміз?
A) қосу және көбейту
B) қосу және азайту
C) қосу және бөлу

D) азайту және көбейту
E) бөлу және көбейту

2. Комплекс сандар қанағаттандырмайтын аксиоманы көрсетіңіз.
A) қосудың, көбейтудің коммутативтілігі
B) нөлдік элементтің болмауы
C) қосудың, көбейтудің терімділігі
D) қарама-қарсы санның бар болуы
E) бірлік элементтің бар болуы

3. $z_1=(x_1,y_1)$ санының $z_2=(x_2,y_2)\neq(0,0)$ санына қатынасын есептейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2-y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2-y_2^2}\right), x_2^2-y_2^2\neq 0$

B) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1+x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

C) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

D) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right), x_2^2+y_2^2\neq 0$

E) $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2-y_1y_2}{x_2^2-y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2-y_2^2}\right), x_2^2-y_2^2\neq 0$

4. $z_1=(x_1,y_1)$ және $z_2=(x_2,y_2)$ сандарының көбейтіндісін есептейтін формуланы көрсетіңіз.

A) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2+y_1y_2,\ x_1y_2-x_2y_1)$

B) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2+y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

C) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2-x_2y_1)$

D) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

E) $(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1y_2-x_2y_1,\ x_1x_2+y_1y_2)$

5. $z,w\in C$ болса, түйіндестіктің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\overline{(\overline{z})} = z$

B) $\Re(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2};\ \Im(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2i}$

C) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

D) $z \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\dfrac{w}{z}\right)} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}$

E) $\Re(z+w) = \Re(z) + \Re(w);\quad \Im(z+w) = \Im(z) + \Im(w)$

6. $z = (x, y)$ және $\overline{z} = (x, -y)$ түйіндес сандары комплекс сандар жазықтығында қалай орналасады?

A) Oy өсіне қатысты симметриялы орналасады

B) бас нүктеге қатысты симметриялы орналасады

C) Ox өсіне қатысты симметриялы орналасады

D) Ox өсінің бойында орналасады

E) Oy өсінің бойында орналасады

7. Өзара түйіндес $z = x + i\,y,\quad z = x - i\,y$ комплекс сандары үшін қандай теңдіктер орынды болады?

A) $|\overline{z}| = \sqrt{2x^2 + (-y)^2} = |z|$ және $z \cdot \overline{z} = (2x + i\,y) \cdot (x - i\,y) = 2x^2 + y^2 = 2|z|^2 = |\overline{z}|^2$

B) $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$ және $z \cdot \overline{z} = (x + i\,y) \cdot (x - i\,y) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

C) $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 - (-y)^2} = |z|$ және $z \cdot \overline{z} = (x - i\,y) \cdot (x - i\,y) = x^2 - y^2 = \dfrac{|z|^2}{2} = \dfrac{|\overline{z}|^2}{2}$

D) $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + 2(-y)^2} = |z|$ және $z \cdot \overline{z} = (x + i\,y) \cdot (x - 2i\,y) = x^2 + 2y^2 = |z|^2 = 2|\overline{z}|^2$

E) $|\overline{z}| = 2\sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$ және $z \cdot \overline{z} = 2(x + i\,y) \cdot (x - i\,y) = x^2 + y^2 = 2|z|^2 = 2|\overline{z}|^2$

8. $z = (x, y) = x + iy$ комплекс санының модулін қалай анықтаймыз?

A) $|z| = r = \sqrt{x + y}$

B) $|z| = r = \sqrt{x^2 - y^2}$

C) $|z| = r = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

D) $|z| = r = \sqrt{2x^2 + y^2}$

E) $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

9. Oxy комплекстік жазықтығындағы z санын кескіндейтін z векторының ұзындығының атауын көрсетіңіз.

A) z санының модулі
B) z санының аргументі
C) z санының түбірі
D) z санының аргументінің бас мәні
E) z санының векторлық кескіні

10. $z, w \in C$ болса, онда модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$
B) $|z + w| \ge |z| + |w|$
C) $|zw| = |z||w|$
D) $|z^n| = |z|^n$
E) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

11. $U = \{z \in C \,||z| = 1\}$ - модулі бірге тең комплекс сандардың жиыны болса, онда қай тұжырым орындалмайды?

A) $1 \in U$
B) $z, z' \in U \Rightarrow zz' \in U$
C) $z, z' \in U \Rightarrow z \pm z' \in U$
D) $z \in U \Rightarrow \bar{z} \in U$
E) $z \in U \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z} \in U$

12. Ox өсін z санын кескіндейтін z векторының бағытымен беттестіру үшін бұратын бұрыштың атауын көрсетіңіз.

A) z санының модулі
B) z санының түбірі
C) z санының аргументінің бас мәні
D) z санының аргументі
E) z санының векторлық кескіні

13. Комплекс саны аргументінің бас мәнінің өзгеру аралығын көрсетіңіз.

A) $[-\pi;\pi]$

B) $[0;2\pi]$

C) $(0;2\pi]$

D) $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

E) $(-\pi;\pi]$

14. z комплекс санының аргументінің кез келген мәнін анықтайтын формуланы көрсетіңіз.

A) $Argz = \arg z - 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

B) $Argz = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

C) $Argz = \arg z \pm 2k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

D) $Argz = \arg z + k\pi, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

E) $Argz = \arg z + 2k, \quad k = 0,\pm 1,\pm 2,...$

15. Екі комплекс санның көбейтіндісінің аргументі неге тең?

A) $Argz_1 \cdot Argz_2$

B) $Argz_1 + Argz_2$

C) $Argz_1 - Argz_2$

D) $Arg(z_1 + z_2)$

E) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

16. Екі комплекс санның қатынасының аргументі неге тең?

A) $\frac{Argz_1}{Argz_2}$

B) $Argz_1 + Argz_2$

C) $Argz_1 - Argz_2$

D) $Arg(z_1 - z_2)$

E) $Arg(z_1 \cdot z_2)$

17. $\overline{z}$ комплекс санының аргументін көрсетіңіз.

A) $Arg(-z)$

B) $-Argz+\pi$

C) $-Argz-\pi$

D) $-Argz$

E) $Argz+\pi k$

18. $z,w\in C$ болса, түйіндестіктің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\overline{(\overline{z})}=-z$

B) $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

C) $z\overline{z}=|z|^2$

D) $z\neq 0\Rightarrow\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}$

E) $z\in R\Leftrightarrow\overline{z}=z;\ z\in iR\Leftrightarrow\overline{z}=-z$

19. Эйлер формулаларын көрсетіңіз.

A) $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

B) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

C) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

D) $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

E) $z=|z|e^{i\theta}$

20. Де Муаврдың формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

B) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

C) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

D) $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

E) $z=|z|e^{i\theta}$

21. Комплекс санға тән емес қасиетті көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

B) $z_1\cdot z_2=\rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

C) $z_1\pm z_2=\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}\pm\rho_2 e^{i\theta_2}}{2}$

D) $e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$

E) $e^{(\theta+2k\pi)i}=\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta},\ k\in Z$

22. $e^{i\varphi}$ көрсеткіштік функциясының Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi-\sin\varphi$

B) $\cos\varphi-i\sin\varphi$

C) $\cos\varphi+\sin\varphi$

D) $\cos\varphi+i\sin\varphi$

E) $i\sin\varphi$

23. $e^{-i\varphi}$ көрсеткіштік функциясының Эйлер формуласын көрсетіңіз.

A) $\cos\varphi+i\sin\varphi$

B) $\cos\varphi+\sin\varphi$

C) $\cos\varphi-\sin\varphi$

D) $i\sin\varphi$

E) $\cos\varphi-i\sin\varphi$

24. Екі комплекс санның көбейтіндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

B) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1\cdot\varphi_2)+i\sin(\varphi_1\cdot\varphi_2)\right)$

C) $z_1\cdot z_2=|z_1|+|z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1\cdot\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

D) $z_1\cdot z_2=|z_1\cdot z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)-i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

E) $z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)-i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

25. Екі комплекс санның қатынасының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2}=|z_1-z_2|\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

B) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

C) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)$

D) $\frac{z_1}{z_2}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|(\cos(\varphi_1-\varphi_2)-i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

E) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1+\varphi_2)-i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

26. z_1, z_2 нүктелерінің арақашықтығы неге тең?

A) $\frac{\mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_1}$ векторының ұзындығына

B) $\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

C) $\mathbf{z}_2\cdot\mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

D) $\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1$ векторының ұзындығына

E) $\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2}$ векторының ұзындығына

27. $|z-z_0|<r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

28. $\left| z - z_0 \right| > r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

29. $\left| z - z_0 \right| = r$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңберді құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

30. $r_1 \le \left| z - z_0 \right| \le r_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық z нүктелерінің геометриялық орны - …

A) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңберлерді қоса есептегендегі сақинаны құрайтын комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

B) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің сыртындағы жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

C) центрі z_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбердің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

D) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын концентрлі шеңберлердің кішісінің ішінде жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

E) центрі z_0 нүктесі, радиусы r_1, r_2 болатын шеңбердің үлкенінің сыртында жатқан комплекс жазықтықтағы нүктелер жиыны

31. $\mathbf{z}_1$ векторын $\arg z_2$ бұрышына бұру және $|z_2|$ «есе ұзарту» арқылы алынатын қандай вектор?

A) $z_2 \cdot z_1$ көбейтіндісінің векторы

B) $\frac{z_2}{z_1}$ қатынасының векторы

C) $z_2 + z_1$ қосындысының векторы

D) $z_2 - z_1$ айырмасының векторы

E) $\frac{z_1}{z_2}$ қатынасының векторы

32. Бөлінгіштің векторын «ұзарту» мен бұру арқылы алынатын қандай вектор?

A) $\frac{z_1}{z_2}$ қатынасының векторы

B) $z_2 \cdot z_1$ көбейтіндісінің векторы

C) $\frac{z_2 + z_1}{2}$ қосындысының жарты векторы

D) $z_2 + z_1$ қосындысының векторы

E) $z_2 - z_1$ айырмасының векторы

33. Егер ... болса, онда z_1 санын z_2 санына көбейту $\mathbf{z}_1$ векторын тек бұруға әкеледі.

A) $|z_2| = 1$

B) $|z_2| = 0$

C) $|z_2| = 3$

D) $|z_2| = 5$

E) $|z_2| = 4$

34. Егер ... болса, онда z_1 санын z_2 санына көбейту $\mathbf{z}_1$ векторын тек «ұзартуға» әкеледі.

A) $\arg z_2 = 0$

B) $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$

C) $\arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$

D) $\arg z_2 = \pi$

E) $\arg z_2 = -\pi$

35. Екі комплекс санның көбейтіндісінің формуласын көрсетіңіз.

