ӘОЖ 517.5

ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ ҮШІН БІР ТЕҢСІЗДІК ТУРАЛЫ

Бекимбет Фариза
fariza2001.03@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің
4-курс студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Бұл жұмыста Фурье түрлендіруінің жалпыланған Лоренц кеңістігіндегі жоғарғы бағалауы параметрлік интерполяция әдісін қолдана отырып зерттелген.

Айталық

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx, \quad x \in \mathrm{R} -$$

$f \in L_1(\mathrm{R})$ функциясының Фурье түрлендіруі.

Функциялардың интегралдық қасиеттері мен олардың Фурье түрлендірулерін байланыстыратын теңсіздіктер жақсы белгілі.

Айталық $1 < p < 2,\ \ p' = \dfrac{p}{p-1},$ және $0 < q \le \infty,$ онда келесі теңсіздіктер орынды

$$\|f\|_{L_{p'}(R)} \le c_1\|f\|_{L_p(R)}, \tag{1}$$

$$\|\hat{f}\|_{L_{p',q}(R)} \le c_2\|f\|_{L_{p,q}(R)}, \tag{2}$$

мұндағы $L_{p,q}(R)$ - классикалық Лоренц кеңістігі. Бұл (1) және (2) теңсіздіктерді сәйкесінше Хаусдорф-Юнг және Харди-Литтлвуда-Стейн теңсіздіктері деп атайды [1].

Көптеген математиктердің бұл бағытқа деген қызығушылықтары болды. Харди-Литтлвуд теңсіздіктері бойынша көптеген әртүрлі нәтижелер алынды. 1937 жылы Марцинкевич пен Зигмунд [2] $\|\varphi_n(x)\|_\infty \le M_n,$ және $\{M_n\}$ - монотонды өспелі тізбек шарттары бойынша $L_q[0,1]$ кеңістігінде $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ қатар қосындысының нормасының бағалауын алды.

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігін анықтайық [3]-[4]. Айталық ω - $[0,+\infty)$ теріс емес функция болсын. $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын $[0,+\infty)$ аралығында анықталған барлық f өлшемді функциялар жиыны:

егер $0 < q < \infty,$ онда

$$\|f\|_{\Lambda_q}(\omega) := \left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

егер $q = \infty,$ онда

$$\|f\|_{\Lambda_\infty}(\omega) := \sup_{0\le t\le 1} f^*(t)\omega(t).$$

Егер $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$ болса, онда $\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігі классикалық L_{pq} кеңістігімен беттеседі.

Айталық $\mu = \{\mu(k)\}_{k\in N}$ - оң сандар тізбегі. $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігі – бұл төмендегідей шарттарды қанағаттандыратын барлық $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбектерінің жиыны

егер $0 < q < \infty,$ онда

$$\|f\|_{\lambda_q}(\mu) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^*\mu(k)\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

егер $q = \infty$ болса, онда

$$\|f\|_{\lambda_\infty}(\omega) := \sup_k a_k^*\mu(k) < \infty\,,$$

мұндағы $\left\{a_k^*\right\}_{k=1}^{\infty}$ - Ф жүйесі бойынша f функциясының $\left\{|\,a_k\,|\right\}_{k=1}^{\infty}$ Фурье коэффициенті тізбегінің өспейтін орын ауыстыруы.

Айталық f $-[0,+\infty)$ кесіндісінде анықталған өлшемді функция және μ - Лебег өлшемі. f^* функциясы f функциясының өспейтін орын ауыстыруы, ол келесі түрде анықталады [3]:

$$m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : |\,f(x)\,| > \sigma\},$$

$$f^*(t) := \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}.$$

Айталық $\delta > 0$ және $\omega(t)$ – $[0,+\infty)$ аралығында анықталған теріс емес функция болсын. A_δ, B_δ және C_δ функциялар кластарын келесі түрде анықтаймыз:

$$A_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\frac{1}{2}-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$
$$\omega(t)t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция},$$

$$B_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$
$$\omega(t)t^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)} - \text{кемімелі функция},$$

$$C_\delta = \{\omega(t):\ \omega(t)t^{-\delta} - \text{өспеліпелі функция}$$

$$\omega(t)t^{-1+\delta} - \text{кемімелі функция,}$$

Онда A, B және C кластары келесі түрдегідей анықталады:

$$A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta, \quad B = \bigcup_{\delta>0} B_\delta \quad C = \bigcup_{\delta>0} C_\delta.$$

$\Lambda_q(\omega)$ жалпыланған Лоренц кеңістігіндегі функциялардың Фурье түрлендірулерінің нормаларының жоғарғы және төменгі бағалауларын беретін теорема жұмысында дәлелденген.