A) $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

B) $z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

C) $z_1 z_2 = (|z_1| + |z_2|) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

D) $z_1 z_2 = (|z_1| - |z_2|) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

E) $z_1 z_2 = (|z_1| + |z_2|) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

36. Екі комплекс санның қатынасының формуласын көрсетіңіз.

A) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

B) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

C) $\frac{z_1}{z_2} = |z_1 \| z_2| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

D) $\frac{z_1}{z_2} = \left(|z_1| + |z_2|\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

E) $\frac{z_1}{z_2} = \left(|z_1| - |z_2|\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

37. $\sqrt[n]{z}$ түбірініңбарлықмәндерінтабуформуласынкөрсетіңіз.

A) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k=0,1,2,\ldots,n-1$

B) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k=0,1,2,\ldots,n$

C) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\right)$

D) $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k}{n}\right)\right), k=0,1,2,\ldots,n-1$

E) $\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k=0,1,2,\ldots,n-1$

38. $\sqrt[3]{z}$ түбірін есептеу формуласын көрсетіңіз.

A) $\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right), \quad k=0,1,2$

B) $\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right), \ k=0,1,2,3$

C) $\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)\right)$

D) $\sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\varphi+2k}{3}\right)\right), \ k=0,1,2,\ldots$

E) $\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), \ k=0,1,2,\ldots,n-1$

39. $z=x+iy$ комплекс санының $x>0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} + \pi$

B) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} - \pi$

C) $\text{arg}z = \frac{\pi}{2}$

D) $\text{arg}z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$

40. $z = x + iy$ комплекс санының $x < 0, y < 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} + \pi$

B) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} - \pi$

C) $\text{arg}z = \frac{\pi}{2}$

D) $\text{arg}z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$

41. $z = x + iy$ комплекс санының $x < 0, y \geq 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} + \pi$

B) $\text{arg}z = \text{arctg}\,\frac{y}{x} - \pi$

C) $\text{arg}z = \frac{\pi}{2}$

D) $\text{arg}z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

42. $z = x + iy$ комплекс санының $x = 0,\ y > 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

43. $z = x + iy$ комплекс санының $x = 0,\ y < 0$ болғандағы аргументтің бас мәнін табу формуласын көрсетіңіз.

A) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$

B) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$

C) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

D) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

E) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

44. $z, w \in C$ болса, модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

B) $\Re(z) \le |z|$ және $\Im(z) \le |z|$

C) $|z| = 2\sqrt{z\bar{z}}$

D) $|zw| = |z||w|$

E) $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$

45. $z, w \in C$ болса, модульдің қай қасиеті дұрыс көрсетілмеген?

A) $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right|$

B) $\left|z+w\right| = \left|z\right| + \left|w\right| \Leftrightarrow z = \lambda w$ немесе $w = \lambda z$ теңдігі орындалатындай $\lambda \in R$ саны бар болса

C) $\left|\left|z\right| - \left|w\right|\right| \le \left|z-w\right|$

D) $\left|z+w\right| \ge \left|z\right| + \left|w\right|$

E) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{\left|z\right|}{\left|w\right|}$

46. $z = (x, y) \neq 0$ (нөлден өзгеше) комплекс санының аргументі неге тең?

A) анықталмаған
B) нөлге тең
C) нөлден үлкен
D) нөлден кіші
E) кез келген бұрыш

47. Модульдері тең нүктелердің жиыны нені анықтайды?

A) шеңберді
B) параболаны
C) гиперболаны
D) нүктені
E) түзуді

48. Аргументтері тең нүктелердің жиыны нені анықтайды?

A) координаталар басы аласталған (алып тастағандағы) ашық сәулені
B) координаталар басынан өтетін ашық сәулені
C) гиперболаны
D) нүктені
E) түзуді

49. $z = x + iy$ санының тригонометриялық пішінінің стандартты емес жазылымы?

A) $z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta),\ \beta = \theta + 2\pi k,\ k \neq 0,\ k \in Z$

B) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

C) $x = |z|\cos\theta,\quad y = |z|\sin\theta$

D) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

E) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

50. $z = x + iy$ санының тригонометриялық пішінінің стандартты емес жазылымы?

A) $z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta),\ \beta = \theta + 2\pi k,\ k \neq 0,\ k \in Z$

B) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

C) $x = |z|\cos\theta,\quad y = |z|\sin\theta$

D) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

E) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

15 Тест «Комплекс сандарға қолданылатын көбейту және бөлу амалдары»

Бұл тараудағы есептер «Математика», «Математика 1» пәндерінің «Комплекс сандарға қолданылатын көбейту және бөлу амалдарына» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

15.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

15.1-мысал: $z_1 = (3, -7), z_2 = (1, 4)$ сандары берілген. $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ сандарын табыңыз.

Шешімі:

а) Комплекс сандарға арифметикалық амалдар орындау келесі формулалардың көмегімен жүргізіледі:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \qquad (15.1)$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (15.2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tag{15.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \; x_2^2 + y_2^2 \neq 0. \tag{15.4}$$

b) (15.1) - (15.4) формулаларын қолданып, амалдарды жекелей орындасақ:

$$z_1 + z_2 = (3, -7) + (1, 4) = (3+1, -7+4) = (4, -3),$$
$$z_1 - z_2 = (3, -7) - (1, 4) = (3-1, -7-4) = (2, -11),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3, -7) \cdot (1, 4) = (3 \cdot 1 - (-7) \cdot 4, 3 \cdot 4 + (-7) \cdot 1) = (31, 5),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3, -7)}{(1, 4)} = \left(\frac{3 \cdot 1 - (-7) \cdot 4}{1^2 + 4^2}, \frac{1 \cdot (-7) - 3 \cdot 4}{1^2 + 4^2} \right) = \left(-\frac{25}{17}, -\frac{19}{17} \right).$$

C) Жауабы:

$$z_1 + z_2 = (4, -3), \; z_1 - z_2 = (2, -11), \; z_1 \cdot z_2 = (31, 5), \; \frac{z_1}{z_2} = \left(-\frac{25}{17}, -\frac{19}{17} \right).$$

15.2-мысал: 15.1-мысалдағы $z_1 = (3, -7), \; z_2 = (1, 4)$ сандарының қосындысын, айырмасын, көбейтіндісін және қатынасын олардың $z = x + iy$ түріндегі жазылуын пайдаланып табыңыз.

Шешімі:

a) Комплекс санының $z = x + iy$ алгебралық түріндегі жазылуын пайдаланып, комплекс сандарға қолданылатын арифметикалық амалдарды көпмүшеліктерге қолдану ережелері бойынша жүргізуге болатындықтан, осы есепті *екінші әдіспен* орындауға болады.

b) $$z_1 + z_2 = (3 + i(-7)) + (1 + i4) = (3+1) + i(-7+4) = 4 - 3i,$$
$$z_1 - z_2 = (3 + i(-7)) - (1 + i4) = (3-1) + i(-7-4) = 2 - 11i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3 + i(-7)) \cdot (1 + i4) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4i + i(-7) \cdot 1 + i^2(-7) \cdot 4 =$$
$$= 3 + 12i - 7i + (-1) \cdot (-28) = 31 + 5i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 7i}{1 + 4i} = \frac{(3 - 7i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{3 - 12i - 7i + 28i^2}{1^2 + 4^2} = \frac{3 - 19i - 28}{17} =$$
$$= \frac{-25 - 19i}{17} = -\frac{25}{17} - \frac{19i}{17}.$$

c) Жауабы:

$$z_1 + z_2 = 4 - 3i, \; z_1 - z_2 = 2 - 11i, \; z_1 \cdot z_2 = 31 + 5i, \; \frac{z_1}{z_2} = -\frac{25}{17} - \frac{19}{17} i.$$

15.2 Тест тапсырмалары

1. $\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$ комплекс сандарының көбейтіндісін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) 4
B) 3
C) 6
D) 7
E) 8

2. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$ санының есептелуін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $-i$
B) $1+\sqrt{3}i$
C) $2-i$
D) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\sqrt{3}-i$

3. $(5+2i)\cdot(2+3i)$ комплекс сандарының көбейтіндісін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $4+19i$
B) $2\sqrt{3}+2i$
C) $2+i$
D) $7\sqrt{3}+5i$
E) $-4\sqrt{3}+2i$

4. $\dfrac{\sqrt{5}+i}{1-\sqrt{5}i}$ санының есептелуін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) i
B) $1+\sqrt{5}i$
C) $2-i$
D) $-i$
E) $\sqrt{3}+i$

5. $(8-i)\cdot(8+i)$ комплекс сандарының көбейтіндісін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) 65
B) 10
C) 64
D) 53
E) 87

6. $\frac{3-i}{3+i}$ санының есептелуін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $\frac{4}{5}-i\frac{3}{5}$
B) $2i$
C) $1-i$
D) $\sqrt{7}-i$
E) $1+i$

7. $\left(\sqrt{2}-i\right)\cdot\left(\sqrt{2}+i\right)$ комплекс сандарының көбейтіндісін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) 3
B) 2
C) 6
D) 7
E) 8

8. $\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}$ санының есептелуін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $\frac{2}{3}-i\frac{\sqrt{5}}{3}$
B) $1+\sqrt{3}i$
C) $-i$
D) $\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}$
E) $\sqrt{3}+i$

9. $(-3+5i)\cdot(4-3i)$ комплекс сандарының көбейтіндісін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $3+29i$
B) $13+i$
C) $12+5i$
D) $67+i$
E) $3-12i$

10. $\dfrac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{5}+i}$ санының есептелуін алгебралық түрде көрсетіңіз.

A) $-i$
B) $1+\sqrt{3}i$
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$
D) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\sqrt{3}+i$

16 Тест «Комплекс сандардың тригонометриялық, көрсеткіштік пішіндері»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Комплекс сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін құруға» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген. Бұл тарауда білім алушыларға комплекс сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін құрудағы басқа да тиімді әдістер қарастырылған, әрі есептеуде кездесетін комплекс санның аргументін табудың формуласын жаттамай-ақ, комплекс санды геометриялық кескіндеу әдісінің қолайлылығы көрсетіледі.

16.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

16.1-мысал: $z=-3+3\sqrt{3}i$ комплекс санының тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін анықтаңыз:
Шешім:

1-әдіс: z санының модулі:

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36}=6,$$

аргументі

$$\theta=\arg z=arctg\left(\sqrt{-3}\right)+\pi=\frac{2\pi}{3}$$

комплекс санның тригонометриялық пішінінің

$$z=|z|\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

формуласы бойынша

$$z=6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Комплекс санның көрсеткіштік пішінінің

$$z=|z|e^{i\varphi}$$

формуласы бойынша

$$z=6e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2-әдіс: Ол үшін модулді жақшаның сыртына жазып, есептің шартында берілген комплекс санға келтіреміз:

$$z=-3+3\sqrt{3}i=6\left(-\frac{3}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{6}i\right),$$

жақшадағы комплекс санның нақты және жорамал бөліктеріне қатысты тригонометриялық бұрыштарды табамыз:

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2},\\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$$

I және II ширекте $\cos\theta$ мәнін табуға болады, сондықтан $\theta=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ деп алған ыңғайлы, ал $\sin\theta$ алынса оны II ширекке сәйкес келетін бұрышқа бұруымыз керек.

Демек, z комплекс санның тригонометриялық пішіні

$$z=6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

16.2 Тест тапсырмалары

1. $z=-1-\sqrt{3}i$ комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

B) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

D) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2. $z=-1-\sqrt{3}i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

B) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

C) $e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

D) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

3. $z=-1-i$ комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

B) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

D) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

4. $z=-1-i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

B) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

C) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

D) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

5. $z=1+i$ комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

D) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

6. $z=1+i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

B) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

C) $e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

D) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

7. $z=1-i$ комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

B) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

C) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

D) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

E) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

8. $z=1-i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

B) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

C) $e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

D) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

9. $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ комплекс санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

A) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

C) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

D) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

E) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

10. $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ комплекс санын көрсеткіштік түрде жазыңыз.

A) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$

B) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

C) $e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

D) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

E) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

17 Тест «Комплекс сандарды дәрежелеу және түбірлерін табу»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Комплекс сандарды дәрежелеу және түбірлерін табуға» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

17.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

17.1-мысал: Есептеңіз:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$;

2) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{11}$;

3) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$.

Шешімі:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6\right)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1;$

2) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{11}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 11\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 11\right)=\cos\frac{11\pi}{3}+i\sin\frac{11\pi}{3}=$

$$=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

3) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}=\left|\begin{matrix}|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{11}=$

$$=2^{11}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right)=2^{11}\left(\cos\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=2^{11}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2^{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2^{10}\sqrt{3}+2^{10}i=1024\sqrt{3}+1024i.$$

17.2-мысал: $z=-1+i\sqrt{3}$ берілген. z^{60} мәнін есептеңіз.

Шешімі: $z=-1+i\sqrt{3}$ санын тригонометриялық түрде жазып алайық

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Жоғарғыда берілген

$$z^n=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

формуласын қолдансақ

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left(\cos\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}$$

нәтижесіне келеміз.

17.3-мысал: $z^6+64=0$ теңдеуін шешіңіз:

Шешімі:

$$z^6+64=0$$
$$z^6=-64$$
$$z=\sqrt[6]{-64}$$
$$z=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right), k=0,1,2,3,4,5.$$
$$z_1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$
$$z_2=2(0+i),$$
$$z_3=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right),$$
$$z_4=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right),$$
$$z_5=2(0-i),$$
$$z_6=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right).$$

17.2 Тест тапсырмалары

1. $(1+i)^6$ комплекс санының дәрежесін есептеңіз.

A) –i
B) 8
C) i
D) -1
E) 2i

2. $z^2-4i\cdot z+12=0$ теңдеуін шешіңіз.

A) $(2+i;\ 2i)$
B) $(6i;\ -2i)$
C) $(1+i;\ i)$
D) $(2-i;\ i)$
E) $(2+2i;\ i)$

3. $\left(\sqrt{3}+i\right)^4$ комплекс санының дәрежесін есептеңіз.

A) –i

B) 16
C) i
D) -1
E) 2i

4. $z^2+4iz+12=0$ теңдеуін шешіңіз.
A) $(-6i;\ 2i)$
B) $(2+i;\ i)$
C) $(1+i;\ i)$
D) $(2-i;\ i)$
E) $(2+2i;\ i)$

5. $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$ комплекс санының дәрежесін есептеңіз.
A) –i
B) 2^{60}
C) i
D) -1
E) 2i

6. $z^2+4iz-13=0$ теңдеуін шешіңіз.
A) $(3-2i;\ -3+2\ i)$
B) $(-3-2i;\ -3+2\ i)$
C) $(-3-2i;\ 3-2i)$
D) $(3+i;\ -3+i)$
E) $(1+2i;\ -1+2\ i)$

7. $\left(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ\right)^{10}$ комплекс санының дәрежесін есептеңіз.
A) –i
B) 1
C) i
D) -1
E) 2i

8. $z^2+5iz-6=0$ теңдеуін шешіңіз.
A) $(3-2i;\ -3+2\ i)$
B) $(-3i;\ 2i)$

C) $(-3i;-2i)$
D) $(3i;-2i)$
E) $(1+2i;-1+2i)$

9. i^{81} комплекс санының дәрежесін есептеңіз.
A) –i
B) 1
C) i
D) -1
E) 2i

10. $z^2-5i\cdot z+6=0$ теңдеуін шешіңіз.
A) $i;\ 6i$
B) $-3i;\ 2i$
C) $3i;\ -2i$
D) $-3i;\ -2i$
E) $i;\ 2i$

18 Тест «Бірінші және екінші тамаша шектер. Шексіз аз және шексіз үлкен функциялардың эквиваленттілігі»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Бірінші және екінші тамаша шектер» және «Шексіз аз және шексіз үлкен функциялардың эквиваленттілігі» ұғымдарын қолданып функцияның шегін табуға арналған. Берілген бес жауап нұсқасының тек бір жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

18.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Функция шектерін табудың келесі әдістерін қарастырамыз.
Бірінші және екінші тамаша шектер және олардың салдарлары көмегімен шекті есептеу әдісі.

$\frac{0}{0}$ және $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашуда қолданылатын бірнеше белгілі шектерді келтіреміз.
Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (мұнда $a=\infty$ жағдайы да мүмкін) болса, онда:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – *бірінші тамаша шек;*

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1;$

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a;$

7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=1;$

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)}=\log_a e;$

9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{[1+\alpha(x)]^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu;$

10) $\lim\limits_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}=e$ *– екінші тамаша шек.*

1 – 9 шектері $\dfrac{0}{0}$ түріндегі, 10 шегі 1^{∞} түріндегі анықталмағандықты ашуда қолданылады.

2 – 4 шектері бірінші тамаша шектің, 5 – 9 шектері екінші тамаша шектің салдары болады.

18.1-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} x}$.

Шешімі:

a) $\dfrac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – бірінші тамаша шекті және $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ түріндегі оның салдарын қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\cdot\dfrac{tgx}{x}\cdot x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=2.$

c) Жауабы: 2.

18.2-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{9}}{e^{-3x}-1}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ – бірінші тамаша шектің және $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1$ екінші тамаша шектің салдарларын қолданамыз:

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{9}}{e^{-3x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{9}\cdot\frac{\arcsin\frac{x}{9}}{\frac{x}{9}}}{-3x\cdot\frac{e^{-3x}-1}{-3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{9}}{-3x}=-\frac{1}{27}.$$

c) Жауабы: $-\frac{1}{27}$.

Шексіз аз функцияларды (ШАФ) немесе шексіз үлкен функцияларды (ШҮФ) салыстырудағы эквиваленттілікті қолданып шекті есептеу әдісі.

$x\to a\Rightarrow\alpha(x),\beta(x)-$ *ШАФ* және $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ болсын.

Егер $C=1$ болса, онда α және β – *эквивалентті шексіз аз функциялар* деп аталады. Эквиваленттілік $\alpha\sim\beta$ түрінде белгіленеді. $x\to 0$ жағдайында:

1. $\sin x\sim x;$

2. $tgx\sim x;$

3. $\arcsin x\sim x;$

4. $arctgx\sim x;$

5. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$

6. $a^x-1\sim x\cdot\ln a;$

7. $e^x-1\sim x;$

8. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e;$

9. $\ln(1+x)\sim x;$

10. $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\quad k>0.$

Ескерту. Шекті есептеу кезінде шексіз азфункцияны оған эквивалентті функциямен ауыстыруғаннан шектің мәні өзгермейді. Шексіз үлкен функциялар осыған ұқсас салыстырылады.

18.3-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\operatorname{tg}x}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $x \to 0$ жағдайында $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ және $tgx \sim x$ эквиваленттіліктерін қолданып шекті есептейміз:

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4x^2}{2}}{x \cdot x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 2.$

c) Жауабы: 2.

18.4-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{9}}{e^{-3x}-1}$.

Шешімі:

a) $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашу үшін $x \to 0$ жағдайында $\arcsin x \sim x$ және $e^x - 1 \sim x$ эквиваленттіліктерін қолданып шекті есептейміз:

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{9}}{e^{-3x}-1} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{9}}{-3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}.$

c) Жауабы: $-\frac{1}{27}$.

18.5-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x+2}\right)^{3x+5}$.

Шешімі:

a) 1^∞ анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ – екінші тамаша шекті қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x+2}\right)^{3x+5} = 1^\infty = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{5}}\right)^{\frac{x+2}{5}}\right)^{\frac{5}{x+2}(3x+5)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{15x+25}{x+2}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{15+\frac{25}{x}}{1+\frac{2}{x}}} = e^{15}.$

c) Жауабы: e^{15}.

18.6-мысал: Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$.

Шешімі:

a) 1^{∞} анықталмағандығын ашу үшін $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – екінші тамаша шекті қолданамыз:

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+(-4x))^{\frac{1}{-4x}}\right)^{\frac{-4x}{x}}=e^{-4}$.

c) Жауабы: e^{-4}.

18.2 Тест тапсырмалары

1. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x^2+2}\right)^{x}$.

A) e
B) e^2
C) ∞
D) $e^{\frac{2}{3}}$
E) 1

2. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$.

A) 2
B) 0
C) 1
D) $\frac{1}{2}$
E) ∞

3. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-4}\right)^{x^2}$.

A) 1
B) ∞
C) $e^{-\frac{3}{4}}$
D) e^7
E) e

4. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$.

A) 1
B) 0
C) $\dfrac{2}{3}$
D) $-\dfrac{1}{3}$
E) ∞

5. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x+1}\right)^{x}$.

A) $e^{\frac{1}{5}}$
B) 0
C) e^{-3}
D) e^{-5}
E) ∞

6. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot \operatorname{tg} 4x}$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 8
E) $\dfrac{1}{2}$

7. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$.

A) e^{2}
B) e^{5}
C) $e^{\frac{3}{2}}$
D) e^{-10}

E) e^6

8. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 2x}$.

A) 1
B) 2
C) 0
D) 8
E) ∞

9. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$.

A) e^4
B) ∞
C) 0
D) e
E) 1

10. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{e^{-x}-1}$.

A) -1
B) $-\dfrac{1}{2}$
C) 0
D) -2
E) $\dfrac{1}{2}$

19 Тест «Функцияның туындысы»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Функцияның туындысы» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасының тек бір жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

19.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Бұл тараудың есептерін шығару үшін дифференциалдау ережелері мен туындылар кестесін білу қажет.

19.1-мысал: $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$, $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ дифференциалдау ережелерін және $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ формуласын қолданамыз.

b) $y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} =$

$= 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$

c) Жауабы: $12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$

19.2-мысал: $y = \sin x \cdot e^x$ функциясының $x = 0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ дифференциалдау ережесін және $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'(x)$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'(x)$ формулаларын қолданамыз.

b) $y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot \left(e^x\right)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x \big|_{x=0} = 1.$

c) Жауабы: 1.