Теорема A. [4] Айталық $0 < q \le \infty$ және $\omega(t)$ функциясы A класына жатсын. Онда келесі теңсіздік орынды

$$c_1 \|\overline{f}\|_{\Lambda_q(\omega,\mathrm{R})} \le \|f\|_{\Lambda_q(\mu,\mathrm{R})} \le c_2 \|f\|_{\Lambda_q(\omega,\mathrm{R})},$$

мұндағы $\overline{f}(t) = \frac{1}{t}\left|\int_0^t f(s)ds\right|$ және $\mu(t) = t\omega\left(\frac{1}{t}\right)$.

Егер $w(t) = t^{\frac{1}{p}}$, онда

$$c_3 \|\overline{f}\|_{L_{p,q}} \le \|\hat{f}\|_{L_{p'q}} \le c_4 \|f\|_{L_{p,q}}. \tag{3}$$

(3) теңсіздіктегі сол жақ теңсіздік торлы кеңістіктер әдістері қолданылатын [5] жұмысының нәтижелерінен шығады.

$\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормаланған жүйесін регулярлық жүйе деп атайды, егер B константасы табылып келесі шарттар орындалса

1) e-$[0,1]$-дегі кез келген кесінді және $k \in \mathrm{N}$ үшін келесі орынды

$$\left|\int_e \varphi_k(x)dx\right| \le B\,min(|e|, 1/k),$$

2) w-N-дағы кез келген кесінді және $t \in (0,1]$ шарттары үшін келесі орынды

$$\left(\sum_{k\in w}\varphi_k(\cdot)\right)^*(t) \le B\,min(|w|, 1/t),$$

мұндағы $\left(\sum_{k\in w}\varphi_k(\cdot)\right)^*(t)$ $-\sum_{k\in w}\varphi_k(x)$ функциясының өспейтін орынауыстыруы ([5]-ны қара). Барлық тригономеприялық жүйелер, Уолш жүйелері және шенелген жасаушалы мултипликативті жүйелер регулярлық жүйелер болып табылады. Бұл анықтама [5] жұмыста берілген.

[5] жұмысында Е.Д. Нурсултанов Фурье түрлендірулері үшін Хаусдорф-Юнг(Харди-Литтлвуд)-Стейн типті теңсіздіктерді регулярлық жүйелер бойынша дәлелдеген:

$$\left\| \overline{f} \right\|_{L_{p,q}} \le c_1 \left\| \hat{f} \right\|_{L_{p'q}}. \tag{3}$$

Бұлар жоғарыдағы қарастырылған тұжырымдарға қарағанда жалпы тұжырымдар болып табылады, өйткені регулярлық жүйе барлық тригономтериялық жүйелер, Уолш жүйелері және шенелген жасаушалы Прайс жүйелеріне қарағанда жалпы жүйе болып табылады.

Айталық $\overline{A}_{\theta,q}$ белгілі нақты интерполяциялық Лионс-Петре кеңістіктері

$$\phi(\varphi) = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\varphi(t)}{t^\theta} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

функционалдық норманың көмегімен анықталсын [3]. t^θ параметрін $\rho = \rho(t)$ жалпы параметрлік функцияға ауыстыра отырып $\overline{A}_{\rho,q}$ кеңістігін аламыз.

f функциясының жалпыланған Лоренц кеңістігіне жатуының қажетті шарты параметрлік интерполяция әдісін қолдана отырып алынды.

Теорема 1. Айталық $0 < q \le \infty$ және $\omega(t)$ функциясы C класынан болсын. Онда

$$\left\| \bar{\hat{f}} \right\|_{\Lambda_q(\omega,\mathrm{R})} \le c_1 \| f \|_{\Lambda_q(\mu,\mathrm{R})},$$

мұндағы $\bar{\hat{f}}(t) = \sup_{y \ge t} \frac{1}{2y} \left| \int_{-y}^{y} \hat{f}(s) ds \right|$ және $\mu(t) = t\omega\left(\frac{1}{t}\right),\ t, y > 0.$

Жалпыланған Лоренц кеңістіктеріндегі Фурье түрлендіруіне қатысты теңсіздіктер [4] жұмыста классикалық интерполяциялық әдістерді қолдана отырып зерттелген.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Stein E.M. Interpolation of linear.// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956 -Vol. 83. P. 482-492.
2. Marcinkiewicz J., Zygmund A. Some theorems on orthogonal systems.//Fund. Math. – 1937. – Vol. 28. – P. 309-335.
3. Bergh J., Löfström J., Interpolation spaces. An Introduction. – Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag. – Berlin-New York. – 1976.
4. Kopezhanova A.N., Some new inequalities for the Fourier transform for functions in generalized Lorentz spaces // Eurasian Mathematical Journal. –2017. – Vol. 8, No. 1. – P. 58–66.
5. Нурсултанов Е. Д., Сетевые пространства и преобразования Фурье. //Докл. Акад. наук. – 1998. – Т. 361, № 5. С. 597-599.