19.3-мысал: $y = \frac{x^2}{\cos x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ дифференциалдау ережесін және $\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'(x)$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'(x)$ формулаларын қолданамыз.

b) $y' = \frac{\left(x^2\right)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$

c) Жауабы: $\frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$

19.4-мысал: $y=\sin\left(x^2+3\right)$ функциясының туындысын табыңыз.
Шешімі:

a) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ формуласын және $\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x)$, $(c)'=0$ дифференциалдау ережесін қолданамыз.

b) $y=\sin u$, мұнда $u=x^2+3$.

c) Жауабы: $2x\cos\left(x^2+3\right)$.

19.5-мысал: $y=\left(x^2+e^x\right)^{10}$ функциясының $x=0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.
Шешімі:

a) $\left(u^\alpha\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'(x)$, $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'(x)$ формулаларын және $\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x)$ дифференциалдау ережесін қолданамыз.

b) $y=u^{10}$, мұндағы $u=x^2+e^x$.

$y'=10u^9\cdot\left(x^2+e^x\right)'=10\left(x^2+e^x\right)^9\cdot\left(2x+e^x\right)\Big|_{x=0}=10.$

c) Жауабы: 10.

19.6-мысал: $y=x^2\cdot e^{\sin x}$ функциясының туындысын табыңыз.
Шешімі:

a) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ дифференциалдау ережесін және $\left(u^\alpha\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'(x)$, $(e^u)'=e^u\cdot u'$ формулаларын қолданамыз.

b) $y'=\left(x^2\right)'e^{\sin x}+x^2\left(e^{\sin x}\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\left(\sin x\right)'=$
$=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\cos x.$

c) Жауабы: $2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\cos x.$

19.2 Тест тапсырмалары

1. $y=\sqrt[7]{x^5}-tg3x$ функциясының туындысын табыңыз.

A) $\dfrac{8}{x^5}-\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

B) $\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2}}-\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

C) $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+\frac{1}{x^5\cos^2 3x}$

D) $\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}-\frac{8}{x^5\cos^2 3x}$

E) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5\cos^2 3x}$

2. $y=\sqrt{x^2+3}$ функциясының $x=1$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) -3

B) 1

C) $0{,}5$

D) $\frac{2}{3}$

E) 0

3. $y=\frac{2x+1}{x}$ функциясының туындысын табыңыз.

A) $-\frac{1}{x^2}$

B) $-\frac{1}{x}$

C) $2x$

D) $\frac{1}{x^2}$

E) 2

4. $y=\ln(\cos x)$ функциясының $x=0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 0

B) $-\frac{1}{3}$

C) $0{,}5$

D) -1

E) 1

5. $y=\ln x+3e^{5x}$ функциясының туындысын табыңыз.

A) $\frac{1}{x}+15e^{5x}$

B) xe^{5x}

C) $2+5e^{5x}$

D) $\frac{1}{x}+3e^{5x}$

E) 0

6. $y=\ln(\sin x)$ функциясының $x=\frac{\pi}{4}$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) -1

B) $\ln 4$

C) 1

D) $\mathbf{0}$

E) $\ln 2$

7. $y=x^2\cos x$ функциясының туындысын табыңыз.

A) $2x\cos x-x^2\sin x$

B) $2x\cos x$

C) $x^2\sin x$

D) $2x-\sin x$

E) $2x\sin x$

8. $y=\left(\frac{5x+2}{7}\right)^2$ функциясының $x=1$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) $\frac{10}{7}$

B) 1

C) $\frac{5}{7}$

D) 2

E) -1

9. $y=tge^{2x}$ функциясының туындысын табыңыз.

A) $\frac{2e^{2x}}{\cos^2 e^{2x}}$

B) $\frac{2}{e^{2x}}$

C) $\frac{1}{\cos^2 e^{2x}}$

D) $\frac{2}{\cos e^{2x}}$

E) $\frac{2e^{2x}}{\cos^2 x}$

10. $y = x \cdot \sin x$ функциясының $x = 0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

A) 0
B) -2
C) 1
D) $0{,}5$
E) -1

20 Тест «Айқындалмаған және параметрлік түрде берілген функциялардың туындысы

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Айқындалмаған және параметрлік түрде берілген функциялардың туындысы» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

20.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

20.1-мысал: $M(1;\,2)$ нүктесіндегі айқындалмаған $y^2 + 2x^2 y = 0$ функцияның y'_x туындысын табыңыз.

Шешімі:

а) x айнымалысынан тәуелді y функциясы $F(x,y)=0$ айқындалмаған түрінде берілген. Оның туындысын табу үшін $F(x,y)=0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін

ескере отырып дифференциалдаймыз да, нәтижесінде $y' = \varphi(x, y)$ түрінде өрнектеп аламыз.

b) $2yy' + 4xy + 2x^2 y' = 0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:
$(2y + 2x^2)y' = -4xy$.

Алынған теңдеуден y' туындысын $y' = \dfrac{-4xy}{2y + 2x^2}$ түрінде өрнектеп, осы өрнектің $M(1; 2)$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y' = \left.\frac{-4xy}{2y + 2x^2}\right|_{(1;2)} = \frac{-4 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

c) Жауабы: $-\dfrac{4}{3}$.

20.2-мысал: $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = \sin t \end{cases}$ функциясы берілген. $t = 0$ болғанда y'_x туындысын есептеңіз.

Шешімі:

a) x айнымалысынан тәуелді y функциясы

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

параметрлік түрінде берілсін.

Егер $\varphi(t), \psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және $\varphi'(t) \neq 0$ болса, онда параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

формуласымен есептеледі.

b) $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ формуласы бойынша туындысын тауып, $t = 0$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y' = \frac{(\sin t)'}{(2t + 3)'} = \left.\frac{\cos t}{2}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

c) Жауабы: $\frac{1}{2}$.

20.2 Тест тапсырмалары

1. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ функциясы берілген. $t = 0$ болғандағы y'_x туындысын есептеңіз.

A) 0
B) -2
C) 2
D) -1
E) 1

2. M(1;0) нүктесіндегі айқындалмаған $\sin 4y = x^3$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) $\frac{3}{4}$
B) $-\frac{1}{2}$
C) 0
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{\pi}{6}$

3. $\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ функциясы берілген. $t = 1$ болғандағы y'_x туындысын есептеңіз.

A) 1
B) 0
C) $\frac{2}{3}$
D) -2
E) 2

4. M(1;1) нүктесіндегі айқындалмаған $\ln y=3x^3+19$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) 8
B) 0
C) -7
D) 9
E) -8

5. $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ функциясы берілген. $t=0$ болғандағы y'_x туындысын есептеңіз.

A) 1
B) 0
C) 2
D) -2
E) -1

6. $M(-2;1)$ нүктесіндегі айқындалмаған $3x^2+2y^2=18$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) 3
B) 2
C) -2
D) -3
E) -1

7. $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos^2 t \\ y=\frac{1}{2}\sin^2 t \end{cases}$ функциясы берілген. $t=1$ болғандағы y'_x туындысын есептеңіз.

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2

E) $\frac{1}{2}$

8. M$(1;2)$ нүктесіндегі айқындалмаған $x^2y^3=17$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) $-\frac{1}{3}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $-\frac{4}{3}$

D) 0

E) $-\frac{3}{4}$

9. $\begin{cases} x=t^3-3 \\ y=t^3-6t \end{cases}$ функциясы берілген. $t=1$ болғандағы y'_x туындысын есептеңіз.

A) 0

B) -1

C) 1

D) 2

E) $\frac{1}{2}$

10. M$(2;1)$ нүктесіндегі айқындалмаған $x^3-y^3=13$ функциясының y'_x туындысын табыңыз.

A) 3

B) 4

C) -2

D) 0

E) -1

21 Тест «Функцияны зерттеу»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Функцияны зерттеу», яғни функцияның кризистік (стационар немесе экстремумге күдікті) нүктелері, өсу немесе кему (монотондылық) аралықтары, экстремумдары, ойыс, дөңес аралықтары, иілу нүктесі тақырыптарына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

21.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

21.1-мысал: $y = x^2 + 6x + 3$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңыз.

Шешімі:

a) Функцияның $f'(x) = 0$ және $f'(x)$ болмайтын нүктелері, үзіліс нүктелері болатын нүктелер *кризистік (стационар* немесе *экстремумге күдікті) нүктелер* деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын және барлық $x \in (a;b)$ үшін $f'(x) > 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *өспелі*;

Егер барлық $x \in (a;b)$ үшін $f'(x) < 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *кемімелі*.

b) Функцияның кризистікнүктесін табу үшін бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f'(x) = 0$:

$$\left(x^2 + 6x + 3\right)' = 0$$

$$2x + 6 = 0$$

$$2x = -6$$

$$x = -3.$$

Демек, $x = -3$ функцияның кризистік нүктесі.

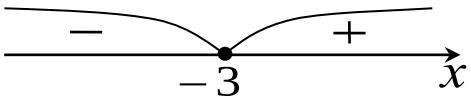
Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty; -3)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = -4$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «−», яғни $f'(x) < 0$:

$f'(-4) = 2(-4) + 6 = -2$.

$(-3; +\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = 0$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x) > 0$:

$f'(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6$.



$f'(x)$- таңбасы

Демек, функция
$(-\infty;-3)$ интервалында $f(x)$ кемімелі,
$(-3;+\infty)$ интервалында $f(x)$ өспелі.

c) Жауабы: $(-\infty;-3)$ интервалы $f(x)$ функциясының кему аралығы, $(-3;+\infty)$ интервалы $f(x)$ функциясының өсу аралығы.

21.2-мысал: $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ функциясының экстремум нүктелерін табыңыз.

Шешімі:

a) X жиынында $y=f(x)$ функциясы $x_0\in X$ нүктесінің аймағында анықталған және бұл нүктеде үзіліссіз болсын. Осы аймақтың барлық x нүктелері үшін

$$f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0))$$

теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимум (минимум)* нүктесі деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері функцияның *экстремум нүктелері* деп аталады.

Егер зерттеліп отырған x_0 нүктесі арқылы өткенде y' таңбасын «+»-тен «−»-ке өзгертсе, онда бұл нүкте максимум нүктесі болады.

Егер зерттеліп отырған x_0 нүктесі арқылы өткенде y' таңбасын «−»-тен «+»-ке өзгертсе, онда бұл нүкте минимум нүктесі болады.

Егер y'-тің таңбасы x_0 нүктесі арқылы өткенде таңбасын өзгертпесе, онда бұл нүктеде функцияның экстремумы жоқ.

b) Функцияның кризистікнүктесін табу үшін бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f'(x)=0$:

$$\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)'=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

Демек, $x_1=1,\ x_2=3$ функцияның кризистік нүктелері.

Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty;1)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=0$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)>0$:

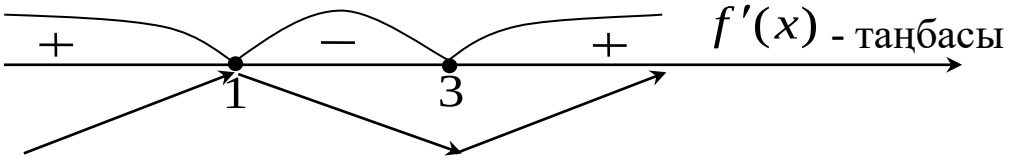
$$f'(0)=0^2-4\cdot 0+3=3.$$

$(1;3)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=2$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)<0$:

$$f'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

$(1;+\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=5$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)>0$:

$$f'(5)=5^2-4\cdot 5+3=8.$$



$(-\infty;1),(3;+\infty)$ интервалдарында $f(x)$ өспелі, $(1;3)$ интервалында $f(x)$ кемімелі.

$x=1$ функцияның максимум нүктесі, ал $x=3$ функцияның минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін табайық:

$f(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}$, $A\left(1;\frac{7}{3}\right)$ - функция графигінің максимумге сәйкес нүктесі,

$f(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1$, $B(3;1)$ - функция графигінің минимумге сәйкес нүктесі.

c) Жауабы:

$A\left(1;\frac{7}{3}\right)$ - max нүктесі, $B(3;1)$ - min нүктесі.

21.3-мысал: $y = x^3 + 3x^2 - 4$ функциясының дөңес және ойыс аралықтарын және иілу нүктелерін табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $y = f(x)$ функциясының $(a;b)$ аралығында екінші ретті туындысы $y'' < 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі *дөңес* ал, егер $y'' > 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі *ойыс* болады.

Егер $x_0 \in D$, $f''(x_0) = 0$ немесе $f''(x_0)$ жоқ болса және x_0 нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі функцияның *иілу нүктесі* болады.

b) $y = x^3 + 3x^2 - 4$ функциясының екінші ретті туындысын табамыз:

$y' = 3x^2 + 6x$

$y'' = 6x + 6$

Екінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f''(x) = 0$:

$6x + 6 = 0$

$x = -1.$

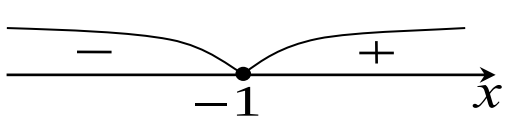
Екінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty; -1)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = -3$, онда $f''(x)$ туындысының таңбасы «–», яғни $f''(x) < 0$:

$f''(-3) = 6(-3) + 6 = -6.$

$(-1; +\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = 2$, онда $f''(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f''(x) > 0$:

$f''(2) = 6 \cdot 2 + 6 = 18.$



$f''(x)$- таңбасы

$(-\infty;-1)$ интервалында $f''(x) < 0 \Rightarrow (-\infty;-1)$ интервалында функция дөңес.

$(-1;+\infty)$ интервалында $f''(x) > 0 \Rightarrow (-1;+\infty)$ интервалында функция ойыс.

$x=-1$ нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертендіктен $x=-1$ нүктесі функцияның *иілу нүктесі* болады, ординатасын табу үшін $x=-1$ мәнін функцияға апарып қоямыз:

$y=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4=-1+3-4=-2.$

c) Жауабы:

$(-\infty;-1)$ интервалында функция дөңес.

$(-1;+\infty)$ интервалында функция ойыс.

$A(-1;-2)$ иілу нүктесі.

21.2 Тест тапсырмалары

1. $y=x^2+6x+3$ функциясының өсу аралығын табыңыз.

A) $(-\infty;-3)$

B) $(-\infty;1)$

C) $(3;+\infty)$

D) $(-3;+\infty)$

E) $(-\infty;4)$

2. $y=2x^2+8x+3$ функциясының экстремум нүктелерін табыңыз.

A) $(2;27)$ max нүктесі

B) $(-2;-5)$ min нүктесі

C) $(5;-2)$ max нүктесі

D) $(-1;2)$ max нүктесі

E) $(27;2)$ min нүктесі

3. $y=x^2+6x+3$ функциясының кему аралығын табыңыз.

A) $(-\infty;-3)$

B) $(-\infty;3)$

C) $(3;+\infty)$

D) $(-3;+\infty)$

E) $(-\infty;6)$

4. $y=x^3+3x^2-5$ функциясының иілу нүктелерін табыңыз.

A) $(1;2)$

B) $(-1;-3)$

C) $(-1;0)$

D) $(-1;9)$
E) $(0;-2)$

5. $y=x^3+3x^2+5$ функциясының дөңес аралығын табыңыз.
A) $(-1;4)$
B) $(0;1)$
C) $(-\infty;-1)$
D) $(-1;+\infty)$
E) $(0;+\infty)$

6. $y=x^3-6x^2+x$ функциясының ойыс аралығын табыңыз.
A) $(2;+\infty)$
B) $(0;-2)$
C) $(-\infty;-2)$
D) $(-1;2)$
E) $(-\infty;2)$

7. $y=x^2-4x+5$ функциясының экстремум нүктелерін табыңыз.
A) $(2;2)$ max нүктесі
B) $(-2;3)$ min нүктесі
C) $(5;-2)$ max нүктесі
D) $(2;1)$ min нүктесі
E) $(0;-2)$ max нүктесі

8. $y=x^3-10x-7$ функциясының иілу нүктесін табыңыз.
A) $(-2;7)$
B) $(-1;7)$
C) $(1;7)$
D) $(0;-7)$
E) $(2;7)$

9. $y=3x^2+12x+1$ функциясының өсу аралығын табыңыз.
A) $(-\infty;-2)$
B) $(0;2)$
C) $(2;+\infty)$

D) $(-2;+\infty)$

E) $(-\infty;0)$

10. $y=x^2+4x+7$ функциясының экстремум нүктелерін табыңыз.

A) $(-2;2)$ max нүктесі

B) $(-2;3)$ min нүктесі

C) $(1;-2)$ max нүктесі

D) $(2;3)$ min нүктесі

E) $(0;2)$ max нүктесі

22 Тест «Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу және айнымалыны ауыстыру арқылы табу әдісі»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу және айнымалыны ауыстыру арқылы табу әдісіне» арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

22.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Бұл тараудың есептерін шығару үшін дифференциалдар және негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Интегралды табудағы *дифференциалдар кестесі:*

1. $d(c)=0$
2. $d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du, \quad \alpha\in R$
3. $d(a^u)=a^u\ln a du$
4. $d(e^u)=e^u du$
5. $d(\log_a u)=\dfrac{du}{u\ln a}$
6. $d(\ln u)=\dfrac{du}{u}$
7. $d(\sin u)=\cos u du$
8. $d(\cos u)=-\sin u du$
9. $d(tgu)=\dfrac{du}{\cos^2 u}$

10. $d(ctgu) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$
11. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $d(arctgu) = \dfrac{du}{1+u^2}$
14. $d(arcctgu) = -\dfrac{du}{1+u^2}$
15. $d(shu) = chudu$
16. $d(chu) = shudu$
17. $d(thu) = \dfrac{du}{ch^2 u}$
18. $d(cthu)' = -\dfrac{du}{sh^2 u}$

Негізгі интегралдар кестесі теориялық бөлімде берілген.

Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу.

Айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу әдісі

$$\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + c. \qquad (22.1)$$

теңдігімен негізделеді, яғни интеграл атындағы функцияны $f(g(x))d(g(x))$ түріне келтіру қажет. Сондықтан жоғарғыда келтірілген *дифференциалдар* және *негізгі интегралдар кестесін* білу қажет.

Дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы интегралдарды анықтау ережесі:

- интеграл таңбасының астындағы функцияны және оның бір көбейткішінің (бөлігінің) дифференциалы интеграл астындағы өрнекті бастапқы қалпына келтіретіндей таңдау керек;
- сол көбейткішті d дифференциал белгісінің астына жазып, одан дифференциал тауып, қажетті тұрақты көбейткіштің орнын толтыру керек;
- негізгі интегралдар кестесін қолданып интегралды табу керек.

Интегралды айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып табу.

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни кестелік немесе кестелік интегралға келтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x)\,dx$ интегралын табу қажет болсын. $x=\varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда $dx=\varphi'(t)\,dt$ теңдігі негізінде

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (22.2)$$

теңдігін аламыз. Бұл формула *анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы* деп аталады. Оң жақтағы интегралды тапқаннан кейін t айнымалысынан қайта x айнымалысына көшеміз.

Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы тапсақ немесе сол интегралды айнымалыны ауыстыру әдісімен тапсақ та бірдей жауапқа келеміз. Сондықтан тест есептерін оқырман өзіне жеңіл деп таныған 2 әдістің тек біреуімен шығаруына болады.

22.1-мысал: $\int\sqrt{\cos x}\sin x\,dx$ интегралын айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуәдісінің

$\int f(g(x))d(g(x))=F(g(x))+c.$

формуласын қолданамыз.

Ереже бойынша $d(\cos u)=-\sin u\,du$ дифференциалын және $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ интегралын қолданамыз.

b) $$\int\sqrt{\cos x}\sin x\,dx=-\int\sqrt{\cos x}\,d(\cos x)=-\int(\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x)=$$
$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$$

c) Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$

22.2-мысал: $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$ интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралдыайнымалыны ауыстыру әдісімен табудың
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
формуласын қолданамыз.

b) $$\int \sqrt{\cos x}\sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \sqrt{t}dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + c.$$

c) Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + c.$

22.3-мысал: $\int x\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx$ интегралын айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу әдісінің
$\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + c.$
формуласын қолданамыз.
Ереже бойынша $d(c) = 0,$ $d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1}du,$ $\alpha \in R$ дифференциалдарын және $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ интегралын қолданамыз.

b) $$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$$

c) Жауабы: $\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$

22.4-мысал: $\int x\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx$ интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны ауыстыру әдісімен табудың

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

формуласын қолданамыз.

b) $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t, \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$

$\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + c = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$

c) Жауабы: $\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$

22.5-мысал: $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ интегралын айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу әдісінің

$\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + c.$

формуласын қолданамыз.

b) Ереже бойынша $d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1}du, \quad \alpha \in R$ дифференциалын және $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$ интегралын қолданамыз.

$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx = \arcsin x^2 + c$.

c) Жауабы: $\arcsin x^2 + c$

22.6-мысал: $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны ауыстыру әдісімен табудың

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

формуласын қолданамыз.

b) $$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}dx = \left|\begin{matrix} x^2 = t, \\ 2xdx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t + \mathrm{c} = \arcsin x^3 + \mathrm{c}.$$

c) Жауабы: $\arcsin t + \mathrm{c} = \arcsin x^3 + \mathrm{c}.$

22.2 Тест тапсырмалары

1. $\int (6+x^3)^{29} x^2 dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $x^3(6+x^3)^{28} + c$

B) $\frac{1}{90} \cdot (6+x^3)^{30} + c$

C) $(6+x^3)^{30} \cdot x + c$

D) $\frac{(6+x^3)^{28}}{x} + c$

E) $(6+x^3)^{29} \cdot x^4 + c$

2. $\int e^{x^2} x dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $x \cdot e^x + c$

B) $x^2 \cdot e^x + c$

C) $x^2 \cdot e^{x^2} + c$

D) $e^{x^3} + c$

E) $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

3. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\sqrt{\cos x} + c$

B) $\frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + c$

C) $\sqrt{\sin x} + c$

D) $\sqrt{\cos x \cdot \sin x} + c$

E) $\sqrt{\sin x + \cos x} + c$

4. $\int (2+x^2)^9 x dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\frac{1}{20}(2+x^2)^{10}+c$

B) $(2+x^2)^8+c$

C) $(2+x^2)^9 \cdot x^2+c$

D) $(2+x^2)^8 \cdot x+c$

E) $(2+x^3)^7+c$

5. $\int (\ln x)^5 \cdot \frac{1}{x} dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\frac{(\ln x)^4}{x^2}+c$

B) $(\ln x)^6 \cdot x+c$

C) $\frac{x^4}{(\ln x)^3}+c$

D) $\frac{(\ln x)^6}{6}+c$

E) $\frac{(\ln x)^4}{4}+c$

6. $\int e^{-x^3} x^2 dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $3x \cdot e^x+c$

B) $x^2 \cdot e^{2x}+c$

C) $16x^2 \cdot e^{x^2}+c$

D) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$

E) $\frac{1}{12}e^{x^2}+c$

7. $\int a^{x^3} x^2 dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\frac{1}{6}(a+x^2)^4+c$

B) $(a+x^2)^8+c$

C) $\frac{a^{x^3}}{3\ln a}+c$

D) $(2a+x^2)^9\cdot ax^2+c$

E) $(1+ax^3)^4+c$

8. $\int\frac{dx}{3x-2}$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\frac{1}{3}\ln|3x-2|+c$

B) $\mathrm{tg}2x-x+c$

C) $-\mathrm{ctg}3x+c$

D) $3\mathrm{ctg}x-2x+c$

E) $x+c$

9. $\int\frac{2x}{x^4-9}dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $2\ln|x+3|-3\ln|x-3|+c$

B) $\ln|x-1|+3\ln|x|+c$

C) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x^2-8x+7|+c$

D) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-14}\right|+c$

E) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right|+c$

10. $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$ - интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

A) $\ln|x^2-1|+c$

B) $\frac{(x+4)^5}{2}+c$

C) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3+c$

D) $\frac{(x-4)^5}{(x-2)^2}+c$

E) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+c$

23 Тест «Интегралды бөліктеп интегралдау әдісі»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Интегралды бөліктеп интегралдау әдісі» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

23.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Бұл тараудың есептерін шығару үшін дифференциалдар және негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Бөліктеп интегралдау әдісі

$u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv)=udv+vdu.$ Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu$$

немесе

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (23.1)$$

Бұл формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданғанда интеграл астындағы өрнекті $\int udv$ көбейтіндісі ретінде қарастырамыз да u функциясын $\int vdu$ интегралы $\int udv$ интегралына қарағанда интегралдауға қолайлы болатындай етіп таңдап аламыз.

Кейбір бөліктеп интегралданатын интегралдар:

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$ түріндегі интегралдарда, мұндағы $P(x)$- көпмүшелік, $u=P(x)$ деп, ал dv ретінде интеграл астындағы қалған көбейткіштерді алу керек.
2. $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx, \int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx$ түріндегі интегралдарда $P(x)dx=dv$ деп, ал u ретінде интеграл астындағы қалған көбейткішті алу керек.

3. $\int e^{ax}\sin bx dx, \int e^{ax}\cos bx dx$ түріндегі интегралдар бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолдану арқылы интегралдау есебін осы интегралға қарағанда сызықтық теңдеуді шешу есебіне келтіру арқылы табылады. Бұл арада бірінші ретте u функциясы ретінде көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынса, екінші ретте де көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынуы керек.

Ескерту. Тест тапсырмалары жоғарғыда аталған 1-3 ережелерінің алғашқы 1-2 ережелеріне берілген, емтихан есептерінің тараулары күрделілік деңгейлеріне сәйкес реттелініп берілетін себепті студенттерге 3-ережеге сәйкес есептер тәжірибелік сабақтарда талданып көрсетіледі.

23.1-мысал: $\int xe^{\sqrt{3}x}dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте x бірмүшелігі және $e^{\sqrt{3}x}$ көрсеткіштік функциясының көбейтіндісі берілгендіктен бірінші ережеге сүйеніп (23.1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int xe^{\sqrt{3}x}dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x, \quad dv = e^{\sqrt{3}x}dx \\ du = dx, \quad v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} \end{array} \right| = \frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int e^{\sqrt{3}x}dx = \frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3}e^{\sqrt{3}x} + c.$$

c) Жауабы: $\frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3}e^{\sqrt{3}x} + c.$

23.2-мысал: $\int (x^2+4)\ln x dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте x^2+4 екімүшелігі және $\ln x$ логарифмдік функциясының көбейтіндісі берілгендіктен екінші ережеге сүйеніп (23.1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int\left(x^2+4\right)\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u=\ln x,\quad dv=\left(x^2+4\right)dx\\ du=\dfrac{dx}{x},\quad v=\dfrac{x^3}{3}+4x\end{array}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-4x+c\,.$$

c) Жауабы: $\left(\dfrac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\dfrac{x^3}{9}-4x+c.$

23.3-мысал: $\int(6x-8)\sin 3x\,dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте $6x-8$ үшмүшелігі және $\sin 3x$ тригонометриялық функциясының көбейтіндісі берілгендіктен бірінші ережеге сүйеніп (23.1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int(6x-8)\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u=6x-8,\quad dv=\sin 3x\,dx\\ du=6dx,\qquad v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}(6x-8)\cos 3x-\frac{6}{-3}\int\cos 3x\,dx=-\frac{1}{3}(6x-8)\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x+c.$$

c) Жауабы: $-\dfrac{1}{3}(6x-8)\cos 3x+\dfrac{2}{3}\sin 3x+c.$

23.4-мысал: $\int\arccos x\,dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте жасырын түрде $x^0=1$ бірмүшелігі және $\arccos x$ кері тригонометриялық функциясының көбейтіндісі берілгендіктен екінші ережеге сүйеніп (23.1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{ll} \int u dv = uv - \int v du & \\ u = \arccos x, & dv = dx \\ du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{array} \right| = x\arccos x + \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x\arccos x - \dfrac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) = x\arccos x - \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$

c) Жауабы: $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$

23.2 Тест тапсырмалары

1. $\int xe^{4x}dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\dfrac{x}{4}e^{4x} + \dfrac{1}{14}e^{4x} + c$

B) $\dfrac{x}{4}e^{4x} - \dfrac{1}{4}e^{4x} + c$

C) $\dfrac{x}{4}e^{4x} - \dfrac{1}{16}e^{4x} + c$

D) $\dfrac{x}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{2}e^{4x} + c$

E) $\dfrac{x}{2}e^{4x} - \dfrac{1}{12}e^{4x} + c$

2. $\int x\cos 2x dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\dfrac{x}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + c$

B) $\dfrac{x}{2}\cos 2x + \sin 2x + c$

C) $\dfrac{x}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + c$

D) $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$

E) $\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$

3. $\int \ln x dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $x(\ln x-1)+c$

B) $x(\ln x+2)+c$

C) $x\ln x+x+c$

D) $x\ln x-2x+c$

E) $2x(\ln x-1)+c$

4. $\int x\sin 2x dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

B) $-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

C) $\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

D) $\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{6}\sin 2x+c$

E) $\frac{x}{4}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5. $\int xe^{3x}dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\frac{x}{3}e^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}+c$

B) $\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c$

C) $\frac{x}{2}e^{3x}-\frac{1}{4}e^{3x}+c$

D) $\frac{x}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{3x}+c$

E) $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{3x}+c$

6. $\int x\cos 3xdx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $x\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x+c$

B) $\frac{x^2}{2}\cos 3x+\sin 3x+c$

C) $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$

D) $x\cos 3x+\sin 3x+c$

E) $\frac{x}{3}\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+c$

7. $\int x^4\ln xdx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\frac{x^5}{5}\ln x-\frac{x^5}{25}+c$

B) $x^3\ln x+x+c$

C) $\frac{x^5}{5}\ln^2 x+c$

D) $4x^2+2\ln x+c$

E) $4x^3\ln x+x^3+c$

8. $\int x\sin 6xdx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $-\frac{x}{2}\cos 6x+\frac{1}{4}\sin 6x+c$

B) $-\frac{x}{6}\cos 6x+\frac{1}{36}\sin 6x+c$

C) $\frac{x^2}{2}\cos 12x+\sin 12x+c$

D) $x\cos 6x+\sin 6x+c$

E) $x\cos 12x+\frac{x}{12}\sin 12x+c$

9. $\int xe^{2x}dx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $xe^{2x}-e^{2x}+c$

B) $\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+c$

C) $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$

D) $\frac{x}{2}e^{2x}-e^{2x}+c$

E) $\frac{x}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+c$

10. $\int x\cos 4xdx$ - интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

A) $\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+c$

B) $-\frac{x}{2}\cos 4x+\frac{1}{4}\sin 4x+c$

C) $\frac{x^2}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\sin 4x+c$

D) $x\cos 12x+\sin 12x+c$

E) $x\sin 8x+c$

24 Тест «Анықталған интегралды Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәндерінің «Анықталған интегралды Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

24.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

Бұл тараудың есептерін шығару үшін 18-тарауда берілген негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Ньютон – Лейбниц формуласы.

24.1-теорема (Ньютон - Лейбниц теоремасы).

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y = F(x)$ функциясы оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (24.1)$$

теңдігі орынды болады.

24.1-мысал: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_{-1}^{3}(5x^4 + 2)dx.$

Шешімі:

a) Анықталған интегралды (14.8.1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ және $\int du = u + c$ формулаларын қолданамыз.

b) $$\int_{-1}^{1}(5x^4 + 2)dx = \left(5\frac{x^5}{5} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(x^5 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^5 + 2\right) - \left((-1)^5 + 2(-1)\right) = 6.$$

c) Жауабы: $6.$

24.2-мысал: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 e^{17x}dx.$

Шешімі:

a) Анықталған интегралды (24.1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int e^u du = e^u + c$ формуласын қолданамыз.

b) $$\int_0^1 e^{17x}dx = \int_0^1 e^{17x}d(17x) = \frac{1}{17}e^{17x}\Big|_0^1 = \frac{1}{17}(e^{17} - 1).$$

c) Жауабы: $\frac{1}{17}(e^{17} - 1).$

24.3-мысал: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx.$

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (24.1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \sin u\,du = -\cos u + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{3}.$

c) Жауабы: $\frac{1}{3}$.

24.4-мысал: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$.

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (24.1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(arctg\frac{1}{\sqrt{2}} - arctg0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

c) Жауабы: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

24.5-мысал: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 \frac{dx}{9x+5}$.

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (24.1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{9x+5} = \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{d(9x+5)}{9x+5} = \frac{1}{9}\ln(9x+5)\Big|_0^1 = \frac{1}{9}(\ln 14 - \ln 5) = \frac{1}{9}\ln\frac{14}{5}.$

c) Жауабы: $\frac{1}{9}\ln\frac{14}{5}$.

24.2 Тест тапсырмалары

1. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{10}} \sin 5x dx.$

A) 2
B) $\frac{1}{5}$
C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{2}$
E) 5

2. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{\pi}{6}$
C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{\pi}{2}$
E) 3

3. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 e^{4x} dx.$

A) $e^4 - 1$
B) $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$
C) $4(e^4 - 1)$
D) e^4
E) $1 - e^4$

4. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$

A) $\ln 3$
B) $2\ln 3$
C) $\frac{1}{2}\ln 3$
D) $-2\ln 3$
E) $\frac{1}{3}\ln 3$

5. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_1^e (4x^3+1)dx$.

A) $\frac{1}{2}(e^2-e)$
B) $e^2+\frac{1}{e}-2$
C) e^4+e-2
D) $\frac{1}{2}(e^4-1)$
E) $\frac{1}{2}(e^4-e)$

6. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+9}$.

A) $arctg\,3$
B) $3arctg\,1$
C) $\frac{1}{3}arctg\,3$
D) $\frac{1}{3}arctg\,1$
E) $3arctg\,3$

7. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

A) 2
B) 6
C) 3
D) 1

E) 0,5

8. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx.$

A) 2
B) $\frac{1}{5}$
C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{2}$
E) 5

9. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx.$

A) 4
B) $\frac{\pi}{8}$
C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{\pi}{2}$
E) $\frac{1}{4}$

10. Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 e^{5x} dx.$

A) $\frac{1}{5}(e^5 - 1)$
B) $e^5 - 1$
C) $5(e^5 - 1)$
D) e^5
E) $1 - e^5$

25 Тест «Анықталған интегралдың қолданбалары»

Бұл тараудағы есептер «Математика 1» пәнінің «Анықталған интегралдың қолданбалары» тақырыбына арналған. Берілген бес жауап нұсқасынан тек бір дұрыс жауапты таңдауға арналған есептер берілген.

25.1 Тест тапсырмаларын шығару үлгілері

25.1-мысал: $y=2x$ және $y=3-x^2$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі:

a) Жоғарыдан $y=f_1(x)$, төменнен $y=f_2(x)$ үзіліссіз функцияларының графиктерімен, бүйірінен $x=a$ және $x=b$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы

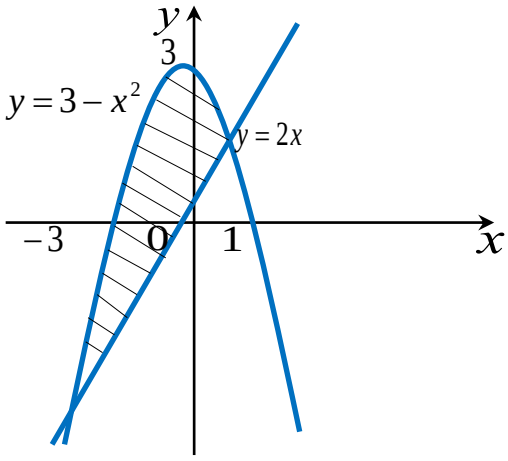
$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx \qquad (25.1)$$

формуласымен табылады.

b) Екі қисықтың қиылысу нүктесінің абциссасын тапсақ (25.1-сурет):

$$\begin{cases} y=2x \\ y=3-x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x=3-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-3.$$



25.1-сурет

$y=2x$ түзуі мен $y=3-x^2$ параболасының графиктерін тұрғызамыз.

$$S=\left|S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx\right|=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx=\left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=\left(3\cdot 1-\frac{1^3}{3}-1^2\right)-\left(3\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2\right)=\frac{32}{3}.$$

c) Жауабы: $S=\frac{32}{3}$.

25.2-мысал: OX өсімен

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

циклоидасының бір тармағымен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі:

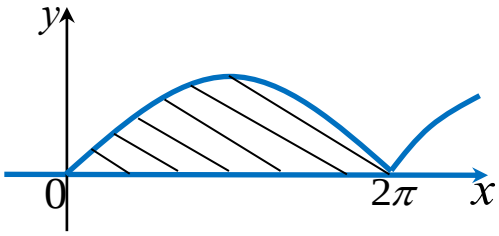
a) Егер қисық сызықты трапецияны шектейтін $y = f(x)$ қисығы $[\alpha, \beta]$ сегментінде теріс емес $y(t)$ функциясы мен бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$ теңдіктерін қанағаттандыратын $x(t)$ функциялары арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

параметрлік түрінде берілсе, онда бұл *қисық сызықты трапецияның ауданы*

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \qquad (25.2)$$

формуласымен есептелінеді.



25.2-сурет

а) Циклоидасының бір тармағының графигін тұрғызамыз (25.2-сурет).

$$S = \left| \begin{array}{l} S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \\ x = 2(t - \sin t) \\ dx = 2(1 - \cos t)dt \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)2(1 - \cos t)dt = 4\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt == 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right) =$$

$$= (4t - 8\sin t + 2t + \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi + 4\pi = 12\pi.$$

c) Жауабы: $S = 12\pi$.

25.3-мысал: $y=\sqrt{x^3}$ қисығының $A(0;0), B(1;1)$ нүктелерімен шектелген доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

a) $x\in[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y=f(x)$ функциясы графигінің $\overset{\smile}{AB}$ доғасының L ұзындығын табу үшін

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (25.3)$$

формуласын қолданамыз.

b) Ізделінді доғаның ұзындығы

$$L=\left|L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx\right|=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\frac{4}{9}\cdot\left.\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}-1}\right]=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\sqrt{13}-1\right).$$

c) Жауабы: $L=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\sqrt{13}-1\right).$

25.4-мысал: $\begin{cases}x=3cost-cos3t\\y=3\sin t-\sin 3t\\t\in[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$ доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

a) $\overset{\smile}{AB}$ доғасы $x(t), y(t)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

параметрлік түрде берілсе, онда $\overset{\smile}{AB}$ доғасы түзетілетін болады да оның ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (25.4)$$

формуласымен табылады.

b) Доғаның ұзындығы

$$L = \left| L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \right| = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\sin t + 3\sin 3t)^2 + (3\cos t - 3\cos 3t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(\sin^2 t - 2\sin t \sin 3t + \sin^2 3t + \sin^2 3t + \cos^2 t - 2\cos t \cos 3t + \cos^2 3t)}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ \sin^2 3t + \cos^2 3t = 1 \\ \cos 3t \cos t + \sin 3t \sin t = \cos(3t - t) = \cos 2t \end{array} \right| = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cdot 2(1 - \cos 2t)}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 36\sin^2 t\, dt = 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = -6\cos t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -6(\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos 0) = 6.$$

c) Жауабы: $L = 6.$

25.5-мысал: Архимед спиралінің бірінші орамының ұзындығын $\rho = \varphi$ табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $\overset{\smile}{AB}$ доғасы полярлық координаталарда үзіліссіз дифференциалданатын $\rho = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$ функциясы арқылы берілсе, онда ол түзетілетін қисық болады да, оның ұзындығы

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi. \qquad (25.5)$$

формуласымен табылады.

b) Бірінші айналымның ұштары φ полярлық бұрыштың $\varphi_1 = 0$ және $\varphi_2 = 2\pi$ мәндеріне сәйкес келеді. Сонда

$$L = \left| L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+\varphi^2} \\ du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} d\varphi \\ dv = d\varphi \\ v = \varphi \end{array} \right| =$$

$$= \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}}\, d\varphi = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - L + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - L + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

Демек,

$$L = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - L + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right),$$

$$L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

c) Жауабы: $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

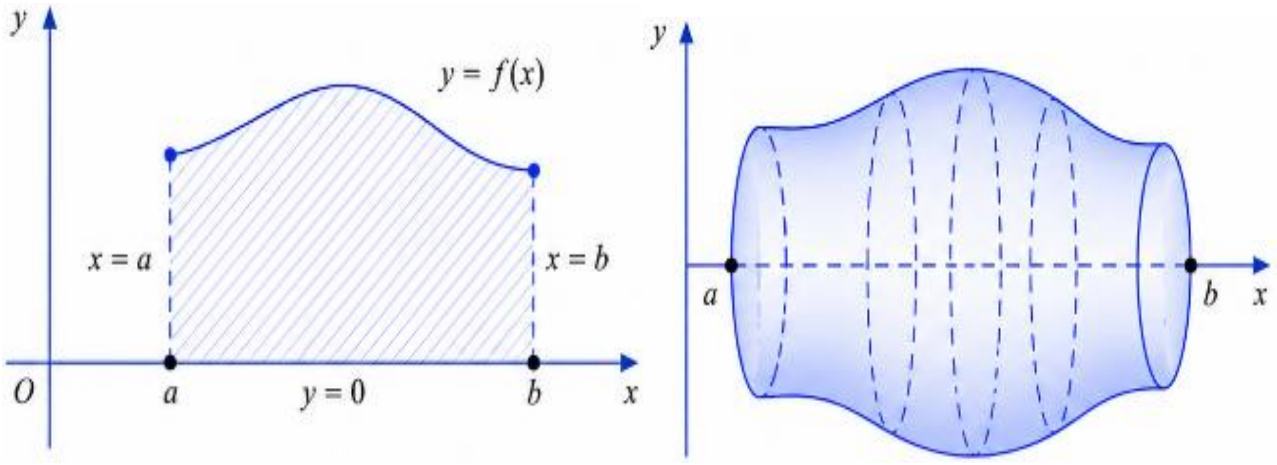
25.6-мысал: $y = x^2$ қисығымен, OX өсімен және x=1, x=2 түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияны (25.3 - сурет) Ox өсінен айналдырғанда пайда болған дененің (25.4 - сурет) көлемін табыңыз.

Шешімі:

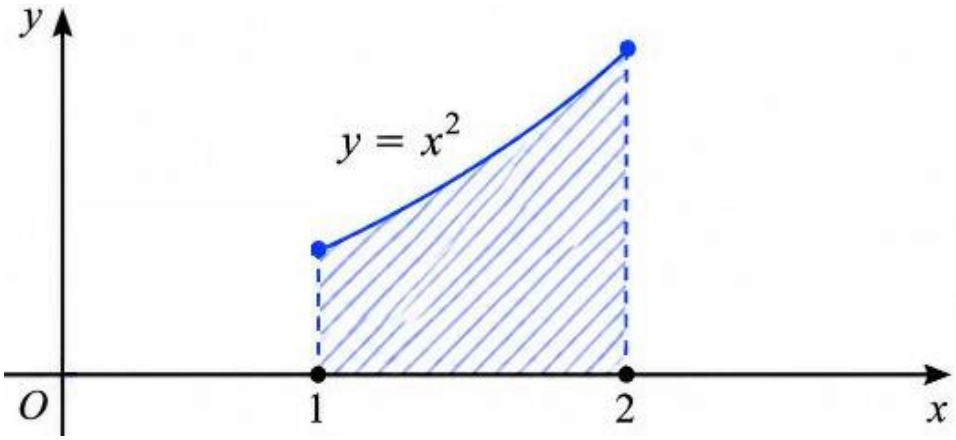
а) Жоғарғыдан $y = f(x)$ үзіліссіз функциясының графигімен, төменнен OX өсімен, бүйірлерінен $x = a,\ x = b\ (a < b)$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияны OX өсінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің V көлемі

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

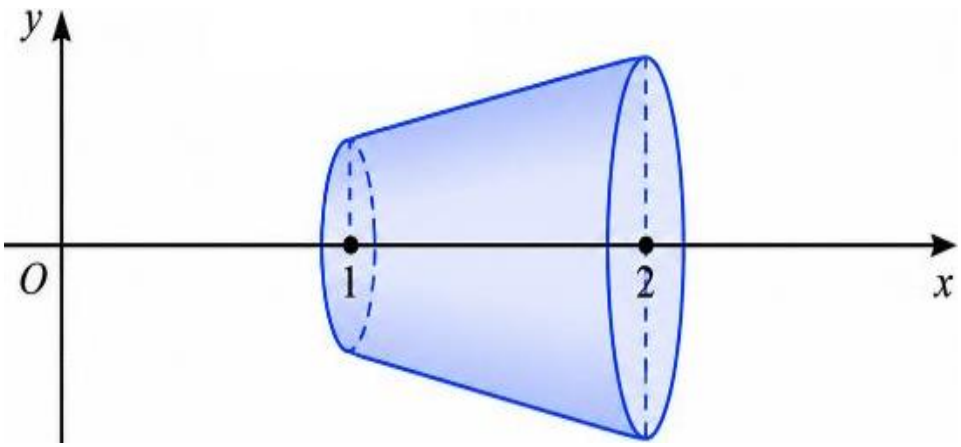
формуласымен табылады.



b) Есептің шарты бойынша $f(x)=x^2$, $a=1$, $b=2$.



25.3 - сурет



25.4 - сурет

Осы берілімдерді $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$ формуласына қойсақ

$$V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_1^2x^4dx=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_1^2=\frac{\pi}{5}\left(2^5-1^5\right)=\frac{31\pi}{5}$$

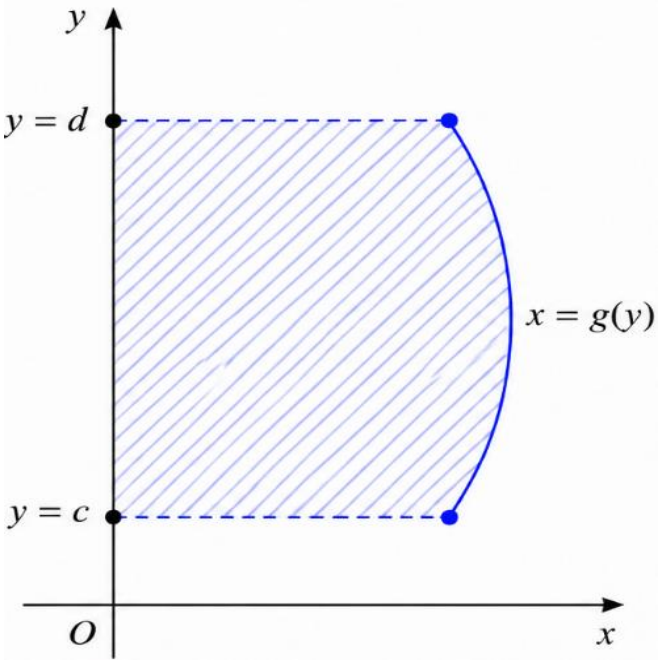
кубтық бірлік болатынын аламыз.

c) Жауабы: $V = \dfrac{31\pi}{5}$.

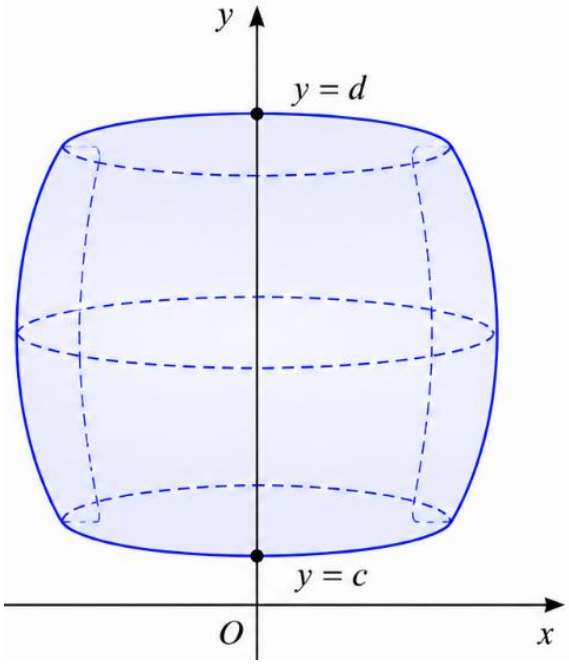
Ескерту. Егер дене $x = g(y)$ үзіліссіз функциясының графигімен, *Oy* өсімен (*x*=0 түзуімен және $y = c,\ y = d$ түзулерімен шектелген жазық фигураны (25.5 - сурет) OY *өсінен* айналдыру арқылы алынса (25.6 - сурет), онда айналу денесінің көлемі

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

формуласымен табылады.



25.5 – сурет



25.6 - сурет

25.2 Тест тапсырмалары

1. $y = x^3$ және $y = 27,\ x = 0$ сызықтарымен шектелген облыстың ауданын есептеу керек.

A) 8
B) 4
C) 1
D) 2
E) $\dfrac{243}{4}$

2. $y=\frac{3}{4}x-1$ қисығының $A(0;-1), B(4;2)$ нүктелерімен шектелген доғасының ұзындығын есептеңіз.

A) 0
B) 4
C) -4
D) 5
E) 1

3. $y=1-x^2$ және $y=0$ сызықтарымен шектелген фигураны OX өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

A) 8π
B) $\frac{16}{15}\pi$
C) $\frac{28}{15}\pi$
D) 12π
E) 9π

4. $y=x,\ y=2x,\ x=4$ түзулерімен шектелген облыстың ауданын есептеу керек.

A) 8
B) 2
C) 3
D) 4
E) 9

5. $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases},\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$ доғасының ұзындығын есептеңіз.

A) 0
B) -2π
C) 2π
D) π
E) 4π

6. $x=\sqrt{y+2}, x=0, y=2$ сызықтарымен шектелген фигураны OY өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

A) -2π
B) 4π
C) 5π
D) 8π
E) 3π

7. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ сызықтарымен шектелген облыстың ауданын есептеу керек.

A) 4
B) $\frac{213}{5}$
C) $\frac{3}{4}$
D) 8
E) $\frac{243}{4}$

8. $y=3-2x$ қисығының $A(-2;7)$, $B(0;3)$ нүктелерімен шектелген доғасының ұзындығын есептеңіз.

A) $-\sqrt{3}$
B) $\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{5}$
E) $-2\sqrt{5}$

9. $y=\sqrt{x^3}$, $y=0, x=2$ сызықтарымен шектелген фигураны OX өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

A) 4π
B) $\frac{56}{15}\pi$

C) $\frac{28}{15}\pi$

D) 12π

E) 9π

10. $y = x^2$ және $y = 4$ сызықтарымен шектелген облыстың ауданын есептеу керек.

A) $\frac{32}{3}$

B) 16

C) $\frac{16}{3}$

D) $\frac{64}{3}$

E) 15

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Ақжігітов Е.Ә. Математика 1: есептер жинағы / Е.Ә.Ақжігітов, М.Ш. Тілепиев. –Астана: С.Сейфуллин атындағы ҚазАТУ, 2015. –208 б.

2 Айдос Е.Ж. Жоғары математика: оқулық / Е.Ж. Айдос – Алматы: «Бастау», 2012. – 425 б.

3 Байарыстанов А.О. Жоғары математика теориясы және жаттығулар жинағы / А.О. Байарыстанов.– Алматы: «Нұр-Принт» ЖШС, 2018. – 371 б.

4 Бейсебай П.Б. Математикалық талдаудың қосымша тараулары: оқулық / П.Б. Бейсебай.– Астана: Фолиант, 2020. –416 б.

5 Бейсебай П.Б. Жоғары математика* / П.Б. Бейсебай. –Астана: С. Сейфуллин атындағы ҚАТУ, 2023. –296 б.

6 Бейсебай П.Б. Математика 1 пәнінен тест тапсырмаларын орындау үлгілері, әдістері және жинағы: оқу құралы / П.Б. Бейсебай. –Алматы, Alash Book, 2024. –456 б.

7 Дүйсек А.К. Жоғары математика: оқулық / А.К. Дүйсек, С.К. Қасымбеков. – Алматы: КБП, 2015. –409 б.

8 Саханов Н. Жоғары математика: оқулық / Н. Саханов, Б. Жаңбырбаев. – Алматы: Қайнар, 2016. –184 б.

9 Пискунов Н.С. Дифференциалдық және интегралдық есептеулер: оқулық / Н.С. Пискунов. –М.: Наука, 2015. – 266 б.

10 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. –М.: Наука, 2014. –315 б.

11 Тілепиев М.Ш. Математика 1: есептеу-графикалық жұмыстары / М.Ш. Тілепиев. –Астана: С. Сейфуллин атындағы ҚАТУ, 2016. – 124 б.

12 Махмеджанов М.Н. Жоғары математика: оқулық / М.Н. Махмеджанов. –Алматы: Бастау, 2017.–397 б.

13 Әубәкір С.Б. Жоғары математика: оқулық / С.Б. Әубәкір. – Алматы: Қайнар, 2012. –320 б.

Бейсебай Перизат Бейсебайкызы

МАТЕМАТИКА 1

Оқулық

Таралымы 40 дана
Қаріп түрі «Times New Roman»
Тапсырыс №15813
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ типографиясында басылды. 010008,
Астана қаласы, Қажымұқан, 13/1